Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 Die Tetraedergruppe

Gegeben seien folgende Punkte $\mathbb{R}^3$:

$$P = (1,1,1),\ Q = (-1,-1,1),\ R = (1,-1,-1),\ S = (-1,1,-1)$$

(a) Berechnen Sie die Abstände $d(P,Q), d(P,R), d(P,S), d(Q,R), d(Q,S)$ und $d(R,S)$. Schließen Sie, dass die angegebenen Punkte die Eckpunkte eines regulären Tetraeders T sind.

Lösung:

$$\begin{aligned}
d(P,Q) &= \sqrt{2^2+2^2+0} = \sqrt{8}\\
d(P,R) &= \sqrt{0+2^2+2^2} = \sqrt{8}\\
d(P,S) &= \sqrt{2^2+0+2^2} = \sqrt{8}\\
d(Q,R) &= \sqrt{2^2+0+2^2} = \sqrt{8}\\
d(Q,S) &= \sqrt{0+2^2+2^2} = \sqrt{8}\\
d(R,S) &= \sqrt{2^2+2^2+0} = \sqrt{8}
\end{aligned}$$

Die von P,Q,R,S definierte Form hat 4 Punkte, die paarweise den selben Abstand ($\geq 0+\varepsilon, \varepsilon > 0$) haben, darum erfüllen Sie die Bedingung, dass alle paarweise verscheiden sind. Deshalb handelt es sich hier bei um ein *regelmäßiges* Tetraeder.

(b) Wählen Sie eine Ecke $E \in \{P,Q,R,S\}$. Dann sei D die Achse durch E und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite des Tetraeders T. Geben Sie die Abbildungsmatrix für die Drehung um D um den Winkel 120° und 240° bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

(c) Wählen Sie zwei gegenüberliegende Kanten von T. Dann sei D die Achse durch die Mittelpunkte dieser beiden Kanten. Geben Sie die Abbildungsmatrix für die Drehung um D um den Winkel 180° bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

Aufgabe 2 Würfel, Okta- und Dodekaeder

(a) Es sei $W \subset \mathbb{R}^3$ der Würfel mit den Eckpunkten

$$(1,1,\pm1),\ (-1,1,\pm1),\ (-1,-1,\pm1),\ (1,-1,\pm1)$$

Bestimmen Sie die spezielle Symmetriegruppe $SO(W)$

Lösung:
Als Drehungen haben wir die folgenden Möglichkeiten:

- Identität
- Achse durch die Mittelpunkte 2er gegenüberliegender Seiten
  3 Achsen mit Drehungen um $90°,\ 180°,\ 270°$
- Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte
  4 Achsen mit Drehungen um $120°, 240°$
- Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten
  6 Achsen mit Drehungen um $180°$

Macht insgesammt $\#SO(W) = 24$.

(b) Die Punkte

$$(\pm1,0,0),\ (0,\pm1,0),\ (0,0,\pm1)$$

sind Eckpunkte eines Polyeders $O \subset \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie O. Bestimmen Sie die spezielle Symmeriegruppe $SO(O)$. Vergleichen Sie $SO(\mathrm{O})$ und $SO(W)$. Was stellen Sie fest? Haben Sie eine Erklärung dafür?

Lösung:
Als Drehungen haben wir die folgenden Möglichkeiten:

- Identität
- Achse durch die Mittelpunkte 2er gegenüberliegender Seiten
  4 Achsen mit Drehungen um $120°,\ 240°$
- Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte
  3 Achsen mit Drehungen um $90°,\ 180°,\ 270°$
- Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten
  6 Achsen mit Drehungen um $180°$

Das Macht insgesammt $\#SO(O) = 24$. Wir sehen also, dass die beiden Symmetriegruppen die selben Anzahlen von Elementen haben. Die Drehungen teilen sich dabei auch noch gleich auf die selbe Anzahl von korrespondierenden Achsen auf. Damit sind die beiden Gruppen isomorph zu einander.

(c) Ein Dodekaeder $D \subset \mathbb{R}^3$ ist ein reguläres Polyeder, das von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird. Beschreiben Sie die spezielle Symmetriegruppe $SO(D)$

Lösung:
Das ganze verhält sich analog zu den Köpern aus *a)* und *b)*.

Als Drehungen haben wir die folgenden Möglichkeiten:

- Identität

- Achse durch die Mittelpunkte 2er gegenüberliegender Seiten
  6 Achsen mit Drehungen um $60°,\ 120°,\ 180°,\ 240°$
- Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte
  10 Achsen mit Drehungen um $120°,\ 240°$
- Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten
  15 Achsen mit Drehungen um $180°$

Das Macht insgesammt $\#SO(D) = 60$.

(d) Recherchieren Sie den Begriff "platonischer Körper" und dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung:
Haben wir gemacht *grins*

Aufgabe 3 Solitaire

(a) Bestimmen Sie alle Endpositionen des des Solitairspiels mit genau zwei Steinen.

(b) Führen Sie die Diskussion aus der Vorlesung für das Spielfeld (siehe Zettel) durch.