レーザー物理学 レポート No.13

82311971 佐々木良輔

$n_1 = n_2$, $E_1^* = E_1$ のとき, 微分方程式は

$$\frac{dE_1}{dz} = iAE_1E_2e^{ik'z} \tag{1}$$
$$\frac{dE_2}{dz} = iAE_1^2e^{-ik'z} \tag{2}$$

ただし $k' = k_2 - 2k_1$, $A = \varepsilon_0\mu_0\chi_{xxx}^{(2)}\omega_1 c/2n_1$ とした. ここで (1) 式の両辺に $2E_1$ を掛け,$E_1^2 = f$, $E_2e^{ik'z} = g$ とすると

$$\begin{aligned} E_1\frac{dE_1}{dz} &= 2iAE_1^2E_2e^{ik'z} \\ \iff \quad \frac{dE_1^2}{dz} &= 2iAE_1^2E_2e^{ik'z} \\ \iff \quad \frac{df}{dz} &= 2iAfg \end{aligned} \tag{3}$$

また (2) 式は

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dz} &= iAE_1^2e^{-ik'z} \\ \iff \quad \frac{dg}{dz} &= iAf \end{aligned} \tag{4}$$

となる. ここで

$$f(z) = E_0^2(1 - \tanh^2(AE_0z)) \tag{5}$$
$$g(z) = iE_0\tanh(AE_0z) \tag{6}$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= -2E_0^2\tanh(AE_0z)\frac{AE_0(e^{AE_0z} + e^{-AE_0z})^2 - A(e^{AE_0z} - e^{-AE_0z})^2}{(e^{AE_0z} + e^{-AE_0z})^2} \\ &= -2AE_0\tanh(AE_0z)E_0^2\left(1 - \tanh^2(AE_0z)\right) \\ &= 2iA(iE_0\tanh(AE_0z))E_0^2\left(1 - \tanh^2(AE_0z)\right) \\ &= 2iAfg \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} &= iE_0\frac{AE_0(e^{AE_0z} + e^{-AE_0z})^2 - AE_0(e^{AE_0z} - e^{-AE_0z})^2}{(e^{AE_0z} + e^{-AE_0z})^2} \\ &= iAf \end{aligned} \tag{8}$$

となり (3), (4) の解になっている．また

$$f(0) = E_1^2(0) = E_0^2(1-0) = E_0^2 \tag{9}$$

$$g(0) = E_2(0)e^0 = 0 \tag{10}$$

であり, 境界条件を満たす．したがって

$$E_2 = iE_0 \tanh(AE_0 z)e^{-ik'z} \tag{11}$$

であり, 強度は

$$|E_2|^2 = E_0^2 \tanh^2(AE_0 z) \tag{12}$$

となる．