Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

26.06.2012
Abgabe: 03.07.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 10

zur Analysis II

31. *Satz von Euler über homogene Funktionen* *(4+4 Punkte)*

(i) Man nennt eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *homogen vom Grade* m, wenn

$$f(tx) = t^m f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

Sei f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\nabla f(x) \cdot x = m f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(ii) Berechnen Sie explizit $\nabla f(x) \cdot x$ für

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\,,$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (i).

32. *(8 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar mit stetigen zweiten Ableitungen. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen Sie die zweite Ableitungsfunktion der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = f(tx)$.

33. *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung* *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,,$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

erfüllt.

34. *Extremwertaufgabe* *(8 Punkte)*

Ermitteln Sie, an welcher Stelle die Funktion

$$z(x,y) = x^3 + 3xy + y^3\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

Extrema besitzt.