

# 1 原理

## 1.1 オペアンプについて

演算増幅器 (Operational Amplifier: オペアンプ) は図 1 のような素子であり回路図記号は図 2 のようになっている。オペアンプはトランジスタ或いは MOSFET と抵抗, キャパシタなどから成る集積回路で音響など様々なアナログ回路で用いられる。

オペアンプの最も根幹となる回路は差動増幅器である.[2] 図にトランジスタによる差動増幅器を示す。差動増幅回路はエミッタ接地増幅器を 2 つ, エミッタを共通にしたもので, 共通のエミッタは定電流回路に接続される。小信号においてコレクタ電流  $i_c$  とベース電流  $i_b$  は比例関係にあると考えられるので  $I$  はエミッタ接地電流増幅率を  $\beta$  として

$$i_{ci} = \beta i_{bi} \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

である。したがって  $I$  は

$$\begin{aligned} I &= i_{e1} + i_{e2} \\ &= (1 + \beta)(i_{b1} + i_{b2}) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。また  $I$  は定電流回路によって定まっており, 一方のトランジスタのエミッタ電流が増えるともう一方は減少する。ここで 2 つの入力に同相の信号を与えたとき左右のトランジスタは同等であるため出力電圧  $v_o = 0$  のままである。一方で逆相の信号を入力する, すなわち定常的な成分を  $i_{const}$ , 変化分を  $i_v$  として  $i_{b1} = i_{const} + i_v$ ,  $i_{b2} = i_{const} - i_v$  と表すと

$$v_o = R\beta(i_{const} + i_v) - R\beta(i_{const} - i_v) \quad (3)$$

$$= 2R\beta i_v \quad (4)$$

となる。以上から差動増幅器では同相の信号が入力されても出力は変化しないが, 2 つの入力信号の間に差があるときにはそれを増幅して出力することになる。

実際のオペアンプは差動増幅器より遥かに複雑であるが, 差動増幅という基本的な機能は継承している。オペアンプにおいては入力電圧  $V_+$ ,  $V_-$  と出力電圧  $V_o$  には増幅率を  $A$  として以下のような関係が一般に成り立つ。

$$V_o = A(V_+ - V_-) \quad (5)$$

また理想オペアンプには以下のような性質がある.

1. 入出力の線形性

オペアンプの入出力には電源電圧の範囲で線形関係が成り立つ.

2.  $A$  が非常に大きい

増幅率  $A$  は非常に大きい. これは差動増幅器の後段に更に増幅回路などを持つためである. ここで (5) 式で  $V_o$  が有限の値を持ち  $A$  が極めて大きいならば  $V_+ = V_-$  でなければならない. これを仮想接地と呼ぶ.

3. 入力インピーダンスが大きく, 出力インピーダンスが小さい

これにより, フィードバックを構成する際にオペアンプ内に流れ込む電流を 0 とみなせる.

4. 入力電圧が 0 なら出力も 0

5. 広い周波数帯域で利用可能

ただし実際のオペアンプでは増幅率やインピーダンスは有限の値を持つが, 多くの回路設計において以上の性質は非常に有用である.

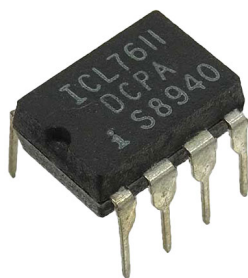


図 1 ILC7611(DIP8 パッケージ)[3]

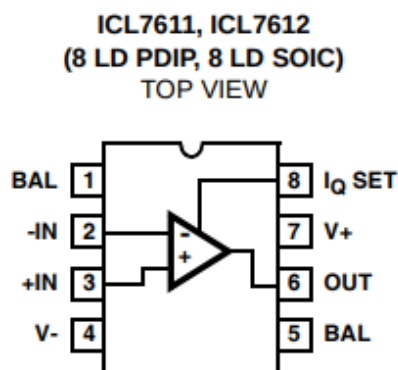


図 2 ILC7611 のピンアサイン [1]

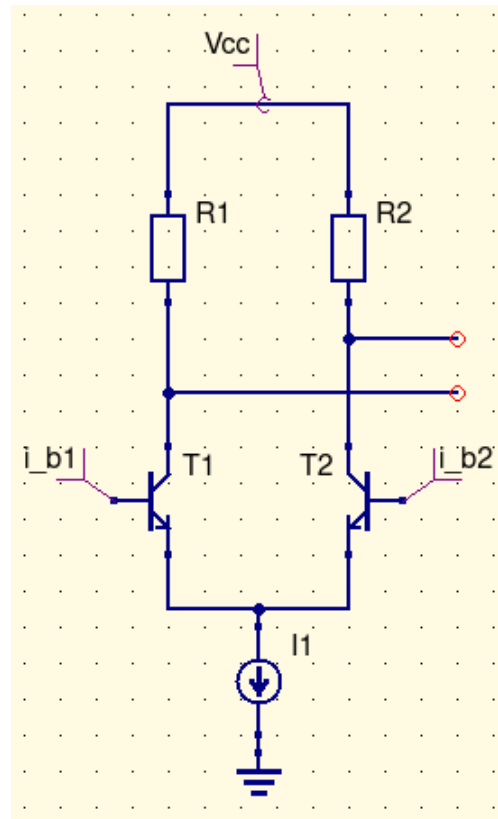


図 3 差動増幅器

## 2 実験方法

本実験ではフリーソフトの Qucs Spice を用いて回路シミュレーションを行った。シミュレーション環境を表 1 に示す。4 日目では Parameter Sweep 機能を使う必要性があったため Qucs Spice のバージョンを上げている。本実験では直流での解析に DC Simulation, 交流での解析に Transient Simulation を用いている。また各種抵抗の抵抗値やコンデンサの静電容量は配布された excel シートを用いて個体差を再現している。また各種グラフの作成には gnuplot を用いた。

表 1 シミュレーション環境

Qucs Spice バージョン (3 日目まで)	0.0.19
Qucs Spice バージョン (4 日目から)	0.0.22
OS	Ubuntu 20.04 LTS

### 3 実験 1-A : 反転増幅器

#### 3.1 原理

##### 3.1.1 回路方程式

図 4 に反転増幅器の回路図を示す. オペアンプの入力インピーダンスが  $R_2$  に比べて非常に高いことから入力電流  $i$  はすべて  $R_2$  に流れ込むとして良い. したがって Ohm の法則から

$$i = \frac{v_i - v_d}{R_1} = \frac{v_d - v_o}{R_2} \quad (6)$$

ここで (5) 式から

$$v_o = A(0 - v_d) \quad (7)$$

が成り立つためこれらを連立すると

$$v_o = -v_i \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{AR_1}} \quad (8)$$

$A$  が十分大きいとき

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i \quad (9)$$

となる. 以上から反転増幅器は入力信号に対して位相が反転し, 電圧が  $R_2/R_1$  倍の信号が出力されることがわかる.

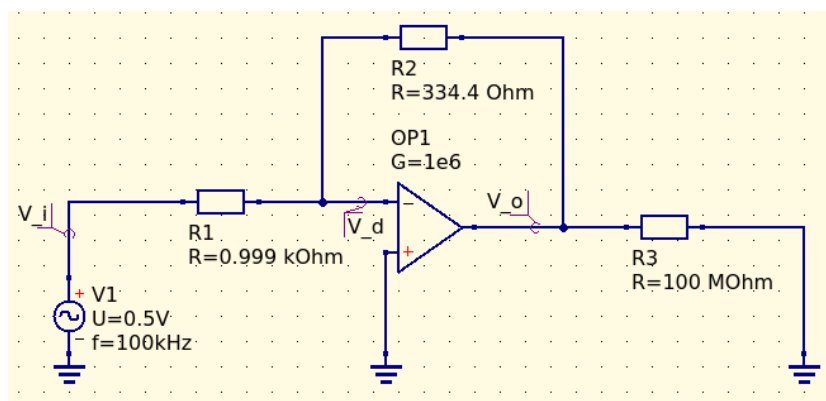


図 4 反転増幅器

##### 3.1.2 伝達関数

(9) から伝達関数を求めると以下ようになる.

$$\begin{aligned} V_o &= -\frac{R_2}{R_1} V_i \\ G(s) &= \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (10)$$

したがって Gain と位相は

$$G_V(\omega) = 20 \log \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (11)$$

$$\phi(\omega) = \pi \quad (12)$$

これに図 4 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 5 のようになる。

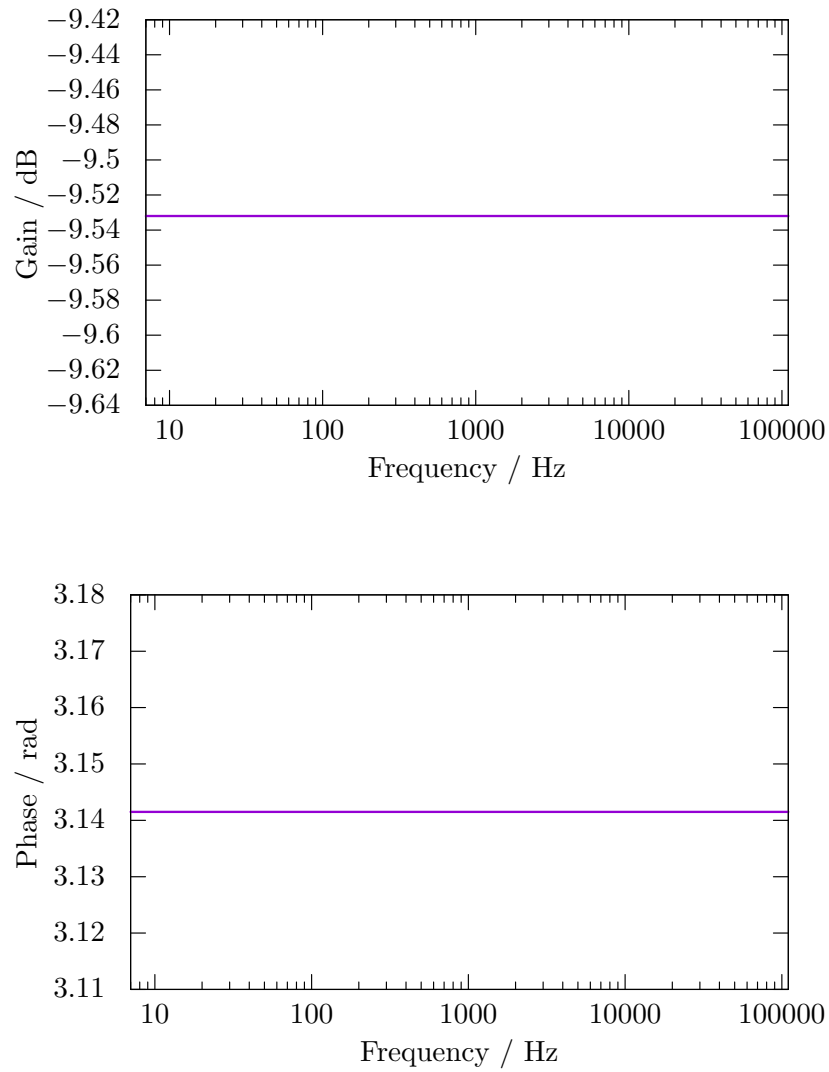


図 5 Bode 線図の理論値

## 3.2 方法

### 3.2.1 測定 1-A-01

図 4 の回路を Qucs Spice 上で作成し DC bias Simulation を行った. まず  $R_1 = 0.999 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 3.381 \text{ k}\Omega$  として電圧利得 3.3 倍の反転増幅器を構成した. この反転増幅器上で入力電圧  $V_i$  を  $-6 \text{ V}$  から  $6 \text{ V}$  まで  $0.5 \text{ V}$  刻みで変化させながら出力電圧  $V_o$  とオペアンプの入力電圧の差 ( $= V_d$ ) を記録した.

### 3.2.2 測定 1-A-02

上記の回路で  $R_2$  を  $334.4 \text{ }\Omega$  に変更し, 電圧利得 0.33 倍の反転増幅器を構成した. この回路においてし Transient Simulation を行った. この回路に  $V_{p-p} = 1 \text{ V}$ , 周波数が 10, 100, 1k, 10k, 100 kHz の正弦波を入力し利得及び位相差を記録, Bode 線図を作成した. また周波数が 1 kHz の時の波形を記録した.

## 3.3 結果

### 3.3.1 測定 1-A-01

図 6 に測定 1-A-01 の結果を示す. 左側の軸が  $V_o$ , 右側の軸が  $V_d$  である. 破線は  $V_o$  の直線部分を最小二乗 fit したものであり回帰曲線は以下の関数である.

$$y = -3.385x + 8.973 \times 10^{-31} \quad (13)$$

### 3.3.2 測定 1-A-02

図 7 に周波数 1 kHz の時の波形を示す. 青線が入力信号  $V_i$ , 赤線が出力信号  $V_o$  である. 縦軸の単位は V, 横軸の単位は s である. また図 8 に測定 1-A-02 で得た Bode 線図を示す.

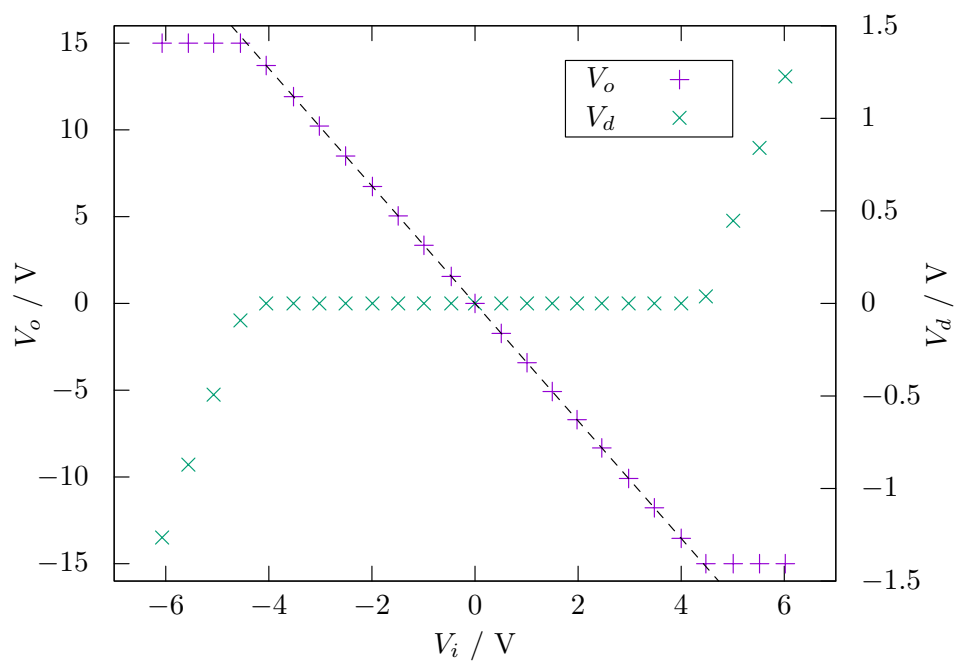


図 6  $V_i$  に対する  $V_o$ ,  $V_d$  の変化

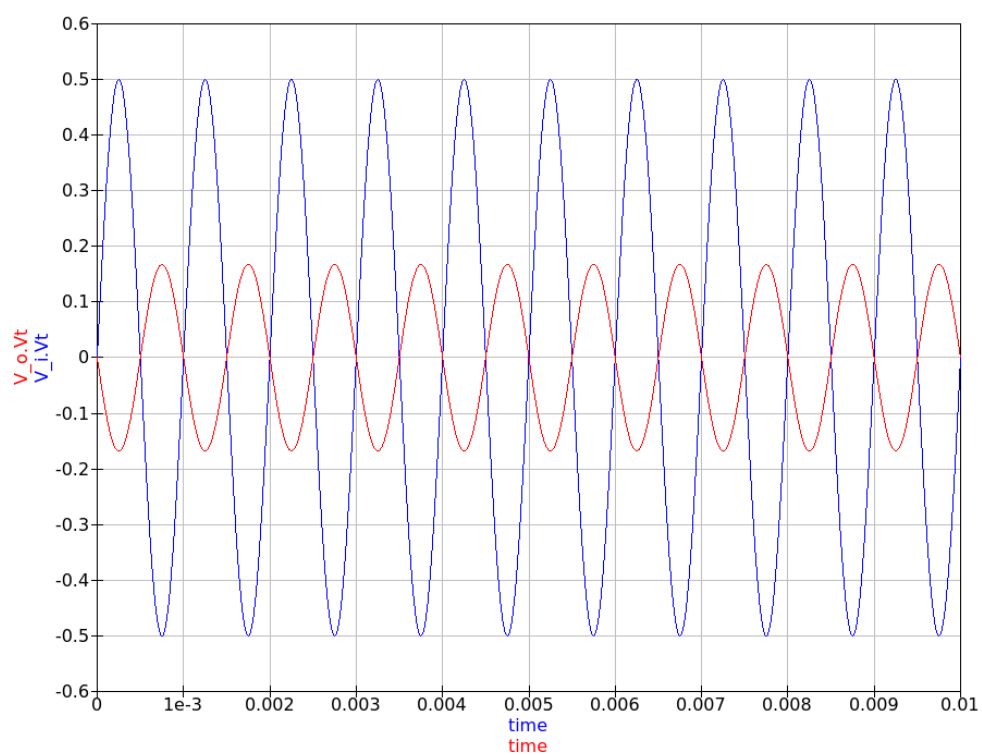


図 7 1 kHz の時の波形

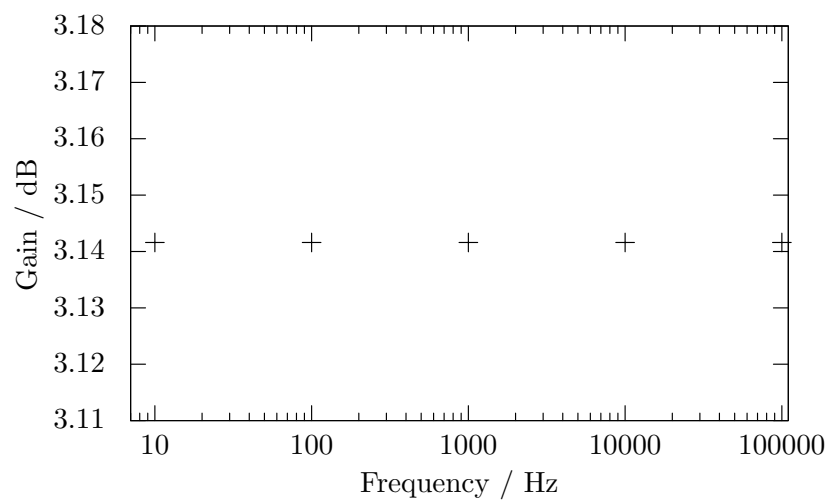
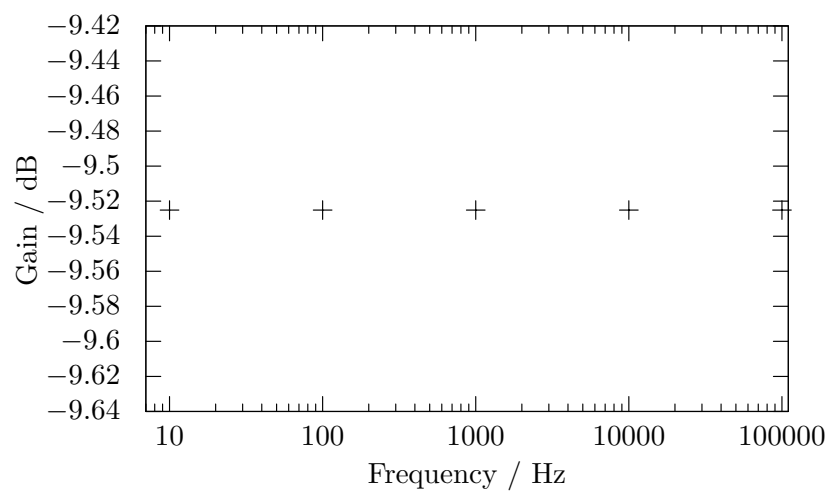


図 8 Bode 線図の実測値



## 3.4 考察

### 3.4.1 測定 1-A-01

$R_1 = 0.999 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 3.381 \text{ k}\Omega$  としたことから反転増幅器の増幅率は

$$\frac{R_2}{R_1} = 3.38 \quad (14)$$

となる. 一方で (13) からシミュレーションにより得られた増幅率は 3.39 である. 実験値と理論値の相対誤差は 0.3% であり, 十分に一致していると考えられる.

また図 6 からオペアンプの入力電圧  $\pm 15 \text{ V}$  を超える電圧は出力されていないことがわかる. さらに  $v_o$  が飽和した時  $v_d$  も変化していることがわかる. これについて (6) から

$$\begin{aligned} \frac{v_i - v_d}{R_1} &= \frac{v_d - v_o}{R_2} \\ v_d &= \frac{R_2 v_i}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 v_o}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで  $v_o$  が飽和した時  $v_o = \pm 15 \text{ V}$  となる. このことから

$$v_{d\pm} = 0.772v_i \pm 3.42 \quad (16)$$

を得る. 一方で図 6 の  $V_d$  の直線部を最小二乗 fit して回帰曲線を求めると図 9 のようになり, 回帰曲線は以下の関数になった.

$$y = \begin{cases} 0.7718x + 3.420 \\ 0.7719x - 3.419 \end{cases} \quad (17)$$

それぞれ有効数字 3 桁の範囲で (16) と完全に一致しており, 上での立式は正しいと考えられる.

### 3.4.2 測定 1-A-02

図 7 を見るとたしかに  $V_{p-p}$  が 0.33 倍程度で, 位相が反転した波形が出力されていることがわかる.

図 5 と図 8 を見比べるとどちらも周波数依存性の無いグラフでありその値もほぼ等しい. したがって (10) で得た伝達関数は正しいとわかる.

位相がどちらも  $\pi$  程度で一定であるのに対し, Gain は 0.3% 程度の差がある. これは gnuplot が十分な桁数を持ってグラフを描画しているのに対し, Qucs Spice が小数点以下 3 桁を切り捨てて出力したことが原因だと考えられる.

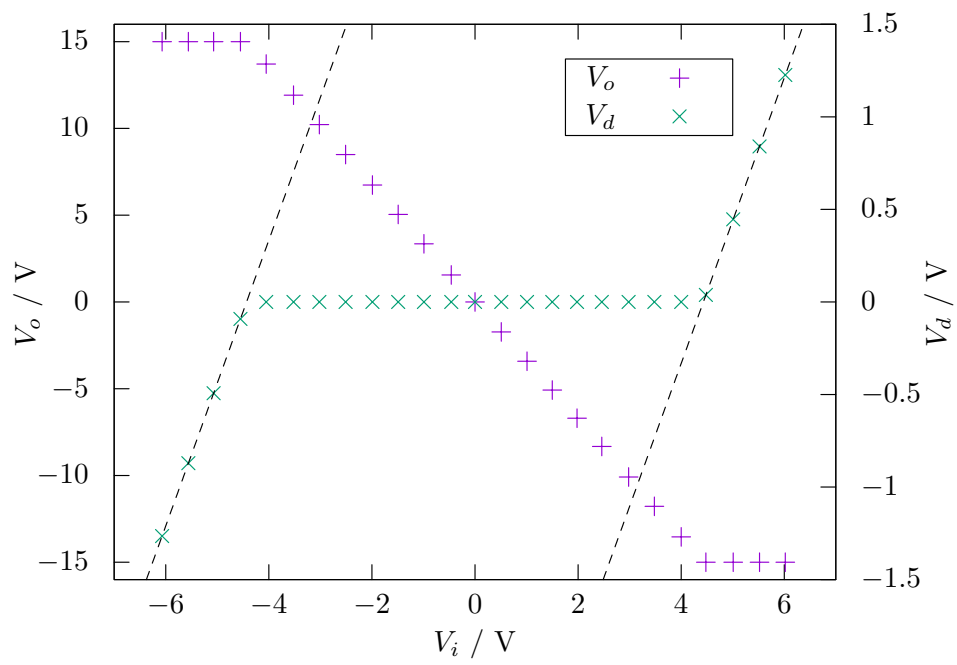


図 9  $V_d$  の回帰曲線

## 4 実験 1-B：非反転増幅器

### 4.1 原理

#### 4.1.1 回路方程式

図 10 に非反転増幅器の回路図を示す．仮想短絡を考えるとオペアンプの  $-$  端子の電圧  $v_-$  は入力電圧  $v_i$  と等しいと考えられる．さらに  $v_-$  は  $v_o$  を  $R_1$  と  $R_2$  で分圧した電圧になるので

$$\begin{aligned} v_i = v_- &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \\ v_o &= \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_i \end{aligned} \quad (18)$$

となる．以上から非反転増幅器は入力信号に対して位相がそのまま，電圧が  $1 + R_2/R_1$  倍の信号が出力されることがわかる．

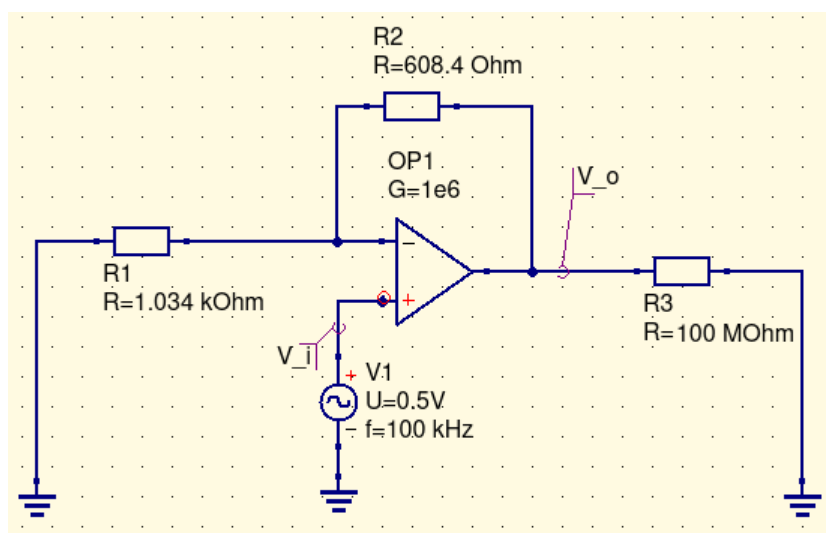


図 10 非反転増幅器

#### 4.1.2 伝達関数

(18) から伝達関数を求めると以下ようになる．

$$\begin{aligned} V_o &= \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_i \\ G(s) &= \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (19)$$

したがって (11) と同様に図 10 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 11 のようになる．

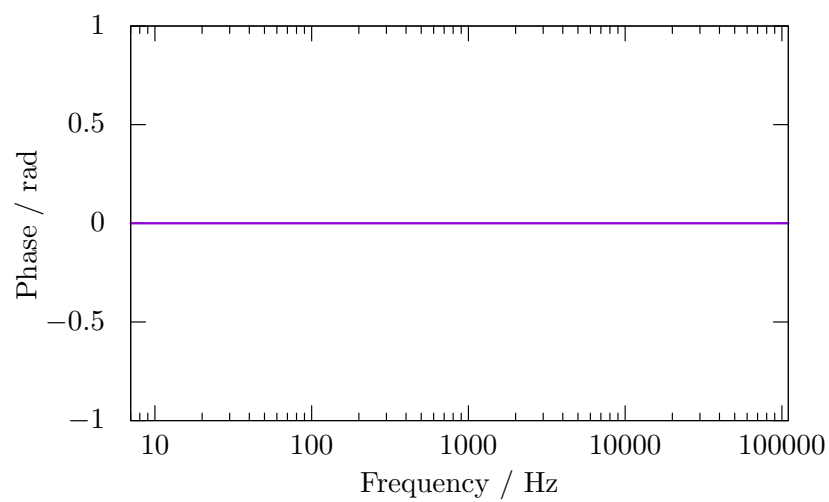
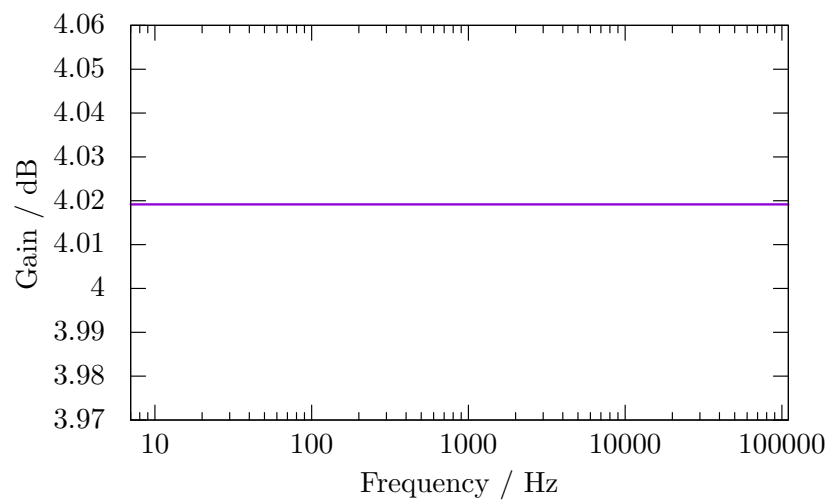


図 11 Bode 線図の理論値

## 4.2 方法

### 4.2.1 測定 1-B-01

図 10 の回路を Qucs Spice 上で作成し DC bias Simulation を行った. まず  $R_1 = 1.034 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5.025 \text{ k}\Omega$  として電圧利得 6 倍の非反転増幅器を構成した. この非反転増幅器上で入力電圧  $V_i$  を  $-3 \text{ V}$  から  $3 \text{ V}$  まで  $0.5 \text{ V}$  刻みで変化させながら出力電圧  $V_o$  を記録した.

### 4.2.2 測定 1-B-02

上記の回路で  $R_2$  を  $608.4 \text{ }\Omega$  に変更し, 電圧利得 1.6 倍の非反転増幅器を構成した. この回路において Transient Simulation を行った. この回路に  $V_{p-p} = 1 \text{ V}$ , 周波数が 10, 100, 1k, 10k, 100 kHz の正弦波を入力し利得及び位相差を記録, Bode 線図を作成した. また周波数が 1 kHz の時の波形を記録した.

## 4.3 結果

### 4.3.1 測定 1-B-01

図 12 に測定 1-B-01 の結果を示す. 破線は  $V_o$  の直線部分を最小二乗 fit したものであり回帰曲線は以下の関数である.

$$y = 5.843x + 9.202 \times 10^{-31} \quad (20)$$

### 4.3.2 測定 1-B-02

図 13 に周波数 1 kHz の時の波形を示す. 青線が入力信号  $V_i$ , 赤線が出力信号  $V_o$  である. 縦軸の単位は V, 横軸の単位は s である. また図に測定 1-B-02 で得た Bode 線図を示す.

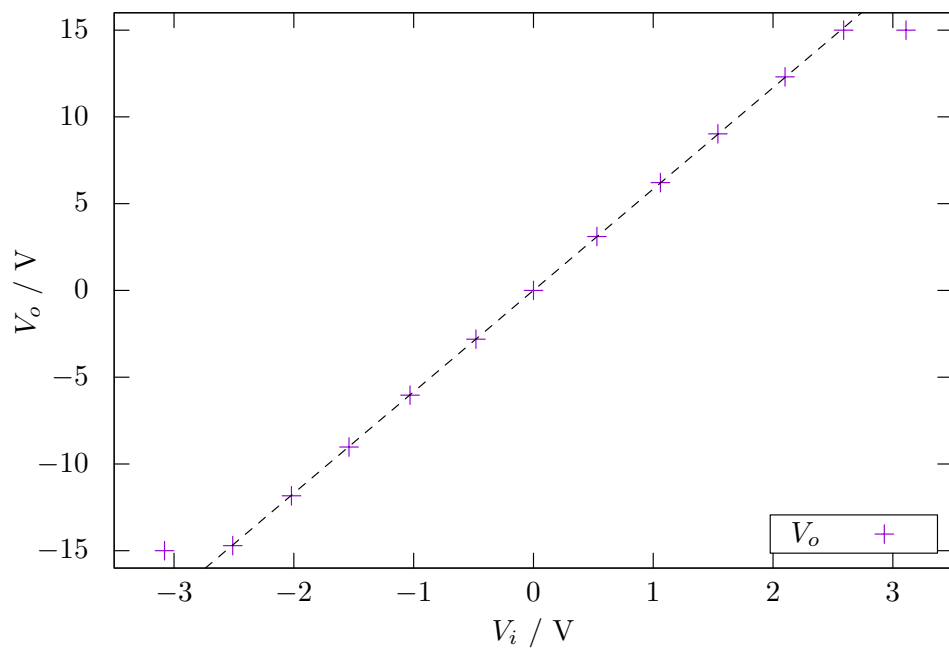


図 12  $V_i$  に対する  $V_o$  の変化

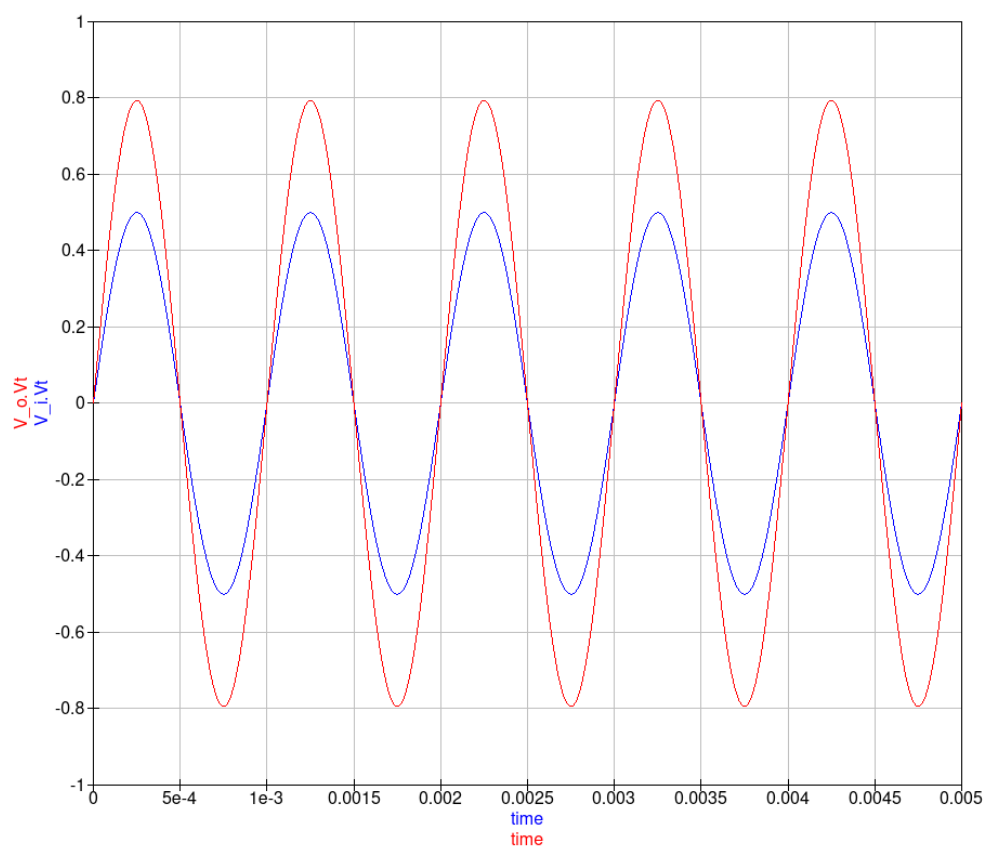


図 13 1 kHz の時の波形

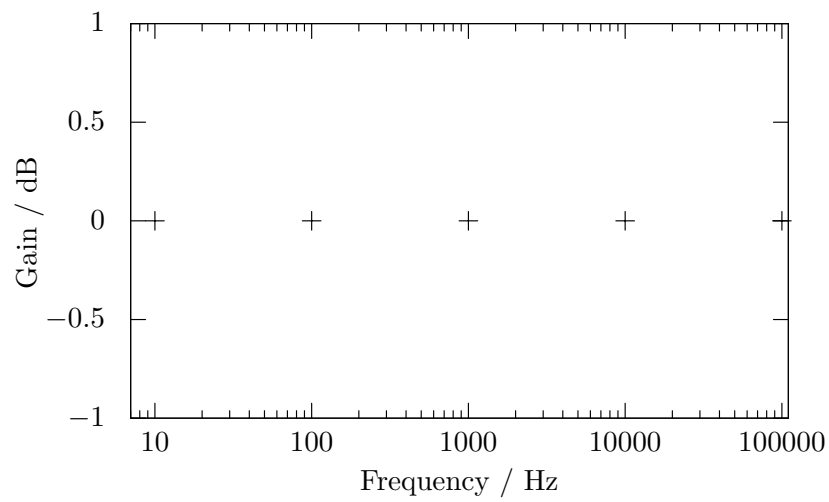
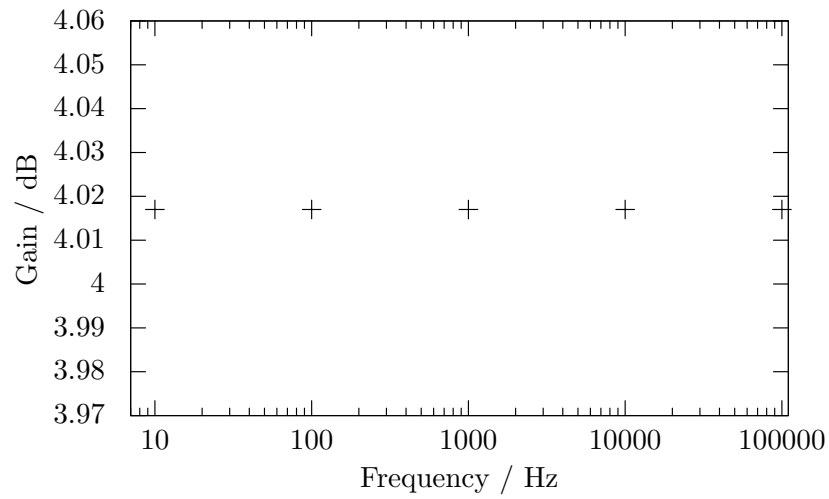


図 14 Bode 線図の実測値

## 4.4 考察

### 4.4.1 測定 1-B-01

$R_1 = 1.034 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5.025 \text{ k}\Omega$  としたことから反転増幅器の増幅率は

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = 5.85 \quad (21)$$

となる. 一方で (20) からシミュレーションにより得られた増幅率は 5.84 である. 実験値と理論値の相対誤差は 0.2% であり, 十分に一致していると考えられる.

また図 12 から反転増幅器と同様にオペアンプの入力電圧  $\pm 15 \text{ V}$  を超える電圧は出力されていないことがわかる.

### 4.4.2 測定 1-B-02

図 13 を見るとたしかに  $V_{p-p}$  が 1.6 倍程度で, 同位相の波形が出力されていることがわかる.

図 11 と図 14 を見比べるとどちらも周波数依存性の無いグラフでありその値もほぼ等しい. したがって (10) で得た伝達関数は正しいとわかる.



## 5 実験 1-C : 加算, 減算回路

### 5.1 原理

#### 5.1.1 加算回路の回路方程式

図 15 に加算回路の回路図を示す.  $R_1, R_2$  を流れる電流をそれぞれ  $i_1, i_2$  とすると

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \quad (22)$$

仮想短絡によりオペアンプの  $-$  端子の電位は 0 である. またオペアンプに流れ込む電流は 0 とみなせるので  $R_3$  を流れる電流は  $I = i_1 + i_2$  となる. したがって

$$v_o = - \left( \frac{R_3}{R_1} v_1 + \frac{R_3}{R_2} v_2 \right) \quad (23)$$

となり, たしかに 2 つの入力それぞれを定数倍したものが加算されていることがわかる.

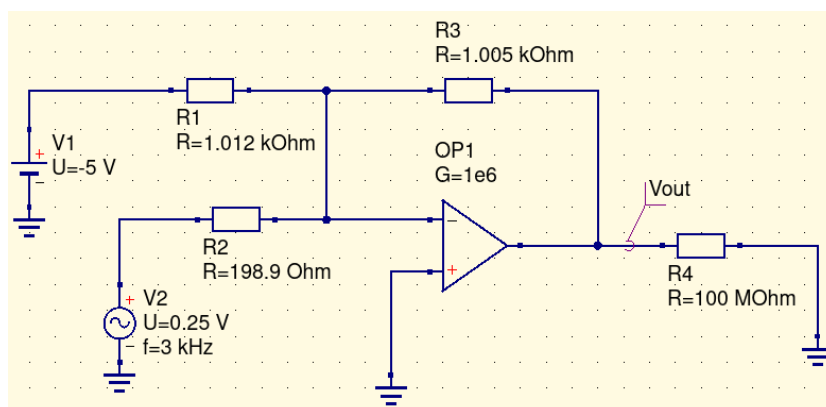


図 15 加算回路

#### 5.1.2 減算回路の回路方程式

図に減算回路の回路図を示す. オペアンプの  $+$  端子の電圧  $v_+$  は  $V_2$  を  $R_2$  と  $R_4$  で分圧した電圧に等しいので

$$v_+ = \frac{R_4}{R_2 + R_4} v_2 \quad (24)$$

同様に  $v_-$  は

$$v_- = \frac{R_1 v_o + R_3 v_1}{R_1 + R_3} \quad (25)$$

仮想短絡から  $v_+ = v_-$  なので

$$\begin{aligned}\frac{R_4}{R_2 + R_4}v_2 &= \frac{R_1v_o + R_3v_1}{R_1 + R_3} \\ v_o &= \frac{(R_1 + R_3)R_4}{(R_2 + R_4)R_1}v_2 - \frac{R_3}{R_1}v_1\end{aligned}\quad (26)$$

ここで  $R_1 = R_2 = R$ ,  $R_3 = R_4 = R_f$  とすると

$$v_o = \frac{R_f}{R}(v_2 - v_1)\quad (27)$$

となり, たしかに 2 つの入力それぞれを定数倍したものが減算されていることがわかる.

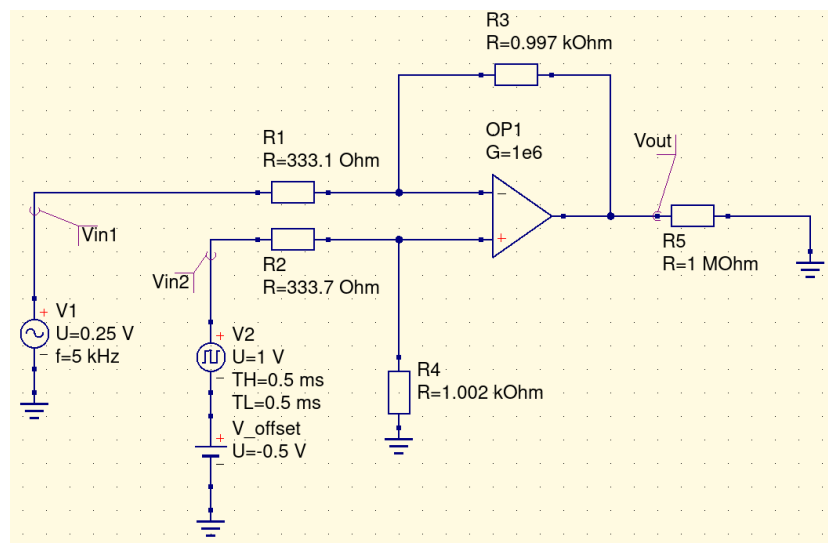


図 16 減算回路

## 5.2 方法

### 5.2.1 加算回路

図 15 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行った.  $R_1 = 1.012 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 198.9 \text{ }\Omega$ ,  $R_3 = 1.005 \text{ k}\Omega$  である. また  $v_1$  は DC-5 V,  $v_2$  は  $V_{p-p} = 0.5 \text{ V}$ ,  $f = 3 \text{ kHz}$  の正弦波である. (23) から

$$v_o = \frac{1.005 \times 10^3}{1.012 \times 10^3} 5 - \frac{1.005 \times 10^3}{198.9} 0.5 \sin \omega t \quad (28)$$

このことから出力波形は 5 V 中心で  $V_{p-p} = 2.5 \text{ V}$ ,  $f = 3 \text{ kHz}$  で入力信号と逆相の正弦波になる.

### 5.2.2 減算回路

図 16 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行った.  $R_1 = 333.1 \text{ }\Omega$ ,  $R_2 = 333.7 \text{ }\Omega$ ,  $R_3 = 0.997 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 1.002 \text{ k}\Omega$  である. また  $v_1$  は  $V_{p-p} = 0.5 \text{ V}$ ,  $f = 5 \text{ kHz}$  の正弦波,  $v_2$  は  $V_{p-p} = 1 \text{ V}$ ,  $f = 1 \text{ kHz}$  の矩形波である. (26) から

$$v_o = 2.995v_2 - 2.993v_1 \quad (29)$$

このことから出力波形は  $V_{p-p} = 3 \text{ V}$ ,  $f = 1 \text{ kHz}$  の矩形波から  $V_{p-p} = 1.5 \text{ V}$ ,  $f = 5 \text{ kHz}$  の正弦波を引いたものになる.

## 5.3 結果

### 5.3.1 加算回路

図 17 に出力波形を示す. 青線は入力した正弦波, 赤線は出力波形である.

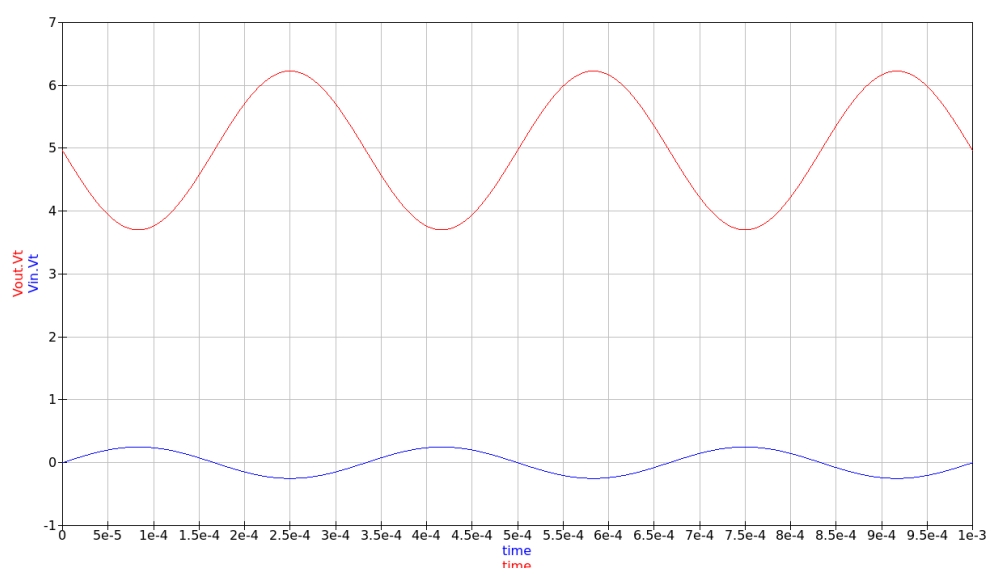


図 17 加算回路の出力波形

### 5.3.2 減算回路

図 18 に出力波形を示す. 青線は  $v_1$ , 赤線は  $v_2$ , ピンクの線は  $v_o$  である.

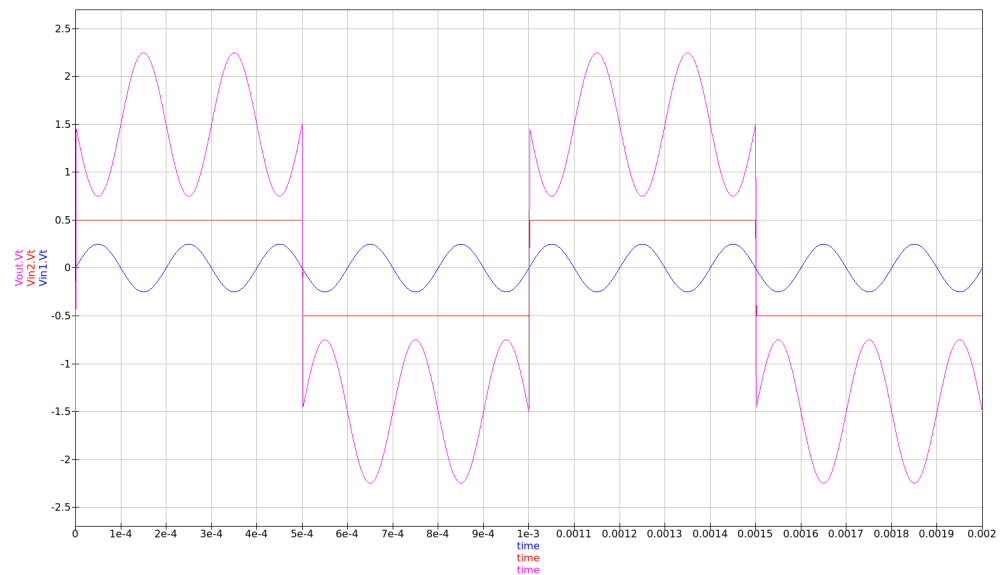


図 18 減算回路の出力波形

## 5.4 考察

### 5.4.1 加算回路

図 17 から出力波形は 5 V 中心で  $V_{p-p} = 2.5$  V となっていることがわかる。また入力波形に対して出力波形は位相が逆転していることがわかる。したがって (23) での立式は正しいとわかる。

### 5.4.2 減算回路

図 18 から出力波形は  $V_{p-p} = 3$  V の方形波と  $V_{p-p} = 1.5$  V の正弦波を合わせた形になっており、なおかつ正弦波の位相が逆転していることから正弦波は減算されているとわかる。したがって (26) での立式は正しいとわかる。

## 6 実験 2-A-01：完全積分回路

### 6.1 原理

#### 6.1.1 回路方程式

図 19 に完全積分回路の回路図を示す.  $R_1$  を流れる電流は全てコンデンサに流れるのでコンデンサ両端の電圧  $v_C$  は

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_C(0) \\ &= \frac{1}{CR_1} \int_0^t v_i dt + v_C(0) \end{aligned} \quad (30)$$

ここでコンデンサの初期電荷による項を  $v_C(0)$  としている. 仮想短絡によりオペアンプの  $-$  端子の電位は 0 なので出力電圧  $v_o$  は時刻  $t = 0$  でコンデンサに電荷が無いとすれば

$$v_o = -v_C = -\frac{1}{CR_1} \int_0^t v_i dt \quad (31)$$

となり確かに入力電圧の積分値が出力となっている.

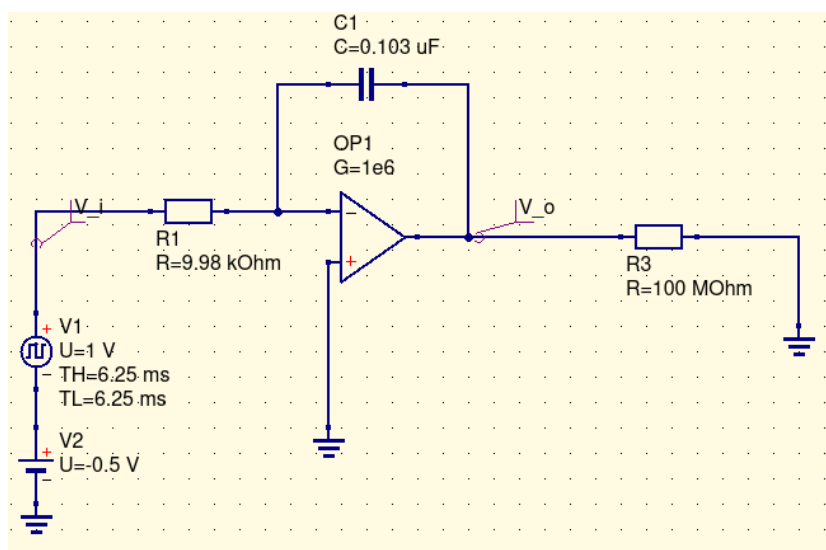


図 19 積分回路

### 6.1.2 伝達関数

ラプラス変換の積分則は以下のようになる.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{1}{s}F(s) \quad (32)$$

ここで初期値は 0 としている. したがって (31) をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} V_o &= -\frac{1}{CR_1s}V_i(s) \\ G(s) &= -\frac{1}{CR_1s} \end{aligned} \quad (33)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log \left| -\frac{1}{CR_1j\omega} \right| = -20 \log(CR_1\omega) \\ \phi(\omega) &= \angle \left( -\frac{1}{CR_1j\omega} \right) = \angle(j) = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (34)$$

以上から図 19 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 20 のようになる.

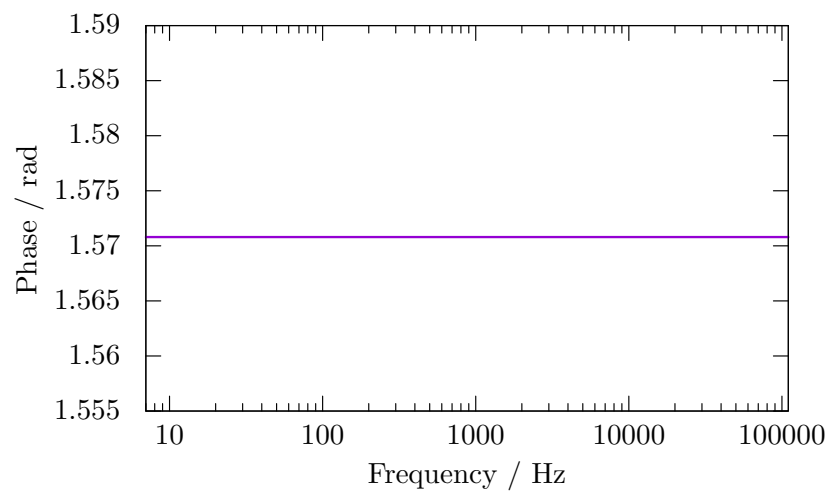
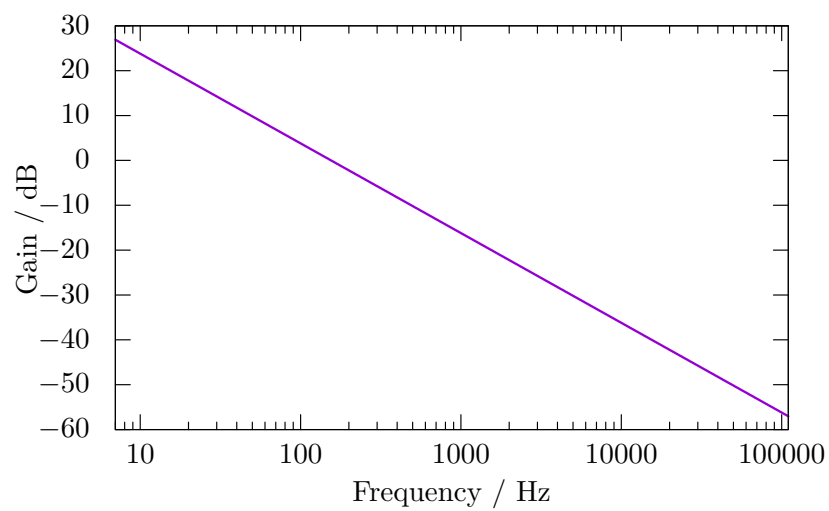


図 20 Bode 線図の理論値



## 6.2 方法

### 6.2.1 測定 2-A-01-(a)

図 19 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行った.  $R_1 = 9.98 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.103 \text{ }\mu\text{F}$  である.  $v_1$  は  $V_{p-p} = 1 \text{ V}$ ,  $f = 80 \text{ Hz}$  の矩形波とした.

### 6.2.2 測定 2-A-01-(b)

入力の矩形波の平均値を  $-1$  から  $1 \text{ V}$  の範囲で変化させて同様に Transient Simulation を行った.

## 6.3 結果

### 6.3.1 測定 2-A-01-(a)

図 21 に出力波形を示す. 青線が入力波形  $v_1$ , 赤線が出力波形  $v_o$  である.

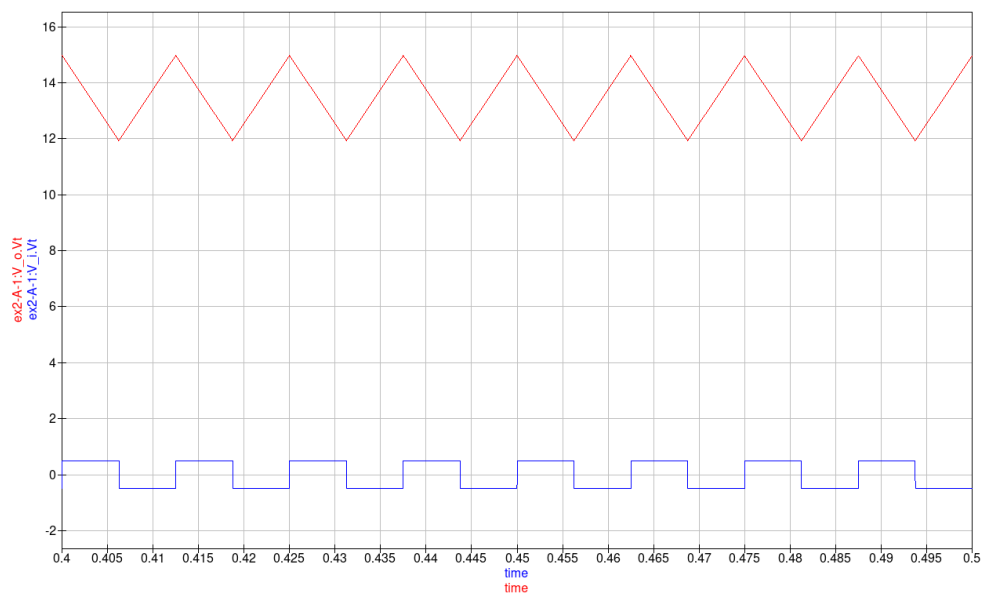


図 21 完全積分回路の出力波形

### 6.3.2 測定 2-A-01-(b)

図に矩形波の平均値を 0.2 V としたときの波形を示す. 青線が入力波形  $v_1$ , 赤線が出力波形  $v_o$  である.

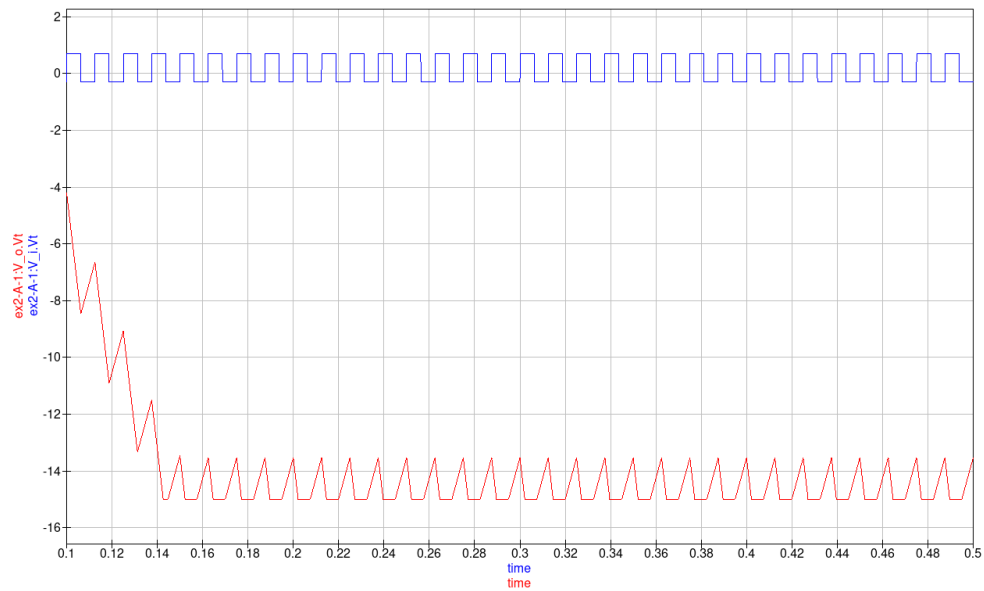


図 22 完全積分回路の出力波形

## 6.4 考察

### 6.4.1 測定 2-A-01-(a)

矩形波の 1 周期を以下の関数で表される.

$$v_i = \begin{cases} V & (0 \leq t < T/2) \\ -V & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (35)$$

これを (31) に代入すると

$$v_o = -\frac{1}{CR_1} \int_0^T v_i dt = \begin{cases} -Vt/CR_1 & (0 \leq t < T/2) \\ Vt/CR_1 & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (36)$$

となり, これは三角波である. 図 21 を見ると出力波形はたしかに三角波であり, 積分器として機能していることがわかる.

一方で (39) から予測される三角波の上限値  $v_{max}$  と下限値  $v_{min}$  は以下ようになる.

$$\begin{aligned} v_{max} &= 0 \\ v_{min} &= -\frac{VT}{2CR_1} \end{aligned} \quad (37)$$

これに値を代入すると  $v_{min} \simeq -3.04 \text{ V}$  となる. しかし図 21 を見ると実際の波形は大きく逸れている. これはコンデンサの初期電荷が 0 でないことに依ると考えられる. ここで Qucs Spice のコンデンサ部品にはトランジェント初期電圧という項目があったため, これを 0 として再度シミュレーションを行った. その結果は図 24 のようになった. このグラフの上限値は 0 V, 下限値は  $-3.04 \text{ V}$  であり上で予測した波形と一致している. したがって図 21 の波形が予測される波形と異なっていたのはコンデンサの初期電圧によるものだと言える. このことは完全積分回路ではコンデンサの帯電により容易に出力にオフセットが掛かることを示唆している.

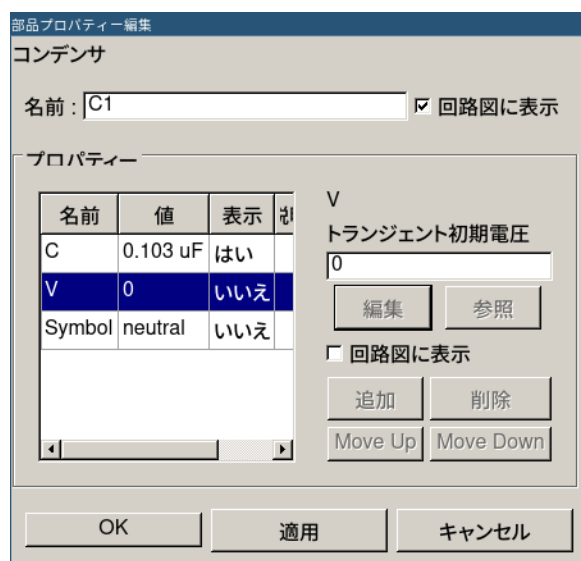


図 23 トランジェント初期電圧の設定

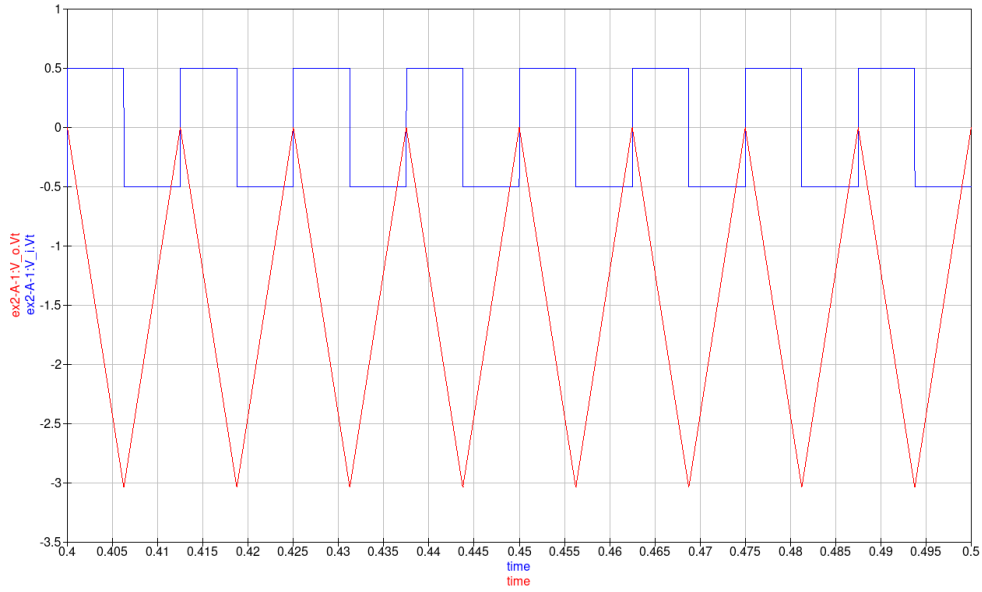


図 24 トランジェント初期電圧を設定したときの出力波形

#### 6.4.2 測定 2-A-01-(b)

平均値が 0 からオフセットした矩形波はオフセット電圧を  $V_{ofst}$  として以下のように表される.

$$v_i = \begin{cases} V + V_{ofst} & (0 \leq t < T/2) \\ -V + V_{ofst} & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (38)$$

これを (31) に代入すると

$$v_o = -\frac{1}{CR_1} \int_0^T v_i dt = \begin{cases} (-V - V_{ofst})t/CR_1 & (0 \leq t < T/2) \\ (V - V_{ofst})t/CR_1 & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (39)$$

となり, 三角波に一定のドリフトが掛かった波形になるとわかる. 実際に図 22 では三角波に減少傾向のドリフトが掛かっており, 正しく積分演算を行っていると考えられる.

## 7 実験 2-A-02：不完全積分回路

### 7.1 原理

#### 7.1.1 回路方程式

図 25 に不完全積分回路の回路図を示す.  $R_2$  に流れる電流を  $i_R$ ,  $C_1$  に流れる電流を  $i_C$  とする. オペアンプの  $-$  端子は仮想短絡から電位 0 なので

$$\begin{aligned} i_R &= -\frac{v_o}{R_2} \\ i_C &= -C \frac{\partial v_o}{\partial t} \end{aligned} \quad (40)$$

オペアンプに流れ込む電流は 0 とできるので

$$\begin{aligned} -\frac{v_o}{R_2} - C \frac{\partial v_o}{\partial t} &= \frac{v_i}{R_1} \\ \left( \frac{1}{CR_2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) v_o &= -\frac{v_i}{CR_1} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで  $R_2 \rightarrow \infty$  とすると完全積分回路と同じ結果が得られる. (41) は 1 次の非斉次微分方程式なので, その解は  $\tau = CR_2$  を用いて

$$v_o(t) = e^{-t/\tau} \left( - \int_0^t \frac{v_i(t)}{CR_1} e^{t/\tau} dt \right) \quad (42)$$

ここで積分定数は 0 とした.  $\tau$  は時定数である.

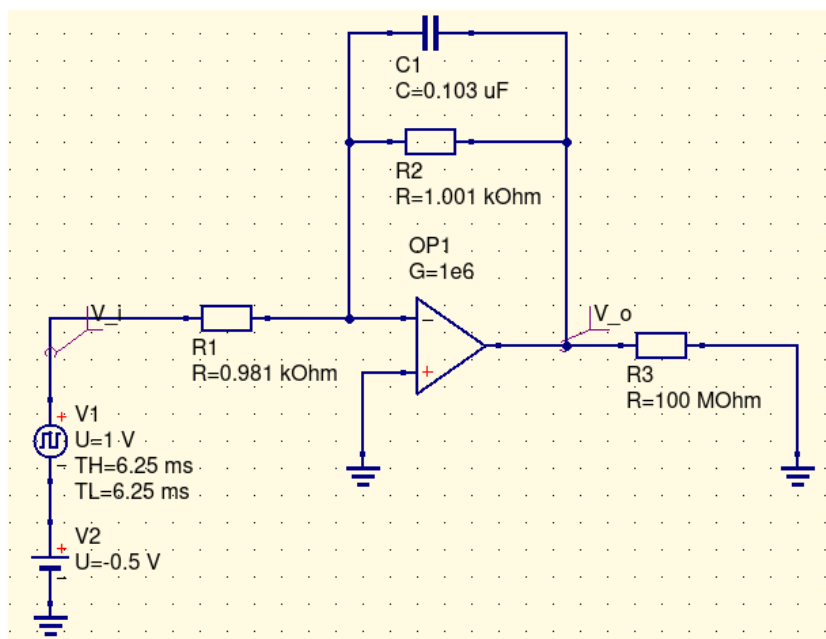


図 25 不完全積分回路

### 7.1.2 伝達関数

ラプラス変換の微分則は以下ようになる。

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) \quad (43)$$

したがって (41) をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{CR_2}V_o + sV_o &= -\frac{1}{CR_1}V_i \\ G(s) &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2s} \end{aligned} \quad (44)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log \left| -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2j\omega} \right| \\ &= 20 \log \left( \frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log \sqrt{1 + (CR_2\omega)^2} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle \left( -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2j\omega} \right) = \angle(-R_2/R_1) - \angle(1 + CR_2j\omega) \\ &= \pi - \arctan(CR_2\omega) \end{aligned} \quad (46)$$

ここで  $\omega$  が十分小さいときは

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &\simeq 20 \log(R_2/R_1) \\ \phi(\omega) &\simeq \pi \end{aligned} \quad (47)$$

また  $\omega$  が大きいときは

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= -20 \log \left( \sqrt{\frac{R_1}{R_2} + (CR_1\omega)^2} \right) \simeq -20 \log(CR_1\omega) \\ \phi(\omega) &\simeq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (48)$$

すなわち  $G_V(\omega)$  は低周波域では反転増幅器, 高周波では完全積分回路の特性を示す。以上から図 25 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 26 のようになる。破線は低周波, 高周波での Gain の漸近線である。この交点は

$$\begin{aligned} 20 \log(R_2/R_1) &= -20 \log(CR_1\omega) \\ \therefore \omega_c &= \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (49)$$

であり, このときの周波数はカットオフ周波数  $f_c = \omega_c/2\pi$  と呼ばれる。

以上から低周波数域では出力信号がそのまま透過するのに対し, 高周波域では信号が減衰するとわかる。この特性を利用して不完全積分回路をローパスフィルタ (LPF) として用いることができる。

このことはコンデンサのリアクタンスが低周波に対して大きく、高周波に対して小さいことから、  
も定性的に理解できる。すなわち低周波成分はコンデンサに比べてリアクタンスの低い抵抗に流れ  
るのに対して、高周波成分はコンデンサに流れ込むのである。

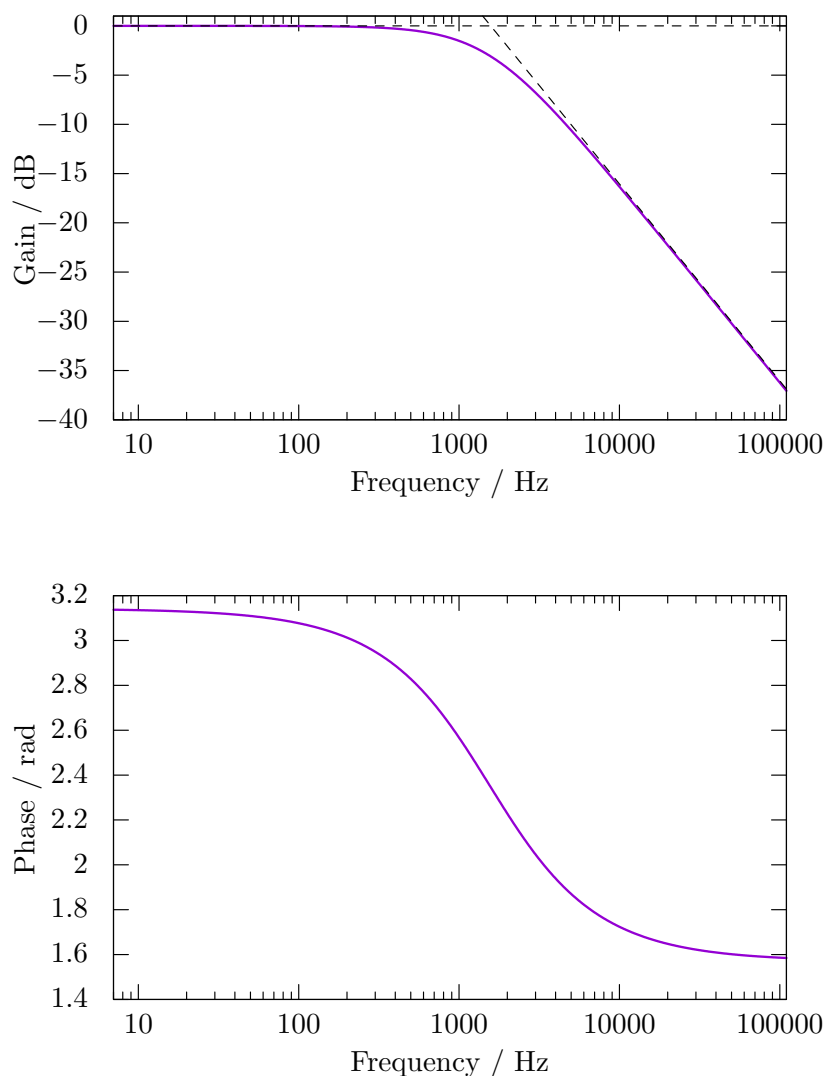


図 26 Bode 線図の理論値

### 7.1.3 ステップ応答

入力をステップ関数

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ V_s & (0 \leq t) \end{cases} \quad (50)$$

とすると (42) は以下ようになる.

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{V_s e^{-t/\tau}}{C R_1} \int_0^t e^{t/\tau} dt \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) V_s \end{aligned} \quad (51)$$

ここで  $t = \tau$  において出力電圧は漸近値  $-R_2 V_s / R_1$  の  $1 - 1/e = 0.632$  倍となることがわかる. これは回路の応答速度の指標として用いられる数値となっている.

## 7.2 方法

### 7.2.1 測定 2-A-02-(a)

図 19 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行い, 時定数  $\tau$  を測定した. 時定数は出力の電圧値を Qucs Spice の表機能で読み取ることで求めた.  $R_1 = 0.981 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1.001 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.103 \text{ }\mu\text{F}$  である. また  $v_1$  は  $V_{p-p} = 1 \text{ V}$ ,  $f = 80 \text{ Hz}$  の矩形波とした.

### 7.2.2 測定 2-A-02-(b)

上の回路のにおいて抵抗を表のように変更して出力波形を比較した. その中で入力波形に対して出力波形が尤もらしかった, すなわち出力波形が三角波に近かった回路に対して入力を正弦波, 三角波に変えた時の出力波形を記録した.

表 2 測定 2-A-02-(b) の測定条件

条件	$R_1 / \Omega$	$R_2 / \Omega$	時定数 $\tau / \text{ms}$
1	981	1.00k	0.103
2	9.87k	9.82k	1.01
3	100k	101k	10.4
4	1.00M	1.00M	103

## 7.3 結果

### 7.3.1 測定 2-A-02-(a)

図に出力波形を示す. 青線が入力波形, 赤線が出力波形である. また図に出力波形の立ち上がり付近を拡大した波形を示す. この波形から時定数  $\tau$  は以下のように求まった.

$$\tau = 0.10300 \text{ ms} \quad (52)$$



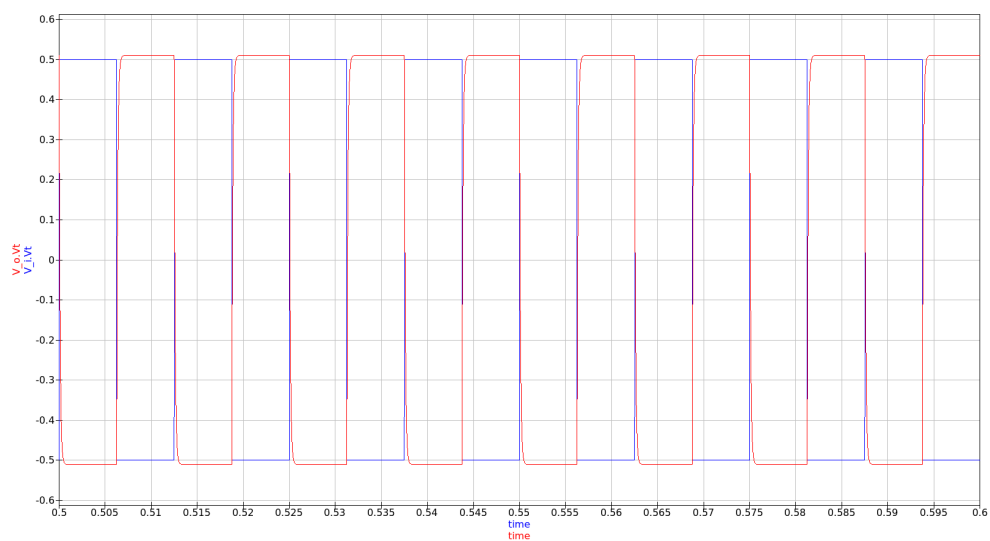


図 27 不完全積分回路の出力波形

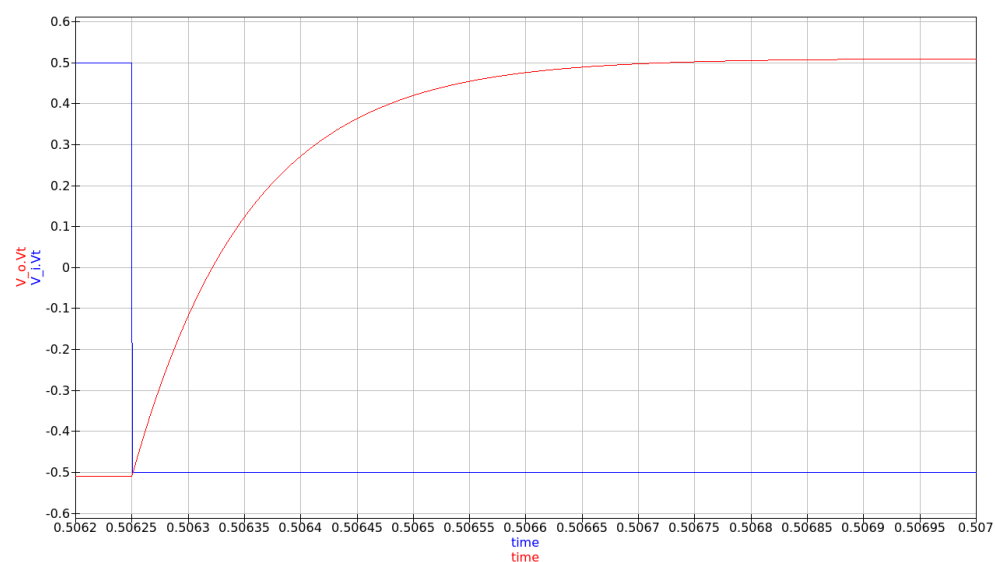


図 28 出力波形の立ち上がり

### 7.3.2 測定 2-A-02-(b)

表 2 の条件 3 のとき, 矩形波の入力に対する出力波は図のようになり三角波に近い波形を出力した. 図から図に条件 3 において入力信号を矩形波, 正弦波, 三角波としたときの出力波形を示す.

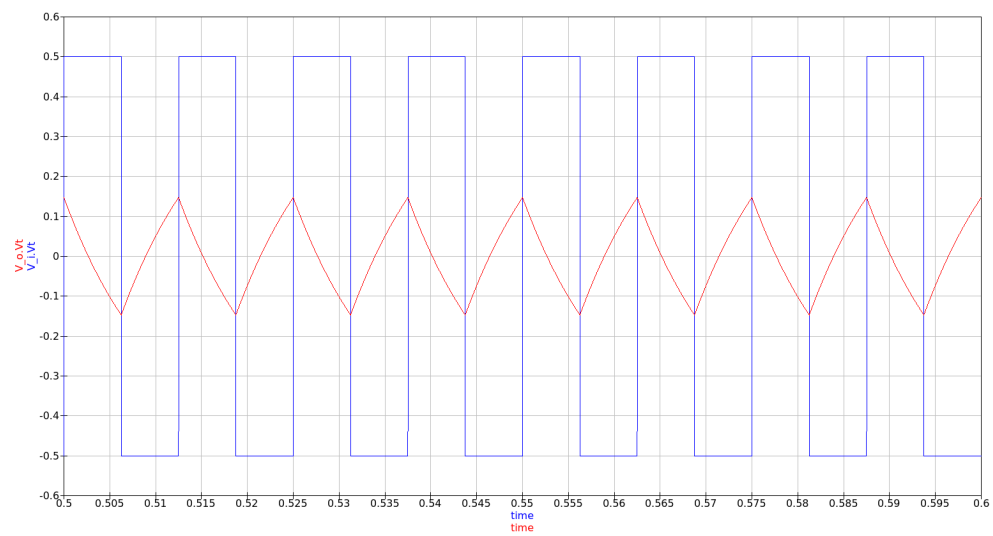


図 29 矩形波に対する出力波形

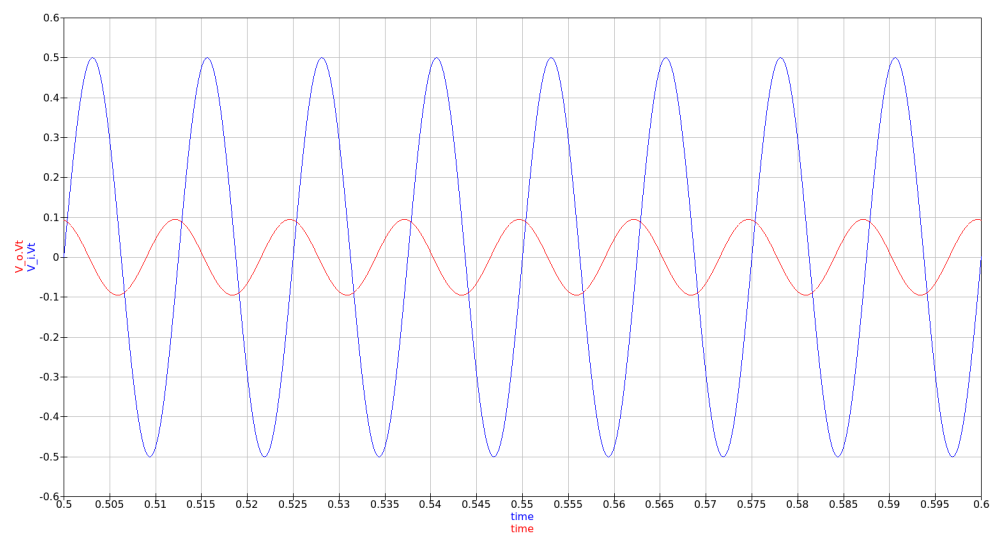


図 30 正弦波に対する出力波形

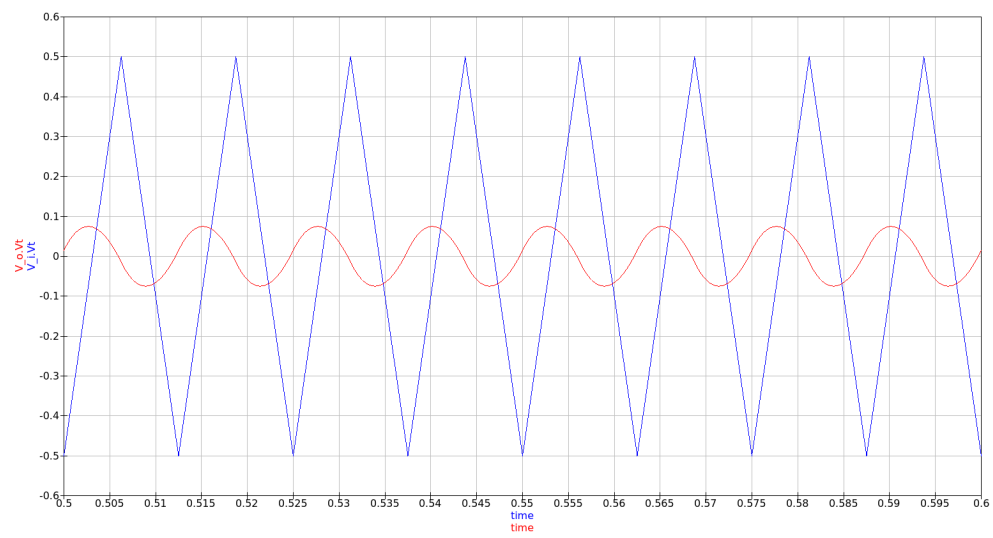


図 31 三角波に対する出力波形

## 7.4 考察

### 7.4.1 測定 2-A-02-(a)

$R_2 = 1.001 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.103 \text{ }\mu\text{F}$  から時定数は

$$\tau = 0.10310 \text{ ms} \quad (53)$$

である. 一方で実際に測定された時定数は  $\tau = 0.10300 \text{ ms}$  であったことから相対誤差は 0.1% であり, よく一致している.

また時定数からカットオフ周波数は

$$f_c = 1.55 \text{ kHz} \quad (54)$$

となる. 一方で入力信号の周波数は 80 Hz であることから回路は反転増幅器の特性を示すと考えられる. また  $R_1 \simeq R_2$  であり出力波形の増幅率はほぼ 1 となる. 実際に図 27 を見ると出力波形は入力波形とほぼ同振幅で位相が反転しているとわかる.

### 7.4.2 測定 2-A-02-(b)

条件 3 において  $R_1 \simeq R_2$  なのでカットオフ周波数は

$$f_c \simeq 15.3 \text{ Hz} \quad (55)$$

である. また Bode 線図は図 32 のようになる. したがって 80 Hz の入力信号に対しては条件 3 の回路は積分器としての特性を持つと考えられる. 実際に図 29 を見ると若干の歪みはあるが三角波が出力されていることがわかる.

また図 30 を見ると正弦波入力に対して出力は余弦波となっている.  $\sin$  関数を積分すると  $\cos$  関数が現れることから, この結果は妥当と言える.

更に図 31 を見ると三角波入力に対してある曲線が出力されている. これは三角波はある区間において 1 次関数であることから, 積分したことにより 2 次関数が出力されたと考えられる.

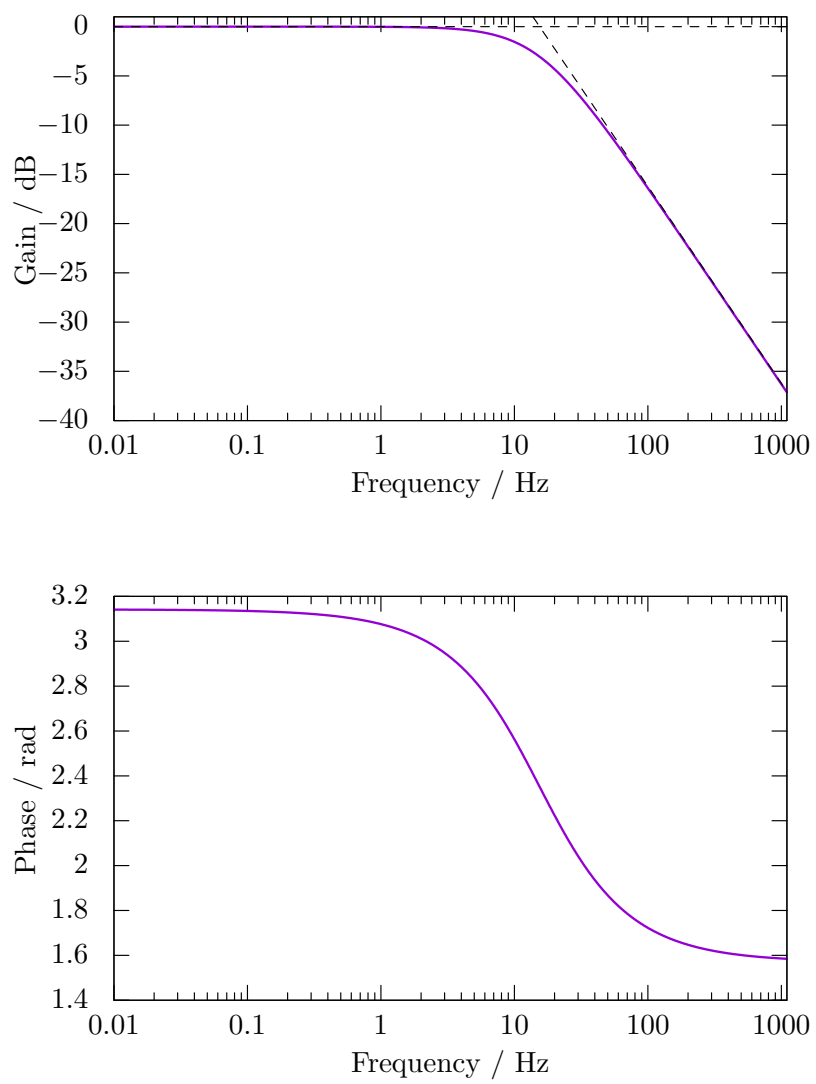


図 32 Bode 線図の理論値

## 8 実験 2-B：微分回路

### 8.1 原理

#### 8.1.1 回路方程式

図に微分回路の回路図を示す。仮想短絡からコンデンサの右側の電位は 0 である。またコンデンサに溜まっている電荷は  $q = Cv_i$  なので流れる電流  $i_C$  は

$$i_C = C \frac{dv_i}{dt} \quad (56)$$

この電流は全て抵抗に流れ込むとできるので出力電圧は

$$v_o = -R_1 i_C = -CR_1 \frac{dv_i}{dt} \quad (57)$$

となり出力電圧はたしかに入力電圧の微分で与えられる。

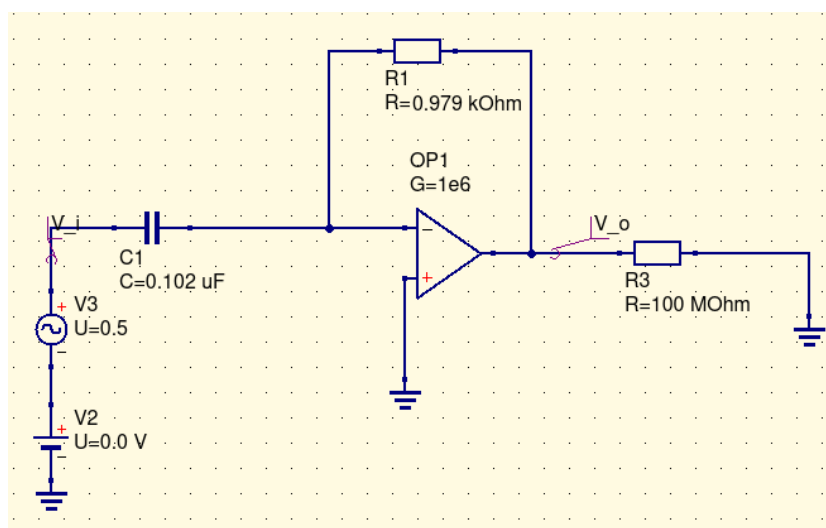


図 33 微分回路

#### 8.1.2 伝達関数

ラプラス変換の微分則 (43) から (57) は

$$\begin{aligned} V_o &= -sCR_1 V_i \\ G(s) &= -sCR_1 \end{aligned} \quad (58)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log |-sCR_1 j\omega| = 20 \log (CR_1 \omega) \\ \angle(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (59)$$

以上から図??で示した値を代入して Bode 線図を描くと図のようになる。

## 参考文献

- [1] ルネサスエレクトロニクス. Icl7612 datasheet. <https://akizukidenshi.com/download/ds/renesas/icl7611-12.pdf>. (Accessed on 06/14/2021).
- [2] 進一高橋. 電子回路. 電気・電子・情報工学系テキストシリーズ ; 3. 培風館, 東京, 2002.
- [3] 秋月電子通商. オペアンプ icl7611. <https://akizukidenshi.com/catalog/g/gI-00286/>. (Accessed on 06/14/2021).