応用プラズマ工学

82311971 佐々木良輔

問 1

温度 10 eV の電子の熱速度はボルツマン定数を $1.602\times10^{-19}\ \mathrm{J\,eV^{-1}}$ とすると

$$v_{\mathrm{th}}=\sqrt{\frac{2k_BT}{m_e}}=\sqrt{\frac{2\times1.602\times10^{-19}\times10}{9.109\times10^{-31}}}=1.87\times10^{6}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \tag{1}$$

またグラフから 10 eV の速度係数は $\langle\sigma_{\mathrm{en}}v\rangle=5\times10^{-9}\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}=5\times10^{-15}\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$ なので衝突周波数の平均値は

$$\langle\nu_{\mathrm{en}}\rangle=n_{\mathrm{n}}\langle\sigma_{\mathrm{en}}v\rangle=1.0\times10^{20}\times5\times10^{-15}=5\times10^{5}\ \mathrm{Hz} \tag{2}$$

である. したがって平均自由行程 λ_{en} は

$$\lambda_{\mathrm{en}}=\frac{v_{\mathrm{th}}}{\langle\nu_{\mathrm{en}}\rangle}=\frac{1.87\times10^{6}}{5\times10^{5}}=4\ \mathrm{m} \tag{3}$$

である. また 1 回の衝突で 1 個の水素イオンが生成されるとすると, 単位体積, 単位時間あたりの水素イオン生成数は

$$n_e\langle\nu_{\mathrm{en}}\rangle=1.0\times10^{19}\times5\times10^{5}=5\times10^{24}\ \mathrm{m^{-3}\,s^{-1}} \tag{4}$$

である.

問 2

速度係数は

$$\langle\sigma_{\mathrm{en}}v\rangle=\frac{1}{n_e}\int_0^{\infty}dv\sigma_{\mathrm{en}}vF_e(v) \tag{5}$$

と定義される. ここですべての電子が一定の速度 v_0 を持っている場合

$$F_e(v)=n_e\delta(v-v_0) \tag{6}$$

であるので

$$\langle\sigma_{\mathrm{en}}v\rangle=\sigma_{\mathrm{en}}(v_0)v_0 \tag{7}$$

となり, $\sigma_{\text{en}}(v_0)=0$ の場合は $\langle\sigma_{\text{en}}v\rangle=0$ となる.

一方で温度 T が与えられたとき, 気体の速度は Maxwell-Boltzmann 分布

$$F_e(v)\propto v^2\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m_e v^2}{k_B T}\right) \tag{8}$$

に従う. これは $v_{\text{th}}=\sqrt{2k_BT/m_e}$ で極大を取るが, v_{th} 以上の速度においても有限の値をもっている. したがって電子気体の温度が電離エネルギー以下であっても, それ以上のエネルギーを持った電子は存在しており, これが反応に寄与していると考えられる.

問 3

(1)

エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2+\Delta U \tag{9}$$

運動量保存則は

$$m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2' \tag{10}$$

である.

(2)

(9) から

$$2\Delta U=m_1v_1^2-m_1v_1'^2-m_2v_2'^2 \tag{11}$$

(10) を代入すると

$$\begin{aligned}2\Delta U=&m_1v_1^2-m_1v_1'^2-m_2\left(\frac{m_1(v_1-v_1')}{m_2}\right)^2\\=&m_1v_1^2-m_1v_1'^2-\frac{m_1^2}{m_2}\left(v_1-v_1'\right)^2\end{aligned} \tag{12}$$

となる.

(3)

(12) を v_1' について整理すると

$$
\begin{aligned}
2\Delta U =& m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 - \frac{m_1^2}{m_2}\left(v_1^2 - 2v_1 v_1' + v_1'^2\right) \\
=& -v_1'^2\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) + \frac{2m_1^2}{m_2}v_1 v_1' + v_1^2\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_2}\right) \\
=& -\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)\left(v_1' - \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1+m_2}m_1 v_1^2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる. したがって ΔU は

$$
v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} \tag{14}
$$

のときに最大値を取り, その値は

$$
\Delta U_{\max} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{2}m_1 v_1^2 \tag{15}
$$

となる.

(4)

$m_1 \ll m_2$ のとき

$$
\lim_{m_1\to 0}\Delta U_{\max} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \tag{16}
$$

であり, 入射粒子のエネルギーがすべて内部エネルギーになることがわかる. 一方で $m_1 \simeq m_2$ のとき

$$
\Delta U_{\max} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1 v_1^2 \tag{17}
$$

であり, 入射粒子のエネルギーの半分が内部エネルギーになっている.