群コホモロジー ～ 自分用 ～

野本慶一郎

目次

1 Cohomology

1.1 THE CATEGORY OF G-MODULES

Definition 1.1

G を群とする．アーベル群 M が G **加群**であるとは以下を満たすような写像

$$\varphi : G \times M \to M; (g, m) \mapsto gm$$

が存在することをいう．

- $1m = m$.
- $g(m + m') = gm + gm'$.
- $(gg')(m) = g(g'm)$.

このとき G は M に**作用する**といい，任意の $g \in G$ と任意の $m \in M$ に対して $gm = m$ であるとき，これを**自明な作用**という．

Proposition 1.2

M をアーベル群とする．M が G 加群であることと群準同型 $\phi : G \to \mathrm{Aut}(M)$ が存在することは同値である．

Proof. $(\Rightarrow)$ $g \in M$ に対して $\phi(g) = "m \mapsto gm"$ と定義する．well-defined をチェックする．$\phi(g^{-1}) = "m \mapsto g^{-1}m"$ が逆写像になっているの $\phi(g)$ は全単射．

$$\phi(g)(m + m') = g(m + m') = gm + gm' = \phi(g)(m) + \phi(g)(m')$$

より $\phi(g)$ は準同型である．以上より $\phi(g) \in \mathrm{Aut}(M)$ である．あとは ϕ が準同型を示せばよい．

$$\phi(gg')(m) = gg'm = g(g'm) = g\phi(g')(m) = \phi(g)\left(\phi(g')(m)\right) = \phi(g) \circ \phi(g')(m)$$

となり確かに ok.

$(\Leftarrow)$ $g \in G$ と $m \in M$ に対して $gm := \phi(g)(m) \in M$ と定義する．G 加群であることの定義を一つずつ確認する．

$$\begin{aligned}
&1m = \phi(1)(m) = \mathrm{id}(m) = m \quad (\because \phi\text{は準同型}) \\
&g(m + m') = \phi(g)(m + m') = \phi(g)(m) + \phi(g)(m') = gm + gm' \\
&(gg')(m) = \phi(gg')(m) = \phi(g) \circ \phi(g')(m) = \phi(g)(g'm) = g(g'm)
\end{aligned}$$

確かに ok. □

Definition 1.3

M, N を G 加群とする．写像 $\alpha : M \to N$ が **G 加群の準同型**，または **G 準同型**であるとは

- $\alpha(m + m') = \alpha(m) + \alpha(m')$,
- $\alpha(gm) = g\alpha(m)$,

を満たすことをいう．M から N への G 準同型全体を $\mathrm{Hom}_G(M, N)$ と書く．

群 G の群代数 $\mathbb{Z}[G]$ とは，G から自然に演算が定められた，G の元を基底にもつ自由アーベル群のことである．すなわち $\mathbb{Z}[G]$ の任意の元は

$$\sum_{i:\text{finite}} n_i g_i \quad (n_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G)$$

と表され，

$$\left(\sum_i n_i g_i\right)\left(\sum_j n'_j g'_j\right) := \sum_{i,j} n_i n'_j (g_i g'_j)$$

と演算が定まっているアーベル群である．

Proposition 1.4

G 加群は一意的に $\mathbb{Z}[G]$ 加群に延長される．また，G 加群の準同型であることと $\mathbb{Z}[G]$ 加群の準同型であることは同値である．従って G 加群の圏 Mod_G は $\mathbb{Z}[G]$ 加群の圏と同一視される．特に Mod_G はアーベル圏である．

Proof. M を G 加群とする．$\mathbb{Z}[G]$ 加群に一意的に延長するには一つの元 $ng \in \mathbb{Z}[G]$ に対する $m \in M$ への作用が一意的に与えられることを示せば十分である．$n = 0$ ならば $ng = 0$ なので特に示すことはない．$n = 1$ ならば $1g = g$ なので $m \in M$ へ作用する．$n \geq 1$ ならば

$$\begin{aligned} ng \cdot m &= (1 + \cdots + 1)g \cdot m = (g + \cdots + g) \cdot m \quad (\because (\sum_{i=i}^{n} 1 \cdot 1)(\sum_{i=1}^{1} 1 \cdot g) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot g) \\ &= g \cdot m + \cdots + g \cdot m \end{aligned}$$

となって一意的に作用が与えられる．$n \leq -1$ ならば

$$ng \cdot m + (-n)g \cdot m = (ng + (-n)g) \cdot m = 0$$

であり，左辺第二項は既に作用が定まっているので，$ng \cdot m$ も一意的に定まる．ok.

$\phi : M \to N$ を G 準同型として，上の方法で M, N を $\mathbb{Z}[G]$ 加群とみなす．このとき

$$\begin{aligned} \phi\left(\left(\sum_i n_i g_i\right) \cdot m\right) &= \phi\left(\sum_i (g_i m + \cdots + g_i m)\right) \\ &= \sum_i \phi(g_i m + \cdots + g_i m) \\ &= \sum_i \left(\phi(g_i m) + \cdots + \phi(g_i m)\right) \\ &= \sum_i (g_i \phi(m) + \cdots + g_i \phi(m)) \\ &= \sum_i g_i (\phi(m) + \cdots + \phi(m)) \\ &= \left(\sum_i n_i g_i\right) \phi(m) \end{aligned}$$

で ok.（ちょっとめんどくさくなった．） □

Proposition 1.5

M, N を G 加群とする．このとき群準同型全体 $\mathrm{Hom}(M, N)$ には以下の演算で G 加群の構造が入る．

- $\varphi + \varphi' = (m \mapsto \varphi(m) + \varphi'(m))$,
- $g\varphi = (m \mapsto g(\varphi(g^{-1}m)))$.

Proof. 一つずつ G 加群の条件を確認すれば ok.

$$\begin{aligned} 1\varphi(m) &= 1(\varphi(1^{-1}m)) = \varphi(m) \\ g(\varphi + \varphi')(m) &= g((\varphi + \varphi')(g^{-1}m)) = g(\varphi(g^{-1}m) + \varphi'(g^{-1}m)) = g\varphi(g^{-1}m) + g\varphi'(g^{-1}m) = g\varphi(m) + g\varphi'(m) \\ (gg')(\varphi) &= (gg')\varphi(gg')^{-1} = gg'\varphi g'^{-1} g^{-1} = g(g'\varphi g'^{-1})g^{-1} = g \cdot (g'\varphi) \cdot g^{-1} = g(g'\varphi) \end{aligned}$$

□

1.2 INDUCED MODULES

Definition 1.6

$H \leq G$ とする．H 加群 M に対して，M の**誘導加群**を

$$\mathrm{Ind}_H^G(M) := \left\{ \varphi : G \to M; \mathrm{map} \mid {}^\forall h \in H,\ \varphi(hg) = h\varphi(g) \right\}$$

と定義する．

Proposition 1.7

誘導加群 $\mathrm{Ind}_H^G(M)$ は以下の演算に関して G 加群の構造が入る．

$$\begin{aligned} &\varphi + \varphi' := (x \mapsto \varphi(x) + \varphi'(x)) \\ &g\varphi := (x \mapsto \varphi(xg)) \end{aligned}$$

Proof. G 加群の条件を一つずつチェックする．まず作用が閉じていることを確認する．任意の $g_0 \in G$ と $h \in H$ を とる．このとき $(g_0\varphi)(hg) = h(g_0\varphi)(g)$ を示せばよい．

$$(g_0\varphi)(hg) = \varphi(hgg_0) = h\varphi(gg_0) = h(g_0\varphi)(g)$$

確かに ok. 次に任意の $g_0, g_0' \in G$ と任意の $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Ind}_H^G(M)$ に対して

$$\begin{aligned} &g_0(\varphi + \varphi')(g) = (\varphi + \varphi')(gg_0) = \varphi(gg_0) + \varphi'(gg_0) = (g_0\varphi)(g) + (g_0\varphi')(g') \\ &((g_0g_0')(\varphi))(g) = \varphi(gg_0g_0') = (g_0'\varphi)(gg_0) = (g_0(g_0'\varphi))(g) \end{aligned}$$

確かに ok. □

Proposition 1.8

H 準同型 $\alpha : M \to M'$ は，以下の G 準同型

$$\mathrm{Ind}_H^G(M) \to \mathrm{Ind}_H^G(M'); \varphi \mapsto \alpha \circ \varphi$$

を誘導する．

Proof. 簡単に確かめられるので省略. □

Lemma 1.9

- 全ての G 加群 M, H 加群 N に対して以下の群としての同型が成り立つ．

  $$\mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{Ind}_H^G(N)) \simeq \mathrm{Hom}_H(M, N).$$

  また，H 準同型 $\phi : \mathrm{Ind}_H^G(N) \to N; \varphi \mapsto \varphi(1_G)$ に対して組 $(\mathrm{Ind}_H^G(N), \phi)$ は以下の普遍性を満たす．任意の H 準同型 $\beta : M \to N$ に対して，ある G 準同型 $\alpha : M \to \mathrm{Ind}_H^G(N)$ が一意に存在して以下の可換図式が成り立つ．

  $$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dotted, "{}^\exists\alpha"'] \arrow[dr, "{}^\forall\beta"] & \\ \mathrm{Ind}_H^G(N) \arrow[r, "\phi"] & N \end{tikzcd}$$

- 関手

  $$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{Mod}_H \to \mathrm{Mod}_G$$

  は完全関手である．

Proof. (1) まず

$$\mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{Ind}_H^G(N)) \simeq \mathrm{Hom}_H(M, N); \alpha \mapsto \beta_\alpha := (m \mapsto \alpha(m)(1_G))$$

と定義する．well-defined を確認する．それには任意の $h \in H$ に対して $\beta_\alpha(hm) = h\beta_\alpha(m)$ を確かめればよい．

$$\beta_\alpha(hm) = \alpha(hm)(1_G) = (h \cdot \alpha(m))(1_G) = \alpha(m)(1_G \cdot h) = h(\alpha(m)(1_G)) = h\beta_\alpha(m)$$

確かに ok. 準同型であることを確かめる．

$$\beta_{\alpha+\alpha'}(m) = (\alpha + \alpha')(m)(1_G) = \alpha(m)(1_G) + \alpha'(m)(1_G) = \beta_\alpha(m) + \beta'_\alpha(m)$$

これも ok. 同型を示すために逆写像を具体的に構成する．H 準同型 $\beta : M \to N$ に対して $\alpha_\beta : m \mapsto (g \mapsto \beta(gm)) \in \mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{Ind}_H^G(N))$ と定義する．これが well-defined であることを示す．まず $\alpha_\beta(m) \in \mathrm{Ind}_H^G(N)$ を示す．$h \in H$ に対して $\alpha_\beta(m)(hg) = h\alpha_\beta(m)(g)$ を示せばよい．

$$\alpha_\beta(m)(hg) = \beta(hgm) = h\beta(gm) = h\alpha_\beta(m)(g)$$

となって確かに ok. 次に α_β が G 準同型であることを示す．$g_0 \in G$ に対して $\alpha_\beta(g_0m) = g_0\alpha_\beta(m)$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}&(\alpha_\beta(g_0m))(g) = \beta(gg_0m)\\&(g_0\alpha_\beta(m))(g) = \alpha_\beta(m)(gg_0) = \beta(gg_0m)\end{aligned}$$

確かに ok. あとは α_β と β_α が互いに逆写像であることを確かめれば ok. $f : \alpha \mapsto \beta_\alpha, g : \beta \mapsto \alpha_\beta$ とおく．

$$\begin{aligned}&(((g \circ f)(\alpha))(m))(g) = ((g(\beta_\alpha))(m))(g) = \beta_\alpha(gm) = \alpha(gm)(1_G) = (g\alpha(m))(1_G) = \alpha(m)(1_G \cdot g) = \alpha(m)(g)\\&((f \circ g)(\beta))(m) = f(\alpha_\beta)(m) = \alpha_\beta(m)(1_G) = \beta(m)\end{aligned}$$

で ok.

(2) H 加群の完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

に対して G 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(M) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Ind}_H^G(N) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathrm{Ind}_H^G(P) \longrightarrow 0$$

が成り立つことを示せばよい． これが左完全であることは Hom 関手のときと同様にできる (と信じている) ので, $\mathrm{Ind}_H^G(N) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(P)$ の全射性だけ示すことにする．まず G の H による右剰余分解 $G = \cup_{s \in S} Hs$ をしておく．全射を示したいので, $\varphi \in \mathrm{Ind}_H^G(P)$ を任意に取る．各 $s \in S$ について $\varphi(s) \in P$ なので, ある $n_s \in N$ が存在して $g(n_s) = \varphi(s)$ が成り立つ．このとき

$$\tilde{\varphi} : G = \cup_{s \in S} Hs \to N; \sum hs \mapsto \sum hn_s$$

と定義する．このとき $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Ind}_H^G(N)$ であることは容易に分かる．あとは $\tilde{g}(\tilde{\varphi}) = \varphi$ を示せばよい．任意の G の元は hs の和で表せるので $\tilde{g}(\tilde{\varphi})(hs) = \varphi(hs)$ を示せばよい．

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi})(hs) = g \circ \tilde{\varphi}(hs) = g(hn_s) = hg(n_s) = h\varphi(s) = \varphi(hs)$$

確かに ok. $\square$

$H = \{1\}$ のとき, H 加群とは単なるアーベル群である．この場合 $\mathrm{Ind}_H^G(M)$ を単に $\mathrm{Ind}^G(M)$ と書くことにする．従ってアーベル群 M_0 に対して

$$\mathrm{Ind}^G(M_0) = \{\varphi : G \to M_0; \mathrm{map}\} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M_0)$$

が成り立つ．

> 一つ目の等号はただ書き下しただけなので ok. 二つ目の等号は明らかではないのでしっかり確認する．包含「$\supset$」はすぐ分かるので「$\subset$」を示せばよい．$\varphi \in$ (中辺) に対して, まず明らかに $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}[G], M_0)$ である．あとは φ が準同型であることを見ればよい．特に $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, M_0)$ であることを見る．
>
> $$\begin{aligned}&\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(1_G \cdot (g_1 + g_2)) = ((g_1 + g_2)\varphi)(1_G) = (g_1\varphi + g_2\varphi)(1_G)\\&\varphi(g_1) + \varphi(g_2) = (g_1\varphi)(1_G) + (g_2\varphi)(1_G) = (g_1\varphi + g_2\varphi)(1_G)\end{aligned}$$
>
> より確かに ok.

G 加群 M が **induced** であるとは, あるアーベル群 M_0 が存在して G 加群としての同型 $M \simeq \mathrm{Ind}^G(M_0)$ が成り立つことをいう. また, M, N を G 加群とする. このとき

$$g(m \otimes n) := gm \otimes n$$

と定義することで $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ に G 加群の構造が定まる. M_0 を, M を単にアーベル群としてみたものとする. このときアーベル群として $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M_0$ であるが, G 加群の構造は異なることに注意する. しかし

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M_0 \to \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M; g \otimes m \mapsto g \otimes gm$$

は G 加群の同型である.

Proposition 1.10

- G 加群 M が induced であることと, アーベル群 $M_0 \subset M$ を用いて

  $$M = \oplus_{g \in G} g M_0$$

  と表せることは同値である.
- $H \leq G$ とする. induced G 加群は, induced H 加群である.
- M を G 加群, M_0 を M を単にアーベル群とみたものとする. このとき以下は全射.

  $$\pi : \mathrm{Ind}^G(M_0) \to M; \varphi \mapsto \sum_{g \in G} (g\varphi)(g^{-1})$$

Proof. (1) G 加群の同型 $\mathrm{Ind}^G(M_0) \simeq \mathbb{Z}[G] \otimes M_0$ を示せばよい. 実際,

$$M \simeq \mathrm{Ind}^G(M_0) \simeq (\oplus_{g \in G} \mathbb{Z}g) \otimes M_0 \simeq \oplus_{g \in G} (\mathbb{Z}g \otimes M_0) \simeq \oplus_{g \in G} g M_0$$

となることから分かる. 従ってあとは

$$f : \mathrm{Ind}^G(M_0) \to \mathbb{Z}[G] \otimes M_0; \varphi \mapsto \sum_{g \in G} \left(g \otimes \varphi(g^{-1})\right)$$

が G 加群の同型であることを示せばよい. G 準同型であることは以下より分かる.

$$f(g_0\varphi) = \sum_{g \in G} g \otimes (g_0\varphi)(g^{-1}) = \sum_{g \in G} g \otimes \varphi(g^{-1}g_0)$$

$$g_0 f(\varphi) = g_0 \left(\sum_{g \in G} g \otimes \varphi(g^{-1}) \right) = \sum_{g \in G} (g_0 g) \otimes \varphi(g^{-1}) \overset{g' = g_0 g}{=} \sum_{g' \in G} g' \otimes \varphi(g'^{-1} g_0)$$

単射を示す. $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$, すなわち $\sum_g g \otimes \varphi_1(g^{-1}) = \sum_g g \otimes \varphi_2(g^{-1})$ と仮定する. このとき

$$0 = \sum_g g \otimes (\varphi_1(g^{-1}) - \varphi_2(g^{-1})) = \sum_g g \otimes (\varphi_1 - \varphi_2)(g^{-1})$$

が成り立つので, $\varphi_1 = \varphi_2$ でなければならない. ok. 全射を示す. 任意の $\sum_i (g_i \otimes x_i) \in \mathbb{Z}[G] \otimes M_0$ に対して $\varphi \in \mathrm{Ind}^G(M_0)$ を, $\varphi({}^\forall g_i^{-1}) := x_i$ とする. このとき $f(\varphi) = \sum_g g_i \otimes x_i$ となることは明らかである. ok.

(2) まず (1) より induced G 加群 M は $M = \oplus_{g \in G} g M_0$ (M_0 : アーベル群) と表せる. このときあるアーベル群 M_1 が存在して $M = \oplus_{h \in H} h M_1$ と表せることを示せばよい. まず G の H による右剰余分解 $G = \cup_{s \in S} Hs$ を考える. このとき

$$M_1 := \oplus_{s \in S} s M_0$$

とおく. これが $M = \oplus_{h \in H} h M_1$ を満たすことは簡単に分かる. (めんどくさくなった.)

(3) 任意の $x \in M$ を一つ取る. このとき

$$\varphi : G \to M_0; g \mapsto \frac{1}{2\#G} x$$

と定義する. このとき $\varphi \in \mathrm{Ind}^G(M_0)$ であることは明らかであり,

$$\pi(\varphi) = \sum_{g \in G} (g\varphi)\left(g^{-1}\right) = \sum_{g \in G} \varphi(g^{-2}) = \sum_{g \in G} 2\varphi(g^{-1}) = 2 \sum_{g \in G} \frac{1}{2\#G} x = x$$

となって ok. □

1.3 INJECTIVE G-MODULES

Definition 1.11

G 加群 I が**単射的**であるとは, 任意の単射準同型 $\iota: M_1 \to M_2$ と G 準同型 $f: M_1 \to I$ に対して G 準同型 $\bar{f}: M_2 \to I$ が存在して $\bar{f} \circ \iota = f$ が成り立つことである.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "^\forall f"'] & M_2 \arrow[d, dotted, "^\exists \bar{f}"] \\ & I \end{tikzcd}$$

特に関手 $\mathrm{Hom}_G(\cdot, I)$ が完全であること, すなわち G 加群の完全列

$$0 \longrightarrow M_1 \stackrel{\iota}{\longrightarrow} M_2 \stackrel{\psi}{\longrightarrow} M_3 \longrightarrow 0$$

に対し, 以下が完全となることである.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M_3, I) \stackrel{\psi^*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_G(M_2, I) \stackrel{\iota^*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_G(M_1, I) \longrightarrow 0$$

Proposition 1.12

圏 Mod_G は十分単射的対象を持つ, すなわち全ての G 加群は単射的対象に埋め込める. つまり G 加群 M に対してある単射的対象 I と単射 $M \hookrightarrow I$ が存在する.

Proof. $G = \{1\}$ のとき, すなわち Mod_G がアーベル群の圏であるときは十分単射的対象を持つことは認める. [1, Appendix A.4] を参照せよ. $G \neq \{1\}$ のときを示す. まず M を G 加群, M_0 を, M を単にアーベル群と見たものとする. このときアーベル群の圏は十分単射的対象をもつから, ある単射的対象 I が存在して $M_0 \hookrightarrow I$ が成り立つ. これに完全関手 Ind^G を作用させると G 加群の単射 $\mathrm{Ind}^G(M_0) \hookrightarrow \mathrm{Ind}^G(I)$ を得る. また, G 準同型 $M \to \mathrm{Ind}^G(M_0); m \mapsto (g \mapsto gm)$ が単射であることもすぐに分かる.

> $\phi: M \to \mathrm{Ind}^G(M_0); m \mapsto \varphi_m$ とする. ただし $\varphi_m(g) = gm$ である. ϕ が単射であることを示す. $\varphi_m = 0$, すなわち任意の $g \in G$ に対して $\varphi_m(g) = gm = 0$ と仮定すると, g は任意に取れるので $m = 0$ でなければならない. ok.

従って二つを合成して G 加群の単射 $M \hookrightarrow \mathrm{Ind}^G(I)$ を得るので, あとは $\mathrm{Ind}^G(I)$ が単射的対象であればよい. しかし同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_G}(M, \mathrm{Ind}^G(I)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, I)$$

があったことを思い出すと, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\cdot, I)$ が完全関手であったから $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_G}(\cdot, \mathrm{Ind}^G(I))$ も完全関手である. ok, □

1.4 DEFINITION OF THE COHOMOLOGY GROUPS

G 加群 M に対して

$$M^G := \{m \in M \mid {}^\forall g \in G,\ gm = m\}$$

と定義する. このとき関手

$$\mathrm{Mod}_G \to \mathrm{Ab}; M \mapsto M^G$$

は左完全であることが直接の計算で示される. もしくは関手 $(*)^G$ と $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, *)$ が同型であることを示してもよい.

G 加群の圏は十分単射的対象をもっていたから, 導来関手の理論を適用することができる. まず G 加群 M の単射的分解

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \stackrel{d^0}{\longrightarrow} I^1 \stackrel{d^1}{\longrightarrow} I^2 \stackrel{d^2}{\longrightarrow} \dots$$

が存在する. すなわち全ての I^i は単射的であり, 上は完全列である.

まず M の単射的対象 I^0 への埋め込みを $f : M \hookrightarrow I^0$ とする．このとき

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} I^0 \xrightarrow{\pi} I^0/\operatorname{Im}(f) \longrightarrow 0$$

は完全列である．さらに $I_0/\operatorname{Im}(f)$ の単体的対象 I^1 への埋め込みを $d^0 : I_0/\operatorname{Im}(f) \hookrightarrow I^1$ とする．このとき

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} I^0 \xrightarrow{d^0\circ\pi} I^1$$

は, $\operatorname{Ker}(\pi \circ d^0) = \pi^{-1}(\operatorname{Ker} d^0) = \pi^{-1}(0) = \operatorname{Im}(f)$ より完全である．この操作を繰り返していけば単射的分解が得られる．

このとき複体

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} (I^0)^G \xrightarrow{d^0} (I^1)^G \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{r-1}} (I^r)^G \xrightarrow{d^r} (I^{r+1})^G \xrightarrow{d^{r+1}} \dots$$

は完全列とは限らない．この状況において群コホモロジーを定義する．

Definition 1.13

上の状況の下, G の M **係数の第** r **コホモロジー**を以下で定義する．

$$H^r(G, M) := \frac{\operatorname{Ker}(d^r)}{\operatorname{Im}(d^{r-1})}$$

Proposition 1.14

M を G 加群, I を G 加群の単射的対象, $r > 0$ とする．このとき以下が成り立つ．

$$H^0(G, M) = M^G, \quad H^r(G, I) = 0.$$

Proof. まず前半を示す．完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow I^1/\operatorname{Im}(d^0) \longrightarrow 0$$

に対して, $(*)^G$ が左完全関手であったから,

$$0 \longrightarrow M^G \xrightarrow{f} (I^0)^G \xrightarrow{d^0} (I^1)^G \longrightarrow (I^1/\operatorname{Im}(d^0))^G$$

は完全列である．従って $H^0(G, M) = \operatorname{Ker}(d^0)/\operatorname{Im}(d^{-1}) = \operatorname{Im}(f)/\{0\} \simeq M^G$ となり ok.

後半を示す．まず明らかに I の単射的分解は

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

である．関手 $(*)^G$ を取り, 複体

$$0 \longrightarrow I^G \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

が得られ, ここから分かる． □

以後, G 加群 M の単射的分解

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

を省略して $M \to I^\bullet$ と書くことにする．このとき $H^r(G, M)$ を $H^r(I^\bullet)$ と書くことがある．G 準同型 $\alpha : M \to N$ は複体の射

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & I^\bullet \arrow[d, "\alpha^\bullet"] \\ N \arrow[r] & J^\bullet \end{tikzcd}$$

に延長でき, 準同型

$$H^r(\alpha^\bullet) : H^r(I^\bullet) \to H^r(J^\bullet)$$

は延長 $\alpha^\bullet$ の取り方に依らない. (層ホモ参照.) この主張を自明な準同型 $\mathrm{id} : M \to M$ に対して適用すると, 群 $H^r(G, M)$ が単射的分解の取り方に依らず, 同型を除いて well-defined であることが分かる. 一般の G 準同型 α に対する主張を用いることで, 対応 $M \mapsto H^r(G, M)$ は G 加群の圏からアーベル群の圏への関手であることが示される.

G 加群の単完全列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

は長完全列

$$0 \longrightarrow H^0(G, M') \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^r(G, M) \longrightarrow H^r(G, M'') \xrightarrow{\delta^r} H^{r+1}(G, M') \longrightarrow \cdots$$

を誘導することが知られている. (層ホモ参照.) さらに対応

$$\text{単完全列} \mapsto \text{長完全列}$$

は関手的である.

1.5 SHAPIRO'S LEMMA

M を G 加群とし, さらに $\mathbb{Z}$ を自明な作用で G 加群とみる. 準同型 $\alpha : \mathbb{Z} \to M$ は $\alpha(1)$ の値で一意に定まる. $m \in M$ に対して $m = \alpha(1)$ であることと, G によって固定されることは同値である. 以上より以下の同型が得られる.

$$\varphi : \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G; \alpha \mapsto \alpha(1). \tag{1}$$

しっかり well-defined であることから確認する. $\alpha(1) \in M^G$ を示す. 任意の $g \in G$ を一つ取る. このとき $g \cdot \alpha(1) = \alpha(1)$ を示せばよい. それは以下から分かる.

$$\begin{aligned} g \cdot \alpha(1) &= \alpha(g \cdot 1) \quad (\because \alpha : G \text{ 準同型}) \\ &= \alpha(1) \quad (\because G \curvearrowright \mathbb{Z}; \text{自明作用}) \end{aligned}$$

準同型であることは以下から分かる.

$$\varphi(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(1) = \alpha(1) + \beta(1) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

単射であることを示す. $\alpha(1) = 0$ と仮定する. このとき任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\alpha(n) = n\alpha(1) = 0$ となり $\alpha = 0$ である. ok. 全射であることを示す. 任意の $m \in M^G$ に対して準同型 α を $\alpha(1) = m$ となるように定める. このとき $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)$ であり, $\varphi(\alpha) = \alpha(1) = m$ となり確かに全射である. ok.

Proposition 1.15: シャピロの補題

$H \leq G$ とする. このとき全ての H 加群 N, 全ての $r \geq 0$ に対して同型

$$H^r(G, \mathrm{Ind}_H^G(N)) \to H^r(H, N)$$

が成り立つ.

Proof. $r = 0$ のときは, Lemma 1.9 と (1) より

$$N^H \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, N) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \mathrm{Ind}_H^G(N)) \simeq \mathrm{Ind}_H^G(N)^G$$

となり従う. $r > 1$ の場合を示す. N の単射的分解 $N \to I^\bullet$ を一つ取る. このとき関手 Ind_H^G は完全であったこと, 単射的対象を単射的対象に移すこと (Proposition 1.12 の証明中) より, $\mathrm{Ind}_H^G(N) \to \mathrm{Ind}_H^G(I^\bullet)$ は G 加群 $\mathrm{Ind}_H^G(N)$ の単射的分解である. 従って

$$H^r(G, \mathrm{Ind}_H^G(N)) = H^r(\mathrm{Ind}_H^G(I^\bullet)) \simeq H^r(I^\bullet) = H^r(H, N)$$

となり ok. ただし同型の部分は非自明である. 実際に書き下してみると以下のように分かる. $\mathrm{Ind}_H^G(N)$ の単射的分解は

$$\mathrm{Ind}_H^G(N) \to \mathrm{Ind}_H^G(I^0) \to \mathrm{Ind}_H^G(I^1) \to \mathrm{Ind}_H^G(I^2) \to \dots$$

となっていて, 従って複体

$$0 \to \mathrm{Ind}_H^G(I^0)^G \to \mathrm{Ind}_H^G(I^1)^G \to \mathrm{Ind}_H^G(I^2)^G \to \dots$$

が考えられる. $r = 0$ のときの結果よりこの複体は

$$0 \to (I^0)^H \to (I^1)^H \to (I^2)^H \to \dots$$

となっている. これはまさに $H^r(H, N)$ を得るための複体に他ならない. □

Corollary 1.16

G 加群 M が induced ならば, 全ての $r > 0$ に対して $H^r(G, M) = 0$ である.

Proof. 仮定よりあるアーベル群 M_0 が存在して, G 加群としての同型 $M \simeq \mathrm{Ind}^G(M_0)$ が成り立つ. このときシャピロの補題 (Proposition 1.15) より

$$H^r(G, M) = H^r(G, \mathrm{Ind}_{\{1\}}^G(M_0)) \simeq H^r(\{1\}, M_0) = 0$$

となり ok. ただし最後の等式は非自明だと思われる. これは M_0 の単射的分解 $0 \to M_0 \to I^0 \to \dots$ を取って, 複体 $0 \to (I^0)^{\{1\}} \to$ を考えても, $\{1\}$ の作用は自明だから複体というより完全列となってしまうことから従う. □

Remark 1.17

G 加群の完全列

$$0 \to M \to J \to N \to 0$$

を考える. このとき全ての $r > 0$ に対して $H^r(G, J) = 0$ ならば, コホモロジー長完全列を取ることで

$$0 \to M^G \to J^G \to N^G \to H^1(G, M) \to 0 \to H^1(G, N) \to H^2(G, M) \to 0 \to H^2(G, N) \to H^3(G, M) \to \dots$$

という完全列を得る. 従って

$$H^r(G, N) \simeq H^{r+1}(G, M) \quad (r \geq 1)$$

が成り立つことが分かる.

例えば M を G 加群, $M_* = \mathrm{Ind}^G(M_0)$ とする. ここで M_0 は M を単にアーベル群とみたものである. Proposition 1.12 の証明でも見たように, M は $\{g \to gm\} \leq M_*$ と同一視できた. つまり $M \to \mathrm{Ind}^G(M_0); m \mapsto (g \mapsto gm)$ は単射であった. $M_\dagger = M_*/M$ とおく. このとき定義より

$$0 \to M \to M_* \to M_\dagger \to 0$$

は完全列である. Corollary 1.16 より全ての $r > 0$ に対して $H^r(G, \mathrm{Ind}^G(M_0)) = 0$ であるから, 上の remark より

$$H^r(G, M_\dagger) \simeq H^{r+1}(G, M) \quad (r > 0)$$

を得る.

より一般に, 完全列

$$0 \to M \to J^1 \to \dots \to J^s \to N \to 0$$

と, $r, i > 0$ に対して $H^r(G, J^i) = 0$ が成り立っているとする. このとき

$$H^r(G, N) \simeq H^{r+s}(G, M) \quad (r \geq 1)$$

が成り立つ．これを示す．上の完全列を以下のように短完全列に分解する．

$$
\begin{aligned}
&0 \to M \to J^1 \to N^1 \to 0 \\
&0 \to N^1 \to J^2 \to N^2 \to 0 \\
&\vdots \\
&0 \to N^{s-1} \to J^s \to N \to 0
\end{aligned}
$$

このとき $H^r(G, J^i) = 0$ より

$$
H^r(G,N) \simeq H^{r+1}(G,N^{s-1}) \simeq H^{r+2}(G,N^{s-2}) \simeq \cdots \simeq H^{r+s}(G,M)
$$

となり ok.

Remark 1.18

$$
0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} J^0 \xrightarrow{d^0} J^1 \xrightarrow{d^1} J^2 \longrightarrow \dots
$$

を完全列で, 全ての $s > 0$ と r について $H^s(G, J^r) = 0$ を満たすものとする．このとき

$$
H^r(G,M) = H^r(J^\bullet)
$$

が成り立つ．この remark は induced 加群による全ての M の分解に適用される.(???)

1.6 DESCRIPTION OF THE COHOMOLOGY GROUPS BY MEANS OF COCHAINS

P_r $(r \geq 0)$ を, 基底を G の $r+1$ 個の元の組 $(g_0, \dots, g_r)$ たちを基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群, すなわち

$$
P_r := \mathbb{Z}(g_0, \dots, g_r) = \{n(g_0, \dots, g_r) \mid n \in \mathbb{Z}\}
$$

とする．このとき以下の作用により P_r に G 加群の構造を入れる．

$$
g(g_0, \dots, g_r) := (gg_0, \dots, gg_r)
$$

このとき P_r は $\mathbb{Z}[G]$ 加群としても自由で, 特に基底は $\{(1, g_1, \dots, g_r) \mid g_i \in G\}$ として取れる．

> 示すことは
>
> $$\oplus_{g_i}\mathbb{Z}(g_0, \dots, g_r) = \oplus_{g_i}\mathbb{Z}[G](1, g_1, \dots, g_r)$$
>
> である．包含「$\subset$」は
>
> $$n(g_0, \dots, g_r) = ng_0(1, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_r) \in \mathbb{Z}[G](1, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_r)$$
>
> より従う．包含「$\supset$」は
>
> $$(\sum n_i g_i)(1, g_1, \dots, g_r) = \Big(\sum n_i g_i, (\sum n_i g_i)g_1, \dots, (\sum n_i g_i)g_r\Big) \in \oplus_{g_i}\mathbb{Z}[G](1, g_1, \dots, g_r)$$
>
> より従う．

準同型 $d_r : P_r \to P_{r-1}$ を以下で定義する．

$$
d_r(g_0, \dots, g_r) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_r)
$$

ここで $\hat{g}_i$ は i 番目の要素を除くという意味である．このとき列

$$
P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_r \xrightarrow{d_r} P_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0
$$

に対して $d_{r-1} \circ d_r = 0$ が成り立つ．従ってこれは複体である．また, $\varepsilon : P_0 \to \mathbb{Z}$ を, 基底を 1 に送る写像とする．

$d_{r-1} \circ d_r = 0$ を示す．特に P_r の基底の一つ $(g_0, \dots, g_r)$ に対して $d_{r-1} \circ d_r (g_0, \dots, g_r) = 0$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
d_{r-1} \circ d_r (g_0, \dots, g_r) &= d_{r-1} \left(\sum_{i=0}^{r} (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_r) \right) \\
&= d_{r-1} \left((g_1, g_2, \dots, g_r) - (g_0, g_2, \dots, g_r) + \cdots + (-1)^r (g_0, \dots, g_{r-1}) \right) \\
&= (g_2, \dots, g_r) - (g_1, g_3, \dots, g_r) + \cdots + (-1)^{r-1} (g_1, g_2, \dots, g_{r-1}) \\
&\quad - \left\{ (g_2, g_3, \dots, g_r) - (g_0, g_3, \dots, g_r) + \cdots + (-1)^{r-1} (g_0, g_2, \dots, g_{r-1}) \right\} \\
&\quad + (-1)^{r-1} \left\{ (g_1, g_2, \dots, g_{r-1}) - (g_0, g_2, \dots, g_{r-1}) + \cdots + (-1)^{r-1} (g_0, g_1, \dots, g_{r-2}) \right\}
\end{aligned}
$$

とやっていくと本当に消えるかどうか分からないのでもう少し賢い方法を考える．d_{r-1}, d_r を作用させたあとに g_0, g_1 が排除される項，すなわち $\pm(g_2, \dots, g_r)$ という項について着目する．

$$
d_r(g_0, \dots, g_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (g_0, \dots, \underbrace{\hat{g}_i}_{i+1\text{ 番目}}, \dots, g_r)
$$

において g_0 が排除される項 $(g_1, \dots, g_r)$ の係数は $(-1)^0 = 1$ である． g_1 が排除される項 $(g_0, g_2, \dots, g_r)$ の係数は $(-1)^1 = -1$ である．次に

$$
d_{r-1}(g_1, \dots, g_r) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i (g_1, \dots, \underbrace{\hat{g}_k}_{i+1\text{ 番目}}, \dots, g_r)
$$

において g_1 が排除される項 $(g_2, \dots, g_r)$ の係数は $(-1)^0 = 1$ である．

$$
d_{r-1}(g_0, g_2, \dots, g_r) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i (g_0, g_2, \dots, \underbrace{\hat{g}_k}_{i+1\text{ 番目}}, \dots, g_r)
$$

において g_0 が排除される項の係数は $(-1)^0 = 1$ である．従って $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$ が g_0, g_1 が排除される項の係数である．確かに 0 になっている．

同様にして g_a と g_b が排除される項の係数を見る．ただし適当に順番を入れ替えて $a < b$ とする．

$$
d_r(g_0, \dots, g_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_r)
$$

において g_a が排除される項の係数は $(-1)^{a+1}$ である．g_b が排除される項の係数は $(-1)^{b+1}$ である．次に

$$
d_{r-1}(g_0, \dots, \hat{g}_a, \dots, g_r) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left(\underbrace{g_0}_{1\text{ 番目}}, \underbrace{g_1}_{2\text{ 番目}}, \dots, \underbrace{g_{a-1}}_{a\text{ 番目}}, \underbrace{g_{a+1}}_{a+1\text{ 番目}}, \underbrace{g_{a+2}}_{a+2\text{ 番目}}, \dots, \underbrace{g_b}_{b\text{ 番目}}, \dots, \underbrace{g_r}_{r\text{ 番目}} \right) (\text{から } i+1 \text{ 番目を排除})
$$

において g_b が排除される項の係数は $(-1)^{b-1}$ である．同様にして

$$
d_{r-1}(g_0, \dots, \hat{g}_b, \dots, g_r) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left(\underbrace{g_0}_{1\text{ 番目}}, \underbrace{g_1}_{2\text{ 番目}}, \dots, \underbrace{g_a}_{a+1\text{ 番目}}, \dots, \underbrace{g_{b-1}}_{b\text{ 番目}}, \underbrace{g_{b+1}}_{b+1\text{ 番目}}, \dots, \underbrace{g_r}_{r\text{ 番目}} \right) (\text{から } i+1 \text{ 番目を排除})
$$

において g_a が排除される項の係数は $(-1)^a$ である． 以上より g_a, g_b が排除される項の係数は $(-1)^{a+1}(-1)^{b-1} + (-1)^{b+1}(-1)^a = (-1)^{a+b} + (-1)^{a+b+1} = 0$ となり ok.

Lemma 1.19

複体 $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ は完全列である．

Proof. $\varepsilon : P_0 \to \mathbb{Z}$ が全射であること，$\operatorname{Im} d_{r+1} \supset \operatorname{Ker} d_r$ を示せばよい． ε が全射を示す． 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\varepsilon(n g_0) = n\varepsilon(g_0) = n$ なので ok. $\operatorname{Im} d_{r+1} \supset \operatorname{Ker} d_r$ を示す．準同型 $k_r : P_r \to P_{r+1}$ を

$$
k_r(g_0, \dots, g_r) = (0, g_0, \dots, g_r)
$$

と定義する．このとき $d_{r+1}\circ k_r + k_{r-1}\circ d_r = 1$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned} d_{r+1}\circ k_r(g_0,\dots,g_r) + k_{r-1}\circ d_r(g_0,\dots,g_r) &= d_{r+1}(0,g_0,\dots,g_r) + k_{r-1}\left(\sum_{i=0}^{r}(-1)^i(g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_r)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i(0,g_0,\dots,\hat{g}_{i-1},\dots,g_r) + \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(0,g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_r) \\ &= (-1)^0(g_0,\dots,g_r) \end{aligned}$$

となって ok．従って $x\in\operatorname{Ker} d_r$ ならば $d_{r+1}\circ k_r(x) = x$，すなわち $x = d_{r+1}(k_r(x)) \in \operatorname{Im} d_{r+1}$ である． □

完全列 $P_\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$ に対して

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(P_0,M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(P_r,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(P_{r+1},M) \longrightarrow \cdots$$

は完全列である．このとき

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(P_0,M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(P_r,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(P_{r+1},M) \longrightarrow \cdots$$

は完全列とは限らない．この複体に対して同様にコホモロジー $H^r(\operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},M)) = H^r(\operatorname{Hom}_G(P_\bullet,M))$ を定義する．

Proposition 1.20

任意の G 加群 M に対して

$$H^r(G,M) \simeq H^r(\operatorname{Hom}_G(P_\bullet,M))$$

が成り立つ．

Proof. Ext 加群とか導入する必要があるので省略． □

$\operatorname{Hom}(P_r,M)$ の元は写像 $\varphi: G^{r+1}\to M$ と同一視できる．さらに φ が G で固定されることと

$$^\forall g,g_0,\dots,g_r\in G,\ \ \varphi(gg_0,\dots,gg_r) = g\varphi(g_0,\dots,g_r)$$

が成り立つことは同値である．

> φ が G で固定されると仮定する．このとき
>
> $$\varphi(gg_0,\dots,gg_r) = \varphi(g(g_0,\dots,g_r)) = g\cdot g^{-1}\cdot\varphi(g(g_0,\dots,g_r)) = g\cdot(g\varphi)(g_0,\dots,g_r) = g\varphi(g_0,\dots,g_r)$$
>
> となって ok．逆も同様にして分かる．

以上より $\operatorname{Hom}_G(P_r,M)$ の元は

$$\tilde{C}^r(G,M) := \left\{\varphi: G^{r+1}\to M \mid {}^\forall g,g_0,\dots,g_r\in G,\ \varphi(gg_0,\dots,gg_r) = g\varphi(g_0,\dots,g_r)\right\}$$

と同一視できる．$\tilde{C}^r(G,M)$ の元は，**G の M 値斉次 r-cochain** という．d_r から誘導される boundary 写像 $\tilde{d}_r: \tilde{C}^r(G,M) \to \tilde{C}^{r+1}(G,M)$ を

$$(\tilde{d}^r\varphi)(g_0,\dots,g_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r+1}\varphi(g_0,\dots,\hat{g}_i,\dots,g_{r+1})$$

と定義する．Proposition 1.20 は

$$H^r(G,M) \simeq \operatorname{Ker}\tilde{d}^r / \operatorname{Im}\tilde{d}^{r-1}$$

を意味している．

斉次 cochain$\varphi: G^{r+1}\to M$ は $\varphi(1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1g_2\dots g_r)$ の値で定まる．

$$\varphi(g_0,g_1,\dots,g_r)=g_0\varphi(1,g_0^{-1}g_1,g_0^{-1}g_2,\dots,g_0^{-1}g_r)$$

より $\varphi(1,g_1,g_1g_2,g_1g_3,\dots,g_1g_r)$ の値で定まる.

$$\begin{aligned}(1,g_1,g_1g_2,g_1g_3,\dots,g_1g_r)&=(1,g_1,g_1g_2,g_1g_2g_3,\dots)+(0,0,0,g_1g_3-g_1g_2g_3,\dots)\\&=(1,g_1,g_1g_2,g_1g_2g_3,\dots)+(0,0,0,g_1g_3(1-g_2),\dots)\end{aligned}$$

より $\varphi(1,g_1,g_1g_2,g_1g_2g_3,\dots)$ の値で定まる. これを繰り返せばよい.

このとき G の M 値非斉次 r-cochain の集合 $C^r(G,M)$ を $C^r(G,M)=\{\varphi:G^r\to M:\mathrm{map}\}$ と定義する. ただし $C^0(G,M)=M$ となるように $G^0=\{1\}$ と定義する. ここで $d^r:C^r(G,M)\to C^{r+1}(G,M)$ を

$$\begin{aligned}&(d^r\varphi)(g_1,\dots,g_{r+1})\\=&g_1\varphi(g_2,\dots,g_{r+1})+\sum_{j=1}^{r}(-1)^j\varphi(g_1,\dots,g_jg_{j+1},\dots,g_{r+1})+(-1)^{r+1}\varphi(g_1,\dots,g_r)\end{aligned}$$

と定義する. このとき

$$\begin{aligned}Z^r(G,M)&:=\operatorname{Ker}d^r\quad(r-\text{cocycle の群})\\B^r(G,M)&:=\operatorname{Im}d^{r-1}\quad(r-\text{coboundary の群})\end{aligned}$$

とする. 試しに $r=1$ の場合で計算してみる.

$$(d\varphi)(g_1,g_2)=g_1\varphi(g_2)-\varphi(g_1g_2)+\varphi(g_1)$$

であるから $\varphi\in Z^1(G,M)$ であることと $\varphi(g_1g_2)=g_1\varphi(g_2)+\varphi(g_1)$ を満たすことは等しい. さらに

$$(d^0\varphi)(g_1)=g_1\varphi(1)+(-1)^{0+1}\varphi(1)=:g_1m-m$$

であるから, $B^1(G,M)$ の元は, ある $m\in M$ に対して $g\mapsto gm-m$ という形をした写像である.

Proposition 1.21

写像の列

$$C^0(G,M)\xrightarrow{d^0}C^1(G,M)\xrightarrow{d^1}\dots\xrightarrow{d^{r-1}}C^r(G,M)\xrightarrow{d^r}C^{r+1}(G,M)\longrightarrow\cdots$$

は複体である, すなわち $d^r\circ d^{r-1}=0$ が成り立つ. 従って以下の自然な同型が成り立つ.

$$H^r(G,M)\simeq Z^r(G,M)/B^r(G,M).$$

Proof. $\varphi\in\tilde{C}^r(G,M)$ に対して

$$\varphi'(g_1,\dots,g_r):=\varphi(1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\dots g_r)$$

と定義する. このとき $\tilde{C}^r(G,M)\to C^r(G,M);\varphi\mapsto\varphi'$ が全単射であり, boundary を boundary に移すことが確かめられる. ここから従う. (さすがにチェックめんどくさすぎて諦め.) □

Example 1.22

写像 $\varphi:G\to M$ が **crossed 準同型**であるとは

$$^\forall\sigma,\tau\in G,\ \ \varphi(\sigma\tau)=\sigma\varphi(\tau)+\varphi(\sigma)$$

を満たすことをいう. このとき $\varphi(1)=\varphi(1\cdot1)=1\varphi(1)+\varphi(1)=2\varphi(1)$ であるから, $\varphi(1)=0$ でなければならない. 次に, ある $m\in M$ に対して $\psi_m:\sigma\mapsto\sigma m-m$ は crossed 準同型である. 実際

$$\psi_m(\sigma\tau)=(\sigma\tau)m-m=\sigma(\tau m)-\sigma m+\sigma m-m=\sigma\psi_m(\tau)+\psi_m(\sigma)$$

より従う．このような crossed 準同型を**主 crossed 準同型**という．上の Proposition 1.21 より

$$\begin{aligned} H^1(G,M) &\simeq \frac{\{\text{crossed 準同型 }\}}{\{\text{ 主 crossed 準同型 }\}} \\ &= \frac{\{\varphi : G \to M; map \mid {}^\forall\sigma,\tau \in G,\ \varphi(\sigma\tau) = \sigma\varphi(\tau) + \varphi(\sigma)\}}{\{{}^\exists m \in M \text{ such that } \varphi(\sigma) = \sigma m - m\}} \end{aligned}$$

もし作用 $G \curvearrowright M$ が自明ならば crossed 準同型はただの準同型である．さらに主 crossed 準同型は 0 のみである．実際,

$$\begin{aligned} &\varphi(\sigma\tau) = \sigma\cdot\varphi(\tau) + \varphi(\sigma) = \varphi(\tau) + \varphi(\sigma) \\ &\varphi(\sigma) = \sigma\cdot m - m = m - m = 0 \end{aligned}$$

から分かる．従って以下が分かる．

$$H^1(G,M) \simeq \mathrm{Hom}(G,M) \quad (G \curvearrowright M; \mathrm{trivial})$$

Example 1.23

M をアーベル群とする．ただしここでは演算を乗法的に書く．**G の M による拡大**とは, 群の完全列

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

のことである．このとき

$${}^\forall\sigma \in G,\ {}^\forall m \in M,\ \sigma m := s(\sigma)\cdot m \cdot s(\sigma)^{-1}$$

とおく．ここで $s(\sigma)$ は $\pi(s(\sigma)) = \sigma$ となる元の一つである．今, s の π への切断を選ぶ, すなわち (必ずしも準同型とは限らない) 写像 $s : G \to E$ で $\pi \circ s = \mathrm{id}$ となるものを一つ選ぶ．このとき $s(\sigma)s(\sigma')$ と $s(\sigma\sigma')$ はどちらも π により $\sigma\sigma' \in G$ へ移る．(π は準同型なので.) このとき $\varphi(\sigma,\sigma') \in M$ をそれらの差, すなわち

$$s(\sigma)s(\sigma') = \varphi(\sigma,\sigma')\cdot s(\sigma\sigma')$$

とおく．このとき E での結合律

$$s(\sigma)(s(\sigma')s(\sigma'')) = (s(\sigma)s(\sigma'))s(\sigma'')$$

より

$$\sigma\varphi(\sigma',\sigma'')\cdot\varphi(\sigma,\sigma'\sigma'') = \varphi(\sigma,\sigma')\cdot\varphi(\sigma\sigma',\sigma'')$$

が成り立つことが簡単に確かめられる．これはまさに $\varphi \in Z^2(G,M)$ を意味している．もし異なる切断 s' を取っても, φ は $H^2(G,M) = Z^2(G,M)/B^2(G,M)$ において等しい, すなわち切断の取り方によらない．逆に, $\varphi \in Z^2(G,M)$ は群の拡大から得られる．このようにして G の M による拡大から $H^2(G,M)$ の同型類を分類することができる．

Remark 1.24

G を群, M を G 加群とする．$m \in M$ に対して $\varphi_m : G \to M$ を定数写像 $\sigma \mapsto m$ とする．このとき

$$(d^1\varphi_m)(\sigma,\tau) = \sigma m - m + m = \sigma m$$

を得る．特に $(d^1\varphi_m)(1,1) = m$ であり．従って $H^2(G,M)$ の全ての同値類は $\varphi(1,1) = 0$ となる 2-cocycle によって代表されることが分かる．そのような 2-cocycle は**正規化されている**という．

Example 1.25

$\varphi : G \to M$ を crossed 準同型とする．任意の $\sigma \in G$ に対して

$$\begin{aligned}
&\varphi(\sigma^2) = \sigma\varphi(\sigma) + \varphi(\sigma) \\
&\varphi(\sigma^3) = \varphi(\sigma \cdot \sigma^2) = \sigma^2\varphi(\sigma) + \varphi(\sigma^2) = \sigma^2\varphi(\sigma) + \sigma\varphi(\sigma) + \varphi(\sigma) \\
&\vdots \\
&\varphi(\sigma^f) = \sigma^{f-1}\varphi(\sigma) + \cdots + \sigma\varphi(\sigma) + \varphi(\sigma)
\end{aligned}$$

を得る．従って G が巡回群であれば, crossed 準同型は生成元 σ の値で定まることが分かる．さらにその値 $m := \varphi(\sigma)$ は

$$\sigma^{f-1}m + \cdots + \sigma m + m = 0 \tag{2}$$

を満たすことも分かる．逆に, $m \in M$ が (2) を満たしていれば $\varphi(\sigma^i) := \sigma^{i-1}m + \cdots + \sigma m + m$ と定義することで φ は crossed 準同型となる．さらに

$$\varphi : \text{主 crossed 準同型} \iff {}^{\forall}x \in M \text{ such that } m = \sigma x - x$$

も分かる．(ほぼ定義.) 次に,

$$\begin{aligned}
Nm_G &: M \to M; m \mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma m \\
\sigma - 1 &: M \to M; m \mapsto \sigma m - m
\end{aligned}$$

と写像を定義する．このとき有限巡回群 G に対して, 生成元 σ を固定する (決める) と, 同型

$$H^1(G, M) \to \frac{\mathrm{Ker}(Nm_G)}{(\sigma - 1)M}; \varphi \mapsto \varphi(\sigma)$$

が定まることが上で述べていたことから容易に従う．

Remark 1.26

G 加群の完全列

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

を考える．boundary 写像

$$\delta^r : H^r(G, P) \to H^{r+1}(G, M)$$

は次のような記述ができる．$\gamma \in H^r(G, P)$ は r-cocycle $\varphi : G^r \to P$ で代表される．そして $N \to P$ が全射により, ある r-cochain $\tilde{\varphi} : G^r \to N$ で φ の lift が存在する．$d\varphi = 0$ なので $d\tilde{\varphi}$ は M に値を取る．このようにして作った cocycle は $\delta^r\gamma$ に等しい．(細かいチェックがめんどくさくなった．つまり連結準同型は一応 explicit に書けるということだけ覚えておけばいい.)

1.7 THE COHOMOLOGY OF L AND $L^\times$

L/K を有限次ガロア拡大, $G = G(L/K)$ とする．$L, L^\times$ はいずれも自然な作用で G 加群である．

Proposition 1.27: Hilbert 90

L/K を有限次ガロア拡大, $G = G(L/K)$ とする．このとき $H^1(G, L^\times) = 0$ である．

Proof. $\varphi : G \to L^\times \in Z^1(G, L^\times)$ を一つ取る．このとき $\varphi \in B^1(G, L^\times)$ を示せばよい, すなわちある $c \in L^\times$ が存在して

$\varphi(\sigma) = \sigma c/c$ を満たせばよい. $a \in L^\times$ を一つ取り,

$$b := \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma) \cdot \sigma a$$

と定義する. $b \neq 0$ と仮定する. このとき

$$\begin{aligned}\tau b &= \sum_{\sigma \in G} \tau\varphi(\sigma) \cdot \tau\sigma = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\tau)^{-1}\varphi(\tau\sigma)\tau\sigma a \quad (\because \varphi(\tau\sigma) = \tau\varphi(\sigma)\varphi(\tau)) \\ &= \varphi(\tau)^{-1} \sum_{\sigma \in G} \varphi(\tau\sigma)\tau\sigma a = \varphi(\tau)^{-1} \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\sigma a \quad (\because G \to G; \sigma \mapsto \tau\sigma; \text{全単射}) \\ &= \varphi(\tau)^{-1} b\end{aligned}$$

であるから $\varphi(\tau) = b/\tau b = \tau(b^{-1})/b^{-1}$ となり, $c = b^{-1}$ と取ればよいことが分かる. 従ってあとは, $b \neq 0$ となるような $a \in L^\times$ が存在することを示せばよい.

「指標の独立性についての Dedekind の定理」を用いると上手くいくらしい. ここからは一般論を少し述べる. L を体, H を群とする. 有限集合 $\{f_i\}$ ($f_i : H \to L^\times$ は全て異なる準同型) は L 上線形独立, すなわち

$$^\forall \alpha \in H, \ \sum a_i f_i(\alpha) = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

である. この結果を準同型 $\sigma : L^\times \to L^\times \in G$ に適用すると, $\sum_\sigma \varphi(\sigma)\sigma$ はゼロ写像ではない. (対偶を用いた.) 従って目的の $b \neq 0$ とならない a が取れた. □

Corollary 1.28

L/K を巡回拡大, $G = G(L/K) = \langle\sigma\rangle$ とする. このとき $N_{L/K}(a) = 1$ ならば $a = \sigma b/b$ という形をしている.

Proof. Example 1.25 と Proposition 1.27 より

$$0 = H^1(G, L^\times) = \mathrm{Ker}(Nm_G)/(\sigma - 1)L^\times$$

が成り立つ. Nm_G の定義はまさに $N_{L/K}$ と同じであることに気をつけると, $N_{L/K}(a) = 1$ ならば $a \in (\sigma - 1)L^\times$, すなわちある $b \in L^\times$ が存在して $a = (\sigma - 1)b$, すなわち $a = \sigma b \cdot b^{-1}$ である. □

Proposition 1.29

L/K を有限次ガロア拡大, $G = G(L/K)$ とする. このとき全ての $r > 0$ に対して $H^r(G, L) = 0$ である.

Proof. Normal Basis Theorem というものを使う. これは, ある $\alpha \in L$ が存在して $\{\sigma\alpha \mid \sigma \in G\}$ が L の K-ベクトル空間としての基底となる, という主張である. この形の基底は正規であるという.

正規基底 $(\sigma\alpha)_{\sigma \in G}$ は以下の G 加群としての同型を定める.

$$K[G] \to L; \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma\alpha$$

実際, 準同型であることは明らか. 単射であることは正規基底の一次独立性から, 全射であることは正規基底の生成性から従う. Proposition 1.10 の証明中より

$$K[G] \simeq \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} K \, \mathrm{Ind}^G(K)$$

であるから, Shapiro の補題 (Proposition 1.15) より

$$H^r(G, L) \simeq H^r(G, K[G]) \simeq H^r(G, \mathrm{Ind}^G(K)) \simeq H^r(\{1\}, K) = 0$$

となり ok. □

1.8 THE COHOMOLOGY OF PRODUCTS

G 加群の直積 $M = \prod_i M_i$ は自然に G 加群の作用が定まる.

Proposition 1.30

任意の G 加群 M_i に対して

$$H^r(G,\prod_i M_i)\simeq\prod_i H^r(G,M_i)$$

が成り立つ.

Proof. 完全列の直積は完全列となること (, すなわち $0\to A_i\to B_i\to C_i\to 0$ が完全列ならば $0\to\prod A_i\to\prod B_i\to\prod C_i\to 0$ が完全であること) から, 単射的対象の直積 $I=\prod I_i$ も単射的対象であることが分かる. 正確には

$$\mathrm{Hom}_G(\cdot,I)\simeq\prod_i\mathrm{Hom}_G(\cdot,I_i)$$

より $\mathrm{Hom}_G(\cdot,I)$ が完全関手であることから分かる. 従って $M_i\to I_i^\bullet$ を M_i の単射的分解とすれば, $\prod M_i\to\prod I_i^\bullet$ は $\prod M_i$ の単射的分解である. 以上より

$$H^r(G,\prod M_i)\simeq H^r((\prod I_i^\bullet)^G)\simeq H^r(\prod(I_i^{\bullet G}))\simeq\prod H^r(I_i^{\bullet G})\simeq\prod_i H^r(G,M_i)$$

となり ok. □

特に任意の G 加群 M,N に対して

$$H^r(G,M\oplus N)\simeq H^r(G,M)\oplus H^r(G,N)$$

が成り立つ. しかしこれは自然な単射 $M,N\hookrightarrow M\oplus N$ を用いて直接的に示すことができる. それについては後で詳しく述べる.

1.9 FUNCTIONAL PROPERTIES OF THE COHOMOLOGY GROUPS

M を G 加群, M' を G' 加群とする. 準同型

$$\alpha:G'\to G,\ \beta:M\to M'$$

が **compatible** であるとは, $\beta(\alpha(g)m)=g(\beta(m))$ が成り立つこと, すなわち

$$\begin{array}{ccccc} G'\times M & & \xrightarrow{(\mathrm{id},\beta)} & & G'\times M' \\ \downarrow{\scriptstyle(\alpha,\mathrm{id})} & & & & \downarrow{\scriptstyle 作用} \\ G\times M & \xrightarrow[作用]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & M' \end{array}\qquad \begin{array}{ccccc} (g,m) & & \longmapsto & & (g,\beta(m)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (\alpha(g),m) & \longmapsto & \alpha(g)m & \longmapsto & \beta(\alpha(g)m)=g\cdot\beta(m) \end{array}$$

が可換図式となることをいう. このとき組 (α,β) は複体の間の準同型

$$C^\bullet(G,M)\to C^\bullet(G',M');\varphi\mapsto\beta\circ\varphi\circ\alpha^r$$

を定める. 従って準同型

$$H^r(G,M)\to H^r(G',M')$$

が誘導される.

> φ が写像 $G^r\to M$ ならば $\beta\circ\varphi\circ\alpha^r$ は写像 $G'^r\to M'$ であることは明らかなので, 複体を複体に移すこと, すなわち
>
> $$\begin{array}{ccc} C^r(G,M) & \xrightarrow{d^r} & C^{r+1}(G,M) \\ \downarrow{\scriptstyle\beta\circ*\circ\alpha^r} & & \downarrow{\scriptstyle\beta\circ*\circ\alpha^{r+1}} \\ C^r(G',M') & \xrightarrow{d'^r} & C^{r+1}(G',M') \end{array}$$
>
> が可換図式であることを示せばよい.
>
> $$(\beta\circ\varphi\circ\alpha^{r+1})\circ d^r(\varphi)(g_1,\dots,g_{r+1})=$$
>
> ちょっとやばそう.

Example 1.31

$H \leq G$ とし, M を H 加群とする. 準同型

$$\mathrm{Ind}_H^G(M) \to M; \varphi \mapsto \varphi(1_G)$$

は包含 $H \hookrightarrow G$ と compatible である. 従ってコホモロジーの間の準同型

$$H^r(G, \mathrm{Ind}_H^G(M)) \to H^r(H, M)$$

が誘導される. しかし実際には Shapiro の補題 (Proposition 1.15) より同型である.

Example 1.32

$H \leq G, \alpha : H \hookrightarrow G$ とする. また, $\beta : M \to M$ を G 加群 M の間の恒等写像とする. このとき α と β は compatible なので, **制限写像 (restriction homomorphism)**

$$\mathrm{Res} : H^r(G, M) \to H^r(H, M)$$

が誘導される. この写像は次のようにも構成される. $M \to \mathrm{Ind}_H^G(M)$ を準同型 $m \mapsto (g \mapsto gm)$ とする. 準同型の合成と Shapiro の補題により

$$H^r(G, M) \longrightarrow H^r(G, \mathrm{Ind}_H^G(M)) \xrightarrow{\simeq} H^r(H, M)$$

は制限写像に一致する.

Example 1.33

$H \lhd G$ とし, $\alpha : G \to G/H$ を自然な射影, $\beta : M^H \hookrightarrow M$ を埋め込みとする. このとき α と β は compatible で**膨張写像 (inflation homomorphism)**

$$\mathrm{Inf} : H^r(G/H, M^H) \to H^r(G, M)$$

が誘導される.

Example 1.34

$g_0 \in G$ に対して, 準同型 $\alpha : G \to G; \sigma \mapsto g_0 \sigma g_0^{-1}, \beta : M \to M; m \mapsto g_0^{-1} m$ は compatible である. このとき準同型

$$H^r(G, M) \to H^r(G, M)$$

が誘導されるが, 以下でこの準同型が恒等写像であることを示す. 数学的帰納法で示す. $r = 0$ に対しては

$$M^G \to M^G; m \mapsto g_0^{-1} m$$

なのでこれは明らかに恒等写像である. $r - 1$ について成り立つと仮定する. Remark 1.17 のあとの議論を思い出す. M_0 を, M を単にアーベル群とみたもの, $M_* := \mathrm{Ind}^G(M_0)$, $M_\dagger := M_*/M$ とすると完全列

$$0 \to M \to M_* \to M_\dagger \to 0$$

が成り立っていた. このとき図式

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{r-1}(G, M_*) & \longrightarrow & H^{r-1}(G, M_\dagger) & \longrightarrow & H^r(G, M) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^{r-1}(G, M_*) & \longrightarrow & H^{r-1}(G, M_\dagger) & \longrightarrow & H^r(G, M) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が誘導される. ただし「$\to 0$」の部分は M_* が誘導加群なので Corollary 1.16 より $H^{r+1}(G, M_*) = 0$ となることより従う. 「$\downarrow$」はそれぞれ compatible 性から構成した最初の写像である. この図式が可換であることは簡単に確かめれるら

しいが, どうやって示す？(たぶん α と β の compatible 性から複体の間の準同型を定めて (未証明), cocycle を cocycle に, coboundary を coboundary に移すことからコホモロジーの間の準同型も可換になる, という流れだと思う．) 帰納法の仮定により左から二番目の「↓」が恒等写像だから, 左から三番目の「↓」も恒等写像でなければならない．

このような証明方法 ($M_\dagger$ を導入してコホモロジー長完全列により一つ下のコホモロジーから目的のコホモロジーの情報を得る方法？) を **dimension shifting** という．$H \lhd G$ とする．G 加群 M に対して上で述べた設定は, 作用 $G \curvearrowright H^r(H, M)$ を与える．上で述べたことは, この作用は G/H を経由するということを示している．

Example 1.35

H を G の指数有限部分群, S を G/H の完全代表系の一つとして, $G = \cup_{s\in S} sH$ と書く．M を G 加群として, $m \in M^H$ に対して

$$Nm_{G/H} m := \sum_{s\in S} sm$$

と定義する．これは S の取り方に依らず, さらに G によって固定される．従って準同型

$$Nm_{G/H} : M^H \to M^g; m \mapsto Nm_{G/H} m$$

が定まる．このとき以下のようにして**双対制限写像 (corestriction homomorphism)**

$$\mathrm{Cor} : H^r(H, M) \to H^r(G, M)$$

が定まる．G 加群 M に対して, 自然な G 準同型

$$\mathrm{Ind}_H^G(M) \to M; \varphi \mapsto \sum_{s\in S} s\varphi(s^{-1})$$

と Shapiro の補題より

$$H^r(H, M) \xrightarrow{\simeq} H^r(G, \mathrm{Ind}_H^G(M)) \longrightarrow H^r(G, M)$$

となり, これが双対制限写像である．

Proposition 1.36

H を G の指数有限部分群とする．このとき合成

$$\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res} : H^r(G, M) \to H^r(G, M)$$

は $(G : H)$ 倍写像に等しい．

Proof. $m \in M$ に対して $\varphi_m : G \to M; g \mapsto gm$ とする．このとき準同型

$$M \to \mathrm{Ind}_H^G(M); m \mapsto \varphi_m, \quad \mathrm{Ind}_H^G(M) \to M; \varphi_m \mapsto \sum_{s\in S} s\varphi_m(s^{-1})$$

が定まる．これらの合成は

$$M \to \mathrm{Ind}_H^G(M) \to M; m \mapsto \varphi_m \mapsto \sum_{s\in S} s\varphi_m(s^{-1}) = \sum_{s\in S} s \cdot s^{-1} m = m \sum_{s\in S} = (G : H)m$$

である．従ってそれらから誘導されるコホモロジーの間の準同型

$$H^r(G, M) \to H^r(G, \mathrm{Ind}_H^G(M)) \to H^r(G, M)$$

も $(G : H)$ 倍写像でなければならない． □

Corollary 1.37

$(G : 1) = m$ ならば, 全ての $r > 0$ に対して $mH^r(G, M) = 0$ である．つまり $r > 0$ に対して $H^r(G, M)$ の位数は $\#G$ の約数である．

Proof. Proposition 1.36 より

$$H^r(G,M) \xrightarrow{\text{Res}} H^r(\{1\},M) \xrightarrow{\text{Cor}} H^r(G,M)$$

は m 倍写像に一致するが, $H^r(\{1\},M)=0$ なので $mH^r(G,M)=0$ でなければならない. □

Corollary 1.38

G が有限群, G 加群 M がアーベル群として有限生成ならば $H^r(G,M)$ は有限群である.

Proof. $H^r(G,M)$ は $\{\text{cocycle}\}/\{\text{coboundary}\}$ という形をしていたから, $H^r(G,M)$ がアーベル群として有限生成であることは明らかである. (cocycle は写像 $\varphi : G^{r+1} \to M$ の集合である条件を満たすものであるが, φ は G の (有限個の) 元の行き先で定まり, M が有限生成という仮定なので $\varphi(g)$ の行き先は有限個の元で生成される.) しかし Proposition 1.36 より位数は $\#G$ の約数ということなので有限群となる. □

Corollary 1.39

G を有限群, G_p を Sylow-p 部分群とする. 全ての G 加群 M に対して, 制限写像

$$\text{Res} : H^r(G,M) \to H^r(G_p,M)$$

は $H^r(G,M)$ の p 部分群上に制限すると単射となる.

Proof. $H_r(G,M)$ の p 部分群を $H_r(G,M)_p$ と書くことにする. このとき $\text{Res}(H^r(G,M)_p)=0$ ならば $H^r(G,M)_p=0$ を示せばよい. 合成

$$\text{Cor}\circ\text{Res} : H^r(G,M) \to H^r(G_p,M) \to H^r(G,M)$$

は $(G:G_p)$ 倍写像であった. 従って

$$(G:G_p)\cdot H^r(G,M)_p = \text{Cor}\circ\text{Res}(H^r(G,M)_p) = \text{Cor}(0) = 0$$

が成り立つ. しかし Sylow-p 部分群の定義から $(G:G_p)$ は p と互いに素である. 従って初めから $H^r(G,M)_p=0$ でなければならない. □

1.10 THE INFLATION-RESTRICTION EXACT SEQUENCE

Proposition 1.40

$H \lhd G$ とし, M を G 加群, $r>0$ とする. 全ての $0<i<r$ なる i に対して $H^i(H,M)=0$ ならば

$$0 \longrightarrow H^r(G/H,M^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^r(G,M) \xrightarrow{\text{Res}} H^r(H,M)$$

は完全列である.

Proof. 帰納法で示す. まず $r=1$ のときを示す. このとき仮定は無条件に真である. 従って単に

$$0 \longrightarrow H^1(G/H,M^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G,M) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(H,M)$$

が完全列であることを示せばよい. Inf が単射であることを示す. $[\varphi]\in H^1(G/H,M^H)$ に対して $\text{Inf}([\varphi])=0$, すなわちある $m\in M$ が存在して $\varphi(g)=gm-m$ と表せると仮定する. 今 φ は G/H 上の写像であるから, 任意の $h\in H$ に対して $gm-m=(hg)m-m$ でなければならない. 特に $g=1$ の場合を考えると $0=hm-m$, つまり $m\in M^H$ が分かる. 従ってある $m\in M^H$ が存在して $\varphi(g)=gm-m$ とかけているので, $[\varphi]=0$ である. ok. $\text{Ker}\,\text{Res}\supset\text{Im}\,\text{Inf}$ はすぐに分かる. $\text{Ker}\,\text{Res}\subset\text{Im}\,\text{Inf}$ を証明する. $[\varphi]\in\text{Ker}\,\text{Res}$ を取る. このとき定義からある $m_0\in M$ に対して $\varphi(g)=gm_0-m_0$ と書ける. このとき $\varphi'(g)-(gm_0-m_0)$ をすると $[\varphi']=[\varphi]$ in $H^1(G,M)$ である. 今 $\text{Res}([\varphi])=\text{Res}([\varphi'])=0$ なので, 任意の $h\in H$ に対して $\varphi'(h)=0$ である. 従って $[\varphi]=[\varphi']$ は G/H 上の関数から来ていなければならない. ok.

$r-1$ まで成り立つと仮定する. いつものように完全列

$$0\to M\to M_*\to M_\dagger\to 0$$

を考える．このとき $H^i(H, M_\dagger) \simeq H^{i+1}(H, M)$ $(i > 0)$ が成り立つのであった．$0 < i < r-1$ に対して $H^i(H, M_\dagger) = 0$ であるから, 帰納法の仮定により

$$0 \longrightarrow H^{r-1}(G/H, M_\dagger^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^{r-1}(G, M_\dagger) \xrightarrow{\text{Res}} H^{r-1}(H, M_\dagger)$$

は完全列である．これに対して $H^i(H, M_\dagger) \simeq H^{i+1}(H, M)$ を適用すれば求める完全列が得られる． □

Remark 1.41

専門家に向けて．Hochschild-Serre スペクトル系列とは

$$H^r(G/H, H^s(H, M)) \longrightarrow H^{r+s}(G, M)$$

のような形をしている．ここで作用 $G/H \curvearrowright H^s(H, M)$ は Example 1.34 の最後で述べたものである．スペクトル系列は $H^r(G, M)$ たちのフィルトレーションを与え，それぞれのフィルトレーションの商を G/H と H に関するコホモロジーで表現する．この事実から上の命題は従う．何の仮定も必要とせず，

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, M^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, M) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(H, M)^{G/H} \longrightarrow H^2(G/H, M^H) \longrightarrow H^2(G, M)^* \longrightarrow H^1(G/H, H^1(H, M))$$

という完全列が従う．ここで $H^2(G, M)^* := \mathrm{Ker}(\mathrm{Res} : H^2(G, M) \to H^2(H, M))$ である．

Example 1.42

$\Omega \supset L$ を K のガロア拡大とし, $H := G(\Omega/L)$ は $G := G(\Omega/K)$ の正規部分群である．Hilbert 90(Proposition 1.27) より $H^1(H, \Omega^\times) = 0$ であること, $(\Omega^\times)^H = L^\times$ であることから

$$0 \longrightarrow H^2(G/H, L^\times) \longrightarrow H^2(G, \Omega^\times) \longrightarrow H^2(H, \Omega^\times)$$

が成り立つ．

1.11 CUP-PRODUCTS

Lemma 1.43

完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M_* \longrightarrow M_\dagger \longrightarrow 0$$

は分裂する，すなわちアーベル群としての同型 $M_* \simeq M \oplus M_\dagger$ が成り立つ．

Proof. 定義の確認をしておく．M_0 は M を単にアーベル群としてみたもの, $M_* = \mathrm{Ind}^G(M_0), M_\dagger = M/M_*$ であった．さらに $\iota : M \hookrightarrow M_*$ は $m \in M$ に対して $\varphi_m(g) = gm$ なる φ_m を対応させる写像であった．$s : M_* \to M$ を, $s(\varphi) = \varphi(1_G)$ という写像とする．このとき $s \circ \iota = \mathrm{id}$ を示せばよい．

$$s \circ \iota(m) = s(\varphi_m) = \varphi_m(1_G) = m \cdot 1_G = m$$

となり ok. □

G を群とする．G 加群 M, N に対して $M \otimes N = M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ を以下の演算で G 加群と見なす．

$$g(m \otimes n) := gm \otimes gn$$

Proposition 1.44

全ての整数 $r, s \geq 0$ と G 加群 M, N に対して，双加法 pairing

$$H^r(G, M) \times H^s(G, N) \to H^{r+s}(G, M \otimes N); (m, n) \mapsto m \cup n$$

で以下を満たすものがただ一つ存在する．

(a) $H^r(G, M) \times H^s(G, N)$ と $H^{r+s}(G, M \otimes N)$ を (M, N) についての双反変関手と見なしたとき，この写像は関手

の間の射になっている.

(b) $r = s = 0$ に対しては pairing は以下になっている.

$$M^G \otimes N^G \to (M \otimes N)^G; (m, n) \mapsto m \otimes n$$

(c) $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ が完全列ならば $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が完全列であるとき,

$$m'' \in H^r(G, M''),\ n \in H^s(G, N), \quad (\delta m'') \cup n = \delta(m'' \cup n).$$

ここで δ は連結準同型 $H^r(G, M'') \to H^{r+1}(G, M')$ または $H^{r+s}(G, M'' \otimes N) \to H^{r+s+1}(G, M' \otimes N)$ である.

(d) $0 \to M \otimes N' \to M \otimes N \otimes M \otimes N'' \to 0$ が完全列ならば $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ が完全列であるとき,

$$m \in H^r(G, M),\ n'' \in H^s(G, N''), \quad m \cup \delta n'' = (-1)^r \delta(m \cup n'').$$

Proof. 一意性について, Lemma 1.43 の完全列が分裂することから $\otimes_{\mathbb{Z}}$ を取っても完全性は不変であり, さらに dimension shifting を用いて示すことができるらしい. 存在について, 以下のように定義された pairing が, 求める性質を満たす. $m \in H^r(G, M)$ と $n \in H^s(G, N)$ を非斉次座標の代表元とする. このとき $m \cup n$ は以下の cocycle で代表される.

$$(g_1, \ldots, g_{r+s}) \mapsto \varphi(g_1, \ldots, g_r) \otimes g_1 \cdots g_r \psi(g_{r+1}, \ldots, g_{r+s}).$$

詳細を書くにはページ数がかかりすぎるが, 証明は難しくないらしい. 示すことが多すぎて諦め. □

Proposition 1.45

以下が成り立つ.

1. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \quad (\text{in } H^{r+s+t}(G, M \otimes N \otimes P))$.
2. $x \in H^r(G, M),\ y \in H^s(G, N) \Rightarrow x \cup y = (-1)^{rs} y \cup x$.
3. $\mathrm{Res}(x \cup y) = \mathrm{Res}(x) \cup \mathrm{Res}(y)$.
4. $\mathrm{Cor}(x \cup \mathrm{Res}\, y) = \mathrm{Cor}(x) \cup y$.

Proof. 全ての場合について, 0 次コホモロジーの場合で証明し, dimension shifting を用いて一般の場合で示す, という流れ. これも証明が省略されており示すことが多いので諦め. □

pairing

$$M \times N \to P; (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \tag{3}$$

で, 任意の $g \in G$ について $g \langle x, y \rangle = \langle gx, gy \rangle$ を満たすものを考える. テンソル積の普遍性から, この pairing は G 加群の準同型 $M \otimes N \to P$ を誘導する. 従ってコホモロジーの間の準同型

$$H^r(G, M \otimes N) \to H^r(G, P)$$

が誘導される. この準同型とカップ積との合成を考えることで pairing

$$H^r(G, M) \to H^s(G, N) \to H^{r+s}(G, P)$$

が定義できるが, これを pairing(3) で定義されるカップ積 pairing と呼ぶ.

2 Homology

2.1 DEFINITION OF THE HOMOLOGY GROUPS

G 加群 M に対して

参考文献

[1] J. S. Milne, Class Field Theory.pdf.