Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 (Untergruppen von Primzahlindex)

Geben Sie für jede Primzahl $p > 2$ endliche Gruppen G und H an, so dass $\#(G/H) = p$ und H kein Normalteiler von G ist.

Lösung:

Es sei $G = S_p$ und damit $\#G = \#S_p = p!$. Sei nun H die Gruppe der Permutationen, die alle Elemente bis auf das erste Permutiert, also $H = \{\sigma \in G \mid \sigma\ 1 = 1\}$.

H erfüllt die Gruppenaxiome:

Abgeschlossenheit:
Seien $a, b \in H$, dann ist auch $a \cdot b \in H$, da $(a \cdot b)(1) = a(b(1)) \overset{b \in H}{=} a(1) = 1$

Inverses Element:
Sei $a \in H$, dann ist auch $a^{-1} \in H$, da

$$\begin{array}{rrcl} & a^{-1}(1) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & a \cdot a^{-1}(1) & = & a(1) \\ \Leftrightarrow & id(1) & = & a(1) \\ \Leftrightarrow & 1 & = & 1 \end{array}$$

Neutrales Element:
$id(1) = 1 \Rightarrow id \in H$.

$\square$

$H \cong S_{p-1}$, da wir bis auf ein Element alle Elemente permutieren.

Nun gilt nach dem Satz von Lagrange: $\#G = \#H \cdot \#(G/H)$. Das $\#(G/H) = p$. Wir haben also eine Linksunterklasse gebildet, die genau p Elemente enthält.

$H \lhd G \Leftrightarrow \forall g \in G \forall h \in H\ :\ ghg^{-1} \in H$.
Sei nun $g = g^{-1} = (1\ 2) \in G$ und $h = (2\ 3) \in H$.

$ghg^{-1}(1) = gh(2) = g(3) = 3 \notin H$.
Damit kann H nicht Normalteiler von G sein.

$\square$

Aufgabe 2 (Die orthogonale Gruppe)

a) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(2)$ von Spiegelungen erzeugt wird.

Lösung:

Drehungen um den Winkel φ in $O(2)$ haben die Form
$\rho_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ und Spiegelungen an der Geraden $\varphi/2$
$\sigma_{\varphi/2} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$

b) Es sei $N \lhd O(2)$ eine normale Untergruppe, die eine Spiegelung enthält. Beweisen Sie $N = O(2)$.

Lösung:

tbd

c) Es seien $r \in O(2)$ eine Drehung und $G = \langle r \rangle$. Weise Sie nach, dass N eine normale Untergruppe ist.

Lösung:

tbd

d) Wann ist die Untergruppe G aus Teil c) endlich?

Lösung:

tbd

Aufgabe 3 (Die Kommutatorenuntergruppe von S_n)

Satz: Für $n > 2$ gilt:

$$[S_n, S_n] = A_n.$$

Bew.:

Es gilt: $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{Sign}(\sigma) = 1\}$, $[S_n, S_n] = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in S_n\}$.

$\subseteq$:
Es gilt $\text{Sign}(a) \cdot \text{Sign}(a^{-1}) = 1$, da Sign Gruppenhomomorphismus ist und
$1 = \text{Sign}(e) = \text{Sign}(aa^{-1}) = \text{Sign}(a) \cdot \text{Sign}(a^{-1})$ gilt. (*)

Seien $a, b \in S_n$, dann gilt
$\text{Sign}(aba^{-1}b^{-1}) \overset{\text{Sign}Hom}{=} \text{Sign}(a) \cdot \text{Sign}(b) \cdot \text{Sign}(a^{-1}) \cdot \text{Sign}(b^{-1}) \overset{*}{=} 1$
$\Rightarrow aba^{-1}b^{-1} \in A_n$.

Da nun $K(G) \subset A_n$ ist, muss $< K(G) > \subseteq A_n$ sein. Da wir um die Gruppe zu bilden nur fehlende Elemente durch Verknüpfung dazunehmen (neutrales Element und inverses

Element sind nach Überlegung im Tutorium schon drin). Da die Kombination von 2 Elementen mit positivem Vorzeichen das positive Vorzeichen bebehält, gilt die Behauptung.

$\supseteq$:

Die alternierende Gruppe von Zykeln des Types $(1\ i_1\ i_2)$ erzeugt. Liegen alle Erzeuger in $[S_n, S_n]$, so muss auch die gesammte erzeugte Gruppe in $[S_n, S_n]$ liegen, da Gruppen abgeschlossen sind.

Seien $1 < i_2 \leq n$ und $1 < i_1 \leq n$, $i_1 \neq i_2$.

Aufgabe 4 (Die alternierende Gruppe A_4)

a) Zeigen Sie, dass e zusammen mit den Permutationen vom Zykeltyp $(2,2)$ eine normale Untergruppe $H \lhd A_4$ bildet.

Lösung:

Sei $g \in A_4$ und $h \in H$, dabei besteht h aus 2 disjunkten Zykeln $h = p_1 p_2$.

Nun hat gHg^{-1} die Ordnung 2, da
$ghg^{-1}ghg^{-1} = gp_1p_2g^{-1}gp_1p_2g^{-1} = gp_1p_2p_1p_2g^{-1}$.
Auf dem 7. Zettel haben wir bewiesen, dass disjunkte Zykel (um die es sich handelt) kommutativ sind.

$\Rightarrow ghg^{-1}ghg^{-1} = gp_1p_1p_2p_2g^{-1} = geeg^{-1} = gg^{-1} = e.$

Die einzige Permutation mit Ordnung 2 ist die Transposition, diese hat aber ein negatives Vorzeichen. Da in A_4 aber nur positive Permutationen sind, kann eine Untergruppe auch nur positive Permutationen enthalten. Damit gibt es entweder keine Transposition (e) oder es gibt 2 (Typ (2,2)). Mehr kann es nicht geben, da es nr 4 Elemente gibt.

b) Geben Sie einen Homomorphismus $\varphi : A_4 \to \mathbb{Z}_3$ mit $Ker(\varphi) = H$ an, H die Untergruppe aus Teil a).

Lösung:

tbd