Max Wisniewski

Tutorin : Jan (Do 12-14)

4. Hausdorff-Maß und äußeres Maß

Seien, wie in der Vorlesung definiert, $\mathcal{H}_\delta^m$ das approximative m-dimensionale Hausdorff-Maß (für ein $\delta > 0$) und $\mathcal{H}^m$ das m-dimensionale Hausdroff-Maß auf einem metrischen Raum S.

(i)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_\delta^m$ ein äußeres Maß ist.

Beweis:

Wir nehmen an, dass wir über einer Grundmenge S messen.

a) z.z. $\mathcal{H}_\delta^m(\emptyset) = 0$.
Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen, mit $B_i = \emptyset \forall i \in \mathbb{N}$.
Nun ist
$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam}(B_i)}{2}\right)^m = 0.$$
Das Hausdorff-Maß ist als infimum der Überdeckungen definiert, deren Mengen maximal Duchmesser δ haben. Kleiner als 0 kann es nicht werden und $\emptyset = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B_i$ es ist eine Überdeckung.

b) Sei $A \in S$ und $A \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ eine Familie von Menge, die A überdeckt.
z.z. $\mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m A_i$.

Sei $(B_j^i)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen, so dass $A_i \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j^i$, $\forall j \in \mathbb{N}\ :\ \text{diam}(B_j^i) < \delta$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam}B_j^i}{2}\right)^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ (*).

Nun ist für A die doppelte Vereinigung $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j^i$ auch eine eine Überdeckung (da jede der Überdeckenden Mengen überdeckt wurde). Diese Mengen haben nun alle einen Durchmesser kleiner δ. Daher können wir diese in der Definition des approximativen Hausdorff-Maßes benutzten.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\delta^m &\overset{inf}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam}B_i}{2}\right)^m \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}_\delta^m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m(A_i)\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Lassen wir nun unser ε gegen 0 laufen, so erhalten wir

$$(A)^m_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m_\delta(A_i).$$

$\square$

(ii)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^m$ ein äußeres Maß ist.
Beweis:

a) z.z. $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$.
Wie gezeigt, ist $\mathcal{H}^m_\delta(\emptyset) = 0 \quad \forall \delta > 0$. Daher ist auch $\mathcal{H}^m(\emptyset) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}^m_\delta(\emptyset) = 0$.

b) Sei $A \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ eine überdeckung von A.
z.z. $\mathcal{H}^m(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(A_i)$.

Da wir schon in *a)* gezeigt haben, dass es sich beim approximativen Hausdorff-Maß um ein Maß handelt, können wir unsere A_i für alle $\delta > 0$ so überdecken mit $(B^i_j)_{j \in \mathbb{N}}$, dass $\mathcal{H}^m_\delta(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m_\delta(A_i)$.

Aus Analysis I wissen, wir, dass sich im Grenzwert die Relation nicht umkehren kann (nur abschwächen).
Daher gilt $\mathcal{H}^m(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}^m_\delta(A) \leq \lim\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m_\delta(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta(A_i)$.

Wir können den Grenzwert in die Summe ziehen, da die einzelnen Summanden unabhängig von einander bezüglich δ sind.

Beweis:

$\square$

5. Hausdorff-Maß und Lebesque-Maß

Seien $\mathcal{L}$ das Lebesque-Maß und $\mathcal{H}^1_\delta$ das approximative Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $A \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{L}^1(A) = H^1_\delta(A) \qquad \text{für alle } \delta > 0$$

Beweis:

Um dies zu zeigen, beweise ich zunächst das folgende.

Behauptung 1. *Im $\mathbb{R}^1$ ist für einen Würfel $I \in \mathcal{K} = (a, b)$, sein Volumen $I = b - a$, das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1(I) = b - a$ und das approximierte Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^1_\delta(I) = b - a$ für alle $\delta > 0$.*

Behauptung 2. *Sei $(a, b]$ ein Intervall. Dann ist ist $\mathcal{L}^1((a, b]) = \mathcal{L}^1((a, b))$. D.h. es ist egal, ob die Intervall geschlossen oder offen sind. (Ebenso $[a, b]$, $[a, b)$).*

Schlussfolgerung: Für das Lebesgue-Maß ist es egal, welche Intervalle wir benutzten.

Beweis 1.

Das Volumen eines Würfels gerade als $|(a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)| = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$ definiert. Nun muss für das Lebesque-Maß die Menge mit Würfeln übderdeckt werden. Sei also $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Überdeckung, mit $I_1 = I$, sonst $\emptyset$. Damit ist $\mathcal{L}^1(I) = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = |I_1| = b - a$.

Für das Hausdorff - Maß unterscheiden wir zunächst. Ist $b - a < \delta$ können wir es direkt mit dem Würfel überdecken. Ist δ zu klein wählen wir als die Überdeckung $B_i = (a, a + \frac{\delta}{b-a}], (a + \frac{\delta}{b-a}, a + 2\frac{\delta}{b-a}], ...(b - \frac{\delta}{b-a}, b), \emptyset, ...$ und die restlichen Mengen sind $\emptyset$. Wie man erkennt, ist nun $\mathcal{H}_\delta^m(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_1 \left(\frac{B_i}{2}\right) = b - a$, da $\omega_1 = 2$ ist.

□

Beweis 2

Sei $(a, b]$ das Intervall. Dann wird es durch (a, b) und $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ übderdeckt. Seien $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene Würfel, so dass $B_1 = (a, b)$, $B_2 = (b - \varepsilon, b - \varepsilon)$, $B_i = \emptyset$ $\forall i > 2$.
Nun ist $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = b - a + 2\varepsilon$. Lässt man nun ε gegen 0 laufen, erhält man nur noch $b - a$. Es kann auch nicht weniger werden, da man sonst einen Wert nicht mehr erreicht.

□

Nun zeigen wir den Satz:
$\mathcal{L}^1(A) \geq \mathcal{H}_\delta^1(A)$.

Dies gilt trivialerweise. Sei $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine überdeckung mit Würfeln sodass $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq \mathcal{L}^1(A) + \varepsilon$, mit Seitenlängen, maximal δ. Dann ergibt sich, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_1 \frac{\text{diam} I_i}{2} \leq \mathcal{L}^1(a) + \varepsilon$. Lässt man ε nun gegen 0 laufen, drehen sich die relationen nicht um. Da nun das approximative Hausdorff-Maß als das Infimum aller Überdeckungen definiert ist, muss es kleiner gleich diesem sein.

$\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}_\delta^1(A)$.

Sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung für A, mit $\text{diam} B_i < \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wir können davon ausgehen, dass B_i nur aus Intervallen besteht. Nehmen wir an B_j für ein $j \in \mathbb{N}$ wäre kein Intervall, dann gäbe es eine Menge von Intervallen $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $B_j = \bigcup I_k$. Nehmen wir ferner an, sie sind sortiert. $I_1 = (a_1, b_1), ..., I^\infty = (a_\infty, b_\infty)$. Dann ist
$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_1 \frac{b_i - a_i}{2} \leq b_\infty - a_\infty$. Damit ist die Überdeckung für das Hausdorff-Maß aus Intervallen gebildet, da diese kleiner sind.

Da wir nun nur noch Intervalle betrachten müssen für unsere Überdeckung von A, können wir die selbe Überdeckung für das Lebesgue-Maß wählen (Dies ist nach 2 Möglich, da wir uns nicht um offene oder abgeschlossene Mengen kümmern müssen). Wie schon öfters gesehen, ist die Berechnugsformel der beiden im ein-dimensionalen gleich, falls die Überdeckung aus Würfeln mit Durchmesser kleiner als δ gebildet wird.

$\square$

6. Nicht-messbare Mengen

Man betrachte das Maß $\mathcal{H}^1_\delta$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > 0\}.$$

Zeigen Sie:
A ist nicht $\mathcal{H}^1_\delta$-messbar für beliebiges $\delta > 0$.

Beweis:

Die Menge, an der wir zeigen, dass es nicht messbar ist, soll

$$T = B_{\frac{\delta}{2}}(0,0)$$

sein. Nun muss nach Definition der Messbarkeit gelten

$$\mathcal{H}^1_\delta(T) = \mathcal{H}^1_\delta(T \cap A) + \mathcal{H}^1_\delta(T \setminus A).$$

Zunächst sollten wir der Aufgabe entsprechend zeigen, dass in jeder der Mengen $T, T \cap A, T \setminus A$ ein Geradenstück g ist, mit der Länge $\mathcal{H}^1_\delta(g) = \delta - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$.

Wir wissen, dass T eine offene Kugel ist, um den Mittelpunkt $(0,0)$. Da diese den Radius $\frac{\delta}{2}$ hat, ist ihr Durchmesser δ. Nehmen wir nun eine Gerade durch den Mittelpunkt, so ist dies ein Intervall, der Länge δ. Nehmen wir nun ein Teilintervall davon, so können wir eine gerade der Länge $\delta - \varepsilon$ erzeugen.

Für $T \setminus A$, können wir ebenso eine Gerade nehmen, wobei es nur eine der Länge δ gibt und das ist die Gerade auf der Achse $y = 0$. Nun können wir wieder eine Teilgerade nehmen, die die Länge $\delta - \varepsilon$ hat.

Im Fall von $T \cap A$ ist es etwas schwieriger. Es gibt keine Gerade der Länge δ, da die $y = 0$ Achso nicht zu der Menge gehört. Wir können allerdings die Geraden annähren. Nehmen wir Geraden, die parrallel zu $y = 0$ Achse liegen. So liegt bei $x = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \frac{(\delta-\varepsilon)^2}{4}}$ die Gerade, die Länge $\delta - \varepsilon$ hat.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass

$$\mathcal{H}^1_\delta(T) = \mathcal{H}^1_\delta(T \cap A) = \mathcal{H}^1_\delta(T \setminus A) = \delta$$

gilt.
Ist dies der Fall so ist es nicht messbar, da $\mathcal{H}^1_\delta(T \cap A) = \mathcal{H}^1_\delta(T \setminus A) = 2\delta \neq \delta = \mathcal{H}^1_\delta(T)$.

Dies war mir aber nicht möglich zu zeigen, da ich nicht weiß, wie ich eine abzählbare Überdeckung einer (Halb-) Kugel durch Geraden bewerkstelligen soll.