61908697 佐々木良輔

(3-1)

まず同次方程式の一般解を求める．$x(t) = e^{\lambda t}$ と置くと

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{x}(t) + 2m\gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) \\ 0 &= m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + m\omega_0^2 \\ \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\gamma \geq \omega$ のときは過減衰解, $\omega > \gamma$ のときは減衰振動解である. ここでは減衰振動解を考える. すなわち $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ を用いて

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma}\left(C_1\mathrm{e}^{i\omega_1 t} + C_2\mathrm{e}^{-i\omega_1 t}\right) \tag{2}$$

解は実数に限られるので $C_1^* = C_2$ である必要がある. 新たに定数を A, α と取り直せば

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma}\sin(\omega_1 t + \alpha) \tag{3}$$

となる. 次に非同次方程式の特解を $x(t) = C_1\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\mathrm{e}^{-i\omega t}$ と仮定すると

$$\begin{aligned} eE_0\sin\omega t &= m\ddot{x}(t) + 2m\gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) \\ eE_0\sin\omega t &= -C_1 m\omega^2\mathrm{e}^{i\omega t} + 2iC_1 m\gamma\omega\mathrm{e}^{i\omega t} + C_1 m\omega_0^2\mathrm{e}^{i\omega t} \\ &\quad - C_2 m\omega^2\mathrm{e}^{-i\omega t} - 2iC_2 m\gamma\omega\mathrm{e}^{-i\omega t} + C_2 m\omega_0^2\mathrm{e}^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{4}$$

これが恒等的に成り立つとき両辺の正弦, 余弦成分が一致するので

$$\left\{ \begin{aligned} eE_0 &= m\left(i(\omega_0^2 - \omega^2)(C_1 - C_2) - 2\gamma\omega(C_1 + C_2)\right) \\ 0 &= m\left(i(\omega_0^2 - \omega^2)(C_1 + C_2) - 2\gamma\omega(C_1 - C_2)\right) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

これを連立すると $a = \omega_0^2 - \omega^2, b = 2\gamma\omega$ を用いて

$$C_1 = C_2^* = \frac{eE_0}{m}\frac{1}{2ia - 2b} \tag{6}$$

したがって

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{eE_0}{m}\frac{a\sin\omega t + b\cos\omega t}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{eE_0}{m}\frac{\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $\tan\delta = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$ である．以上から一般解は以下のように成る．

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma}\sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{eE_0}{m}\frac{\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{8}$$

(3-2)

$$
\begin{aligned}
r_e &= \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2\ \mathrm{C}^2}{4\pi(8.854 \times 10^{-12})(9.109 \times 10^{-31})(2.998 \times 10^{8})^2\ \mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}\,kg\,m^2\,s^{-2}}} \\
&= 2.817 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(3-3)

Rayleigh 散乱を仮定すると散乱強度 i は

$$
\begin{aligned}
i &\propto \frac{1}{\lambda^4} \\
\therefore\ i\lambda^4 &\propto 1
\end{aligned} \tag{9}
$$

となるので $i\lambda^4$ は定数に成ると考えられる. 図に波長 λ と $i\lambda^4$ の関係を示す. この gnuplot の fit 機能を用いて得た回帰曲線は $y = 0.782x + 2.71$ となった. また相関係数は 0.202 となり, わずかに正の相関が見えるが相関関係はほぼ無いと考えられる. したがって $i\lambda^4$ はほぼ概ね定数であるといえ, 地上での観測されたスペクトルには Rayleigh 散乱の影響が大きいと考えられる.

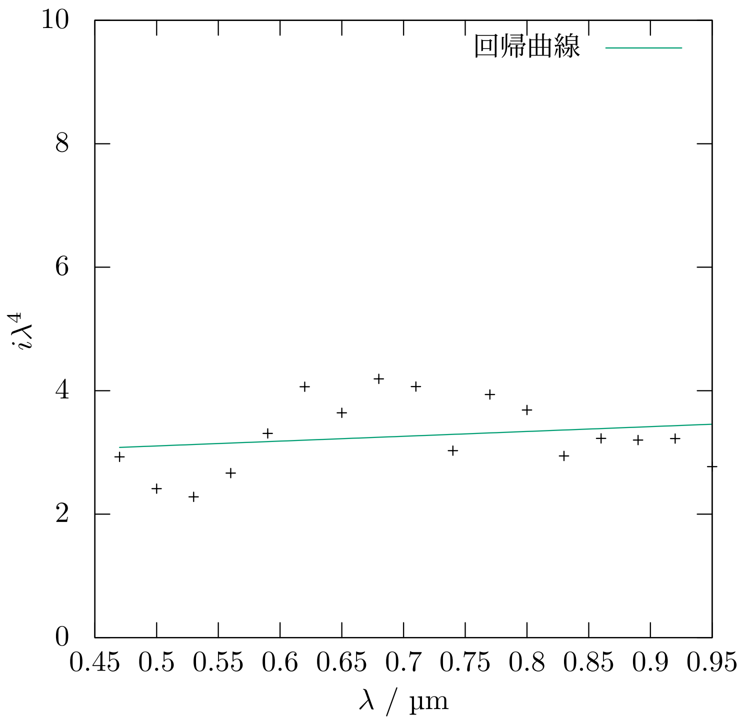

図 1 λ と $i\lambda^4$ の関係

(3-4)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{137}\right)^2\left(\frac{2.426\times10^{-12}}{2\pi}\right)^2 = 6.656\times10^{-29}\ \mathrm{m}^2 \tag{10}$$