Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 28: *Stetigkeit und Existenz partieller Ableitungen*

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} [\ \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ für } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & , \text{ für } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

in jedem Punkt partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, jedoch im Ursprung $80,0)$ nicht stetig ist.

Lösung:

Stetigkeit: Wir zeigen zunächst, dass die Funktion im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

Wir nehmen die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (z_k, z_k)$ wobei z_k eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist, also $\lim\limits_{n\to\infty} z_k = 0$.

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = (\lim\limits_{n\to\infty} z_k, \lim\limits_{n\to\infty} z_k) = (0,0)$,
aber in der Funktion gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{z_k^2}{2z_k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Partielle Ableitung:
Als nächstes bilden wir die partielle Ableitung.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(x) &= \frac{\delta}{\delta x}\frac{xy}{x^2+y^2} \\ &\overset{Quot.}{=} \frac{y\cdot(x^2+y^2) - xy\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Da wir y nur als konstante betrachten, können wir leicht sehen, dass x in jeder Folge, die gegen 0 konvergiert, gegen den Wert $\frac{1}{y}$ konvergiert. Und dieser ist von jeder Richtung aus fest.

Bilden wir die Ableitung über y erhalten wir das selbe, da die Funktion von x, y aus gleich aus sieht:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Und auch hier konvergieren Folgen über y gegen den Wert $\frac{1}{x}$.

Aufgabe 29: *Parametrisierung des Torus*

(i) Welche Art von Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ wird durch die Abbildung

$$\gamma \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ \varphi \mapsto (a + b\cos\varphi, 0, b\sin\varphi)$$

für $a > b > 0$ beschrieben.?

Lösung:
Die Kurve die hier beschrieben wird ist ein Kreis. Dieser befindet sich in der x_1, x_3 Ebene. Der Kreis liegt vollständig rechts vom Ursprung $(0,0)$. Der Mittelpunkt des Kreises ist $(a,0,0)$ und der Radius ist b. Das vollständige Rechts entsteht dadurch, das der Mittelpunkt a vom Mittelpunkt entfernt ist, aber der Radius nur $b < a$ beträgt.

(ii) Rotieren Sie diese Kurve entgegen dem Uhrzeigersinn um die x_3 Achse. Bezeichnen Sie den Rotationswinkel mit ϑ. Sei erhalten so eine Funktion $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $(\varphi, \vartheta) \mapsto f(\varphi, \vartheta)$.

Die durch f dargestellte Fläche T im $\mathbb{R}^3$ nennt man einen *Torus*.

Lösung:
Nachdem wir unser Vector auf den Kreis abgebildet haben mit dem Winkel φ werden wir danach noch auf das Ergebnis die Drehmatrix D_ϑ anwenden, um den Vecotr noch um den Winkel ϑ um die x_3 - Achse zu drehen.

$$D_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\,\vartheta & -\sin\,\vartheta & 0 \\ \sin\,\vartheta & \cos\,\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wenden für f also erst den Ergebnisvektor auf die Drehung an:

$$\begin{aligned} f(\varphi, \vartheta) = D_\vartheta \circ \gamma(\varphi) &= D_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\,\vartheta & -\sin\,\vartheta & 0 \\ \sin\,\vartheta & \cos\,\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (a + b\cos\,\varphi, 0, b\sin\,\varphi)^t \\ &= \begin{pmatrix} (a + b\cos\,\varphi)\cdot\cos\,\vartheta \\ (a + b\cos\,\varphi)\cdot\sin\,\vartheta \\ b\sin\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist der Ergebnisvektor (den wir an dieser Stelle gedreht dargestellt haben), die Funktion f ist also
$f(\varphi, \vartheta) = ((a + b\cos\,\varphi)\cdot\cos\,\vartheta, (a + b\cos\,\varphi)\cdot\sin\,\vartheta, b\sin\varphi)$
Da die beiden Drehungen linear unabhängig sind (der Kreis vollzieht eine Drehung um die verschobene x_2 Achse und der Torus durch Rotation um die x_3 Achse). Damit ist es egal in welcher Reihenfolge die Drehungen ausgeführt werden.

(iii) Skizzieren Sie ...
Nicht bearbeitet.

Aufgabe 30: *Niveauflächen*

Für $x_1 > 0$, sei

$$h(x_1, x_3) := (x_1 - a)^2 + x_3^2 - b^2$$

die beschriebene Funktion eines Kreises in der $[x_1, x_3]$ - Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $b > 0$ und dem Mittelpunkt $(a, 0, 0)$, wobei $b < a$.

(i) Setzen Sie diese Funktions rotationssymmetrisch um die x_3 - Achse auf den ganzen $\mathbb{R}^3$ fort, und bezeichen Sie diese neue Funktion mit g.

Lösung:
Um die Punktmenge, die wir von h bekommen, benutzen wir einfach um eine zweite Rotation zu vollführen, die diesmal um die x_3 Achse geschieht und noch genauer um den Ursprung $(0, 0, 0)$ mit dem Radius a, damit wir uns auf einem Radius um den Ursprünglichen Mittelpunkt bewegen.

Da wir zu diesem Zeitpunkt aber keine Ahnung hatten, wie wir das genau anstellen, haben wir uns einfach die expandierte stadardt Darstelllung der algebraischen Form genommen um in der nächsten Aufgabe damit weiter zu rechnen:
$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$

Der erste Teil bezeichnet hier die Berechnung des neuen Mittelpunktes, um den sich unser Kreis drehen soll und der zweite Summand bezeichnet der Radius um den sich der Mittelpunkt drehen darf. Hierbei darf sich der Mittelpunkt, wie gefordert nur auf der $x_1 - x_2$ Ebene bewegen, da wir ja um die x_3 Achse drehen.

Was hier nicht gänzlich der Rotation des Kreieses genügt, ist dass wir eigentlich eine Kugel um den rotierten Mittelpunkt bestimmen, aber da wir durch die Rotation des Kreises die Kugel übderdecken, ist diese Darstellung korrekt.

(ii) Sie f die Funktion aus Aufgabe 29. Zeigen Sie, dass

$$f(\mathbb{R}^2) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = 0\}.$$

Dies besagt, dass T die *Niveaufläche der Funktion g für den Wert 0* ist.

Beweis:
Für den Beweis, setzten wir zunächst die Bildpunkt von f in die Funktion g ein, um so zu sehen, dass alle 0 ergeben.

$$\begin{aligned} &g(\cos\vartheta(a + b\cos\varphi), \sin\vartheta(a + b\cos\varphi), b\sin\varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sagt uns eine Auflösung mit WolframAlpha.

In der anderen Richtung müssen wir nun zeigen, dass jeder Punkt, der $g(x) = 0$ erfüllt auch im Bild von f liegt.
Wir haben allerdings keine Lust mehr wieter zu machen.

(iii) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Zeigen Sie

$$\nabla g(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in T$$

sowie

$$\nabla g(x) \cdot \frac{\delta f}{\delta \vartheta}(\varphi, \vartheta) = \nabla g(x) \cdot \frac{\delta f}{\delta \varphi}(\varphi, \vartheta) = 0$$

für alle $(\varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$ und $x = f(\varphi, \vartheta)$. Dies besagt, dass der Gradient von g senkrecht zur Niveaufläche T ist.

Lösung:

Wir berechnen zunächst den Gradienten:

$$\begin{aligned}
\nabla g(x) &= \left(\tfrac{\delta g}{\delta x_1}(x), \tfrac{\delta g}{\delta x_2}(x), \tfrac{\delta g}{\delta x_3}(x)\right) \\
&= (4x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2) - 6a^2 x_1, \\
&\quad 4x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2) - 6a^2 x_2, 4x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2) - 6a^2 x_1, \\
&\quad 4x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2))
\end{aligned}$$

Als nächstes Berechnen wir berechnen nun noch die Partiellen Ableitungen $\frac{\delta f}{\delta \vartheta}(\varphi, \vartheta)$ und $\frac{\delta f}{\delta \varphi}(\varphi, \vartheta)$.

$$\tfrac{\delta f}{\delta \vartheta}(\varphi, \vartheta) \quad = \quad (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0)$$

und

$$\tfrac{\delta f}{\delta \varphi}(\varphi, \vartheta) \quad = \quad (-b(\cos \vartheta) \sin \varphi, -b(\sin\ \vartheta) \sin \varphi, b \cos \varphi)$$

Nun müssten wir noch in die Gleichungen einsetzen und überprüfen, ob es gleich 0 ist, aber wir haben an dieser Stelle auch keine Lust mehr zu rechnen.