

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: not known

Aufgabe 1 (Teilbarkeit)

Gegeben seien natürliche Zahlen $k, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $n = k \cdot m$.

a) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a^m - b^m) | (a^n - b^n).$$

Beweis:

Seien p_1, \dots, p_s alle Primzahlen, die kleiner gleich $\max\{a, b\}$ sind.

b) Zeigen Sie weiter:

$$k \text{ ungerade} \Rightarrow (\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a^m + b^m) | (a^n + b^n))$$

Beweis:

tbd by your mother

Aufgabe 2 (Primzahlen)

a) Bestimmen Sie mit dem Sieb des Erastrothenes alle Primzahlen zwischen 2 und 200.

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199\}$

Und nu darf hier noch wer den Algorithmus runter brechen.

b) Geben Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl $-1.601.320$ an.

$$-1.601.320 = -1 \cdot 43 \cdot 19 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 2^3$$

Aufgabe 3 (Teiler)

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $T_n := \{l \geq 1 \mid l|n\}$ die Menge ihrer Teiler.

a) Es sei $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ die Primfaktorzerlegung von n . Geben Sie eine Formel für die Anzahl $\#T_n$ der Teiler von n an.

Für diese Formel reicht uns ein einfaches kombinatorisches Argument. Wir haben s verschiedene Elemente mit jeweils k_i vorkommen. Diese wollen wir nun in allen kombination Möglichkeiten haben. Dies führt zur Formel:

$$\#T_n = \prod_{j=0}^s (k_j + 1)$$

b) Charakterisieren Sie diejenigen Zahlen, für die $\#T_n$ ungerade ist.

Vermutung: $\#T_n$ ungerade $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} : a^2 = n$.

Beweis:

Aufgabe 4 (Die Amnestie)

Ein Herrscher hält 500 Personen in Einzelzellen gefangen, die von 1 bis 500 durchnummeriert sind. Anlässlich seines fünfzigsten Geburtstags gewährt er eine Amnestie nach folgenden Regeln:

- Am ersten Tag werden alle Zellen aufgeschlossen.
- Am Tag i wird der Schlüssel der Zellen $i, 2i, 3i$ usw. einmal umgedreht, d. h. Zelle j wird versperrt, wenn sie offen war, und geöffnet, wenn sie verschlossen war, $j = i, 2i, 3i$ usw., $i = 2, \dots, 500$.

Wie viele Gefangene kommen frei? Ist der Insasse von Zelle 179 unter den Freigelassenen?

Eigenschaft: Der Schlüssel einer Zelle wird genau dann umgedreht, wenn der Tag Teiler der Zahl ist.

Beweis:

” \Leftarrow ”

1. Tag, werden alle Zellen geöffnet. $k \neq 0 \Rightarrow 1|k$. Da die Zellen im Bereich $[1, 500]$ liegen ist $k \neq 0$. Am Tag j gilt: $\forall k \in \mathbb{N} : k \cdot i$ wird geöffnet. $k \cdot i$.

Hat Zelle z nun den Teiler j , so gilt: $\exists k' \in \mathbb{N} : z = j \cdot k'$. Dies erfüllt die drehen Voraussetzung.

” \Rightarrow ”

Sei z Zelle und j Tag und es gilt $j \nmid z \Rightarrow \exists k, r \in \mathbb{N} : k \cdot j + r = z \wedge 0 < r < j$.

Da aber nur $t \cdot j$ für beliebige t gedreht wird, kann bei der Zelle das Schloss nicht nochmal gedreht werden. \square

Vermutung: Die Zelle z ist am Ende offen, genau dann wenn $\#T_z$ ungerade ist.

Beweis:

” \Leftarrow ”

$$\exists k \in \mathbb{N} : z = 2 \cdot k + 1$$

Am ersten Tag werden alle Türen geöffnet. Bleibe $2 \cdot k$ Drehvorgänge. Da aber nach beschreibung sich 2 Vorgänge paarweise aufheben, wird die Tür am Ende geöffnet sein.

” \Rightarrow ” $\exists k \in \mathbb{N} : z = 2 \cdot k + 2$ ist möglich, da 0 keine unserer Türen ist.

Am ersten Tag wird die Tür wieder geöffnet. Bleiben $2 \cdot k + 1$ Drehvorgänge, von denen sich $2 \cdot k$ gegenseitig aufheben. Bleib uns ein Drehvorgang, der die Tür abschließt. \square

Nach 3b) müssen wir jetzt nur noch sehen, welche der Zellen Quadratzahlen sind:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144

169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 484

Da die 179 keine Quadratzahl ist, wird die Zelle am Ende der 500 Tage geschlossen sein.