物理学演習第 3

佐々木良輔

問題 (1)

振動数が ω となるような 3 次元調和ポテンシャル中に閉じ込められたひとつの粒子のエネルギー準位はゼロ点振動の成分を無視して

$$\epsilon_{n_x,n_y,n_z} = (n_x + n_y + n_z)\hbar\omega \tag{1}$$

で与えられる. ここで $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$ である.

ここでエネルギーが ϵ 以下の状態数 $\Omega(\epsilon)$ とエネルギー状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ.

解答

$n_x + n_y + n_z = n$ を満たすのは下図の点である. ここで状態が密に存在しているならエネルギー $\epsilon = n\hbar\omega$ 以下の状態数は底面積 $n^2/2$, 高さ n の三角錐の体積になるので状態数 $\Omega(\epsilon)$ は

$$\Omega(\epsilon) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\right)^3 \tag{2}$$

また状態密度 $D(\epsilon)$ は

$$D(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega^3} \tag{3}$$

である.

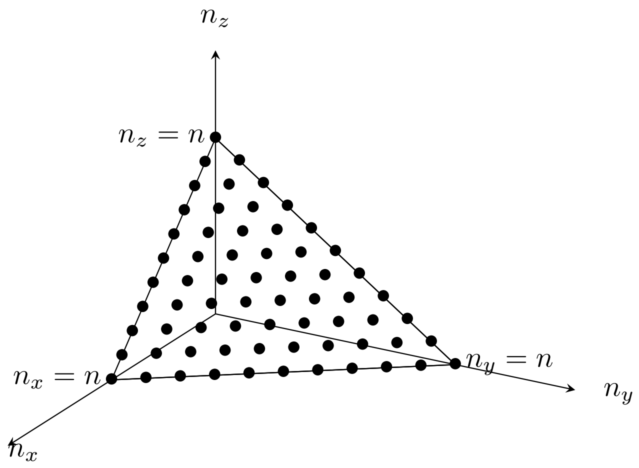

図 1　$n_x + n_y + n_z = n$ を満たす格子点

問題 (2)

N 個の互いに相互作用しないフェルミ粒子がこの調和ポテンシャルに閉じ込められているとしてフェルミエネルギー ϵ_F を求めよ．また絶対零度における内部エネルギーを求めよ．

解答

フェルミエネルギー ϵ_F 以下のエネルギー準位の数が N であることから

$$\begin{aligned} \Omega(\epsilon_F) &= N \\ \epsilon_F &= \hbar\omega\sqrt[3]{6N} \end{aligned} \tag{4}$$

である．また内部エネルギー E は

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) \mathrm{d}\epsilon \tag{5}$$

ここで $\epsilon < 0$ において $D(\epsilon) = 0$ なので

$$E = \frac{1}{2\hbar^3\omega^3} \int_0^{\infty} \epsilon^3 \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \mathrm{d}\epsilon \tag{6}$$

またフェルミ分布関数は絶対零度 $(\beta = \infty)$ において

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \begin{cases} 1 & (\epsilon < \mu) \\ 0 & (\mu < \epsilon) \end{cases} \tag{7}$$

となる．したがって

$$E = \frac{1}{2\hbar^3\omega^3} \int_0^{\mu} \epsilon^3 \mathrm{d}\epsilon = \frac{\mu^4}{8\hbar^3\omega^3} \tag{8}$$

絶対零度において $\mu = \epsilon_F$ より

$$E = \frac{\epsilon_F^4}{8\hbar^3\omega^3} \tag{9}$$

である．

問題 (3)

1 つのフェルミ粒子が持つ磁気モーメントを μ_B とする. フェルミ温度 $T_F = \epsilon_F / k_B$ を使ってこの系の低温でのゼロ磁場スピン磁化率を求めよ.

解答

問題 4.6 (4) の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
\chi(T) &= 2\mu_B^2 D(\epsilon_F)\left(1+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{\mathrm{d}^2\ln D(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon^2}+\cdots\right)\\
&= \frac{\mu_B^2\epsilon_F^2}{\hbar^3\omega^3}\left(1+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\left(\frac{1/\hbar^3\omega^3}{\epsilon_F^2/2\hbar^3\omega^3}-\frac{(\epsilon_F/\hbar^3\omega^3)}{(\epsilon_F^2/2\hbar^3\omega^3)^2}\right)+\cdots\right)\\
&= \frac{\mu_B^2\epsilon_F^2}{\hbar^3\omega^3}\left(1+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\left(-\frac{2}{\epsilon_F^2}\right)+\cdots\right)\\
&= \frac{\mu_B^2\epsilon_F^2}{\hbar^3\omega^3}\left(1+\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2+O\left(\left(\frac{T}{T_F}\right)^4\right)\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$