

Wieloboki Voronoi

porównanie metod konstrukcji

Sylwia Marek
Ryszard Pręcikowski

Opis problemu

- Dla zadanego zbioru n punktów diagram Voronoi jest to podział płaszczyzny na n obszarów, takich, że w danym obszarze każdy z jego punktów jest najbliżej określonego punktu P niż pozostałych $n-1$ punktów. Do rozwiązania problemu przyjęto metrykę euklidesową.

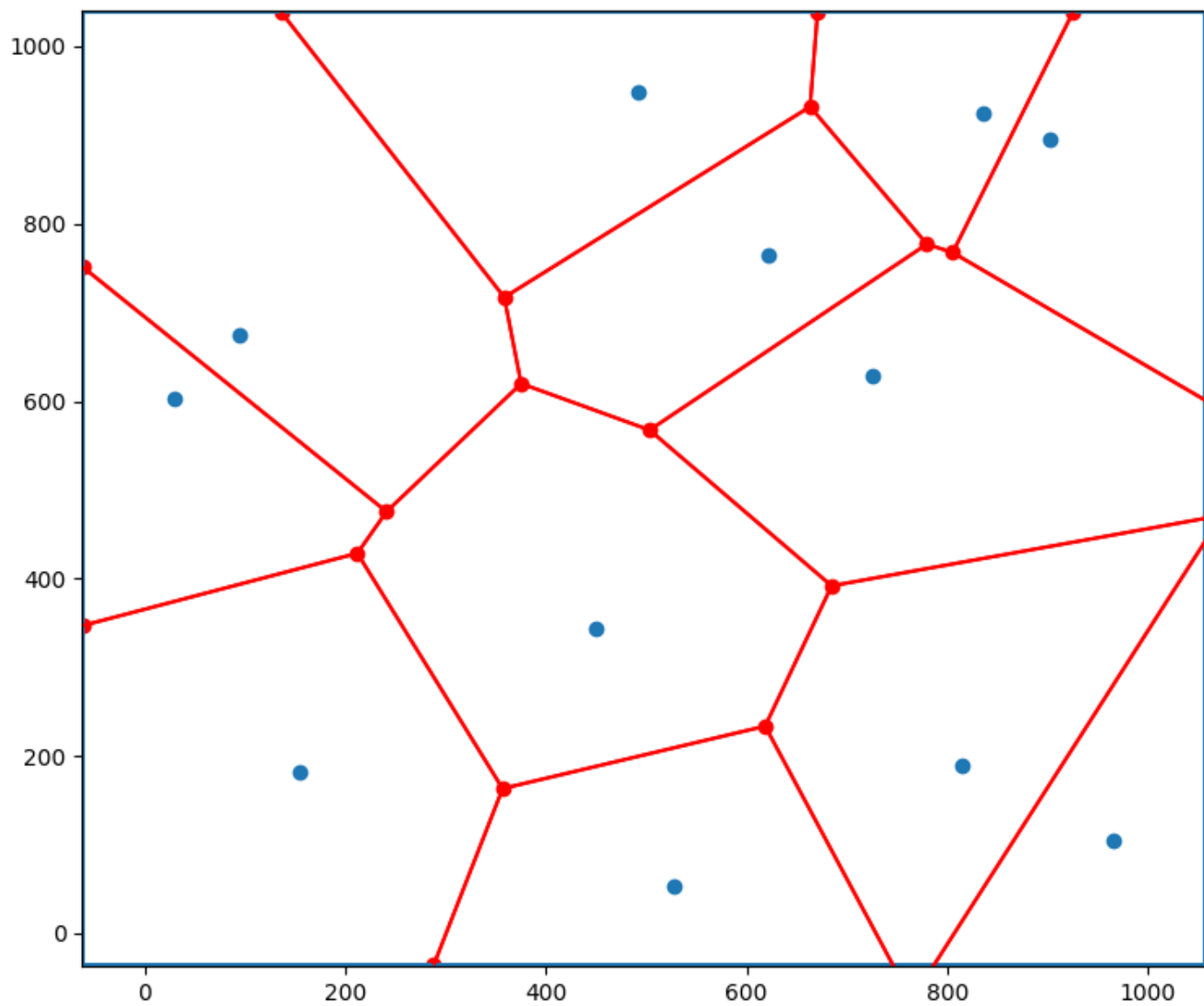
Algorytm Fortune'a

Wstęp

- Algorytm Fortune'a opiera się na algorytmie zmiatania, działa w czasie $O(n \log n)$, oraz używa $O(n)$ pamięci. Został zaprezentowany przez Stevena Fortunę w 1986 roku.
- Algorytm działa w sposób przedstawiony w książce Marka de Berga – „Computational Geometry Algorithms and Applications”.

Wynik działania algorytmu

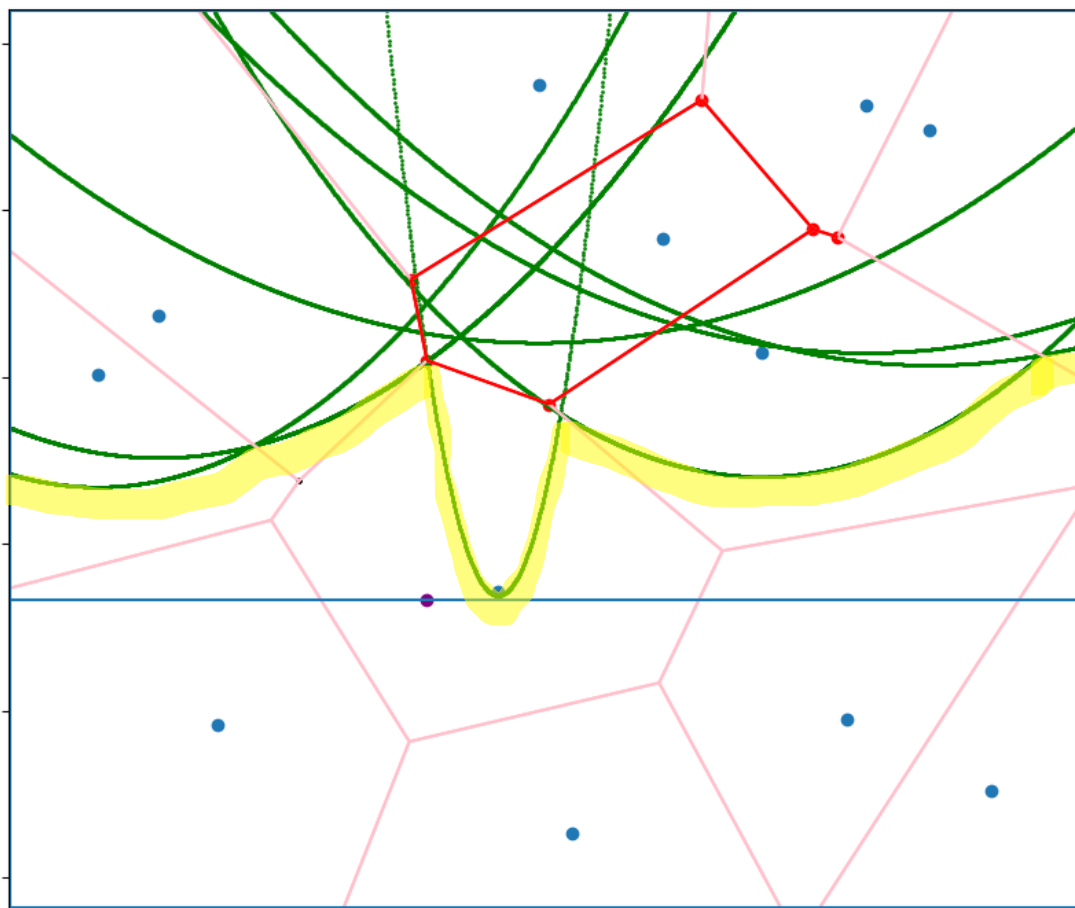
- Zbiór wierzchołków diagramu Voronoi,
- Lista krawędzi diagramu,
- Do każdego punktu wejściowego przyporządkowywana jest jedna krawędź diagramu, a każdej krawędzi jej następnik oraz poprzednik. Dzięki takiemu rozwiązaniu otrzymujemy podwójną łączoną listę, z której możemy odczytać komórki Voronoi.



Struktury danych

- Struktura zdarzeń:
 - Kolejka priorytetowa zawierająca zdarzenia punktowe oraz kołowe, zwracająca punkty w kolejności malejącej.
 - Każde zdarzenie wyznacza współrzędną y miotły.
- Struktura stanu:
 - Nazywana linią brzegową.
 - Składa się z parabol.
 - Reprezentowana jest przez zrównoważone drzewo poszukiwań binarnych.

Wizualizacja struktur danych



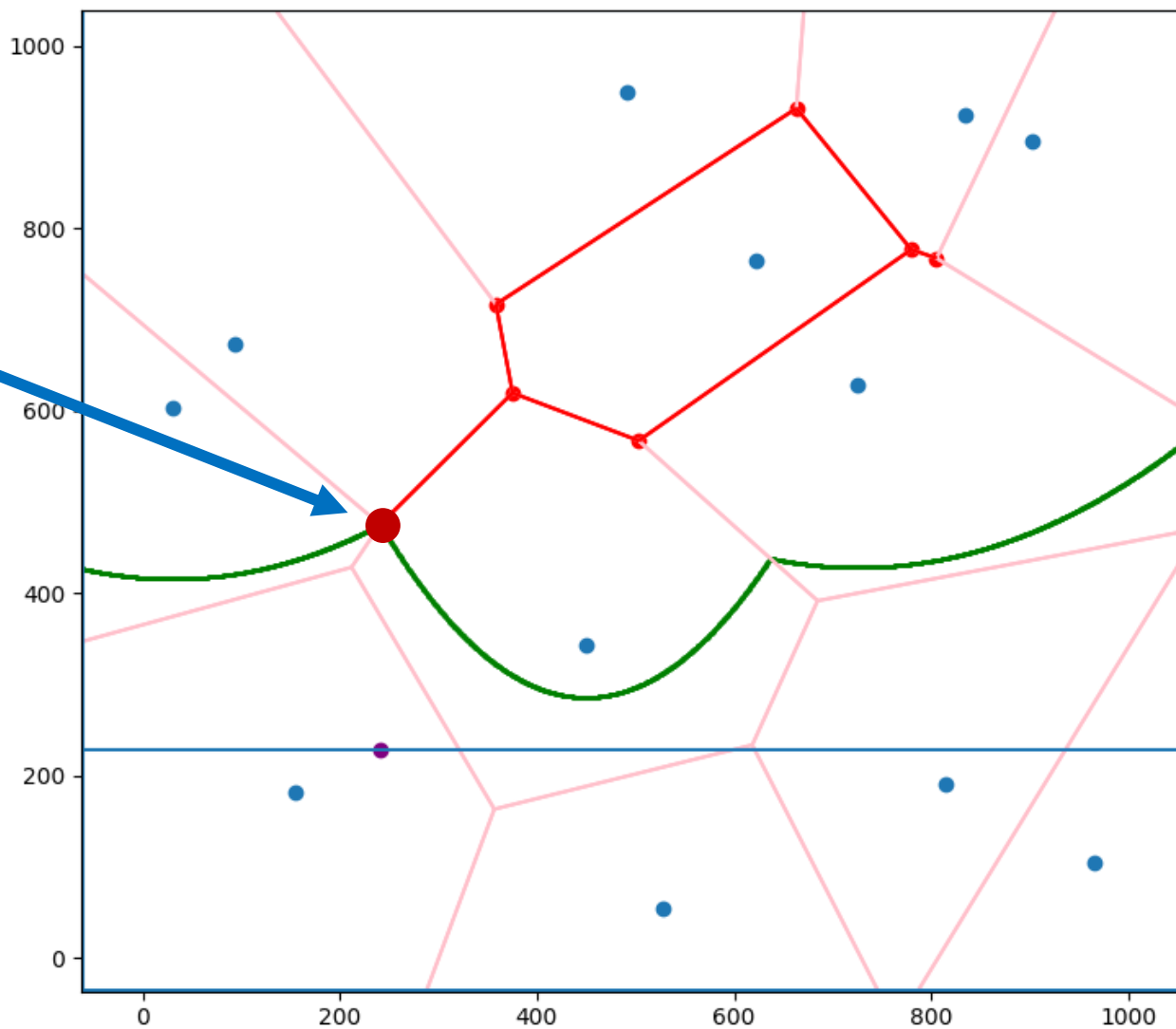
Zielone parabole przedstawiają strukturę stanu, część zaznaczona na żółto to linia brzegowa.

Miotła to niebieska pozioma linia.

Na czerwono zostały zaznaczone już ustalone krawędzie i wierzchołki diagramu Voronoi.

Na różowo zaznaczony jest docelowy wygląd diagramu.

Punkt załamania generujący nowy wierzchołek diagramu Voronoi



Opis algorytmu

1. Inicjujemy strukturę zdarzeń zawierającą wszystkie punkty wejściowego zbioru danych.
2. Inicjujemy pustą strukturę stanu.
3. Dopóki w kolejce są jakieś zdarzenia:
 - Jeśli zdarzenie należy do zbioru wejściowego:
 - Mamy do czynienia ze zdarzeniem punktowym
 - Jeśli zdarzenie nie należy do zbioru wejściowego:
 - Mamy do czynienia ze zdarzeniem kołowym

Zdarzenie punktowe

- Odszukujemy łuk znajdujący się nad danym punktem.
- Powstaje nowy łuk, a parabola nad danym punktem zostaje podzielona na dwie nowe.
- Tworzy się nowa półprosta.
- Należy sprawdzić, czy nie powstaje nowe zdarzenie kołowe

Odszukiwanie łuku nad punktem

- Przeszukujemy strukturę stanu, aż znajdziemy parabolę, której „widoczna” część łuku znajduje się nad punktem.
- Aby to zrobić sprawdzamy przecięcia z sąsiednimi parabolami i zależnie od wyniku idziemy w lewo lub w prawo w głąb drzewa.
- Jeśli punkt jest na lewo od lewego przecięcia to idziemy w lewo, a jeśli na prawo od prawego to idziemy w prawo, jeśli jest pomiędzy to znaleźliśmy łuk, który nas interesuje.

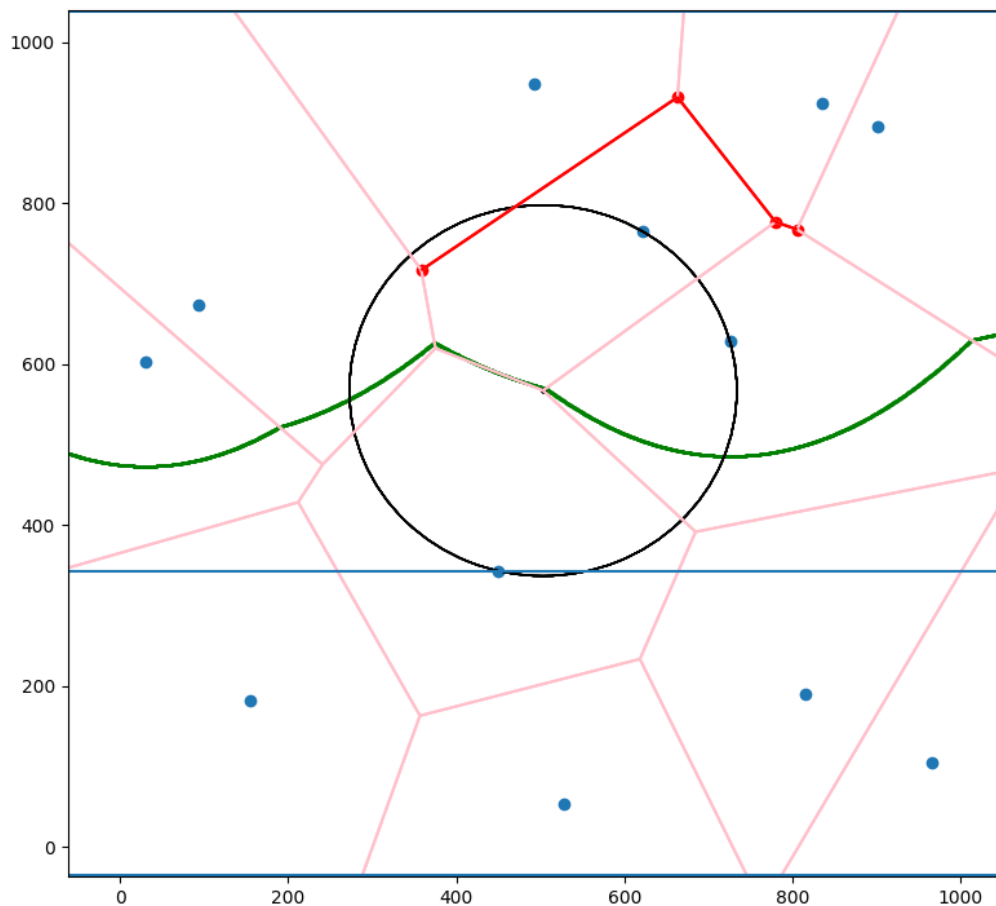
Dzielenie paraboli

- Tworzymy trzy nowe parabole, środkową w punkcie dzielącym oraz lewą i prawą zależne od oryginalnego punktu parabol.
- Podmieniamy oryginalną parabolę na środkową.
- Wstawiamy do struktury stanu lewą i prawą parabolę w następujący sposób:
 - Lewą przed środkową parabolą,
 - Prawą po środkowej parabol.

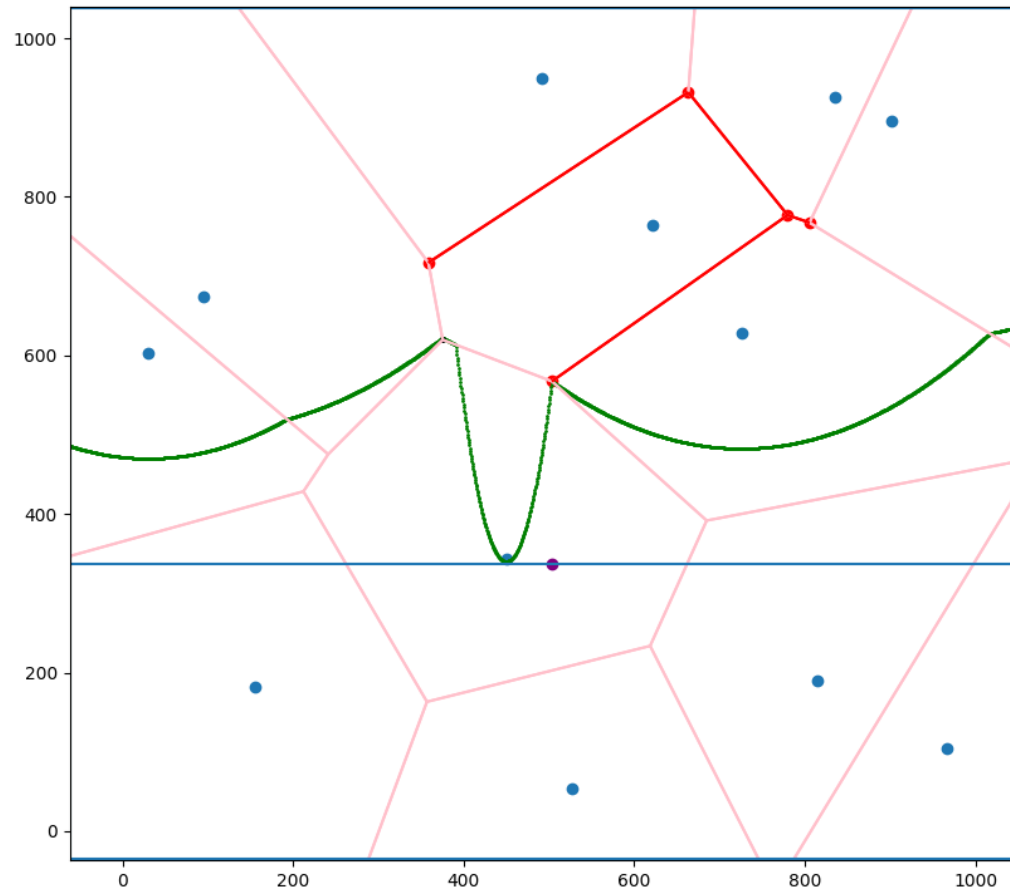
Sprawdzenie czy powstaje zdarzenie kołowe

- Jeśli poprzednik lewej, lub następnik prawej paraboli istnieje, to punkty je tworzące mogą potencjalnie utworzyć zdarzenie kołowe.
- Obliczamy środek oraz promień okręgu wyznaczonego przez 3 punkty.
- Jeśli najniższy punkt okręgu jest poniżej miotły, oraz punkty je tworzące są ustawione zgodnie z ruchem wskazówek zegara to dodajemy zdarzenie kołowe do struktury zdarzeń.

Koło powstałe po zdarzeniu punktowym



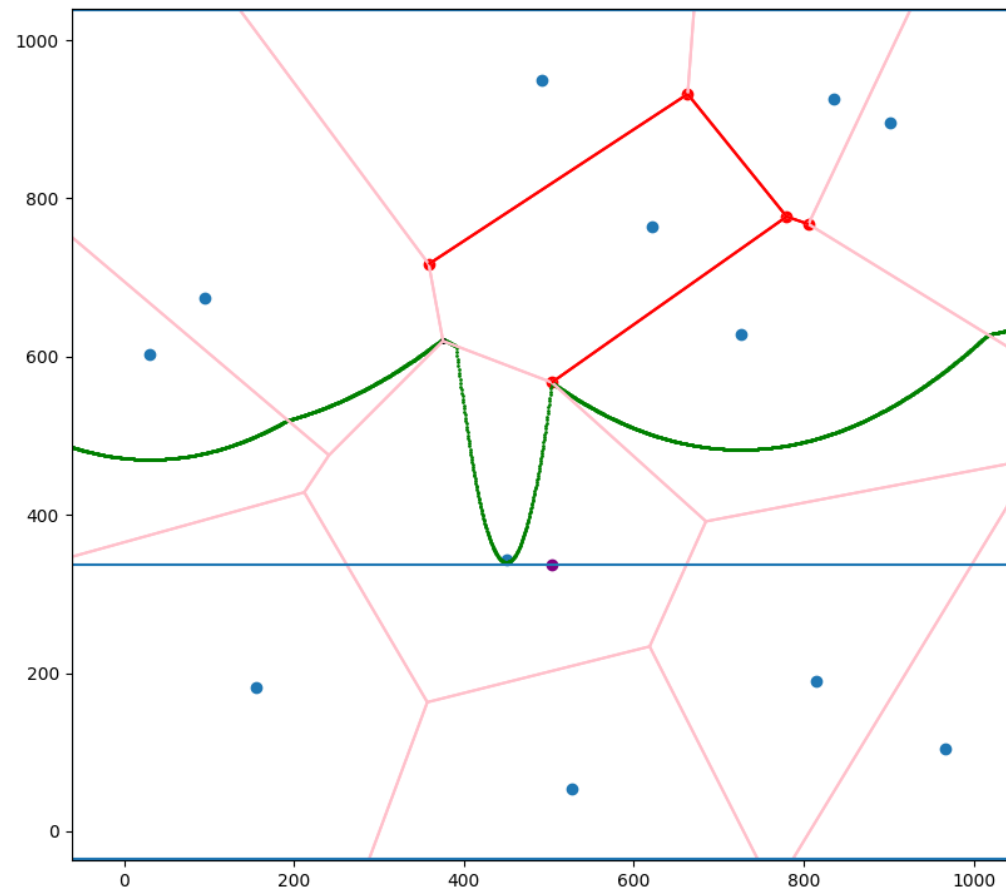
Parabola powstała po zdarzeniu punktowym



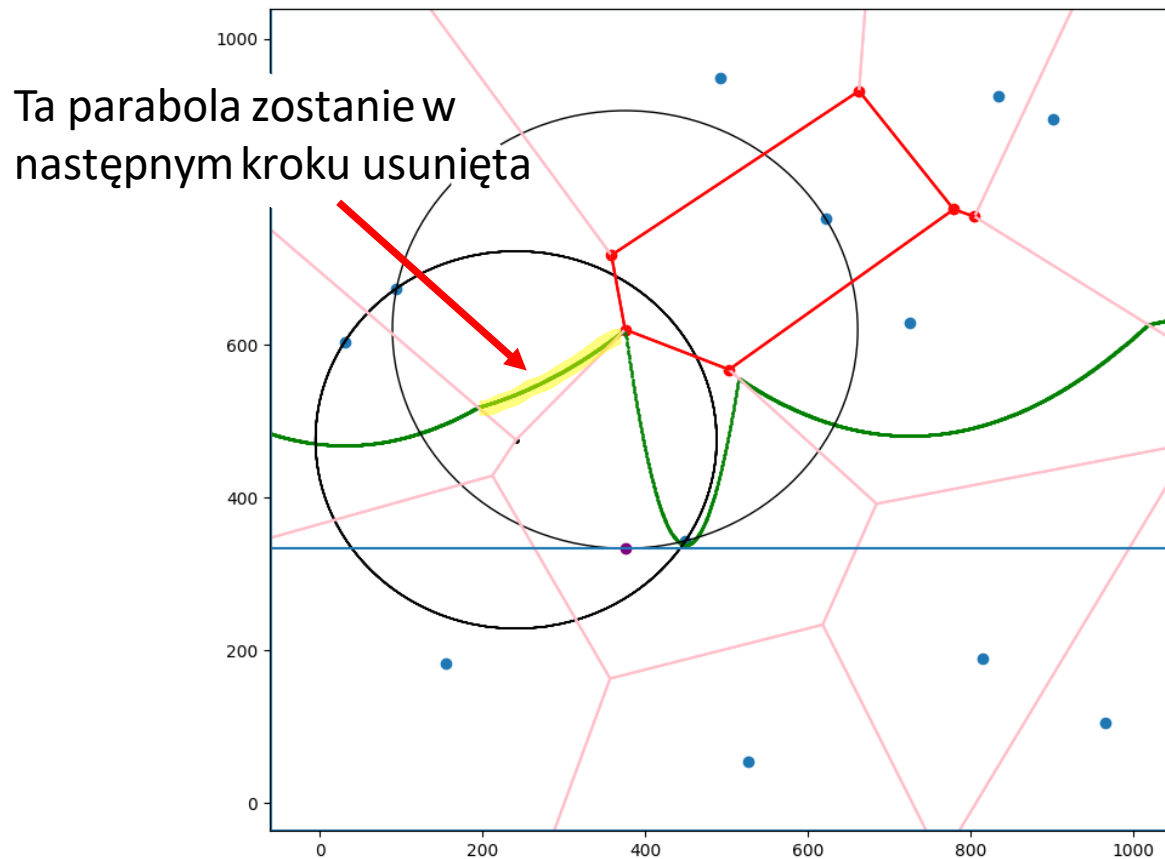
Zdarzenie kołowe

- Środek koła wyznacza nowy wierzchołek diagramu.
- Usuwamy zanikającą parabolę ze struktury stanu.
- Zakańczamy półprostą, tworząc krawędź diagramu.
- Sprawdzamy, czy po usunięciu paraboli nie stworzyły się nowe zdarzenia kołowe z:
 - Poprzedni lewego, lewego i prawego łuku,
 - Lewego, prawego i następnika prawego łuku.

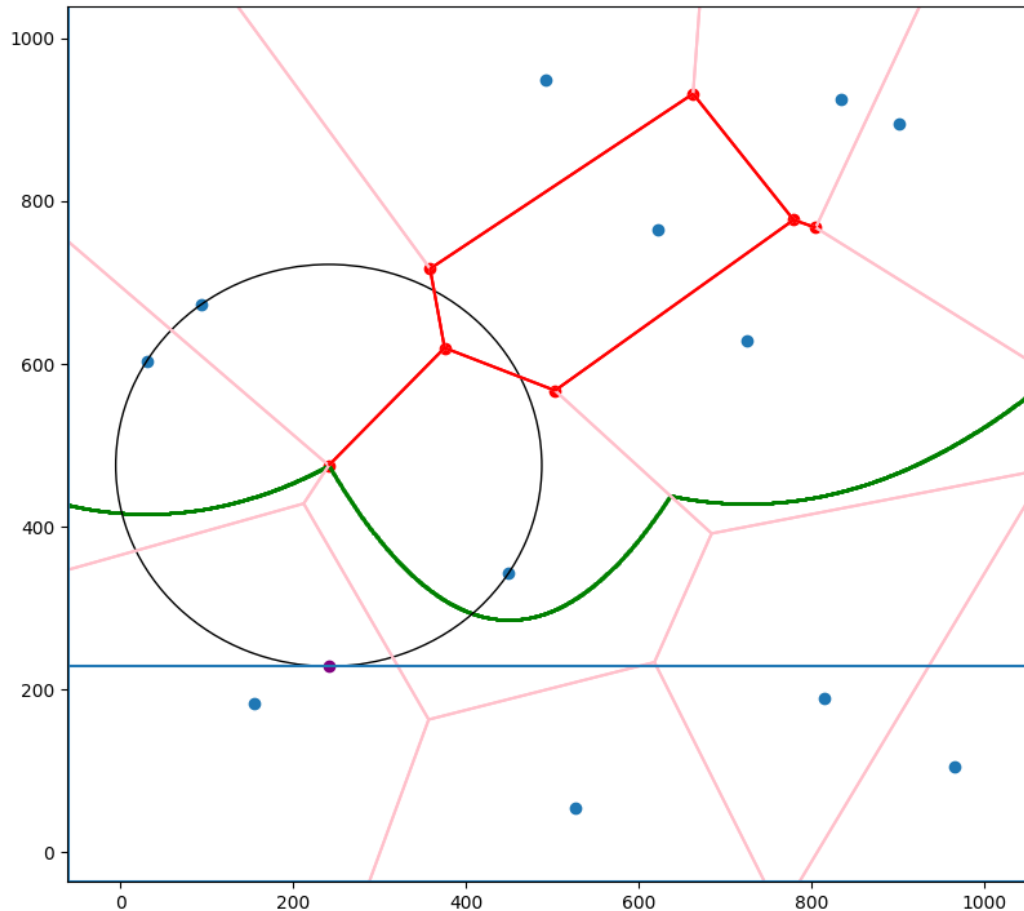
Sytuacja przed zdarzeniem



Zdarzenie wykryło kolejne zdarzenie kołowe



Zdarzenie kołowe powstałe po
usunięciu paraboli.

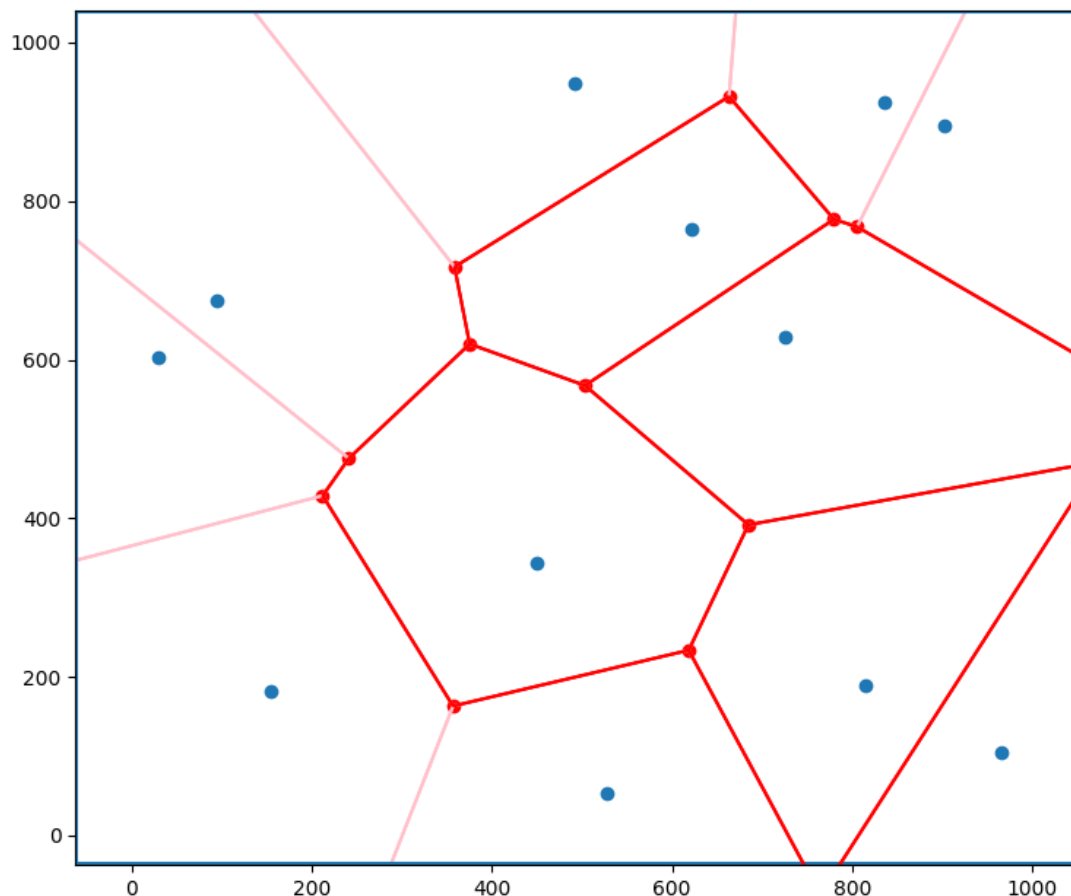


Zakończenie półprostych

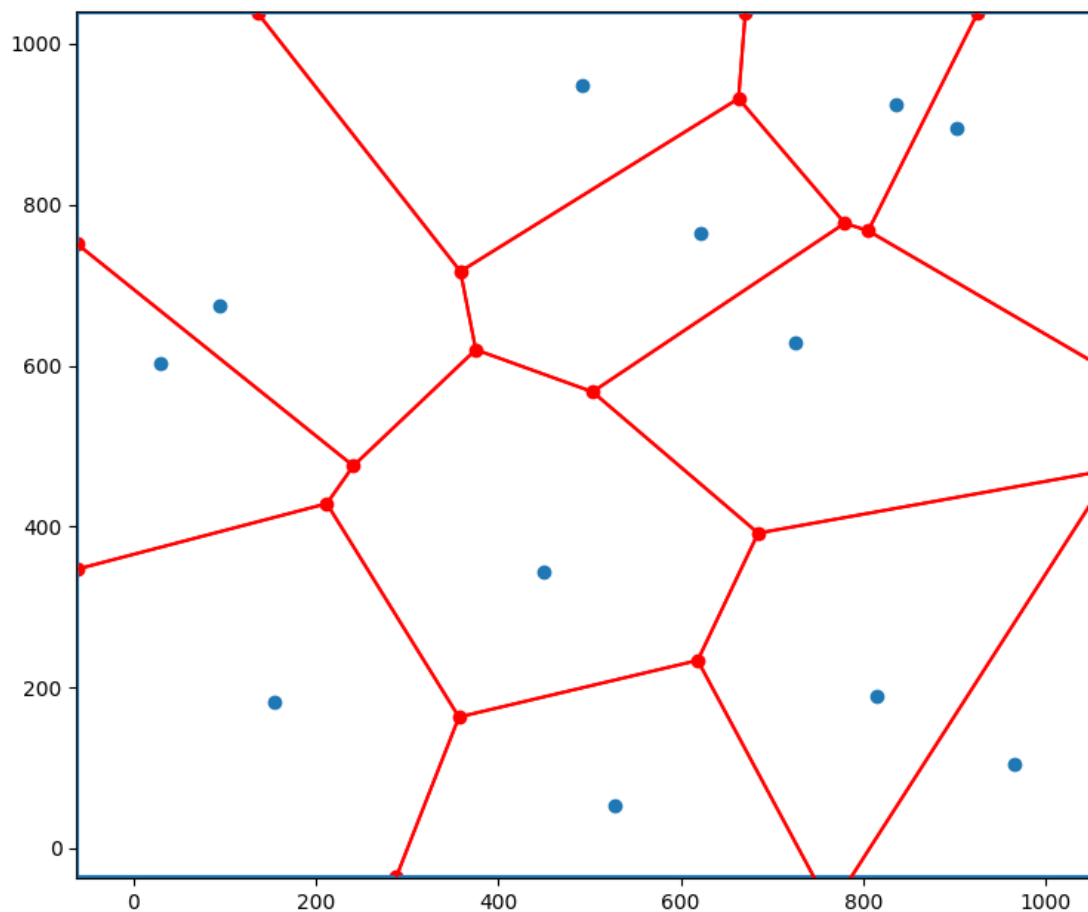
- Parabole, które zostały w strukturze stanu po opróżnieniu struktury zdarzeń zawierają informacje o niedokończonych półprostych.
- Dla każdej półprostej wyznaczamy dwa punkty oryginalnego zestawu danych, między którymi powinna ona prowadzić. Następnie obliczamy środek odcinka je łączącego.
- Znając współrzędne dwóch punktów wyznaczających prostą, możemy obliczyć jej równanie, a następnie współrzędne punktu przecięcia z obramowaniem.

Przed zakończeniem półprostych

Różowe odcinki pokazują, gdzie powinny się pojawić krawędzie diagramu.



Po zakończeniu półprostych



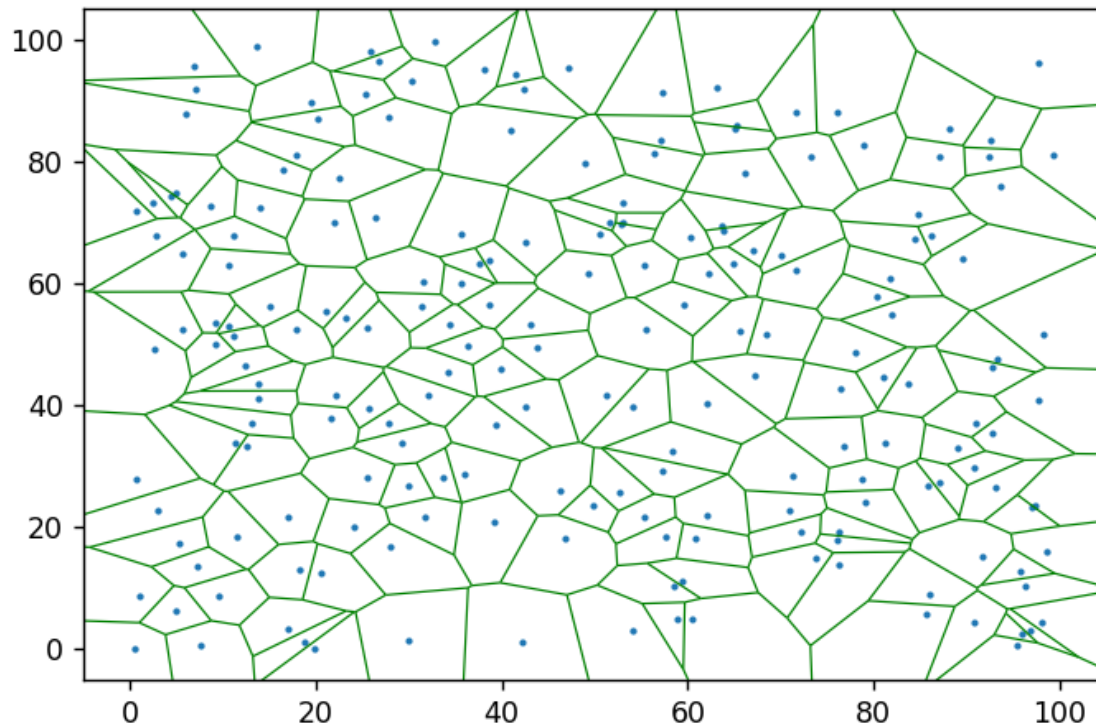
Algorytm Bowyer'a - Watsona

Wstęp

- Triangulacja Delaunay'a jest grafem dualnym diagramu Voronoi.
- Znając triangulację chmury punktów, możliwe jest wyznaczenie diagramu Voronoi.

Wynik działania algorytmu

- Zbiór wierzchołków diagramu Voronoi,
- Zbiór krawędzi diagramu (odcinki + półproste)

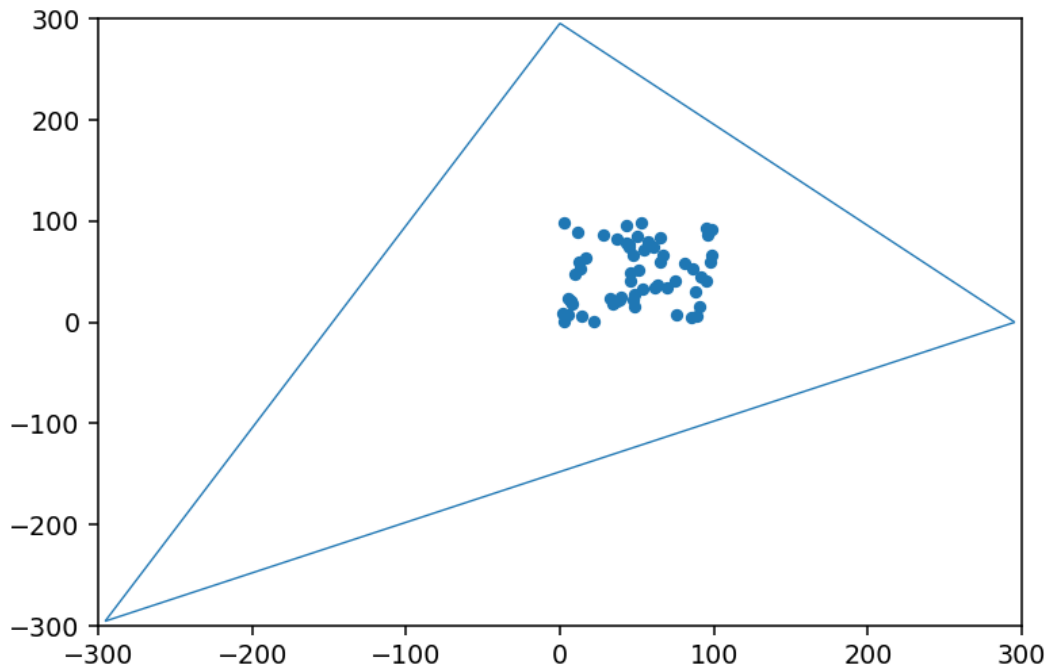


Triangulacja

- Każdy z trójkątów triangulacji reprezentowany jest poprzez tworzące go wierzchołki oraz sąsiednie trójkąty
- Zasadniczo algorytm Bowyer'a – Watsona polega na utworzeniu dodatkowego trójkąta, zawierającego we wnętrzu pozostałe punkty. Następnie dokłada się po 1 punkcie, odnajdując trójkąt go zawierający, odpowiednio dzieli się trójkąty i zamienia nielegalne krawędzie. Na koniec pozbywa się dodanego na początku trójkąta, w rezultacie otrzymując szukaną triangulację.

Kolejne kroki

1. Utworzenie „super-trójkąta” poprzez dodanie do wejściowego zbioru trzech punktów. Jest to początkowa triangulacja.



Kolejne kroki

2.

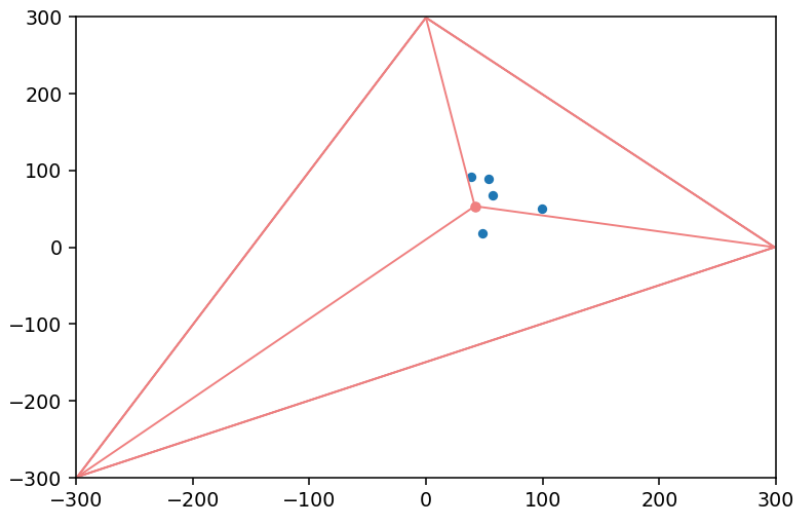
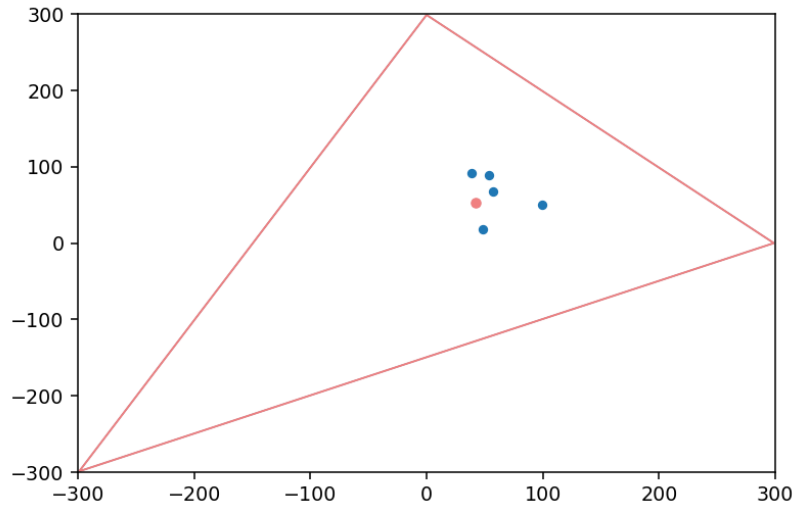
Wstawianie punktu do aktualnej triangulacji.

Odszukujemy trójkąt zawierający dany punkt P:

- Jeżeli punkt leży wewnątrz, to dzielimy trójkąt na 3, łącząc każdy z jego wierzchołków z P
- Jeżeli punkt leży na boku trójkąta, to dzielimy trójkąty sąsiadujące względem tego boku na 2, łącząc ich wierzchołki nieleżące na tym boku z punktem P

Kolejne kroki

- Przykładowe wstawienie punktu leżącego wewnątrz trójkąta i jego podział

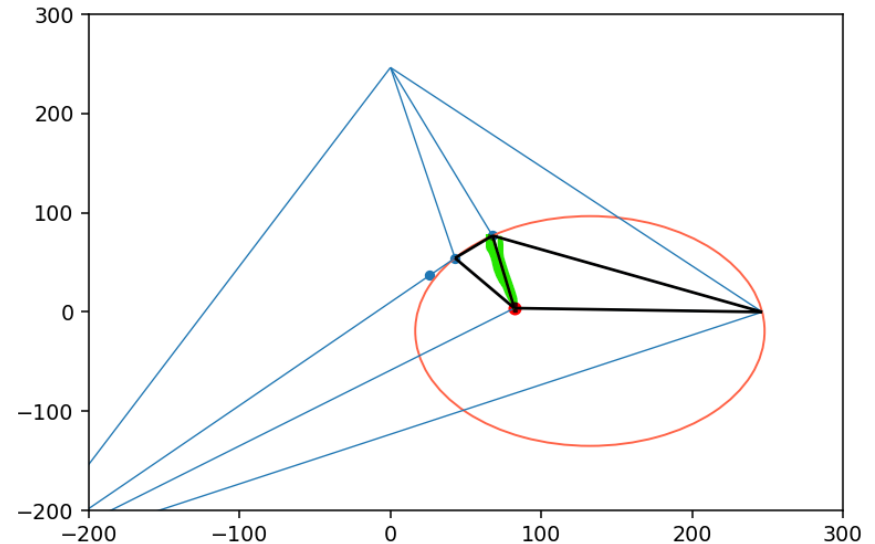
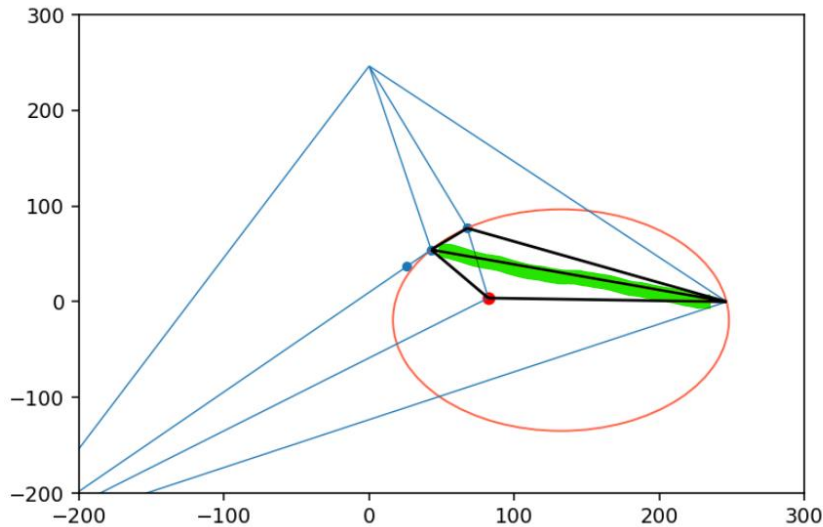


Kolejne kroki

3. Legalizacja krawędzi

- Po wstawieniu punktu należy przejść do sprawdzenia, czy nie pojawiła się krawędź nielegalna, a jeśli tak, dokonuje się zmiany przekątnej
- Mając dany trójkąt T i punkt P sprawdzenie legalności odbywa się poprzez stwierdzenie, czy P leży wewnątrz okręgu opisanego na T , a jeżeli tak – zmieniamy przekątną

Kolejne kroki

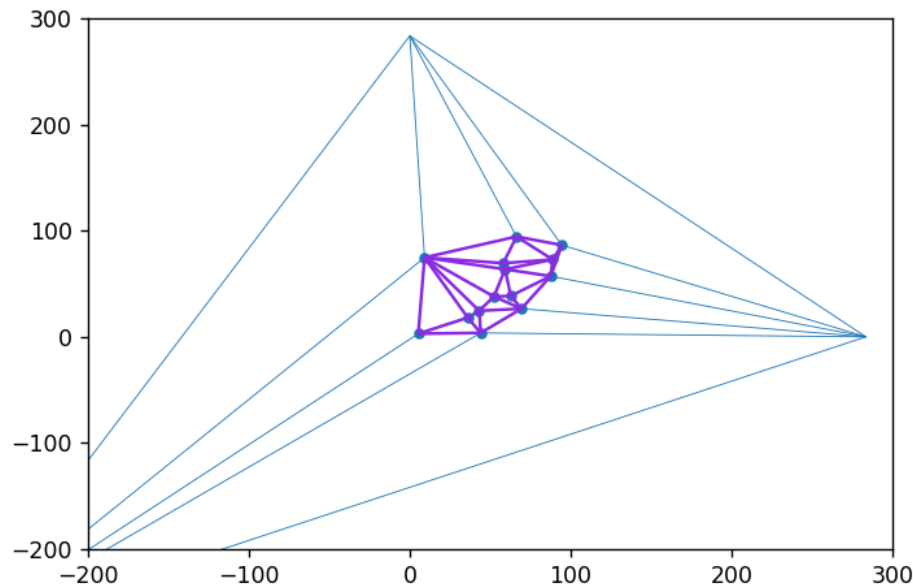


- Przykład nielegalnej krawędzi (na zielono)
- Ponieważ punkt P (na czerwono) leży wewnątrz okręgu opisanego na górnym czarnym trójkącie, to zaznaczona krawędź jest nielegalna
- Następuje legalizacja - zmiana przekątnej (rysunek prawy)

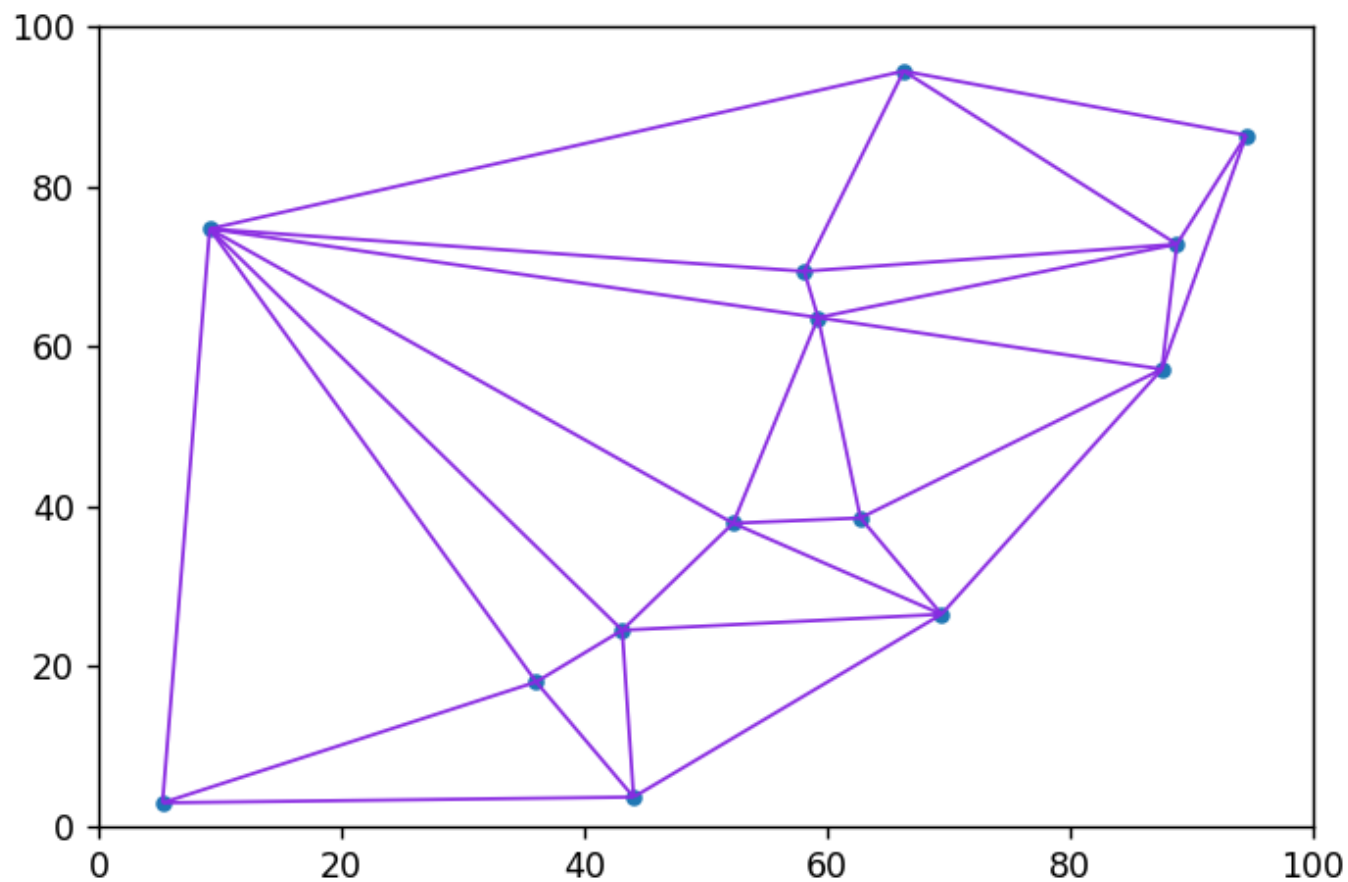
Kolejne kroki

4.

Po wstawieniu wszystkich punktów pozbywamy się z triangulacji trójkątów zawierających sztucznie dodane na początku wierzchołki „super-trójkąta”.



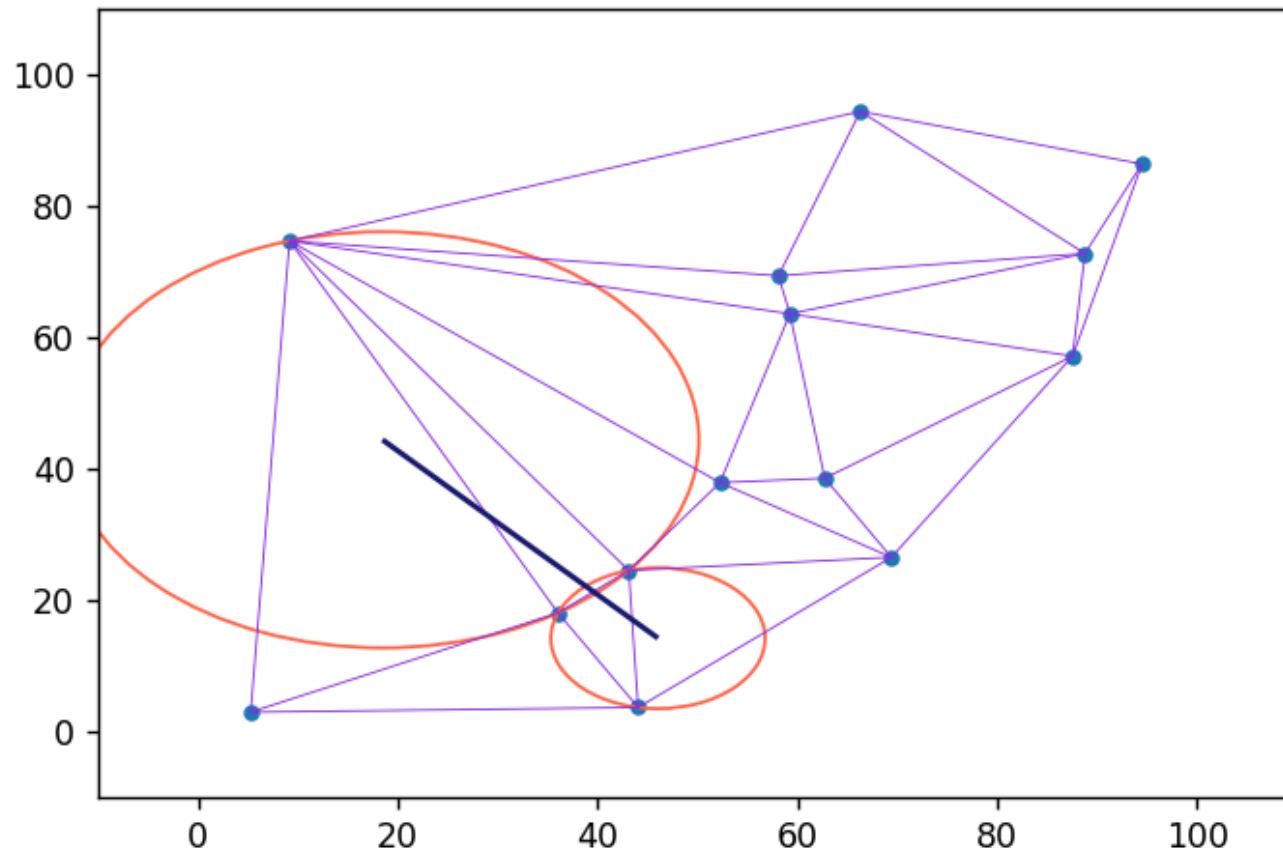
Gotowa triangulacja



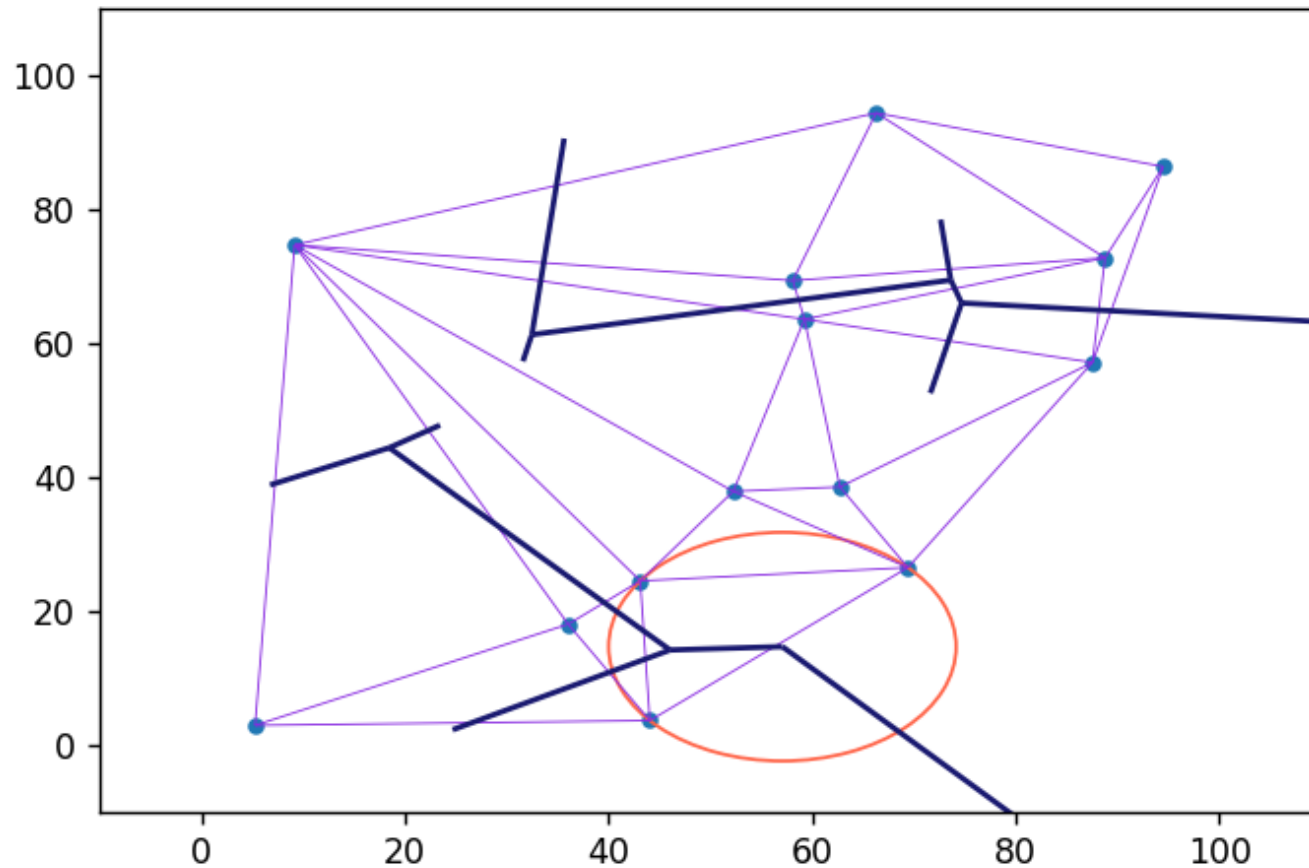
Wyznaczenie diagramu Voronoi na podstawie triangulacji

- Mając wyznaczone uprzednio trójkąty jesteśmy w stanie dokonać podziału płaszczyzny na wieloboki Voronoi
- Dla każdego z trójkątów wyznaczamy środek okręgu na nim opisanego S – są to tzw. wierzchołki Voronoi
- Łączymy wierzchołki S dla każdej pary sąsiadujących trójkątów, a jeżeli nie ma sąsiada, to tworzymy półprostą o początku w środku okręgu – w ten sposób otrzymujemy szukany diagram Voronoi dla danego zbioru punktów

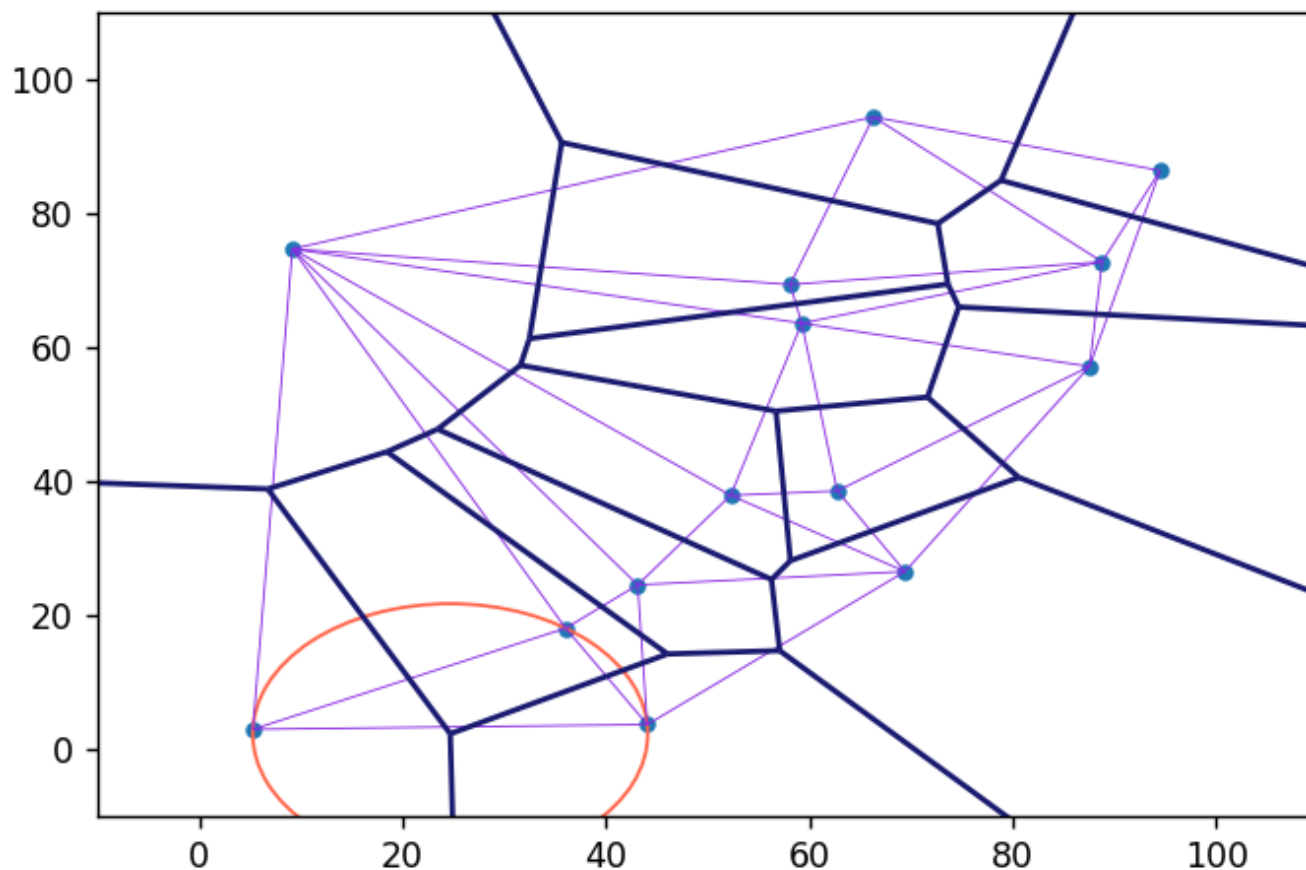
Przejsie od triangulacji do diagramu Voronoi



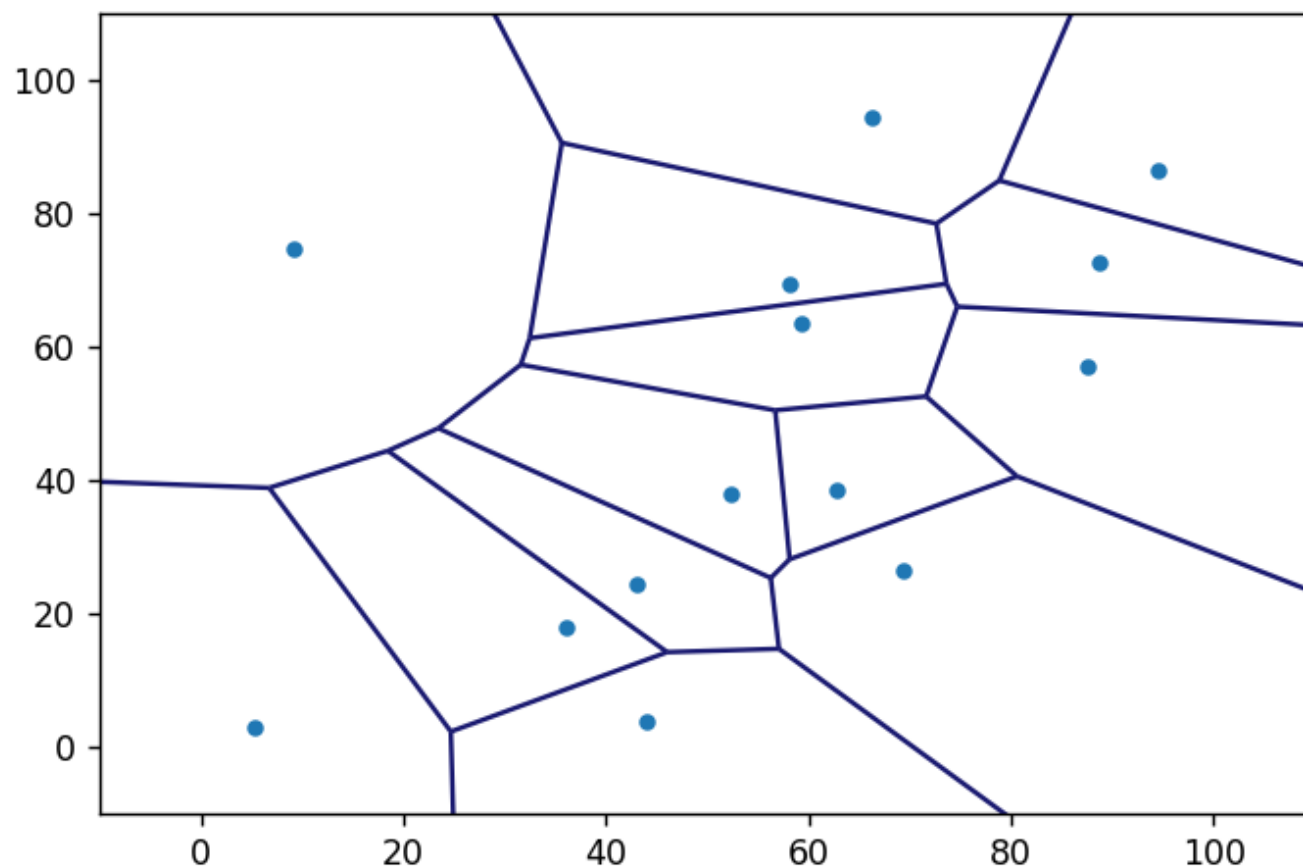
Przejsie od triangulacji do diagramu Voronoi



Przejsście od triangulacji do diagramu Voronoi



Gotowy diagram Voronoi



Źródła

- M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars, Computational Geometry: Algorithms and Applications 3rd Edition
- [Voronoi diagram - Wikipedia](#)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Circumscribed_circle#Circumscribed_circles_of_triangles
- [analytic geometry - Get the equation of a circle when given 3 points - Mathematics Stack Exchange](#)[Delaunay triangulation – Wikipedia](#)
- [Microsoft Word - cwiczenie.6b.diagramy_voronoia.20090514.doc \(multimedia.edu.pl\)](#)
- <https://pvigier.github.io/2018/11/18/fortune-algorithm-details.html>
- [geometry - How do I derive a Voronoi diagram given its point set and its Delaunay triangulation? - Stack Overflow](#)