Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

**Aufgabe 20:** *Stetigkeit der Abstandsfunktion*

Für eine feste Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abstandsfunktion $dist(x, M) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $(x, M) \mapsto \inf\{|x - y| \mid y \in M\}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \;:\; |dist(x, M) - dist(y, M)| \leq |x - y|$$

**Beweis:**
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Und $z^*, z' \in M$, so dass $|x - z'| = dist(x, M)$, $|y - z^*| = dist(y, M)$.

$$\begin{aligned} |dist(x, M) - dist(y, M)| &\overset{Def.}{=} |\inf\{|x - z| \mid z \in M\} - \inf\{|y - z| \mid z \in M\}| \\ &\overset{z', z^*}{=} |\,|x - z'| - |z^* - y|\,| \\ &\leq |\,|x - z' + z^* - y|\,| \\ &= |x - y + z^* - z'| \\ &\leq |x - y| + |z^* - z'| \\ &\leq |x - y| \end{aligned}$$

Gilt, da auf dem Metrischen Raum $\mathbb{R}^n$ die Dreicksungleichung gilt. □

(ii) Ist die Distanzfunktion gleichmäßig stetig?
**Lösung:**
Wir haben es hier prinzipiell mit eine Lipschitz stetigen Funktion zu tun, mit der Konstante 1. Da wir den Satz aber noch nicht für metrische Räume gezeigt haben, werden wir wohl das ganze noch per Hand beweisen.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Sei $\delta = \varepsilon$.
Nun wissen wir, nach Vorraussetzung gleichmäßigen Stetigkeit, dass $|x - y| < \delta = \varepsilon$ gelten soll. Aus dem ersten Teil wissen wir aber auch, dass $|dist(x, M) - dist(y, M| \leq |x - y|| < \varepsilon$ gelten muss.

Damit ist *dist* gleichmäßig stetig.

□

**Aufgabe 21** *Stetige Funktionen auf dichten Teilmengen*

Seien $g, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen. Sei fernen $S \subset \mathbb{R}^n$ eine *dichte* Teilmenge des $\mathbb{R}$, d.h. es gilt $\overline{S} = \mathbb{R}^n$. Schließlich gelte

$$\forall x \in S \;:\; f(x) = g(x).$$

Zeigen Sie, dass dann auch

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \;:\; f(x) = g(x)$$

richtig ist.

**Beweis:**
Für stetige Funktionen gilt auch bei $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dass $\lim\limits_{n\to a} f(n) = f(\lim\limits_{n\to a} n)$.

Nun wissen wir über den Abschluss, dass für jeden Punkt aus $x \in \overline{S}$ eine Folge $(t)_{n\in\mathbb{N}}$ in $S$ existiert, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$.

Nun sei $x \in \mathbb{R}^n = \overline{S}$. Wir wissen nun, dass eine Folge $(t)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{Def.:t}{=} f(\lim_{n\to\infty} t_n) \\ &\overset{stetig}{=} \lim_{n\to\infty} f(t_n) \\ &\overset{Vor.}{=} \lim_{n\to\infty} g(t_n) \\ &\overset{stetig}{=} g(\lim_{n\to\infty} t_n) \\ &\overset{Def.:t}{=} g(x) \end{aligned}$$

## Aufgabe 22 *Stetigkeit in höheren Dimensionen*

Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

(i)

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Lösung:**
tbd

(ii)

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Lösung:**
tbd

## Aufgabe 23 *Halbstetige Funktionen*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

(i) Definieren Sie analog *oberhalbstetig*.
**Def.:**
tbd

(ii) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine nicht stetige, aber oberhalbstetige Funktion $f$ und für eine nicht stetige, aber unterhablstetige Funktion $g$ an. Skizzieren Sie!
**Lösung:**
tbd

(iii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Menge

$$\Omega_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\}$$

offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.
**Beweis:**
tbd