レーザー物理学 レポート No.12

82311971 佐々木良輔

問 20

簡単のため以下では $\Omega_0^2 = y$ とする. また $B = C$ とする. このとき与式は部分分数分解を行うと

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1+By}{A(1-By)y}dy \\ &= \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{2B}{1-By}\right)dy \end{aligned} \tag{1}$$

となるので. 両辺積分し

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{2B}{1-By}\right)dy \\ \iff \quad t &= \frac{1}{A}\left(\log y - 2\log(1-By)\right) + C \end{aligned} \tag{2}$$

ただし C は積分定数である.

問 21

$f(\omega)$ を以下で定義する.

$$f(\omega) = \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{t_r}\right) \tag{3}$$

これは周期 $2\pi/t_r$ の周期関数であり, フーリエ級数展開を用いて

$$f(\omega) = \sum_n \tilde{f}_n e^{in\omega t_r} \tag{4}$$

と表される. $\tilde{f}_n$ はフーリエ係数であり

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n &= \frac{t_r}{2\pi}\int_{-\pi/t_r}^{\pi/t_r} f(\omega)e^{-in\omega t_r}d\omega \\ &= \frac{t_r}{2\pi}\int_{-\pi/t_r}^{\pi/t_r} \sum_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{t_r}\right)e^{-in\omega t_r}d\omega \end{aligned} \tag{5}$$

ここで積分区間 $[-\pi/t_r, \pi/t_r]$ には $k=0$ の項しか含まれないため

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_n &= \frac{t_r}{2\pi}\int_{-\pi/t_r}^{\pi/t_r} \delta\left(\omega\right) e^{-in\omega t_r} d\omega \\
&= \frac{t_r}{2\pi}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
& f(\omega) = \sum_n \frac{t_r}{2\pi} e^{in\omega t_r} = \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{t_r}\right) \\
\iff \quad & \sum_n e^{in\omega t_r} = \frac{2\pi}{t_r}\sum_n \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{t_r}\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

が示される.