

Указания к выполнению задания 1

Даны векторы

$$\overline{e_1} = (1; 0; 1; 0); \overline{e_2} = (0; 1; 0; 1); \overline{e_3} = (1; 1; 1; 0); \overline{e_4} = (0; 1; 1; 1).$$

1) Докажем, что система векторов $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\}$ образует базис в \mathbb{R}^4 .

По определению **базиса** линейного пространства L размерности n :

упорядоченная система векторов $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \dots; \overline{e_n}\}$, состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, является базисом пространства L , кроме того любой элемент $\overline{x} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\overline{x} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + \dots + x_n \overline{e_n}.$$

Покажем, что векторы $\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}$ линейно независимы, т.е. равенство $\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} + \alpha_4 \overline{e_4} = \overline{0}$ возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Запишем элементы пространства \mathbb{R}^4 . Тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выполнив линейные операции и приравняв соответствующие элементы двух матриц, получим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, убеждаемся, что векторы $\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}$ линейно независимы.

Какими способами можно решить эту систему?

Предложите другие способы доказательства линейной независимости системы векторов.

2) Найдем координаты вектора $\overline{x} = (1; 2; 3; 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{e_1} = (1; 0; 1; 0); \overline{e_2} = (0; 1; 0; 1); \overline{e_3} = (1; 1; 1; 0); \overline{e_4} = (0; 1; 1; 1)$.

Найдем коэффициенты разложения элемента \overline{x} по базису $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\}$, т.е. такие числа x_1, x_2, x_3, x_4 , что $\overline{x} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2} + x_3 \overline{e_3} + x_4 \overline{e_4}$. Тогда

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Это равносильно системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решив систему, получим $\bar{x} = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4$.

3) Используя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, построим ортонормированный базис $\{\bar{h}_1; \bar{h}_2; \bar{h}_3; \bar{h}_4\}$ на основании базиса $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3; \bar{e}_4\}$.

В евклидовом пространстве \mathbb{R}^n скалярное произведение элементов $\bar{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $\bar{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ задается формулой

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Опр. Нормой вектора \bar{x} евклидова пространства называется *положительное* число

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}.$$

Для обычных векторов в трехмерном пространстве норма совпадает с длиной вектора.

Опр. Если $\|\bar{x}\| = 1$, то вектор \bar{x} называется **нормированным**.

Опр. Система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ называется **ортонормированной**, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны.

Т. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пусть $\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ – исходный базис n -мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $\{\bar{h}_1; \bar{h}_2; \dots; \bar{h}_n\}$ получается с помощью следующей процедуры:

$$1) \bar{h}_1 = \frac{\bar{e}_1}{\|\bar{e}_1\|};$$

$$2) \bar{g}_2 = \bar{e}_2 - (\bar{e}_2, \bar{h}_1)\bar{h}_1; \quad \bar{h}_2 = \frac{\bar{g}_2}{\|\bar{g}_2\|};$$

$$3) \bar{g}_3 = \bar{e}_3 - (\bar{e}_3, \bar{h}_1)\bar{h}_1 - (\bar{e}_3, \bar{h}_2)\bar{h}_2; \quad \bar{h}_3 = \frac{\bar{g}_3}{\|\bar{g}_3\|};$$

...

;

$$n) \quad \overline{g_n} = \overline{e_n} - (\overline{e_n}, \overline{h_1})\overline{h_1} - (\overline{e_n}, \overline{h_2})\overline{h_2} - \dots - (\overline{e_n}, \overline{h_{n-1}})\overline{h_{n-1}}; \quad \overline{h_n} = \frac{\overline{g_n}}{\|\overline{g_n}\|}.$$

Построим ортонормированный базис по системе векторов

$$\overline{e_1} = (1; 0; 1; 0); \overline{e_2} = (0; 1; 0; 1); \overline{e_3} = (1; 1; 1; 0); \overline{e_4} = (0; 1; 1; 1).$$

Решение. 1. Найдем норму вектора $\overline{e_1}$ и вектор $\overline{h_1} = \frac{\overline{e_1}}{\|\overline{e_1}\|}$:

$$\|\overline{e_1}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}; \quad \overline{h_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right).$$

2. Поскольку $(\overline{e_2}, \overline{h_1}) = 0$, то $\overline{g_2} = \overline{e_2} - (\overline{e_2}, \overline{h_1})\overline{h_1} = \overline{e_2} - 0 \cdot \overline{h_1} = \overline{e_2}$,

$$\|\overline{g_2}\| = \sqrt{2}; \quad \overline{h_2} = \frac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

3. Вычислим $(\overline{e_3}, \overline{h_1}) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 = \sqrt{2}$; $(\overline{e_3}, \overline{h_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$\overline{g_3} = \overline{e_3} - (\overline{e_3}, \overline{h_1})\overline{h_1} - (\overline{e_3}, \overline{h_2})\overline{h_2} = \overline{e_3} - \sqrt{2}\overline{h_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{h_2} = \left(0; \frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2} \right),$$

$$\|\overline{g_3}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \overline{h_3} = \frac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

4. Вычислим $(\overline{e_4}, \overline{h_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $(\overline{e_4}, \overline{h_2}) = \sqrt{2}$; $(\overline{e_4}, \overline{h_3}) = 0$, получим

$$\overline{g_4} = \overline{e_4} - (\overline{e_4}, \overline{h_1})\overline{h_1} - (\overline{e_4}, \overline{h_2})\overline{h_2} - (\overline{e_4}, \overline{h_3})\overline{h_3} = \overline{e_4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overline{h_1} - \sqrt{2} \cdot \overline{h_2} - 0 \cdot \overline{h_3} = \left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0 \right),$$

$$\|\overline{g_4}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \overline{h_4} = \frac{\overline{g_4}}{\|\overline{g_4}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right).$$

4) Контроль. Докажем, что векторы $\{\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}\}$ образуют ортонормированный

базис в \mathbb{R}^4 . В этом убедимся, вычислив нормы векторов и попарно скалярные произведения векторов.

Опр. Векторы \overline{x} и \overline{y} евклидова пространства называются **ортгоналичными**, если $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

Т. Если ненулевые векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

5) Найдем координаты вектора $\overline{x} = (1; 2; 3; 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\{\overline{h_1}; \overline{h_2}; \overline{h_3}; \overline{h_4}\}$.

Пусть $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n\}$ – ортонормированный базис в n -мерном евклидовом пространстве, $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – координаты вектора \bar{x} в этом базисе, т. е.

$$\bar{x} = x_1 \bar{h}_1 + x_2 \bar{h}_2 + \dots + x_n \bar{h}_n.$$

Умножая обе части равенства скалярно на \bar{e}_1 , получим

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{h}_1) &= x_1(\bar{h}_1, \bar{h}_1) + x_2(\bar{h}_2, \bar{h}_1) + \dots + x_n(\bar{h}_n, \bar{h}_1) = \\ &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0 = x_1. \end{aligned}$$

Аналогично, $(\bar{x}, \bar{h}_2) = x_2; \dots; (\bar{x}, \bar{h}_n) = x_n$.

Таким образом, *координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы.*

Для рассматриваемого примера $\bar{x} = 2\sqrt{2}\bar{h}_1 + 3\sqrt{2}\bar{h}_2 - \sqrt{2}\bar{h}_3 - \sqrt{2}\bar{h}_4$.

Составим матрицу, столбцами которой являются базисные векторы $\bar{h}_1; \bar{h}_2; \bar{h}_3; \bar{h}_4$

$$A = [\bar{h}_1; \bar{h}_2; \bar{h}_3; \bar{h}_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6) Докажите, что матрица A является ортогональной.

Опр. Матрица A называется *ортогональной*, если $A^T A = E$.

7) Проверьте свойство ортогональной матрицы: если A – ортогональная матрица, то $A^{-1} = A^T$.

Для нахождения обратной матрицы воспользуемся методом Гаусса, т.е. с помощью элементарных преобразований матрицу $[A|E]$ приведем к виду $[E|A^{-1}]$.

$$[A|E] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right]$$

8) Проверьте свойство ортогональной матрицы: если A – ортогональная матрица, то $\det A = \pm 1$.

$$\det A = \det \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$