レーザー物理学 レポート No.5

82311971 佐々木良輔

問 8(1)

$\hbar\omega = \varepsilon$ とする. 分配関数は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon} \tag{1}$$

なので $n\varepsilon$ の期待値は

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon\rangle =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varepsilon e^{-\beta n\varepsilon}}{Z} \\ =& \frac{-\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_n e^{-\beta n\varepsilon}}{\sum_n e^{-\beta n\varepsilon}} \\ =& -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

ここで無限等比級数の和の公式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon} = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon}} \tag{3}$$

なので

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon\rangle =& -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(1-e^{-\beta\varepsilon}\right)^{-1} \\ =& \frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(1-e^{-\beta\varepsilon}\right) \\ =& \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} \\ =& \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}\end{aligned} \tag{4}$$

を得る.

問 8(2)

スライド (2.5) 式について $\omega = 2\pi\nu$ を用いて, (2.4) 式は

$$\begin{aligned} & \rho(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{c^3\pi^2}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega \\ \iff \quad & \rho(\nu)d\nu = \frac{\hbar(2\pi\nu)^3}{c^3\pi^2}\frac{1}{e^{\beta\hbar\times 2\pi\nu}-1}2\pi d\nu \\ \iff \quad & \rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\beta h\nu}-1}d\nu \end{aligned} \tag{5}$$

となる. ただし h はプランク定数である. また (2.6) 式について $c = \nu\lambda$ から

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\frac{c}{\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \tag{6}$$

であるので, (5) 式より

$$\begin{aligned} & \rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\beta h\nu}-1}d\nu \\ \iff \quad & \rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi h}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\beta hc/\lambda}-1}\left(-\frac{c}{\lambda^2}d\lambda\right) \\ \iff \quad & \rho(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\beta hc/\lambda}-1}d\lambda \end{aligned} \tag{7}$$

となる.