レーザー物理学 レポート No.4

82311971 佐々木良輔

問 6(1)

図 1 のようにミラーは屈折率 $n_2 > n_1$ のガラスと金属の反射部からなるため, 共振器内部での反射は固定端反射, 共振器外部での反射は自由端反射となる．したがって反射光の振幅は $2kL = \phi$ をもちいて

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 e^{i(-kz-\omega t)} \left(r_1 + t_1(-r_2)t_1 e^{i\phi} + t_1(-r_2)(-r_1)(-r_2)t_1 e^{2i\phi} + \cdots \right) \\ &= E_0 e^{i(-kz-\omega t)} \left(r_1 - t_1^2 r_2 e^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_1 r_2 e^{i\phi} \right)^n \right) \\ &= E_0 e^{i(-kz-\omega t)} \left(r_1 - \frac{t_1^2 r_2 r^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} &= \left(r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \right) \left(r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right) \\ &= r_1^2 - r_1 \left(\frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right) + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \\ &= r_1^2 - r_1 \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi} \left(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} \right) + t_1^2 r_2 e^{-i\phi} \left(1 - r_1 r_2 e^{i\phi} \right)}{\left(1 - r_1 r_2 e^{i\phi} \right) \left(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} \right)} \\ &\quad + \frac{t_1^4 r_2^2}{\left(1 - r_1 r_2 e^{i\phi} \right) \left(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi} \right)} \\ &= r_1^2 - r_1 r_2 t_1^2 \frac{2\cos\phi - 2 r_1 r_2}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\phi + r_1^2 r_2^2} + \frac{r_2^2 t_1^4}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\phi + r_1^2 r_2^2} \\ &= \frac{r_1^2 \left(1 - 2 r_1 r_2 \cos\phi + r_1^2 r_2^2 \right) - 2 r_1 r_2 t_1^2 \cos\phi + 2 r_1^2 r_2^2 t_1^2 + r_2^2 t_1^4}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\phi + r_1^2 r_2^2} \\ &= \frac{r_1^2 - 2 r_1^3 r_2 \cos\phi - 2 r_1 r_2 t_1^2 \cos\phi + r_2^2 (r_1^2 + t_1^2)^2}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\phi + r_1^2 r_2^2} \\ &= \frac{r_1^2 + (r_1^2 + t_1^2) \left(r_2^2 (r_1^2 + t_1^2) - 2 r_1 r_2 \cos\phi \right)}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\phi + r_1^2 r_2^2} \\ &= \frac{R_1 + (R_1 + T_1) \left(R_2 (R_1 + T_1) - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos\phi \right)}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos\phi + R_1 R_2} \end{aligned} \tag{2}$$

したがって反射光強度は

$$
\begin{aligned}
I_r &= \frac{\varepsilon_0 c}{2}|E_r|^2 \\
&= \frac{\varepsilon_0 c}{2}|E_0^2|\frac{R_1 + (R_1+T_1)\left(R_2(R_1+T_1) - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi\right)}{1 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi + R_1R_2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる. ここで $R+T=1$ とすると

$$
\frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} = \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi}{1 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi + R_1R_2} \tag{4}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} + \frac{|E_t|^2}{|E_0|^2} =& \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi}{1 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi + R_1R_2} + \frac{(1-R_1)(1-R_2)}{1 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\phi + R_1R_2} \\
=& 1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

したがって反射光強度と透過光強度の合計は

$$
I_t + I_r = \frac{\varepsilon_0 c}{2}|E_0|^2 \tag{6}
$$

となり, 入射光強度と等しい.

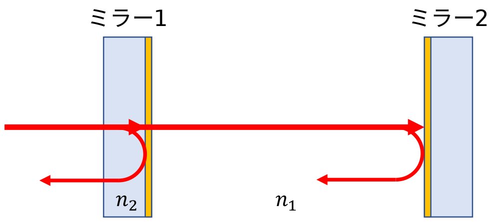

図 1　共振器での反射の模式図

問 6(2)

$R_1 = R_2 = R$ のとき

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{I_{\text{in}}T_1}{1 - 2R\cos\phi + R^2} \\
=& \frac{I_{\text{in}}T_1}{1 + R^2 - 2R\left(1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}\right)} \\
=& \frac{I_{\text{in}}T_1}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\phi}{2}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

より, 強度の最大値は $I_{\mathrm{in}}T_1/(1-R)^2$ である. したがって強度が半分になるとき

$$\begin{aligned}
\frac{I_{\mathrm{in}}T_1}{2(1-R)^2} &= \frac{I_{\mathrm{in}}T_1}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\phi}{2}} \\
\Longleftrightarrow \qquad 4R\sin^2\frac{\phi}{2} &= (1-R)^2 \\
\Longleftrightarrow \qquad \sin\frac{\phi}{2} &= \frac{1-R}{2\sqrt{R}}
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで $\phi/2 \ll 1$ として展開すると

$$\frac{\phi}{2} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \tag{9}$$

ここで $\phi = 2kL,\ k=\omega/c$ より

$$\begin{aligned}
L\frac{\Delta\omega}{c} &= \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \\
\Longleftrightarrow \Delta\omega &= \frac{(1-R)c}{2L\sqrt{R}}
\end{aligned} \tag{10}$$

となる. 次に $\mathrm{FSR}=c/2L$ より

$$F = \frac{\mathrm{FSR}}{2\Delta\nu} = \frac{\pi}{\Delta\omega}\frac{c}{2L} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \tag{11}$$

である. また $R \simeq 1$ より

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2}\frac{2L\sqrt{R}}{(1-R)c} = \frac{\omega_0 L\sqrt{R}}{(1-R)c} \simeq \frac{\omega_0 L}{(1-R)c} \tag{12}$$

である. 一方で Q 値の定義は

$$Q = 2\pi\frac{\text{共振器内のエネルギー}}{\text{1 周期あたりのエネルギー損失}} \tag{13}$$

であった. ここで共振器内のエネルギーは共振器の断面籍を S として

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0|E|^2\times LS = \frac{1}{2}\varepsilon_0 ILS = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{TI_{\mathrm{in}}}{(1-R)^2}LS = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{I_{\mathrm{in}}LS}{1-R} \tag{14}$$

また前問の結果から共振器から失われる光の強度は入射光強度 I_{in} に等しく, また $T=2\pi/\omega_0$ より 1 周期あたりに共振器から失われるエネルギーは

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} dt\frac{1}{2}c\varepsilon_0 I_{\mathrm{in}}\times S = c\varepsilon_0\frac{\pi I_{\mathrm{in}}}{\omega_0}S \tag{15}$$

以上から

$$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{I_{\mathrm{in}}LS}{1-R}}{c\varepsilon_0\frac{\pi I_{\mathrm{in}}}{\omega_0}S} = \frac{\omega_0 L}{c(1-R)} \tag{16}$$

となる.

問 7(1)

ミラー 1 での強度反射率, 強度透過率が R, T, 光が往復する間の強度損失が κ のとき, 電場振幅は図 2 のようになる．これは前問において $r_1=\sqrt{R}$, $r_2=\sqrt{\kappa}$ とした場合に等しい．したがって共振器内の光強度は, 共鳴状態において

$$I=\frac{(1-R)I_{\mathrm{in}}}{(1-\sqrt{\kappa R})^2} \tag{17}$$

となる．ここで

$$\frac{dI}{dR}=\frac{\kappa-\sqrt{\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}(1-\sqrt{\kappa R})^3}I_{\mathrm{in}} \tag{18}$$

である．$0\leq R\leq 1$, $0\leq\kappa\leq 1$ より $0\leq\sqrt{\kappa R}\leq 1$ なので $\sqrt{\kappa R}(1-\sqrt{\kappa R})^3>0$ である．したがって $R\leq\kappa$ のとき $dI/dR\geq 0$, $\kappa<R$ のとき $dI/dR<0$ である．したがって $R=\kappa$ において I は最大値を取る．

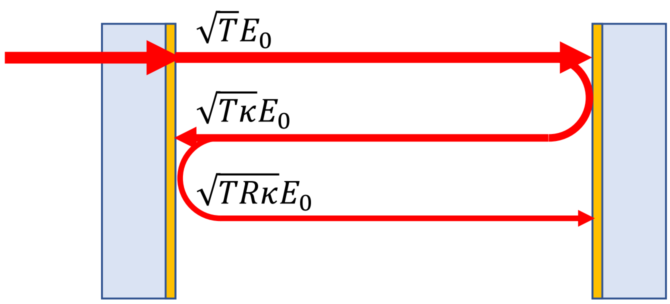

図 2　損失 κ のときの電場

問 7(2)

ミラー 1 の位置を $z=0$, ミラー 2 の位置を $z=L$ とする．このとき $z=0,\ L$ で電場とその一階微分が連続なことから $ikL=\phi$ を用いて

$$\begin{cases} E_i+E_r &= E_{m1}+E_{m2} \\ E_i-E_r &= E_{m1}-E_{m2} \\ E_te^{\phi} &= E_{m1}e^{\phi}+E_{m2}e^{-\phi} \\ E_te^{\phi} &= E_{m1}e^{\phi}-E_{m2}e^{-\phi} \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & e^{\phi} & e^{-\phi} & -e^{\phi} \\ 0 & e^{\phi} & -e^{-\phi} & -e^{\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r \\ E_{m1} \\ E_{m2} \\ E_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_i \\ E_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

拡大係数行列は

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 0 & E_i \\
1 & 1 & -1 & 0 & E_i \\
0 & e^{\phi} & e^{-\phi} & -e^{\phi} & 0 \\
0 & e^{\phi} & -e^{-\phi} & -e^{\phi} & 0
\end{pmatrix}
\tag{20}
$$

行基本変形により

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 2E_i \\
0 & 0 & e^{-\phi} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2e^{\phi} & -2e^{\phi}E_i
\end{pmatrix}
\tag{21}
$$

したがって

$$
\begin{pmatrix}
E_r \\
E_{m1} \\
E_{m2} \\
E_t
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
E_i \\
0 \\
E_i
\end{pmatrix}
\tag{22}
$$

以上から反射光強度 I_r, 及び透過光強度 I_t は

$$
\begin{aligned}
I_r &= 0 \\
I_t &= |E_i|^2
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる.