3-1.

(1) **解答**

$$Z = (2\cosh(\beta\mu H))^N$$

. . . .

(2) **解説**

分配関数 Z は (3.5) 式から微視的状態 ν について

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\nu} \mathrm{e}^{-\beta E} \\ &= \sum_{\nu} \mathrm{e}^{\beta\mu H \sum_i \sigma_i} \end{aligned}$$

となる. ここで $\sigma_i = \pm 1$ を取るので

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1} \mathrm{e}^{\beta\mu H \sum_i \sigma_i} \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1} \mathrm{e}^{\beta\mu H(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)} \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H\sigma_1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H\sigma_2}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H\sigma_N} \\ &= (\mathrm{e}^{\beta\mu H} + \mathrm{e}^{-\beta\mu H})^N \\ &= (2\cosh(\beta\mu H))^N \end{aligned} \tag{1}$$

となる.

(2) **解答**

$$F = -\frac{N}{\beta} \log(2\cosh(\beta\mu H))$$

....

(2) **解説**

(3.12) 式から

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \log Z && (2) \\ &= -\frac{1}{\beta} \log(2\cosh(\beta\mu H))^N \\ &= -\frac{N}{\beta} \log(2\cosh(\beta\mu H)) && (3) \end{aligned}$$

(3) 解答

$$\langle M\rangle = N\mu\tanh(\beta\mu H)$$

……………………………………………………………………………………

(3) 解説

(3.5) 式から M の期待値は

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle &= \sum_\nu p_\nu M_\nu \\
&= \sum_\nu \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{\beta\mu H\sum_i \sigma_i}\mu\sum_{i=1}^N \sigma_i \\
&= \frac{\mu}{Z}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)}(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)
\end{aligned}$$

ここで $\partial F/\partial H$ を考えると (1), (2) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial H} &= \frac{\partial Z}{\partial H}\frac{\partial F}{\partial Z} \\
&= \frac{\partial}{\partial H}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)}\times\frac{-1}{\beta Z}
\end{aligned}$$

ここで級数は有限であり, 項別に微分可能なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial H} &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\frac{\partial}{\partial H}\mathrm{e}^{\beta\mu H(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)}\times\frac{-1}{\beta Z} \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)}\beta\mu(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)\times\frac{-1}{\beta Z} \\
&= \frac{-\mu}{Z}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta\mu H(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)}(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_N)
\end{aligned}$$

したがって (3) 式から

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle &= -\frac{\partial F}{\partial H} \\
&= \frac{N}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log(2\cosh(\beta\mu H)) \\
&= \frac{N}{\beta}\frac{2\beta\mu\sinh(\beta\mu H)}{2\cosh(\beta\mu H)} \\
&= N\mu\tanh(\beta\mu H) = N\mu\tanh(\mu H/k_BT) \qquad (4)
\end{aligned}$$

補遺 A

原子が 1 個のとき M の期待値 $\langle m\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle m\rangle &= \frac{-\mu \mathrm{e}^{-\beta\mu H}+\mu \mathrm{e}^{\beta\mu H}}{\mathrm{e}^{-\beta\mu H}+\mathrm{e}^{\beta\mu H}}\\ &= \mu\tanh(\beta\mu H)\end{aligned}$$

であり, 原子が N 個のときの期待値 $\langle M\rangle$ は $\langle m\rangle$ の N 倍になっている. これは各原子が相互作用せず独立に動くことに整合する.

補遺 B

(4) 式において両辺を体積 V で割る.

$$\begin{aligned}\frac{\langle M\rangle}{V} &= \frac{N}{V}\mu\tanh(\mu H/k_BT)\\ \langle I\rangle &= n\mu\tanh(\mu H/k_BT)\end{aligned}$$

ここで $\langle I\rangle$ は磁化の期待値, n は単位体積あたりの原子数である. $\mu H/k_BT \ll 1$ のとき, すなわち温度が十分高いとき $\langle I\rangle$ を 1 次まで展開すると $\tanh x \simeq x + o(x^3)$ から

$$\langle I\rangle = n\mu\frac{\mu H}{k_BT}$$

ここで磁化率 $\chi = I/H$ を用いて

$$\chi = \frac{n\mu^2}{k_B}\frac{1}{T} =: \frac{C}{T}$$

これはキュリーの法則とよばれる. また $C = n\mu^2/k_B$ はキュリー定数である.

補遺 C

$\langle M \rangle$ は図 1 のように振る舞う．ここで粒子数 $N = N_A$ (アボガドロ数), $\mu = \mu_B$ (ボーア磁子), $H = 50\mathrm{T}$ とした.

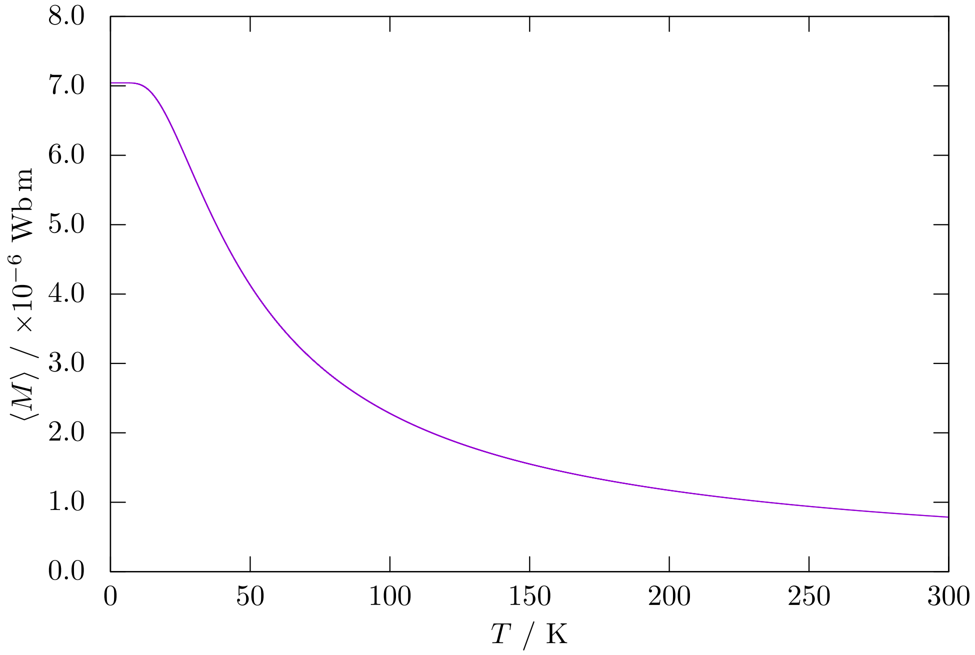

図 1　$\langle M \rangle$ の挙動