Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1

Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \geq 0\}$.

1. $g(M) \subseteq M$
   Sei $x \in M$, dann gilt

$$g(x) = \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\geq 0} \geq 0$$

   Also ist $g(x) \in M \Rightarrow g(M) \subseteq M$.

2. $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für $x \neq y$
   Seien $x, y \in M$, $x \neq y$. Sei weiterhin o.B.d.A. $x > y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y}| \\ &= |\underbrace{x - y}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}}_{<0}| \\ &< |x - y| \end{aligned}$$

3. g besitzt keinen Fixpunkt in M
   Beweis durch Widerspruch: Sei $x^* \in M$ Fixpunkt von g. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x^*) = x^* &= x^* + \frac{1}{1+x^*} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{1+x^*} \end{aligned}$$

   Das ist aber ein Widerspruch, da es keine Zahl x gibt, für die $\frac{1}{1+x} = 0$ gilt. $\square$

Dies ist kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz, da es sich bei g nicht um eine Kontraktion handelt: Da $\frac{1}{x+1} \overset{x\to\infty}{\to} 0$, gibt es keine Konstante $\alpha \in [0, 1)$, sodass $|g(x) - g(y)| \leq \alpha|x - y|$. Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $|g(x) - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|g(y) - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \geq x_0 \in M$. Außerdem ist dann $|(g(x) - x) - (g(y) - y)| \leq |g(x) - x| + | - (g(y) - y)| < \varepsilon$. Also gilt:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |g(x) - x + x - g(y) - y + y| \\ &= |(g(x) - x) - (g(y) - y) + x - y| \\ &< \varepsilon + |x - y| \end{aligned}$$

Für jedes feste $\alpha \in [0, 1)$ ... bla

Aufgabe 2

Aufgabe 3