Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: XY

Aufgabe 1

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$.

a) Berechne die Kondition $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

Wegen $\|A\|_\infty = 2$ und $\|A^{-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon}$ folgt

$$\kappa(A) = 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon}$$

.

b) Löse die Gleichungssysteme $Ax_1 = b_1$ und $Ax_2 = b_2$ und interpretiere die Ergebnisse im Bezug auf $\kappa(A)$.

Beide LGS sind bereits in Zeilenstufenform, sodass wir einfach rückwarts substituieren können.
Für das LGS $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{array} \right)$:

(I) $\varepsilon x_{1_2} = \varepsilon \Leftrightarrow x_{1_2} = 1$
(II) $x_{1_1} + x_{1_2} = 2 \Leftrightarrow x_{1_1} + 1 = 2 \Leftrightarrow x_{1_1} = 1$
$\Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für das LGS $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{array} \right)$:

(I) $\varepsilon x_{2_2} = 1 \Leftrightarrow x_{2_2} = \frac{1}{\varepsilon}$
(II) $x_{2_1} + x_{2_2} = 0 \Leftrightarrow x_{2_1} + \frac{1}{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow x_{2_1} = -\frac{1}{\varepsilon}$
$\Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$.
yada yada, kommentare!!

Ausgabe 2

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$, mit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \sqrt(2) & \frac{1}{\sqrt(2)} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \sqrt(2) & \sqrt(\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie in matlab mittels \-Operator die Lösungen der LGS
$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, By = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrizen werden mittels der folgenden Kommandos in matlab definiert:

```
>> A = [1, 1/2; sqrt(2), 1/sqrt(2)]
>> B = [1, 1/2; sqrt(2), sqrt(1/2)]
```

Wir berechnen die Lösungen für x und y mittels \-Operator wie folgt:

```
>> x =  A \ [1;1]
>> y =  B \ [1;1]
```

Dabei kommt bei der ersten Berechnung der Hinweis "Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 7.850462e-17.", bei der zweiten Berechnung die Fehlermeldung "Matrix is singular to working precision.". Als Lösung erhalten wir $x = 10^{15} \cdot \begin{pmatrix} -1.3191 \\ 2.6381 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -\infty \\ \infty \end{pmatrix}$.

b) Erklären Sie ihre Beobachtungen.

In matlab werden die Terme $1/sqrt(2)$ und $sqrt(1/2)$ verschieden gerundet. Dies kann man z.B. daran sehen, dass ihre Differenz von Null verschieden ist:

```
>> 1/sqrt(2) - sqrt(1/2)
ans = -1.1102e-16
```

Aus diesem Grund entstehen bei der Berechnung verschiedene Rundungsfehler. Schauen wir uns die Matrizen A und B an, so sehen wir, dass diese singulär sind, da $det(A) = det(B) = 0$ gilt. Aus diesem Grund können wir das LGS nicht mit "\"lösen, da hier die Matrizen invertiert werden. TODO:Warum klappt (B) und (A) nicht?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die von der 1-Norm induzierte Matrixnorm der Spaltensummennorm entspricht.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A \neq 0$, zu zeigen:

$$\|A\|_1 := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Wie in CoMa I gezeigt, gilt $\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$, mit $\|x\|_1 = 1$.

(1) z.z. $\|A\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\|Ax\|_1 \overset{\text{Def.}\|.\|_1}{=} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\overset{(**)}{=} \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad (**) \text{ gilt, da} \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1$$

$\Rightarrow \|A\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

(2) z.z. $\|A\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
Sei e_j der j-te Einheitsvektor.

$$\max_{1\leq j\leq n} \|Ae_j\|_1 \overset{\text{Def.}}{=} \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \overset{(***)}{\leq} \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \|A\|_1$$

(***) gilt, da das Supremum natürlich nicht kleiner werden kann.
$\Rightarrow \|A\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$\Longrightarrow \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$\square$