

## Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

**Aufgabe 16:** *Die Ungleichungen von Hölder und Young*Seien  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_n$  reelle Zahlen.

- (i) Zeigen Sie, dass für

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1,$$

und für alle  $x, y \geq 0$  die *Youngsche Ungleichung*

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} x + \frac{1}{q} y$$

richtig ist.

**Beweis:**

tbd

- (ii) Zeigen Sie nun unter Verwendung der Youngschen Ungleichung die Höldersche Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Für welche  $p$  und  $q$  gewinnen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung? **Lösung:**

tbd

**Aufgabe 17:** *Durchschnitt und Vereinigung von Mengen*Sie  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie

- (i)
- $\overline{M} = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen, } M \subset A\}$

**Beweis:**Sei  $T = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen, } M \subset A\}$ Wir müssen die beiden Fälle  $\overline{M} \subset T$  und  $T \subset \overline{M}$  zeigen.Fangen wir mit  $T \subset \overline{M}$  an.Wir wissen, dass  $A \cap B \subset A$  für alle Mengen  $A$  und  $B$  gilt. Da nun  $M \subset \overline{M}$  gilt, ist  $\overline{M}$  eine abgeschlossene Menge, die wir in  $T$  vereinigt haben. Also ist  $T \subset \overline{M}$ .Als nächstes zeigen wir  $\overline{M} \subset T$ .Nehmen wir an, dass es nicht so wäre, dann gebe es mindestens einen Punkt  $x \in \overline{M}$ , mit  $x \notin T$ . Da alle Mengen, die in  $T$  geschnitten werden  $M$  enthalten, wissen wir, dass  $x \in M$  liegen muss.Daraus ergibt sich, dass  $x \in \delta M$  liegen muss.**(TODO FORMULIERUNG: Weil der Rand in jeder epsilon Umgebung in der Menge liegen muss, kann es keine kleinere abgeschlossene Menge**

als  $\overline{M}$  geben, da sonst nicht jeder Punkt von  $M$  in dieser Menge liegen kann)

□

$$(ii) \mathring{M} = \bigcup \{ \Omega \subset \mathbb{R}^n \mid \Omega \text{ offen, } \Omega \subset M \}$$

**Beweis:**

Sei  $T = \bigcup \{ \Omega \subset \mathbb{R}^n \mid \Omega \text{ offen, } \Omega \subset M \}$ .

Wir müssen erneut zeigen, dass  $\mathring{M} \subset T$  und  $T \subset \mathring{M}$  gilt. Fangen wir mit  $\mathring{M} \subset T$  an.

Nach der Definition von inneren Punkten, liegt jeder dieser Punkte auch in  $M$ . Da  $\mathring{M}$  eine offene Menge ist, wird diese mit in der Vereinigung von allen offenen Mengen sein. Daher gilt auch  $\mathring{M} \subset T$ .

Als nächstes zeigen wir  $T \subset \mathring{M}$ .

Wir wissen, dass die Vereinigung in diesem Fall eine offene Menge sein muss. Für jedes  $x \in T$  muss also ein  $\varepsilon > 0$  existieren, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset T$  liegen muss. Dies bedeutet aber, da alle Mengen, die wir vereinigt haben, die Bedingung  $\Omega \subset M$  erfüllen. Daher muss insbesondere  $B_\varepsilon(x) \subset M$  für jedes  $x \in T$  erfüllt sein. Dies ist nun allerdings genau die Definition von  $\mathring{M}$ .

□

### Aufgabe 18: Durchmesser und Abstand von Mengen

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Man definiert

$$\text{diam } M := \sup \{ |x - y| \mid x, y \in M \}$$

Für  $x \in M$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$  definiert man den Abstand von  $x$  zu  $M$  durch

$$\text{dist}(x, M) := \inf \{ |x - y| \mid y \in M \}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $\text{diam } M = \text{diam } \overline{M}$ .

**Beweis:**

Wir unterscheiden zunächst 3 Fälle.

Zunächst kann der Punkt, zum einen können die entferntesten Punkte beide auf dem Rand liegen, dann könnte einer auf dem Rand und der andere im inneren liegen und zuletzt können beide im inneren liegen.

Liegen beide entferntesten Punkte auf dem Rand  $\partial M$ , so liegen sie insbesondere im Abschluss auch auf dem Rand  $\partial M$ . Damit ist die Gleichheit erfüllt.

Liegt einer der Punkte nicht auf dem Rand, so können wir uns in der Umgebung einen beliebigen Punkt inneren Suchen. Wir wissen, dass um einen inneren Punkt  $x \in \mathring{M}$  eine offene Kugel gibt, mit  $\varepsilon > 0$  und  $B_\varepsilon(x) \subset M$ . Wir können nun parallel zum anderen Punkt unseren Punkt nach außen schieben. Damit wird der Abstand um  $\varepsilon > 0$  größer. Nun wissen wir, dass durch Grenzwertbildung ein Punkt auf dem Rand erreicht wird (definition der Vorlesung). Damit konvergiert auch der Durchmesser des Objektes gegen den Durchmesser des Abschlusses.

Das gleiche gilt auch, wenn beide Punkte im inneren liegen. Hier müssen nur beide Punkte im limes nach außen geschoben werden und erreichen so einen Punkt auf

dem Rand. Der Durchmesser wird im Grenzwert dann auch gleich sein.

Da der Durchmesser über das supremum definiert ist, ist der Grenzwert im Falle der offenen Kugel der genommene Wert und damit gleich dem Abstand auf dem Rand.

□

(ii) Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen

a)  $x \in \overline{M} \iff dist(x, M) = 0$

**Beweis:**

$\Rightarrow$ :

Sei  $x \in \overline{M}$ . Dann ist  $|x - x| = 0$ , da  $x$  insbesondere in  $M$  lag.

Nach Dreiecksungleichung kann kein Wert kleiner als 0 erreicht werden, somit ist das Infimum auch gleich 0.

$\Leftarrow$ :

$\exists y \in M : |x - y| = 0$ . Da wir uns durch den Betrag in einem Metrischen Raum befinden müssen, gilt in diesem per Definition  $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ . Deshalb muss  $x \in M$  gelten.

□

b)  $x \in \overset{\circ}{M} \iff dist(x, M^c) > 0$

**Beweis:**

$\Rightarrow$ :

Da  $x \in \overset{\circ}{M}$  gilt, muss nach Definition eine offene Kugel existieren mit  $\varepsilon > 0$   $B_\varepsilon(x) \subset M$ . Wir wissen nun also, dass  $\forall y \in M^c : |x - y| \geq \varepsilon > 0$ , da in der unmittelbaren Umgebung um  $x$  nur Punkte aus  $M$  liegen können.

$\Leftarrow$ :

Nach Voraussetzung existiert ein  $\varepsilon > 0$ , mit  $dist(x, M^c) \geq \varepsilon > 0$ . Nun folgt daraus, dass  $B_\varepsilon(x) \subset M$  gilt. Wäre dies nicht so, würde ein Punkt in der Kugel existieren, der nicht in der Menge liegt. Dies würde aber bedeuten, dass der Abstand von  $x$  zu einem Punkt aus dem Komplement kleiner als  $\varepsilon$  sein muss. Damit ist das Infimum von allen kleiner als  $\varepsilon$  und damit auch  $dist(x, M^c)$ . Dies ist nun allerdings ein Widerspruch zur Annahme.

□

c)  $x$  Randpunkt von  $M \iff dist(x, M) = dist(x, M^c) = 0$

**Beweis:**

$\Rightarrow$ :

Sei  $x$  Randpunkt von  $M$ .

Das bedeutet, zum einen, dass  $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$  ist, aber  $\forall \varepsilon > 0 : \neg(B_\varepsilon(x) \subset M)$ .

Die zweite Aussage bedeutet insbesondere, dass  $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap M^c \neq \emptyset$ .

Nun gilt, dass  $dist(x, M) < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ , da in den Kugeln Punkte liegen. Nun ist  $\inf\{\varepsilon \mid \varepsilon > 0\} = 0$ . Und dieses Spiel gilt im Umkehrschluss auch für den Abstand zum Komplement.

$\Leftarrow$ :

Wir wissen, dass in jeder  $\varepsilon > 0$  Umgebung um  $x$  ein Punkt  $y \in M$  und ein Punkt  $z \in M^c$  existieren muss, mit  $y \in B_\varepsilon(x)$  und  $z \in B_\varepsilon(x)$ . Das Infimum ist,

wie oben gezeigt, genau 0.

Nun sind aber 2 solche Punkte in  $M$  und  $M^c$  in jeder offenen Kugel vorhanden, daher kann der Schnitt nie leer sein (zu  $M$  und  $M^c$ ).

Dies ist genau die Definition eines Randpunktes.

□

(iii) Für  $\varepsilon > 0$  definiert die  $\varepsilon$ -Umgebung einer Menge  $M$  durch

$$M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, M) < \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle  $\varepsilon > 0$  die Menge  $M_\varepsilon$  offen ist, und bestimmen Sie

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon$$

### Lösung:

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest.

Sei nun  $x_0 \in M_\varepsilon$  ein beliebiger Punkt. Nach Definition von  $M_\varepsilon$  ist  $\text{dist}(x_0, M) = d_0 < \varepsilon$ . Wir wählen uns nun einen Radius um diesen Punkt, um so zu zeigen, dass die offene Kugel mit diesem Radius in  $M_\varepsilon$  liegt.

Wir können zunächst beobachten, dass wenn  $x \in M$  gilt, dass der Radius dann trivialerweise  $\varepsilon$  sein kann, da alle Punkte in diesem Radius in  $M_\varepsilon$  liegen. Wir betrachten also nur Punkte mit  $\text{dist}(x_0, M) > 0$ . Bei der Konstruktion des Radius müssen wir nun zum einen beachten, dass wir nicht über den  $\varepsilon$  Abstand zu Menge lappen, aber auch nicht zur Seite herausspringen, wenn wir uns zu nah in einer Spitze befinden.

Wir wählen also den Radius  $r_0 = \min\{\varepsilon - d_0, \varepsilon^2 - d_0^2\}$ . Der erste ist der Abstand in Verlängerung des Abstandes zum Punkt in der Menge, von dem wir  $d_0$  entfernt sind, das andere ist mit dem Satz des Pythagoras umgeformt und gibt den Abstand senkrecht zur Verlängerung an.

Nun wissen wir, dass alle Punkte im Kreis  $B_{r_0}(x_0)$  vom Ursprünglichen Punkt  $x$  zu dem  $|x - x_0| < \varepsilon$  war auch weniger als  $\varepsilon$  entfernt sind. Daher muss  $B_{r_0}(x_0) \subset M_\varepsilon$  sein.

□

Nun bestimmen wir  $T = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon$ .

Wir zeigen, dass  $\overline{M} = T$  gilt.

⊂:

Wir können als erstes leicht sehen, dass  $M \subset T$  gilt, da wir schon bewiesen haben, dass  $\text{dist}(x, M) = 0 \Leftrightarrow x \in M$  gilt. Also liegt  $x$  insbesondere für jedes  $\varepsilon$  in  $M_\varepsilon$ .

Als nächstes müssen wir nur noch zeigen, dass der Rand  $\delta M \subset T$  enthalten ist.

Für den Rand gilt nun die Definition  $x \in \delta M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ .

Wir wissen nun aber, dass nach dem Schnitt für alle  $\varepsilon \exists y \in M : |x - y| < \varepsilon$  existieren muss. Dann muss allerdings nach dem Schnitt genau so ein  $y$  existieren.

⊃:

Sei  $x \in T$ . Wir machen prinzipiell die selbe Unterscheidung, wie eben. Entweder ist  $x \in M$  oder  $x \in \delta M$ .

Wir eben schon erwähnt, gilt für jedes  $\varepsilon > 0$   $M \subset M_\varepsilon$ . Also auch insbesondere  $M \in \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon$ .

Nehmen wir nun einmal an, dass  $x \notin \delta M$  liegt. Das bedeutet, dass es ein  $\varepsilon' > 0$  gibt, so dass  $B_{\varepsilon'}(x) \cap M = \emptyset$ . Dies bedeutet aber insbesondere, dass  $x \notin M_\varepsilon$  liegen, kann da es keinen Punkt in  $M$  gibt, der einen Abstand hat, der Nah genug an  $x$  liegt.

Daraus folgt, dass im Schnitt von allen  $M_\varepsilon$  der Punkt nicht drin liegen kann.

□

### Aufgabe 19: Umfang von Mengen

- (i) Man zeige, dass es für jede beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , die aus mindestens zwei Punkten besteht, genau eine Kugel  $K = \overline{B_R(a)}$  mit kleinstmöglichem Radius  $R > 0$  gibt, die  $M$  enthält. Man nennt diese Kugel  $K$  die Umkugel von  $M$  und den Radius  $R$  den Umkugelradius von  $M$ .

**Beweis:**

Sei  $M$  eine beliebige Menge und  $d = \text{diam } M$  ihr Durchmesser. Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  zwei Punkte, so dass  $x, y$  Grenzwerte von zwei Folgen in der Menge  $M$  sind und  $|x - y| = d$ . Wir wählen nun  $x + (x - y)/2 = a$ , den Punkt der genau in der Mitte der Menge liegt.

Nach Definition von  $\text{diam } M$  gibt es keinen größeren Abstand in der Menge  $M$ , die Kugel  $B_d(a)$  hat nun genau diesen Durchmesser, beinhaltet also zunächst gesamt  $\overset{\circ}{M}$ . Das einzige, was nun noch nicht in der Kugel existieren muss, sind Punkte  $x, y \in M$  mit  $|x - y| = d$ , also genau Punkte auf dem Rand. Nun wissen wir aber, dass diese Punkte im Abschluss der Kugel liegen müssen, da der Abstand der Kugel im Grenzwert gegen  $d$  konvergiert, also für beide Punkte eine Folge von Punkten in der offenen Kugel existiert, so dass der Grenzwert  $x$  bz.  $y$  ist.

Demnach ist  $\overline{B_d(a)}$  eine Kugel, die gesamt  $M$  enthält.

Als nächstes können wir nun sagen, dass dies die kleinste Kugel ist, da wir, falls wir eine kleinere Kugel wählen, 2 Punkte  $a, b$  existieren können, mit  $|x - y| = d$ . Da die Kugel aber nun einen kleineren Radius als  $d$  hat, wird entweder  $x$  oder  $y$  nicht in der Kugel liegen können.

□

- (ii) Sie  $M \subset \mathbb{R}^n$  symmetrisch um den Ursprung, das heißt

$$x \in M \iff -x \in M.$$

Zeigen Sie, dass  $M \subset \overline{B_{(\text{diam } M)/2}(0)}$  **Beweis:**

Sei  $d = \text{diam } M$  der Durchmesser von  $M$ . Nehmen wir nun an, dass der Durchmesser zwischen  $x, y \in M$  mit  $y \neq -x$  und  $|x - (-x)| < d$  besteht. Wir wissen dann aber, dass  $2|x| \geq |x - y|^2 - |x|^2$  gilt, nach Dreiecksungleichung.

Dies ist ein Widerspruch, daher muss der Durchmesser zwischen 2 Punkten bestehen, die symmetrisch zum Ursprung sind.

Nach Aufgabenteil (i), können wir nun  $a = x + (x - (-x))/2 = 0$  als Mittelpunkt wählen mit Radius  $d = \text{diam } M/2$  und dieser Umkreis enthält ebenfalls nach (i) die gesamte Menge.

□

- (iii) Man zeige, dass zwischen dem Umkugelradius  $R$  und dem Durchmesser  $\delta := \text{diam } M$  einer beschränkten Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  mit mindestens zwei Elementen die Beziehung

$$R \leq \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

besteht. Geben Sie ein Beispiel für eine dreipunktige Menge  $M$ , für die Gleichheit richtig ist an.

textbfLösung: