# レーザー物理学 レポート No.12

82311971 佐々木良輔

## 問 20

簡単のため以下では $\Omega_0^2 = y$ とする. また $B = C$ とする. このとき与式は部分分数分解を行うと

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1+By}{A(1-By)y}dy \\ &= \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{2B}{1-By}\right)dy \end{aligned} \tag{1}$$

となるので. 両辺積分し

$$\begin{aligned} & \int dt = \int \frac{1}{A}\left(\frac{1}{y} + \frac{2B}{1-By}\right)dy \\ \iff\quad & t = \frac{1}{A}\left(\log y - 2\log(1-By)\right) + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \\ \iff\quad & At = \log\left(\frac{y}{(1-By)^2}\right) + C \\ \iff\quad & e^{At} = \frac{Cy}{(1-By)^2} \\ \iff\quad & 0 = e^{At}B^2y^2 - y(2Be^{At} + C) + e^{At} \\ \iff\quad & y = \Omega_0^2 = \frac{2Be^{At} + C \pm \sqrt{C^2 + 4BCe^{At}}}{2B^2e^{At}} \end{aligned} \tag{2}$$

を得る. ここで $B = 1/\gamma_1\gamma_2$ であったので $B > 0$ である. また $C = 0$ においては $y = 1/B$ と一定値を取るため, 立ち上がりの挙動としては不適である. また $C < 0$ のとき $y$ が実数解を持つ条件は

$$\begin{aligned} & C(C + 4Be^{At}) \geq 0 \\ \iff\quad & C + 4Be^{At} \leq 0 \\ \iff\quad & \frac{-C}{4B} \geq e^{At} \\ \iff\quad & \log\left(\frac{-C}{4B}\right) \geq At \end{aligned} \tag{3}$$

である. ここで等号が成立する際には

$$\begin{aligned} y &= \frac{2B\frac{-C}{4B} + C \pm \sqrt{C^2 + 4BC\frac{-C}{4B}}}{2B^2\frac{-C}{4B}} \\ &= -\frac{1}{B} < 0 \end{aligned} \tag{4}$$

であり, 光強度が負となる. 以上から $C > 0$ とするべきである.

ここで $C = B = 1 > 0$ の場合のグラフは図のようになる. ただし $A = 1 > 0$ とした. 紫線は $\sqrt{C^2 + 4BCe^{At}}$ の前の符号を正とした場合, 赤線は符号を負とした場合である. この図から符号を正とした場合は $t \to -\infty$ で $\Omega_0^2 \to \infty$ であり, 立ち上がりの挙動としては不適である. 符号を負とした場合は光強度が 0 から一定の値へと立ち上がることがわかる.

一方で $A < 0$ とした場合は時間発展を逆向きにすることになるため, 紫線は $t \to \infty$ で $\Omega_0^2 \to \infty$ となり, 赤線は $t \to \infty$ で $\Omega_0^2 \to 0$ となるため共に不適である.

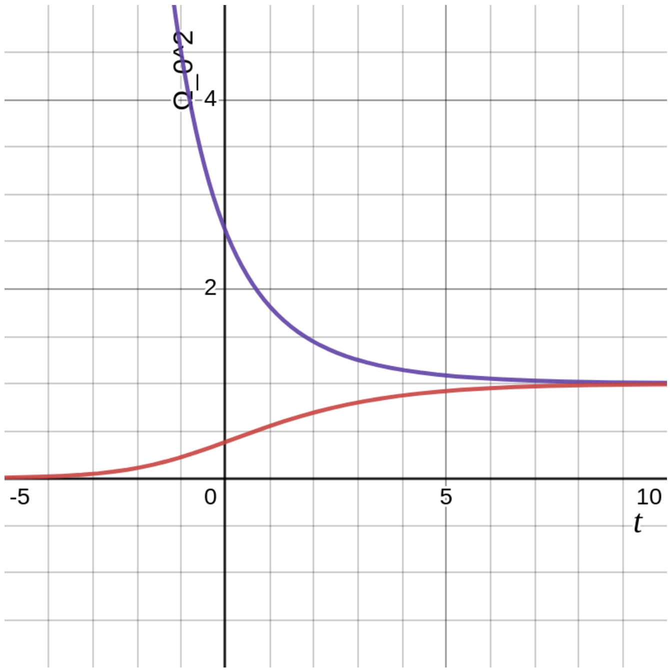


図 1　$A = B = C = 1$ のときのグラフ, 紫線は符号を正とした場合, 赤線は符号を負とした場合

# 問 21

$f(\omega)$ を以下で定義する.

$$f(\omega) = \sum_n \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{t_r}\right) \tag{5}$$

これは周期 $2\pi/t_r$ の周期関数であり, フーリエ級数展開を用いて

$$f(\omega) = \sum_n \tilde{f}_n e^{in\omega t_r} \tag{6}$$

と表される．$\tilde{f}_n$ はフーリエ係数であり

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n &= \frac{t_r}{2\pi}\int_{-\pi/t_r}^{\pi/t_r} f(\omega)e^{-in\omega t_r}d\omega \\ &= \frac{t_r}{2\pi}\int_{-\pi/t_r}^{\pi/t_r} \sum_k \delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{t_r}\right)e^{-in\omega t_r}d\omega\end{aligned} \tag{7}$$

ここで積分区間 $[-\pi/t_r, \pi/t_r]$ には $k=0$ の項しか含まれないため

$$\begin{aligned}\tilde{f}_n &= \frac{t_r}{2\pi}\int_{-\pi/t_r}^{\pi/t_r} \delta\left(\omega\right)e^{-in\omega t_r}d\omega \\ &= \frac{t_r}{2\pi}\end{aligned} \tag{8}$$

したがって

$$\begin{aligned} & f(\omega) = \sum_n \frac{t_r}{2\pi}e^{in\omega t_r} = \sum_n \delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{t_r}\right) \\ \iff \quad & \sum_n e^{in\omega t_r} = \frac{2\pi}{t_r}\sum_n \delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{t_r}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

が示される．