レーザー物理学 レポート No.2

82311971 佐々木良輔

問 3

E_y, B_x, B_y, B_z はぞれぞれ $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ という項を持つとする. すなわち

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -i\omega E_y \tag{3.1}$$

であり B_x, B_y, B_z についても同様である. ここで Maxwell 方程式 $\mathrm{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ から

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega B_x \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega B_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \end{cases} \tag{3.2}$$

また $\mathrm{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ から

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0\mu_0 E_x \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\mu_0 E_y \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

である. ただし $E_z = 0$ を用いた. まず (3.2) 第 2 式から

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{1}{i\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + iku\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

である. 次に (3.3) 第 3 式に (3.4) を代入し

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ &= \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + ik\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

両辺を y で積分し

$$B_x = \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.6}$$

である. 次に (3.2) 第 1 式に (3.6) を代入し

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.7}$$

両辺を z で積分し

$$E_y = -\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.8}$$

である. 次に (3.2) 第 3 式に (3.8) を代入し

$$i\omega B_z = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{3.9}$$

以下では積分と偏微分が交換可能であるとする.

$$B_z = -\frac{1}{i\omega} \left(\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \right) \tag{3.10}$$

となる. 以上から

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} u(x,y,z)\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \\ -\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right) \\ -\frac{1}{i\omega} \left(\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \right) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

を得る. ここで電荷 $\rho = 0$ であることから $\mathrm{div}\vec{E} = 0$ となることを確認する.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial}{\partial y} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} ik \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.14}$$

ここで最右辺 第 1 項について部分積分を実行すると

$$\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial u}{\partial x} - \int dz\ ik\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.15}$$

したがって (3.14) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + \int dz\ ik\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \frac{\partial u}{\partial x} - \int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} ik \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{3.17}$$

以上から

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{3.18}$$

を得る. また $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ についても同様に確認する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + ik\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + ik\frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial z} &= -\frac{1}{i\omega}\frac{\partial}{\partial z} \left(\int dz\ \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{i\omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + ik\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}}{i\omega} \left(\int dy \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + ik\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + ik\frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

以上から

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{3.22}$$

を得る.

問 4(1)

$w = w_0\sqrt{1+z^2/z_R^2}$, $z_R = kw_0^2/2$ より

$$w(z) = \sqrt{w_0^2 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^2}} \tag{4.1}$$

波長 633 nm のレーザー光の波数 k は

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9.926 \times 10^6 \ \mathrm{m}^{-1} \tag{4.2}$$

である. したがって $w_0 = 5$ m のレーザー光が 3.8×10^8 m 進んだときのビーム径は

$$w = \sqrt{5^2 + \frac{4 \times (3.8 \times 10^8)^2}{(9.926 \times 10^6)^2 \times 5^2}} = 16.1 \ \mathrm{m} \tag{4.3}$$

である. また $w_0 = 1$ µm のレーザー光が 100 m 進んだときのビーム径は

$$w = \sqrt{(1 \times 10^{-6})^2 + \frac{4 \times 100^2}{(9.926 \times 10^6)^2 \times (1 \times 10^{-6})^2}} = 20.1 \ \mathrm{m} \tag{4.4}$$

である.

問 4(2)

ガウスビームの電場振幅は

$$u(x,y,z) = U_0 \frac{q_0}{q_0 + z} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w^2} \mathrm{e}^{ik(x^2+y^2)/2R} \tag{4.5}$$

である. $z \to 0$ において曲率半径 R が ∞ となることから $\mathrm{e}^{ik(x^2+y^2)/2R} \to 1$ である. また $w \to w_0$ なので

$$u(x,y,0) = U_0 \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \tag{4.6}$$

になる. このときレーザー光の $(x,y,0)$ における強度は

$$\frac{1}{2} c\varepsilon_0 |u(x,y,0)|^2 \tag{4.7}$$

である. したがってこのガウスビームのパワー P はガウス積分

$$\int dS \ \mathrm{e}^{-\alpha(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{4\alpha} \tag{4.8}$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}c\varepsilon_0 \int dS \ \left| U_0 \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \right|^2 \\
&= \frac{c\varepsilon_0 U_0^2}{2} \int dS \ \mathrm{e}^{-2(x^2+y^2)/w_0^2} \\
&= \frac{c\varepsilon_0 U_0^2}{2} \frac{\pi w_0^2}{8}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

となる. ここでレーザー光の半径 $w_0 = 50\ \mathrm{\mu m}$, 出力 $P = 1\ \mathrm{W}$ のとき

$$
U_0 = \sqrt{\frac{16P}{\pi c\varepsilon_0 w_0^2}} = 8.760 \times 10^5\ \mathrm{V\,m^{-1}} \tag{4.10}
$$

したがって電場振幅の分布は

$$
u(x, y, 0) = (8.760 \times 10^5)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \tag{4.11}
$$

したがってレーザーの中心 $(x = y = 0)$ における電場強度は

$$
U(0, 0, 0) = 8.76 \times 10^5\ \mathrm{V\,m^{-1}} \tag{4.12}
$$

である.

問 4(3)

近軸近似が成り立たないのは以下の場合である.

2. 1. と同じ光を焦点距離 1 cm のレンズで集光した

平行光をレンズで集光する場合, 光線は図 1 のような形になる. ここで w はビーム径, f は焦点距離である. 電場の大きさは, x, y 方向については w 程度の大きさで変化するため

$$
\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{w} \tag{4.13}
$$

程度と見積もることが出来る. 一方で z 方向へは f 程度の長さで変化するため

$$
\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{f} \tag{4.14}
$$

程度と見積もれる. 今回の想定において $w = f = 1\ \mathrm{cm}$ であるため

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim 10^4\ \mathrm{m^{-1}} \tag{4.15}
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim 10^4\ \mathrm{m^{-1}} \tag{4.16}
$$

と $\partial^2 u/\partial z^2$ の項が $\partial^2 u/\partial x^2$ と同程度の大きさになり, 無視できない. したがってこの想定では近軸近似は成立しない.

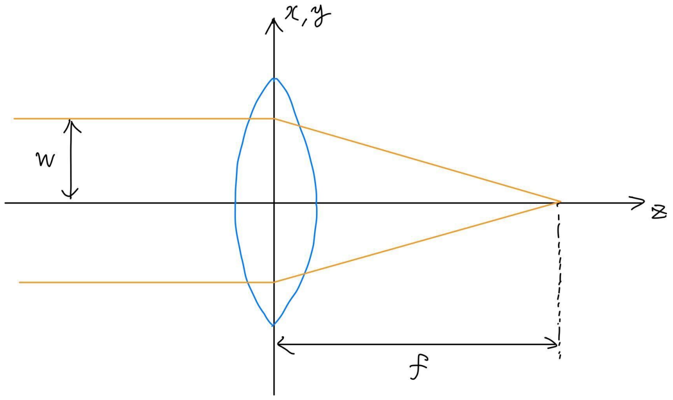

図 1　集光の模式図

3. 波長 633 nm の点光源からの光を焦点距離 10 cm, 半径 10 cm のレンズで平行光にした

点光源からの光を平行光にすることは図 1 において光線の向きを逆にしたものと等価であるので, 同様の議論が行える. すなわち $w = f = 10$ cm であるため

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim 10^2\ \mathrm{m}^{-1} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim 10^2\ \mathrm{m}^{-1} \tag{4.18}$$

よって $\partial^2 u/\partial z^2 \sim \partial^2 u/\partial x^2$ より, 近軸近似は成立しない.

4. 3. と同じ光を焦点距離 1 cm, 半径 2 mm のレンズで平行光にした

同様に各項の大きさを見積もると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim 2.5 \times 10^5\ \mathrm{m}^{-1} \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim 10^4\ \mathrm{m}^{-1} \tag{4.20}$$

と 1 桁程度しか異ならないため, 近軸近似は成立しない.

5. 波長 10 μm, ビーム径 1 mm の平行光を直径 10 μm のピンホールに通した

ピンホールによって光線の径が変わる場合, 図 2 のように光線の径僅かな距離で急激に変化する. したがって $\partial^2/\partial z^2$ の項が非常に大きくなるため, 近軸近似は成立しない.

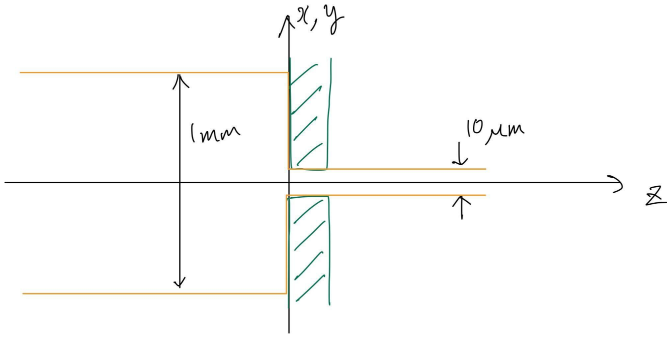

図２　スリットによる光線の変化