応用プラズマ工学

82311971 佐々木良輔

x 方向の速さが v_x の粒子密度 dn_x は, 粒子の速度分布が Maxwell 分布に従うことから

$$\begin{aligned} dn_x &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \ n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2k_B T}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right) \\ &= n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v_x^2}{2k_B T}\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dv \ \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

ここでガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}$ を用いて

$$\begin{aligned} dn_x &= n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v_x^2}{2k_B T}\right) \left(\pi \frac{2k_B T}{m_e}\right) \\ &= n_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m_e v_x^2}{2k_B T}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

である. ここで $y-z$ 面内にある単位面積の領域を単位時間に通過する速さ v_x の粒子数は, 図の体積に含まれる粒子数に等しい. その値は

$$1 \times v_x \times dn_x = v_x dn_x \tag{3}$$

したがってこの領域を単位時間に右向きに通過する全粒子数は, これを $[0,\infty)$ で積分すればよい. ガウス積分 $\int_0^{\infty} dx \ xe^{-ax^2} = 1/2a$ より

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \ v_x dn_x &= n_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T}} \int_0^{\infty} dv_x \ v_x \exp\left(-\frac{m_e v_x^2}{2k_B T}\right) \\ &= n_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T}} \frac{1}{2} \frac{2k_B T}{m_e} \\ &= n_e \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m_e}} \\ &= \frac{1}{4} n_e \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}} = \frac{1}{4} n_e \overline{c_e} \end{aligned} \tag{4}$$

となる.