Рассмотрим множество матриц порядка n. Пусть $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$.

Нормой квадратной матрицы A порядка n называется <u>***число***</u>, обозначаемое $\|A\|$ и удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O$;
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, α – действительное число;
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника);
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,

Матрицы можно рассматривать как операторы, действующие на векторы пространства $\mathbf{R}^n$, поэтому желательно, чтобы норму $\|A\|$ можно было рассматривать как норму оператора.

Опр. Норма матрицы $\|A\|$ называется ***согласованной*** с нормой вектора $\|x\|$, если для любых A и x

$$\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Если бы не выполнялось условие 4, то норма матрицы не могла быть согласованной ни с какой нормой вектора. Однако <u>с одной и той же нормой вектора могут быть согласованы различные нормы матриц</u>.

Использование согласованных норм позволяет получать требуемые оценки для погрешности итерационных методов последовательных приближений.

Опр. Пусть $\|A\|$ – норма матрицы, согласованная с заданной нормой вектора $\|x\|$. Если для любой матрицы A найдется такой вектор $x \neq 0$ (зависящий от выбора A), что

$$\|A \cdot x\| = \|A\| \cdot \|x\|,$$

то норма $\|A\|$ называется ***подчиненной норме вектора*** $\|x\|$.

Теорема. Для любой нормы вектора $\|x\|$ имеется по меньшей мере одна подчиненная (а потому по меньшей мере одна согласованная) норма матрицы $\|A\|$, а именно

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Утверждение. Для произвольной нормы вектора любая подчиненная норма матрицы обладает тем свойством, что $\|E\| = 1$ (E – единичная матрица).

Схема док-ва. $x = Ex \Rightarrow \|x\| = \|E \cdot x\| = \|E\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|E\| = 1$.

Опр. ***Спектральной нормой*** $\|A\|_{sp}$ квадратной матрицы A называют положительное значение квадратного корня из наибольшего абсолютного значения характеристического числа матрицы $A^T \cdot A$:

$$\|A\|_{sp} = |\text{макс. характ. ч. } A^T \cdot A|^{1/2}.$$

Напомним, характеристическим числами квадратной матрицы A (или ее собственными значениями) называются корни характеристического уравнения $\boxed{\det(A-\lambda E)=0.}$

Утверждение. Спектральная норма согласована с евклидовой нормой вектора и подчинена ей.

Если матрица A является ***симметричной***, т. е. $A^T = A$, тогда $A^T A = A^2$, $\max\left(\lambda_{A^T A}\right) = \max\left(\lambda_{A^2}\right)$ и, следовательно,

$$\|A\|_{sp} = \max|\lambda_A|,$$

где λ_A – собственные значения матрицы A.

Спектральная норма симметричной матрицы A обладает ***свойством минимальности***: среди всех возможных норм $\|A\|$, согласованных с некоторой нормой вектора, спектральная норма $\|A\|_{sp}$ дает минимальное значение.

Свойство минимальности имеет важное следствие.

Рассмотрим следующие нормы вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$:

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$$\|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ – евклидова норма;}$$

$$\|\bar{x}\|_\infty = \|\bar{x}\|_c = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \text{ – равномерная норма.}$$

Для квадратной матрицы $A=[a_{ij}]$ произвольного типа рассмотрим нормы:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2} \text{ – евклидова норма (норма Э. Шмидта)}$$

Утверждение. Евклидова норма матрицы порядка n согласована с евклидовой нормой вектора, однако при $n>1$ она не является подчиненной, т.к. $\|E\|_2 = \sqrt{n}$.

Норма матрицы, определенная как *максимум сумм модулей элементов строк матрицы*

$$\|A\|_c = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

является согласованной и подчиненной для нормы вектора $\|\bar{x}\|_c = \max\limits_{i=1,n} |x_i|$, определенной как максимум модулей компонент.

Норма матрицы, определенная как *максимум сумм модулей элементов столбцов*

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

является согласованной и подчиненной для нормы вектора $\|\bar{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, определенной как сумма модулей компонент.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Имеем:

$$\|A\|_2 == \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{285} \approx 16{,}9$$

$$\|A\|_c = \max(1 + 2 + 3, \quad 4 + 5 + 6, \quad 7 + 8 + 9) = \max(6, 15, 24) = 24$$

$$\|A\|_1 = \max(1 + 4 + 7, \quad 2 + 5 + 8, \quad 3 + 6 + 9) = \max(12, 15, 18) = 18$$

При численных оценках часто важно использовать такую норму матрицы, чтобы для некоторой заданной матрицы A иметь $\|A\| < 1$ и чтобы $\|A\|$ была, кроме того, как можно меньше.

О неустранимой погрешности при решении линейных систем

Известно, что источниками неустранимой погрешности являются не только округления при выполнении машинных операций, но также ошибки, содержащиеся в исходных данных. Предположим, что арифметические операции выполняются точно. Пусть вместо системы

$$AX = b$$

решается задача

$$(A + \delta A)(X + \delta X) = (b + \delta b).$$

Здесь δA– матрица возмущений, моделирующих ошибки коэффициентов исходных уравнений, δb– соответственно возмущения правых частей, δX – обусловленный этими возмущениями вектор «ошибок».

Переписывая последнее матричное уравнение в виде

$$A \cdot X + A \cdot \delta X + \delta A \cdot X + \delta A \cdot \delta X = b + \delta b$$

и вычитая из последнего соотношение $AX = b$, приходим к системе уравнений

$$A \cdot \delta X + \delta A \cdot \delta X = \delta b - \delta A \cdot X$$

которая описывает зависимость δX от возмущений (ошибок) исходных данных.

Далее будем полагать, что возмущения коэффициентов уравнений δA и погрешности решения δX в достаточной мере малы, так что в последнем уравнении можно пренебречь квадратичными членами $\delta A \cdot \delta X$. Тогда интересующую нас ошибку δX можно представить в виде

$$\delta X \simeq A^{-1}(\delta b - \delta A \cdot X).$$

Вводя в рассмотрение нормы векторов и согласованные с ними нормы матриц, получим оценку величины погрешности

$$\|\delta X\| \simeq \|(\delta b - \delta A \cdot X)\| \le \|A^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \cdot \|X\|) =$$

$$= \|A^{-1}\|\left(\|b\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \cdot \|X\|\right).$$

Учитывая, что $\|b\| = \|AX\| \le \|A\| \cdot \|X\|$, получаем далее

$$\|\delta X\| \le \|A^{-1}\|\left(\|A\| \cdot \|X\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \|A\| \cdot \|X\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) =$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \|X\|\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

В итоге оценка для относительной погрешности решения может быть записана в виде

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \mu_A\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right),$$

где $\boxed{\mu_A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|}$.

Значение μ_A называется ***числом обусловленности матрицы*** *A*. Эта величина определяет, насколько сильно погрешности входных данных могут повлиять на решение системы. Так как $E = A^{-1} \cdot A$, то $1 = \|E\| = \|A^{-1}A\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \mu_A \Rightarrow \mu_A \ge 1$.

Если значение μ_A является умеренным ($\mu_A \sim 1 \div 10$), ошибки входных данных слабо сказываются на решении и система в этом случае называется ***хорошо обусловленной***. Если μ_A велико ($\mu_A \ge 10^3$), система ***плохо обусловлена***, решение ее сильно зависит от ошибок в правых частях и коэффициентах.

Следует подчеркнуть, что данное свойство (обусловленность), выражаемое неравенством

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \mu_A\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right),$$

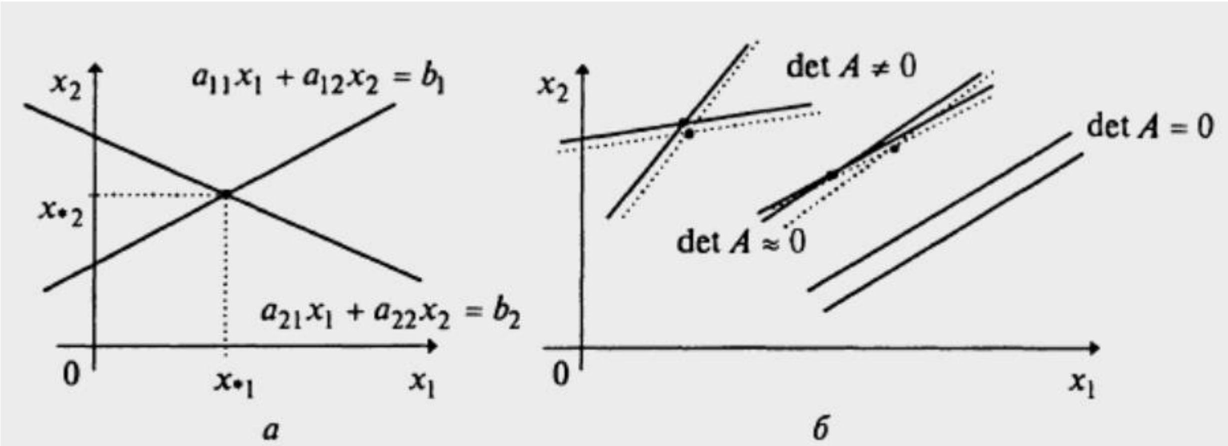
никак не связано с предполагаемым методом решения системы, а является изначальной характеристикой решаемой задачи.

Поясним это понятие обусловленности на примере двумерной задачи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Точным решением этой задачи является вектор $x_* = \left(x_{*1}, x_{*2}\right)^T$, компоненты которого определяются координатами точки пересечения двух прямых, соответствующих уравнениям $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ (рис.*а*).

Как найти обратную матрицу методом алгебраических дополнений?



На рисунке *б* применительно к трем наборам входных данных, заданных с некоторыми погрешностями и соответствующих различным системам линейных уравнений, иллюстрируется характер обусловленности системы.

Если определитель системы *A* существенно отличен от нуля, то точка пересечения пунктирных прямых, смещенных относительно сплошных прямых из-за погрешностей задания *A* и *b*, сдвигается несильно. Это свидетельствует о хорошей обусловленности системы.

При $\det A \approx 0$ небольшие погрешности в коэффициентах могут привести к большим погрешностям в решении (плохо обусловленная матрица), поскольку прямые близки к параллельным.

При det*A*=0 прямые параллельны или они совпадают, и тогда решение задачи не существует или оно не единственно.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 100x_1 + 99x_2 = 199, \\ 99x_1 + 98x_2 = 197. \end{cases}$$

Ее решение $x_1 = x_2 = 1$.

Изменим слегка ее правые части

$$\begin{cases} 100x_1 + 99x_2 = 198.99, \\ 99x_1 + 98x_2 = 197.01 \end{cases}$$

Решение «искаженной» системы $x_1 = 2.97,\ x_2 = -0.99.$

Чтобы сопоставить полученные результаты с оценкой

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \mu_A \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right),$$

будем пользоваться следующими согласованными нормами для векторов и матриц

$$\|X\| = \max_i |x_i|, \quad \|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Для рассмотренного примера имеем

$$b=\begin{pmatrix}199\\199\end{pmatrix},\ \delta b=\begin{pmatrix}-0.01\\0.01\end{pmatrix},\ \text{то есть}\ \|b\|=199,\ \|\delta b\|=0.01.$$

Относительная погрешность $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\approx\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$. Это достаточно малая величина.

Далее, вычислим число обусловленности. Так как $A=\begin{pmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{pmatrix}$

$$\|A\|=199,\ \det=-1,\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-98 & 99\\ 99 & -100\end{pmatrix},\ \|A^{-1}\|=199$$

Число обусловленности $\mu_A=(199)^2=39601\approx 4\cdot 10^4$.

Согласно оценке

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}\le\mu_A\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)\approx 4\cdot 10^4\cdot\frac{10^{-4}}{2}=2,$$

что, как видно, согласуется с результатами решения рассмотренных систем.

Плохо обусловленные системы вызывают определенные трудности при решении. Из оценки $\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}$ следует, что решение их сильно зависит от ошибок входных данных, и даже при отсутствии ошибок во входных величинах может произойти значительная (если не полная) потеря точности на стадии вычислений по методу Гаусса за счет погрешностей округлений.