レーザー物理学 レポート No.2

82311971 佐々木良輔

問 3

E_y, B_x, B_y, B_z はぞれぞれ $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ という項を持つとする. すなわち

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -i\omega E_y \tag{3.1}$$

であり B_x, B_y, B_z についても同様である. ここで Maxwell 方程式 $\mathrm{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ から

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega B_x \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega B_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \end{cases} \tag{3.2}$$

また $\mathrm{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ から

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0\mu_0 E_x \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\mu_0 E_y \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

である. ただし $E_z = 0$ を用いた. まず (3.2) 第 2 式から

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{1}{i\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + iku\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

である. 次に (3.3) 第 3 式に (3.4) を代入し

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ &= \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + ik\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

両辺を y で積分し

$$B_x = \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.6}$$

である．次に (3.2) 第 1 式に (3.6) を代入し

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.7}$$

両辺を z で積分し

$$E_y = -\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.8}$$

である．次に (3.2) 第 3 式に (3.8) を代入し

$$i\omega B_z = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{3.9}$$

以下では積分と偏微分が交換可能であるとする．

$$B_z = -\frac{1}{i\omega} \left(\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \right) \tag{3.10}$$

となる．以上から

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} u(x,y,z)\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \\ -\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \\ -\frac{1}{i\omega} \left(\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \right) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

を得る．ここで電荷 $\rho = 0$ であることから $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ となることを確認する．

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial}{\partial y} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \int dz \ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} ik \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.14}$$

ここで最右辺 第 1 項について部分積分を実行すると

$$\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\frac{\partial u}{\partial x} - \int dz\ ik\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.15}$$

したがって (3.14) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + \int dz\ ik\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\frac{\partial u}{\partial x} - \int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} ik\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{3.17}$$

以上から

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{3.18}$$

を得る. また $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ についても同様に確認する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\int dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + ik\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\int dy\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} + ik\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_z}{\partial z} &= -\frac{1}{i\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\int dy\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\int dy\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + ik\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\left(\int dy\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + ik\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

以上から

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{3.22}$$

を得る.

問 4