# 計算モデル論 レポート

佐々木良輔

## 課題 1

### 乗算関数 $\langle\langle mult\rangle\rangle$ について

乗算 $m \times n$ は $0 + m + m + \cdots + m$ と加算を $n$ 回繰り返すことで実現できる. したがって授業スライド 2 の p47 で $\langle\langle add\rangle\rangle$ を $\langle\langle succ\rangle\rangle$ 繰り返しで定義したことの類推から

$$\langle\langle mult\rangle\rangle =: \lambda m.\lambda n.\Big(n\ \Big(\langle\langle add\rangle\rangle\ m\Big)\Big)\ \langle\langle 0\rangle\rangle$$

で定義されると考えられる.[1][2] ここで $\langle\langle add\rangle\rangle$ は加算関数であり $\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle n\rangle\rangle = \langle\langle m{+}n\rangle\rangle$ である. 実際に自然数に対して適用すると

$$\begin{aligned}
&\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle n\rangle\rangle \\
&\to_\beta \Bigg(\Bigg(\lambda m.\Big(\lambda n.\Big(n\ \Big(\langle\langle add\rangle\rangle\ m\Big)\Big)\ \langle\langle 0\rangle\rangle\Big)\ \langle\langle m\rangle\rangle\Bigg)\ \langle\langle n\rangle\rangle\Bigg) \\
&\to_\beta \langle\langle n\rangle\rangle\ \Big(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\Big)\ \langle\langle 0\rangle\rangle \\
&\to_\beta \Bigg(\lambda x.\Big(\lambda y.\Big(\underbrace{x(x\cdots(x(x}_{n\ 個}\ y))\cdots)\Big)\Big)\ \Big(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\Big)\Bigg)\ \langle\langle 0\rangle\rangle \\
&\to_\beta \underbrace{\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Bigg(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle \cdots \Bigg(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Big(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle}_{n\ 個}\ \langle\langle 0\rangle\rangle\Big)\Bigg)\Bigg) \\
&\to_\beta \langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Bigg(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle \cdots \Bigg(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\Bigg)\Bigg) \\
&\to_\beta \langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Big(\langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle \cdots \langle\langle 2m\rangle\rangle\Big) \\
&\to_\beta \langle\langle add\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle m \times (n-1)\rangle\rangle \\
&\to_\beta \langle\langle m \times n\rangle\rangle
\end{aligned}$$

となり, 確かに乗算が行われている.

### 冪乗関数 $\langle\langle pow\rangle\rangle$ について

乗算が加算の繰り返しで実現したのと同様に冪乗 $m^n$ も $1 \times m \times \cdots \times m$ と乗算を $n$ 回繰り返すことで実現できる. したがって乗算関数と同様に定義すれば

$$\langle\langle pow\rangle\rangle =: \lambda m.\lambda n.\Big(n\ \big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ m\big)\Big)\ \langle\langle 1\rangle\rangle$$

で定義されると考えられる.[1] 実際に自然数に対して適用すると, 乗算関数の場合と同様の $\beta$ 変換を行うことで

$$\begin{aligned}
&\langle\langle pow\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle n\rangle\rangle \\
&\to_\beta \underbrace{\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle \cdots \Big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle}_{n\text{ 個}}\ \langle\langle 1\rangle\rangle\big)\Big)\Big) \\
&\to_\beta \langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle \cdots \Big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\Big)\Big) \\
&\to_\beta \langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \Big(\langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle \cdots \langle\langle m^2\rangle\rangle\Big) \\
&\to_\beta \langle\langle mult\rangle\rangle\ \langle\langle m\rangle\rangle\ \langle\langle m^{n-1}\rangle\rangle \\
&\to_\beta \langle\langle m^n\rangle\rangle
\end{aligned}$$

となり, 確かに冪乗が行われている.

## 参考文献


[1] 小林直樹. 計算機ソフトウェア工学. `http://www.kb.is.s.u-tokyo.ac.jp/~koba/class/ComputationTheory/lambda.pdf`. (Accessed on 09/01/2021).

[2] 相場亮. 計算モデル論 2. distributed in class.