

# 統計物理学 No.1

82311971 佐々木良輔

## 超高密度符号化

Alice と Bob はもつれた量子ビット  $(A, B)$  のうちそれぞれ 1 つを持っている. Alice は送信したい 2 古典ビットに応じて異なる操作を量子ビット  $A$  に施し, これを Bob に渡す. Bob はもともと手元にあった量子ビット  $B$  と Alice から渡された量子ビット  $A$  に適切な操作を行うことで, 元の古典ビット  $ab$  の情報を得ることが出来る. ここで Alice は Bob に対して 1 量子ビットしか送信していないが, Bob は 2 古典ビット分の情報を得ており, これを超高密度符号化と呼ぶ. 超高密度符号化は具体的には以下の手順で行われる.

1. Bell 状態  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  にある量子ビット  $(A, B)$  を Alice と Bob に渡す.
2. Alice は送信したい古典ビット  $ab$  に応じて以下の操作を  $A$  に施す.  
(a)  $ab = (00)_2$  のとき, Alice は  $A$  に何もしない. このとき  $(A, B)$  は

$$|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (1)$$

である.

- (b)  $ab = (01)_2$  のとき, Alice は  $A$  に  $\sigma_x$  を適用する.  $\sigma_x$  を  $|0\rangle, |1\rangle$  に適用したとき, それぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_x|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle, \\ \sigma_x|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

となるため操作後の  $(A, B)$  は

$$\sigma_x|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \quad (3)$$

である.

(c)  $ab = (10)_2$  のとき, Alice は  $A$  に  $\sigma_z$  を適用する.  $\sigma_z$  を  $|0\rangle, |1\rangle$  に適用したとき, それぞれ

$$\begin{aligned}\sigma_z|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \\ \sigma_z|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|1\rangle\end{aligned}\tag{4}$$

となるため操作後の  $(A, B)$  は

$$\sigma_z|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)\tag{5}$$

である.

(d)  $ab = (11)_2$  のとき, Alice は  $A$  に  $\sigma_z\sigma_x$  を適用する.  $\sigma_z\sigma_x$  を  $|0\rangle, |1\rangle$  に適用したとき, それぞれ

$$\begin{aligned}\sigma_z\sigma_x|0\rangle &= -|1\rangle, \\ \sigma_z\sigma_x|1\rangle &= |0\rangle\end{aligned}\tag{6}$$

となるため操作後の  $(A, B)$  は

$$\sigma_z\sigma_x|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle)\tag{7}$$

である.

3. Bob は 2 の操作を施された  $A$  を受け取り,  $(A, B)$  に CNOT を適用する. (a) ~ (d) それぞれについて CNOT を適用すると以下ようになる.

(a)

$$\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle\tag{8}$$

(b)

$$\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)|1\rangle\tag{9}$$

(c)

$$\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle\tag{10}$$

(d)

$$\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|1\rangle + |0\rangle)|1\rangle\tag{11}$$

4. Bob は  $A$  に Hadamard 変換を行う. (a) ~ (d) それぞれについて Hadamard 変換をすると以下のようになる.

(a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  に Hadamard 変換を行うと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad (12)$$

よって  $(A, B)$  は

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = |00\rangle \quad (13)$$

である.

(b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)$  に Hadamard 変換を行うと  $|0\rangle$  である. よって  $(A, B)$  は

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle = |01\rangle \quad (14)$$

である.

(c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  に Hadamard 変換を行うと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad (15)$$

よって  $(A, B)$  は

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle = |10\rangle \quad (16)$$

である.

(d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|1\rangle + |0\rangle)$  に Hadamard 変換を行うと  $|1\rangle$  である. よって  $(A, B)$  は

$$H \frac{1}{\sqrt{2}}(-|1\rangle + |0\rangle)|1\rangle = |11\rangle \quad (17)$$

である.

5. 以上の操作で  $ab$  対応する操作を行った  $(A, B)$  の状態は  $|ab\rangle$  となった. したがって  $(A, B)$  を測定することで  $ab$  を得る.

以上の操作は量子回路では図 1 のように表される. 上で示した各手順の直後が図中 (1) ~ (4) の位置に相当する. また  $\sigma_i$  は  $ab$  に応じて  $\sigma_0, \sigma_x, \sigma_z, \sigma_z\sigma_x$  になる.

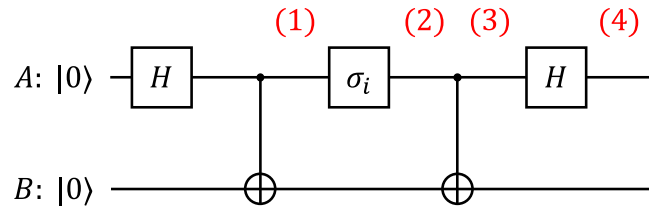


図 1 超高密度符号化の量子回路, (1) ~ (4) は上で示した各手順の後に相当する.