Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

```
function [y] = aitken(x, fx, z)
% x Stuetzstellen
% fx Funktionswerte der Stuetzstellen
% z Aussertungsstelle

% n ist die Anzahl der Stuetzstellen
n = size(x,2);

% Initialwerte fuer alle p_11
for i = 1:n,
    p(i,i) = fx(i)
end

% Nach dem Schema von Aitken
% Berechnung der restlichen Terme
for i = 1:n,
    for j = 1:n-i,
      p(j,j+i) = 1/(x(j+i)-x(j)) * ((z-x(j))*p(j+1,j+i) - (z-x(j+i))*p(j,j+i-1))
    end
end

% Rueckgabe ist p0n(x)
y= p(1,n);
```

Ausgabe 2

Sei $\sigma \in S_{n+1}$ eine Permutationen der Zahlen $0, ..., n$. Z.z. $f[x_0, ..., x_n] = f[x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(n)}]$.

Wir können dividierte Differenzen auch als Summe schreiben:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k} x_i - x_j}$$

Betrachten wir nun die Summe

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_{\sigma(i)})}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k} x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}$$

so kann jeder Summand dieser Summe einem Summanden der oberen Summe zugeordnet werden. Also:

$$\exists v, w \in 0, .., n : \frac{f(x_{\sigma(i)})}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k} x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} = \frac{f(x_v)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k} x_v - x_w}, i, j \in 0, ..., n$$

Da eine Permutation bijektiv ist, hat also jeder Summand genau einen von oben zugeordnet. Im Endeffekt erreicht wir also nur eine Umsortierung der Summe, der Wert bleibt also gleich.

Ausgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll approximiert werden. Bekannt sind die Werte $f(0) = 0, f(1) = 0, f(1+\varepsilon) = 1$, mit $\varepsilon > 0$. Also sind die Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1+\varepsilon$.

(i) Lagrange-Interpolationspolynom p_L

Für das Polynom p_L gilt:

$$p_L(x) = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot L_k(x) = L_2(x)$$

. Berechne $L_2(x)$:

$$L_2(x) \quad = \quad \frac{x-0}{(1+\varepsilon)-0} \cdot \frac{x-1}{(1+\varepsilon)-1} = \frac{x^2-x}{\varepsilon^2+\varepsilon}$$

Also gilt: $p_L(x) = \frac{x^2-x}{\varepsilon^2+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}x^2 - \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}x$.
(ii) Newtonsches Interpolationspolynom

Berechne dividierte Differenzen:

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\
f[x_1] &= f(x_1) = 0 \\
f[x_2] &= f(x_2) = 1 \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = 0 \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{\varepsilon} \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$p_N(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{2} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

mit $a_i = f[x_0, ..., x_i]$.
Also ist $p_N(x) = 0 + 0 \prod_{k=0}^{0}(x - x_k) + \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon} \prod_{k=0}^{1}(x - x_k) = \frac{x^2-x}{\varepsilon^2+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}x^2 - \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}x$.
Wie also zu sehen ist, kommen bei beiden Interpolationsarten die gleichen Polynome heraus. Wie an dem Polynom zu sehen ist, wird der Funktionswert an jeder Stelle sehr groß werden, falls der dritte Punkt sehr nach am zweiten liegt.