61908697 佐々木良輔

6-1

この問題での分配関数は $Z = (1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})^N$ なので大分配関数 Ξ は

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta\mu N}(1 + \mathrm{e}^{\beta\varepsilon})^N \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})\right)^N \\
&= \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

したがってグランドポテンシャル Ω は

$$
\Omega = \frac{1}{\beta}\log(1 - \mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})) \tag{2}
$$

粒子数の期待値 $\langle N\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
\langle N\rangle &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{-\beta\mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})}{1 - \mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})}{1 - \mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

これを用いて化学ポテンシャル μ は

$$
\begin{aligned}
\langle N\rangle(1 - \mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})) &= \mathrm{e}^{\beta\mu}(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}) \\
\mathrm{e}^{\beta\mu} &= \frac{\langle N\rangle}{1 + \langle N\rangle}\frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで $\langle N\rangle \gg 1$ とすると

$$
\mu = -\frac{1}{\beta}\log(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}) \tag{5}
$$

またグランドポテンシャルはルジャンドル変換

$$
\Omega = F - \mu N \tag{6}
$$

によって定義されるので, 自由エネルギー F は

$$\begin{aligned}F &= \Omega + \mu N \\ &= \frac{1}{\beta}\log(1-\mathrm{e}^{\beta\mu}(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})) - \frac{1}{\beta}\log(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})\langle N\rangle \\ &= -\frac{1}{\beta}\left(\log\langle N\rangle - \log(\mathrm{e}^{\beta\mu}(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}))\right) - \frac{1}{\beta}\langle N\rangle\log(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon})\end{aligned} \tag{7}$$

ここで $\mathrm{e}^{\beta\mu}(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}) = 1$ なので

$$F = -\frac{1}{\beta}\log\langle N\rangle - \frac{1}{\beta}\langle N\rangle\log(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}) \tag{8}$$

さらに F は示量性の変数なので $O(N)$ 以下の項を捨てると

$$F = -\frac{1}{\beta}\langle N\rangle\log(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}) \tag{9}$$

$$= -k_BT\langle N\rangle\log(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}) \tag{10}$$

これはミクロカノニカル及ぼカノニカルアンサンブルで得られた結果と一致する.

6-2

この問題での分配関数は $Z = 1/N!(1/\hbar\omega\beta)^N$ なので大分配関数 Ξ は

$$\begin{aligned}\Xi &= \sum_{N=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\beta\mu N}\frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\hbar\omega\beta}\right)^N \\ &= \exp\left(\frac{\mathrm{e}^{\beta\mu}}{\hbar\omega\beta}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

ここでテイラー展開の表式を用いた. したがってグランドポテンシャル Ω は

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{\beta}\log\Xi \\ &= -\frac{1}{\beta}\frac{e^{\beta\mu}}{\hbar\omega\beta}\end{aligned} \tag{12}$$

粒子数の期待値 $\langle N\rangle$ は

$$\langle N\rangle = -\frac{\partial\Xi}{\partial\mu} = \frac{\mathrm{e}^{\beta\mu}}{\hbar\omega\beta} \tag{13}$$

したがって化学ポテンシャル μ は

$$\mu = \frac{1}{\beta}\log(\langle N\rangle\hbar\omega\beta) \tag{14}$$

以上から自由エネルギー F は

$$
\begin{aligned}
F &= \Omega + \mu N \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{e}^{\beta\mu}}{\hbar\omega\beta} + \mu\frac{\mathrm{e}^{\beta\mu}}{\hbar\omega\beta} \\
&= \frac{N}{\beta}(\log(N\hbar\omega\beta) - 1)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

また同じ問題をカノニカルアンサンブルで考えると

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{\beta}\log\frac{\left(\frac{1}{\hbar\omega\beta}\right)^N}{N!} \\
&= -\frac{1}{\beta}(\log\frac{1}{\hbar\omega\beta} - N\log N - N) \\
&= \frac{N}{\beta}(\log(N\hbar\omega\beta) - 1)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となり一致する.