Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 24: *Stetige Abbildungen auf Punktmengen*

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Beweis:
Wir benutzten für den Beweis das Folgenkonvergenzkriterium für Abgeschlossene Menge.
D.h. wenn B eine abgeschlossene Menge ist muss für jede Folge $(x)_{k\in\mathbb{N}}$ aus B, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_k\right) \in B$ gelten.

Nun gilt, aber, für jeden Punkt $x_0 \in \overline{A}$, dass es eine Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to n,\infty} x_k = x_0$.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{aligned}$$

Wir haben eine Folge von Bildern der Funktion. Wir wissen, dass in einer abgeschlossenen Menge jede konvergente Folge gegen einen Punkt innerhalb der Menge konvergiert. Da $f(x_0)$ eine konvergente Folge $f(x_k)$ besitzt, da die x_k konvergieren und f stetig ist, muss das Bild des Abschluss des Quellbereiches auch im Abschluss des Bild liegen.

$\square$

(ii) Ist das stetige Bild $f(M)$ einer beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wieder offen bzw. abgeschlossen? Geben Sie ein Beispiel an.
Lösung:
(1) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f \equiv c \in \mathbb{R}^m$.
Dann ist f stetig und $f(M) = \{c\}$. Die Menge $\{c\}$ ist aber nicht offen, da für alle $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_\varepsilon(c)$ nicht Teilmenge von $\{c\}$ ist.
(2) Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $M = (-\infty, 0]$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto e^x$ (also hier: $n = 1, m = 1$).
Dann ist M abgeschlossen, da für alle konvergenten Folgen (x_k), mit $x_k \in M$ gilt: $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha < \infty$ und $\alpha \geq 0$ und damit $\alpha \in M$.
Es gilt weiterhin: $f(M) = f((-\infty, 0]) = (0, 1]$ wobei $(0, 1]$ nicht abgeschlossen ist in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ stetiger Bilder von beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Mengen müssen nicht wieder offen bzw. abgeschlossen sein.

(iii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Erfülle $M \subset \mathbb{R}^n$ die Heine-Borell-Eigenschaft. Dann erfüllt $f(M)$ diese Eigenschaft auch.
Lösung:
Sei $\bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckungvon $f(M)$, mit I Indexmenge.
Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt: $f^{-1}(V)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$, für alle offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^m$.

Also folgt aus der Stetigkeit von f: $V_i := f^{-1}(U_i)$ ist offen, $i \in I$.

Da $M \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ und M die Heine-Borell-Eigenschaft erfüllt, existieren $i_1, i_2, ..., i_k \in I, k \in \mathbb{N}$ mit $M \subseteq \bigcup_{j=1}^k V_{i_j}$. Daraus folgt $f(M) \subseteq f(\bigcup_{j=1}^k V_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^k f(V_{i_j})$. Durch Einsetzen erhalten wir dann $f(M) \subseteq \bigcup_{j=1}^k f(f^{-1}(U_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$.

Also existiert eine endliche offene Überdeckung von $f(M)$
$\Rightarrow f(M)$ erfüllt die Heine-Borell-Eigenschaft. □

Aufgabe 25: *Wachstum spezieller Funktionen*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 && \text{für alle } x \neq 0 \\ f(cx) &= cf(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } c > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis:
Für $x = 0$ gilt $f(x) = 0$, denn
$f(0) = f(c \cdot 0) = c \cdot f(0)$, für alle $c > 0$.
Und damit $f(0) = c \cdot f(0) \Leftrightarrow (1-c)f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, $c > 0$.

Da auch $|x| = 0$ ist, gilt die Ungleichung in diesem Fall für alle $a, b > 0$.

Für $x \neq 0$ gilt:
$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \overset{|x|\neq 0}{\Leftrightarrow} a \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq b$
Durch die Eigenschaften von f können wir nun Umformen:
$\frac{f(x)}{|x|} = \frac{1}{|x|} f(x) \overset{\frac{1}{|x|}>0}{=} f(\frac{x}{|x|})$, wobei der Ausdruck $\frac{x}{|x|}$ einen normierten Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ beschreibt, es gilt also $|\frac{x}{|x|}| = 1$.

Sei nun $M := \{x \in \mathbb{R}^n | |x| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge der normierten Vektoren.
Dann gilt: M ist kompakt.
Beweis: $M \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ (M kompakt $\Leftrightarrow$ M beschränkt und abgeschlossen).
M ist beschränkt, da die Norm nach konstruktion $= 1$ ist
und sie ist abgeshlossen, weil das Komplement offen ist. Wir können um jeden Punkt eine $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x)$ legen, so dass die Norm < 1, bzw. > 1 ist.

Da M kompakt und f stetig, gilt: $f(M)$ nimmt in M sein Maximum und Minimum an (nach VL), es existieren also $p, q \in M$ mit $f(p) = \sup f(M)$ und $f(q) = \inf f(M)$.
Setze nun $a := f(q) > 0, b := f(q) > 0$, also folgt
$a = f(q) = \inf f(M) \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq \sup f(M) = f(q) = b$ und daraus die Behauptung.

Aufgabe 26: *Wegzusammenhang*

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in A$ eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to A$ gibt, mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Man nennt γ einen *stetigen Weg von x nach y.*

(i) Seien $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und A wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A)$ wegzusammenhängend ist.
Beweis:
Seien $x, y \in f(A)$. Nun wissen wir, dass es 2 Punkte $a, b \in A$ geben muss, mit $f(a) = x$ bzw. $f(b) = y$, da x, y sonst nicht im Bild liegen würden.

Nach Vorraussetzung ist A wegzusammenhängend, d.h. es gibt eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to A$, mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

Da die Komposition von 2 stetigen Funktionen wiederum stetig ist, wählen wir als Wegfunktion in $f(A)$ die Funktion $(f \circ \gamma)$.
Diese Funktion ist stetig und es gilt:
$(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(a) = x$ und
$(f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(b) = y$.

Diese Funktion können wir also für 2 beliebige Punkte in $f(A)$ angeben. Damit existiert ein stetiger Weg von x nach y in $f(A)$ und damit ist auch $f(A)$ *wegzusammenhängend.*

$\square$

(ii) Zeige Sie, dass genau dann $A \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, wenn A ein Intervall ist, d.h. wenn für alle $x, y \in A,\ x \leq y,\ [x, y] \subset A$.
Beweis:
Nehmen wir an, dass A kein Intervall ist, aber *wegzusammenhängend.*
Da A kein Interval ist gilt
$\exists x, y \in A\ x < y, [x, y] \not\subset A$, insbesondere muss also ein Wert $z \in [x, y]$ existieren, mit $z \notin A$.
Da A aber *wegzusammenhängend* sein soll, existiert eine stetige Funktion γ, mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Nach dem Zwischenwertsatz, muss die Funktion γ jeden Wert zwischen x und y einmal annehmen, da γ stetig ist.

Sei $\xi \in [0,1]$ der Wert mit $\gamma(\xi) = z$. Wir untersuchen γ nun im Punkt ξ.

Da $[0,1]$ abgeschlossen ist, existiert eine Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Da f stetig ist, muss gelten $f(\xi)f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = z$. Da wir nun aber eine konvergente Folge angeben konnten, muss ξ im Bild liegen. Dies ist aber nach Vorraussetzung unmöglich.

$\square$

(iii) Können Sie den bekannten Zwischenwertsatz aus der Analysis I auch auf Funktionen $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern.
Beweis:
Uns fiel keine Lösung ein.
Also konnten wir es nicht.

Aufgabe 27 *Stetigkeit der Umkehrfunktion*

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-x^2} \end{array}$$

einen Homöomorphismus von $(0,1)$ nach $\mathbb{R}^+$ definiert, d.h. f ist invertierbar zwischen den angegebenen Mengen und sowohl f als auch f^{-1} ist stetig.

Beweis.:
Sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}^+$, mit $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$.
Z.z.: (1) g bijektiv, (2) g stetig, (3) g^{-1} stetig.

(1) g bijektiv
(1a) g injektiv, also $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$, für alle $a, b \in (0,1)$.
Seien $a, b \in (0,1)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & g(b) \\ \Leftrightarrow \dfrac{a}{1-a^2} & = & \dfrac{b}{1-b^2} \\ \Leftrightarrow a - ab^2 & = & b - ba^2 \\ \Leftrightarrow a & = & b \end{array}$$

(1b) g surjektiv, also $\forall c \in \mathbb{R}^+ \exists x \in (0,1) : g(x) = c$.
Sei $c \in \mathbb{R}^+$. Wähle $x := \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$.
Dann gilt $x > 0$, da $c > 0$ ist steht im Zähler immer eine positive Zahl ($\sqrt{1+x} \geq 1$ für $x > 0$), und der Nenner $2c > 0$.

Es gilt darüber hinaus, dass $x < 1$, da

$$\begin{array}{crcl} & \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c} & < & 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1+4c^2}-1 & < & 2c \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1+4c^2} & < & 2c+1 \\ \overset{>0 (siehe\, eben)}{\Leftrightarrow} & 1+4c^2 & < & 4c^2+4c+1 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & 2c \end{array}$$

Und dies gilt, da $c > 0$ ist. $\Rightarrow g$ bijektiv.

(2) g stetig
Da die Funktion im Nenner $1 - x^2$ stetig ist und auf dem Intervall $(0, 1)$ keine Nullstellen hat, sowie x stetig ist, ist nach Sätzen aus Ana I der Quotient aus den beiden wieder eine stetige Funktion.

(3) g^{-1} stetig
Wie schon gesagt, ist die Umkehrfunktion auf diesem Intervall definiert durch $g^{-1}(c) = \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$. Nun ist sowohl der Zähler als auch der Nenner eine stetige Funktion. Die einzigen Stellen, an denen diese Funktion nun nicht per se stetig ist, sind die Nullstellen des Neners. Die Nullstelle des Nenners liegt aber nun bei $c = 0 \notin \mathbb{R}^+$. Damit enthält die Funktion im Quellbereich keine Nullstelle und die Umkerhfunktion ist stetig.

(ii) Sei die Funktion $f : [0, 1) \cup [2, 3] \to [0, 2]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0, 1) \\ x - 1 & , x \in [2, 3] \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f stetig und invertierbar ist, aber die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, 2] \to [0, 1) \cup [2, 3]$ nicht stetig ist.

Beweis:

a) f ist stetig:
Die Funktion f ist stetig. Nehmen wir an, es wäre nicht so, dann müsste es einen Punkt x_0 geben, gegen den eine Folge von Urbildern konvergiert, aber die Folge der Bilder konvergiert nicht gegen $f(x_0)$.
Nun sehen wir, dass eine Folge von Urbildern, ab einer gewissen $\varepsilon > 0$ Umgebung, entweder in $[0, 1)$ oder in $[2, 3]$ liegen müssen, da sonst das $\varepsilon > 1$ sein müsste. (Nach $\varepsilon - \delta$ unmöglich.)

Wir können also du beiden Bereiche $f_1 = f|_{[0,1)}$ und $f_2 = f|_{[2,3]}$ getrennt untersuchen.
Dabei handelt es sich nun aber um 2 stetige Funktionen, da $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = x - 1$ ist.

Damit kann es keinen Punkt geben, bei der die Folge der Bilder nicht gegen das Bild des Grenzwertes der Urbilder konvergiert.

b) f ist invertierbar:
Sei $g : [0,2] \to [0,1) \cup [2,3]$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} x & ,x \in [0,1) \\ x+1 & ,x \in [1,2] \end{cases}$$

Wir zeigen, dass $a = (f \circ g) = id_{[0,2]}$ ist und $b = (g \circ f) = id_{[0,1)\cup[2,3]}$.

Betrachten wir zunächst a.
Sei zunächst $x \in [0,1)$, dann ist $g(x) = x \in [0,1)$. Wenden wir nun f an erhalten wir $f(g(x)) = x \in [0,1)$. Dieser Fall geht also schonmal auf.

Sei als nächstes $x \in [1,2]$, dann ist $g(x) = x+1 \in [2,3]$. Wenden wir nun f an erhalten wir $f(g(x)) = x+1-1 = x \in [1,2]$.

Also ist $(f \circ g) = id_{[0,2]}$.

Betrachten wir nun b.
Sei zunächst $x \in [0,1)$, dann ist $f(x) = x \in [0,1)$ und $g(f(x)) = x \in [0,1)$.
Als nächstes ist $x \in [2,3]$, dann ist $f(x) = x-1 \in [1,2]$ und $g(f(x)) = x-1+1 = x \in [2,3]$.

Also ist auch $(f \circ g) = id_{[0,1)\cup[2,3]}$.

Diese beiden Bedingungen reichen aus, um zu zeigen, dass g die Umkehrfunktion von f ist. Also f bijektiv also insbesondere auch invertierbar.

c) g ist nicht stetig:
Betrachten wir den Punkt $x = 1$. Der linksseitige Grenzwert, gebildet aus $x < 1$ ist, da es sich um die Identität handelt $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = x \Rightarrow f(\lim\limits_{n\to\infty}) = x$, da jedes $x \in [0,1)$ liegt.

Der rechtseitige Grenzwert, mit einer Folge von $x_k > 1$ für alle k, ist aber nun $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_k) = x+1$.

Der linksseitige und rechtseitige Grenzwert in $x = 1$ ist unterschiedlich, existiert im allgemeinen als einfacher Grenzwert also nicht daher ist die Funktion auch $[0,2]$ nicht stetig.