統計物理学 No.1

82311971 佐々木良輔

超高密度符号化

Alice と Bob はもつれた量子ビット (A, B) のうちそれぞれ 1 つを持っている．Alice は送信したい 2 古典ビットに応じて異なる操作を量子ビット A に施し, これを Bob に渡す．Bob はもともと手元にあった量子ビット B と Alice から渡された量子ビット A に適切な操作を行うことで, 元の古典ビット ab の情報を得ることが出来る．ここで Alice は Bob に対して 1 量子ビットしか送信していないが,Bob は 2 古典ビット分の情報を得ており, これを超高密度符号化と呼ぶ．超高密度符号化は具体的には以下の手順で行われる．

1. Bell 状態 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ にある量子ビット (A, B) を Alice と Bob に渡す．
2. Alice は送信したい古典ビット ab に応じて以下の操作を A に施す．
   (a) $ab = (00)_2$ のとき, Alice は A に何もしない. このとき (A, B) は

   $$|\mathrm{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{1}$$

   である．

   (b) $ab = (01)_2$ のとき, Alice は A に σ_x を適用する．σ_x を $|0\rangle$, $|1\rangle$ に適用したとき, それぞれ

   $$\begin{aligned} \sigma_x|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle, \\ \sigma_x|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

   となるため操作後の (A, B) は

   $$\sigma_x|\mathrm{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \tag{3}$$

   である．

(c) $ab = (10)_2$ のとき, Alice は A に σ_z を適用する. σ_z を $|0\rangle$, $|1\rangle$ に適用したとき, それぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_z|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \\ \sigma_z|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|1\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

となるため操作後の (A, B) は

$$\sigma_z|\mathrm{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \tag{5}$$

である.

(d) $ab = (11)_2$ のとき, Alice は A に $\sigma_z\sigma_x$ を適用する. $\sigma_z\sigma_x$ を $|0\rangle$, $|1\rangle$ に適用したとき, それぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_z\sigma_x|0\rangle &= -|1\rangle, \\ \sigma_z\sigma_x|1\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

となるため操作後の (A, B) は

$$\sigma_z\sigma_x|\mathrm{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle) \tag{7}$$

である.

3. Bob は 2 の操作を施された A を受け取り, (A, B) に CNOT を適用する. (a)〜(d) それぞれについて CNOT を適用すると以下のようになる.

(a)

$$\mathrm{CNOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \tag{8}$$

(b)

$$\mathrm{CNOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)|1\rangle \tag{9}$$

(c)

$$\mathrm{CNOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \tag{10}$$

(d)

$$\mathrm{CNOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|1\rangle + |0\rangle)|1\rangle \tag{11}$$

4. Bob は A に Hadamard 変換を行う．(a)〜(d) それぞれについて Hadamard 変換をすると以下のようになる．

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ に Hadamard 変換を行うと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = |0\rangle \tag{12}$$

よって (A, B) は

$$H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = |00\rangle \tag{13}$$

である．

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)$ に Hadamard 変換を行うと $|0\rangle$ である．よって (A, B) は

$$H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle = |01\rangle \tag{14}$$

である．

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ に Hadamard 変換を行うと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = |1\rangle \tag{15}$$

よって (A, B) は

$$H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle = |10\rangle \tag{16}$$

である．

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|1\rangle + |0\rangle)$ に Hadamard 変換を行うと $|1\rangle$ である．よって (A, B) は

$$H\frac{1}{\sqrt{2}}(-|1\rangle + |0\rangle)|1\rangle = |11\rangle \tag{17}$$

である．

5. 以上の操作で ab 対応する操作を行った (A, B) の状態は $|ab\rangle$ となった．したがって (A, B) を測定することで ab を得る．

以上の操作は量子回路では図のように表される．