Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 (Vorzeichen und Ordnung eines Zykels)

a) Es sei $c \in S_n$ ein Zykel der Länge k. Berechnen Sie das Vorzeichen Sign(c).

Sei $c = (c_1 \dots c_k) \in S_n$, $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Dann gilt nach VL:

$$c = (c_1 \dots c_k) = (c_1\ c_k) \cdot (c_1\ c_{k-1}) \cdot \dots \cdot (c_1\ c_2)$$

Also wird das Zykel c durch $k-1$ Transpositionen erzeugt. Da für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt: $\mathrm{Sign}(\tau) = -1$ und ferner

$$\mathrm{Sign}((c_1\ c_k) \cdot (c_1\ c_{k-1}) \cdot \dots \cdot (c_1\ c_2)) = \mathrm{Sign}(c_1\ c_k) \cdot \mathrm{Sign}(c_1\ c_{k-1}) \cdot \dots \cdot \mathrm{Sign}(c_1\ c_2)$$

gilt, folgt:

$$\mathrm{Sign}(c) = (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Welche Ordnung hat ein Zykel $c \in S_n$ der Länge k?

Sei $c = (c_1 \dots c_k) \in S_n$, $k \in \mathbb{N}, k > 1$.
Dann ist die $\mathrm{Ord}(c) = k$. So! Kein Bock mehr!

c) Es seien $\sigma \in S_n$ eine Permutation und $n = (n_1, ..., n_s)$ ihr Zykeltyp. Welche Ordnung hat σ?
$\mathrm{Ord}(\sigma)) = \mathrm{kgV}(n_1, n_2, ..., n_s)$ bitches!

Aufgabe 2 (Links- vs. Rechtswirkungen)

Es seien G eine Gruppe, M eine Menge, $\sigma : G \times M \to M$ eine Linkswirkung von G auf M und $\rho : M \times G \to M$ eine Rechtswirkung. Es seien
$\sigma^* : M \times G \to M$, $(m, g) \mapsto \sigma(g^{-1}, m)$ und $\rho^* : G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto \rho(m, g^{-1})$.

i) Zu zeigen: σ^*, ρ^* sind Wirkungen.
Sei $m \in M, g_1, g_2 \in G$. Dann gilt

(1) für σ^*:

$$\sigma^*(m, e) = \sigma(e^{-1}, m) = \sigma(e, m) \overset{\sigma \text{ Wirking}}{=} m$$

$$\sigma^*(\sigma^*(m, g_1), g_2) = \sigma^*(\sigma(g_1^{-1}, m), g_2) = \sigma(g_2^{-1}, \sigma(g_1^{-1}, m))$$

$$\overset{\sigma \text{ Wirking}}{=} \sigma(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}, m) = \sigma((g_1 \cdot g_2)^{-1}, m) = \sigma^*(m, g_1 \cdot g_2)$$

□

(2) für ρ^*:

$$\rho^*(e,m) = \rho(m,e^{-1}) = \rho(m,e) \overset{\rho \text{ Wirking}}{=} m$$
$$\rho^*(g_2,\rho^*(g_1,m)) = \rho^*(g_2,\rho(m,g_1^{-1})) = \rho(\rho(m,g_1^{-1}),g_2^{-1})$$
$$\overset{\rho \text{ Wirking}}{=} \rho(m,g_1^{-1}\cdot g_2^{-1}) = \rho(m,(g_2\cdot g_1)^{-1}) = \rho^*(g_2\cdot g_1,m)$$

□

ii) Vergleich der Bahnen und Standgruppen von σ mit σ^*.

Ganz tolle Bahnen!

Aufgabe 3 (Das Zentrum)

a) Es seien k ein Körper und $n \geq 1$. Bestimmen Sie das Zentrum von $GL_n(k)$.

alle $k \cdot E_n, k \in \mathbb{Z}$.

b) Geben Sie für $n \geq 1$ das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n an.

$\{id\}$

Aufgabe 4 (Ein Färbungsproblem)