Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 16: *Die Ungleichungen von Hölder und Young*

Seien $x_1, ..., x_n$ und $y_1, ..., y_n$ reelle Zahlen.

(i) Zeigen Sie, dass für

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q > 1,$$

und für alle $x, y \geq 0$ die *Youngsche Ungleichung*

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$$

richtig ist.
Beweis:
tbd

(ii) Zeigen Sie nun unter Verwendung der Youngschen Ungleichung die Höldersche Ungliechung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Für welche p und q gewinnen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung? **Lösung:**
tbd

Aufgabe 17: *Durchschnitt und Vereinigung von Mengen*

Sie $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

(i) $\overline{M} = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^{\ltimes} \mid A \text{ abgeschlossen}, M \subset A\}$
Beweis:
tbd

(ii) $\mathring{M} = \bigcup \{\Omega \subset \mathbb{R}^n \mid \Omega \text{ offen}, \Omega \subset M\}$
Beweis:
tbd

Aufgabe 18: *Durchmesser und Abstand von Mengen*

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Man definiert

$$diam\ M := \sup\{|x - y| \mid x, y \in M\}$$

Für $x \in M$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Abstand von x zu M durch

$$dist(x, M) := \inf\{|x - y| \mid y \in M\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $diam\ M = diam \overline{M}$.
Beweis:
tbd

(ii) Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen

a) $x \in \overline{M} \iff dist(x, M) = 0$
Beweis:
tbd

b) $x \in \overset{\circ}{M} \iff dist(x, M^c) > 0$
Beweis:
tbd

c) x Randpunkt von $M \iff dist(x, M) = dist(x, M^x) = 0$
textbfBeweis:
tbd

(iii) Für $\varepsilon > 0$ definieren die ε-Umgebung einer Menge M durch

$$M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N \mid dist(x, M) < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge M_ε offen ist, und bestimmen Sie

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon$$

Lösung:
tbd

Aufgabe 19: *Umfang von Mengen*

(i) Man zeige, dass es für jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, die aus mindestens zwei Punkten besteht, genau eine Kugel $K = \overline{B_R(a)}$ mit kleinstmöglichem Radius $R > 0$ gibt, die M enthält. Man nennt diese Kugel K die Umkugel von M und den Radius R den Umkugelradius von M.
Beweis:
tbd

(ii) Sie $M \subset \mathbb{R}^n$ symmetrisch um den Ursprung, dass heißt

$$x \in M \iff -x \in M.$$

Zeigen Sie, dass $M \subset \overline{B_{(diam\ M)/2}(0)}$ **Beweis:**
tbd

(iii) Man zeige, dass zwischen dem UmkugelRadius R und dem Durchmesser $\delta := diam\, M$ einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit mindestens zwei Elementen die Beziehung

$$R \leq \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

besteht. Geben Sie ein Beispiel für eine dreipunktige Menge M, für die Gleichheit richtig ist an.
textbfLösung:
tbd