Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Montag, den 07.11.2011, 12Uhr

Aufgabe 1 (Teilbarkeit; 5+5 Punkte).
Gegeben seien natürliche Zahlen $k, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $n = k \cdot m$.
a) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \quad (a^m - b^m) | (a^n - b^n).$$

b) Zeigen Sie weiter:

$$k \text{ ungerade} \quad \Longrightarrow \quad \big(\forall a, b \in \mathbb{Z} : \quad (a^m + b^m) | (a^n + b^n)\big).$$

Aufgabe 2 (Primzahlen; 7+3 Punkte).
a) Bestimmen Sie mit dem Sieb des Eratosthenes alle Primzahlen zwischen 2 und 200. (Der Lösungsweg muss erkennbar sein.)
b) Geben Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl $-1.601.320$ an.

Aufgabe 3 (Teiler; 6+4 Punkte).
Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $T_n := \{\, l \geq 1 \,|\, l | n \,\}$ die Menge ihrer Teiler.
a) Es sei $n = p_1^{k_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{k_s}$ die Primfaktorzerlegung von n. Geben Sie eine Formel für die Anzahl $\# T_n$ der Teiler von n an.
b) Charakterisieren Sie diejenigen Zahlen, für die $\# T_n$ ungerade ist.

Aufgabe 4 (Die Amnestie; 10 Punkte).
Ein Herrscher hält 500 Personen in Einzelzellen gefangen, die von 1 bis 500 durchnummeriert sind. Anlässlich seines fünfzigsten Geburtstags gewährt er eine Amnestie nach folgenden Regeln:

- Am ersten Tag werden alle Zellen aufgeschlossen.
- Am Tag i wird der Schlüssel der Zellen i, $2i$, $3i$ usw. einmal umgedreht, d.h. Zelle j wird versperrt, wenn sie offen war, und geöffnet, wenn sie verschlossen war, $j = i$, $2i$, $3i$ usw., $i = 2$, ..., 500.
- Wer am Ende des 500. Tages in einer offenen Zelle sitzt, ist frei und darf gehen.

Wieviele Gefangene kommen frei? Ist der Insasse von Zelle 179 unter den Freigelassenen?