

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

### Метрические пространства. Метод итераций решения СЛАУ

Метрика

Примеры метрических пространств

Полнота метрического пространства и разрешимость уравнений

Итерационные методы решения СЛАУ

Сходимость итерационных процессов в пространстве  $\mathbb{R}^n$

#### ЗАДАНИЕ.

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации. Продолжать итерации до тех пор, пока расстояние между последовательными приближениями не станет меньше  $\varepsilon = 10^{-2}$

А) в равномерной метрике  $\rho_c(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ ,

Б) в метрике Минковского  $\rho_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .

2. Оценить погрешность приближенных значений в указанных метриках.

3. Методом Зейделя найти приближенное решение системы на третьем шаге, выбирая начальный вектор п.1.

4. Сравнить решения системы, полученные в п.1, п.3., с точным решением  $X$ . Сделать вывод.

#### Варианты заданий

<b>Вариант 1.</b>	$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 5,3, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 7, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 24,6, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 10,3 \end{cases}$	$; \text{точное решение: } X = (-1; 0; 1; 2)^T.$
<b>Вариант 2.</b>	$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46 \end{cases}$	$; \text{точное решение: } X = (0,8; 1; 1,2; 1,4)^T.$
<b>Вариант 3.</b>	$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 10,23, \\ 10,9x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -12,93, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -20,95, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -7,5 \end{cases}$	$; \text{точное решение: } X = (-1; 1,4; 0,5; -2)^T.$
<b>Вариант 4.</b>	$\begin{cases} -1,2x_1 + 11,2x_2 - 1,5x_3 + 2,3x_4 = 11,66, \\ 10,9x_1 + 2,5x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 15, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 - 1,3x_3 + 12,1x_4 = 18,6, \\ 2,1x_1 - 1,4x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 13,86 \end{cases}$	$; \text{точное решение: } X = (0,8; 1; 1,2; 1,4)^T.$

$$\text{Вариант 5.} \begin{cases} 19,8x_1 + 2,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 65,25, \\ 2,1x_1 - 1,5x_2 + 20,5x_3 + 1,3x_4 = 75,1, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 - 32,1x_4 = -49,9, \\ 1,2x_1 + 24,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 85,85 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 3; 3,5; 2)^T.$$

$$\text{Вариант 6.} \begin{cases} 0,8x_1 - 0,85x_2 + 1,22x_3 + 3,5x_4 = 7,42, \\ 1x_1 - 4,5x_2 - 0,98x_3 + 1,52x_4 = 1,06, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 5,6, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = -1,47 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 0; 1; 2)^T.$$

$$\text{Вариант 7.} \begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 10,23, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -12,93, \\ 0,9x_1 - 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -27,95, \\ -2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -3,3 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 1,4; 0,5; -2)^T.$$

$$\text{Вариант 8.} \begin{cases} 1,2x_1 + 13,5x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 53,75, \\ 10,12x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 38,05, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 - 12,2x_4 = -10,1, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 - 1,5x_4 = 41,05 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 3; 3,5; 2)^T.$$

$$\text{Вариант 9.} \begin{cases} 17,2x_1 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4 = -21,1, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 15,8x_3 + 1,3x_4 = 16,3, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 21,1x_4 = 42,6, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 - 2,5x_4 = -4,7 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 0; 1; 2)^T.$$

$$\text{Вариант 10.} \begin{cases} 1,2x_1 - 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -4,94, \\ -10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -5,82, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 - 12,1x_4 = -12,16, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -6,76 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,8; 1; 1,2; 1,4)^T.$$

$$\text{Вариант 11.} \begin{cases} 2,4x_1 + 22,4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -37,8, \\ 10,9x_1 - 1,6x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -13,2, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -28,9, \\ -2,1x_1 - 1,5x_2 - 9,8x_3 - 1,3x_4 = 16 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; -1; -1; -2)^T.$$

$$\text{Вариант 12.} \begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 38,5, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = -34,1, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 31,3, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 1,9 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2; 0; -2; 1)^T.$$

$$\text{Вариант 13.} \begin{cases} 0,88x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = -4,7, \\ 1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = -7,95, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 3,58, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 8,57 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (3; -2; 1; -2)^T.$$

$$\text{Вариант 14.} \begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 52,2, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 4,77, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 36,21, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = -2,11 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,5; 4; 1,2; 2)^T.$$

- Вариант 15.** 
$$\begin{cases} -1,2x_1 - 11,2x_2 - 1,5x_3 - 2,5x_4 = -15,5, \\ 12,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 - 1,9x_4 = -9,4, \\ 0,9x_1 - 2,5x_2 + 1,3x_3 - 13,1x_4 = -13,9, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 20,3 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; 1; 2; 1)^T.$$
- Вариант 16.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 57,23, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 45,65, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = -23,75, \\ 1,2x_1 - 18,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -21,98 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 1,4; 2; -1)^T.$$
- Вариант 17.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -5,7, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 6,3, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 12,2, \\ -2,1x_1 - 1,5x_2 + 9,8x_3 - 1,3x_4 = 19,8 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0; -1; 2; 1)^T.$$
- Вариант 18.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -23,9, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -26,06, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 5,9, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = -19,36 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-2; -2; -1,4; 1,2)^T.$$
- Вариант 19.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 34,14, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 48,44, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 56,12, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 71,54 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1,2; 3; 2; 1,4)^T.$$
- Вариант 20.** 
$$\begin{cases} -0,88x_1 - 0,81x_2 - 1,28x_3 - 3,5x_4 = -9,5, \\ 2,1x_1 + 9,04x_2 + 1,96x_3 + 3,04x_4 = 26,26, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 4,05, \\ -3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = -0,18 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 2; 0; 2)^T.$$
- Вариант 21.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 - 14,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -7,93, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 5,19, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -1,09, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = 25,24 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 0,4; -2,3; 0)^T.$$
- Вариант 22.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 19,18, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 32,23, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = -3,75, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 25,65 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 1,4; 2; -1)^T.$$
- Вариант 23.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 19,57, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 33,41, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 76,21, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 92,2 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (0,5; 4; 1,2; 2)^T.$$

**Вариант 24.** 
$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = 9,5, \\ 1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = 13,13, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 4,05, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 7,46 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 2; 0; 2)^T.$$

**Вариант 25.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 1,9, \\ 10,5x_1 - 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 17,7, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 11,3, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = 25,1 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2; 0; -2; 1)^T.$$

**Вариант 26.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 65, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 81,65, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 13,1x_4 = 40,5, \\ -1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 70,85 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2,5; 3; 3,5; 2)^T.$$

**Вариант 27.** 
$$\begin{cases} 0,9x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = 9,52, \\ 1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = 13,13, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 4,05, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 7,46 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (1; 2; 0; 2)^T.$$

**Вариант 28.** 
$$\begin{cases} 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = -18,9, \\ 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -16, \\ -0,9x_1 - 2,5x_2 - 1,3x_3 - 12,1x_4 = 28,9, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 - 9,8x_3 + 1,3x_4 = 3,6 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (-1; -1; -1; -2)^T.$$

**Вариант 29.** 
$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 38,5, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = -34,1, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 31,3, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 1,9 \end{cases}; \text{точное решение: } X = (2; 0; -2; 1)^T.$$

**Вариант 30.** 
$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,81x_2 + 1,28x_3 + 3,5x_4 = -4,7, \\ -1,05x_1 + 4,52x_2 + 0,98x_3 + 1,52x_4 = -14,25, \\ 0,73x_1 + 0,85x_2 + 4,71x_3 + 0,81x_4 = 3,58, \\ 3,82x_1 + 1,02x_2 + 0,75x_3 + 0,8x_4 = 8,57 \end{cases}; \text{точное решение:}$$

$$X = (3; -2; 1; -2)^T.$$