January 16, 2025

1 Wprowadzenie

Opisany tutaj zostanie nasz projekt, którego celem było zasymulowanie układu Lorenza i Rosslera. Sama symulacje można zobaczyć tutaj. Kod można zobaczyć tutaj.

2 Co to chaos deterministyczny?

Zanim przedstawimy oba układy zajmijmy sie najpierw pytaniem czym jest chaos deterministyczny?
Chaos deterministyczny jest określeniem dla układów, które charakteryzuja sie dwoma głównymi cechami:

- Ruch w tym układzie jest jednoznacznie opisywalny (czyli z danego stanu jednoznacznie można określić do jakiego nastepnego stanu przejdzie)
- Mała zmiana w poczatkowym stanie układu skutkuje bardzo różniacymi sie wynikami po stosunkowo krótkim czasie.
- Układ nie jest opisywalny przez równania linowe
- Układ nigdy nie staje sie cykliczny

Aby lepiej zrozumieć co sie dzieje z układem przy różnym doborze stałych, tworzone sa **diagramy bifyrkacyjne**. Diagram taki przedstawia jak zachowuje sie wybrany układ przy uzmiennieniu jednej stałej. (Diagram bifurkacyjny jest widoczny niżej w sekcjach Układ Lorenza i Układ Rosslera.)

3 Ważne informacje na temat tych układów

W układzie Lorenza i układzie Rosslera warto zauważyć brak zależności od czasu. Aby znaleźć kolejny stan tych układów wystarczy nam tylko wiedza o ich teraźniejszej pozycji. Oznacza to, że jeżeli dwie czastki poruszaja sie po różnych trajektoriach, to te trajektorie nigdy sie nie przetna, inaczej system nie był by deterministyczny.

Oba te układy zawieraja **dziwne atraktory**. Różnia sie one od zwykłych atraktorów tym, że maja strukture fraktalowa. Dziwne atraktory charakteryzuja sie tym, że czasteczki poruszajace sie po tym atraktorze, po jakiejś ilości czasu znajda sie dowolnie daleko od siebie, a po jakiejś innej ilości czasu znajda sie dowolnie blisko siebie. Gdy układ zaweira dziwny atraktor, to jest to układ chaotyczny.

4 Aproksymacja układów

5 Układ Lorenza

5.1 Co przedstawia układ Lorenza?

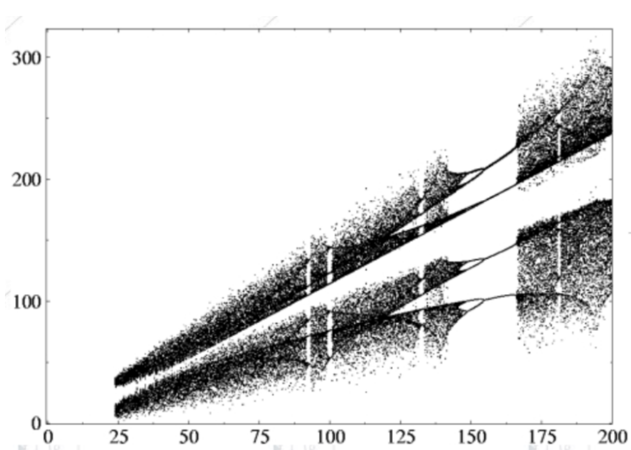
Układ Lorenza jest uproszczeniem opisu konwekcji atmosferycznej. Przedstawia on zmiane trzech zmiennych na płaszczyznach (x, y, z), w dwuwymiarowej warstwie płynu jednorodnie podgrzewanej od dołu i jednorodnie schładzanej od góry (gdzie x jest proporcjonalne do predkości konwekcji, y jest proporcjonalne do poziomej zmiany temperatury, a z jest proporcjonalne do pionowej zmiany temperatury). Zmiana tych zmiennych opisana jest przez układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Gdzie σ, ρ, β to stałe dla danego układu wieksze od 0. σ jest proporcjonalna do liczby Prandtla, ρ jest proporcjonalne do liczby Rayleigha, a β to stosunek rozpraszania ciepła do dyfuzji pedu.

5.2 Ciekawe parametry

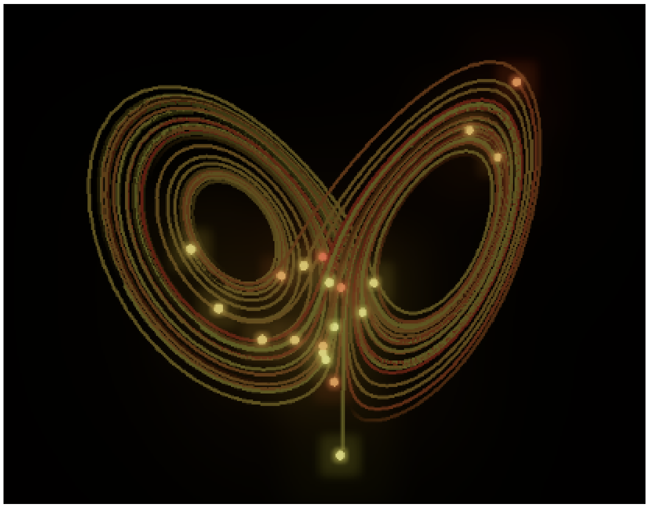
Nie dla każdych parametrów układ charakteryzuje sie chaosem. Dla stałych $\sigma = 10$ i $\beta = 8$ otrzymujemy diagram bifurkacji wygladajacy tak:



Z tego wynika, że aby uzyskać układ chaotyczny jedna z możliwych kombinacji stałych jest:

$$\begin{cases} \sigma = 10 \\ \rho = 28 \\ \beta = 8 \end{cases}$$

Otrzymujemy wtedy powrzechnie znany wzór wygladajacy jak motyl.



Dla $\rho < 0$ otrzymujemy układ z atraktorem w kształcie punktu, który znajduje sie w punkcie $(0, 0, 0)$ układu.

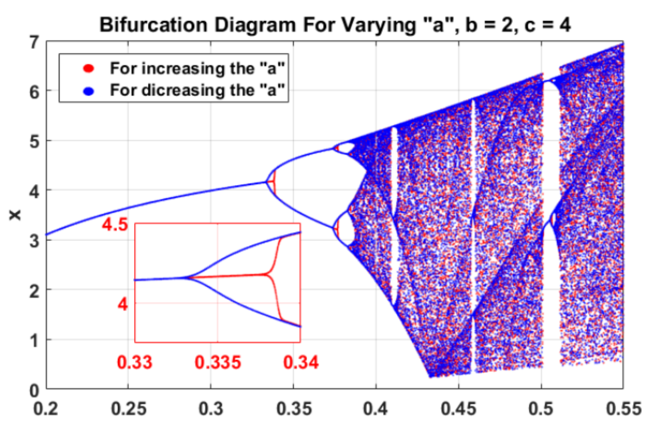
Dla $\rho = 160$ otrzymujemy atraktor wygladajacy inaczej niż punkt, ale dalej nie jest chaotyczny, ponieważ jest on cykliczny.

6 Układ Rosslera

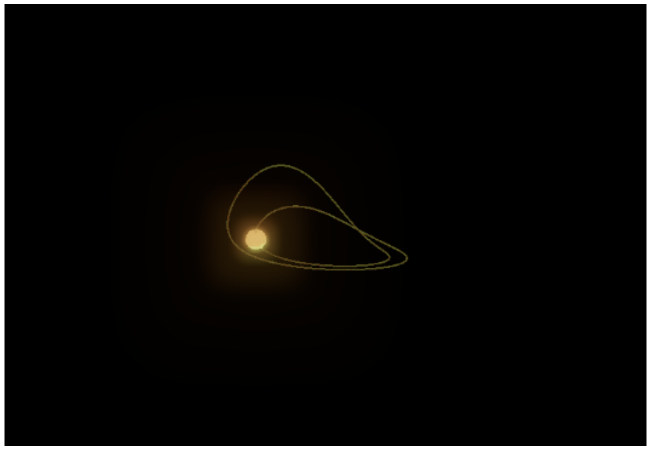
Układ Rosslera jest kolejnym przykładem układu pokazujacego chaotyczna dynamike. Jest on ciekawym przykładem, poniważ wykazuje podobne właściwości co układ Lorenza, natomiast jest o wiele łatwiejszy do analizy.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

Diagram bifurkacji układu Rosslera ze wzgledu na a:



Z powyższego diagramu wynika, że przy $a = 0.35$ otrzymamy układ charakteryzujacy sie podwójna orbita:



Natomiast dla $a = 0.45$ otrzymamy dziwny atraktor: