Lineare Algebra II Übung Nr. 10

Max Wisniewski

Tutor : Elena

Aufgabe 1

Sei $A = 0 + \mathbb{R}^3$ ein affiner Raum und

$$F = \left\{-x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_1 + 10x_2 + 5x_2 - 5 = 0\right\}$$

eine Quadrik. Finden Sie eine Translation, s.d. der lineare Term oder die Konstante eliminiert wird. Besitzt F einen Mittelpunkt?

Bilden wir zunächst die quadratische Form:

$$f(x) = x^t \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}^t x - 5$$

Wir haben die Aufgabe dahingehend interpretiert, dass wir nur eine der beiden Umformung machen müssen, wenn diese Möglich ist. Die Aufgabenstellung ist in dieser Richtung nicht sehr Eindeutig.

Eine Quadrik hat einen Mittelpunkt $\Leftrightarrow b \in Im(M)$. Da wir schon nachgerechnet haben, dass dieser existiert, berechnen wir a Translationsvektor mit $2Ma + b = 0 \Rightarrow b \in Im(M)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 & -10 \\ 2 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{II+3I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 22 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{11III-2II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 22 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -20 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = -\frac{10}{7}$
$\Rightarrow 22x_2 - 4 \cdot \frac{10}{7} = -1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{14}$
$\Rightarrow -2x_1 + 6 \cdot \frac{3}{14} - 2 \cdot \frac{10}{7} = 3 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{16}{7}$

Der Translationsvektor, so dass der linear Term 0 wird ist $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ -32 \end{pmatrix}$. Da wir die Gleichung lösen konnten, besitzt die Gleichung auch einen Mittelpunkt, bei $P' = P + \sum v_i x_i = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ -32 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Sei A ein affiner Raum und $f(x) = x^t Mx + b^t x + c$ quadratisch, $M \in M(n, n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Sei $F = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$. Zeigen Sie: Ist M positiv definit, so hat F genau einen Mittelpunkt. Bleibt das richtig, falls M negativ definit ist.

Wir definieren wie in der VL :

$$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \alpha(x) = Mx$$

$$\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \beta(x) = b^t x$$

Nun bilden wir unsere Megen

$V_o = \ker(\alpha) = \{0\}$, weil M positiv definit ist. (Sonst würde sich ein Vektor finden lassen mit $v \in Ker(\alpha) \Rightarrow v^t Mv = v^t 0 = 0$)

V_+, V_-.

Wie in Beweis 5.29, ist $M|_{V_+}$ positiv definit und $M|_{V_-}$negativ definit.

Damit ist $V_- = \{0\}$, da M positiv definit ist.

$\mathbb{R}^n = V_0 \oplus V_+ \oplus V_- = V_+ \Rightarrow rg(M) = n$

Nach Satz 5.28 hat f nach Translation die Form

$f(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2 + c$

Da alle Eigenwerte positiv sein müssen (sonst wär es nicht positiv definit) und der Rang n ist gilt

$f(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 + c$

$\Rightarrow f(x) = x^t Mx + c$, mit $M = E_n$ Nun wissen wir ersteinmal, dass $Mx = \mathbb{R}^n$ den gesammten reellen Raum aufspannet. Deshalb muss $b \in Im(M)$ liegen. Nun bestimmen wir den Wert noch um die Eindeutigkeit zu zeigen:

$$2Ma + b = 0 \overset{b=0}{\Leftrightarrow} 2Ma = 0 \Leftrightarrow 2Ea = 0 \Rightarrow a = 0$$

Da a nur 0 sein kann, ist der Mittelpunkt eindeutig.

Schauen wir uns nun M negativ definit an, ändert sich die Argumentation in wenigen Punkten:

$V_0 = \{0\}$, $v_+ = \{0\}$ und $V_- = \mathbb{R}^n$ spannt den gesammten Raum auf, weil diesmal M negativ definit ist. Der Rang ist wiederum voll und die Funktion ist daraus folglich (da alle EW negativ sind):

$f(x) = -x_1^2 - ... - x_n^2 + c$

$\Rightarrow M = -E_n$

Betrachten wir das ganze nun, haben wir wiederum, dass $Im(M) = \mathbb{R}^n$ liegt $b \in \mathbb{R}^n$ und wenn wir den Mittelpunkt suchen:

$$2Ma + b = 0 \Leftrightarrow -2E_n a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Also gilt der Satz auch für ngativ definite Matrizen.

Aufgabe 3

Eine Matrix $B \in M(n,n,\mathbb{R})$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls $B = -B^t$ gilt. Sei $M \in M(n,n,\mathbb{R})$.

a)

Zeigen Sie, dass es eine Zerlegung $M = A + B$ gibt, sodass A symmetrisch und B schiefsymmetrisch ist.

Beweis Wir konstruieren uns eine symmetrische Matrix aus M, wie in der VL vorgeführt.
$A = \frac{1}{2}\left(M + M^t\right)$. Diese Matrix ist symetrisch, da gilt $a_{ij} = \frac{1}{2}(m_{ij} + m_{ji}) = \frac{1}{2}(m_{ji} + m_{ij}) = a_{ji}$.
Nun konstruieren wir unser B aus der ersten Bedingung.

$$M = A + B \Leftrightarrow B = M - A$$

Es bleibt zu zeigen, dass dieses B schiefsymmetrisch ist.

$$B \overset{\text{Def } A}{=} M - \frac{1}{2}\left(M + M^t\right) = \frac{1}{2}\left(2M - M - M^t\right) = \frac{1}{2}\left(M - M^t\right)$$

Nun nehmen wir die Bedingung:

$$-B^t = -\left(\frac{1}{2}\left(M - M^t\right)\right)^t = -\frac{1}{2}\left(M - M^t\right)^t = -\frac{1}{2}\left(M^t - M\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-M^t + M\right) = \frac{1}{2}\left(M + M^t\right)$$

b)

Zeigen Sie, dass die Lösung eindeutig ist.

Beweis Beschreibe $C \in M(n,n,\mathbb{R})$ die Änderung von A, B in der Form:

$A' = A + C$ und $B' = B - C$. Diese Änderung muss gelten, weil

$$M = A + B = A' + B'$$

weiter erfüllt sein muss.

$$A' + B' = A + C + B - C = A + B = M$$

Nun muss gelten $A' = A + C$ ist symmetrisch und $B' = B - C$ ist schiefsymmetrisch.
$A + C$ symmetrisch $\Leftrightarrow \forall i,j\ :\ a_{ij} + c_{ij} = a_{ji} + c_{ji}$
$B - C$ schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow \forall i,j\ :\ b_{ij} - c_{ij} = -b_{ji} + c_{ji}$
Nun muss beides gelten
$\forall i,j\ :\ a_{ij} + c_{ij} = a_{ji} + c_{ji}\ \wedge\ b_{ij} - c_{ij} = -b_{ji} + c_{ji}$
$\overset{A\ symmetrisch \wedge B\ schief symmetrisch}{\Leftrightarrow} \forall i,j\ :\ a_{ij} + c_{ij} = a_{ij} + c_{ji}\ \wedge\ b_{ij} - c_{ij} = b_{ij} + c_{ji}$
$\Leftrightarrow \forall i,j\ :\ c_{ij} = c_{ji}\ \wedge\ -c_{ij} = c_{ji}$
Diese Aussage kann nur erfüllt werden, wenn $\forall i,j\ :\ c_{ij} = c_{ji} = 0$
$\Rightarrow C = 0$.
Da es keine Änderung der Matrix gibt, die alle Vorraussetzungen erfüllt, ist die Zerlegung eindeutig. ■

c)

Finden Sie eine Zerlegung für $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Nach Konstruktion:

$$A = \frac{1}{2}\left(M + M^t\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(M - M^t\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie in a) gezeigt, sind diese Matrizen nach dieser Konstruktion symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch.

Aufgabe 4

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Bilinearform $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ heisst schiefsymmetrisch, falls $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)\ \forall x, y \in V$ gilt. Zeigen Sie:

a)

Bezüglich jeder Basis von V wird α durch eine schiefsymmetrische Matrix repräsentiert.

Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V mit $\dim(V) = n$.

Die Bilinearform einer Funktion bestimmt man durch:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha(v_1,v_1) & \alpha(v_1,v_2) & & & ... \\ \alpha(v_2,v_1) & \alpha(v_2,v_2) & & & \\ & & ... & & \\ & & & \alpha(v_{n-1},v_{n-1}) & \alpha(v_{n-1},v_n) \\ ... & & & \alpha(v_n,v_{n-1}) & \alpha(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

" $\Rightarrow$ "

Die Funktion α ist schiefsymmetrisch.

Die Matrix M ist schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow M = -M^t \Leftrightarrow \forall 1 \leq i,j \leq n : m_{ij} = -m_{ji}$

$\forall i,j : m_{ij} = \alpha(v_i,v_j) \overset{\alpha\text{schiefsymmetrisch}}{=} -\alpha(v_j,v_i) = -m_{ji}$

$\Rightarrow M$ ist schiefsymmetrische

" $\Leftarrow$ "

Die Matrix M ist schiefsymmetrisch.

$\alpha(x,y) = x^t M y = \left(x^t M y\right)^t = y^t M^t x \overset{M \text{ schiefsymmetrisch}}{=} y^t(-M)y = -\left(y^t M x\right) = -\alpha(y,x)$

$\blacksquare$

b)

Ist α nicht ausgeartet, so ist $\dim(V)$ eine gerade Zahl.
Def.: nicht ausgeartete Bilinearform (nach Aufgabe 2.3)
$\forall x \in V \setminus \{0\} \, \exists y \in V \; : \; \alpha(x,y) \neq 0$
$\forall y \in V \setminus \{0\} \, \exists x \in V \; : \; \alpha(y,x) \neq 0$

Beweis

Da wir jedes Ergebniss über die Basisvektorn von V definieren können, betrachten wir im folgenden nur noch die Basisvektoren von V.
Sei $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ Basis von V.
WIr führen (im Prinzip) eine Induktion über n, indem wir das Problem auf 2 Basisvektoren reduzieren.

Fall 0 $|\mathcal{A}| = 0$. Für den Vektorraum, der nur die 0 enthält, ist die ausgeglichenheit trivialerweise gegeben und die Dimension ist gerade.

Fall 1 $|A| = 1$
Da wir nur ein $x \in \mathcal{A}$ zur Verfügung haben muss gelten:
$\alpha(x,x) = 0$
$\alpha(x,x) = -\alpha(x,x) \Leftrightarrow \alpha(x,x) + \alpha(x,x) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(x,x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x,x) = 0$
Wir finden für x also keinen Vektor, so dass $\alpha(x,y) \neq 0$ gilt. (Alg. kann man nur λx nehmen, und der Faktor fällt in der Gleichung einfach herraus)
$\Rightarrow$Die Dimension der Funktion kann nicht 1 sein.

Fall 2 $|\mathcal{A}| \geq 2$
Wir wählen uns ein $x \in \mathcal{A}$. Da α eine nicht ausgeartete Bilinearform ist, existiert ein $y \in \mathcal{A}$, so dass $\alpha(x,y) \neq 0 \overset{\alpha \text{ schiefsymmetrisch}}{\Rightarrow} -\alpha(y,x) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(y,x) \neq 0$
Damit haben wir 2 Vektoren gefunden, die unsere nicht-ausgeartetheit garantieren.

Nun bilden wir eine neue Funktion $\alpha' = \alpha|_{\mathcal{A}'}$, mit $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{x,y\}$.
Diese neue Funktion α' ist nicht-ausgeartet. Da wir nun die Basis um in 2er Schritten verkleinern können, werden wir irgendwann beim Anker $|\mathcal{A}| = 1$ oder $|\mathcal{A}| = 0$ landen.
War $\dim(V)$ ungerade, landen wir bei $|\mathcal{A}| = 1$. In diesem Fall sehen wir, dass die Funktion ausgeartet sein musste. Dieser Fall ist also nicht möglich.
War $\dim(V)$ gerade, so geht das ganze auf.
Damit haben wir gezeigt, dass eine nicht-ausgeartete, schiefsymmetrische Matrix auf einem Vektorraum mit gerader Dimension definiert sein muss. ∎