ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2
Метрические пространства. Метод итераций решения

ЗАДАНИЕ.

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации. Продолжать итерации до тех пор, пока расстояние между последовательными приближениями не станет меньше $\varepsilon = 10^{-2}$

А) в равномерной метрике $\rho_c(\overline{x},\overline{y}) = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$, (1)

Б) в метрике Минковского $\rho_1(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$. (2)

2. Оценить погрешность приближенных значений в указанных метриках .

3. Методом Зейделя найти приближенное решение системы.

Пример и указания к выполнению задания.

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4. \end{cases} \qquad AX = b \qquad (3)$$

Утверждение. Для системы (3) метод итерации сходится, если

$$|a_{ii}| > \sum_{j\ne i}|a_{ij}| \text{ для всех } i,$$

т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Алгоритм метода простых итераций

1. Привести систему $AX = b$ к виду

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4, \\ x_2 = d_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4, \\ x_3 = d_3 + c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4, \\ x_4 = d_4 + c_{41}x_1 + c_{42}x_2 + c_{43}x_3 + c_{44}x_4, \end{cases} \qquad X = D + CX \qquad (4)$$

Доказано, что если норма матрицы $\|C\| < 1$, то процесс итерации сходится к точному решению системы X^* при любом начальном векторе $X^{(0)}$.

Достаточные условия сходимости процесса итерации для норм матриц, согласованных с нормами векторов, порожденных метриками (1) и (2) соответственно

$$\|C\|_c = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}| \le \alpha_c < 1 \qquad \text{для равномерной метрики } (1),$$

или

$$\|C\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}| \le \alpha_1 < 1 \qquad \text{для метрики Минковского } (2).$$

2. Задать начальное приближение решения $X^{(0)}$ произвольно (на основании каких-либо предположений или грубой прикидки решения) или положить $X^{(0)}=\left(d_1,d_2,d_3,d_4\right)$, Положить k=1.

3. Вычислить следующее приближение $X^{(k)}=\left(x_1{}^{(k)},x_2{}^{(k)},x_3{}^{(k)},x_4{}^{(k)}\right)$, где

$$\begin{aligned}
x_1{}^{(k)} &= d_1+c_{11}x_1{}^{(k-1)}+c_{12}x_2{}^{(k-1)}+c_{13}x_3{}^{(k-1)}+c_{14}x_4{}^{(k-1)},\\
x_2{}^{(k)} &= d_2+c_{21}x_1{}^{(k-1)}+c_{22}x_2{}^{(k-1)}+c_{23}x_3{}^{(k-1)}+c_{24}x_4{}^{(k-1)},\\
x_3{}^{(k)} &= d_3+c_{31}x_1{}^{(k-1)}+c_{32}x_2{}^{(k-1)}+c_{33}x_3{}^{(k-1)}+c_{34}x_4{}^{(k-1)},\\
x_4{}^{(k)} &= d_4+c_{41}x_1{}^{(k-1)}+c_{42}x_2{}^{(k-1)}+c_{43}x_3{}^{(k-1)}+c_{44}x_4{}^{(k-1)}.
\end{aligned} \qquad (5)$$

4. Если выполнено условие $\rho\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right)<\varepsilon$, процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $X^*\approx X^{(k)}$. Иначе положить k=k+1и перейти к пункту 3 алгоритма.

В частности,

$$\rho_c\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right)=\max_{i=\overline{1,n}}\left|x_i{}^{(k-1)}-x_i{}^{(k)}\right|<\varepsilon,$$

$$\rho_1\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i{}^{(k-1)}-x_i{}^{(k)}\right|<\varepsilon.$$

Оценка погрешности этого приближения дается одной из следующих формул:

$$\rho\left(X^*,X^{(k)}\right)\le\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\rho\left(X^{(k-1)},X^{(k)}\right), \qquad (6)$$

$$\rho\left(X^*,X^{(k)}\right)\le\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,\rho\left(X^{(0)},X^{(1)}\right).$$

Значение множителя α определяется выбором метрики, в которой проверяется сходимость итерационной последовательности.

Модификацией метода простой итерации является **метод Зейделя**. Он заключается в том, что при вычислении (k)-го приближения неизвестного x_i при i >0 используются уже вычисленные ранее (k)-е приближения неизвестных $x_1,x_2,\dots,x_{i-1}$.

$$\begin{aligned}
x_1{}^{(k)} &= d_1+c_{11}x_1{}^{(k-1)}+c_{12}x_2{}^{(k-1)}+c_{13}x_3{}^{(k-1)}+c_{14}x_4{}^{(k-1)},\\
x_2{}^{(k)} &= d_2+c_{21}x_1{}^{(k)}+c_{22}x_2{}^{(k-1)}+c_{23}x_3{}^{(k-1)}+c_{24}x_4{}^{(k-1)},\\
x_3{}^{(k)} &= d_3+c_{31}x_1{}^{(k)}+c_{32}x_2{}^{(k)}+c_{33}x_3{}^{(k-1)}+c_{34}x_4{}^{(k-1)},\\
x_4{}^{(k)} &= d_4+c_{41}x_1{}^{(k)}+c_{42}x_2{}^{(k)}+c_{43}x_3{}^{(k)}+c_{44}x_4{}^{(k-1)}.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Указанные выше условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, хотя это бывает не всегда.

<u>Пример 1.</u> Методом простой итерации ε=0,01 решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

1. Уравнения, входящие в систему, переставим так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов (для той же цели можно использовать другие элементарные преобразования)

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

где $|10| > |1| + |1|$, $|10| > |2| + |1|$, $|10| > |2| + |2|$, то есть диагональные элементы преобладают.

Выражая x_1 из первого уравнения, x_2 – из второго, а x_3 – из третьего, приводим систему к виду $X = CX + D$:

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 - 0,1x_3 + 1,2 \\ x_2 = -0,2x_1 - 0,1x_3 + 1,3 \\ x_3 = -0,2x_1 - 0,2x_2 + 1,4 \end{cases}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, $$\alpha_c = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \max\{0,2; 0,3; 0,4\} = 0,4 < 1,$$

$$\alpha_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| = \max\{0,4; 0,3; 0,2\} = 0,4 < 1,$$

следовательно, условие сходимости выполнено.

2. Зададим $X^{(0)} = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$.

3. Выполним расчеты по формуле

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x_1^{(k)} = -0,1x_2^{(k-1)} - 0,1x_3^{(k-1)} + 1,2 \\ x_2^{(k)} = -0,2x_1^{(k-1)} - 0,1x_3^{(k-1)} + 1,3 \\ x_3^{(k)} = -0,2x_1^{(k-1)} - 0,2x_2^{(k-1)} + 1,4 \end{cases}$$

до выполнения условия окончания по метрике $\rho\left(X^{(k)}, X^{(k-1)}\right) < \varepsilon = 0,01$ и результаты занесем в таблицу

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\rho_c\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) = \max\limits_{i=1,3} \left\|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right\|$	$\rho_1\left(X^{(k-1)}, X^{(k)}\right) = \sum\limits_{i=1}^{3} \left\|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right\|$
0	1,2000	1,3000	1,4000	–	–
1	0,9300	1,9200	0,9000	0,5	1,15
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,13	0,322
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384	0,0924
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0108	0,0263
5	0,9996	0,9995	0,9993	0,0031 < ε	0,0075 < ε

Расчет закончен, поскольку выполнено условие окончания

$$\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\| = \rho\left(X^{(k)}, X^{(k-1)}\right) < \varepsilon = 0,01.$$

Приближенное решение задачи: $X^* \approx (0{,}99960;\,0{,}99950;\,0{,}9993)^T$.

Погрешность этих вычислений оценим по формуле (6):

$$\rho_c(X^*, X^{(k)}) \le \frac{\alpha_c}{1-\alpha_c}\,\rho_c(X^{(k-1)}, X^{(k)}) < \frac{0{,}4}{1-0{,}4}\cdot 0{,}0031 = 0{,}0021,$$

$$\rho_1(X^*, X^{(k)}) \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\,\rho_1(X^{(k-1)}, X^{(k)}) < \frac{0{,}4}{1-0{,}4}\cdot 0{,}0075 = 0{,}005.$$

Точное решение: $X^* = (1;1;1)^T$.

Пример 2. Методом Зейделя с точностью ε=0,001 решим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 1{,}2 \\ x_2 = -0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 + 1{,}3 \\ x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 + 1{,}4 \end{cases}$$

Зададим $X^{(0)} = (1{,}2 \quad 0 \quad 0)^T$. В поставленной задаче ε=0,001.

Выполним расчеты по формуле

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}1x_2^{(k)} - 0{,}1x_3^{(k)} + 1{,}2 \\ x_2^{(k+1)} = -0{,}2x_1^{(k+1)} - 0{,}1x_3^{(k)} + 1{,}3 \\ x_3^{(k+1)} = -0{,}2x_1^{(k+1)} - 0{,}2x_2^{(k+1)} + 1{,}4 \end{cases} \qquad (k=0,1,\ldots)$$

и результаты занесем в таблицу

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\lVert x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\rVert_C$
0	1,2000	0	0	–
1	1,2000	1,0600	0,9480	1,0600
2	0,9992	1,0054	0,9991	0,1008
3	0,9996	1,0002	1,0000	0,0052
4	1,0000	1,0000	1,0000	$0{,}0004 < \varepsilon$

Найденное решение $X^* = (1{,}0000 \quad 1{,}0000 \quad 1{,}0000)^T$ является точным. Расчет завершен, поскольку выполнено условие окончания

$$\left\lVert X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\rVert = 0{,}0004 < \varepsilon = 0{,}001.$$