

# レーザー物理学 レポート No.4

82311971 佐々木良輔

## 問 6(1)

図 1 のようにミラーは屈折率  $n_2 > n_1$  のガラスと金属の反射部からなるため、共振器内部での反射は固定端反射、共振器外部での反射は自由端反射となる。したがって反射光の振幅は  $2kL = \phi$  をもちいて

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_0 e^{i(-kz - \omega t)} (r_1 + t_1(-r_2)t_1 e^{i\phi} + t_1(-r_2)(-r_1)(-r_2)t_1 e^{2i\phi} + \dots) \\
 &= E_0 e^{i(-kz - \omega t)} \left( r_1 - t_1^2 r_2 e^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\phi})^n \right) \\
 &= E_0 e^{i(-kz - \omega t)} \left( r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
 \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} &= \left( r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \right) \left( r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right) \\
 &= r_1^2 - r_1 \left( \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \right) + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \\
 &= r_1^2 - r_1 \frac{t_1^2 r_2 e^{i\phi} (1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}) + t_1^2 r_2 e^{-i\phi} (1 - r_1 r_2 e^{i\phi})}{(1 - r_1 r_2 e^{i\phi})(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi})} \\
 &\quad + \frac{t_1^4 r_2^2}{(1 - r_1 r_2 e^{i\phi})(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi})} \\
 &= r_1^2 - r_1 r_2 t_1^2 \frac{2 \cos \phi - 2 r_1 r_2}{1 - 2 r_1 r_2 \cos \phi + r_1^2 r_2^2} + \frac{r_2^2 t_1^4}{1 - 2 r_1 r_2 \cos \phi + r_1^2 r_2^2} \\
 &= \frac{r_1^2 (1 - 2 r_1 r_2 \cos \phi + r_1^2 r_2^2) - 2 r_1 r_2 t_1^2 \cos \phi + 2 r_1^2 r_2^2 t_1^2 + r_2^2 t_1^4}{1 - 2 r_1 r_2 \cos \phi + r_1^2 r_2^2} \\
 &= \frac{r_1^2 - 2 r_1^3 r_2 \cos \phi - 2 r_1 r_2 t_1^2 \cos \phi + r_2^2 (r_1^2 + t_1^2)^2}{1 - 2 r_1 r_2 \cos \phi + r_1^2 r_2^2} \\
 &= \frac{r_1^2 + (r_1^2 + t_1^2) (r_2^2 (r_1^2 + t_1^2) - 2 r_1 r_2 \cos \phi)}{1 - 2 r_1 r_2 \cos \phi + r_1^2 r_2^2} \\
 &= \frac{R_1 + (R_1 + T_1) (R_2 (R_1 + T_1) - 2 \sqrt{R_1 R_2} \cos \phi)}{1 - 2 \sqrt{R_1 R_2} \cos \phi + R_1 R_2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

したがって反射光強度は

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_r|^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_0|^2 \frac{R_1 + (R_1 + T_1)(R_2(R_1 + T_1) - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi)}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi + R_1 R_2} \end{aligned} \quad (3)$$

となる. ここで  $R + T = 1$  とすると

$$\frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} = \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi + R_1 R_2} \quad (4)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} + \frac{|E_t|^2}{|E_0|^2} &= \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi + R_1 R_2} + \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \phi + R_1 R_2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

したがって反射光強度と透過光強度の合計は

$$I_t + I_r = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_0|^2 \quad (6)$$

となり, 入射光強度と等しい.

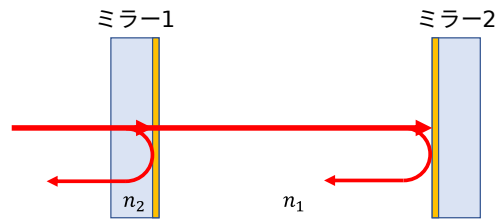


図 1 共振器での反射の模式図

## 問 6(2)

$R_1 = R_2 = R$  のとき

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_{\text{in}} T_1}{1 - 2R \cos \phi + R^2} \\ &= \frac{I_{\text{in}} T_1}{1 + R^2 - 2R \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)} \\ &= \frac{I_{\text{in}} T_1}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

より, 強度の最大値は  $I_{\text{in}}T_1/(1-R)^2$  である. したがって強度が半分になるとき

$$\begin{aligned}\frac{I_{\text{in}}T_1}{2(1-R)^2} &= \frac{I_{\text{in}}T_1}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}} \\ \Longleftrightarrow 4R \sin^2 \frac{\phi}{2} &= (1-R)^2 \\ \Longleftrightarrow \sin \frac{\phi}{2} &= \frac{1-R}{2\sqrt{R}}\end{aligned}\tag{8}$$

ここで  $\phi/2 \ll 1$  として展開すると

$$\frac{\phi}{2} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}\tag{9}$$

ここで  $\phi = 2kL$ ,  $k = \omega/c$  より

$$\begin{aligned}L \frac{\Delta\omega}{c} &= \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \\ \Longleftrightarrow \Delta\omega &= \frac{(1-R)c}{2L\sqrt{R}}\end{aligned}\tag{10}$$

となる. 次に  $\text{FSR} = c/2L$  より

$$F = \frac{\text{FSR}}{2\Delta\nu} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \frac{c}{2L} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}\tag{11}$$

である. また  $R \simeq 1$  より

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2} \frac{2L\sqrt{R}}{(1-R)c} = \frac{\omega_0 L \sqrt{R}}{(1-R)c} \simeq \frac{\omega_0 L}{(1-R)c}\tag{12}$$

である. 一方で  $Q$  値の定義は

$$Q = 2\pi \frac{\text{共振器内のエネルギー}}{1 \text{ 周期あたりのエネルギー損失}}\tag{13}$$

であった. ここで共振器内のエネルギーは共振器の断面積を  $S$  として

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 |E|^2 \times LS = \frac{1}{2}\varepsilon_0 ILS = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{TI_{\text{in}}}{(1-R)^2} LS = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{I_{\text{in}}LS}{1-R}\tag{14}$$

また前問の結果から共振器から失われる光の強度は入射光強度  $I_{\text{in}}$  に等しく, また  $T = 2\pi/\omega_0$  より 1 周期あたりに共振器から失われるエネルギーは

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} dt \frac{1}{2} c \varepsilon_0 I_{\text{in}} \times S = c \varepsilon_0 \frac{\pi I_{\text{in}}}{\omega_0} S\tag{15}$$

以上から

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{I_{\text{in}}LS}{1-R}}{c \varepsilon_0 \frac{\pi I_{\text{in}}}{\omega_0} S} = \frac{\omega_0 L}{c(1-R)}\tag{16}$$

となる.

### 問 7(1)

ミラー 1 での強度反射率, 強度透過率が  $R, T$ , 光が往復する間の強度損失が  $\kappa$  のとき, 電場振幅は図 2 のようになる. これは前問において  $r_1 = \sqrt{R}, r_2 = \sqrt{\kappa}$  とした場合に等しい. したがって共振器内の光強度は, 共鳴状態において

$$I = \frac{(1 - R)I_{\text{in}}}{(1 - \sqrt{\kappa R})^2} \quad (17)$$

となる. ここで

$$\frac{dI}{dR} = \frac{\kappa - \sqrt{\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}(1 - \sqrt{\kappa R})^3} I_{\text{in}} \quad (18)$$

である.  $0 \leq R \leq 1, 0 \leq \kappa \leq 1$  より  $0 \leq \sqrt{\kappa R} \leq 1$  なので  $\sqrt{\kappa R}(1 - \sqrt{\kappa R})^3 > 0$  である. したがって  $R \leq \kappa$  のとき  $dI/dR \geq 0, \kappa < R$  のとき  $dI/dR < 0$  である. したがって  $R = \kappa$  において  $I$  は最大値を取る.

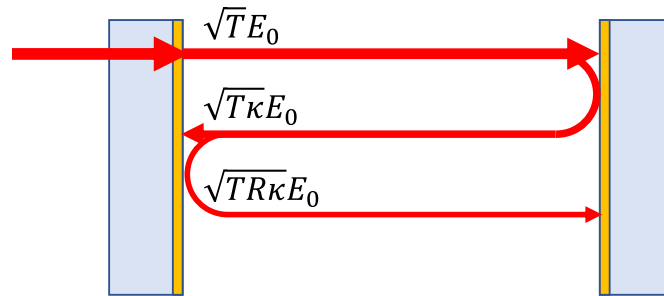


図 2 損失  $\kappa$  のときの電場

### 問 7(2)