Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 10: *Berechnung von Taylorpolynomen*

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad n um den Punkt $x_0 = 0$. Die Taylorformel um den Entwicklungspunkt x_0 sieht folgender Maßen aus

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

(i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$:
Beh.: $\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$
I.A.: $k = 1$
$f^{(1)}(x) = f'(x) = (\frac{d}{dx}1 + x) \cdot -1 \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$
$= (-1)^1 \cdot 1! \frac{1}{(1+x)^2}$
$k = 0$ ist die Funktion selber.
I.S.: $k \rightarrow: k+1$

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)} \\ &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^k k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \cdot 1 \cdot -(k+1)\frac{1}{(1+x)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \frac{1}{(1+x)^{k+2}} \end{aligned}$$

$\square$

Diese Ableitung benutzen wir nun, um das Taylorpolynom aufzuschreiben.

$$\begin{aligned} T_n(x) &\overset{Def.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \\ &\overset{Abl.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k! \frac{1}{(1+a)^{k+1}}}{k!}(x-a)^k. \\ &\overset{a=0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(1+0)^{k+1}} \cdot (x-0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

Wir haben nun die Monomdarstellung erreicht, wobei die Koeffizienten $a_k = (-1)^k$ sind.

(ii) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$:
Sei $\xi(z) = \prod_{k=0}^{z-1} 2k+1$, das Produkt aller ungeraden Zahlen bis vor die z-te ungerade Zahl.
Beh.: $g^{(k)} = \frac{\xi(k)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1+2k}{2}}$
I.A.:

$k = 0$ $g^{(0)} = \frac{1}{2^0}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = g(x)$
I.S.: $k \to k+1$

$$\begin{aligned}
g^{(k+1)} &= \frac{d}{dx} g^{(k)} \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{\xi(k)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1+2k}{2}}\right) \\
&= \frac{\xi(k)}{2^k} \cdot -1 \cdot -\frac{2k+1}{2}(1-x)^{1+\frac{1+2k}{2}} \\
&= \frac{\xi(k)\cdot(2k+1)}{2^k \cdot 2}(1-x)^{\frac{2(k+1)}{2}} \\
&= \frac{\xi(k+1)}{2^{k+1}}(1-x)^{\frac{1+2(k+1)}{2}}
\end{aligned}$$

Mit dieser Ableitung können wir nun das Taylorpolynom aufschreiben:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\xi(k)}{2^k}(1-a)^{-\frac{1+2k}{2}}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\xi(k)}{2^k} 1^{-\frac{1+2k}{2}} x^k \\
&= \frac{\xi(k)}{2^k k!} x^k
\end{aligned}$$

Wir lassen es an dieser Stelle so stehen. Wir haben einen Faktor, abhängig von k und sind in der Monomdarstellung.
Man kann sich gerne davon überzeugen, dass $a_k = \frac{\xi(k)}{2^k k!} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} k!}$ gilt.

(iii) $h(x) = xe^x$
Beh.: $h^{(k)}(x) = (x+k)e^x$
I.A.: $k = 0$ $h^{(0)} = (x+0)e^x = xe^x = h(x)$
I.S.: $k \to k+1$

$$\begin{aligned}
h^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} h^{(k)}(x) \\
&= \frac{d}{dx}(x+k)e^x \\
&= e^x + (x+k)e^x \\
&= (x+(k+1))e^x
\end{aligned}$$

Nun können wir das Taylorpolynom vom Grad n am Entwicklungspunkt $a = 0$ aufstellen.

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+k)e^a}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k
\end{aligned}$$

Wir haben die Monomdarstellung mit den Koeffizienten $a_k = \frac{1}{(k-1)!}$.

Aufgabe 11: *Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionsfolgen den punktweisen Limes

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(falls er existiert) und prüfen Sie, welche der Folgen gleichmäßig konvergiert.

(i) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ auf $[-1, 1]$.
Zunächst bestimmen wir den Limes punktweise:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{x^2}\right)^{-n} \end{aligned}$$

Für $a \geq 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, Wir wissen, dass e^x streng monoton steigt und bei $x = 0$ eins erreicht. Daher ist e^x für alle $x > 0$ größer als 1. Daraus folgt, dass $f_n(x) = 0$ auf $[-1, 0)$ und $(0, 1]$.
Im Fall $x = 0$ ergibt sich $e^{0\cdot -n} = 1$ für alle n. Daher ist $f(0) = 1$.

Gleichmäßige Konvergenz:
Da e^x für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist und f nicht stetig ist, kann die Folge f_n nicht gleichmäßig konvergieren (Der Grenzwert jeder gleichmäßig konvergierenden Funktionsfolge stetiger Funktionen ist wieder stetig).

(ii) $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ auf $[0, \infty)$.
Wir wissen, dass die Funktion $\sqrt{\cdot}$ auf dem Interval stetig ist. Wir können den Limes also in die Funktion ziehen.

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} g_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \\ &= \sqrt{(\lim_{n\to\infty} x^2) + (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})} \\ &= \sqrt{x^2 + 0} \\ &= x \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz:
Sei $\varepsilon > 0$. Z.z. $\exists N > 0 \forall n > N \forall x : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{N}} - x\right| &< \varepsilon \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{N}} - x &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{N}} &< \varepsilon + x \\ \Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{1}{N} &< \varepsilon^2 + 2\varepsilon x + x^2 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{N} &< \varepsilon^2 + 2\varepsilon x \end{aligned}$$

Und da $\frac{1}{N} < \varepsilon^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon x$ gilt die Ungleichung für alle $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Also ist g_n gleichmäßig konvergent (N hängt nicht von x ab).

(*) gilt, da der rechte Term der Differenz immer kleiner als der linke ist.

(iii) $h_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$
Wir wissen nach Umformung, dass gilt $n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$ die als inverses Element bezüglich der Multiplikation. Nun können wir auf. $h_n(x) = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{\frac{1}{n}}$ den Satz von l'Hopital

anwenden.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \lim_{n\to\infty} h_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}}{\frac{1}{n}} \\
&\overset{l'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\cdot -\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} -n^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} -n^2\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}}{n^2\cdot 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}}{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \\
& \quad \text{Alles konvergiert nun} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+0}\cdot 0}{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x+0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz:
Die Folge konvergiert gleichmäßig, das kann man ganz schön auf einem Plot sehen. Aber irgendwie fällt uns dazu keine guter Beweis ein :(

(iv) $k_n(x) = \arctan(nx)$ auf $(-\infty, \infty)$.
Analysieren der Funktion durch Fallunterscheid:
Fall 1: $x = 0$.
Für $x = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \lim_{n\to\infty} k_n(0) = \lim_{n\to\infty} \arctan(n\cdot 0) = \lim_{n\to\infty} \arctan(0) = 0$.

Fall 2: $x > 0$.
Für $x > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \lim_{n\to\infty} \arctan(n) \overset{(**)}{=} \frac{\pi}{2}$.

Fall 3: $x < 0$.
Für $x < 0$ ist $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \lim_{n\to\infty} \arctan(-n) \overset{(**)}{=} -\frac{\pi}{2}$.

Also ist $k(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{, falls } x < 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$.

Insbesondere ist k nicht stetig auf $(-\infty, \infty)$, allerdings ist $\arctan(x)$ stetig für alle $x \in \mathbb{R}$. Also kann die Folge $k_n(x)$ nicht gleichmäßig konvergieren (Der Grenzwert jeder gleichmäßig konvergierenden Funktionsfolge stetiger Funktionen ist wieder stetig).

(**) gilt, da für $\tan(x)$ für $x = \pm\frac{\pi}{2}$ Asymptoten sind (und arctan die Umkehrfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist).

Aufgabe 12: *Gleichmäßige Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie folgende Funktionsreihen auf gleichmäßige Konvergenz.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha > 1$.
Wir schätzen zunächst die einzelnen Folgeglieder ab

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \\
&\overset{\sin(a)\leq 1}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{k^\alpha}\right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}
\end{aligned}$$

Wir haben nun eine Folge von Zahlen gefunden $M_k = \frac{1}{k^\alpha}$ so dass du Funktionen der Reihe alle kleiner sind. Nach dem Weierstrass M-Test, gilt also, dass die urpsrüngliche Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_n$ konvergiert[1].

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Für die Reihe muss gelten, dass $|\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x}{n(1+nx^2)}| < \varepsilon$, für die üblichen Bedingungen an $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}, n > N, x \in A$. Nun gilt, dass auf dem Interval $[0, \infty)$ (und dem negativen symmetrisch), dass du funktion mit $\lim\limits_{n \to x} \infty f_n(x)$ und $\lim\limits_{n \to x} 0 f_n(x)$ für jedes feste n gegen 0 konvergiert. Dies liegt daran, dass der Nenner quadratisch in x wächst im Zähler allerdings nur linear. Der Fall gegen 0 konvergiert gegen 0, da der Nenner bei Konvergenz gegen 0 immer noch das Argument $(1 + nx^2)$ besitzt und daher nicht kleiner werden kann als 1. Die Funkion in der Reihe ist darüber hinaus stetig, da der Nenner keine Nullstelle hat, die gebrochen rationale Funktion daher keine Polstelle besitzt, die uns in die Berechnung schlägt.
Damit können wir also einen Maximalwert für x errechnen, so dass wir schließlich ein N entsprechend des Maximalwertes erreichen, so dass die Reihe immer innerhalb der ε Beschränkung bleibt.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Diese Reihe konvergiert Punktweise, daher kann der Trick von eben nicht angewandt werden. Wir zeigen aber, dass die Reihe trotzdem nicht gleichmäßig konvergiert.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{x^2}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n}
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert und da er unabhängig von x ist, passiert dies auch gleichmäßig. Im zweiten Teil steht nun x^2 als Faktor drin. Wir können den Wert jetzt also durch die Veränderung von x beliebig groß oder klein machen. Wir können also ein x so wählen, dass jede ε Schranke durchbrochen werden kann.
Damit ist die Reihe nicht gleichmäßig stetig.

[1] Diese Reihe konvergiert in der Tat gegen $\zeta(\alpha)$