Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Задачи линейной алгебры являются самыми распространенными с прикладной точки зрения. Выделяют основные задачи линейной алгебры:

- ❖ решение систем линейных алгебраических уравнений;
- ❖ вычисление определителей и обращение матриц;
- ❖ вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

В практических приложениях наиболее часто приходится иметь дело с первой задачей. Решение второй задачи, в конечном счете, сводится к первой.

Постановка задачи: найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n\ , \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тогда представим систему линейных уравнений в компактной матричной форме

$$AX = b\,.$$

Если матрица A неособенная (невырожденная), т.е.

$$\Delta = \det A \neq 0,$$

то ***система имеет единственное решение***. В этом случае решение системы с теоретической точки зрения не представляет труда:

$$X = A^{-1}b.$$

Решение этой СЛАУ дают в явном виде формулы Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i – определитель матрицы, которая получается из матрицы A заменой столбца с номером i столбцом свободных членов b.

Но такой способ решения линейной системы с n неизвестными приводит к вычислению $n+1$ определителей порядка n, что представляет собой весьма трудоемкую операцию при сколько-нибудь большом числе n.

Применяемые методы решения линейных систем можно разделить на две группы: ***точные (прямые) и приближенные (итерационные)***.

Прямые (или конечные) методы позволяют теоретически (в предположении, что вычисления проводятся без округлений) получить точное решение задачи решения СЛАУ за конечное число арифметических операций. Однако если на практике вычисления ведутся с округлениями, то значения неизвестных, полученные точными методами, неизбежно будут содержать погрешности.

Приближенными методами называются такие методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы в этих случаях может быть получено теоретически как результат бесконечного процесса. К приближенным методам относятся метод простой итерации, метод Зейделя и др. Каждый из этих методов не всегда является сходящимся в применении к конкретному классу систем линейных уравнений.

МЕТОД ГАУССА

Наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса, в основе которого лежит **идея последовательного исключения неизвестных**. Существуют различные вычислительные схемы, реализующие этот метод.

Наибольшее распространение имеют схемы Гаусса с **выбором главного элемента: по строке, по столбцу, по всей матрице**. Если нет необходимости в выборе главных элементов каким-либо специальным образом, целесообразно применять **схему единственного деления**, которая уступает всем трем схемам в точности, но выигрывает в простоте вычислений.

Сложность исходной системы определяется структурой матрицы A.

Если A – диагональная матрица

$$A = D = diag\left[d_1, d_2, ..., d_n\right] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_1 \, , \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_2 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \, , \end{cases}$$

то система распадается на n линейных уравнений, каждое из которых содержит одну неизвестную величину, и проблем с вычислениями не возникает.

Пусть матрица A является треугольной, например,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \, , \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \, , \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что для всех i $a_{ii} \neq 0$, так как $\det A \neq 0$. Тогда из последнего уравнения системы

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \; ;$$

далее,

$$x_m = \frac{1}{a_{mm}}\left(b_m - a_{mn}x_n - a_{mn-1}x_{n-1} - \ldots - a_{mm+1}x_{m+1}\right), \quad (m = n-1, n-2, ..., 2, 1). \tag{4}$$

Метод Гаусса (*схема единственного деления*) для системы с матрицей A общего вида реализуется в два этапа:

прямой ход

– приведение исходной матрицы к треугольному виду (3)

обратный ход

– определение неизвестных по формулам (4).

Реализация прямого хода.

Пусть $a_{11} \neq 0$. В противном случае всегда можно переставить уравнения в СЛАУ таким образом, чтобы это условие выполнялось ($\det A \neq 0$, все элементы первого столбца не могут одновременно быть нулевыми).

Умножим первое уравнение на $l_i^{(1)} = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ и сложим результат с i-м уравнением;

$\Rightarrow$ из i-го уравнения исключили неизвестную x_1. Проделав эту операцию со всеми уравнениями, начиная со второго (i=2, 3, ... , n), придем к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + l_i^{(1)}a_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i + l_i^{(1)}b_1$ для i= 2, 3, ... , n, j = 2,3, ... , n.

Предполагая, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$, и, используя коэффициенты $l_i^{(2)} = -\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, исключаем x_2 из всех уравнений для i = 3, 4, ... , n.

Аналогичным образом выполнив (n–1) шагов подобного рода, придем к системе уравнений с треугольной матрицей (1).

ПРИМЕР. Решить систему линейных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + 2x_3 - \ x_4 = 5 \\ x_1 + \ 3x_2 + 2x_3 + \ x_4 = 17 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + \ x_4 = 18 \\ x_1 + 3x_2 \ + 4x_3 + 2x_4 = 27. \end{cases}$$

Прямой ход.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ \quad 2x_2 \qquad + 2x_4 = 12 \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 22. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ \quad x_2 \qquad + x_4 = 6 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = -5 \\ \quad 2x_3 + x_4 = 10. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ \quad x_2 \qquad + x_4 = 6 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = -5 \\ \qquad\quad 5x_4 = 20. \end{cases}$$

Обратный ход.

Из четвертого уравнения находим $x_4 = 4$.

Подставляя его в третье уравнение, выражаем $x_3 = 3$.

Продолжая подставлять найденные неизвестные в оставшиеся уравнения, получим $x_2 = 2$ и $x_1 = 1$.

Проверкой устанавливается правильность полученных результатов.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.

Возникает вопрос, какова трудоемкость этого метода?

Число N арифметических операций, необходимых для реализации метода Гаусса, определяется следующей формулой

$$N = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n-1),$$

где n – число неизвестных. Таким образом, время, необходимое для выполнения арифметических операций при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, примерно ***пропорционально кубу числа неизвестных*** (при n>7).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -10^{-7} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

I. Исключим x_1 из первого уравнения: $x_1 = 10^7 x_2 - 10^7$, и подставим во второе уравнение, получим $x_2 = \dfrac{10^7 + 4}{10^7 + 2}$.

Проведя вычисления с семью значащими цифрами, получим $x_2 = 1.000000$, $x_1 = 0.000000$, что ***неверно***, как видно из второго уравнения.

II. Исключим x_1 из второго уравнения: $x_1 = 4 - 2x_2$, и подставим в первое, получим $x_2 = \dfrac{1 + 4 \cdot 10^{-7}}{1 + 2 \cdot 10^{-7}}$.

После вычислений получаем $x_2 = 1.000000$, $x_1 = 2.000000$ – правильное (с точностью до шести десятичных цифр) решение.

В первом варианте метода исключения результаты получились неверными.

«Механизм» возникновения больших погрешностей:

- деление на малые числа,
- появление больших (по величине) промежуточных результатов,
- потеря точности при вычитании больших (близких друг к другу) чисел.

О неустранимой погрешности при решении линейных систем методом исключения

Источниками неустранимой погрешности являются не только округления при выполнении машинных операций, но также ошибки, содержащиеся в исходных данных. ***Число обусловленности матрицы*** A (будет введено и рассмотрено на следующих темах) определяет, насколько сильно погрешности входных данных могут повлиять на решение системы. Если значение μ_A является умеренным($\mu_A \sim 1 \div 10$), то ошибки входных данных слабо сказываются на решении и система в этом случае называется ***хорошо***

обусловленной. Если μ_A велико ($\mu_A \geq 10^3$), система ***плохо обусловлена***, решение ее сильно зависит от ошибок в правых частях и коэффициентах.

Подчеркнем, что свойство обусловленности никак не связано с предполагаемым методом решения системы, а является изначальной характеристикой решаемой задачи.

Недостатки прямых методов:

– необходимость хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы (при большой размерности матрицы требуется много памяти);

– накопление погрешностей в процессе решения, что особенно опасно для больших систем.

Уменьшить в процессе выкладок вероятность *деления на малые числа*, позволяют варианты ***метода Гаусса с выбором главного элемента***.

Рассмотрим расширенную прямоугольную матрицу, состоящую из коэффициентов системы и ее свободных членов,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & \boxed{a_{pq}} & \dots & a_{pn} & b_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Выберем ненулевой, как правило, наибольший по модулю, не принадлежащий столбцу свободных членов элемент a_{pq} $(q \neq n+1)$ матрицы M, который называется ***главным элементом***, и вычислим множители

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

для всех $i \neq p$.

Строка с номером p матрицы M, содержащая главный элемент, называется ***главной строкой***. Далее, произведем следующую операцию: ***к каждой неглавной строке прибавим главную строку, умноженную на соответствующий множитель*** m_i ***для этой строки***. В результате получим новую матрицу, у которой q-й столбец состоит из нулей. Отбрасывая этот столбец и главную p-ю строку, получим новую матрицу $M^{(1)}$ с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

Над матрицей $M^{(1)}$ повторяем те же операции, после чего получаем матрицу $M^{(2)}$, и т.д. Таким образом, построена последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(n-1)},$$

последняя из которых представляет двучленную матрицу-строку.

Для определения неизвестных x_i ***объединяем в систему все главные строки, начиная с последней***, входящей в матрицу $M^{(n-1)}$.

После надлежащего изменения нумерации неизвестных получается система с треугольной матрицей, из которой легко шаг за шагом найти неизвестные исходной системы.

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими числа m_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

Метод LU-разложения для решения СЛАУ (схема Халецкого)

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений матричном виде:

$$AX = b.$$

Представим квадратную матрицу A в виде произведения $A = L \cdot U$, где L– нижняя, а U– верхняя треугольные матрицы:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Всякую квадратную матрицу A имеющую отличные от нуля главные миноры

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \cdots, \Delta_n = |A| \neq 0$$

можно представить в виде LU-разложения, причем это разложение единственно.

Элементы l_{ij} и u_{ij} определяются по формулам

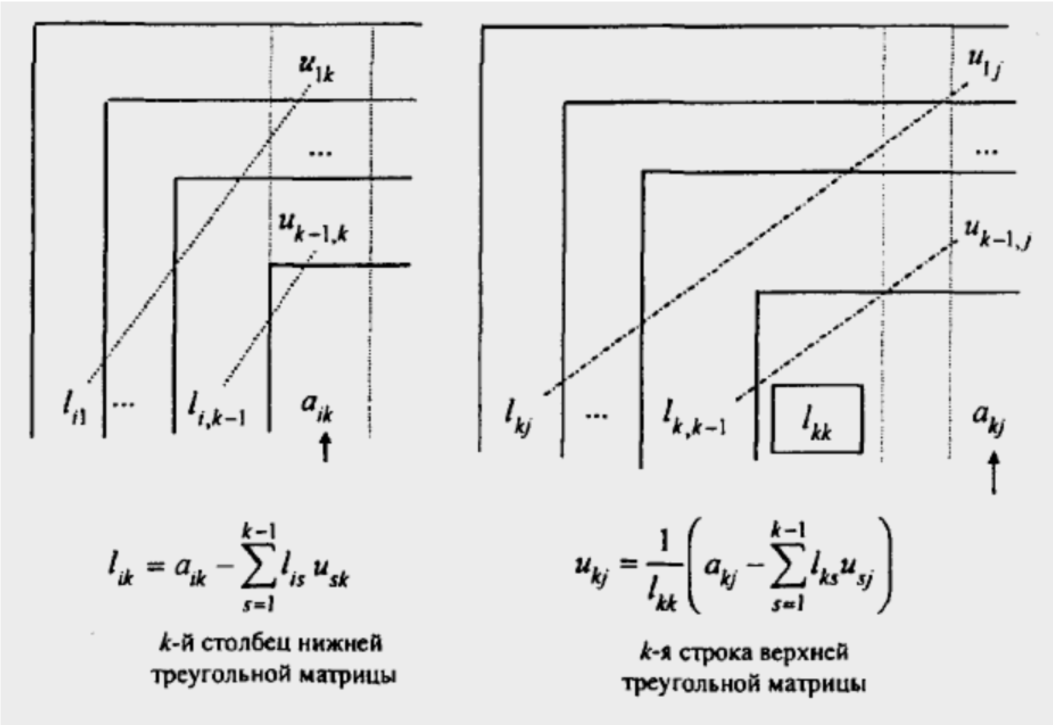
$$l_{i1} = a_{i1}, \qquad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is} u_{sj} \quad (i \geq j > 1), \qquad u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is} u_{sj} \right) \quad (1 < i < j).$$

Результат представления матрицы A в виде произведения двух треугольных матриц удобно хранить в одной матрице следующей структуры

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычисления на k-м шаге метода LU-разложения удобно производить способом «елочки»: столбец – строка, столбец – строка и т.д., пользуясь двумя схемами, изображенными на рисунке



Тогда система $AX=b$ представляется в виде $L \cdot U \cdot X = b$ и её решение сводится к последовательному решению двух простых систем с треугольными матрицами.

Итак, решение системы состоит из двух этапов.

Прямой ход. Произведение UX обозначим через Y. В результате решения системы $LY=b$ находят вектор Y.

Обратный ход. В результате решения системы $UX=Y$ находят решение задачи – столбец X.

В силу треугольности матриц L и U решения обеих систем находятся рекуррентно (как в обратном ходе метода Гаусса) по формулам:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}},$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is} y_s\right) \quad (i > 1),$$

и

$$x_n = y_n,$$

$$x_i = y_i - \sum_{s=i+1}^{n} u_{is} x_s \quad (i < n).$$

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 2 \\ 3 & 0,5 & -10 \\ 1 & 2,5 & 26 \end{pmatrix}.$$

$l_{11} = a_{11} = 2; \quad l_{21} = a_{21} = 3; l_{31} = a_{31} = 1; \quad 1-й\ столбец$

$u_{12} = \dfrac{1}{2} a_{12} = 0,5; \quad u_{13} = \dfrac{1}{2} a_{13} = 2. \quad 1-я\ строка$

$l_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = 2 - 3 \cdot 0,5 = 0,5; \quad l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12} = 3 - 1 \cdot 0,5 = 2,5; \quad 2-й\ столбец$

$u_{23} = \dfrac{1}{l_{22}} (a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}) = \dfrac{1}{0,5} (1 - 3 \cdot 2) = -10. \quad 2-я\ строка$

$l_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23} = 3 - 1 \cdot 2 - 2,5 \cdot (-10) = 26$

В результате получены две треугольные матрицы:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0,5 & 0 \\ 1 & 2,5 & 26 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A находится в результате перемножения диагональных элементов матрицы L: $\det A = 2 \cdot 0,5 \cdot 26 = 26$.

2. Решим систему $L \cdot Y = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0,5 & 0 \\ 1 & 2,5 & 26 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}}_{b} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 = 16, \\ 3y_1 + 0,5y_2 = 10, \\ y_1 + 2,5y_2 + 26y_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8, \\ y_2 = -28, \\ y_3 = 3. \end{cases}$$

3. Решим систему $U \cdot X = Y$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix}}_{Y} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_2 - 10x_3 = -28, \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $X_* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

Применение методов ортогонализации к решению систем линейных уравнений (ортогонализация столбцов)

Имеем систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде:

$$AX = b.$$

Теорема. Всякую действительную неособенную матрицу A можно представить в виде произведения матрицы R с ортогональными столбцами на верхнюю треугольную матрицу T с единичной диагональю

$$A = R \cdot T,$$

где

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}=\left[r_1\, r_2 \ldots r_n\right], \qquad T=\begin{pmatrix} 1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу A в виде $A=\left[a_1\, a_2 \ldots a_n\right]$, где a_j – вектор-столбец матрицы A. Так как матрица A неособенная, то векторы $a_1, a_2, \ldots a_n$ линейно независимы. Ортогональные векторы r_j построим следующим образом:

$$r_1=a_1;$$

$$r_j=a_j-\sum_{i=1}^{j-1} t_{ij} r_i, \quad t_{ij}=\frac{\left(a_j, r_i\right)}{d_i} \quad (i<j), \quad d_i=\left(r_i, r_i\right).$$

Лемма. Если столбцы действительной матрицы составляют ортогональную систему векторов, то произведение транспонированной матрицы на саму матрицу равно диагональной матрице.

Таким образом, для построенной матрицы R будет справедливо соотношение:

$$R^T \cdot R=D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных алгебраических уравнений запишем в виде:

$$RTX=b.$$

Умножая слева на R^T обе части последнего равенства, получим:

$$R^T RTX=R^T b, \;\Rightarrow\; DTX=\beta, \text{ где } \beta=R^T b,$$

отсюда

$$\boxed{X=(DT)^{-1}\beta=T^{-1}D^{-1}\beta.}$$

Матрица D^{-1}, обратная диагональной, находится по формуле

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Относительно просто находится обратная матрица T^{-1} треугольной матрицы T (например, обратный ход метода Гаусса).

Пример. *Решая задачу нахождения* координат вектора $\overline{x} = (1;\,2;\,3;\,4) \in \mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{e_1} = (1;0;1;0);\ \overline{e_2} = (0;1;0;1);\ \overline{e_3} = (1;1;1;0);\ \overline{e_4} = (0;1;1;1)$, т. е. таких чисел x_1, x_2, x_3, x_4, что $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3} + x_4\overline{e_4}$, приходится решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_4 = 4, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad AX = B.$$

Представим матрицу A в виде произведения матрицы с ортогональными столбцами и верхней треугольной матрицы с единичной диагональю.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = RT. \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} & \begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{array} \end{array}$$

$$r_1 = a_1;$$

$$\boxed{r_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} t_{ij} r_i, \quad t_{ij} = \frac{(a_j, r_i)}{d_i} \quad (i < j), \quad d_i = (r_i, r_i).}$$

$$d_1 = (r_1, r_1) = 2, \quad t_{12} = \frac{(a_2, r_1)}{d_1} = 0, \quad r_2 = a_2 - 0 \cdot r_1 = a_2.$$

$$d_2 = (r_2, r_2) = 2, \quad t_{13} = \frac{(a_3, r_1)}{d_1} = \frac{2}{2} = 1, \quad t_{23} = \frac{(a_3, r_2)}{d_2} = \frac{1}{2}, \quad r_3 = a_3 - 1 \cdot r_1 - \frac{1}{2} \cdot r_2.$$

Аналогично находим остальные элементы.

Матрица $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ и ей обратная $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем методом Гаусса обратную матрицу для матрицы $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(T\middle|E\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1/2&1&0&0&0\\0&1&1/2&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&-1&-1/2\\0&1&0&0&0&1&-1/2&-1\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)=\left(E\middle|T^{-1}\right).$$

Далее

$$\beta=R^Tb=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1/2&0&-1/2\\-1/2&0&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\-1\\1\end{pmatrix},$$

отсюда

$$X=T^{-1}D^{-1}\beta=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1/2\\0&1&-1/2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\6\\-1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&0&-2&-1\\0&1/2&-1&-2\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\6\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\bar{x}=3\bar{e}_1+2\bar{e}_2-2\bar{e}_3+2\bar{e}_4.$

Примером матрицы с ортогональными столбцами является матрица Адамара.

Важную роль в алгебре и комбинаторике играют матрицы Адамара, которые впервые были введены в математический обиход в конце прошлого века. Сравнительно недавно, (в 1960 г.) было замечено, что эти матрицы могут быть использованы для построения кодов с большим кодовым расстоянием

$$\left(d\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

(*Жак Адамар (1865-1963) - один из крупнейших французских математиков конца XIX и первой половины XX века, автор ряда основополагающих работ в области теории чисел, алгебры и математического анализа.*)

Квадратная матрица H порядка n с элементами ±1 называется матрицей Адамара, если выполняется условие

$$HH^T=nE_n.$$

Матрицы Адамара применяются в различных областях, включая комбинаторику, численный анализ, обработку сигналов, кодирование информации.

Примеры матриц Адамара:

n = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$n=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$n=4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$n=8$