

(1-1)

第2回授業資料から氷の密度を  $\rho_i = 917 \text{ kg m}^{-3}$ , 岩石の密度を  $\rho_s = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ , 水の層の厚さを  $r$  とする. このとき以下が成り立つ.

$$\frac{4\pi r^3}{3} \times 3000 + \frac{4\pi}{3} ((R_e \times 1000)^3 - r^3) \times 917 = M_e \quad (1)$$

これを解くと

$$\begin{aligned} r &= 2.31 \times 10^5 \text{ m} \\ &= 231 \text{ km} \end{aligned} \quad (2)$$

であるので, 氷の厚さは

$$252 - 231 = 2.10 \times 10^1 \text{ km} \quad (3)$$

である.

(1-2)

岩石の質量は  $M_s = 4\pi/3 r^3 \rho_s$ , 氷の質量は  $M_i = 4\pi/3 (R_e^3 - r^3) \rho_i$  なので慣性モーメントは

$$\begin{aligned} C_E &= \frac{2}{5} M_s r^2 + \frac{2}{5} M_i R_e^2 \frac{1 - (r/R_e)^5}{1 - (r/R_e)^3} \\ &= \frac{8\pi}{15} \rho_s r^5 + \frac{8\pi}{15} \rho_i (R_e^5 - r^5) \end{aligned} \quad (4)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{C_E}{M_e R_e^2} &= \frac{1}{M_e R_e^2} \frac{8\pi}{15} (\rho_s r^5 + \rho_i (R_e^5 - r^5)) \\ &= 0.564 \end{aligned} \quad (5)$$

である.

(1-3)

木星軌道は雪線以遠であるため, 表面はガス及び氷から成ると考えられる. またガニメデにはオーロラが発生しているため, 地磁気が存在すると考えられる.[1] したがって溶融した鉄からなる核が存在すると考えられるので, ガニメデの内部構造は (D) のようになっていると考えられる.

(2-1)

球の平均密度は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \div \frac{4\pi}{3} R^3 \\ &= A - \frac{3B}{4} = 5.50 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}\end{aligned}\tag{6}$$

第 2 回授業資料から地球の平均密度は  $5515 \text{ kg m}^{-3}$  であり相対誤差 0.2% で一致している.

(2-2)

静水圧平衡を仮定すると

$$P(0) = \int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} dr\tag{7}$$

したがって球内部の密度が一定なとき

$$\begin{aligned}P(0) &= G\bar{\rho} \int_0^R dr \frac{1}{r^2} \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \bar{\rho} \\ &= 4\pi G\bar{\rho}^2 \int_0^R dr \frac{1}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \\ &= \frac{4\pi GR^2 \bar{\rho}^2}{6} = 172 \text{ GPa}\end{aligned}\tag{8}$$

また球内部の密度が  $\rho(r)$  のとき

$$\begin{aligned}P(0) &= \pi G \int_0^R dr \frac{\rho(r)}{r^2} \int_0^r dr' 4r'^2 \rho(r') \\ &= \pi G \int_0^R dr \frac{1}{r^2} \left( A - r \frac{B}{R} \right) \left( \frac{4A}{3} r^3 - \frac{B}{R} r^4 \right) \\ &= \pi G \left( \frac{2A^2}{3} - \frac{7AB}{9} + \frac{B^2}{4} \right) R^2 \\ &= 311 \text{ GPa}\end{aligned}\tag{9}$$

これは被積分項  $GM(r)\rho(r)/r^2$  に  $1/r^2$  依存性があるため,  $r$  が小さければ小さいほど密度が高くなる  $\rho(r)$  を用いるとより密度の高い中心付近の寄与が大きく顕れるためである.

(3-1)

変形後の各辺の長さは以下で表される.

$$a' = a(1 + \epsilon_{xx}) \quad (10)$$

$$b' = b(1 + \epsilon_{yy}) \quad (11)$$

$$c' = c(1 + \epsilon_{zz}) \quad (12)$$

したがって体積歪み  $\Delta$  は

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\delta V}{V} &= \frac{abc(1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz}) - abc}{abc} \\ &= 1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx} - 1 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで  $\epsilon_{ii}$  の 2 次以上を無視すると

$$\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (14)$$

を得る.

(3-2)

弾性体の構成方程式から

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} = \sum_{i,j} (\lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}) \quad (15)$$

ここで歪みテンソル, 応力テンソルは対角成分のみが非零なので

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} &= 3\lambda \Delta + 2\mu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ -3P &= (3\lambda + 2\mu)\Delta \\ -\frac{P}{\Delta} &= \lambda + \frac{2}{3}\mu = k \end{aligned} \quad (16)$$

を得る.

(4-1)

グーテンベルグリヒターの式において両辺の指数を取ると

$$n(M) = 10^a 10^{-bM} \quad (17)$$

すなわち  $b$  は減衰に関する項であり  $b$  が大きいほど  $n(M)$  は急速に減衰する. つまり  $a$  が等しく  $b$  が高い地域はマグニチュードが大きい地震の発生頻度が高いと言える. 幾つかの  $b$  についてのプロットを図 1 に示す.

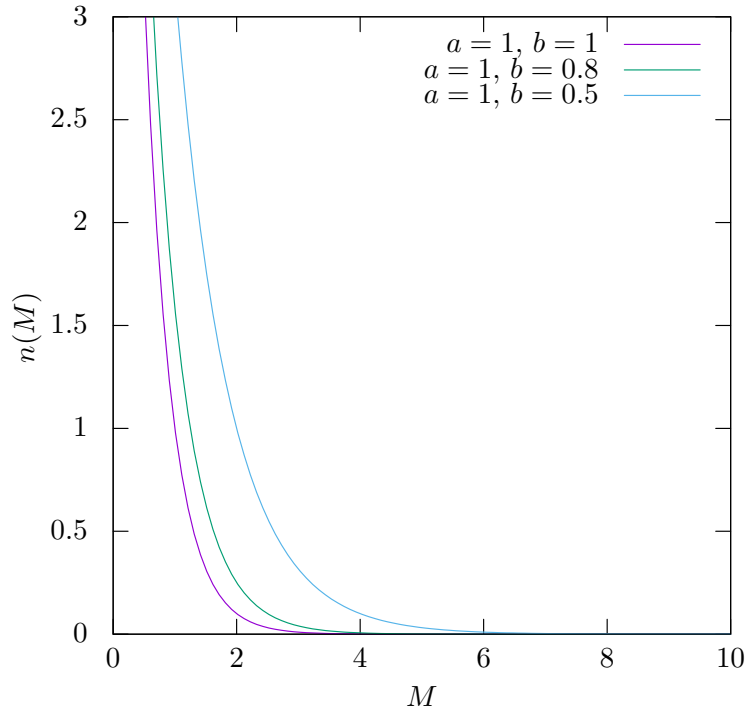


図1  $n(M)$  に対する  $b$  の依存性

(4-2)

(17) からマグニチュード  $M$  以上の地震の総数は

$$\begin{aligned}
 \int_M^\infty n(M) dM &= 10^a \int_M^\infty 10^{-bM} dM \\
 N(M) &= 10^a \frac{0 - 10^{-bM}}{-b \ln 10} \\
 \log N(M) &= a - bM - \log b \ln 10 \\
 &= A - bM
 \end{aligned} \tag{18}$$

となる.

(5-1)

P 波の音速が一定であるため, 球内で波の屈折などは起こらず直達波は直進する. P 波の経路の長さ  $L$  は第 2 余弦定理より

$$L^2 = 2R_P^2(1 - \cos \Delta) \tag{19}$$

したがって直達 P 波の走時  $T$  は

$$T = \frac{R_P \sqrt{2(1 - \cos \Delta)}}{v_0} \quad (20)$$

$$= \frac{2R_P \sin \frac{\Delta}{2}}{v_0} \quad (21)$$

(5-2)

走時パラメーター  $p$  は

$$p = \frac{dT}{d\Delta} = \frac{R_P}{v_0} \cos \frac{\Delta}{2} \quad (22)$$

ここである角距離  $\Delta_1$  での走時パラメーターが  $\beta_1$  は

$$\beta_1 = \frac{R_P}{v_0} \cos \frac{\Delta_1}{2} \quad (23)$$

である. したがって Herglotz-Wiechert の公式から

$$\int_0^{\Delta_1} d\Delta \cosh^{-1} \left( \frac{p}{\beta_1} \right) = \pi \ln \frac{R_P}{r_1} \quad (24)$$

ここで恒等式から

$$\int_0^{\Delta_1} d\Delta \cosh^{-1} \left( \frac{\cos \frac{\Delta}{2}}{\cos \frac{\Delta_1}{2}} \right) = -\pi \ln \cos \frac{\Delta_1}{2} \quad (25)$$

したがって

$$r_1 = R_P e^{\ln \cos \frac{\Delta_1}{2}} \quad (26)$$

$$= R_P \cos \frac{\Delta_1}{2} \quad (27)$$

したがって地震波速度  $v$  は

$$v = \frac{r_1}{\beta_1} = \frac{R_P \cos \frac{\Delta_1}{2}}{\frac{R_P}{v_0} \cos \frac{\Delta_1}{2}} = v_0 \quad (28)$$

と求まった.

(5-3)

角距離が一定以上のとき直達 P 波が観測されなかったことから, 図 2 のように内部に液体の核があり P 波が阻害されていると考えられる. また内部の核の半径は以下になる.

$$r = R_P \cos \left( \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{R_P}{2} \quad (29)$$

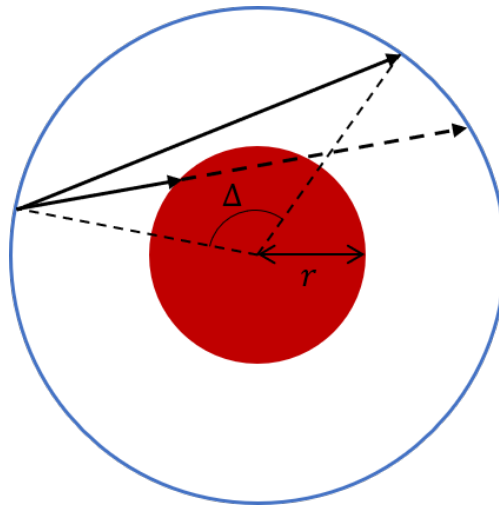


図 2 内部構造の推定

## 参考文献

- [1] 国立天文台. 理科年表プレミアム - オーロラ (極光). [http://www.rikanenpyo.jp.kras1.lib.keio.ac.jp/member/?module=Member&action=Highlight&page=4\\_cGEx31x1750\\_2021\\_1&p=Highlight%26page%3D4\\_cGEx31x1750\\_2021\\_1%3Aa#keyword](http://www.rikanenpyo.jp.kras1.lib.keio.ac.jp/member/?module=Member&action=Highlight&page=4_cGEx31x1750_2021_1&p=Highlight%26page%3D4_cGEx31x1750_2021_1%3Aa#keyword), 2021. (Accessed on 05/31/2021).