

## Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

**Aufgabe 1** (Untergruppen von Primzahlindex)

Geben Sie für jede Primzahl  $p > 2$  endliche Gruppen  $G$  und  $H$  an, so dass  $\#(G/H) = p$  und  $H$  kein Normalteiler von  $G$  ist.

**Lösung:**

Es sei  $G = S_p$  und damit  $\#G = \#S_p = p!$ . Sei nun  $H$  die Gruppe der Permutationen, die alle Elemente bis auf das erste Permutiert, also  $H = \{\sigma \in G \mid \sigma(1) = 1\}$ .

$H$  erfüllt die Gruppenaxiome:

**Abgeschlossenheit:**

Seien  $a, b \in H$ , dann ist auch  $a \cdot b \in H$ , da  $(a \cdot b)(1) = a(b(1)) \stackrel{b \in H}{=} a(1) = 1$

**Inverses Element:**

Sei  $a \in H$ , dann ist auch  $a^{-1} \in H$ , da

$$\begin{aligned} a^{-1}(1) &= 1 \\ \Leftrightarrow a \cdot a^{-1}(1) &= a(1) \\ \Leftrightarrow id(1) &= a(1) \\ \Leftrightarrow 1 &= 1 \end{aligned}$$

**Neutrales Element:**

$id(1) = 1 \Rightarrow id \in H$ .

□

$H \cong S_{p-1}$ , da wir bis auf ein Element alle Elemente permutieren.

Nun gilt nach dem Satz von Lagrange:  $\#G = \#H \cdot \#(G/H)$ . Das  $\#(G/H) = p$ . Wir haben also eine Linksunterklasse gebildet, die genau  $p$  Elemente enthält.

$H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$ .

Sei nun  $g = g^{-1} = (1\ 2) \in G$  und  $h = (2\ 3) \in H$ .

$ghg^{-1}(1) = gh(2) = g(3) = 3 \notin H$ .

Damit kann  $H$  nicht Normalteiler von  $G$  sein.

□

**Aufgabe 2** (Die orthogonale Gruppe)

a) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe  $O(2)$  von Spiegelungen erzeugt wird.

**Lösung:**

tbd

- b) Es sei  $N \triangleleft O(2)$  eine normale Untergruppe, die eine Spiegelung enthält. Beweisen Sie  $N = O(2)$ .

**Lösung:**

tbd

- c) Es seien  $r \in O(2)$  eine Drehung und  $G = \langle r \rangle$ . Weise Sie nach, dass  $N$  eine normale Untergruppe ist.

**Lösung:**

tbd

- d) Wann ist die Untergruppe  $G$  aus Teil c) endlich?

**Lösung:**

tbd

**Aufgabe 3** (Die Kommutatorenuntergruppe von  $S_n$ )

**Satz:** Für  $n > 2$  gilt:

$$[S_n, S_n] = A_n.$$

**Bew.:**

tbd

**Aufgabe 4** (Die alternierende Gruppe  $A_4$ )

- a) Zeigen Sie, dass  $e$  zusammen mit den Permutationen vom Zykeltyp  $(2, 2)$  eine normale Untergruppe  $H \triangleleft A_4$  bildet.

**Lösung:**

tbd

- b) Geben Sie einen Homomorphismus  $\varphi : A_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3$  mit  $\text{Ker}(\varphi) = H$  an,  $H$  die Untergruppe aus Teil a).

**Lösung:**

tbd