《数学物理方法》考前练兵

一、选择题：每题 4 分共 40 分

1. 下列说法错误的是 A

$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

(A) 函数 $\sin z$ 的值域是 $[-1,1]$
(B) 函数 e^z 的周期是 $2\pi i$
(C) 函数 $\ln z$ 是多值函数
(D) 函数 $\mathrm{Re}(z)$ 不是解析函数

2. 关于柯西定理, 下列说法不正确的是 C

(A) 若 $f(x)$ 在单连通区域 B 上解析, 在闭单连通区域 $\bar{B}$ 上连续, 则沿 $\bar{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线的积分为零
(B) 闭复连通区域上的解析函数沿所有内外边界线正方向积分和为零
(C) 闭复连通区域上的解析函数沿外边界线逆时针方向积分等于沿所有内边界线顺时针积分之和
(D) 闭复连通区域上的解析函数沿外边界线逆时针方向积分等于沿所有内边界线逆时针积分之和

3. $\ln(-1) =$ B

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$

(A) $-i2k\pi$

(B) $i(2k+1)\pi$

(C) $i2k\pi$

(D) 2π

4. 计算积分 $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$ A

$\Rightarrow \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 2

5. 幂级数 $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$ 的收敛半径为 B

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 2π

$\sum(\cdots) = \frac{1}{1+z^2}$ $\quad \frac{1}{1+x}$ 收敛半径为1

6. 勒让德多项式展开式 $2x^3 + 3x + 4 = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$ 中 f_1 和 f_2 的取值为 A

(A) $f_1 = \frac{21}{5}, f_2 = \frac{4}{5}$;
(B) $f_1 = \frac{4}{5}, f_2 = \frac{21}{5}$;
(C) $f_1 = 7, f_2 = \frac{4}{3}$;
(D) $f_1 = \frac{4}{3}, f_2 = 7$;

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

7. 根据达朗贝尔公式, 一维无界定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \\ u_t \mid t = 0, \end{cases}$$

$u = a(x+at) + b(x-at)$

$u|_{t=0} = a(x) + b(x) = f(x)$

$u_t|_{t=0} = a[a_t(x+at) - b_t(x-at)] = 0 \Rightarrow a_t = b_t$

$\therefore \int a_t\,dt = \int b_t\,dt \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}f$

的解可以表示为 A

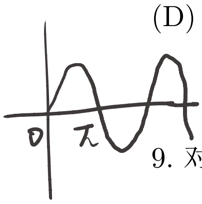
(A) $u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]$; (B) $u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f(\xi)d\xi$
(C) $u(x,t) = \frac{1}{2a}[f(x+at) + f(x-at)]$; (D) $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} f(\xi)d\xi$

$\frac{z}{\tan z}$

8. 下列说法正确的是 C

$u_t(0,t)=0$ 才为绝热,

(A) 在有界热传导方程中, 边界条件 $u_x(0,t) \equiv 0$ 表示端点 0 是绝热的;
(B) 若 $f(z)$ 在原点解析, 则 0 是 $z^2 f(z)$ 的 2 阶零点;
(C) 若 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $f(z)$ 在 ∞ 的留数是零; 令 $t=\frac{1}{z}$, 则 $f(t)$ 的可去奇点为 $t=0$ $(z=\infty)$ 可去奇点的留数为0
(D) 函数 $f(z)$ 的解析零点或极点都是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的二阶极点。



$\frac{1}{\cot z}$ $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\tan z}=1$. 因此为可去奇点

9. 对于下列式子，计算结果正确的是 A

$$P=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\quad(0<\varepsilon<1)$$

(A) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$
(B) $-\frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$
(C) $-\frac{\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$
(D) $\frac{\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$

10. 设 $\frac{1}{1+x^4}$ 的傅立叶变换是 $F(k)$, 则函数 $\frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ 的傅立叶变换等于 B

A. $\frac{ik}{4}F(k)$
B. $-\frac{ik}{4}F(k)$
C. $-\frac{k}{4}F'(k)$
D. $-k^2F(k)$

二、填空题: 每题 4 分共 20 分

1. $z_0=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的 可去奇点 (从" 可去奇点", " 极点" , " 本性奇点" 中选填)

2. 已知拉普拉斯变换的像函数 $F(p)=\frac{3p}{p^2-1}$, 求原函数 $f(t)=$ $\frac{3}{2}(e^{-t}+e^{t})$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(2n)^n}{n!}}_{a_n}z^{n+1}$ 的收敛半径为 $\frac{1}{2e}$

PS: $\cos(nt) \doteq \frac{p}{p^2+n^2}$ $\sin(nt) \doteq \frac{n}{p^2+n^2}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^n n^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e^{-1}}{}^{-1}=\frac{1}{2e}$$

4. 函数 $w=z^2$ 在 $z=1-i$ 处的旋转角为 $-\frac{\pi}{4}$

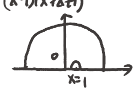
5. $\operatorname{Res}\left(z^2 e^{\frac{1}{z}}, \infty\right)=-\frac{1}{6}$

三、计算题: 第 1 题每题 5 分, 其余题每题 10 分, 共 40 分

1 计算下列积分

(1) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3-1}\, \mathrm{d}x$;

解: $P=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$，有三个奇点: $x_0=1$; $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

构造围道: 

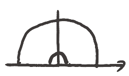
$\operatorname{Res}f(x)|_{x=1}=\frac{1}{3}$

$\operatorname{Res}f(x)|_{x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}i)$

由围道积分有 $P=+2\pi i\operatorname{Res}f(x_2)+\pi i\operatorname{Res}f(x_0)$
$=-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

(2) $P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-1}{x^2}\, \mathrm{d}x, \quad k>0$

解: $e^{ikx}-1=\sum\frac{(ikx)^n}{n!}$，$C_{-1}x^{-1}=ikx/x^2=ikx^{-1}$，故 $C_{-1}=ik$，故留数 $\operatorname{Res}f(0)=ik$，0 为极点

构造围道: 

故 $P=\pi i\operatorname{Res}f(0)=-k\pi$

2 侧面绝热的均匀细杆, $0 \leqslant x \leqslant l$, 其导热系数为 κ, 初始温度为 T_0, 其两端保持不变的温度 $u(0,t)=T_1, u(l,t)=T_2, T_1, T_2$ 均为常数. 求杆上各点的温度分布随时间的变化关系. 当 $t\to\infty$ 时, 给出杆上的温度分布的表达式, 并解释这一结果在物理上的合理性及其满足的物理定律.

3 求解半径为 a 的空心球壳内的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & r<a\\ u|_{r=a}=\cos^2\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

$\nabla^2 u=0$

$\Phi(\varphi)$

$u(r,\theta,\varphi)$ 通解为 $u=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+B_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$，z轴对称与 φ 无关

$u=\frac{1}{3}+\frac{r^2}{3a^2}(3\cos^2\theta-1)$

自然边界条件要求 $|u|<\infty$，故 $B_l=0$，$u=\sum A_l r^l P_l(\cos\theta)$

$u(a,\theta)=\sum A_l a^l P_l(\cos\theta)=A_0+A_1 a\cos\theta+A_2 a^2(3\cos^2\theta-1)+\cdots=\cos^2\theta$

$A_2=\frac{1}{3a^2}$，$A_1=0$，$A_0=1$，other $=0$

4 高为 h, 半径为 b, 导热系数为 k 的圆柱体, 其下底面保持零度, 上底面的温度为 ρ 的函数 $f(\rho)$, 其侧面在零度的环境中自由冷却 (满足牛顿冷却定律), 冷却系数为 H, 写出定解条件并求柱内温度场的稳定分布.

解 11 (1) 把积分变量 $x \to z$ 时，考虑回路积分

$$I = \oint_c \frac{1}{z^3 - 1} \mathrm{d}z$$

积分回路 c 为：以原点为圆心、R 为半径的在上半平面的逆时针方向的半圆周 C_R，在 x 轴上从 $-R$ 到 $1-\varepsilon$；然后以 1 为圆心、ε 为半径的在上半平面的顺时针方向的小半圆周 C_ε；最后在 x 轴上从 $1+\varepsilon$ 到 R，其中 ε 为一无限小量.

在此积分中，被积函数为

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z^2+z+1)}$$

$f(z)$ 的奇点有：$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$，都是单极点.

在实轴上有奇点 $z_1 = 1$，在上半平面上有奇点 $z_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 计算这两个极点的留数

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \lim_{z \to -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{6}\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$$

由于

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^3 - 1} \mathrm{d}z = 0$$

故积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1} \mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res} f(z_2) + \pi \mathrm{i} \operatorname{Res} f(z_1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

1.2 (2) 把积分变量 $x \to z$ 时，被积函数变为

$$f(z)=\frac{e^{ikz}-1}{z^2}$$

由 e^{ikz} 的泰勒展开式可知

$$f(z)=\frac{ik}{z}-\frac{k^2}{2}+\frac{(ik)^3}{3!}z+\cdots$$

因此，可以判断只有 $z=0$ 为函数 $f(z)$ 的单极点，且其留数为

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\frac{e^{ikz}-1}{z^2}=ik$$

作回路积分

$$I=\oint_c \frac{e^{ikz}-1}{z^2}dz$$

积分回路 c 为：以原点为圆心、R 为半径的在上半平面的逆时针方向的半圆周 C_R，在 x 轴上从 $-R$ 到 $-\varepsilon$；然后以原点为圆心、ε 为半径的在上半平面的顺时针方向的小半圆周 c_ε；最后在 x 轴上从 ε 到 R，其中 ε 为一无限小量，且 $R\to\infty$，则

$$I=\oint_c \frac{e^{ikz}-1}{z^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{ikz}-1}{z^2}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_\varepsilon}\frac{e^{ikz}-1}{z^2}dz+P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}-1}{x^2}dx$$

对于

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{ikz}-1}{z^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{ikz}}{z^2}dz-\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2}dz=0$$

其中，由约当引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{ikz}}{z^2}dz=0$$

由 $\lim_{|z|\to\infty} z\cdot\frac{1}{z^2}=0$，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2}dz=0$$

故积分

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}-1}{x^2}dx=\pi i\operatorname{Res} f(0)=\pi i\cdot ik=-k\pi$$

2.

看成线性

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = T_1, \quad u(l,t) = T_2 \\ u(x,0) = T_0 \end{cases} \tag{1}$$

这是关于齐次方程、非齐次边界条件的定解问题，所以，首先要把边界条件齐次化，设

$$u(x,t) = k(x,t) + w(x,t) \tag{2}$$

可设 $k(x,t)$ 具有形式为

$$k(x,t) = A(t)x + B(t) \tag{3}$$

要满足

$$\begin{cases} k(0,t) = B(t) = T_1 \\ k(l,t) = A(t)l + B(t) = T_2 \end{cases} \tag{4}$$

可得

$$k(x,t) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1 \tag{5}$$

则有

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0 \tag{6}$$

由于 $k(x,t)$ 的形式与 t 无关，由定解问题（1），可得 $w(x,t)$ 的定解问题

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = T_0 - \dfrac{T_2 - T_1}{l} x - T_1 \end{cases} \tag{7}$$

此定解问题可直接用分离变量法求解，令

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

可得 $X(x)$ 的定解问题为

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

而 $T(t)$ 满足的方程为

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \tag{10}$$

由于定解问题(9)为 S-L 本征值问题，可解得本征值 λ 为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{11}$$

其相应的本征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{12}$$

对应于 λ_n，方程(10)的解为

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \tag{13}$$

可得

$$w_n=X_n(x)T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{14}$$

则定解问题(7)的形式解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

由(7)式中的初始条件

$$w(x,0)=T_0-T_1-\frac{T_2-T_1}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

确定系数 C_n

$$\begin{aligned}
C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\left(T_0-T_1-\frac{T_2-T_1}{l}x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{-2}{n\pi}(T_0-T_1)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l-\frac{2(T_2-T_1)}{l^2}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2(T_0-T_1)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{2(T_2-T_1)}{n\pi l}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l-\frac{2(T_2-T_1)}{n\pi l}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2(T_0-T_1)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]+\frac{2(T_2-T_1)}{n\pi}(-1)^n\\
&=\frac{2(T_0-T_1)}{n\pi}-\frac{2(T_0-T_2)}{n\pi}(-1)^n=\frac{2}{n\pi}\left[(T_0-T_1)-(-1)^n(T_0-T_2)\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

由(2)、(5)、(15)和(16)式，可得原定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{T_2-T_1}{l}x+T_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(T_0-T_1)-(-1)^n(T_0-T_2)\right]\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{17}$$

从这一解的表达式可看出，当时间 $t\to\infty$ 时，等式右边最后一项为零，即整

个求和号内均为零，杆的初始温度 T_0 已不起作用，此时杆内的温度分布为

$$u(x,t)=\frac{T_2-T_1}{l}x+T_1 \tag{18}$$

即当时间 $t\to\infty$ 时，杆内的温度分布只取决于杆两端的温度 T_1 和 T_2，并且呈线性分布.

3 **解** 此问题是以 z 轴为对称的定解问题，u 与 φ 无关，$u=u(r,\theta)$. 由于自然边界条件要求 $|u|<\infty$，故空心球壳内解的形式为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{1}$$

由边界条件 $u|_{r=a}=\cos^2\theta$，有

$$u(a,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l a^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)=\cos^2\theta \tag{2}$$

由 $\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1, \mathrm{P}_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$，比较(2)式两边系数，$\cos\theta$ 的奇次幂的系数及 $l>2$ 的偶次幂的系数都为零，有

$$c_0+\frac{1}{2}c_2a^2(3\cos^2\theta-1)=\cos^2\theta \tag{3}$$

可得

$$\begin{cases} c_0-\dfrac{1}{2}c_2a^2=0 \\ \dfrac{3}{2}c_2a^2=1 \end{cases} \tag{4}$$

即

$$c_2=\frac{2}{3a^2},\quad c_0=\frac{1}{3} \tag{5}$$

故原定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}\mathrm{P}_0(\cos\theta)+\frac{2r^2}{3a^2}\mathrm{P}_2(\cos\theta)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{r^2}{a^2}(3\cos^2\theta-1) \tag{6}$$

4 解 温度场 u 稳定时，满足 $\nabla^2 u = 0$，定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{H}{k} u\right)\right|_{\rho=b} = 0 \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=h} = f(\rho) \end{cases} \tag{1}$$

由于边界条件和初始条件都与角度 φ 无关，故定解问题与角度 φ 无关，设

$$u = u(\rho, z) = R(\rho) Z(z) \tag{2}$$

在柱坐标系下，方程为

$$Z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho}\right) + R \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

即

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

设

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R} \frac{\partial R}{\partial \rho} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\lambda, \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

则径向部分的方程为

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \lambda R = 0 \tag{6}$$

此方程为零阶贝塞尔方程，其解为零阶贝塞尔函数

$$R(\rho) = C\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) \tag{7}$$

对第三类齐次边界条件分离变量，得

$$\left.\left(\frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{H}{k} R\right)\right|_{\rho=b} = 0 \tag{8}$$

把(7)式代入(8)式中，有

$$\sqrt{\lambda}\mathrm{J}_0'\left(\sqrt{\lambda}b\right)+\frac{H}{k}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda}b\right)=0 \tag{9}$$

可解得满足此方程的解，即本征值

$$\lambda_n,\quad \lambda_n>0,\ n=1,2,3,\cdots \tag{10}$$

注：在此省略了零阶贝塞尔函数的记号，即 $\lambda_n=\lambda_n^{(0)}$.

与本征值 λ_n 对应的正交归一的本征函数为

$$R_n^{(0)}(\rho)=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{11}$$

其中归一化常数 $\mathrm{N}_n^{(0)}$ 为

$$\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^2=\int_0^b \mathrm{J}_0{}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho \tag{12}$$

由(5)和(10)式可得到关于变量 z 的方程

$$Z_n''-\lambda_n Z_n=0 \tag{13}$$

此方程的解为

$$Z_n(z)=C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z} \tag{14}$$

故可得

$$\begin{aligned}u_n(\rho,z)&=R_n^{(0)}(\rho)\left(C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\\&=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\left(C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

定解问题解的形式为

$$\begin{aligned}u(\rho,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\rho,z)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\left(C_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}+D_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

代入边界条件 $u(\rho,0)=0$，可得

$$C_n+D_n=0\quad\Rightarrow\quad C_n=-D_n \tag{17}$$

有

$$\begin{aligned}u(\rho,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)C_n\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}z}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}z}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)C_n 2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}z\end{aligned} \tag{18}$$

由 $Z(z)$ 的边界条件 $u(\rho,h)=f(\rho)$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)C_n 2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}h=f(\rho) \tag{19}$$

把 $f(\rho)$ 在本征函数 $R_n^{(0)}(\rho)=\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)$ 上展开

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right) \tag{20}$$

其中

$$f_n=\int_0^b\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho \tag{21}$$

对比(19)和(20)式，可得

$$C_n=\frac{1}{2}\frac{f_n}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}h} \tag{22}$$

将其代入(18)式，可得原定解问题的解为

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{N}_n^{(0)}\right]^{-1}f_n\mathrm{J}_0\left(\sqrt{\lambda_n}\rho\right)\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}z}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda_n}h} \tag{23}$$