Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

Übungsblatt 3

Abgabe: Bis Dienstag, den 15.11.2011, 10Uhr

Aufgabe 1 (Eine andere Definition des Gruppenbegriffs; 5+5 Punkte).
Es seien G eine Menge und $\cdot\colon G \times G \longrightarrow G$, $(g,h) \longmapsto g \cdot h$, eine Verknüpfung mit folgenden Eigenschaften:

- $\star$ Das Assoziativgesetz ist erfüllt.
- $\star$ Es gibt ein *linksneutrales Element* $e \in G$, d.h. für jedes $g \in G$ hat man $e \cdot g = g$.
- $\star$ Zu jedem Element $g \in G$ existiert ein *linksinverses Element* $g' \in G$, d.h. $g' \cdot g = e$.

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.
a) Es seien $g \in G$ und $g' \in G$ ein Element mit $g' \cdot g = e$. Zeigen Sie $g \cdot g' = e$.
b) Beweisen Sie, dass $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$ gilt.

Aufgabe 2 (Eine neue Multiplikation auf $\mathbb{R}$; 5+5 Punkte).
Auf $\mathbb{R}$ wird folgende Verknüpfung definiert:

$$\begin{aligned} \star\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto a \cdot b + a + b. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\star$ das Assoziativgesetz erfüllt und es ein neutrales Element gibt.
b) Welche Elemente in $\mathbb{R}$ besitzen bzgl. $\star$ keine Inversen? Geben Sie die kleinste Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ an, für die $(\mathbb{R} \setminus N, \star)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3 (Abelsche Gruppen; 6+4 Punkte).
a) Es sei $g \in G$ eine Gruppe, so dass $g^2 = e$ für alle $g \in G$ gilt. Weisen Sie nach, dass G abelsch ist. Geben Sie für jedes $k \geq 1$ eine Gruppe G mit $2k$ Elementen an, in der $g^2 = e$ für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt.[1]
b) Es sei G eine **endliche** abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g^2 = e.$$

---

[1] Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass eine endliche Gruppe G, in der es ein Element $g \neq e$ mit $g^2 = e$ gibt, eine gerade Anzahl von Elementen besitzt.

Aufgabe 4 (Der Zykelgraph einer Gruppe; 4+3+3 Punkte).
Es sei G eine endliche Gruppe. Eine Teilmenge $M \subset G$ ist *zyklisch*, wenn ein Element $g \in G$ existiert, so dass

$$M = \langle g \rangle := \left\{ g^k \,|\, k \geq 0 \right\}.$$

Es sei

$$\mathfrak{M} := \left\{ M \subset G \,|\, M \text{ ist zyklisch} \right\}$$

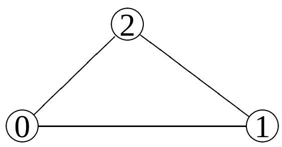
die Menge aller zyklischen Teilmengen von G. Eine zyklische Teilmenge $M \in \mathfrak{M}$ ist *maximal*, wenn sie maximal bzgl. „$\subset$" ist, d.h.

$$\forall N \in \mathfrak{M} : \quad M \subset N \quad \Longrightarrow \quad M = N.$$

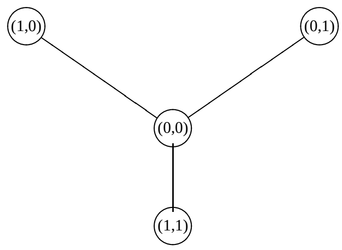
Für jede maximale zyklische Teilmenge $M \subset G$ wird ein Element $g \in G$ mit $M = \langle g \rangle$ gewählt. Es seien $g_1, \ldots, g_s \in G$ die so erhaltenen Elemente und $n_i := \#\langle g_i \rangle$, $i = 1, \ldots, s$. Der *Zykelgraph*[2] Γ wird nun folgendermaßen definiert:

- ⋆ Die Ecken von Γ sind die Elemente von G.
- ⋆ Die Punkte g_i^j und g_i^{j+1} werden durch eine Kante verbunden, $j = 0, \ldots, n_i - 1$, $i = 1, \ldots, s$. Falls $n_i = 2$, dann wird nur eine Kante zwischen e und g gezeichnet. (Man beachte $g_i^0 = e = g_i^{n_i}$, $i = 1, \ldots, s$.)

Beispiele:

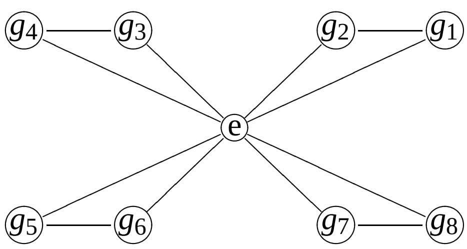


$\mathbb{Z}_3$



$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier zyklischer Teilmengen von G zyklisch ist.
b) Zeichnen Sie die Zykelgraphen von $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$, der Gruppen aus Aufgabe 3 a) und der Diedergruppe D_6.
c) Geben Sie eine Gruppe mit folgendem Zykelgraphen an:



[2] s. Skript Analysis I, Aufgabe 6.3.1, für die Defintion eines Graphen.