

物理学実験報告書

慶應義塾大学理工学部物理学科

実験題目

アナログ回路

実験日 5月 31日 天候 室温 °C 湿度 % 気圧 hPa

実験日 6月 4日 天候 室温 °C 湿度 % 気圧 hPa

実験日 6月 7日 天候 室温 °C 湿度 % 気圧 hPa

実験日 6月 11日 天候 室温 °C 湿度 % 気圧 hPa

学籍番号	氏名	共同実験者名
61908697	佐々木良輔	

以下の欄には何も記入しないこと！

受理	再提出

提出確認1	提出確認2

評価	
----	--

1 原理

1.1 オペアンプについて

演算増幅器 (Operational Amplifier: オペアンプ) は図 1 のような素子であり回路図記号は図 2 のようになっている。オペアンプはトランジスタ或いは MOSFET と抵抗, キャパシタなどから成る集積回路で音響など様々なアナログ回路で用いられる。

オペアンプの最も根幹となる回路は差動増幅器である.[2] 図にトランジスタによる差動増幅器を示す。差動増幅回路はエミッタ接地増幅器を 2 つ, エミッタを共通にしたもので, 共通のエミッタは定電流回路に接続される。小信号においてコレクタ電流 i_c とベース電流 i_b は比例関係にあると考えられるので I はエミッタ接地電流増幅率を β として

$$i_{ci} = \beta i_{bi} \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

である。したがって I は

$$\begin{aligned} I &= i_{e1} + i_{e2} \\ &= (1 + \beta)(i_{b1} + i_{b2}) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。また I は定電流回路によって定まっており, 一方のトランジスタのエミッタ電流が増えるともう一方は減少する。ここで 2 つの入力に同相の信号を与えたとき左右のトランジスタは同等であるため出力電圧 $v_o = 0$ のままである。一方で逆相の信号を入力する, すなわち定常的な成分を i_{const} , 変化分を i_v として $i_{b1} = i_{const} + i_v$, $i_{b2} = i_{const} - i_v$ と表すと

$$v_o = R\beta(i_{const} + i_v) - R\beta(i_{const} - i_v) \quad (3)$$

$$= 2R\beta i_v \quad (4)$$

となる。以上から差動増幅器では同相の信号が入力されても出力は変化しないが, 2 つの入力信号の間に差があるときにはそれを増幅して出力することになる。

実際のオペアンプは差動増幅器より遥かに複雑であるが, 差動増幅という基本的な機能は継承している。オペアンプにおいては入力電圧 V_+ , V_- と出力電圧 V_o には増幅率を A として以下のような関係が一般に成り立つ。

$$V_o = A(V_+ - V_-) \quad (5)$$

また理想オペアンプには以下のような性質がある.

1. 入出力の線形性

オペアンプの入出力には電源電圧の範囲で線形関係が成り立つ.

2. A が非常に大きい

増幅率 A は非常に大きい. これは差動増幅器の後段に更に増幅回路などを持つためである. ここで (5) 式で V_o が有限の値を持ち A が極めて大きいならば $V_+ = V_-$ でなければならない. これを仮想接地と呼ぶ.

3. 入力インピーダンスが大きく, 出力インピーダンスが小さい

これにより, フィードバックを構成する際にオペアンプ内に流れ込む電流を 0 とみなせる.

4. 入力電圧が 0 なら出力も 0

5. 広い周波数帯域で利用可能

ただし実際のオペアンプでは増幅率やインピーダンスは有限の値を持つが, 多くの回路設計において以上の性質は非常に有用である.

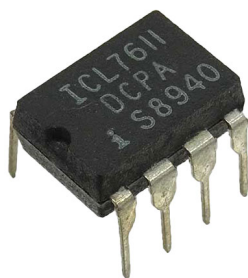


図 1 ILC7611(DIP8 パッケージ)[3]

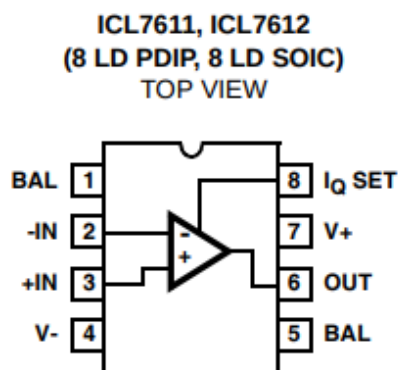


図 2 ILC7611 のピンアサイン [1]

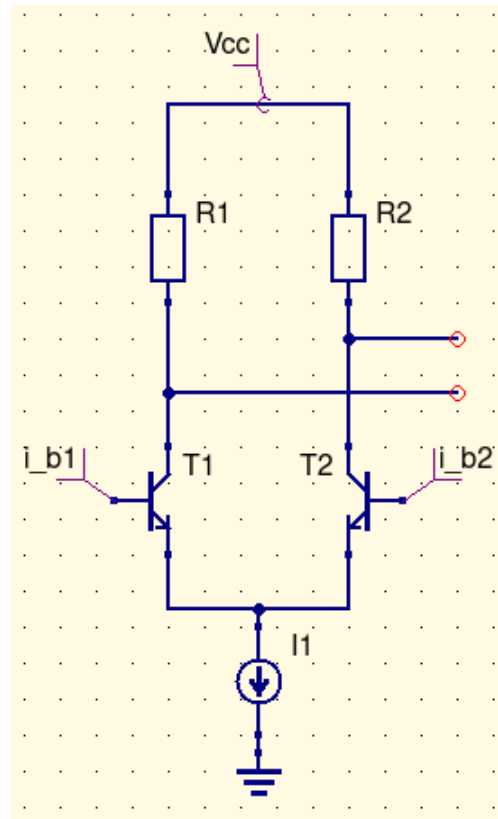


図 3 差動増幅器

2 実験方法

本実験ではフリーソフトの Qucs Spice を用いて回路シミュレーションを行った。シミュレーション環境を表 1 に示す。4 日目では Parameter Sweep 機能を使う必要性があったため Qucs Spice のバージョンを上げている。本実験では直流での解析に DC Simulation, 交流での解析に Transient Simulation を用いている。また各種抵抗の抵抗値やコンデンサの静電容量は配布された excel シートを用いて個体差を再現している。また各種グラフの作成には gnuplot を用いた。

表 1 シミュレーション環境

Qucs Spice バージョン (3 日目まで)	0.0.19
Qucs Spice バージョン (4 日目から)	0.0.22
OS	Ubuntu 20.04 LTS

3 実験 1-A : 反転増幅器

3.1 原理

3.1.1 回路方程式

図 4 に反転増幅器の回路図を示す. オペアンプの入力インピーダンスが R_2 に比べて非常に高いことから入力電流 i はすべて R_2 に流れ込むとして良い. したがって Ohm の法則から

$$i = \frac{v_i - v_d}{R_1} = \frac{v_d - v_o}{R_2} \quad (6)$$

ここで (5) 式から

$$v_o = A(0 - v_d) \quad (7)$$

が成り立つためこれらを連立すると

$$v_o = -v_i \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{AR_1}} \quad (8)$$

A が十分大きいとき

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i \quad (9)$$

となる. 以上から反転増幅器は入力信号に対して位相が反転し, 電圧が R_2/R_1 倍の信号が出力されることがわかる.

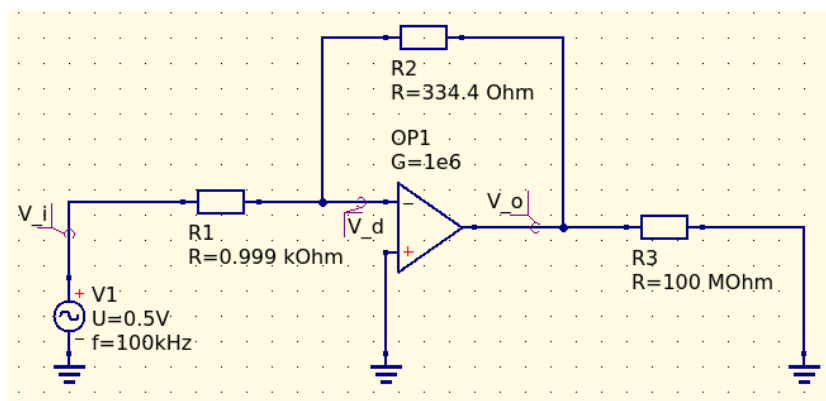


図 4 反転増幅器

3.1.2 伝達関数

(9) から伝達関数を求めると以下ようになる.

$$\begin{aligned} V_o &= -\frac{R_2}{R_1} V_i \\ G(s) &= \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (10)$$

したがって Gain と位相は

$$G_V(\omega) = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \quad (11)$$

$$\phi(\omega) = \pi \quad (12)$$

これに図 4 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 5 のようになる.

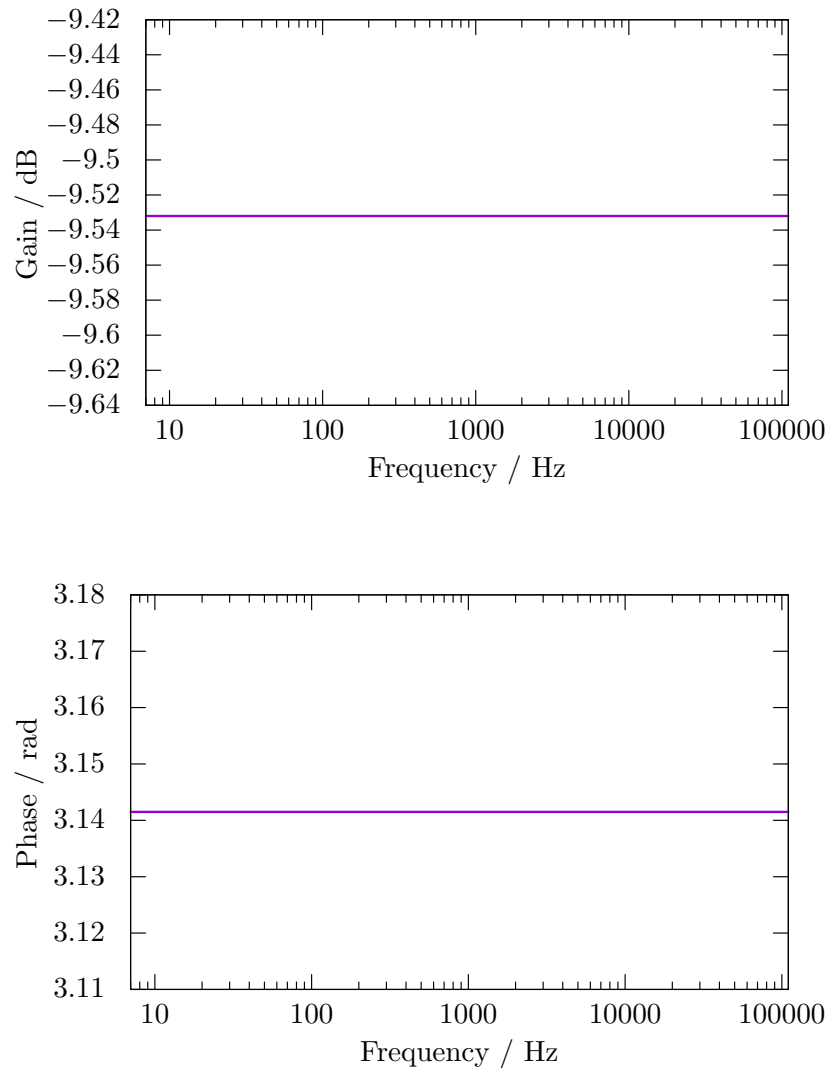


図 5 Bode 線図の理論値

3.2 方法

3.2.1 測定 1-A-01

図 4 の回路を Qucs Spice 上で作成し DC bias Simulation を行った. まず $R_1 = 0.999 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3.381 \text{ k}\Omega$ として電圧利得 3.3 倍の反転増幅器を構成した. この反転増幅器上で入力電圧 V_i を -6 V から 6 V まで 0.5 V 刻みで変化させながら出力電圧 V_o とオペアンプの入力電圧の差 ($= V_d$) を記録した.

3.2.2 測定 1-A-02

上記の回路で R_2 を $334.4 \text{ }\Omega$ に変更し, 電圧利得 0.33 倍の反転増幅器を構成した. この回路においてし Transient Simulation を行った. この回路に $V_{p-p} = 1 \text{ V}$, 周波数が 10, 100, 1k, 10k, 100 kHz の正弦波を入力し利得及び位相差を記録, Bode 線図を作成した. また周波数が 1 kHz の時の波形を記録した.

3.3 結果

3.3.1 測定 1-A-01

図 6 に測定 1-A-01 の結果を示す. 左側の軸が V_o , 右側の軸が V_d である. 破線は V_o の直線部分を最小二乗 fit したものであり回帰曲線は以下の関数である.

$$y = -3.385x + 8.973 \times 10^{-31} \quad (13)$$

3.3.2 測定 1-A-02

図 7 に周波数 1 kHz の時の波形を示す. 青線が入力信号 V_i , 赤線が出力信号 V_o である. 縦軸の単位は V, 横軸の単位は s である. また図 8 に測定 1-A-02 で得た Bode 線図を示す.

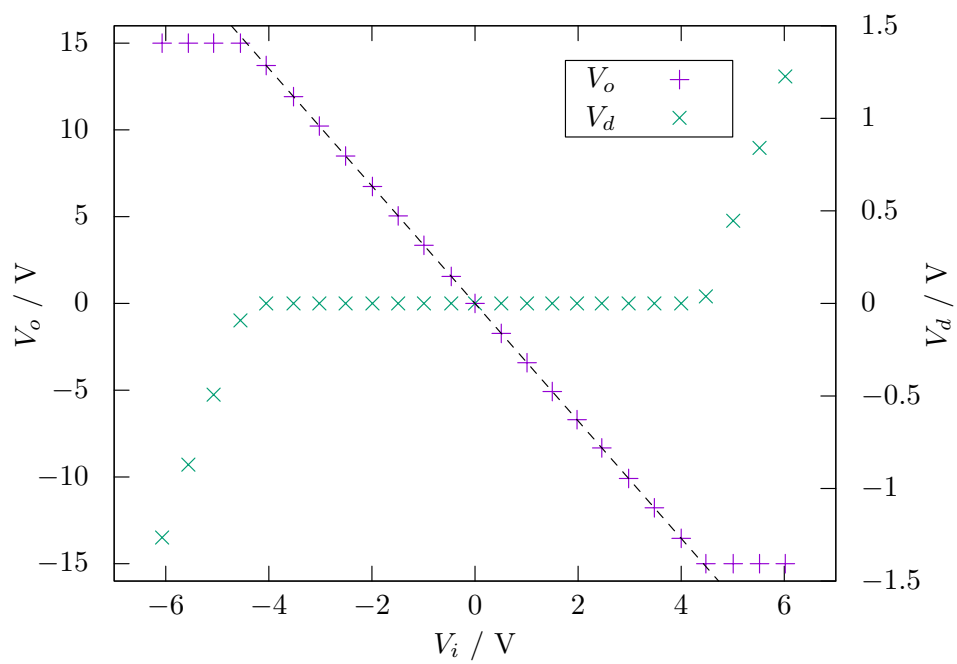


図 6 V_i に対する V_o , V_d の変化

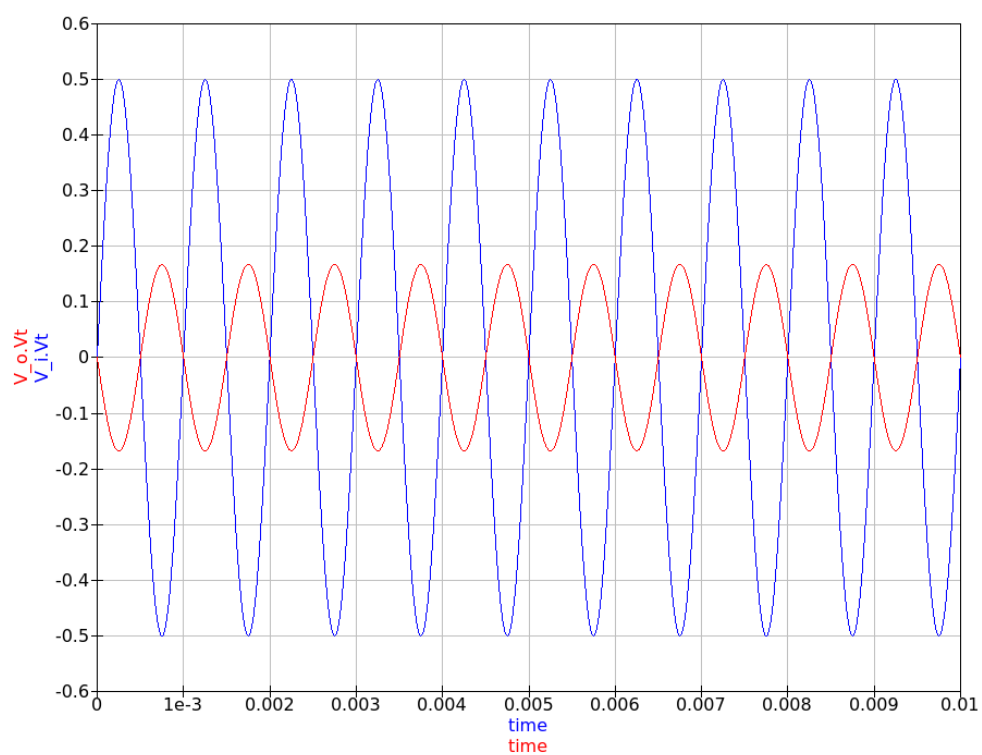


図 7 1 kHz の時の波形

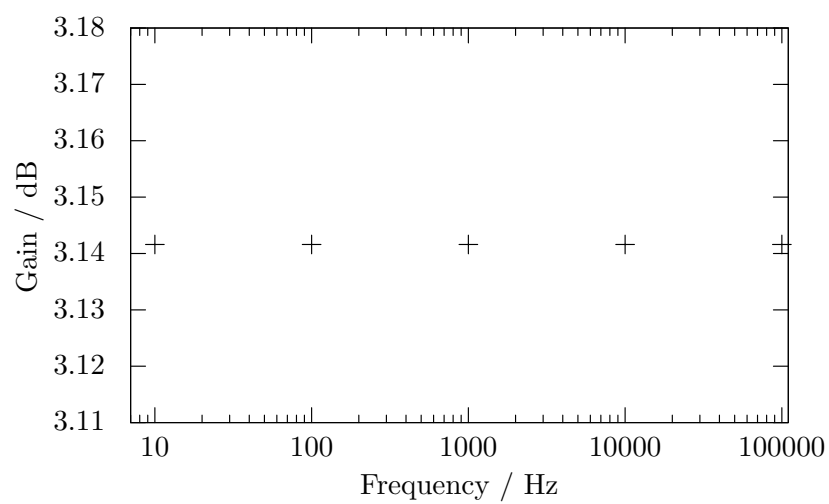
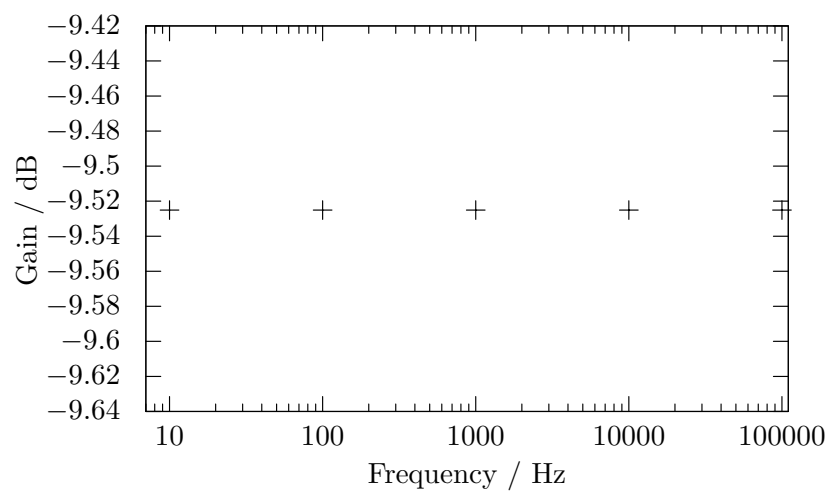


図 8 Bode 線図の実測値

3.4 考察

3.4.1 測定 1-A-01

$R_1 = 0.999 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3.381 \text{ k}\Omega$ としたことから反転増幅器の増幅率は

$$\frac{R_2}{R_1} = 3.38 \quad (14)$$

となる. 一方で (13) からシミュレーションにより得られた増幅率は 3.39 である. 実験値と理論値の相対誤差は 0.3% であり, 十分に一致していると考えられる.

また図 6 からオペアンプの入力電圧 $\pm 15 \text{ V}$ を超える電圧は出力されていないことがわかる. さらに v_o が飽和した時 v_d も変化していることがわかる. これについて (6) から

$$\begin{aligned} \frac{v_i - v_d}{R_1} &= \frac{v_d - v_o}{R_2} \\ v_d &= \frac{R_2 v_i}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 v_o}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで v_o が飽和した時 $v_o = \pm 15 \text{ V}$ となる. このことから

$$v_{d\pm} = 0.772v_i \pm 3.42 \quad (16)$$

を得る. 一方で図 6 の V_d の直線部を最小二乗 fit して回帰曲線を求めると図 9 のようになり, 回帰曲線は以下の関数になった.

$$y = \begin{cases} 0.7718x + 3.420 \\ 0.7719x - 3.419 \end{cases} \quad (17)$$

それぞれ有効数字 3 桁の範囲で (16) と完全に一致しており, 上での立式は正しいと考えられる.

3.4.2 測定 1-A-02

図 7 を見るとたしかに V_{p-p} が 0.33 倍程度で, 位相が反転した波形が出力されていることがわかる.

図 5 と図 8 を見比べるとどちらも周波数依存性の無いグラフでありその値もほぼ等しい. したがって (10) で得た伝達関数は正しいとわかる.

位相がどちらも π 程度で一定であるのに対し, Gain は 0.3% 程度の差がある. これは gnuplot が十分な桁数を持ってグラフを描画しているのに対し, Qucs Spice が小数点以下 3 桁を切り捨てて出力したことが原因だと考えられる.

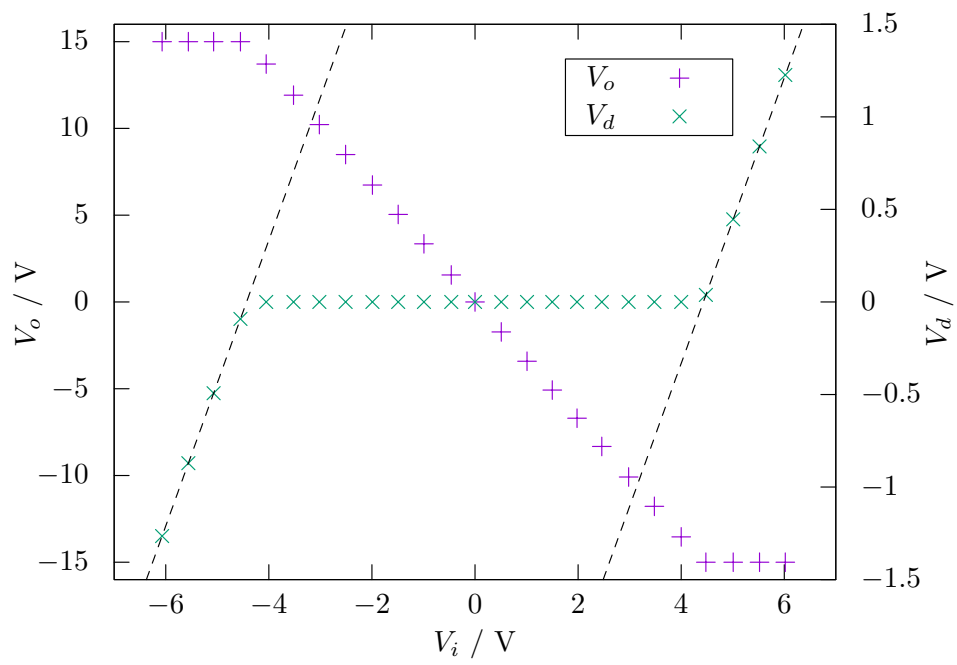


図 9 V_d の回帰曲線

4 実験 1-B：非反転増幅器

4.1 原理

4.1.1 回路方程式

図 10 に非反転増幅器の回路図を示す．仮想短絡を考えるとオペアンプの $-$ 端子の電圧 v_- は入力電圧 v_i と等しいと考えられる．さらに v_- は v_o を R_1 と R_2 で分圧した電圧になるので

$$\begin{aligned} v_i = v_- &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \\ v_o &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_i \end{aligned} \quad (18)$$

となる．以上から非反転増幅器は入力信号に対して位相がそのままで，電圧が $1 + R_2/R_1$ 倍の信号が出力されることがわかる．

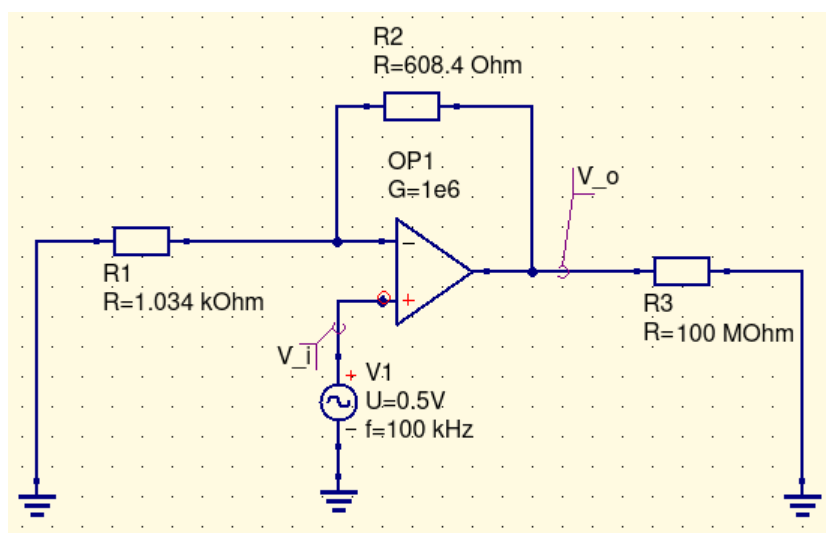


図 10 非反転増幅器

4.1.2 伝達関数

(18) から伝達関数を求めると以下ようになる．

$$\begin{aligned} V_o &= \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_i \\ G(s) &= \frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (19)$$

したがって (11) と同様に図 10 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 11 のようになる．

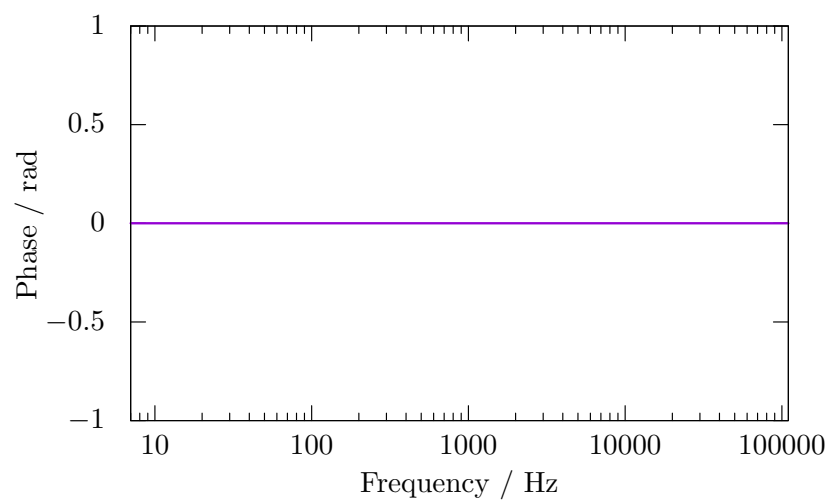
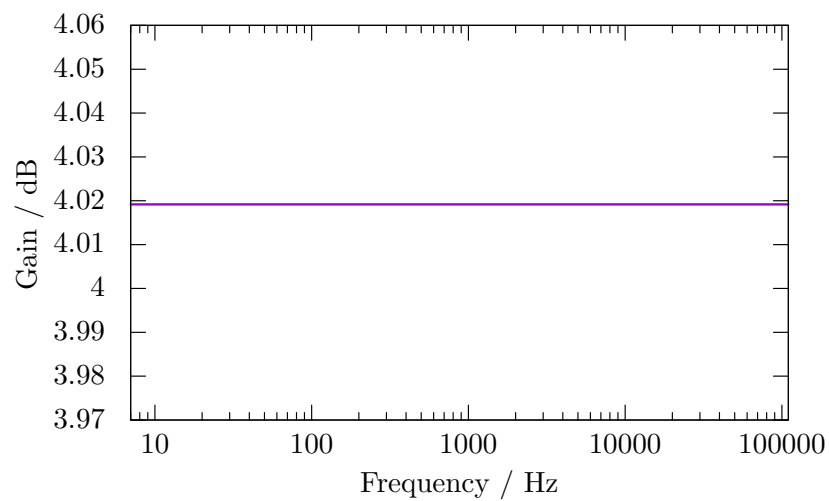


図 11 Bode 線図の理論値

4.2 方法

4.2.1 測定 1-B-01

図 10 の回路を Qucs Spice 上で作成し DC bias Simulation を行った. まず $R_1 = 1.034 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5.025 \text{ k}\Omega$ として電圧利得 6 倍の非反転増幅器を構成した. この非反転増幅器上で入力電圧 V_i を -3 V から 3 V まで 0.5 V 刻みで変化させながら出力電圧 V_o を記録した.

4.2.2 測定 1-B-02

上記の回路で R_2 を $608.4 \text{ }\Omega$ に変更し, 電圧利得 1.6 倍の非反転増幅器を構成した. この回路において Transient Simulation を行った. この回路に $V_{p-p} = 1 \text{ V}$, 周波数が 10, 100, 1k, 10k, 100 kHz の正弦波を入力し利得及び位相差を記録, Bode 線図を作成した. また周波数が 1 kHz の時の波形を記録した.

4.3 結果

4.3.1 測定 1-B-01

図 12 に測定 1-B-01 の結果を示す. 破線は V_o の直線部分を最小二乗 fit したものであり回帰曲線は以下の関数である.

$$y = 5.843x + 9.202 \times 10^{-31} \quad (20)$$

4.3.2 測定 1-B-02

図 13 に周波数 1 kHz の時の波形を示す. 青線が入力信号 V_i , 赤線が出力信号 V_o である. 縦軸の単位は V , 横軸の単位は s である. また図に測定 1-B-02 で得た Bode 線図を示す.

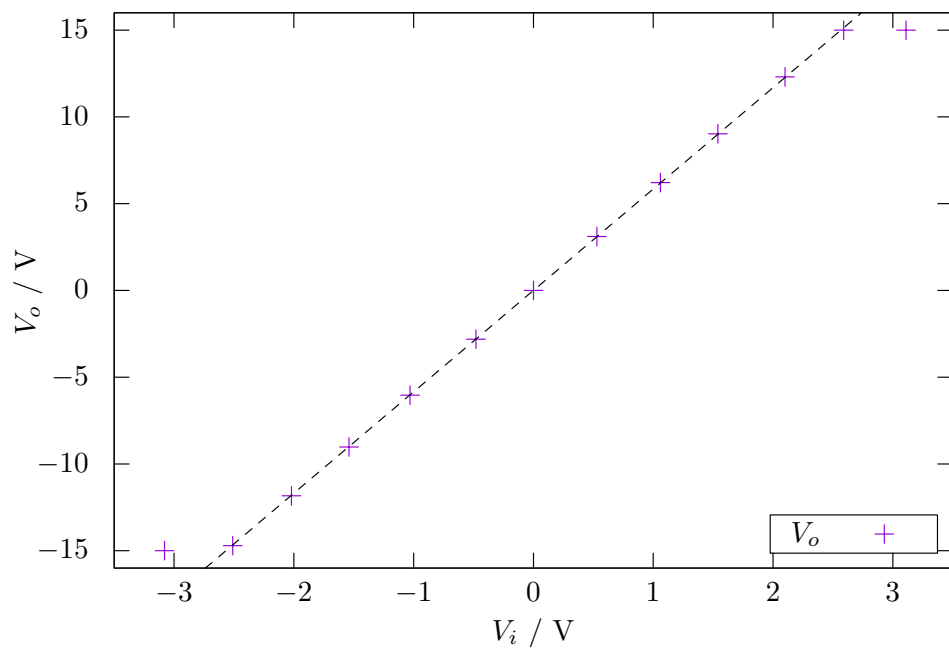


図 12 V_i に対する V_o の変化

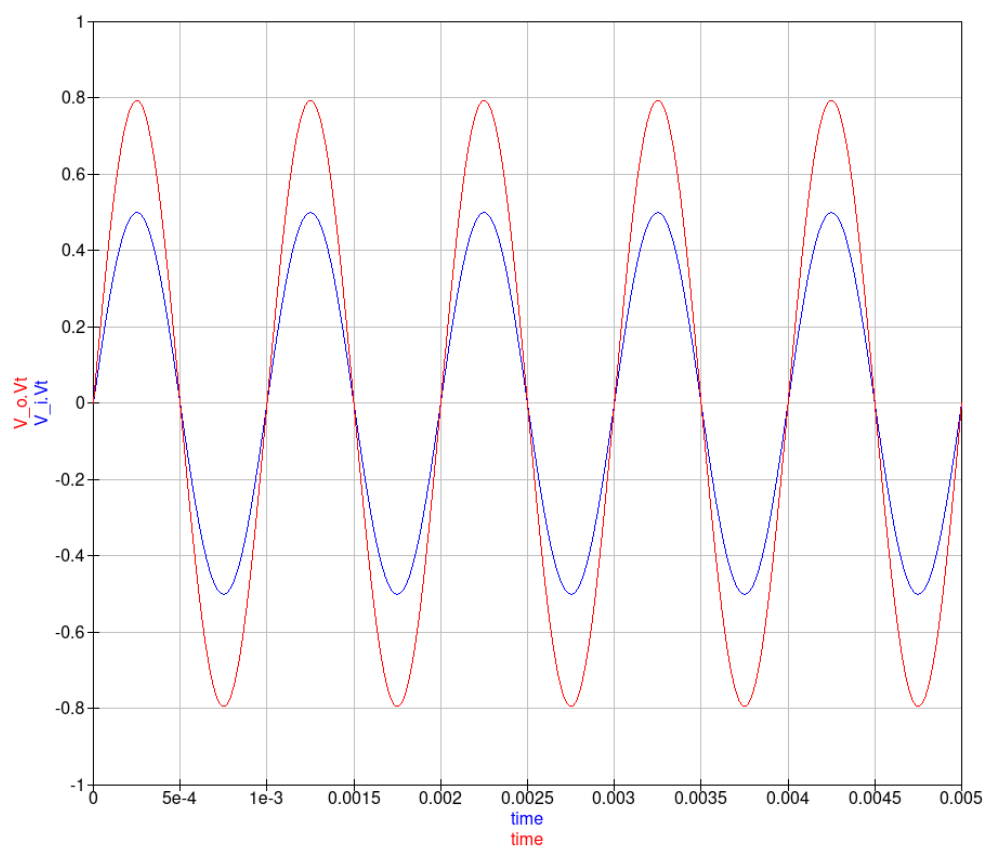


図 13 1 kHz の時の波形

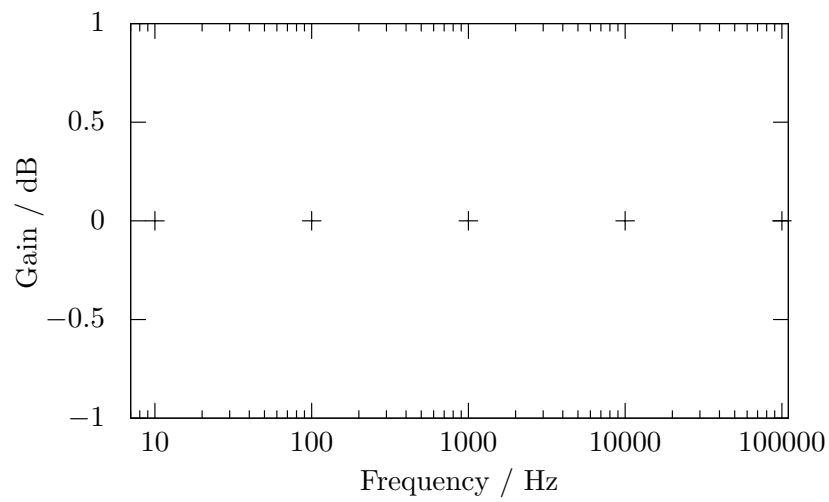
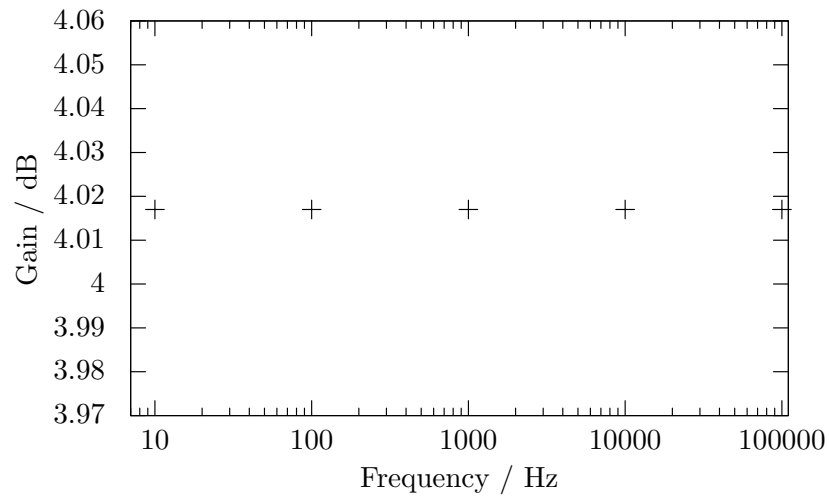


図 14 Bode 線図の実測値

4.4 考察

4.4.1 測定 1-B-01

$R_1 = 1.034 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5.025 \text{ k}\Omega$ としたことから反転増幅器の増幅率は

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = 5.85 \quad (21)$$

となる. 一方で (20) からシミュレーションにより得られた増幅率は 5.84 である. 実験値と理論値の相対誤差は 0.2% であり, 十分に一致していると考えられる.

また図 12 から反転増幅器と同様にオペアンプの入力電圧 $\pm 15 \text{ V}$ を超える電圧は出力されていないことがわかる.

4.4.2 測定 1-B-02

図 13 を見るとたしかに V_{p-p} が 1.6 倍程度で, 同位相の波形が出力されていることがわかる.

図 11 と図 14 を見比べるとどちらも周波数依存性の無いグラフでありその値もほぼ等しい. したがって (10) で得た伝達関数は正しいとわかる.

5 実験 1-C : 加算, 減算回路

5.1 原理

5.1.1 加算回路の回路方程式

図 15 に加算回路の回路図を示す. R_1, R_2 を流れる電流をそれぞれ i_1, i_2 とすると

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \quad (22)$$

仮想短絡によりオペアンプの $-$ 端子の電位は 0 である. またオペアンプに流れ込む電流は 0 とみなせるので R_3 を流れる電流は $I = i_1 + i_2$ となる. したがって

$$v_o = - \left(\frac{R_3}{R_1} v_1 + \frac{R_3}{R_2} v_2 \right) \quad (23)$$

となり, たしかに 2 つの入力それぞれを定数倍したものが加算されていることがわかる.

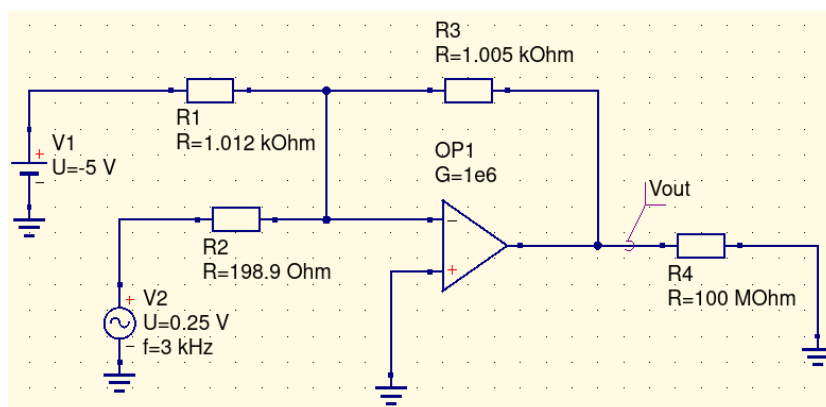


図 15 加算回路

5.1.2 減算回路の回路方程式

図に減算回路の回路図を示す. オペアンプの $+$ 端子の電圧 v_+ は V_2 を R_2 と R_4 で分圧した電圧に等しいので

$$v_+ = \frac{R_4}{R_2 + R_4} v_2 \quad (24)$$

同様に v_- は

$$v_- = \frac{R_1 v_o + R_3 v_1}{R_1 + R_3} \quad (25)$$

仮想短絡から $v_+ = v_-$ なので

$$\begin{aligned}\frac{R_4}{R_2 + R_4}v_2 &= \frac{R_1v_o + R_3v_1}{R_1 + R_3} \\ v_o &= \frac{(R_1 + R_3)R_4}{(R_2 + R_4)R_1}v_2 - \frac{R_3}{R_1}v_1\end{aligned}\quad (26)$$

ここで $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = R_4 = R_f$ とすると

$$v_o = \frac{R_f}{R}(v_2 - v_1)\quad (27)$$

となり, たしかに 2 つの入力それぞれを定数倍したものが減算されていることがわかる.

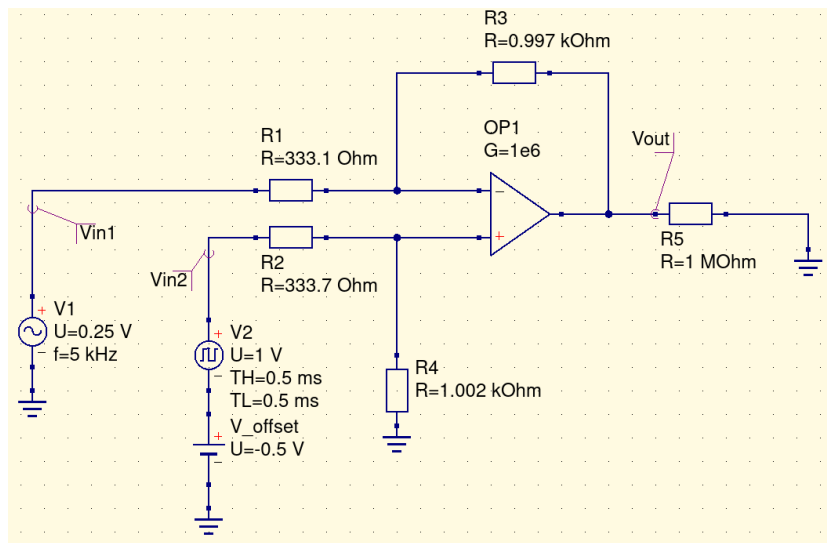


図 16 減算回路

5.2 方法

5.2.1 加算回路

図 15 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行った. $R_1 = 1.012 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 198.9 \text{ }\Omega$, $R_3 = 1.005 \text{ k}\Omega$ である. また v_1 は DC-5 V, v_2 は $V_{p-p} = 0.5 \text{ V}$, $f = 3 \text{ kHz}$ の正弦波である. (23) から

$$v_o = \frac{1.005 \times 10^3}{1.012 \times 10^3} 5 - \frac{1.005 \times 10^3}{198.9} 0.5 \sin \omega t \quad (28)$$

このことから出力波形は 5 V 中心で $V_{p-p} = 2.5 \text{ V}$, $f = 3 \text{ kHz}$ で入力信号と逆相の正弦波になる.

5.2.2 減算回路

図 16 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行った. $R_1 = 333.1 \text{ }\Omega$, $R_2 = 333.7 \text{ }\Omega$, $R_3 = 0.997 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 1.002 \text{ k}\Omega$ である. また v_1 は $V_{p-p} = 0.5 \text{ V}$, $f = 5 \text{ kHz}$ の正弦波, v_2 は $V_{p-p} = 1 \text{ V}$, $f = 1 \text{ kHz}$ の矩形波である. (26) から

$$v_o = 2.995v_2 - 2.993v_1 \quad (29)$$

このことから出力波形は $V_{p-p} = 3 \text{ V}$, $f = 1 \text{ kHz}$ の矩形波から $V_{p-p} = 1.5 \text{ V}$, $f = 5 \text{ kHz}$ の正弦波を引いたものになる.

5.3 結果

5.3.1 加算回路

図 17 に出力波形を示す. 青線は入力した正弦波, 赤線は出力波形である.

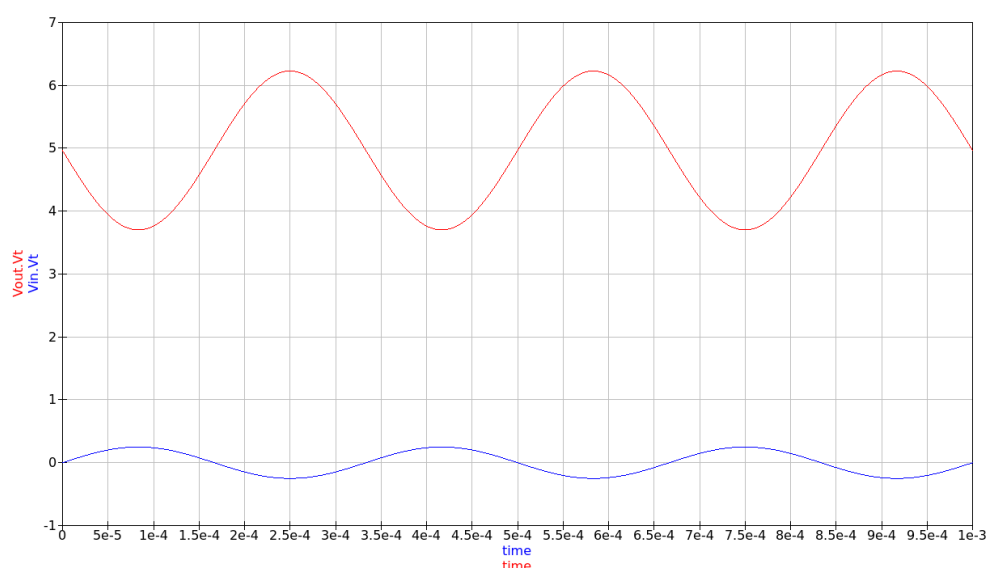


図 17 加算回路の出力波形

5.3.2 減算回路

図 18 に出力波形を示す. 青線は v_1 , 赤線は v_2 , ピンクの線は v_o である.

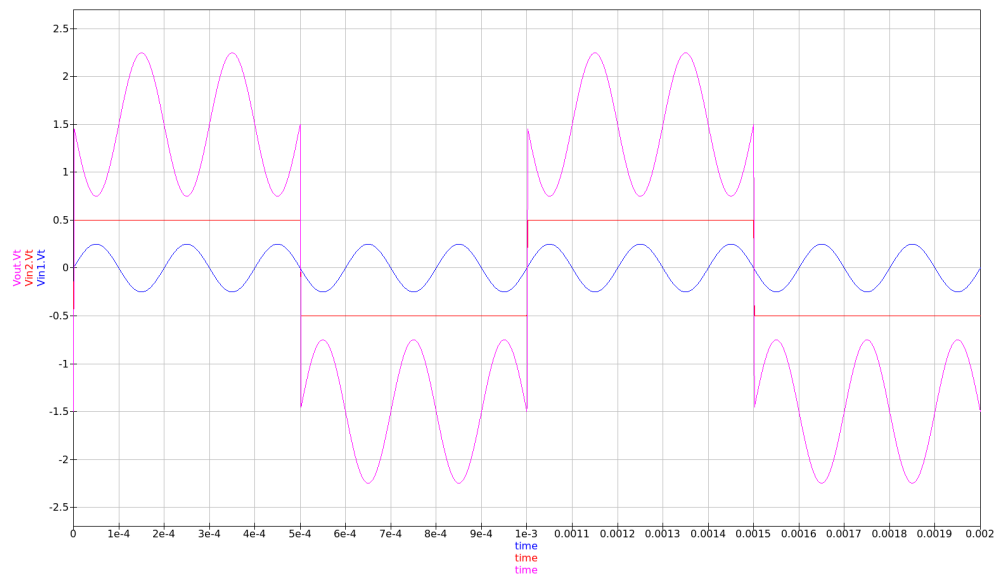


図 18 減算回路の出力波形

5.4 考察

5.4.1 加算回路

図 17 から出力波形は 5 V 中心で $V_{p-p} = 2.5$ V となっていることがわかる。また入力波形に対して出力波形は位相が逆転していることがわかる。したがって (23) での立式は正しいとわかる。

5.4.2 減算回路

図 18 から出力波形は $V_{p-p} = 3$ V の方形波と $V_{p-p} = 1.5$ V の正弦波を合わせた形になっており、なおかつ正弦波の位相が逆転していることから正弦波は減算されているとわかる。したがって (26) での立式は正しいとわかる。

6 実験 2-A-01：完全積分回路

6.1 原理

6.1.1 回路方程式

図 19 に完全積分回路の回路図を示す. R_1 を流れる電流は全てコンデンサに流れるのでコンデンサ両端の電圧 v_C は

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_C(0) \\ &= \frac{1}{CR_1} \int_0^t v_i dt + v_C(0) \end{aligned} \quad (30)$$

ここでコンデンサの初期電荷による項を $v_C(0)$ としている. 仮想短絡によりオペアンプの $-$ 端子の電位は 0 なので出力電圧 v_o は時刻 $t = 0$ でコンデンサに電荷が無いとすれば

$$v_o = -v_C = -\frac{1}{CR_1} \int_0^t v_i dt \quad (31)$$

となり確かに入力電圧の積分値が出力となっている.

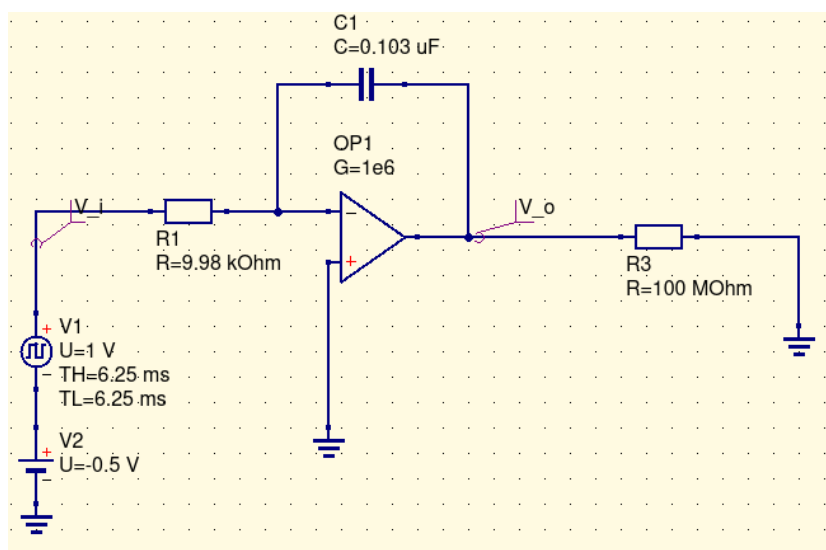


図 19 積分回路

6.1.2 伝達関数

ラプラス変換の積分則は以下のようになる.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{1}{s}F(s) \quad (32)$$

ここで初期値は 0 としている. したがって (31) をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} V_o &= -\frac{1}{CR_1s}V_i(s) \\ G(s) &= -\frac{1}{CR_1s} \end{aligned} \quad (33)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log \left| -\frac{1}{CR_1j\omega} \right| = -20 \log(CR_1\omega) \\ \phi(\omega) &= \angle \left(-\frac{1}{CR_1j\omega} \right) = \angle(j) = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (34)$$

以上から図 19 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 20 のようになる.

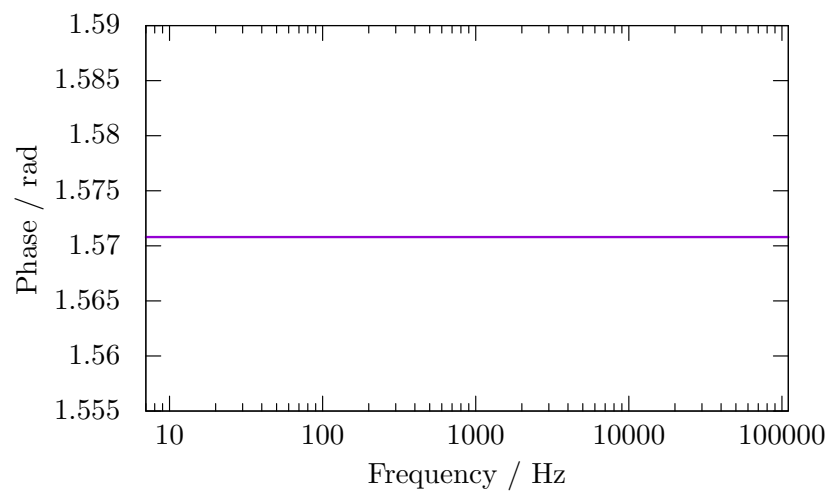
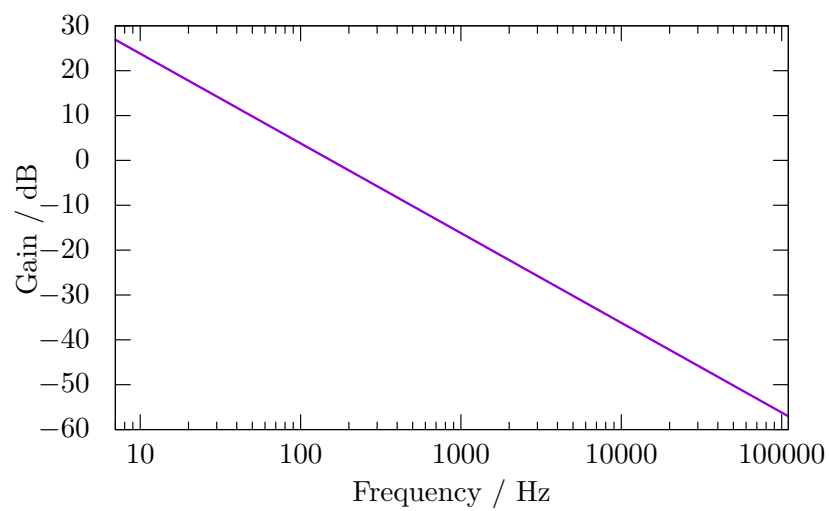


図 20 Bode 線図の理論値

6.2 方法

6.2.1 測定 2-A-01-(a)

図 19 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行った. $R_1 = 9.98 \text{ k}\Omega$, $C = 0.103 \text{ }\mu\text{F}$ である. v_i は $V_{p-p} = 1 \text{ V}$, $f = 80 \text{ Hz}$ の矩形波とした.

6.2.2 測定 2-A-01-(b)

入力の矩形波の平均値を -1 から 1 V の範囲で変化させて同様に Transient Simulation を行った.

6.3 結果

6.3.1 測定 2-A-01-(a)

図 21 に出力波形を示す. 青線が入力波形 v_i , 赤線が出力波形 v_o である.

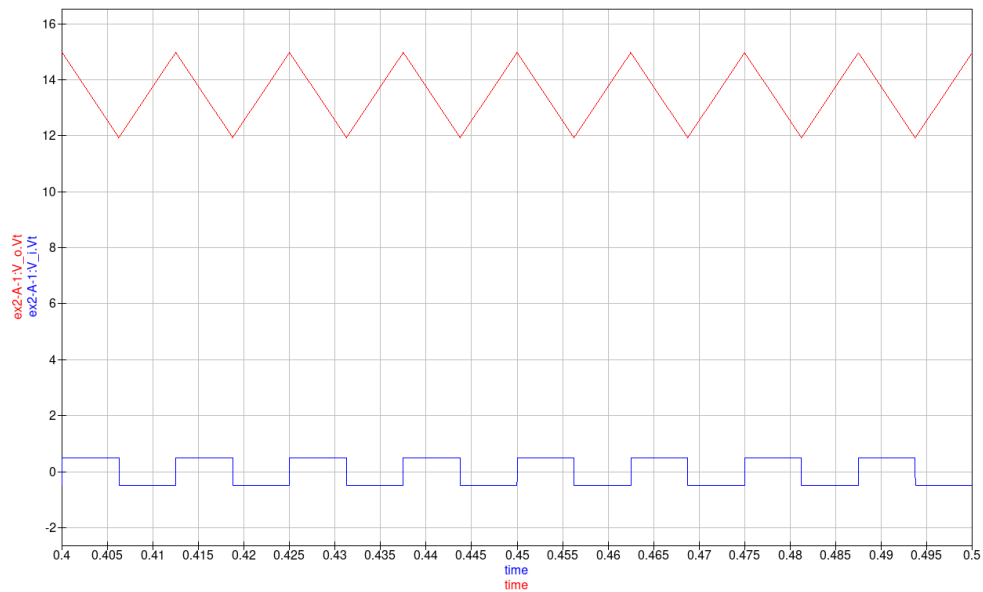


図 21 完全積分回路の出力波形

6.3.2 測定 2-A-01-(b)

図に矩形波の平均値を 0.2 V としたときの波形を示す. 青線が入力波形 v_1 , 赤線が出力波形 v_o である.

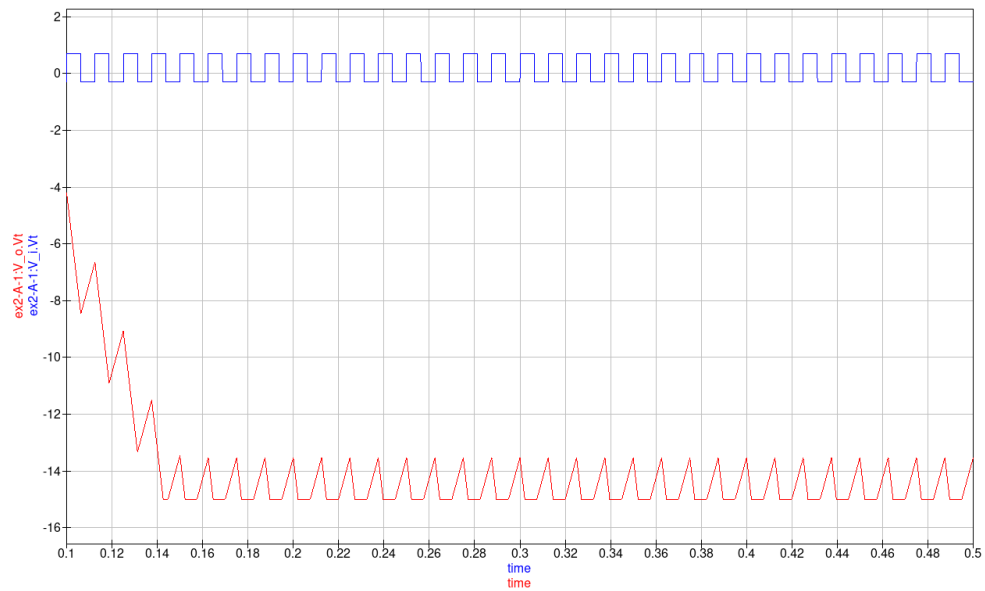


図 22 完全積分回路の出力波形

6.4 考察

6.4.1 測定 2-A-01-(a)

矩形波の 1 周期を以下の関数で表される.

$$v_i = \begin{cases} V & (0 \leq t < T/2) \\ -V & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (35)$$

これを (31) に代入すると

$$v_o = -\frac{1}{CR_1} \int_0^T v_i dt = \begin{cases} -Vt/CR_1 & (0 \leq t < T/2) \\ Vt/CR_1 & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (36)$$

となり, これは三角波である. 図 21 を見ると出力波形はたしかに三角波であり, 積分器として機能していることがわかる.

一方で (39) から予測される三角波の上限値 v_{max} と下限値 v_{min} は以下ようになる.

$$\begin{aligned} v_{max} &= 0 \\ v_{min} &= -\frac{VT}{2CR_1} \end{aligned} \quad (37)$$

これに値を代入すると $v_{min} \simeq -3.04 \text{ V}$ となる. しかし図 21 を見ると実際の波形は大きく逸れている. これはコンデンサの初期電荷が 0 でないことに依ると考えられる. ここで Qucs Spice のコンデンサ部品にはトランジェント初期電圧という項目があったため, これを 0 として再度シミュレーションを行った. その結果は図 24 のようになった. このグラフの上限値は 0 V, 下限値は -3.04 V であり上で予測した波形と一致している. したがって図 21 の波形が予測される波形と異なっていたのはコンデンサの初期電圧によるものだと言える. このことは完全積分回路ではコンデンサの帯電により容易に出力にオフセットが掛かることを示唆している.

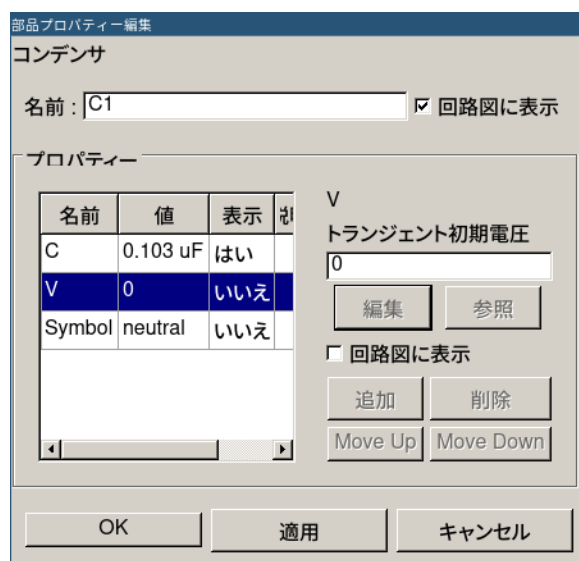


図 23 トランジェント初期電圧の設定

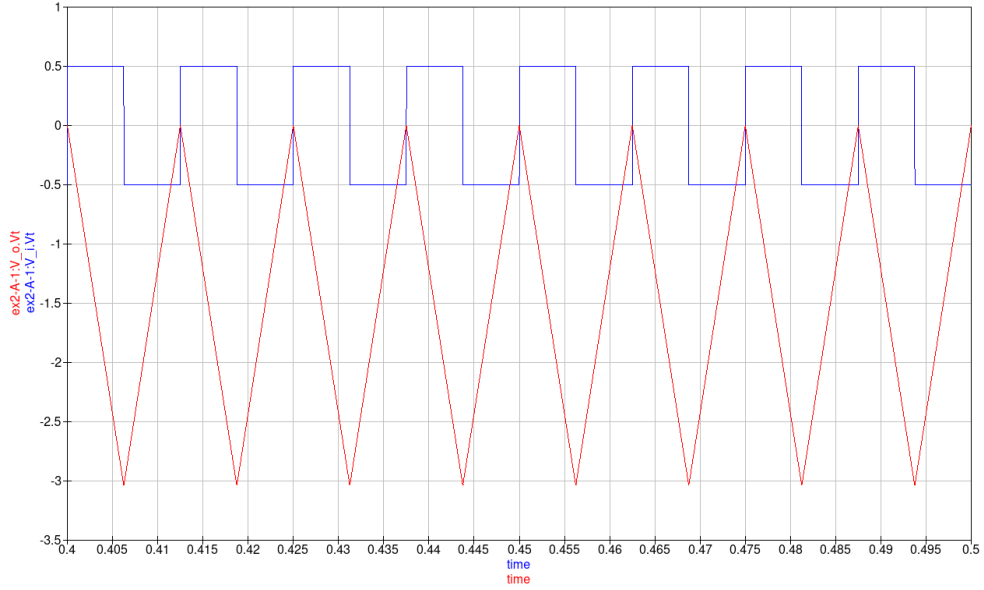


図 24 トランジェント初期電圧を設定したときの出力波形

6.4.2 測定 2-A-01-(b)

平均値が 0 からオフセットした矩形波はオフセット電圧を V_{ofst} として以下のように表される.

$$v_i = \begin{cases} V + V_{ofst} & (0 \leq t < T/2) \\ -V + V_{ofst} & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (38)$$

これを (31) に代入すると

$$v_o = -\frac{1}{CR_1} \int_0^T v_i dt = \begin{cases} (-V - V_{ofst})t/CR_1 & (0 \leq t < T/2) \\ (V - V_{ofst})t/CR_1 & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (39)$$

となり, 三角波に一定のドリフトが掛かった波形になるとわかる. 実際に図 22 では三角波に減少傾向のドリフトが掛かっており, 正しく積分演算を行っていると考えられる.

7 実験 2-A-02：不完全積分回路

7.1 原理

7.1.1 回路方程式

図 25 に不完全積分回路の回路図を示す. R_2 に流れる電流を i_R , C_1 に流れる電流を i_C とする. オペアンプの $-$ 端子は仮想短絡から電位 0 なので

$$\begin{aligned} i_R &= -\frac{v_o}{R_2} \\ i_C &= -C \frac{\partial v_o}{\partial t} \end{aligned} \quad (40)$$

オペアンプに流れ込む電流は 0 とできるので

$$\begin{aligned} -\frac{v_o}{R_2} - C \frac{\partial v_o}{\partial t} &= \frac{v_i}{R_1} \\ \left(\frac{1}{CR_2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) v_o &= -\frac{v_i}{CR_1} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで $R_2 \rightarrow \infty$ とすると完全積分回路と同じ結果が得られる. (41) は 1 次の非斉次微分方程式なので, その解は $\tau = CR_2$ を用いて

$$v_o(t) = e^{-t/\tau} \left(-\int_0^t \frac{v_i(t)}{CR_1} e^{t/\tau} dt \right) \quad (42)$$

ここで積分定数は 0 とした. τ は時定数である.

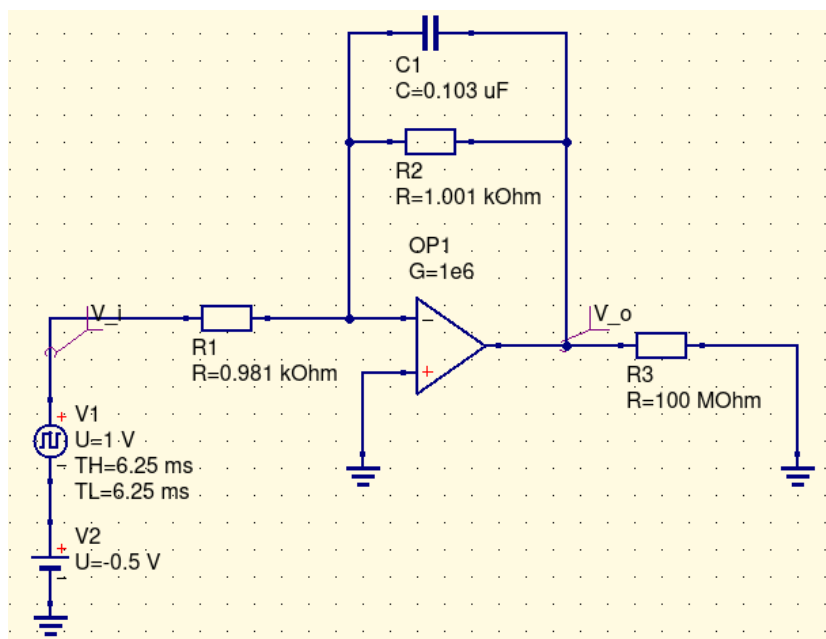


図 25 不完全積分回路

7.1.2 伝達関数

ラプラス変換の微分則は以下のようになる。

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = sF(s) \quad (43)$$

したがって (41) をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{CR_2}V_o + sV_o &= -\frac{1}{CR_1}V_i \\ G(s) &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2s} \end{aligned} \quad (44)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log \left| -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2j\omega} \right| \\ &= 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 20 \log \sqrt{1 + (CR_2\omega)^2} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle \left(-\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + CR_2j\omega} \right) = \angle(-R_2/R_1) - \angle(1 + CR_2j\omega) \\ &= \pi - \arctan(CR_2\omega) \end{aligned} \quad (46)$$

ここで ω が十分小さいときは

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &\simeq 20 \log(R_2/R_1) \\ \phi(\omega) &\simeq \pi \end{aligned} \quad (47)$$

また ω が大きいときは

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= -20 \log \left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2} + (CR_1\omega)^2} \right) \simeq -20 \log(CR_1\omega) \\ \phi(\omega) &\simeq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (48)$$

すなわち $G_V(\omega)$ は低周波域では反転増幅器, 高周波では完全積分回路の特性を示す。以上から図 25 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 26 のようになる。破線は低周波, 高周波での Gain の漸近線である。この交点は

$$\begin{aligned} 20 \log(R_2/R_1) &= -20 \log(CR_1\omega) \\ \therefore \omega_c &= \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (49)$$

であり, このときの周波数はカットオフ周波数 $f_c = \omega_c/2\pi$ と呼ばれる。

以上から低周波数域では出力信号がそのまま透過するのに対し, 高周波域では信号が減衰するとわかる。この特性を利用して不完全積分回路をローパスフィルタ (LPF) として用いることができる。

このことはコンデンサのリアクタンスが低周波に対して大きく、高周波に対して小さいことから、
も定性的に理解できる。すなわち低周波成分はコンデンサに比べてリアクタンスの低い抵抗に流れ
るのに対して、高周波成分はコンデンサに流れ込むのである。

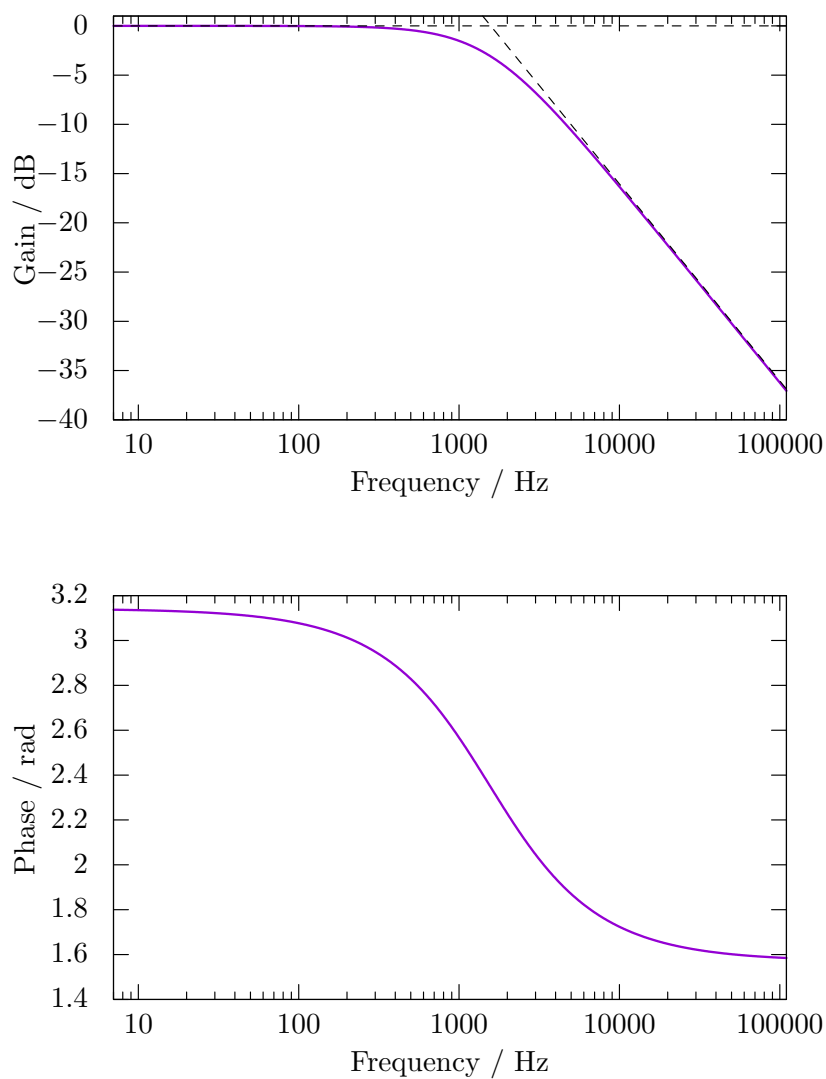


図 26 Bode 線図の理論値

7.1.3 ステップ応答

入力をステップ関数

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ V_s & (0 \leq t) \end{cases} \quad (50)$$

とすると (42) は以下ようになる.

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{V_s e^{-t/\tau}}{CR_1} \int_0^t e^{t/\tau} dt \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) V_s \end{aligned} \quad (51)$$

ここで $t = \tau$ において出力電圧は漸近値 $-R_2 V_s / R_1$ の $1 - 1/e = 0.632$ 倍となることがわかる. これは回路の応答速度の指標として用いられる数値となっている.

7.2 方法

7.2.1 測定 2-A-02-(a)

図 19 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行い, 時定数 τ を測定した. 時定数は出力の電圧値を Qucs Spice の表機能で読み取ることで求めた. $R_1 = 0.981 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1.001 \text{ k}\Omega$, $C = 0.103 \text{ }\mu\text{F}$ である. また v_i は $V_{p-p} = 1 \text{ V}$, $f = 80 \text{ Hz}$ の矩形波とした.

7.2.2 測定 2-A-02-(b)

上の回路のにおいて抵抗を表のように変更して出力波形を比較した. その中で入力波形に対して出力波形が尤もらしかった, すなわち出力波形が三角波に近かった回路に対して入力を正弦波, 三角波に変えた時の出力波形を記録した.

表 2 測定 2-A-02-(b) の測定条件

条件	R_1 / Ω	R_2 / Ω	時定数 τ / ms
1	981	1.00k	0.103
2	9.87k	9.82k	1.01
3	100k	101k	10.4
4	1.00M	1.00M	103

7.3 結果

7.3.1 測定 2-A-02-(a)

図 27 に出力波形を示す. 青線が入力波形, 赤線が出力波形である. また図 28 に出力波形の立ち上がり付近を拡大した波形を示す. この波形から時定数 τ は以下のように求まった.

$$\tau = 0.10300 \text{ ms} \quad (52)$$

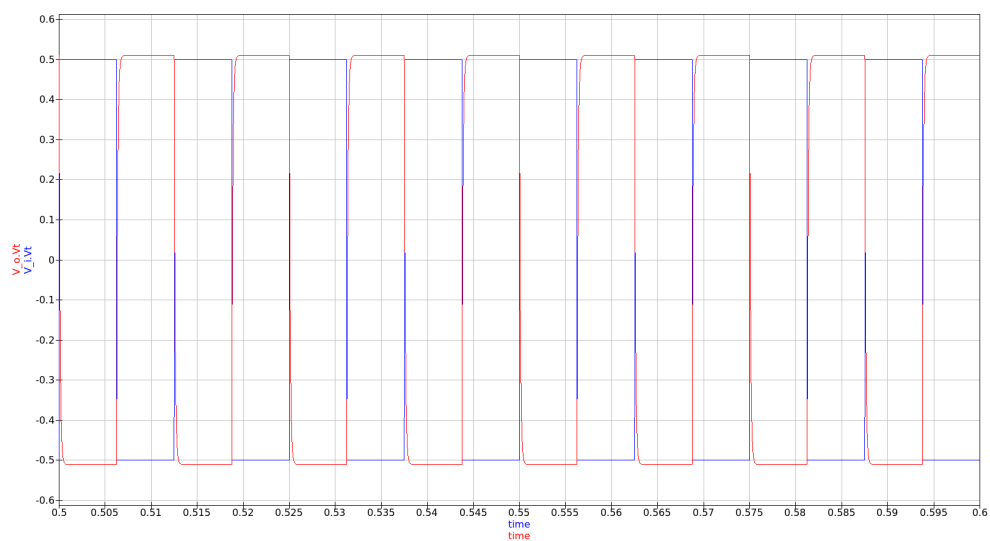


図 27 不完全積分回路の出力波形

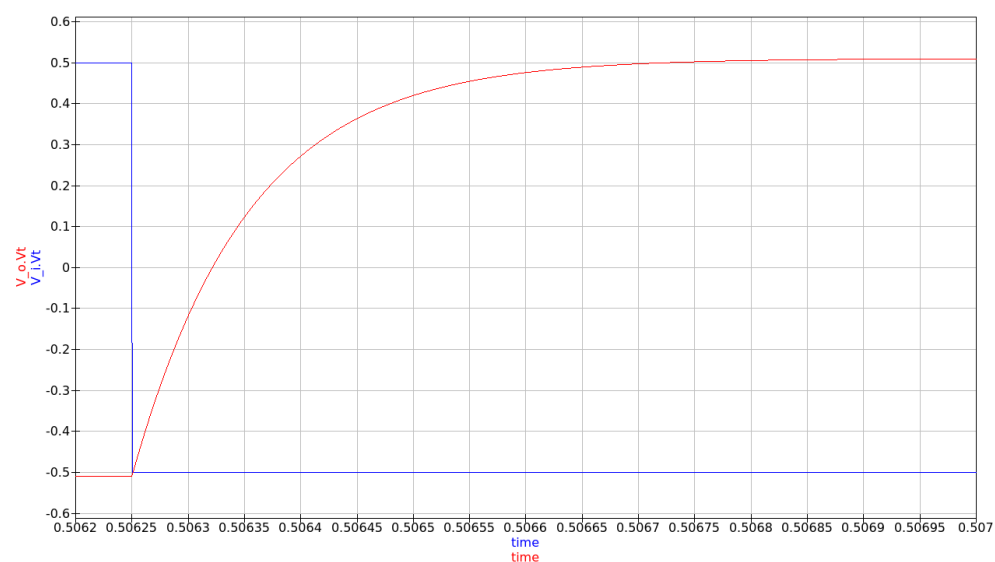


図 28 出力波形の立ち上がり

7.3.2 測定 2-A-02-(b)

表 2 の条件 3 のとき, 矩形波の入力に対する出力波形は図 29 のようになり三角波に近い波形を出力した. 図 30, 図 31 に条件 3 において入力信号を正弦波, 三角波としたときの出力波形を示す.

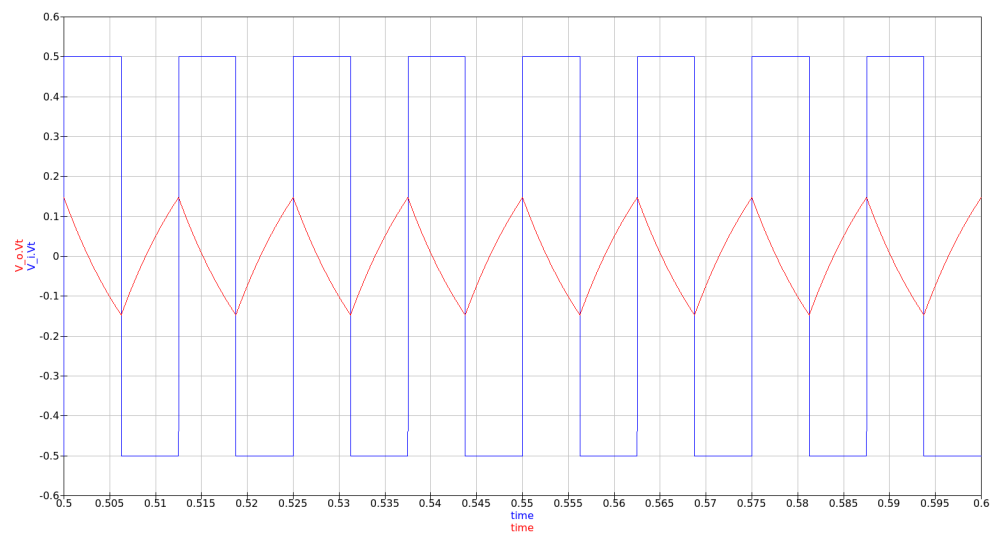


図 29 矩形波に対する出力波形

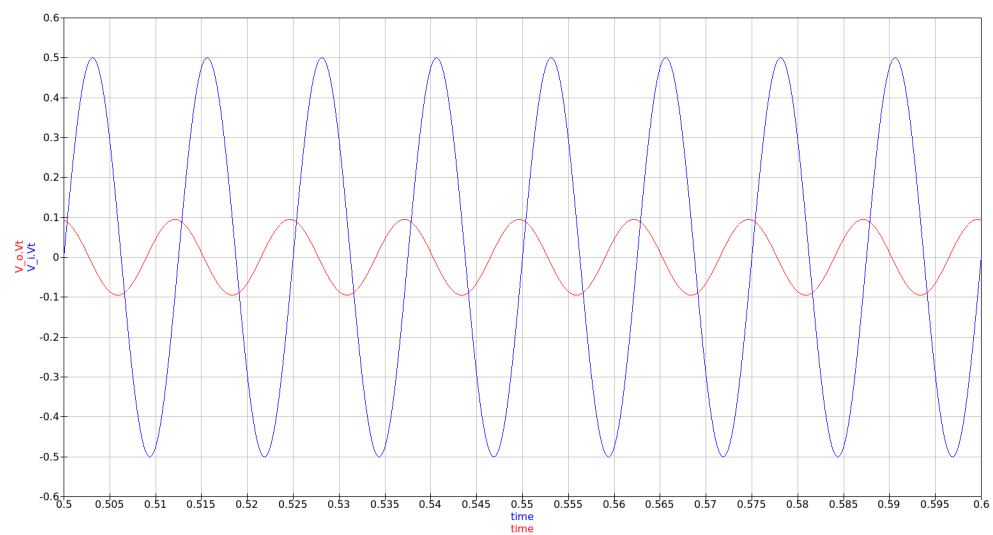


図 30 正弦波に対する出力波形

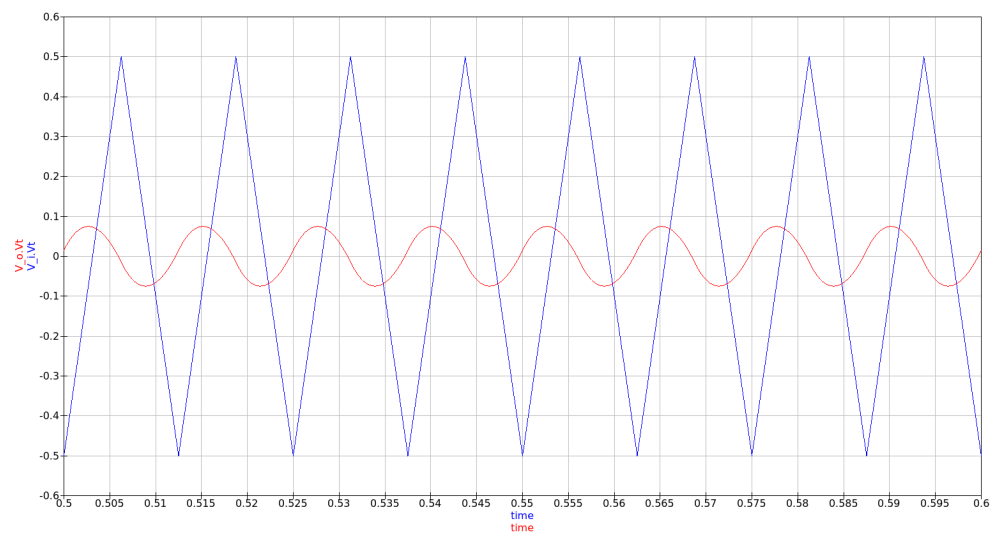


図 31 三角波に対する出力波形

7.4 考察

7.4.1 測定 2-A-02-(a)

$R_2 = 1.001 \text{ k}\Omega$, $C = 0.103 \text{ }\mu\text{F}$ から時定数は

$$\tau = 0.10310 \text{ ms} \quad (53)$$

である. 一方で実際に測定された時定数は $\tau = 0.10300 \text{ ms}$ であったことから相対誤差は 0.1% であり, よく一致している.

また時定数からカットオフ周波数は

$$f_c = 1.55 \text{ kHz} \quad (54)$$

となる. 一方で入力信号の周波数は 80 Hz であることから回路は反転増幅器の特性を示すと考えられる. また $R_1 \simeq R_2$ であり出力波形の増幅率はほぼ 1 となる. 実際に図 27 を見ると出力波形は入力波形とほぼ同振幅で位相が反転しているとわかる.

7.4.2 測定 2-A-02-(b)

条件 3 において $R_1 \simeq R_2$ なのでカットオフ周波数は

$$f_c \simeq 15.3 \text{ Hz} \quad (55)$$

である. また Bode 線図は図 32 のようになる. したがって 80 Hz の入力信号に対しては条件 3 の回路は積分器としての特性を持つと考えられる. 実際に図 29 を見ると若干の歪みはあるが三角波が出力されていることがわかる. 以上から不完全積分回路を積分器として用いる場合には想定される入力信号の周波数より低いカットオフ周波数を持つように, LPF として用いる場合には想定される入力信号の周波数より高いカットオフ周波数を持つように C と R の値を定める必要がある.

また図 30 を見ると正弦波入力に対して出力は余弦波となっている. \sin 関数を積分すると \cos 関数が現れることから, この結果は妥当と言える.

更に図 31 を見ると三角波入力に対してある曲線が出力されている. これは三角波はある区間において 1 次関数であることから, 積分したことにより 2 次関数が出力されたと考えられる.

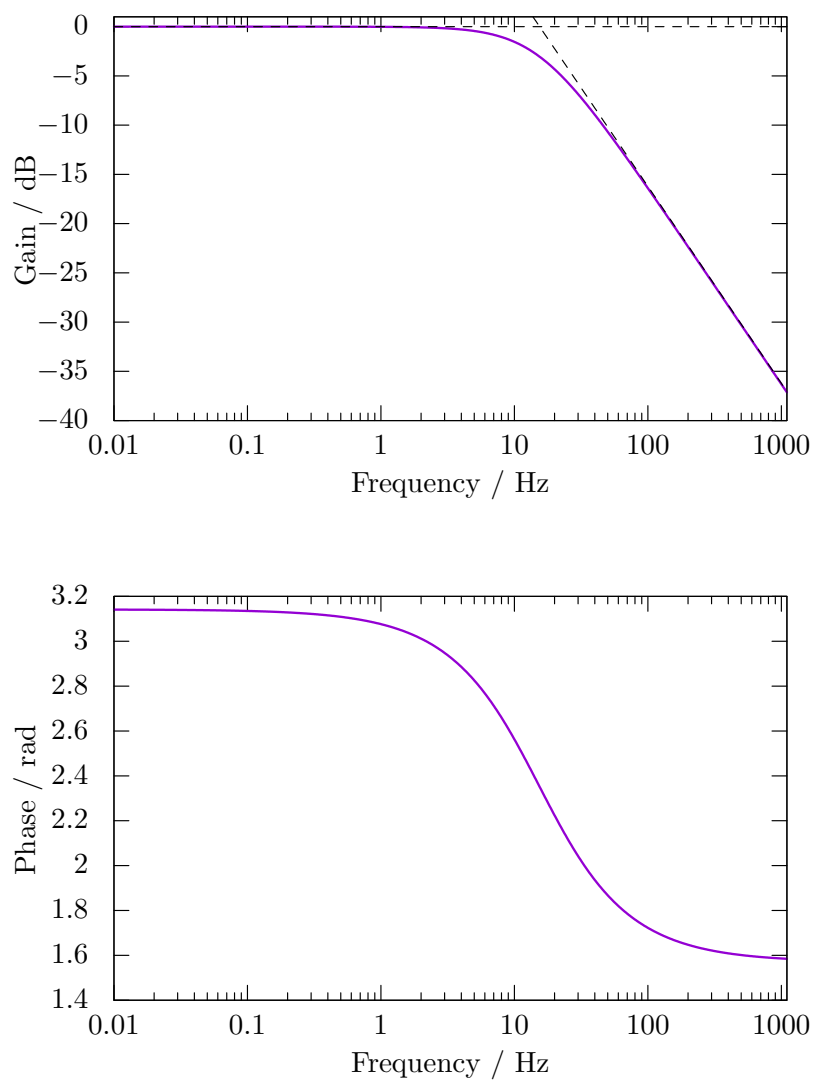


図 32 Bode 線図の理論値

8 実験 2-B：微分回路

8.1 原理

8.1.1 回路方程式

図 33 に微分回路の回路図を示す．仮想短絡からコンデンサの右側の電位は 0 である．またコンデンサに溜まっている電荷は $q = Cv_i$ なので流れる電流 i_C は

$$i_C = C \frac{dv_i}{dt} \quad (56)$$

この電流は全て抵抗に流れ込むとできるので出力電圧は

$$v_o = -R_1 i_C = -CR_1 \frac{dv_i}{dt} \quad (57)$$

となり出力電圧はたしかに入力電圧の微分で与えられる．

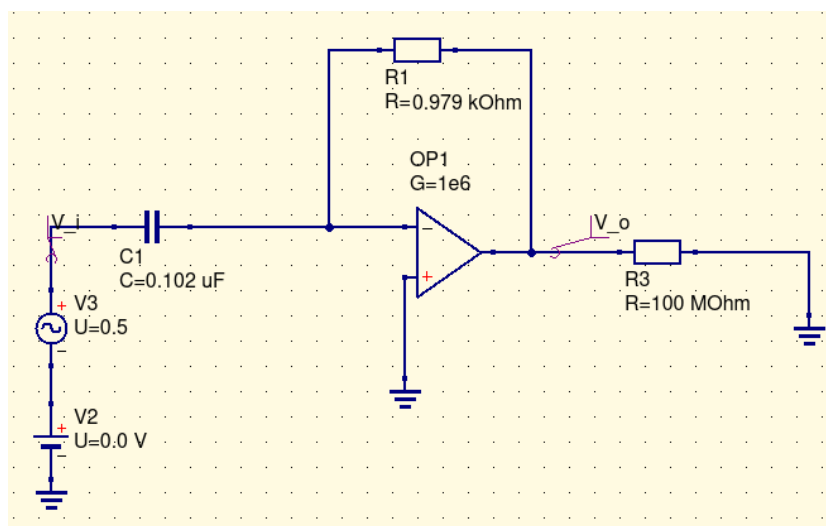


図 33 微分回路

8.1.2 伝達関数

ラプラス変換の微分則 (43) から (57) は

$$\begin{aligned} V_o &= -sCR_1 V_i \\ G(s) &= -sCR_1 \end{aligned} \quad (58)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log |-CR_1 j\omega| = 20 \log (CR_1 \omega) \\ \phi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (59)$$

以上から図 33 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 34 のようになる。

以上から微分回路の Gain は低周波域で小さく、高周波域で大きくなることがわかる。このことはコンデンサが高周波に対して低いリアクタンスを持っており透過しやすいという事実からも定性的に理解できる。

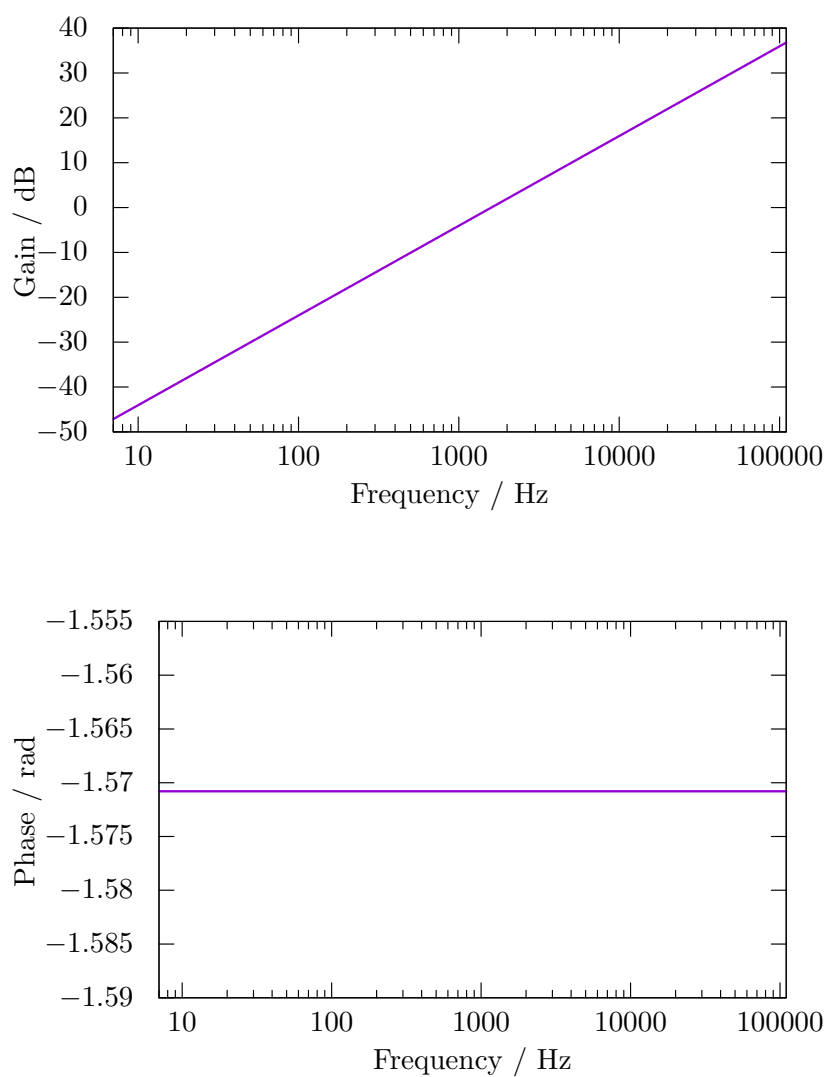


図 34 Bode 線図の理論値

8.2 方法

8.2.1 測定 2-B-01

図 33 の回路を Qucs Spice 上で作成し Transient Simulation を行い波形を記録した. $R_1 = 100.1 \text{ k}\Omega$, $C = 0.102 \text{ }\mu\text{F}$ である. v_1 は $V_{p-p} = 1 \text{ V}$, $f = 100 \text{ Hz}$ の矩形波とした.

8.2.2 測定 2-B-02

上の回路において $R_1 = 0.979 \text{ k}\Omega$, $10.16 \text{ k}\Omega$ に変えて再び Transient Simulation を行い波形を記録した. その中で入力波形に対して出力波形が尤もらしかった, すなわち出力のピーク幅が狭かった回路に対して入力を正弦波, 三角波に変えた時の出力波形を記録した.

8.3 結果

8.3.1 測定 2-B-01

図 35 に出力波形を示す. 青線が入力波形, 赤線が出力波形である.

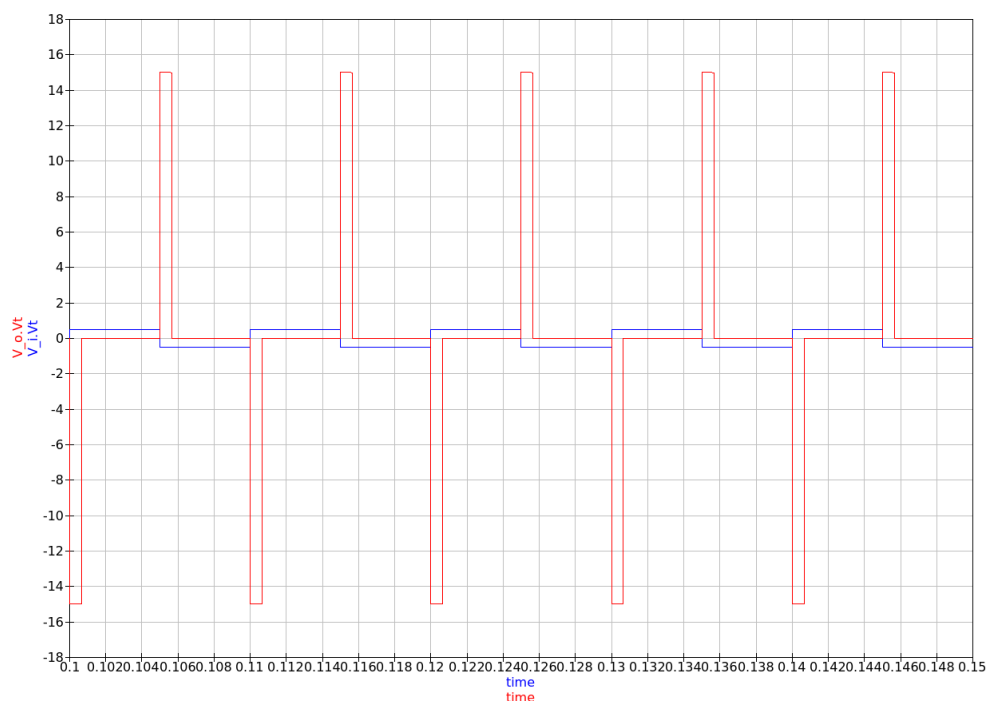


図 35 微分回路の出力波形

8.3.2 測定 2-B-02

$R_1 = 0.979 \text{ k}\Omega$ のとき, 出力波形は図 36 のようになり, そのピークが最も狭かった. また図 37, 図 38 にこの条件において入力信号を矩形波, 正弦波, 三角波としたときの出力波形を示す.

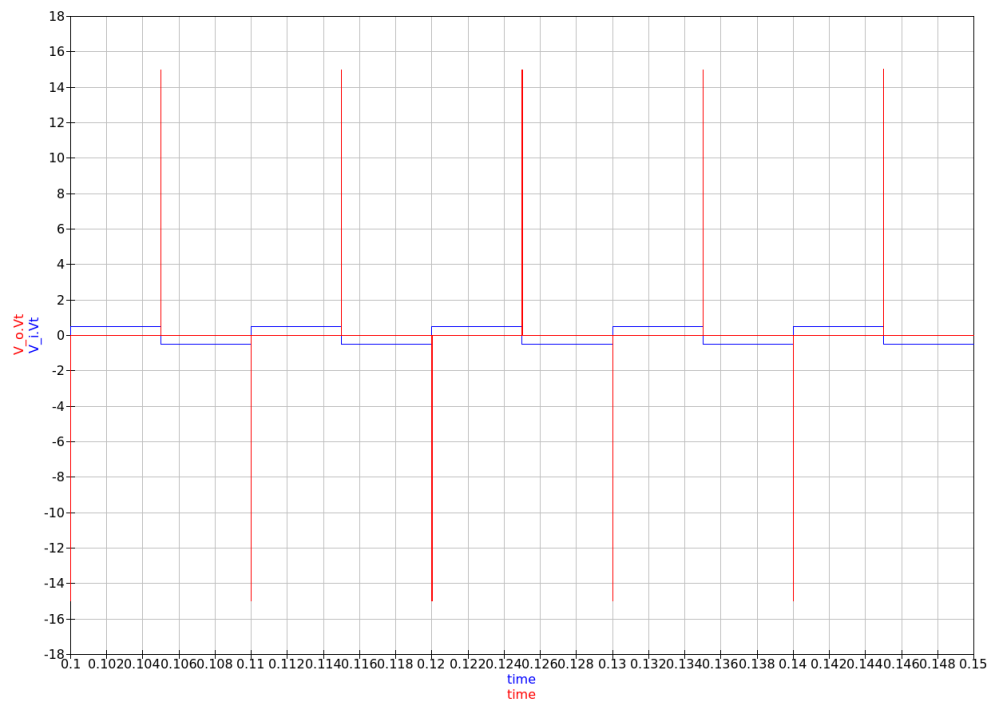


図 36 矩形波に対する出力波形

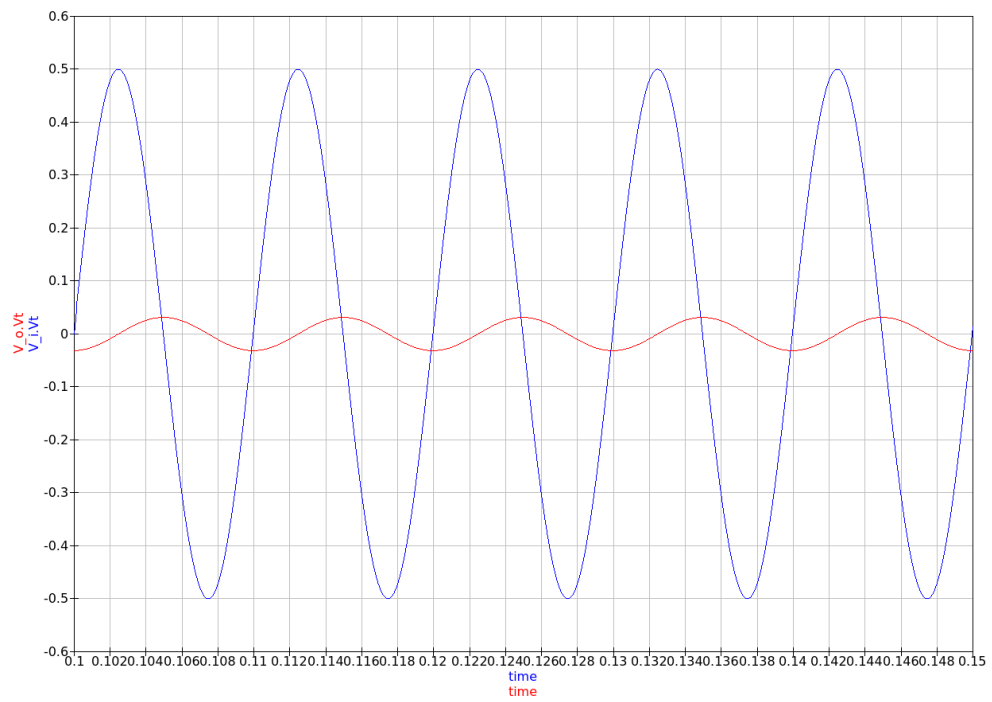


図 37 正弦波に対する出力波形

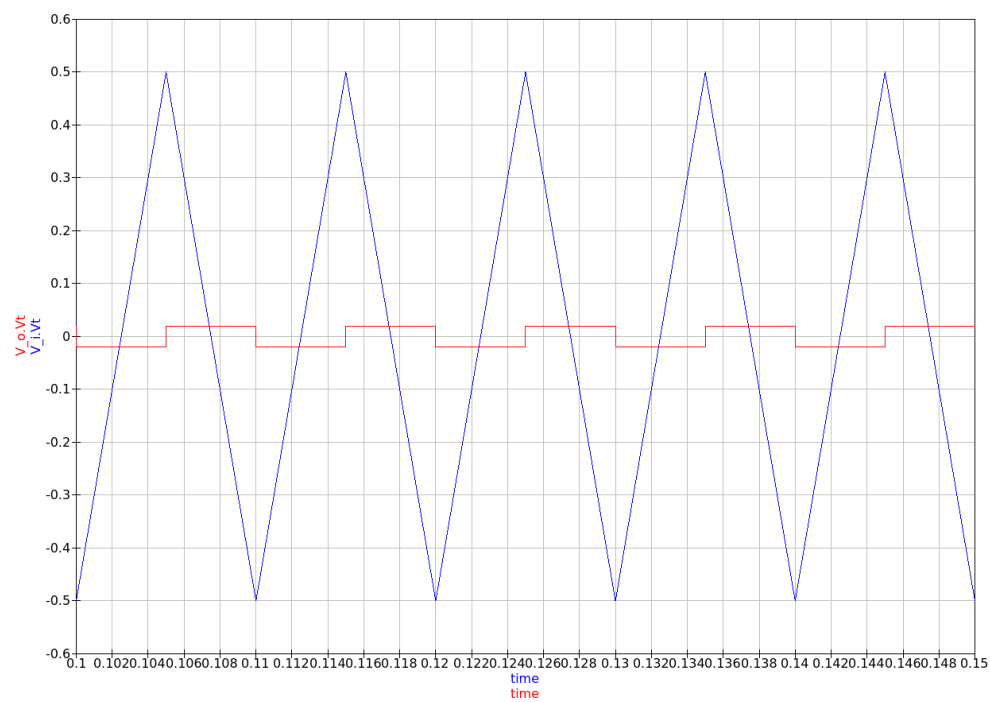


図 38 三角波に対する出力波形

8.4 考察

8.4.1 測定 2-B-01

ステップ関数や矩形波は値の切り替わるタイミングで変化率が ∞ であり, その微分は δ 関数になると考えられる. 実際に図 35 を見ると値が切り替わるタイミングで非常に高いピークが現れており, 出力はたしかに δ 関数のような形をしていることがわかる. またピークの符号は (57) から v_i が減少した場合は正, 増加した場合は負のピークを持つことになり, 図 35 でもたしかにそのようになっている.

一方で図 35 のピークは完全な δ 関数ではなく有限の幅を持っていることもわかる. これに関しては測定 2-B-02 に関する考察で述べる.

8.4.2 測定 2-B-02

ここで積分回路と同様に時定数を $\tau = CR_1$ と定義すると τ が大きいとコンデンサの容量が大きいか, 抵抗が大きくなるためコンデンサが電荷を放出するのにより長い時間がかかると考えられる. 逆に τ が小さいとコンデンサが電荷をすぐに放出できることから, より応答性の良い微分回路になると考えられる. 実際に図 36 を見ると図 35 に比べて R_1 が小さい方がよりピーク幅が狭くなっており, 応答性が高くなっていると考えられる. しかしながら実際の回路では熱雑音や電磁波によるノイズが存在し, 更にこれらの周波数が高いことを考えるとノイズが非常に大きな利得で増幅される. したがって極めて低雑音な環境でなければこの回路は実用的に動作し得ないと考えられる.

また (57) から正弦波入力に対して出力波形は

$$v_o = -CR_1\omega \cos(\omega t) \quad (60)$$

となる. このことから出力波形は $-\cos \omega t$ の形をするはずであり, 図 37 を見ると実際にそうになっている. またその振幅は

$$CR_1\omega = 0.106 \times 10^{-6} \times 979\pi \times 100 \simeq 0.06 \quad (61)$$

程度になるべきである. 実際に図 37 の振幅はその程度の値になっていることがわかる.

また三角波入力に対しての出力波形は, 三角波が定数 a, b を用いて

$$v = \begin{cases} Vt + a & (0 \leq t < T/2) \\ -Vt + b & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (62)$$

と表されることから

$$v = \begin{cases} -CR_1V & (0 \leq t < T/2) \\ CR_1V & (T/2 \leq t < T) \end{cases} \quad (63)$$

ここで V は三角波の傾きであり $V = 200 \text{ V s}^{-1}$ である. したがって

$$CR_1V \simeq 2.0 \times 10^{-2} \text{ V} \quad (64)$$

となる. 実際に図 38 の波形はその程度の値になっていることがわかる.

9 実験 2-C-(a) : 受動 LPF

9.1 原理

9.1.1 回路方程式

図 39 に受動 LPF の回路図を示す. コンデンサの両端の電圧を v_C とする. また電流は全てコンデンサを介して GND に帰るとすると, 流れる全電流 i は

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} \quad (65)$$

したがってキルヒホッフの法則から入力電圧を v_i とすると

$$v_i = R_1 C \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad (66)$$

また明らかに $v_C = v_o$ なので

$$\left(\frac{1}{CR_1} + \frac{d}{dt} \right) v_o = \frac{v_i}{CR_1} \quad (67)$$

これは (41) において $R_1 = R_2$ として右辺の符号を反転したものに等しい. したがってその解は $\tau = CR_1$ を用いて以下ようになる.

$$v_o(t) = e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{v_i(t)}{CR_1} e^{t/\tau} dt \quad (68)$$

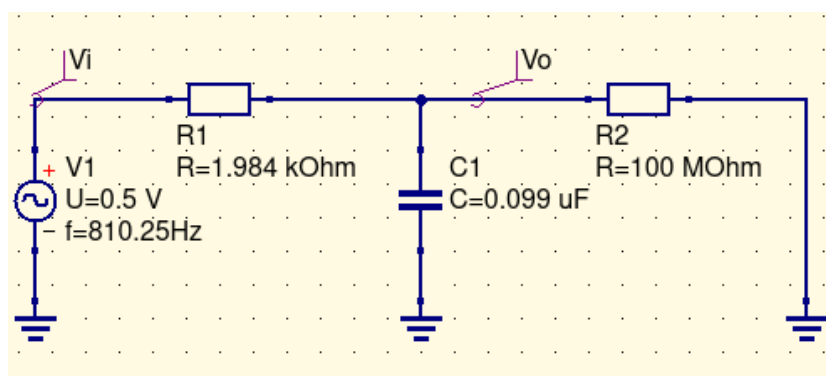


図 39 受動 LPF

9.1.2 伝達関数

式の形が不完全積分回路と同じなので, 同様の議論を繰り返せば

$$G(s) = \frac{1}{1 + CR_1 s} \quad (69)$$

したがって Gain と位相差は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}G_V(\omega) &= -20 \log \sqrt{1 + (CR_1\omega)^2} \\ \phi(\omega) &= -\arctan(CR_1\omega)\end{aligned}\tag{70}$$

よって図 39 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 40 のようになる. またカットオフ周波数も同様に

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}\tag{71}$$

となる. カットオフ周波数において Gain は

$$G_V(\omega_c) = -20 \log \sqrt{1 + 1^2} \simeq -3\tag{72}$$

また電圧利得は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.70711\tag{73}$$

となる. すなわちカットオフ周波数は Gain が -3 程度に減衰する周波数として特徴づけられる.

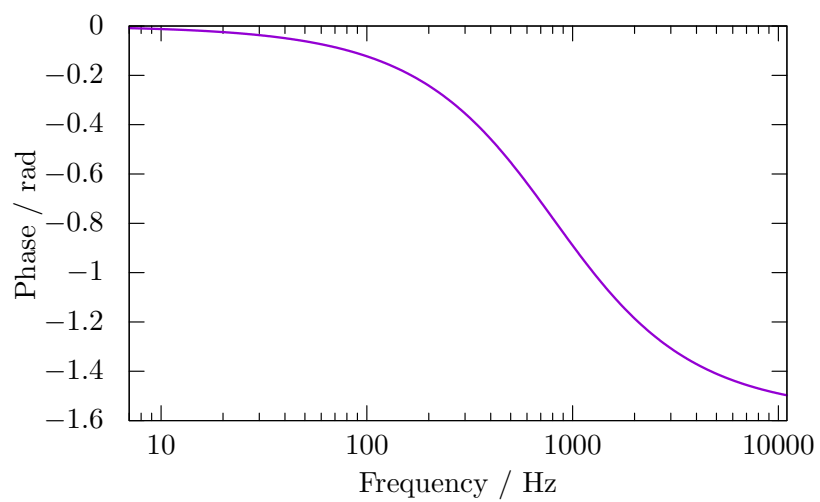
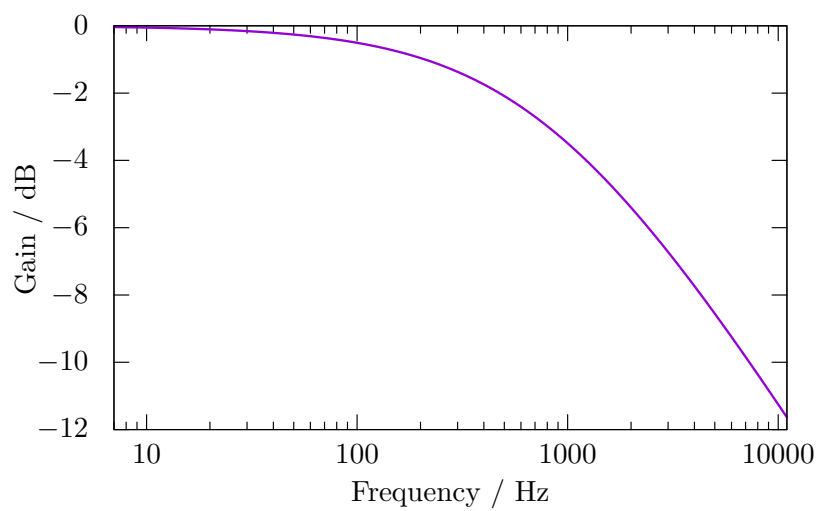


図 40 Bode 線図の理論値

9.2 方法

9.2.1 測定 2-C-(a)-01

図 39 の回路を Qucs Spice 上で作成した. この回路において入力信号の周波数を 10 から 10k Hz 範囲で変化させ, カットオフ周波数を探した. その際には出力電圧の振幅が $\sqrt{2}/2$ V に小数点以下 5 桁まで一致するところを手動で二分探索を行って探した. またその際の波形を記録した.

9.2.2 測定 2-C-(a)-02

正弦波の周波数を $f = 10, 22, 47, 100, 220, 470, 1000, 2200, 4700, 10000$ Hz と変化させたときの v_i , v_o の振幅及び位相差を記録し, Bode 線図を作成した. その際 Qucs Spice の方程式機能を用いて v_i , v_o のピークの時間と電圧を取得し, その値から算出した.

9.3 結果

9.3.1 測定 2-C-(a)-01

測定からカットオフ周波数は $f = 810.25\text{Hz}$ となり, そのとき電圧利得は 0.707116 となった. また, その時の波形は図 41 のようになった.

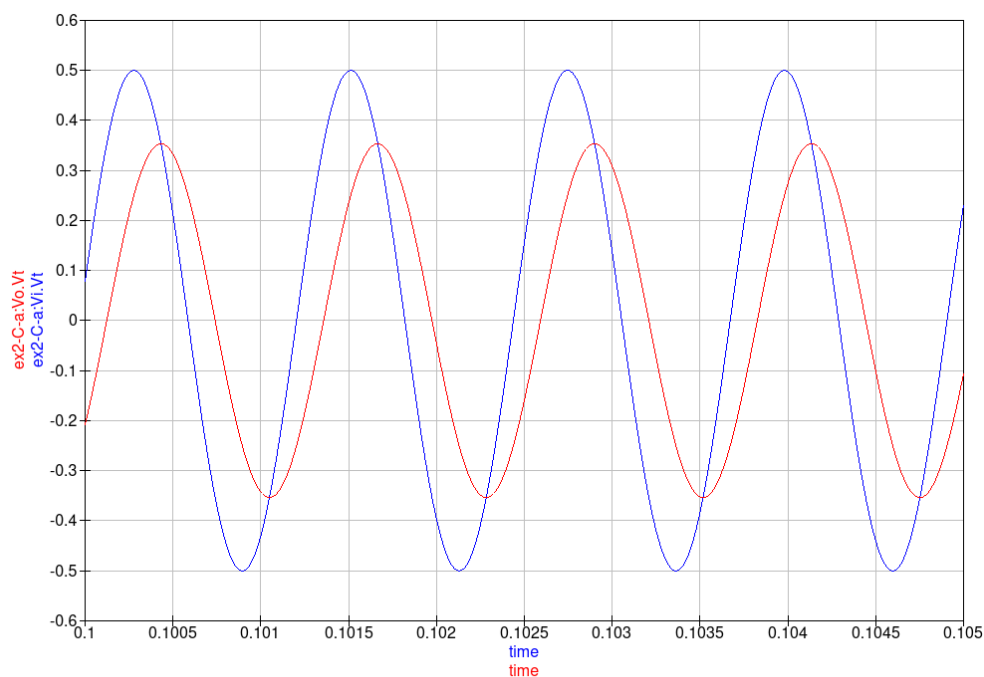


図 41 受動 LPF の出力波形

9.3.2 測定 2-C-(a)-02

図 42 に測定した Bode 線図を示す. 破線は図 40 で示した理論値である.

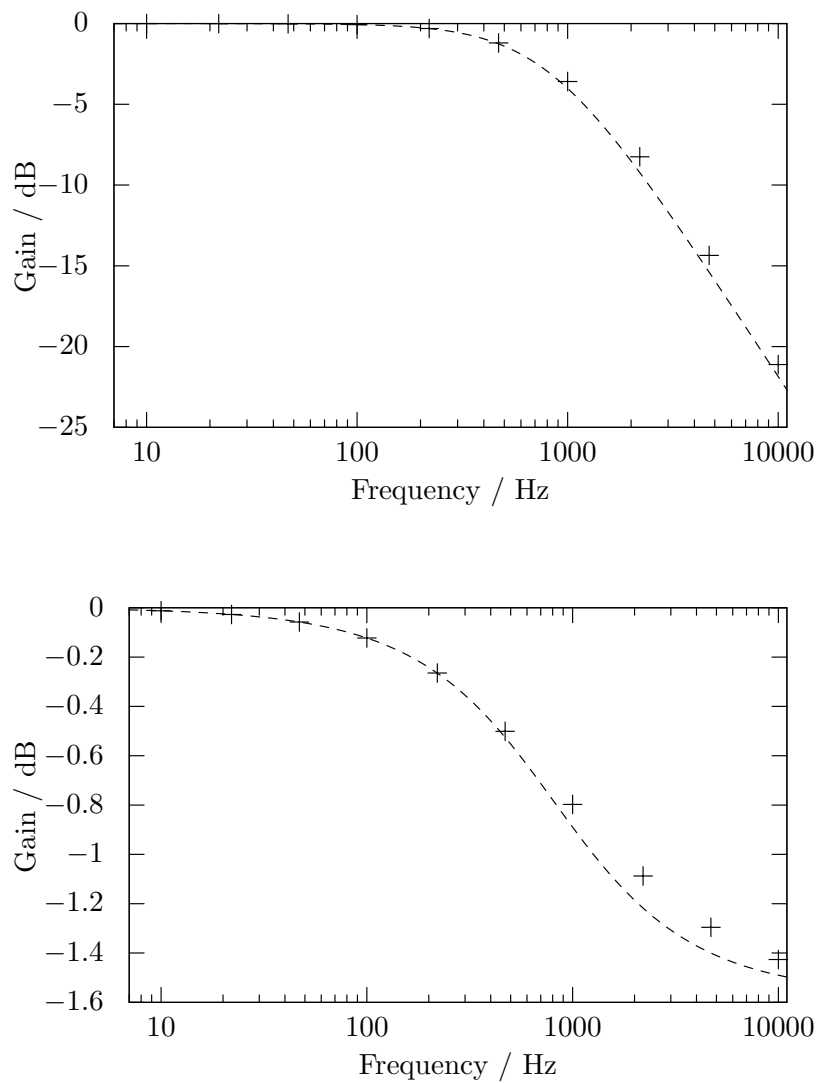


図 42 Bode 線図

9.4 考察

9.4.1 測定 2-C-(a)-01

$R_1 = 1.984 \text{ k}\Omega$, $C = 0.099 \text{ }\mu\text{F}$ であったことからカットオフ周波数は

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR_1} = 810.30 \text{ Hz} \quad (74)$$

である。したがって測定値との相対誤差は $6.2 \times 10^{-3}\%$ でありよく一致している。またカットオフ周波数においては

$$\phi(\omega) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \quad (75)$$

であり $\pi/4$ だけ位相が進む。図 41 を見るとたしかに位相が進んでいる。

9.4.2 測定 2-C-(a)-02

図 42 を見ると伝達関数から得られた Bode 線図と測定値の傾向は一致していることがわかる。また、受動 LPF と能動 LPF では Gain は同様の振る舞いを示すのに対して、位相差は π だけシフトしている。受動 LPF では低周波域で位相差が 0 に近いので、低周波域をそのままの位相で透過したい場合は受動 LPF を、低周波域を逆相で透過したい場合は能動 LPF を用いるべきである。

また、能動 LPF であれば R_2 を R_1 より大きくすれば低周波域での Gain を正にすることができるが、受動 LPF では Gain が正になることはない。

10 実験 2-C-(b) : 受動 HPF

10.1 原理

10.1.1 回路方程式

図 43 に受動 HPF の回路図を示す. R_2 に電流が流れ込まないとする, 全電流を i とすると

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt + Ri \\ &= \frac{1}{CR_1} \int_0^t v_o dt + v_o \end{aligned} \quad (76)$$

これは v_o について 1 次の非斉次微分方程式なのでその解は $\tau = CR_1$ を用いて以下のようになる.

$$v_o(t) = e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{dv_i}{dt} e^{t/\tau} dt \quad (77)$$

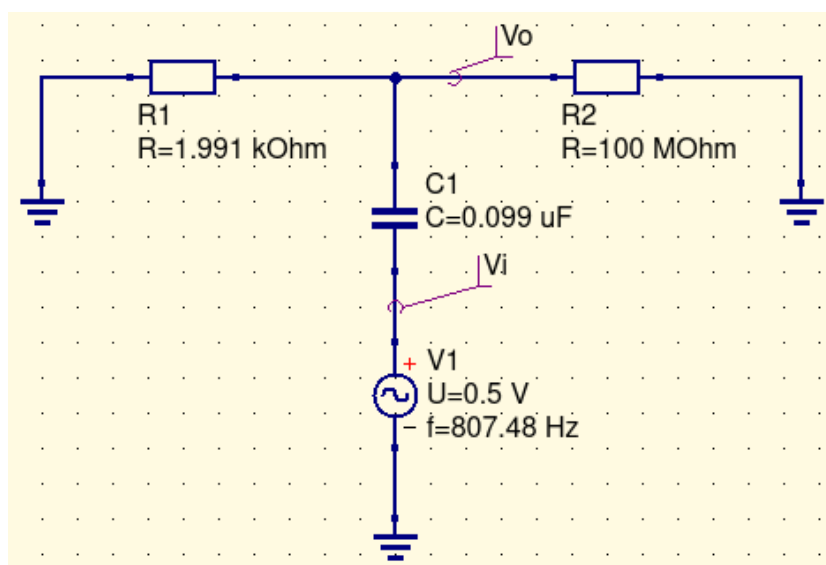


図 43 受動 LPF

10.1.2 伝達関数

(76) をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{V_o}{CR_1 s} + V_o \\ G(s) &= \frac{s}{s + \frac{1}{CR_1}} \end{aligned} \quad (78)$$

したがって Gain と位相差は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log \left| \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{CR_1}} \right| \\ &= 20 \log \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{CR_1}\right)^2}} \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle(j\omega) - \angle\left(j\omega + \frac{1}{CR_1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(CR_1\omega) \end{aligned} \quad (80)$$

よって図 43 で示した値を代入して Bode 線図を描くと図 44 のようになる.

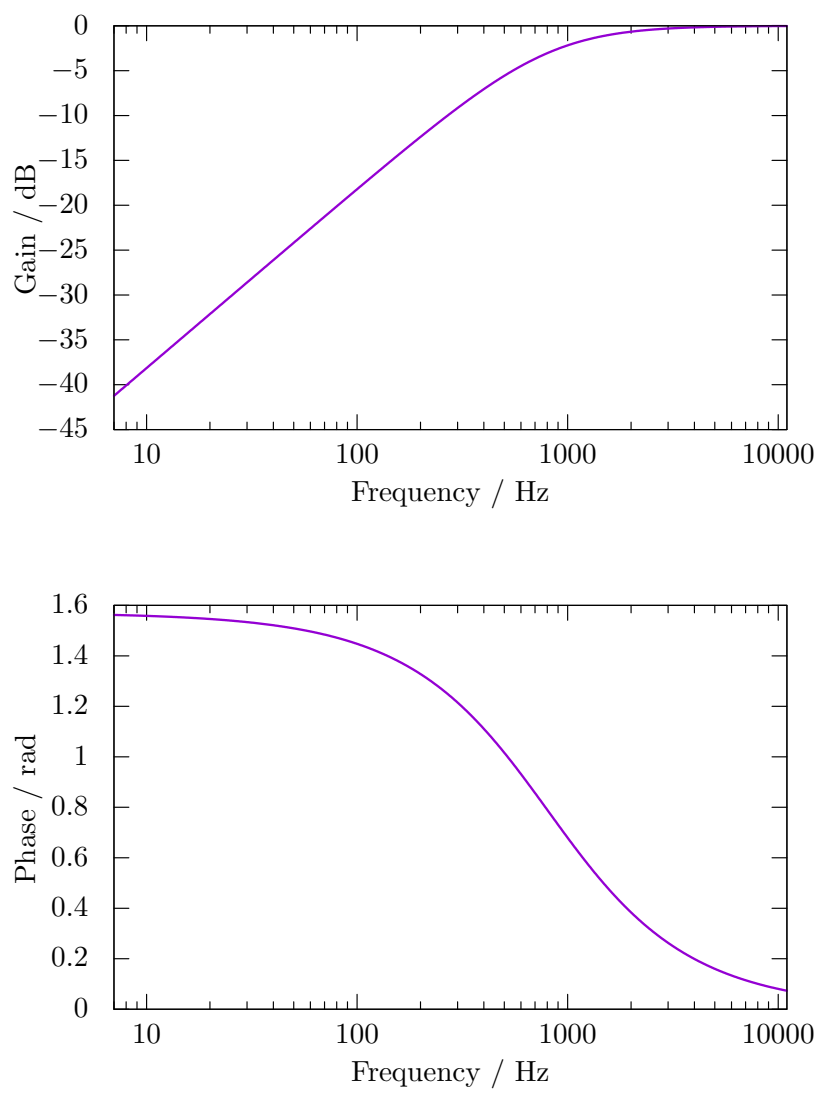


図 44 Bode 線図の理論値

10.2 方法

10.2.1 測定 2-C-(b)-01

図 43 の回路を Qucs Spice 上で作成した. この回路において測定 2-C-(a)-01 と同様にカットオフ周波数を探した. またその際の波形を記録した.

10.2.2 測定 2-C-(b)-02

測定 2-C-(a)-02 と同様に正弦波の周波数を $f = 10, 22, 47, 100, 220, 470, 1000, 2200, 4700, 10000$ Hz と変化させたときの v_i , v_o の振幅及び位相差を記録し, Bode 線図を作成した.

10.3 結果

10.3.1 測定 2-C-(b)-01

測定からカットオフ周波数は $f = 807.48\text{Hz}$ となり, そのとき電圧利得は 0.707117 となった. また, その時の波形は図 45 のようになった.

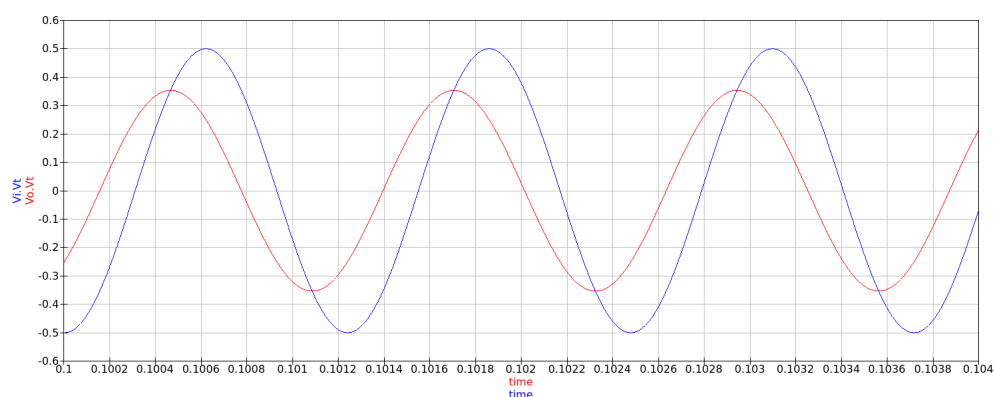


図 45 受動 HPF の出力波形

10.3.2 測定 2-C-(b)-02

図 46 に測定した Bode 線図を示す. 破線は図 44 で示した理論値である.

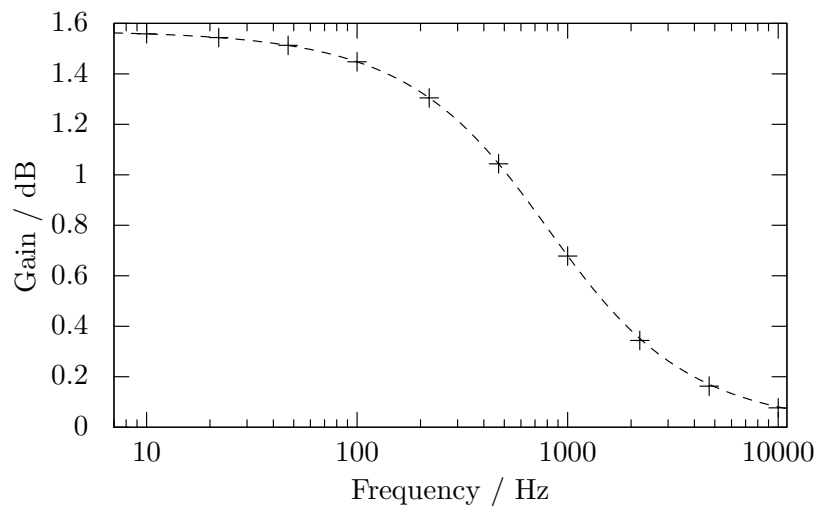
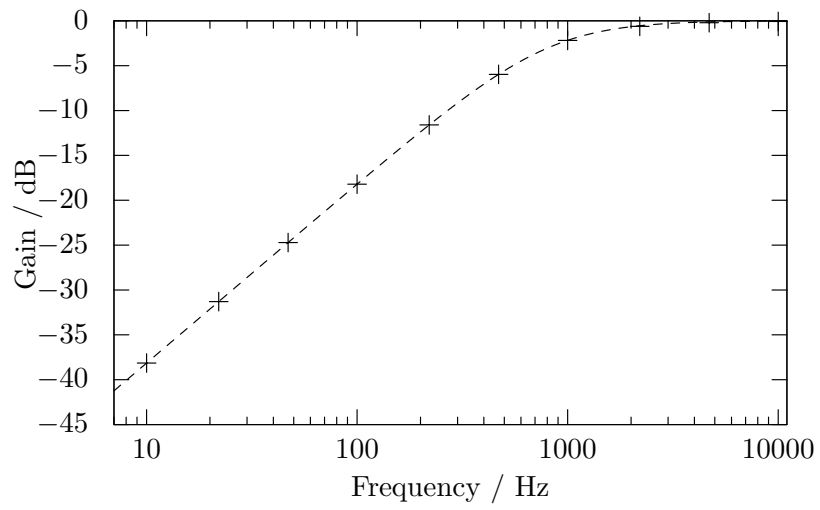


図 46 Bode 線図

10.4 考察

10.4.1 測定 2-C-(b)-01

$R_1 = 1.991 \text{ k}\Omega$, $C = 0.099 \text{ }\mu\text{F}$ であったことからカットオフ周波数は

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR_1} = 807.45 \text{ Hz} \quad (81)$$

である。したがって測定値との相対誤差は $3.7 \times 10^{-3}\%$ でありよく一致している。またカットオフ周波数においては

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{4} \quad (82)$$

であり $\pi/4$ だけ位相が遅れる。図 45 を見るとたしかに位相が遅れている。

10.4.2 測定 2-C-(b)-02

図 46 を見ると伝達関数から得られた Bode 線図と測定値はよく一致している。Gain 線図から低周波域の信号は減衰し、高周波域の信号は透過しているため、この回路はたしかに HPF として機能している。また位相差は高周波域で 0 に近づくことから、受動 HPF では高周波の信号を位相を反転せずに透過するとわかる。

11 実験 3-A-(a) : 能動 LPF

11.1 原理

図 47 に能動 LPF の回路図を示す. これは不完全積分回路そのものである. 回路方程式, 伝達関数, Bode 線図は 7.1 節で得たものと同様である.

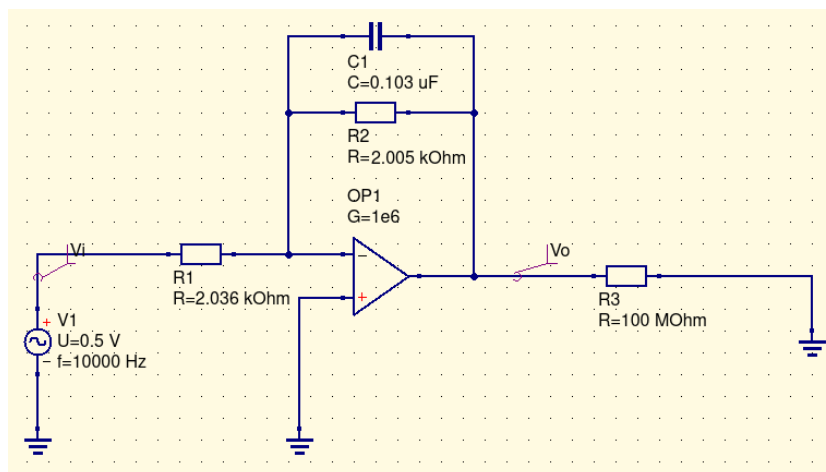


図 47 能動 LPF

11.2 方法

11.2.1 測定 3-A-(a)-01

図 47 の回路を Qucs Spice 上で作成した. この回路において測定 2-C-(a)-01 と同様にカットオフ周波数を探した.

11.2.2 測定 3-A-(a)-02

この回路において測定 2-C-(a)-02 と同様に入力信号である正弦波の周波数を $f = 10, 18, 33, 56, 100, 180, 330, 560, 1000, 1800, 3300, 5600, 10000$ Hz と変化した時の v_i , v_o の振幅及び位相差を記録し, Bode 線図を作成した.

11.3 結果

11.3.1 測定 3-A-(a)-01

測定からカットオフ周波数は $f = 746.87 \text{ Hz}$ となり, そのとき電圧利得は 0.707111 となった.

11.3.2 測定 3-A-(a)-02

図 48 に測定した Bode 線図を示す. 破線は伝達関数から算出した理論値である.

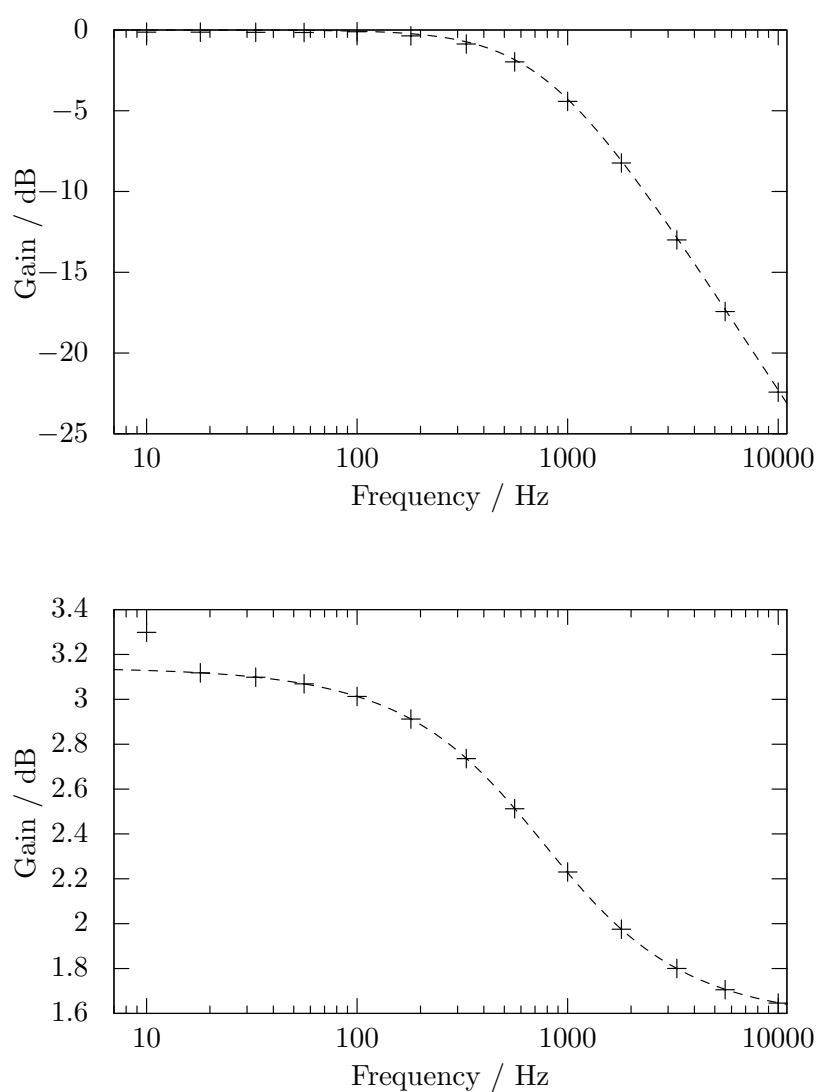


図 48 Bode 線図

11.4 考察

11.4.1 測定 3-A-(a)-01

$R_2 = 2.005 \text{ k}\Omega$, $C = 0.102 \text{ }\mu\text{F}$ であったことからカットオフ周波数は

$$f_c = 770.67 \text{ Hz} \quad (83)$$

である。したがって測定値との相対誤差は 3.0% でありよく一致している。

11.4.2 測定 3-A-(a)-02

図 48 から伝達関数から得られた Bode 線図と測定値はよく一致していることがわかる。
受動 LPF との比較の詳細は 9.4.2 節で述べた通りである。

12 実験 3-A-(b) : 能動 HPF

12.1 原理

12.1.1 伝達関数

図 49 に能動 LPF の回路図を示す. これは微分回路の入力インピーダンスが $1/sC$ から $R_1 + 1/sC$ となった回路と言えるので (58) 式において $1/sC$ を $R_1 + 1/sC$ に, R_1 を R_2 に置き換えれば

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{s}{s + \frac{1}{CR_2}} \quad (84)$$

よって Gain と位相差は

$$\begin{aligned} G_V(\omega) &= 20 \log \left| -\frac{R_2}{R_1} \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{CR_2}} \right| \\ &= 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + 20 \log \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{CR_2} \right)^2}} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle \left(-\frac{R_2}{R_1} \frac{s}{s + \frac{1}{CR_2}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \arctan(CR_2\omega) \end{aligned} \quad (86)$$

よって Bode 線図は図 50 のようになる.

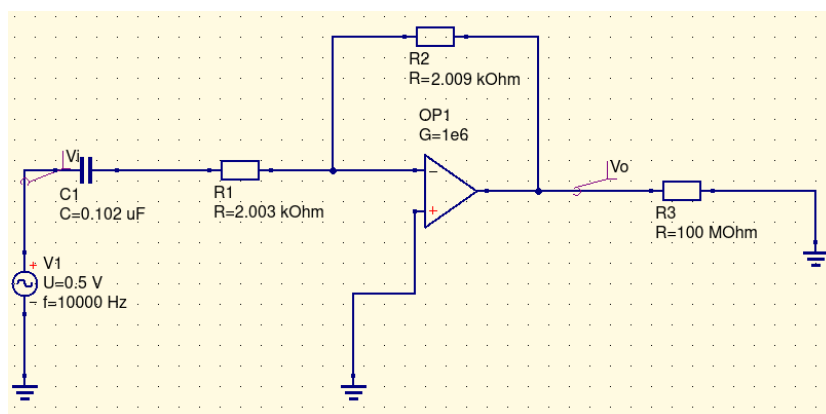


図 49 能動 HPF

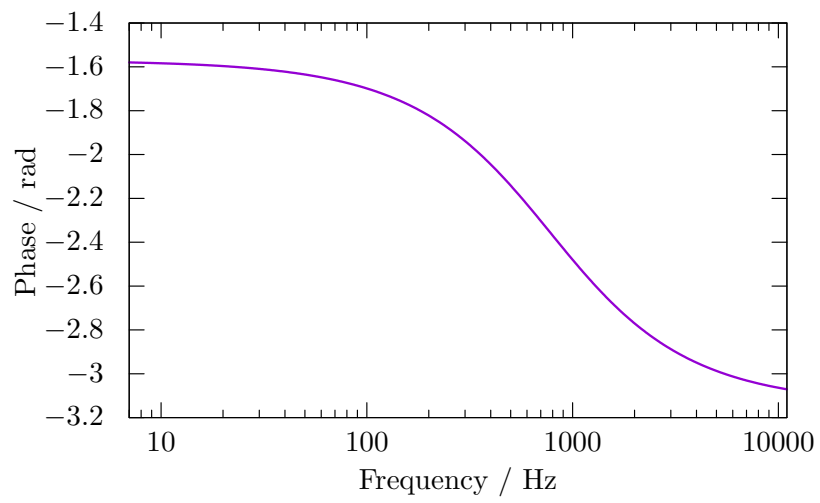
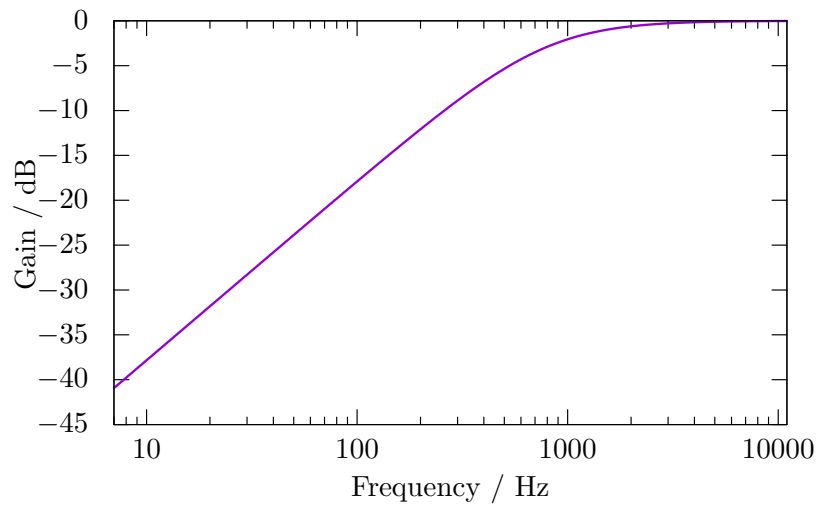


図 50 Bode 線図の理論値

12.2 方法

12.2.1 測定 3-A-(b)-01

図 49 の回路を Qucs Spice 上で作成した. この回路において測定 2-C-(a)-01 と同様にカットオフ周波数を探した.

12.2.2 測定 3-A-(b)-02

この回路において測定 2-C-(a)-02 と同様に入力信号である正弦波の周波数を $f = 10, 18, 33, 56, 100, 180, 330, 560, 1000, 1800, 3300, 5600, 10000$ Hz と変化させた時の v_i, v_o の振幅及び位相差を記録し, Bode 線図を作成した.

12.3 結果

12.3.1 測定 3-A-(b)-01

測定からカットオフ周波数は $f = 774.39$ Hz となり, そのとき電圧利得は 0.707115 となった.

12.3.2 測定 3-A-(b)-02

図 51 に測定した Bode 線図を示す. 破線は伝達関数から算出した理論値である.

12.4 考察

12.4.1 測定 3-A-(b)-01

$R_2 = 2.009$ kHz, $C = 0.102$ μ F であったことから $R_1 \simeq R_2$ とするとカットオフ周波数は

$$f_c = 769.14 \text{ Hz} \quad (87)$$

である. したがって測定値との相対誤差は 0.68% でありよく一致している.

12.4.2 測定 3-A-(b)-02

図 51 から伝達関数から得られた Bode 線図と測定値はよく一致していることがわかる.

また, 能動 HPF と受動 HPF を比較すると Gain のは類似な振る舞いを示すのに対して, 位相差は能動 HPF では高周波域で π , 受動 HPF では高周波域で 0 となることがわかる. したがって入力信号の位相を維持した出力を得たいときは受動 HPF を, 逆相の出力を得たいときは能動 HPF を用いるべきである.

また, 能動 LPF であれば R_2 を R_1 より大きくすれば高周波域での Gain を正にすることができるが, 受動 LPF では Gain が正になることはない.

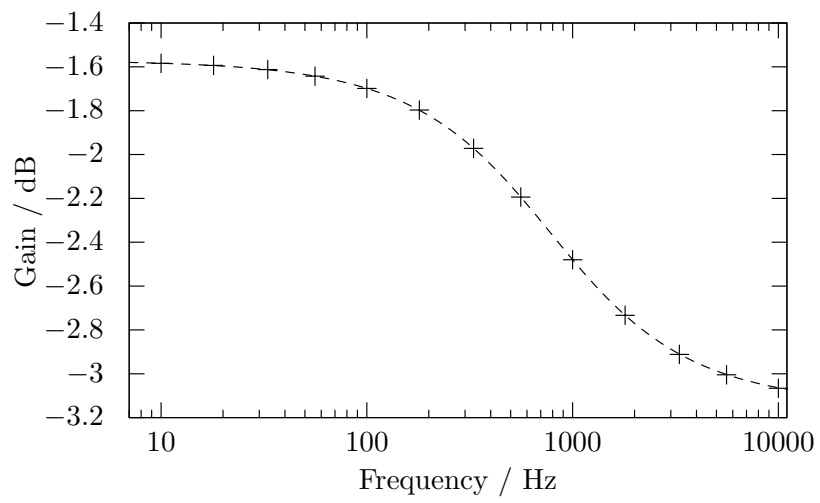
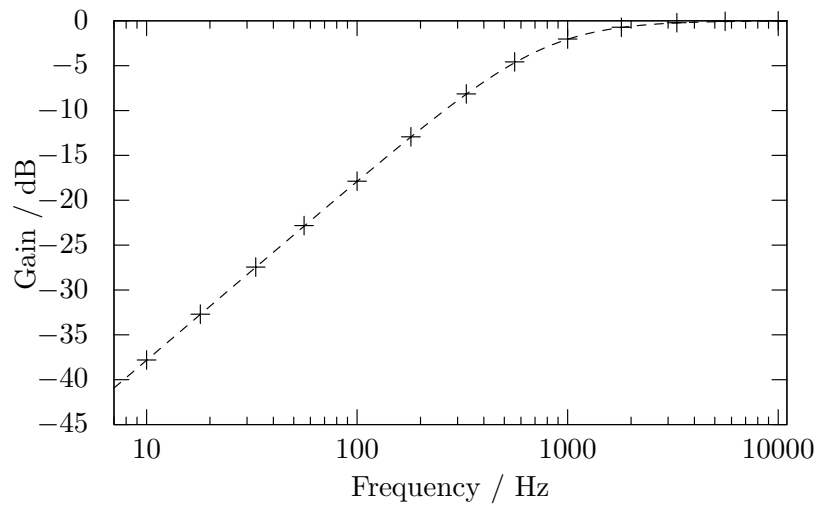


図 51 Bode 線図

13 実験 3-B : 2 次 BPF

13.0.1 伝達関数

図に 2 次の BPF の回路図を示す。これは前節, 前々節で取り扱った HPF と LPF を接続したものである。この一般の入力に対してこの回路方程式を解くのは困難だが, この伝達関数が HPF と BPF の伝達関数の線形和になることから Gain と位相差は以下のように求まる。

$$G_V(\omega) = 20 \log \left(\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \right) - 20 \log \sqrt{1 + (C_1 R_2 \omega)^2} + 20 \log \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{C_2 R_4} \right)^2}} \quad (88)$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(C_1 R_2 \omega) - \arctan(C_2 R_4 \omega) \quad (89)$$

よって Bode 線図をプロットすると図 53 のようになる

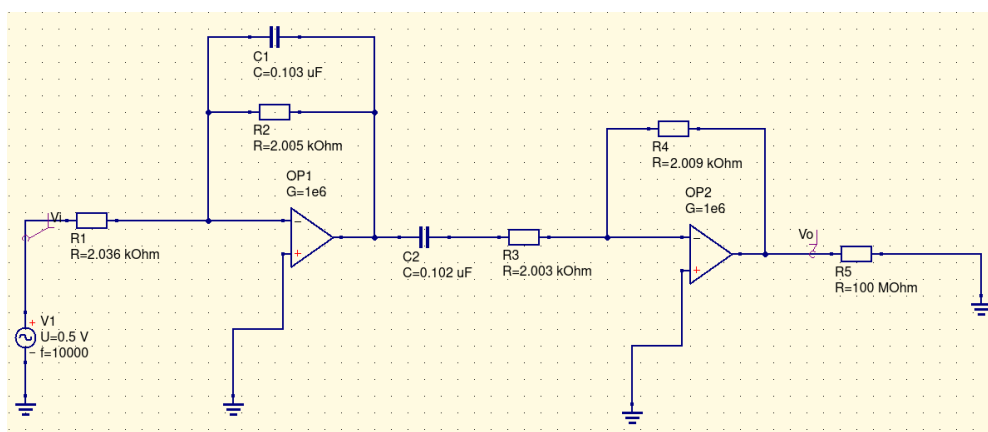


図 52 2 次 BPF

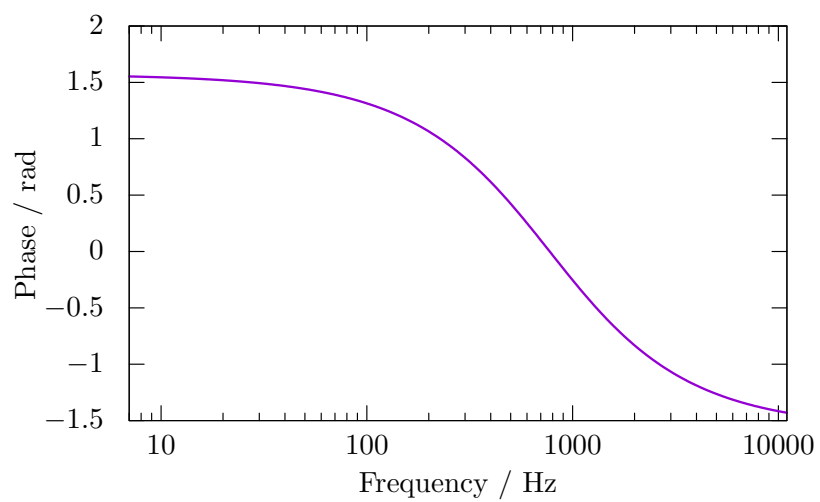
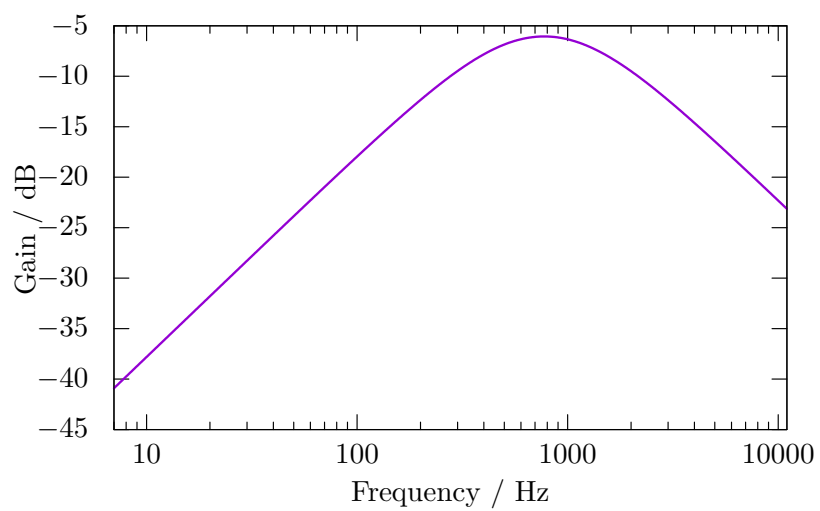


図 53 Bode 線図の理論値

13.1 方法

この回路において測定 2-C-(a)-02 と同様に入力信号である正弦波の周波数を $f = 10, 18, 33, 56, 100, 180, 330, 560, 1000, 1800, 3300, 5600, 10000$ Hz と変化させた時の v_i , v_o の振幅及び位相差を記録し, Bode 線図を作成した.

13.2 結果

図 54 に測定した Bode 線図を示す. 破線は伝達関数から算出した理論値である.

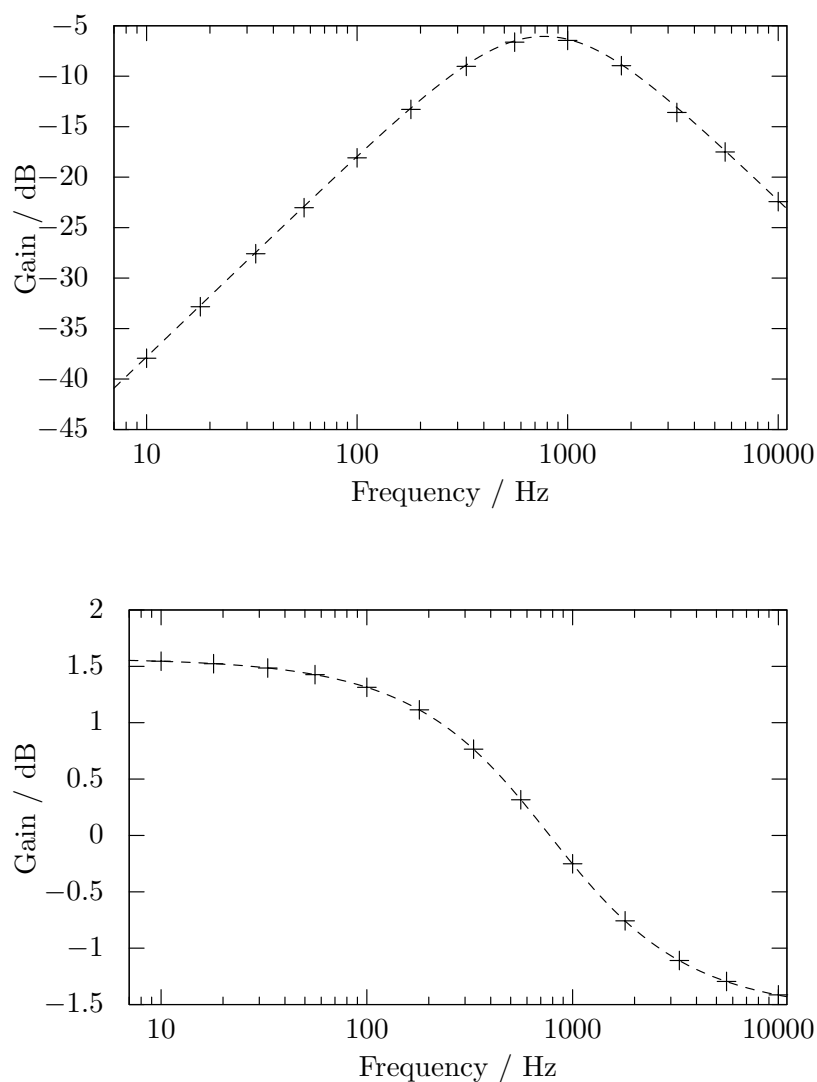


図 54 Bode 線図

13.3 考察

図 54 から伝達関数から得られた Bode 線図と測定値はよく一致していることがわかる。

また Gain を見ると低周波域, 高周波域の両方で減衰が起き, 全帯域の一部のみが透過していることがわかる。したがってこの回路は確かに BPF として機能していることがわかる。また, 位相差は $\pi/2$ から $-\pi/2$ まで変化し, 透過域では位相差 0 になっていることがわかる。このことは BPF の透過域においては前段の LPF と後段の HPF 両方が位相差 0 で透過していることから理解できる。

また, 透過域は LPF のカットオフ周波数 $1/2\pi C_1 R_2$ と HPF のカットオフ周波数 $1/2\pi C_2 R_4$ の間になるため, これらの値を適当に設定することで任意の周波数帯を透過する BPF を設計できる。

14 実験 3-C : 2 次 LPF

14.0.1 伝達関数

図に 2 次の LPF の回路図を示す. これは LPF を 2 つ接続したものである. この伝達関数は 2 つの伝達関数の線形和になることから Gain と位相差は以下のように求まる.

$$G_V(\omega) = 20 \log \left(\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \right) - 20 \log \sqrt{1 + (C_1 R_2 \omega)^2} - 20 \log \sqrt{1 + (C_2 R_4 \omega)^2} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= 2\pi - \arctan(C_1 R_2 \omega) - \arctan(C_2 R_4 \omega) \\ &= -\arctan(C_1 R_2 \omega) - \arctan(C_2 R_4 \omega) \end{aligned} \quad (91)$$

よって Bode 線図をプロットすると図 56 のようになる

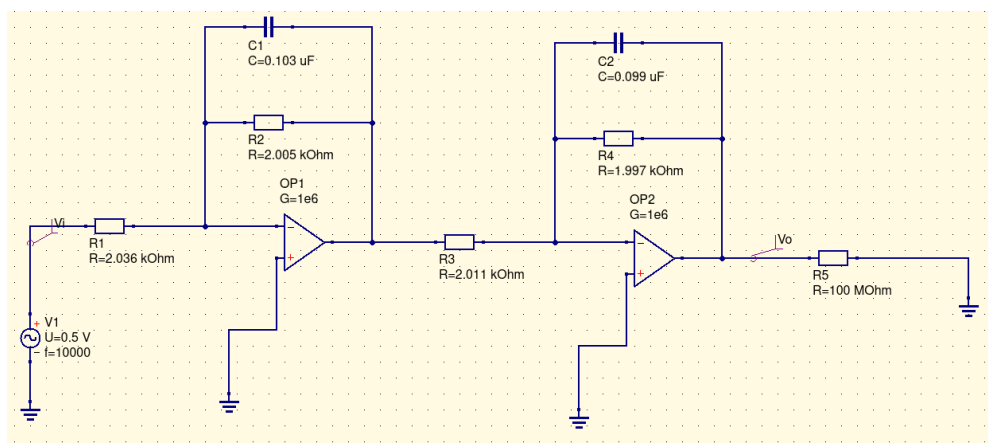


図 55 2 次 LPF

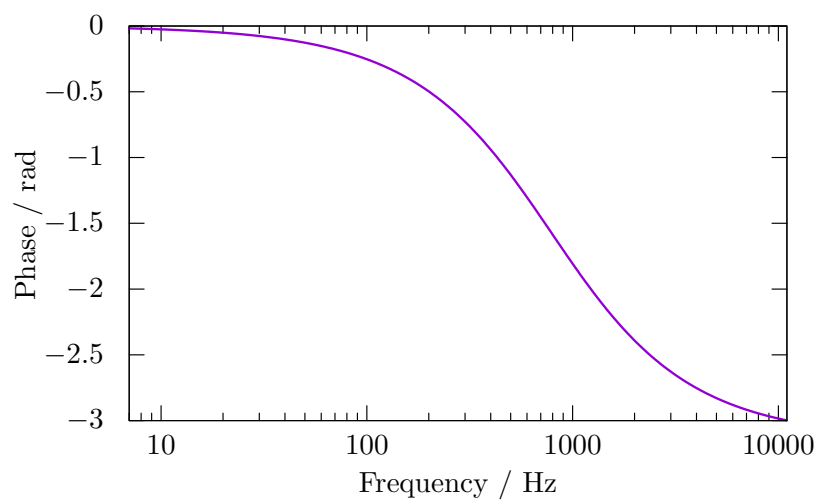
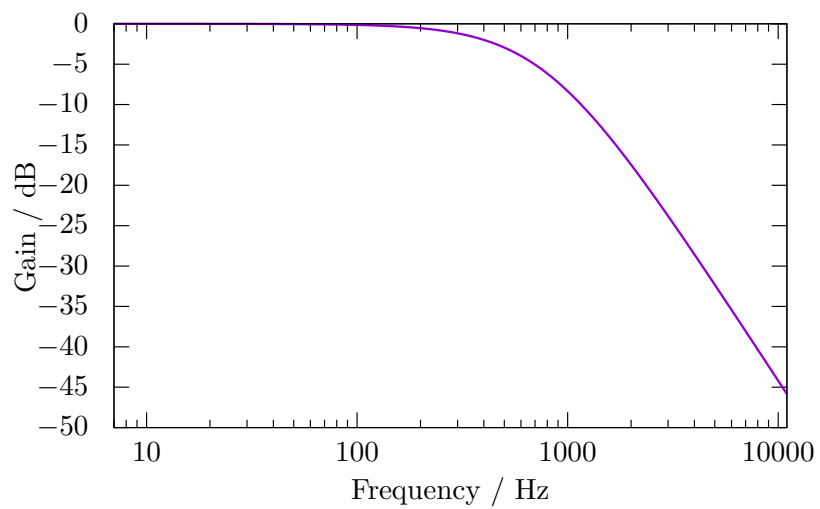


図 56 Bode 線図の理論値

14.1 方法

この回路において測定 2-C-(a)-02 と同様に入力信号である正弦波の周波数を $f = 10, 18, 33, 56, 100, 180, 330, 560, 1000, 1800, 3300, 5600, 10000$ Hz と変化させた時の v_i, v_o の振幅及び位相差を記録し, Bode 線図を作成した.

14.2 結果

図 57 に測定した Bode 線図を示す. 破線は伝達関数から算出した理論値である.

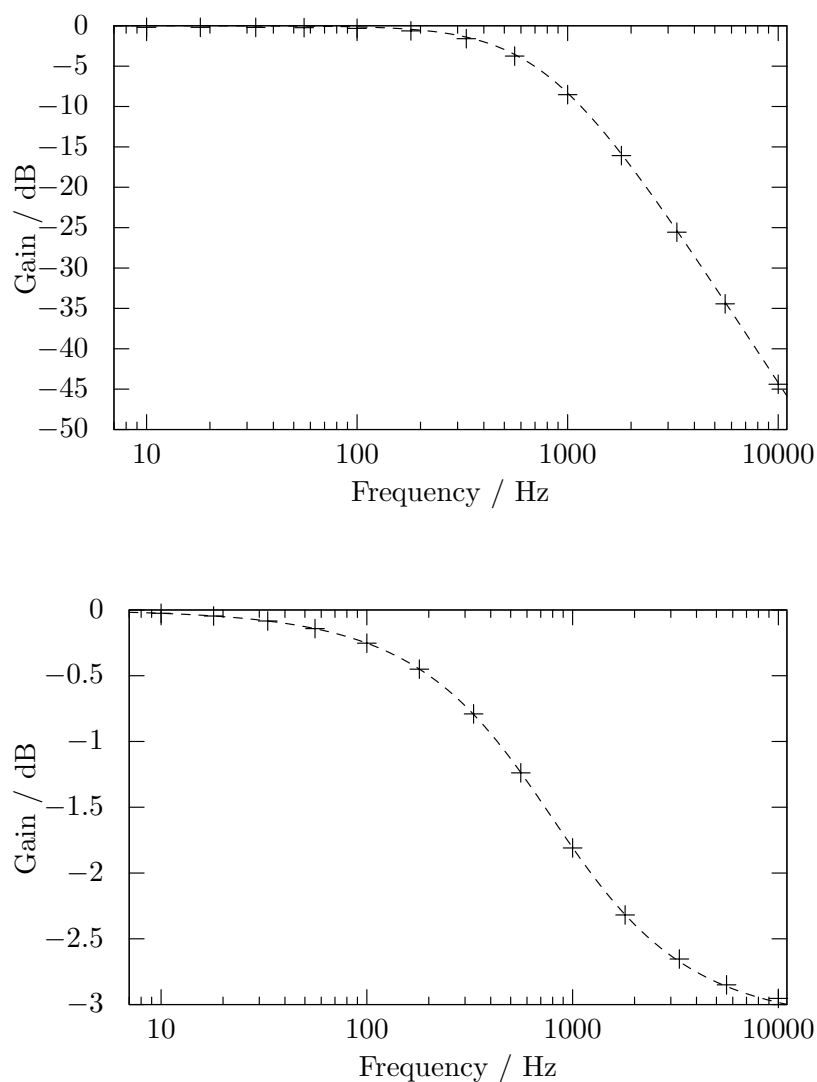


図 57 Bode 線図

14.3 考察

図 57 から伝達関数から得られた Bode 線図と測定値はよく一致していることがわかる.

また, 1 次 LPF の Bode 線図 (図 48) と比較すると, 2 次 LPF のほうが減衰が早いことがわかる. これは 1 段目の LPF で減衰された信号を 2 段目で更に減衰していると考ええることで理解できる. 更に, その減衰量は 2 次 LPF の Gain が 2 つの 1 次 LPF の Gain の線形和で表されることから, 2 倍で減衰しているとわかる. 実際に図 48 と図 57 では Gain がおよそ 2 倍傾きで小さくなることが見て取れる.

また, 1 次 LPF は透過域で位相が π シフトしていたのに対して 2 次 LPF では位相はシフトしていない. これは π のシフトを 2 回繰り返しているということからも明らかである.

15 実験 4-A：ダイオードの特性

15.1 原理

ダイオードのに流れる電流は電圧に対して指数関数的に増大する．すなわち

$$I = I_s(e^{qV/kT} - 1) \quad (92)$$

ここで I_s は飽和電流, q は電気素量, k はボルツマン定数, T は温度である．この特性を図 58 に示した回路で測定する．

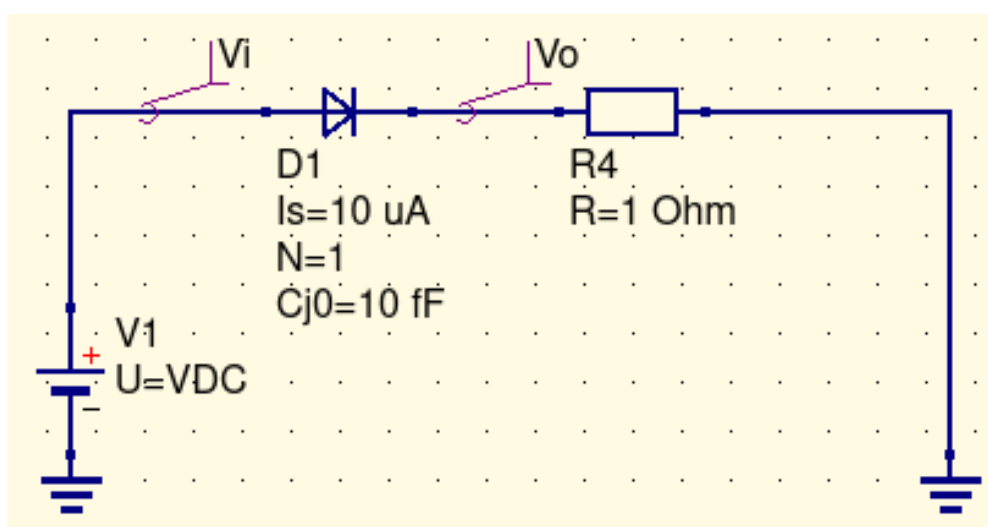


図 58 特性測定回路

15.2 方法

Qucs Spice で図 58 に示した回路を作成した．ダイオードの飽和電流は $10 \mu\text{A}$ である．VDC を 0 から 0.5 V までパラメータスイープ機能を用いて掃引し，ダイオードの電圧-電流特性を調べた．

15.3 結果

図 59 にダイオードの電圧-電流特性を示す．

15.4 考察

図 59 からたしかにダイオードの電圧-電流特性は指数関数的であることがわかる．このことから，ダイオードは順方向の電圧については大きな電流を流せるのに対し，逆方向の電圧に対してはほぼ電流を流さないということがわかる．

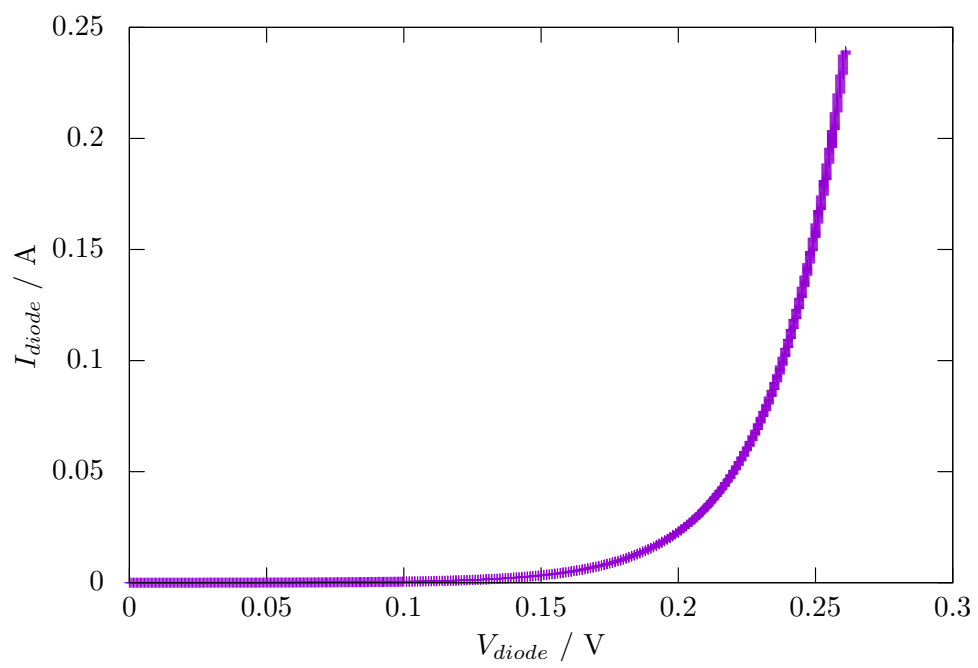


図 59 ダイオードの電圧-電流特性

16 実験 4-B-01：対数変換回路

16.1 原理

図 60 に対数変換回路の回路図を示す。

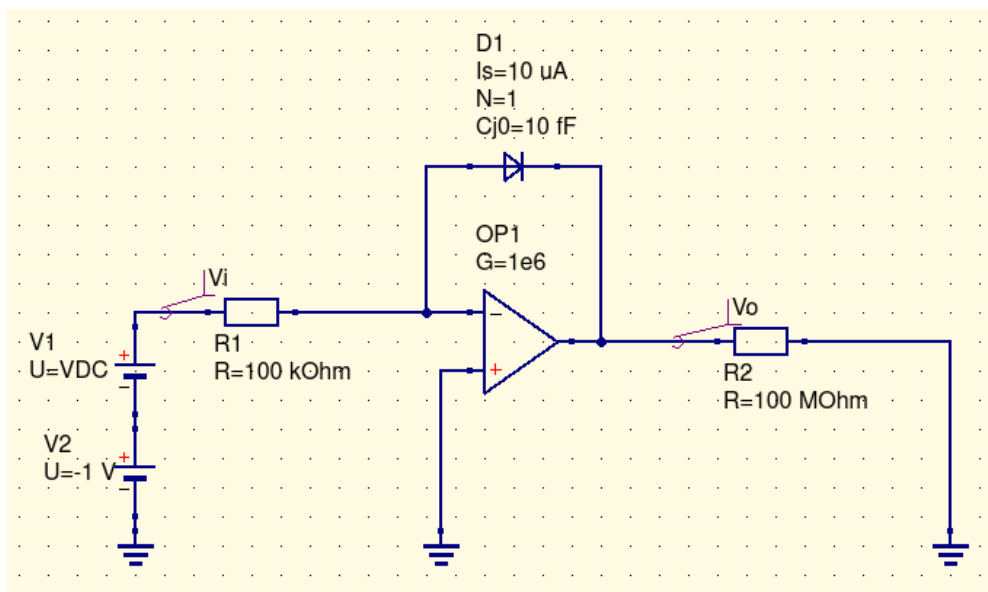


図 60 対数変換回路

16.2 方法

図 60 の回路を Qucs Spice で作成した。VDC を 0 から 5 V までパラメータスイープ機能を用いて掃引し、出力特性を調べた。

16.3 結果

図 61 に対数変換回路の出力特性を示す。

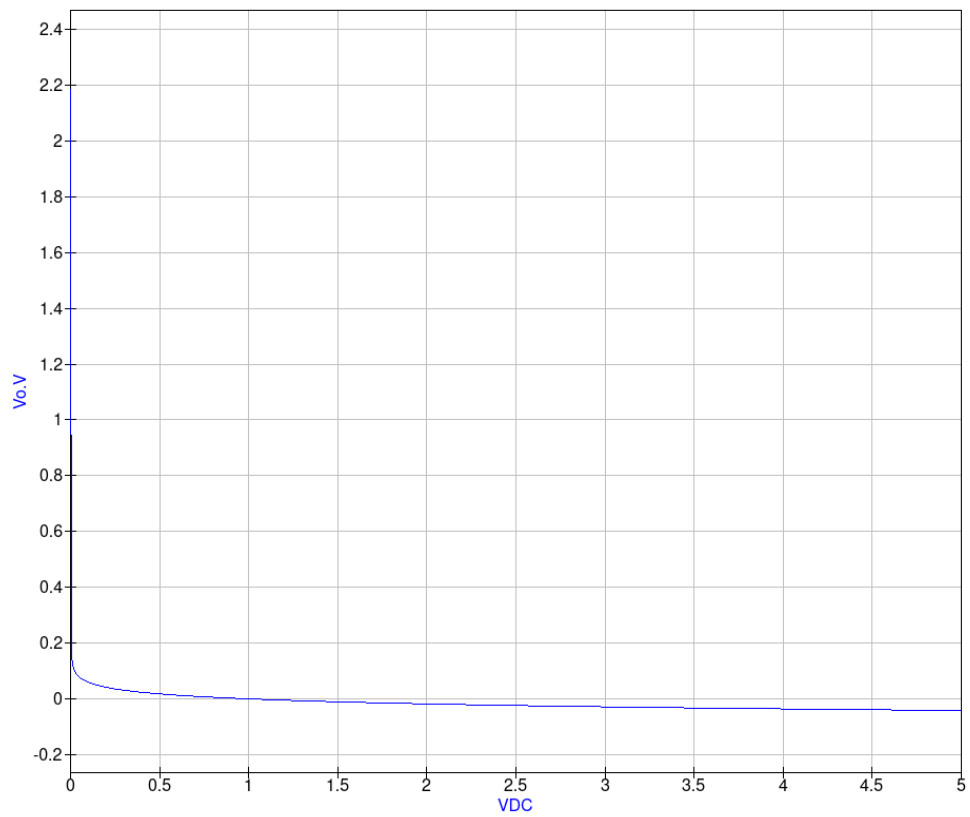


図 61 対数変換回路の出力特性

16.4 考察

図 61 からこの回路の出力はたしかに v_i に対して $-\log v_i$ のような形を取っている.

17 実験 4-B-02：逆対数変換回路

17.1 原理

図 60 に逆対数変換回路の回路図を示す。

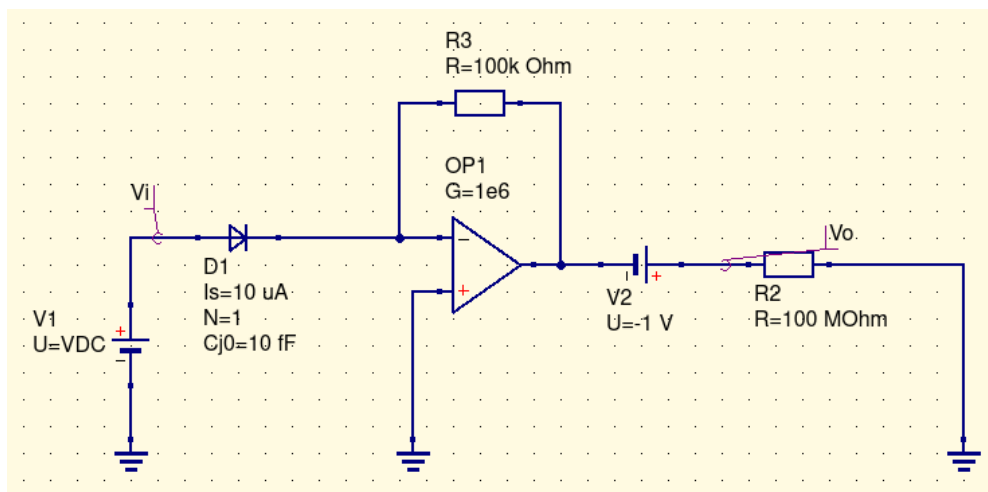


図 62 逆対数変換回路

17.2 方法

図 62 の回路を Qucs Spice で作成した。VDC を -0.1 から 0.1 V までパラメータスイープ機能を用いて掃引し、出力特性を調べた。

17.3 結果

図 63 に逆対数変換回路の出力特性を示す。

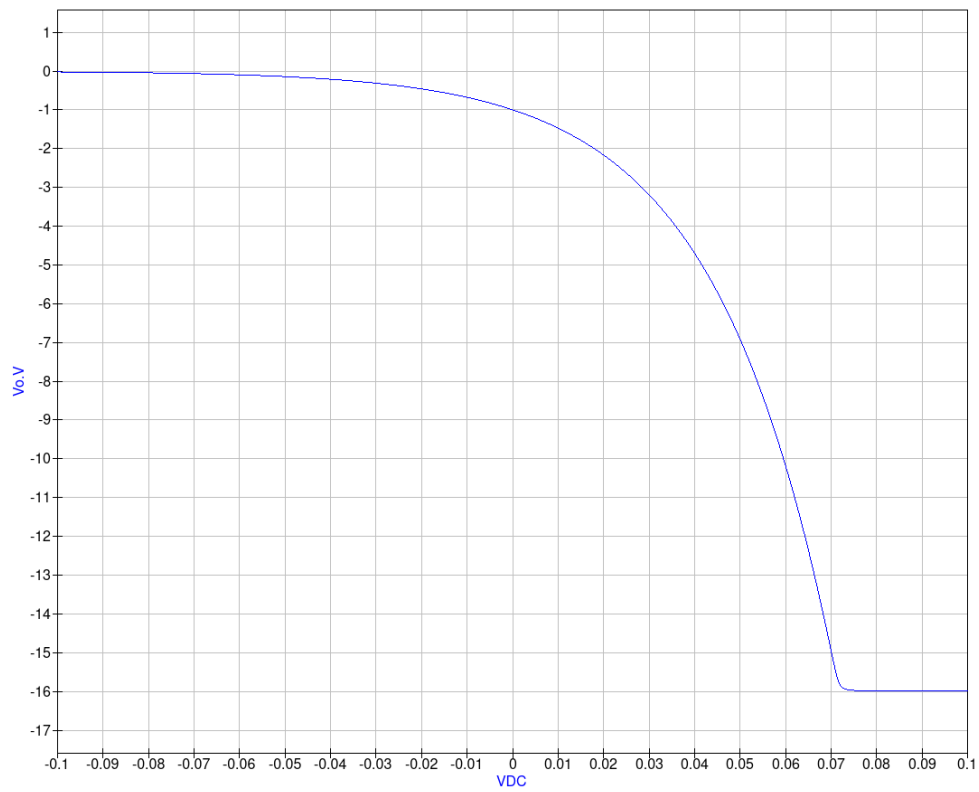


図 63 逆対数変換回路の出力特性

17.4 考察

図 63 からこの回路の出力はたしかに v_i に対して $-e^{v_i}$ のような形を取っている.

18 乗算回路

18.1 原理

図 64 に乗算回路の回路図を示す。これは 2 つの対数変換回路, 加算回路, 逆対数変換回路からなる。乗算回路は 2 つの入力を一度対数に変換し, これらを加算回路に入れ, それを逆対数に変換したものが出力となる。これは以下に相当する

$$\exp(\log(v_1) + \log(v_2)) = \exp(\log(v_1 v_2)) = v_1 v_2 \quad (93)$$

この処理によって乗算を実現している。

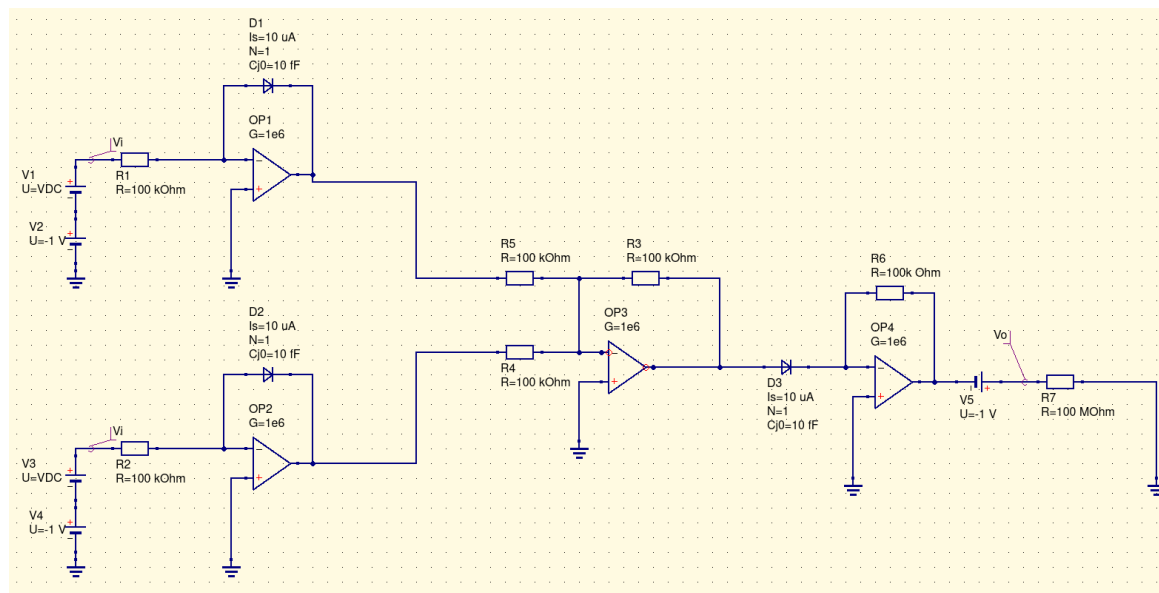


図 64 乗算回路

18.2 方法

18.2.1 測定 1

一方の入力を $f = 50 \text{ Hz}$, 平均値 2 V , $V_{p-p} = 2 \text{ V}$ の正弦波, もう一方の入力を $f = 10 \text{ Hz}$, 平均値 1.5 V , $V_{p-p} = 1 \text{ V}$ 矩形波として出力波形を記録した。

18.3 結果

18.3.1 測定 1

出力波形を図 65 に示す。青線が v_1 , 赤線が v_2 , ピンクが v_o である。

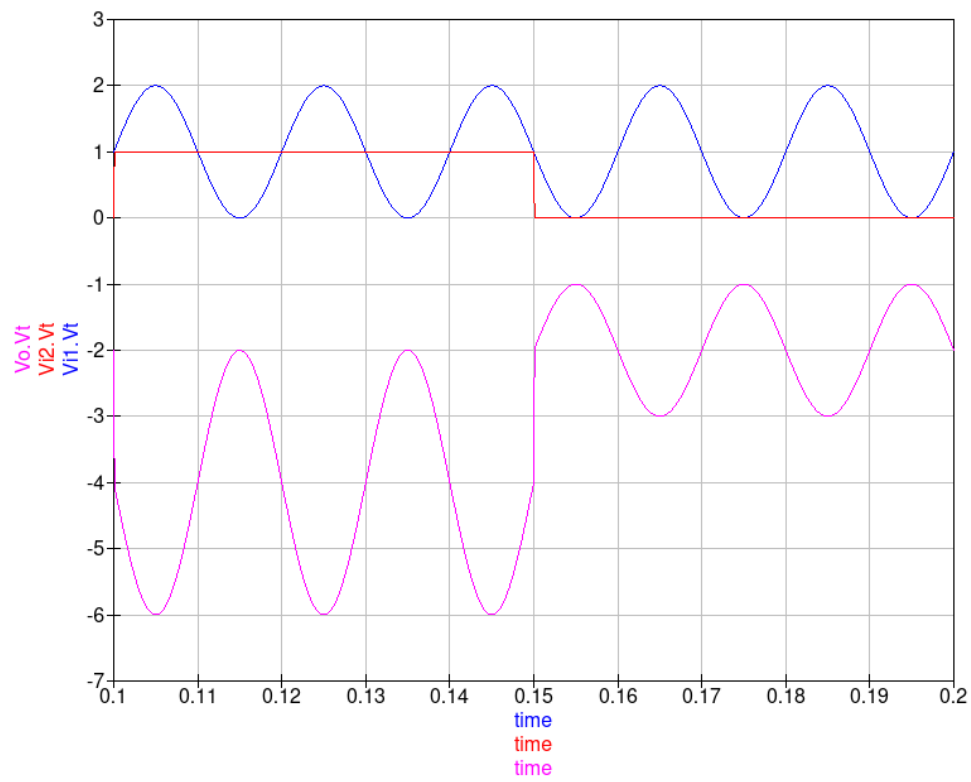


図 65 出力波形

18.3.2 考察

出力波形は矩形波に伴い振幅が変化しており, 乗算がされていることが確認できる.

参考文献

- [1] ルネサスエレクトロニクス. Icl7612 datasheet. <https://akizukidenshi.com/download/ds/renesas/icl7611-12.pdf>. (Accessed on 06/14/2021).
- [2] 進一高橋. 電子回路. 電気・電子・情報工学系テキストシリーズ ; 3. 培風館, 東京, 2002.
- [3] 秋月電子通商. オペアンプ icl7611. <https://akizukidenshi.com/catalog/g/gI-00286/>. (Accessed on 06/14/2021).