磁性物理学 レポート No.2

82311971 佐々木良輔

相互作用のない古典的な原子磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ を考える. 外部磁場 $\boldsymbol{H}$ 中でのエネルギーは, $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{m}$ のなす角を θ として

$$E = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H} = -mH\cos\theta \tag{1}$$

で与えられる. このとき温度 T の $\boldsymbol{m}$ が θ を向く確率はボルツマン因子

$$e^{-\beta E} = e^{mH\cos\theta/k_B T} \tag{2}$$

に比例する. また角度 θ から $\theta + d\theta$ の間の面積を $dA(\theta)$ とすると, 全磁気モーメントのうち θ から $\theta + d\theta$ を向く割合は

$$P(\theta)d\theta = \frac{e^{-\beta E} dA(\theta)}{\int_0^\pi e^{-\beta E} dA(\theta) d\theta} \tag{3}$$

ここで $dA(\theta)$ は図 1 より

$$dA(\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \tag{4}$$

また $\boldsymbol{m}$ は磁場方向に $\cos\theta$ の大きさで寄与するので外部磁場方向の磁化 M は, 単位体積あたりの磁気モーメント数を N として

$$\begin{aligned} M &= Nm\langle\cos\theta\rangle \\ &= Nm\int_0^\pi \cos\theta P(\theta) d\theta \\ &= Nm\frac{\int_0^\pi e^{\beta mH\cos\theta} 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta mH\cos\theta} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta} \\ &= Nm\frac{\int_0^\pi e^{\beta mH\cos\theta} \sin\theta\cos\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta mH\cos\theta} \sin\theta d\theta} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで分母は $\cos\theta = t$ とすると $dt = -\sin\theta d\theta$ より

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{\beta mH\cos\theta} \sin\theta d\theta &= \int_{-1}^1 e^{\beta mHt} dt \\ &= \frac{e^{\beta mH} - e^{-\beta mH}}{\beta mH} \\ &= \frac{2\sinh(\beta mH)}{\beta mH} \end{aligned} \tag{6}$$

また (6) 式を両辺 βmH で微分すると左辺は

$$\frac{d}{d(\beta mH)}\int_0^{\pi} e^{\beta mH\cos\theta}\sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} e^{\beta mH\cos\theta}\sin\theta\cos\theta d\theta \tag{7}$$

右辺は

$$\frac{d}{d(\beta mH)}\frac{2\sinh(\beta mH)}{\beta mH} = 2\frac{\beta mH\cosh(\beta mH)-\sinh(\beta mH)}{(\beta mH)^2} \tag{8}$$

したがって (5) 式の分子は

$$\int_0^{\pi} e^{\beta mH\cos\theta}\sin\theta\cos\theta d\theta = 2\frac{\cosh(\beta mH)}{\beta mH} - 2\frac{\sinh(\beta mH)}{(\beta mH)^2} \tag{9}$$

以上から

$$\begin{aligned} M &= Nm\frac{2\frac{\cosh(\beta mH)}{\beta mH} - 2\frac{\sinh(\beta mH)}{(\beta mH)^2}}{\frac{2\sinh(\beta mH)}{\beta mH}} \\ &= Nm\left(\coth(\beta mH) - \frac{1}{\beta mH}\right) \\ &= NmL(\beta mH) \end{aligned} \tag{10}$$

となる.

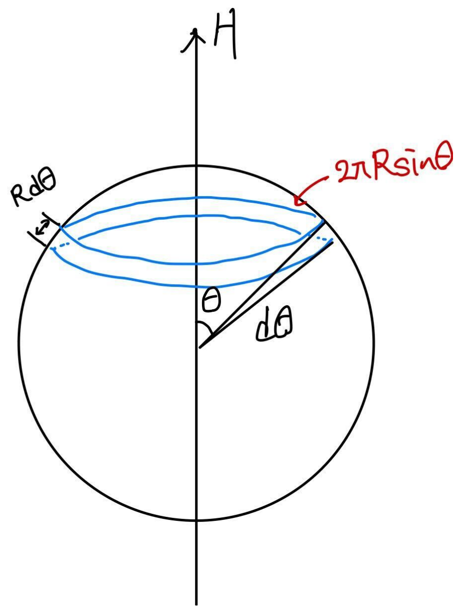

図 1　θ から $\theta + d\theta$ の面積