Prof. Dr. Klaus Ecker
Theodora Bourni

23.10.2012
Abgabe: 30.10.2012
10.00 Uhr, Tutorenfach

Aufgabenblatt 1

zur Analysis III

1. *Äquivalenz von Metriken*

   Auf $\mathbb{R}^n$ seien drei verschiedene Normen gegeben durch

   $$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)},$$

   $$\sigma(x,y) := \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i| \qquad , \qquad \varrho(x,y) := \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

   (i) Es bezeichnen $B_r^d(x)$, $B_r^\sigma(x)$ und $B_r^\varrho(x)$ offene Kugeln um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r bez. d, σ bzw. ϱ. Finden Sie nur von n abhängige Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4, so dass

   $$B_{C_1r}^\varrho(x) \subset B_r^d(x) \subset B_{C_2r}^\sigma(x) \quad \text{sowie} \quad B_{C_3r}^\sigma \subset B_r^d(x) \subset B_{C_4r}^\varrho(x).$$

   (ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen in $(\mathbb{R}^n, d)$. Zeigen Sie, dass dann U auch offen ist in $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ und $(\mathbb{R}^n, \sigma)$.

2. *Vollständigkeit von Funktionräumen*

   Für $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \neq \emptyset$ setzen wir

   $$B(E) := \left\{f\colon E \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist beschränkt}\right\}.$$

   Ferner definieren wir für zwei Funktionen $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ ihren Abstand

   $$d(f,g) := \sup_{x\in E}|f(x)-g(x)|.$$

   Zeigen Sie, dass $(B(E), d)$ vollständig ist.

3. *Norm und Skalarprodukt*

   Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf einem rellen Vektorraum X. Wir definieren eine Norm auf X gemäß

   $$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}\,.$$

   Zeigen Sie:

   (i) $\langle x,y\rangle \le \|x\|\|y\|$ und
   (ii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ mit Hilfe von (i).

   Betrachte nun den Folgenraum

   $$\ell^2 := \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2 < \infty\right\}.$$

   (iii) Zeigen Sie, dass durch

   $$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}$$

   eine Norm auf ℓ^2 definiert ist.