

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 5: *Unbestimmte Integrale*

Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int (\log x)^2 dx$:Wir benutzen das Substitutionsverfahren und wählen $y = \log x$ als neue Basis.Damit ist $x = e^y$ und $dx = e^y dy$. Eingesetzt in die Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int (\log x)^2 dx &\stackrel{\text{sub. } y}{=} \int y^2 \cdot e^y dx \\
&\stackrel{\text{part.}}{=} y^2 \cdot e^y - \int 2ye^y dy \\
&\stackrel{\text{part.}}{=} y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y \\
&= e^y \cdot (y^2 - 2y + 1) + e^y \\
&= e^y \cdot (y - 1)^2 + e^y \\
&\stackrel{\text{resub. } y}{=} x \cdot ((\log x) - 1)^2 + x.
\end{aligned}$$

Dies können wir nun noch einmal ableiten um die Lösung zu verifizieren.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x \cdot ((\log x) - 1)^2 + x &= \left(\frac{d}{dx} x \cdot (\log x - 1) \right)^2 + 1 \\
&= (\log x - 1)^2 + x \cdot 2(\log x - 1) \frac{1}{x} + 1 \\
&= ((\log x - 1) + 1)^2 = (\log x)^2.
\end{aligned}$$

□

(ii) $\int \frac{1}{x \log x} dx$:Wir substituieren wieder durch $y = \log x$ und bekommen $x = e^y$ und $dx = e^y dy$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \log x} dx &\stackrel{\text{sub. } y}{=} \int \frac{1}{e^y \cdot y} \cdot e^y dy \\
&= \int \frac{1}{y} dy \\
&= \log y dy \\
&\stackrel{\text{resub. } y}{=} \log(\log x).
\end{aligned}$$

Wir testen das Ergebnis nocheinmal, indem wir ableiten.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log \log x &= \left(\frac{d}{dx} \log x \right) \frac{1}{\log x} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \\
&= \frac{1}{x \cdot \log x}
\end{aligned}$$

(iii) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$:

tbd

(iv) $\int \sqrt{1-x^2} dx$:

tbd

Aufgabe 6: *Uneigentliche Integrale I*

Für eine Funktion $f : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das *uneigentliche Integral* durch

$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(i) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Lösung:

Wir integrieren zunächst und untersuchen danach das Verhalten im Grenzwert:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}) \\ &= 2\sqrt{1} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} \\ &= 2\sqrt{1} - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert und $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ gilt.

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx ?$$

Lösung:

Wir formen das ganze wie gehabt um und untersuchen, wie sich der Grenzwert verhält:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-p} dx \\ &\stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \frac{1}{1-p} \cdot 1^{1-p} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-p} \cdot \varepsilon^{1-p} \\ &= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-p} \end{aligned}$$

Nun können wir wissen, dass für $q > 0$ gilt, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^q = 0$. Daraus können wir zum einen schließen, dass für $p < 1$ der Grenzwert definiert ist und $\frac{1}{1-p}$ ist.

Für $p > 1$ divergiert es bestimmt gegen unendlich.

Für den vorhin ausgenommen Fall $p = 1$ gilt $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$ und diese Funktion ist für $x \rightarrow 0$ nicht definiert.

Es ist also nur für $p < 1$ uneigentlich integrierbar.

Aufgabe 7: *Uneigentliche Integrale II*

Man definiert das *uneigentliche Integral* einer Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(i) Bestimmen Sie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x^4} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{3} \cdot x^{-3} \right]_1^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{3} \cdot N^{-3} - \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^{-3} \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Der Grenzwert von $\frac{1}{x^p}$, $p > 1$ ist Null, wie in Ana I bewiesen. Damit ist der Grenzwert definiert und $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3}$

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx ?$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x^p} dx \\ &\stackrel{p \neq 1}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^N \\ &= \frac{1}{1-p} 1^{1-p} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} N^{1-p} \\ &= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1-p} \end{aligned}$$

Nach Ana I wissen wir nun, dass $\lim_{N \rightarrow \infty} N^q$, $q < 0$ gegen Null strebt. Damit existiert der Grenzwert für $p > 1$ und ist $\frac{1}{(1-p)}$.

Also ist das Integral nur für $p > 1$ definiert.

Aufgabe 8: Uneigentliche Integrale III

Die Gamma-Funktion ist wie folgt definiert:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

(i) Zeigen Sie die folgende Version der partiellen Integration:

$$\int_a^\infty u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^\infty - \int_a^\infty u(x)v'(x) dx,$$

wobei mit dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite der Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ gemeint ist. Weiter sei vorausgesetzt, dass all diese Grenzwerte existieren.

Lösung:

$$\int_a^\infty u'(x)v(x) dx \stackrel{Def.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N u'(x)v(x) dx$$

$$\stackrel{Parts.}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left([u(x)v(x)]_a^N - \int_a^N u(x)v'(x) dx \right)$$

$$\stackrel{Def.}{=} [u(x)v(x)]_a^\infty - \int_a^\infty u(x)v'(x) dx$$

Das Integral ist nun genau dann definiert, wenn die Grenzwerte der einzelnen Ausdrücke definiert sind. Dies ist aber nach Aufgabe vorausgesetzt. Damit gilt die Formel.

- (ii) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ das uneigentliche Integral $\Gamma(x)$ wohldefiniert ist.

Lösung:

Sei $x > 0$. Es ist

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt$$

Es muss also gezeigt werden, dass beide uneigentlichen Integrale konvergieren.

- (i) Erster Term

Wegen $t > 0 \Rightarrow e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1}$. Also gilt:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} 1^x - \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} a^x = \frac{1}{x} < \infty$$

Also konvergiert $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt$.

- (ii) Zweiter Term

Da $t \geq 1$ ex. für $a > 0$ ein $c > 0$, s.d. für $0 < x \leq a$ gilt: $t^{x-1} < c \cdot e^{\frac{t}{2}}$. Also gilt:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt \leq \lim_{b \rightarrow \infty} c \int_1^b e^{-\frac{t}{2}} dt < \infty$$

Also konvergiert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt$.

- (iii) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

gilt und daraus folgt, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n!$$

gilt.

Lösung:

- (i) Funktionalgleichung:

Sei $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 x \cdot \Gamma(x) &= x \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \\
 &\stackrel{a)}{=} x \cdot \left(\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{x} t^x - e^{-t} dt \right) \\
 &= x \cdot \left(\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} x \cdot \left(\frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \right) \\
 &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \\
 &= \Gamma(x+1)
 \end{aligned}$$

(*) gilt, da $\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty = 0$, denn:

$$\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{x} e^{-t} - \left(\frac{0^x}{x} e^{-0} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{x} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t}$$

Da $t^x = o(e^t)$, also der Nenner echt schneller wächst als der Zähler (vgl. Regel von L'Hopital), gilt

$$\frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$$

(ii) Beziehung zur Fakultät:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der Funktionalgleichung:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

Zusätzlich gilt

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-t} dt \\
 &= -e^{-t} \Big|_0^\infty \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} - (-e^0) \\
 &= 0 - (-1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.