レーザー物理学 レポート No.6

82311971 佐々木良輔

問 14

$A = (N_2 - N_1)|\mu_{12}|^2/\hbar\varepsilon_0$, $\gamma_2\Omega_0^2/\gamma_1 \ll 1$ とすると

$$\begin{aligned}\chi(\omega) &= A\frac{\delta - i\gamma_2}{\delta^2 + \gamma_2^2} \\ &= A\frac{1}{\delta + i\gamma_2}\end{aligned} \tag{14.1}$$

A は定数なので, 簡単のため以下では $A = 1$ とする． $\delta = \omega - \omega_0 = x + iy$ とすると

$$\begin{aligned}\chi(\omega) &= \frac{1}{x + i(y + \gamma_2)} \\ &= \frac{x - i(y + \gamma)}{x^2 + (y + \gamma_2)^2} \\ &=: u(x, y) + iv(x, y)\end{aligned} \tag{14.2}$$

ここで

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{x}{x^2 + (y + \gamma_2)^2} \\ v(x, y) &= \frac{-y - \gamma_2}{x^2 + (y + \gamma_2)^2}\end{aligned} \tag{14.3}$$

とした. このとき

$$\frac{du}{dx} = \frac{(y + \gamma_2)^2 - x^2}{(x^2 + (y + \gamma_2)^2)^2} = \frac{dv}{dy} \tag{14.4}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{-2x(y + \gamma_2)}{(x^2 + (y + \gamma_2)^2)^2} = -\frac{dv}{dx} \tag{14.5}$$

よりコーシー・リーマンの関係式を満たすため $\chi(\omega)$ は正則である．また $x + i(y + \gamma) = re^{i\theta}$ とすると (14.2) から

$$\chi(\omega) = \frac{re^{-i\theta}}{r^2} \to 0 \ (r \to \infty) \tag{14.6}$$

である. このとき図 1 のような積分経路において以下の積分を行う

$$\int_C d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \left(\int_{-R}^{\omega - r} + \int_{C_1} + \int_{\omega + r}^{R} + \int_{C_2} \right) d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \tag{14.7}$$

ここで (14.6) から $R \to \infty$ において C_2 上の積分は 0 である. また C_1 上の積分は留数定理から

$$\int_{C_1} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = -i\pi\chi(\omega) \tag{14.8}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - r} + \int_{\omega + r}^{\infty} \right) d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = i\pi\chi(\omega) \\ \Longleftrightarrow \ & -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{id\omega'}{\pi} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \chi(\omega) \end{aligned} \tag{14.9}$$

$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ より

$$-\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{i\chi(\omega') + \chi''(\omega')}{\omega' - \omega} = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) \tag{14.10}$$

両辺の実部と虚部を比較し

$$\chi'(\omega) = -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} \tag{14.11}$$

$$\chi''(\omega) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} \tag{14.12}$$

を得る.

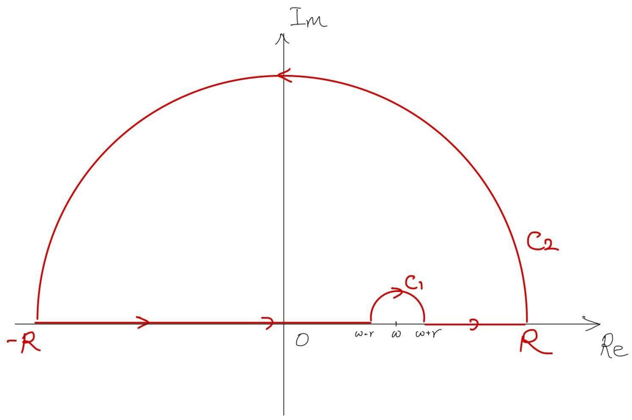

図 1　積分経路

問 15

(1)

速度分布は

$$\rho(v_x, v_y, v_z) = A\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right) = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \tag{15.1}$$

である. ここで定数 A は規格化条件から

$$1 = A\int dv_x e^{-mv_x^2/2kT}\int dv_y e^{-mv_y^2/2kT}\int dv_z e^{-mv_z^2/2kT} = A\left(\int dv_x e^{-mv_x^2/2kT}\right)^3 \tag{15.2}$$

を満たす. ガウス積分 $\int e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi/\alpha}$ から

$$A = \left(\int dv_x e^{-mv_x^2/2kT}\right)^{-3} = \left(\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\right)^{-3} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \tag{15.3}$$

となる.

速さ v の粒子を見出す確率は ρ を v から $v+dv$ の範囲で積分したものである. dv が十分小さければ, この積分は v から $v+dv$ の球殻の体積をかけることに等しいため

$$\rho(v_x, v_y, v_z)dv = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)4\pi v^2 dv \tag{15.4}$$

となる. これが最大となることから

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dv} &= 2vA\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) - v^2\frac{mv}{kT}A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\\ &= A\left(2-\frac{mv^2}{kT}\right)v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff\quad & \frac{mv^2}{kT} = 2\\ \iff\quad & v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\end{aligned} \tag{15.5}$$

を得る.

(2)

速さ v の期待値は

$$\overline{v} = \int_0^\infty v\cdot 4\pi Av^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv \tag{15.6}$$

ここでガウス積分 $\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2} = 1/2\alpha^2$ を用いて

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= 4\pi A \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \\
&= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}
\end{aligned} \tag{15.7}$$

となる. 次に二乗平均速さは同様にガウス積分 $\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} = 3/8\sqrt{\pi/\alpha^5}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\overline{v^2} &= \int_0^\infty v^2 \cdot 4\pi A v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{32\pi k^5 T^5}{m^5}} \\
&= \frac{3kT}{m}
\end{aligned} \tag{15.8}$$

となる.

問 16