

1 原理

1.1 電気抵抗の測定法

電気抵抗の測定方法には二端子法と四端子法がある。図 1, 図 2 に二端子法, 四端子法の回路図を示す。 R_L は試料の抵抗, R_S はリード線など測定器の抵抗, R_V は電圧計の内部抵抗である。

二端子法では試料の両端にリード線を取り付け, 既知の電流を流したときに両端で生じる電位差を測定することで試料の抵抗値を測定する。ただし二端子法ではリード線などの抵抗値を含めた抵抗値しか測定できず, 試料の抵抗値が小さいときは測定が困難になる。

一方で四端子法では既知電流を流すリード線と電圧計のリード線を別に試料に取り付ける。すなわち試料に 4 つの端子を取り付けることから四端子法と呼ばれる。ここで電圧計の入力インピーダンスが非常に大きくほとんど電流が流れ込まないとすると R_{S2} で生じる電圧降下は非常に少なく, R_L が小さくてもその両端の電圧を正確に測定できる。したがって R_L が小さい試料においては四端子法での測定が適している。また本実験では後述するロックインアンプを用いて試料の抵抗値を測定している。

測定により得られた抵抗値は試料の形状に依存する量なので, より本質的な物理量として電気抵抗率 ρ を用いる。電気抵抗率は試料が断面形状が一定の柱状であるとする, その断面積 S , 長さ L , 抵抗値 R を用いて

$$\rho = R \frac{S}{L} = \frac{\Delta V S}{I L} \quad (1)$$

と表される。ここで ΔV は試料の両端の電位差, I は流れる電流である。

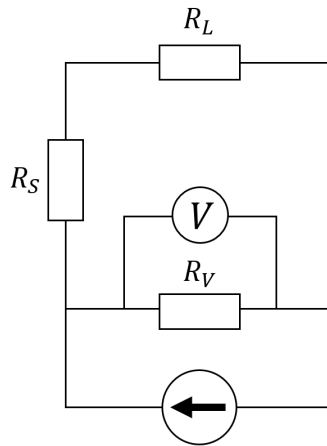


図 1 二端子法の回路図

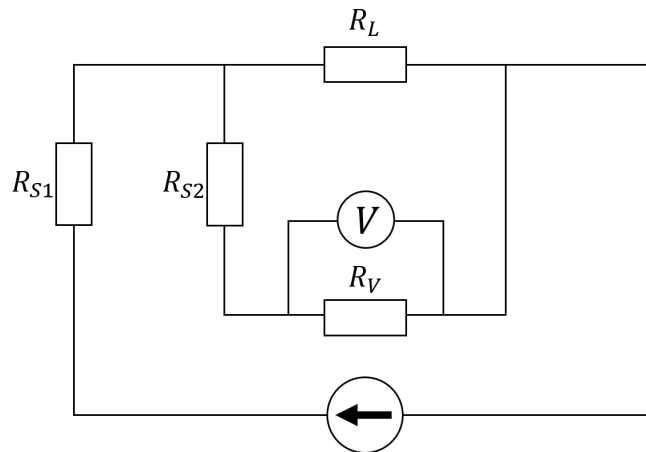


図 2 四端子法の回路図

1.2 ロックインアンプについて

1.3 金属の電気伝導

古典,あるいは量子モデルを用いて Ohm の法則の説明を試みる.

1.3.1 Drude モデル

Drude モデルでは電気抵抗が自由電子と結晶格子の衝突によって生じると考える. 自由電子を流体と見立て, 格子との衝突により生じる抵抗力が電子の速度に比例すると考える. また電子は電場 E により加速されると考えると, 運動方程式は

$$m\dot{\mathbf{v}} + \frac{m}{\tau}\mathbf{v} = -e\mathbf{E} \quad (2)$$

ここで τ は緩和時間であり、電子が格子に衝突せずに直進できる平均時間である。この定常状態における速度は

$$v = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E} \quad (3)$$

したがって電子数密度 n を用いると電流密度 j は

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} = \frac{e^2\tau n}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} \quad (4)$$

となる。ここで σ は電気伝導率であり電気抵抗率 ρ の逆数である。したがって (4) はオームの法則の形をとっている。

1.3.2 バンド理論

上で議論した Drude モデルは節で後述するように問題がある。これを解決するのがバンド理論による説明である。

結晶は一定の周期で同一の構造が繰り返すことから周期的境界条件下で考える。また簡単のため 1 次元で考える、すなわち全原子数が N のとき n 番目の原子の位置 r_n と原子軌道 ϕ_n は

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n+N} \\ \phi_n &= \phi_{n+N} \end{aligned} \quad (5)$$

を満たす。また格子定数を a とすると

$$\phi_{n+1} - \phi_n = a \quad (6)$$

である。したがって n 番目の原子周りの原子軌道は以下のように表される。

$$\phi_n = \phi(x - r_n) = \phi(x - na) \quad (7)$$

ここで格子定数が原子軌道の広がりと同程度であり、波動関数の間に重なりが生じると電子が隣り合う原子軌道間を飛び移ることができる。この飛び移りはトランスファー積分 b を用いて以下のように表される。

$$H\phi_n(x) = -b(\phi_{n+1}(x) + \phi_{n-1}(x)) \quad (8)$$

ここで波動関数 $\psi(x, t)$ が初期状態 $t = 0$ において $\phi_n(x)$ だとすると Δt 後の波動関数の変化は

$$\begin{aligned} \psi(x, \Delta t) &= \psi(x, 0) + \Delta t \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} \\ &= \phi_n(x) + \frac{i\Delta t}{\hbar} b (\phi_{n+1}(x) + \phi_{n-1}(x)) \end{aligned} \quad (9)$$

となり、時間変化に伴いたしかに ϕ_n に ϕ_{n+1} , ϕ_{n-1} の成分が波動関数に混ざってくることがわかる。

ここで (8) から固有値方程式を考える. (8) の両辺に e^{ikr_n} を乗じ, n について和を取ると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N e^{ikr_n} (H\phi_n) &= -b \sum_{n=1}^N e^{ikr_n} (\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) \\
H \sum_{n=1}^N e^{ikr_n} \phi_n &= -b \sum_{n=1}^N (e^{ikr_{n-1}} + e^{ikr_{n+1}}) \phi_n \\
&= -2b \cos(ka) \sum_{n=1}^N e^{ikr_n} \phi_n
\end{aligned} \tag{10}$$

となる. 1 行目から 2 行目の右辺の変形には (5) の条件を用いた. したがって固有状態を $\psi_k = \sum_{n=1}^N e^{ikr_n} \phi_n$ と置けば固有値は $-2b \cos(ka)$ となることがわかる. この固有状態は Bloch 状態, 固有値はエネルギーバンドと呼ばれ, これは波数 k によって指定される. このことから結晶格子中での自由電子は波動的に振る舞うため Drude モデルで仮定したような古典的な抵抗力は発生していないと考えられる.

ここで $k \rightarrow k + 2\pi/a$ というシフトに対して明らかに固有値, 固有状態是不変なので k の範囲として

$$-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a} \tag{11}$$

のみを考えれば十分である. この k の領域を第一ブリリアンゾーンと呼ぶ. 実際には k は離散化しており, 第一ブリリアンゾーンにおいて存在する状態の数を数えることができる. 波数 k の離散化条件を考える. (10) も各 ϕ_n と同様に周期的境界条件を満たすことから

$$\begin{aligned}
\psi_k(x + Na) &= \sum_{n=1}^N e^{ikr_n} \phi_n(x + Na) \\
&= \sum_{n=1}^N e^{ikr_n} \phi(x - (n - N)a) \\
&= e^{ikNa} \sum_{n=1}^N e^{ikr_{n-N}} \phi_{n-N}(x) \\
&= e^{ikNa} \psi_k(x)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\therefore kNa = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}) \tag{13}$$

したがって第一ブリリアンゾーンにおいては $-N/2 < m \leq N/2$ の間の N 個の状態が存在することになる. これは第一ブリリアンゾーンに N 個の原子が存在することに整合する.