統計物理学 No.4

82311971 佐々木良輔

[1] (a)

$\boldsymbol{S}^+ = \sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a}$, $\boldsymbol{S}^- = \hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}}$, $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ より

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{S}^+, \boldsymbol{S}^-\right] &= \left[\sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a}, \hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}}\right] \\ &= \sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a}\hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}} - \hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}}\sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a} \\ &= \sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a}\hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}} - \hat{a}^\dagger(2S-\hat{n})\hat{a}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}$ から

$$\begin{aligned}\left[\hat{n}, \hat{a}\hat{a}^\dagger\right] = \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger\right] &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger\hat{a}(1+\hat{a}^\dagger\hat{a}) - (1+\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2}$$

より $\hat{n}$ と $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ は交換する. また

$$\hat{n}\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a} = \hat{a}(\hat{n}-1) \tag{3}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{S}^+, \boldsymbol{S}^-\right] &= \hat{a}\hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}}\sqrt{2S-\hat{n}} - \hat{a}^\dagger(2S-\hat{n})\hat{a} \\ &= \hat{a}\hat{a}^\dagger(2S-\hat{n}) - \hat{a}^\dagger\hat{a}(2S-(\hat{n}-1)) \\ &= \hat{a}\hat{a}^\dagger(2S-\hat{n}) - \hat{a}^\dagger\hat{a}(2S-\hat{n}) - \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right](2S-\hat{n}) - \hat{n} \\ &= 2(S+\hat{n}) = 2\boldsymbol{S}^z\end{aligned} \tag{4}$$

を得る.

[1] (b)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^2 &= (\boldsymbol{S}^x)^2 + (\boldsymbol{S}^y)^2 + (\boldsymbol{S}^z)^2 \\
&= (\boldsymbol{S}^z)^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}^+\boldsymbol{S}^- + \boldsymbol{S}^-\boldsymbol{S}^+\right) \\
&= (S-\hat{n})^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a}\hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}} + \hat{a}^\dagger\sqrt{2S-\hat{n}}\sqrt{2S-\hat{n}}\hat{a}\right)
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで第 2 項は前問 (4) 式と同様の変形により

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^2 &= (S-\hat{n})^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger(2S-\hat{n}) + \hat{a}^\dagger\hat{a}(2S-\hat{n}+1)\right) \\
&= (S-\hat{n})^2 + \frac{1}{2}\left((\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)(2S-\hat{n}) + \hat{a}^\dagger\hat{a}(2S-\hat{n}+1)\right) \\
&= (S-\hat{n})^2 + \frac{1}{2}\left(2S\hat{n}-\hat{n}^2+2S-\hat{n}+2S\hat{n}-\hat{n}^2+\hat{n}\right) \\
&= S^2 - 2S\hat{n} + \hat{n}^2 + 2S\hat{n} - \hat{n}^2 + S \\
&= S(S+1)
\end{aligned} \tag{6}
$$

を得る.

[2] (a)

個数演算子の期待値が Bose 分布 $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_h \rangle = (\exp(\beta(h+\epsilon_k)) - 1)^{-1}$, ただし低温では長波長近似が成り立つとして $\epsilon_k \simeq JS\boldsymbol{k}^2$ に従う. 3 次元, $h=0$ でのスピン一つあたりの excitation energy は

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta E}{N} &= \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \epsilon_k \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_h \rangle \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{JSk^2}{e^{\beta JSk^2}-1}
\end{aligned} \tag{7}
$$

$N \to \infty$ で和を積分に置き換えると

$$
\frac{\Delta E}{N} = \int_{(-\pi,\pi]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{JSk^2}{e^{\beta JSk^2}-1} \tag{8}
$$

ここで低温において被積分関数は $k \to \infty$ で急速に減少するため, 積分範囲を無限大に置き換えることができる

$$
\frac{\Delta E}{N} = \int_{(-\infty,\infty]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{JSk^2}{e^{\beta JSk^2}-1} \tag{9}
$$

被積分関数は $\boldsymbol{k}$ の絶対値にしか依存しないので, 球座標を用いて積分を行うと

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{N} &= \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{JSk^2}{e^{\beta JSk^2}-1} \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{2\beta(\beta JS)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{(\beta JSk^2)^{3/2}}{e^{\beta JSk^2}-1}\beta JS\cdot 2kdk\end{aligned} \tag{10}$$

ここで $\beta JSk^2 = x$ とすると, $dx = \beta JS \cdot 2kdk$ なので

$$\frac{\Delta E}{N} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{2\beta(\beta JS)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx \tag{11}$$

更に積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{e^x-1}dx = \Gamma(p+1)\zeta(p+1) \qquad (p>0) \tag{12}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{N} &= \frac{\Gamma(5/2)\zeta(5/2)}{4\pi^2(JS)^{3/2}}\frac{1}{\beta^{5/2}} \\ &= \frac{\Gamma(5/2)\zeta(5/2)}{4\pi^2(JS)^{3/2}}(k_BT)^{5/2}\end{aligned} \tag{13}$$

を得る. また 1 スピンあたりの比熱はこの結果を用いて

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\Delta E}{N} = \frac{\Gamma(5/2)\zeta(5/2)}{4\pi^2(JS)^{3/2}}\frac{5k_B^{5/2}}{2}T^{3/2} \tag{14}$$

となる.

[2] (b)

有限磁場 $h>0$ での飽和磁化からの磁化の変化量は

$$\begin{aligned}S-m &= \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}}\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_h\rangle \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{e^{\beta(h+JSk^2)-1}}\end{aligned} \tag{15}$$

前問と同様に $N\to\infty$ で和を積分に置き換えると

$$\begin{aligned}S-m &= \int_{(-\pi,\pi]}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{\beta(h+JSk^2)}-1} \\ &= \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{\beta(h+JSk^2)}-1}\end{aligned} \tag{16}$$

更に $\beta JSk^2 = x$ とすれば

$$
\begin{aligned}
S - m &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{2(\beta JS)^{3/2}}\int_0^\infty \beta JS \cdot 2kdk \frac{\sqrt{\beta JS}k}{e^{\beta h}e^{\beta JSk^2} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{2(\beta JS)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{\beta h}e^x - 1}dx
\end{aligned}
\tag{17}
$$

ここで多重対数関数

$$
\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{e^x/z - 1} \tag{18}
$$

を用いれば

$$
\begin{aligned}
S - m &= \frac{1}{4\pi^2(\beta JS)^{3/2}}\Gamma(3/2)\mathrm{Li}_{3/2}(e^{-\beta h}) \\
&= \frac{1}{4\pi^2(\beta JS)^{3/2}}\Gamma(3/2)\sum_{n=1}^\infty \frac{(e^{-\beta h})^n}{n^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ここで $k_B T \ll h$ より $1 \ll \beta h$ なので $e^{-\beta h} \ll 1$, したがって (19) 式最右辺の和で $n = 1$ の項だけを残すと

$$
S - m = \frac{1}{4\pi^2(\beta JS)^{3/2}}\Gamma(3/2)e^{-\beta h} \tag{20}
$$

を得る.