

Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 (Symmetriegruppe und spezielle Symmetriegruppen)

Es seien $M \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, die eine Basis für \mathbb{R}^2 enthält, und

$$\begin{aligned} M' &:= M \times \{0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in M\} \\ M'' &:= M \times [-1, 1] = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in M, -1 \leq t \leq 1\} \end{aligned}$$

Beweisen Sie $O(M) \cong SO(M') \cong SO(M'')$

Lösung:

$O(M) \cong SO(M') :$

Die Erweiterung bringt uns, dass wir unser 2-dimensionales Objekt nun in der xy-Ebene liegen haben. Die Drehung können wir eins zu eins übertragen. Die Drehung finden nun nicht um den Punkt in der Fläche statt, sondern um eine Gerade, die senkrecht (zur xy-Ebene) durch diesen Punkt geht. Alle Winkel des alten Punktes sind nach der Transformation auf die Gerade anzuwenden.

Die Spiegelungen können wir in $SO(M')$ folgendermaßen darstellen: Wir nehmen die Spiegelachse aus $O(M)$ und interpretieren diese als Drehachse (die in der xy-Ebene liegt). An dieser Achse können wir nur eine 180° -Drehung ausführen, da wir sonst nicht in $M \times \{0\}$ bleiben. Diese Drehung stellt nun genau die Spiegelung dar.

$SO(M') \cong SO(M''):$

Diese Isomorphie kann nicht gelten. Dies machen wir uns am Beispiel von M eines Quadrats mit Kantenlänge 2 klar. Dieses Quadrat hat (wie in 3 nochmal gezeigt) 8 Elemente in $O(M)$. Nun ergibt die Erweiterung des Quadrats auf M'' allerdings einen Würfel. Von diesem hatten wir letzte Woche gezeigt, dass gilt: $\#SO(W) = 24$. Da wir keine bijektive Funktion finden können, die 8 Elemente auf 24 abbildet (wie in Aufgabe 3b) thematisiert), können die beiden Gruppen nicht isomorph sein.

Aufgabe 2 (Isomorphismen)

Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ isomorph sind.

Lösung:

Wir konstruieren eine *bijektive Funktion* und zeigen danach, dass man die Operatoren nach außen ziehen kann.

Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto \pi^x \end{aligned}.$$

Aus der Analysis wissen wir, dass diese Funktion umkehrbar ist (siehe *Logarithmus*). Der Bildbereich von a^x ist auch gesamt $\mathbb{R}_{>0}$. Die Funktion an sich ist also bijektiv und total, bleibt nur die Homomorphismeigenschaft zu zeigen.

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \varphi(y) &= \pi^x \cdot \pi^y \\ &\stackrel{\text{Exp. Gesetz}}{=} \pi^{x+y} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi(x+y) \end{aligned}$$

Neutrales Element:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \pi^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Wir haben eine bijektive Funktion, die das neutrale Element auf sich selbst abbildet und die es zulässt, dass man die Operation nach innen und außen ziehen kann. Daher sind die beiden Gruppen Isomorph zu einander.

Aufgabe 3 (Homomorphismen)

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat mit Mittelpunkt 0.

- a) Nummerieren Sie die Eckpunkte von Q entgegen dem Uhrzeigersinn von 1 bis 4. Ein Element $f \in D_4$ definiert die Permutation $\varphi(f) \in S_4$ durch $\varphi(f)(i) = f(i)$, $i = 1, \dots, 4$. Geben Sie $\varphi(f)$ für jedes Element $f \in D_4$ an. Ist $\varphi : D_4 \rightarrow S_4$ injektiv und/oder surjektiv?

Lösung:

Für das Quadrat haben wir in der Symmetriegruppe D_4 zunächst 8 Elemente. Dies sind Identität, Rotation um den Mittelpunkt um $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$, sowie Spiegelungen an der horizontalen, vertikalen und den beiden diagonalen Achsen. Diesen weisen wir jetzt durch φ ein Element zu:

$$\begin{aligned} \varphi(id) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \varphi(90^\circ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \varphi(180^\circ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \varphi(270^\circ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \varphi(Hor.) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \varphi(Vert) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \varphi(Diag.1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \varphi(Diag.2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Funktionwerte erhält man, wenn man das Rechteck mit den Eckpunkten betrachtet.

Für den zweiten Teil der Frage betrachten wir zunächst die

Surjektivität. Die Funktion kann nicht surjektiv sein, da $\#D_4 = 8$, aber $\#S_4 = 24$. Da aber aus dem Definitionsbereich jedem Element genau ein Funktionswert zugeordnet ist, können maximal 8 Werte im Wertebereich getroffen werden. Da $8 < 24$ können also nie alle getroffen werden.

Für die **Injektivität** können wir die endlichen Funktionswerte der Funktion anschauen, die wir oben definiert haben. Wie wir sehen, sind alle unterschiedlich. Da gilt: $\forall a, b \in D_4 : a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$

- b) Nummerieren Sie nun die Kanten von Q von 1 bis 4 und konstruieren Sie damit eine weitere Abbildung $\psi : D_4 \rightarrow S_4$. Kann man die Ecken und Kanten so nummerieren, dass $\varphi = \psi$ gilt? Hat man $\varphi(D_4) = \psi(D_4)$?

Lösung:

Nummeriert man die Kanten, wie gehabt durch, erhält man die folgende Abbildung:

$$\begin{array}{ll} \psi(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \psi(90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \psi(180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \psi(270^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \psi(Hor.) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \psi(Vert) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \psi(Diag.1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \psi(Diag.2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir sehen, dass wir das annähernd das selbe Ergebnis erzielen können. Allerdings sind die beiden Spiegelungspaare unterschiedlich. Bei den Ecknummerierungen belassen die Diagonalen jeweils 2 der Punkte auf dem Platz. Bei den Seiten sind dies die Horizontalen und Vertikalen Achsen. Daran erkennen wir, dass wir niemals eine Nummerierung finden, so dass die beiden Funktionen gleich sein. Da bei der Spiegelung immer die eine Art (horizontal/vertikal oder diagonal) die Ecken belässt und die andere die Seiten.

Betrachtet man allerdings die Funktionswerte, sehen wir, dass das Bild der beiden Abbildungen das selbe ist.

Aufgabe 4 (Untergruppen)

- a) Ist $H := \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 3 \vee \sigma(4) = 4\}$ eine Untergruppe von S_4 ?

Lösung:

H ist keine Untergruppe von S_4 .

Beweis:

Nehmen wir die beiden Permutationen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beide sind in H , da $\sigma_1(4) = 3$ und $\sigma_2(4) = 4$.

Bilden wir aber nun $\sigma_2 \circ \sigma_1$ erhalten wir:

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Kombinieren wir die beiden Funktionen, so ist das Ergebnis nicht in H . Da $\sigma_2 \circ \sigma_1 \notin H$ ist die Menge nicht abgeschlossen und daher keine Untergruppe von S_4 .

- b) Es seien G eine **abelsche** Gruppe und $H := \{g \in G \mid g^2 = e\}$. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist.

Lösung:

Das **neutrale Element** ist in $H \Rightarrow H \neq \emptyset$.

$$e^2 = e \cdot e = e$$

Das **inverse Element** ist drin:

Trivial da mit $m^2 = e \Leftrightarrow m \cdot m = e$ m selbstinvers ist.

Abgeschlossenheit:

Seien $m_1, m_2 \in H$

$$\begin{aligned} (m_1 \cdot m_2)^2 &= (m_1 \cdot m_2)(m_1 \cdot m_2) \stackrel{\text{abelsch}}{=} (m_1 \cdot m_2)(m_2 \cdot m_1) \stackrel{\text{Asso.}}{=} m_1 m_2^2 m_1 \\ &= m_1 e m_1 = m_1^2 = e \Rightarrow (m_1 \cdot m_2) \in H \end{aligned}$$

- c) Weisen Sie nach, dass $H := \{m \in O_2(\mathbb{R}) \mid m^2 = e\}$ keine **Untergruppe** von $O_2(\mathbb{R})$ ist. Welche Eigenschaft ist nicht erfüllt?

Lösung:

Die Eigenschaft, die hier nicht erfüllt ist, ist die aus b). Elemente aus $O_2(\mathbb{R})$ sind im allgemeinen nicht abelsch.

Nehmen wir uns ein Rechteck um den Mittelpunkt. Als erstes Element wählen wir eine Drehung um 180° σ_1 und eine Spiegelung an der Diagonalen (siehe Bild) δ_1 .

Führen wir nun $(\sigma_1 \delta_1)^2$ aus, erreichen wir leider nicht das neutrale Element.

$\Rightarrow H$ ist nicht abgeschlossen $\Rightarrow H$ ist keine Untergruppe.