レーザー物理学 レポート No.3

82311971 佐々木良輔

問 5(1)

凸面と凹面の曲率が等しいことから $R_1 = R_2 = R > 0$, したがって光線行列は

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R_1} & \dfrac{L}{n_2} \\ (n_2 - n_1)\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) - \dfrac{L(n_2 - n_1)^2}{n_2 R_1 R_2} & 1 + \dfrac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \dfrac{L}{n_2} \\ -\dfrac{L(n_2 - n_1)^2}{n_2 R^2} & 1 + \dfrac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

この光学素子に w_1, $\theta = 0$ の平行光を入射したとき, 出射光 w_2, θ は

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ n_1 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \dfrac{L}{n_2} \\ -\dfrac{L(n_2 - n_1)^2}{n_2 R^2} & 1 + \dfrac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ w_2 &= w_1 \left(1 - \frac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R}\right) \\
\theta &= -w_1 \frac{L(n_2 - n_1)^2}{n_2 n_1 R^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで図 1 のようにメニスカスレンズの出射面を $x = 0$ におくと, 出射光は

$$y = w_2 + \theta x \tag{3}$$

という直線で表される. ただし w_1 が大きい場合は図 1 の黄点線のようにレンズの曲率による変位 δ が大きくなるので, ここでは w_1 が十分小さいものとする. ここで x 切片は

$$
\begin{aligned}
0 &= w_2 + \theta x \\
0 &= w_1 \left(1 - \frac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R} - \frac{L(n_2 - n_1)^2}{n_2 n_1 R^2} x \right) \\
\therefore \ x &= \frac{n_2 n_1 R^2}{L(n_2 - n_1)^2} \left(1 - \frac{L(n_2 - n_1)}{n_2 R} \right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となり x 切片は定数となる. ここで $1-L(n_2-n_1)/n_2 R \geq 0$ のとき, w_1 によらず平行光は正の x 座標で収束することから, メニスカスレンズは凸レンズとして機能する. 一方で $1-L(n_2-n_1)/n_2 R < 0$ のとき, w_1 によらず平行光は負の x 座標で収束することから, メニスカスレンズは凹レンズとして機能する.

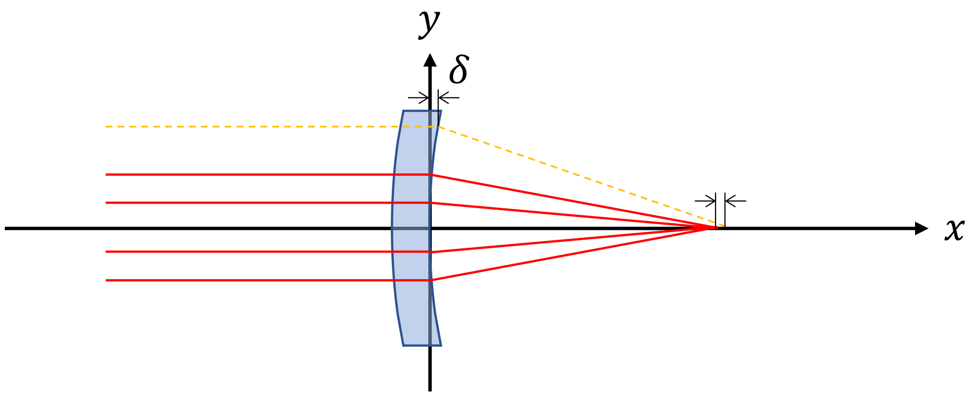

図 1　メニスカスレンズに平行光を入れた場合の模式図

問 5(2)

共焦点共振器では焦点が互いの鏡の中心にあることから, 平行光は図 2 ①のように向かいの鏡の中心に向けて反射する. 次に②のように鏡の中心で反射した光線は上下対称に反射するため, ③の反射で再び平行光に戻る. ③で反射された平行光は④で再び焦点を通るように反射する. 以降同様の反射を永遠に繰り返すことができる.

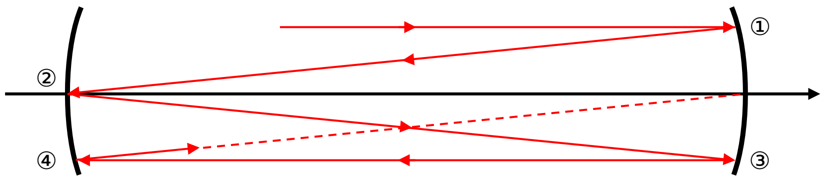

図 2　共焦点共振器の模式図

問 5(3)

以下では $n=1$ とする．共振器内を一往復するときの光線行列は

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ -2/R_2 & -2L/R_2-1 \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{R_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_2+2L & 2(R_2+L)L \\ -2 & -2L-R_2 \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{R_2}\begin{pmatrix} R_2+2L & 2(R_2+L)L \\ -2\dfrac{R_2-R_1+2L}{R_1} & -\dfrac{4L^2+4R_2L-2R_1L-R_1R_2}{R_1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

また ABCD 則において，ガウスビームが安定であるためには $q'=q$ であるべきなので

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{Aq+B}{Cq+D} \\
\iff \quad 0 &= B\left(\frac{1}{q}\right)^2+\frac{1}{q}(A-D)-C \\
\iff \frac{1}{q} &= \frac{D-A\pm\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2B}
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで A,B,C,D それぞれは実数であるが，$1/q$ が複素数であるべきなので $(A-D)^2+4BC<0$ とする．ここで

$$
\frac{1}{q}=\frac{1}{R}+\frac{2i}{kw^2} \tag{7}
$$

より

$$
\frac{D-A}{2B}=\frac{1}{R} \tag{8}
$$

$$
\pm\sqrt{\left(\frac{A-D}{2B}\right)^2+\frac{C}{B}}=\frac{2i}{kw^2} \tag{9}
$$

となる. ただし R はミラー 1 上でのガウスビームの曲率, k は波数, w はビーム径である. (8) 式から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{1}{4(R_2+L)L}\left(-\frac{4L^2+4R_2L-2R_1L-R_1R_2}{R_1}-(R_2+2L)\right) \\
&= \frac{1}{4(R_2+L)L}\left(-\frac{4L^2+4R_2L-2R_1L-R_1R_2}{R_1}-\frac{R_1R_2+2R_1L}{R_1}\right) \\
&= \frac{1}{4(R_2+L)L}\frac{-4(L+R_2)L}{R_1} \\
&= \frac{1}{-R_1}
\end{aligned} \tag{10}$$

となる. また (9) 式から

$$\begin{aligned}
\frac{2i}{kw^2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{A-D}{2B}\right)^2+\frac{C}{B}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{1}{R_1^2}-\frac{R_2-R_1+2L}{R_1(R_2+L)L}} \\
\Longleftrightarrow \frac{2}{kw^2} &= \pm\sqrt{\frac{R_2-R_1+2L}{R_1(R_2+L)L}-\frac{1}{R_1^2}}
\end{aligned} \tag{11}$$

両辺の符号が一致すべきなので

$$\begin{aligned}
\frac{2}{kw^2} &= \sqrt{\frac{R_2-R_1+2L}{R_1(R_2+L)L}-\frac{1}{R_1^2}} \\
\Longleftrightarrow \quad w^2 &= \frac{2}{k\sqrt{\frac{R_2-R_1+2L}{R_1(R_2+L)L}-\frac{1}{R_1^2}}} \\
\Longleftrightarrow \quad w &= \sqrt{\frac{2}{k\sqrt{\frac{R_2-R_1+2L}{R_1(R_2+L)L}-\frac{1}{R_1^2}}}}
\end{aligned} \tag{12}$$

となる. 以上からミラー 1 上でのガウスビームの曲率及びビーム径は

$$\begin{aligned}
|R| &= R_1 \\
w &= \sqrt{\frac{2}{k\sqrt{\frac{R_2-R_1+2L}{R_1(R_2+L)L}-\frac{1}{R_1^2}}}}
\end{aligned} \tag{13}$$

となる.