Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1

Es seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ natürliche Zahlen, sowie

$$a = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_s^{k_s} \quad \text{und} \quad b = q_1^{l_1} \cdot ... \cdot q_s^{l_t}$$

Fassen wir nun a, b als Produkt der Primzahlen auf, die in mindestens einer von beiden Zerlegungen auftreten, also

$$a = z_1^{i_1} \cdot ... \cdot z_u^{i_u}$$

wobei $i_j = k_j$ falls die Primzahl in der echten Zerlegung von a existiert, sonst $i_j = 0$. Analog ist

$$b = z_1^{h_1} \cdot ... \cdot z_u^{h_u}$$

wobei $h_j = l_j$ falls die Primzahl in der echten Zerlegung von b existiert, sonst $h_j = 0$.

a) Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$ an.
Nach der obigen Zerlegung gilt:

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{m=0}^{u} z_m^{\min(i_m, h_m)}$$

Dies macht Sinn, da der ggT das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren(-potenzen) der Zahlen a und b ist.

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{m=0}^{u} z_m^{\max(i_m, h_m)}$$

blabla

b) Beweisen Sie die Formel

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$$

$$\begin{aligned}
\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) &= \prod_{m=0}^{u} z_m^{\min(i_m, h_m)} \cdot \prod_{m=0}^{u} z_m^{\max(i_m, h_m)} \\
&= \prod_{m=0}^{u} z_m^{\min(i_m, h_m)} \cdot z_m^{\max(i_m, h_m)} \\
&= \prod_{m=0}^{u} z_m^{i_m} \cdot z_m^{h_m} = \prod_{m=0}^{u} z_m^{i_m} \cdot \prod_{m=0}^{u} z_m^{h_m} \\
&= a \cdot b
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 165 und 585 mit dem euklidischen Algorithmus. $585 = 3 \cdot 165 + 90$
$165 = 1 \cdot 90 + 75$
$90 = 1 \cdot 75 + 15$
$75 = 5 \cdot 15 + 0$

$\Rightarrow \mathrm{ggT}(165, 585) = 15$

b) Geben Sie die Primfaktorzerlegungen von 165 und 585 an und überprüfen Sie das Ergebnis aus a) mit Ihrer Formel aus Aufgabe 1, a).

$$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Nach **1 a)** gilt dann für den größten gemeinsamen Teiler:

$$\mathrm{ggT}(585, 165) = 3 \cdot 5 = 15$$

c) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 142 und 202 und ganze Zahlen a und b, sodass

$$d = a \cdot 142 + b \cdot 202.$$

$$\begin{aligned}
202 &= 1 \cdot 142 + 60\\
142 &= 2 \cdot 60 + 22\\
60 &= 2 \cdot 22 + 16\\
22 &= 1 \cdot 16 + 6\\
16 &= 2 \cdot 6 + 4\\
6 &= 1 \cdot 4 + 2\\
4 &= 2 \cdot 2 + 0
\end{aligned}$$

i	a_i	q_i	x_i	y_i
0	202	-	1	0
1	142	-	0	1
2	60	1	1	-1
3	22	2	-2	3
4	16	2	5	-7
5	6	1	-7	10
6	4	2	19	-27
7	2	1	-26	37
8	0	2	33	

$\Rightarrow d = \mathrm{ggT}(142, 202) = 2, b = -26, a = 37$

Aufgabe 3

Es sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die periodische Folge $(1, 3, 2, -1, -3, -2, ...)$.
Beweisen Sie, dass eine ganze Zahl $a = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k$ genau dann durch 7 teilbar ist, wenn ihre gewichtete Quersumme es ist.
Testen Sie es mit diesem Kriterium die Zahlen 10.167.157 und 8.484.372 auf Teilbarkeit durch 7.

Es gilt

$$10^0 \equiv 1 \mod 7$$

$$10^1 \equiv 3 \mod 7$$
$$10^2 \equiv 2 \mod 7$$
$$10^3 \equiv -1 \mod 7$$
$$10^4 \equiv -3 \mod 7$$
$$10^5 \equiv -2 \mod 7$$
$$10^6 \equiv 1 \mod 7$$
$$...$$
$$10^k \equiv \varepsilon_k \mod 7$$

Also ergibt sich für eine Zahl a

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \varepsilon_k \mod 7$$

□

Sei nun $a = 10167157$.
Test: $7 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 7 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0$. Da $0|7 \Rightarrow 10167157|7$.
Sei nun $a = 8484372$.
Test: $2 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 8 = 1$. Da $1 \nmid 7 \Rightarrow 8484372 \nmid 7$.

Aufgabe 4

Vor einem Bienenvolk sind folgende Daten bekannt: Es hat zwischen 200 und 250 Mitglieder. Stellen sich die Bienen in 7er-Reihen auf, dann bleibt eine Biene alleine. Wenn sie sich in 5er-Reihen aufstellen, dann bleiben drei übrig. Wie viele Mitglieder hat das Bienenvolk?

Aus der Aufgabenstellung erstellen wir folgendes Kongruenzsystem $(*)$:

$$x \equiv 1 \mod 7$$
$$x \equiv 3 \mod 5$$

Aus dem chinesischen Restsatz folgt direkt (da $\mathrm{ggT}(5, 7) = 1$):

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow x &\equiv 1 - (-2) \cdot 7 \cdot (1 - 2) \\ &\equiv -27 \mod 35\end{aligned}$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $200 \leq -27 + k \cdot 35 \leq 250$
$\Rightarrow k = 7$
$\Rightarrow$ Das Bienenvolk hat $-27 + 7 \cdot 35 = 218$ Mitglieder.