61908697 佐々木良輔

3.16

(1)

分散関係より

$$k = \frac{\pi}{L}n = \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} \qquad \therefore n = \frac{L\omega_{\boldsymbol{k}}}{\pi c} \tag{1}$$

ここで状態が密に存在しているならば振動数が ω から $\omega + \mathrm{d}\omega$ に含まれる状態数 $D(\omega)\mathrm{d}\omega$ は $|\boldsymbol{n}| = L\omega/2\pi c$ で厚さ $\mathrm{d}\omega$ の球殻の第一象限の体積に等しく, また偏光として 2 自由度があることを考えると

$$\begin{aligned} D(\omega)\mathrm{d}\omega &= 4\pi\left(\frac{L\omega}{\pi c}\right)^2 \times \frac{1}{8} \times 2 \times \mathrm{d}n \\ &= \frac{L^3\omega^2}{\pi^2 c^3}\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{2}$$

$L^3 = V$ より

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \tag{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} Z_{\boldsymbol{k},\lambda} &= \sum_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}/k_B T} \\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}/k_B T}} \end{aligned} \tag{4}$$

1 行目から 2 行目の変形で無限等比級数の和の公式を用いた.

(3)

$$
\begin{aligned}
\langle n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{\nu} n_{\boldsymbol{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\beta E_\nu} \\
&= \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \frac{\sum_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}} n_{\boldsymbol{k},\lambda}\mathrm{e}^{-\beta n_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}{\sum_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}} \mathrm{e}^{-\beta n_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}} \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial(\hbar\omega_{\boldsymbol{k}})}\log Z
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となるので $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ と置くと

$$
\begin{aligned}
\langle n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle &= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_k}\log\prod_{\boldsymbol{k},\lambda}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\boldsymbol{k}}}} \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\boldsymbol{k}}}\sum_{\boldsymbol{k}}\log(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\boldsymbol{k}}}) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}/k_BT}-1}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

となる. また波数 $\boldsymbol{k}$, 偏光 λ の光のエネルギーの期待値は

$$
\begin{aligned}
\langle E_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle &= \langle n_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\rangle \\
&= \hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\langle n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{e}^{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}/k_BT}-1}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

(4)

振動数が ω から $\omega+\mathrm{d}\omega$ の振動子の状態数は (3) から

$$
D(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}\mathrm{d}\omega \tag{8}
$$

また振動数 ω の光のエネルギー期待値は (7) から

$$
\frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_BT}-1} \tag{9}
$$

である. 振動数が ω から $\omega+\mathrm{d}\omega$ の範囲でこの期待値が変化しないとすれば, 振動数が ω から $\omega+\mathrm{d}\omega$ の電磁波の単位体積あたりのエネルギー $\epsilon(\omega)\mathrm{d}\omega$ は

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\omega)\mathrm{d}\omega &= \frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}\mathrm{d}\omega\frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_BT}-1}\times\frac{1}{V} \\
&= \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_BT}-1}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(5)

$$\epsilon(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \mathrm{d}\omega =: \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} f(\omega) \tag{11}$$

とする. ここで以下を考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} f(\omega) = \frac{\omega^2 \left(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}(3 - \beta\hbar\omega) - 3\right)}{(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} = 0 \tag{12}$$

この $\omega \neq 0$ かつ $\omega < \infty$ なる解は

$$\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}(3 - \beta\hbar\omega) - 3 = 0 \tag{13}$$

を満たす. ここで $x = \beta\hbar\omega$ を用いて

$$g(x) := e^x(3 - x) - 3 \tag{14}$$

とする. ここで $g(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ である.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = e^x(2 - x) \tag{15}$$

これは $0 \leq x \leq 2$ で正, $x > 2$ で負である. したがって $g(x)$ の増減表は表 1 のようになる.

表 1　$g(x)$ の増減表

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	x_0	∞
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$-\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$	

このことから $g(x) = 0$ は x_0 にて唯一の解を持つ. すなわち $f(x)$ の極値の数は 1 つである. ここで $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であり, 更に $x \geq 0$ において $f(x) \geq 0$ である. したがって $x \geq 0$ において $f(x)$ の唯一の極値は最大値である. ここで

$$w\mathrm{e}^w = -\frac{3}{e^3} \tag{16}$$

なる w を用いると $x_0 = w + 3$ は

$$\begin{aligned} g(x_0) &= 3\mathrm{e}^{w+3} - (w+3)\mathrm{e}^{w+3} - 3 \\ &= 3\mathrm{e}^{w+3} - 3\mathrm{e}^{w+3} - \mathrm{e}^3 w\mathrm{e}^w - 3 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

となるので x_0 は $g(x)$ の解である. また $x = \beta\hbar\omega$ としていたので $f(\omega) = 0$ の解 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{x_0}{\hbar\beta} = \frac{x_0 k_B T}{\hbar} \tag{18}$$

となる. したがって $\epsilon(\omega)$ は ω_0 で最大値を取り, そのときの振動数は T に比例する.

(6)

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{V} &= \int_0^\infty \epsilon(\omega)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ここで $\omega = x/\beta\hbar$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{V} &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\hbar^4\beta^4}\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi^2 c^3\hbar^3\beta^4}\zeta(4)\Gamma(4)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ここで $\zeta(4) = \pi^4/90, \Gamma(4) = 6$ より以下を得る.

$$
\frac{E}{V} = \frac{\pi^2(k_B T)^4}{15c^3\hbar^3}
\tag{21}
$$

(7)

自由エネルギー F は

$$
F = -\frac{1}{\beta}\log Z = \frac{1}{\beta}\sum_{\boldsymbol{k}}\log(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}})
\tag{22}
$$

ここで $\boldsymbol{k}$ が十分に密だとして総和を積分に置換する. 状態密度 $D(\omega)$ を用いて

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \log(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})\frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \log(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})\omega^2\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$x = \beta\hbar\omega$ とすると

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{\beta^4\hbar^3}\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \log(1-\mathrm{e}^{-x})x^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\beta^4\hbar^3}\frac{V}{\pi^2 c^3}\left(\left[\frac{x^3}{3}\log(1-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x^3}{3}\frac{1}{e^x-1}\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{\pi^4}{45}\frac{1}{\beta^4\hbar^3}\frac{V}{\pi^2 c^3} \\
&= -\frac{\pi^2 V(k_B T)^4}{45c^3\hbar^3} = -\frac{1}{3}E
\end{aligned}
\tag{24}
$$

エントロピー S は

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \\
&= \frac{4\pi^2 V k_B^4}{45c^3\hbar^3}T^3
\end{aligned}
\tag{25}
$$

定積比熱 C_V は

$$
\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial E}{\partial T} \\
&= -3\frac{\partial F}{\partial T} \\
&= -\frac{4\pi^2 V k_B^4}{15c^3\hbar^3}T^3
\end{aligned}
\tag{26}
$$

圧力 P は

$$
\begin{aligned}
P &= -\frac{F\partial F}{\partial V} \\
&= -\frac{\pi^2(k_B T)^4}{45c^3\hbar^3} = \frac{1}{3}\frac{E}{V}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

となる.

(8)

光子の総数 N は

$$
N = \sum_{\boldsymbol{k}} \langle n_{\boldsymbol{k},\lambda} \rangle \tag{28}
$$

前問と同様に総和を積分に置換すると

$$
\begin{aligned}
N &= \int_0^\infty \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\beta^3\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{k_B^3 T^3}{\hbar^3}\Gamma(3)\zeta(3) \\
&= \frac{2Vk_B^3\zeta(3)}{\pi^2 c^3\hbar^3}T^3
\end{aligned}
\tag{29}
$$

となり, 光子の総数は T^3 に比例する.

(9)

$$
\begin{aligned}
\frac{N}{V} &= \frac{2k_B^3\zeta(3)}{\pi^2 c^3\hbar^3}T^3 \\
&= \frac{2\times(1.381\times10^{-23})^3\times1.202}{3.142^2\times(2.998\times10^8)^3\times(1.055\times10^{-34})^3}300^3 \\
&= 5.474\times10^{14}
\end{aligned}
\tag{30}
$$