

(3-1)

まず同次方程式の一般解を求める. $x(t) = e^{\lambda t}$ と置くと

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{x}(t) + 2m\gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) \\ 0 &= m\lambda^2 + 2m\gamma\lambda + m\omega_0^2 \\ \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $\gamma \geq \omega$ のときは過減衰解, $\omega > \gamma$ のときは減衰振動解である. ここでは減衰振動解を考える. すなわち $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ を用いて

$$x(t) = e^{-\gamma} (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}) \quad (2)$$

解は実数に限られるので $C_1^* = C_2$ である必要がある. 新たに定数を A, α と取り直せば

$$x(t) = A e^{-\gamma} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (3)$$

となる. 次に非同次方程式の特解を $x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ と仮定すると

$$\begin{aligned} eE_0 \sin \omega t &= m\ddot{x}(t) + 2m\gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) \\ eE_0 \sin \omega t &= -C_1 m\omega^2 e^{i\omega t} + 2iC_1 m\gamma\omega e^{i\omega t} + C_1 m\omega_0^2 e^{i\omega t} \\ &\quad - C_2 m\omega^2 e^{-i\omega t} - 2iC_2 m\gamma\omega e^{-i\omega t} + C_2 m\omega_0^2 e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (4)$$

これが恒等的に成り立つとき両辺の正弦, 余弦成分が一致するので

$$\begin{cases} eE_0 = m(i(\omega_0^2 - \omega^2)(C_1 - C_2) - 2\gamma\omega(C_1 + C_2)) \\ 0 = m(i(\omega_0^2 - \omega^2)(C_1 + C_2) - 2\gamma\omega(C_1 - C_2)) \end{cases} \quad (5)$$

これを連立すると $a = \omega_0^2 - \omega^2, b = 2\gamma\omega$ を用いて

$$C_1 = C_2^* = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{2ia - 2b} \quad (6)$$

したがって

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{eE_0}{m} \frac{a \sin \omega t + b \cos \omega t}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{eE_0}{m} \frac{\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\tan \delta = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$ である. 以上から一般解は以下のように成る.

$$x(t) = A e^{-\gamma} \sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{eE_0}{m} \frac{\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_0 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (8)$$

(3-2)

$$r_e = \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{4\pi(8.854 \times 10^{-12})(9.109 \times 10^{-31})(2.998 \times 10^8)^2 \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}}$$

$$= 2.817 \times 10^{-15} \text{ m}$$

(3-3)

Rayleigh 散乱を仮定すると散乱強度 i は

$$i \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

$$\therefore i\lambda^4 \propto 1 \quad (9)$$

となるので $i\lambda^4$ は定数に成ると考えられる. 図に波長 λ と $i\lambda^4$ の関係を示す. この gnuplot の fit 機能を用いて得た回帰曲線は $y = 0.782x + 2.71$ となった. また相関係数は 0.202 となり, わずかに正の相関が見えるが相関関係はほぼ無いと考えられる. したがって $i\lambda^4$ はほぼ概ね定数であるといえ, 地上での観測されたスペクトルには Rayleigh 散乱の影響が大きいと考えられる.

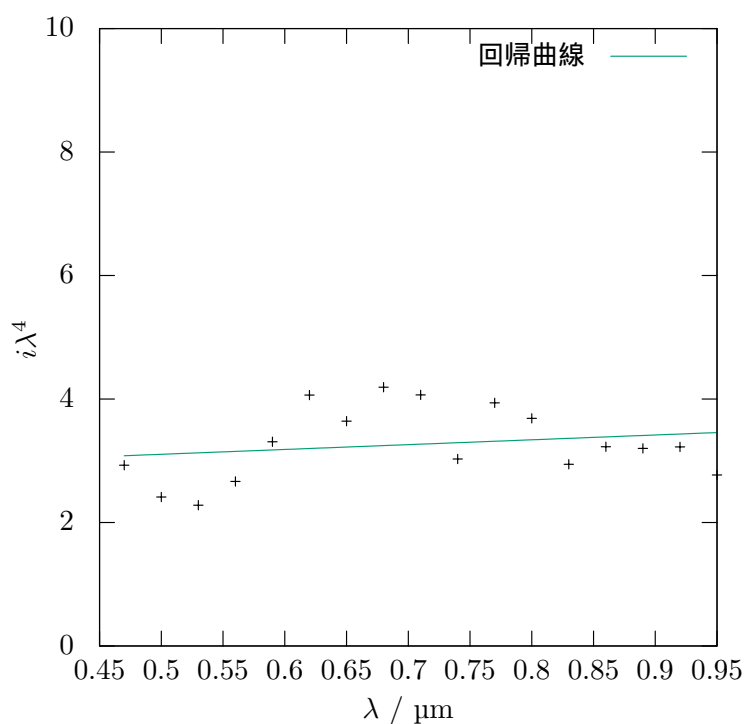


図1 λ と $i\lambda^4$ の関係

(3-4)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{137} \right)^2 \left(\frac{2.426 \times 10^{-12}}{2\pi} \right)^2 = 6.656 \times 10^{-29} \text{ m}^2 \quad (10)$$

(3-5)

$$E = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1.39 \times 10^3}{2.65 \times 10^{-3}}} = 1.02 \times 10^3 \text{ V m}^{-1} \quad (11)$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 = 1.39 \times 10^3 \text{ J s}^{-1} \quad (12)$$

$$\langle p \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = 4.64 \times 10^{-6} \text{ N m}^{-2} \quad (13)$$

(3-6)

太陽定数は地球表面に到達する太陽光の単位面積あたりのワット数である。したがって太陽が単位時間に放出する全エネルギー E_1 は

$$E_1 = 4\pi(1.496 \times 10^{11} \text{ m})^2 \times 1.37 \times 10^3 \text{ W m}^{-2} = 3.853 \times 10^{26} \text{ W} \quad (14)$$

よって太陽の輻射強度 I は

$$I = \frac{E_1 \text{ W}}{4\pi(6.960 \times 10^8 \text{ m})} = 6.329 \times 10^7 \text{ W m}^{-2} \quad (15)$$

以上から太陽表面の推定温度は

$$T = \left(\frac{I}{\sigma} \right)^{1/4} = 5.78 \times 10^3 \text{ K} \quad (16)$$

太陽の光球温度は 6000 K 程度であり, 妥当な数字である。

(3-7)

Stirling の公式

$$\log N! = N(\log N - 1) \quad (17)$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{S}{N} &= \frac{k_B}{N} \log \frac{(N+P)!}{N!P!} \\
&= \frac{k_B}{N} ((N+P)(\log(N+P) - 1) - N(\log N - 1) - P(\log P - 1)) \\
&= \frac{k_B}{N} ((N+P) \log(N+P) - (N+P) \log N - P \log P + P \log N) \\
&= k_B \left(\left(\frac{P}{N} + 1 \right) \log \left(\frac{P}{N} + 1 \right) - \frac{P}{N} \log \frac{P}{N} \right) \\
&= k_B \left(\left(\frac{U}{\varepsilon} + 1 \right) \log \left(\frac{U}{\varepsilon} + 1 \right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \frac{U}{\varepsilon} \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

(3-8)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} &= \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{S}{N} \right) \\
&= \frac{k_B}{\varepsilon} \left(\log \left(\frac{U}{\varepsilon} + 1 \right) - \log \frac{U}{\varepsilon} \right) \\
&= \frac{k_B}{\varepsilon} \log \frac{\frac{U}{\varepsilon} + 1}{\frac{U}{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{19}$$

両辺指数を取り

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{U}{\varepsilon} + 1}{\frac{U}{\varepsilon}} &= e^{\varepsilon/k_B T} \\
U &= \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon/k_B T) - 1}
\end{aligned} \tag{20}$$

(3-9)

λ 無限大, すなわち ν 無限小の極限では指数関数のマクローリン展開で 1 次までを取り

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow 0} R'(\nu, T) &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{k_B T}} \\
&= \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2
\end{aligned} \tag{21}$$

また λ 無限小, すなわち ν 無限大ではマクローリン展開で 5 次までを取り

$$\begin{aligned}
R'(\nu, T) &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2!} \left(\frac{h\nu}{k_B T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{h\nu}{k_B T} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{h\nu}{k_B T} \right)^4 + \frac{1}{5!} \left(\frac{h\nu}{k_B T} \right)^5} \\
&= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{\frac{h}{k_B T \nu^2} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{k_B^2 T^2 \nu} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{k_B^3 T^3} + \frac{1}{24} \frac{h^4 \nu}{k_B^4 T^4} + \frac{1}{120} \frac{h^5 \nu^2}{k_B^5 T^5}} \\
&\rightarrow \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{\frac{1}{6} \frac{h^3}{k_B^3 T^3} + \frac{1}{24} \frac{h^4 \nu}{k_B^4 T^4} + \frac{1}{120} \frac{h^5 \nu^2}{k_B^5 T^5}}
\end{aligned} \tag{22}$$

ここで $\lambda \propto 1/\nu$ なので $h/k_B T = 1$ と無次元化して概形を示すと図のようになる.

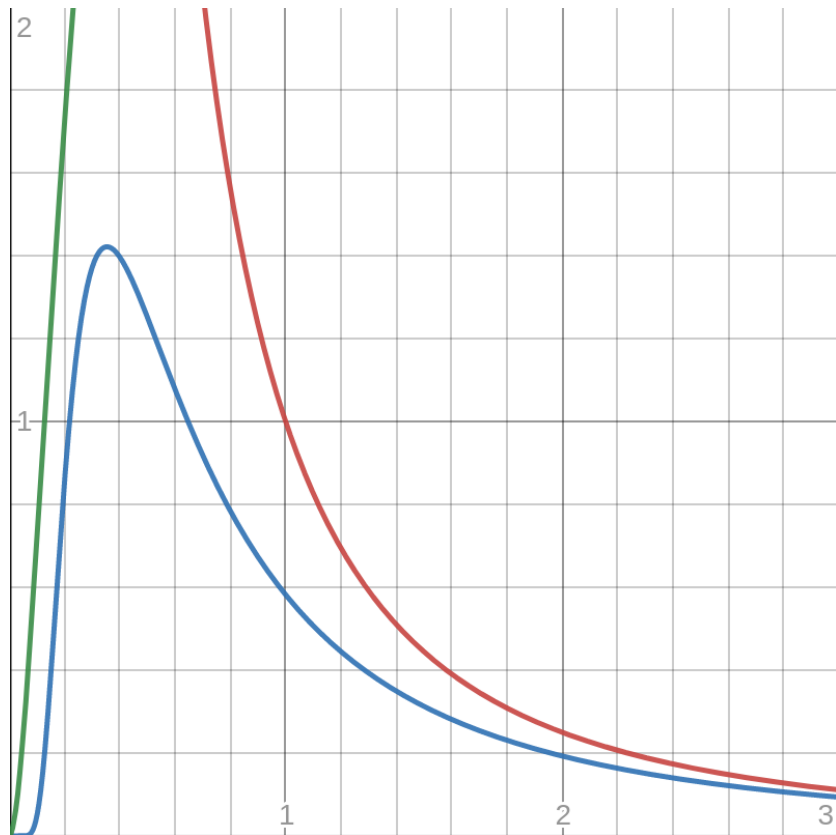


図2 青： R' の概形, 赤： λ 無限大での近似, 緑： λ 無限小での近似

(3-10)

$a = 8\pi h/c^3$, $b = h/k_B T$ とおくと

$$\begin{aligned}
 a \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{b\nu} - 1} d\nu &= \frac{a}{b^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
 &= \frac{a}{b^4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt \\
 &= \frac{a}{b^4} \frac{\pi^4}{15} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} T^4
 \end{aligned} \tag{23}$$

となり Stefan-Boltzmann 則を満たす.