Übung 2

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1

Gesucht ist ein $O(M(n))$-Algorithmus zur Bestimmung des Betrags der Determinanten, wobei $M(n)$ die Anzahl der arithmetischen Operationen für die Matrizenmultiplikation von $n \times n$-Matrizen ist.

Lösung:
Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Wir zerteilen die Matrix wie in der VL in folgende Teile:

$$A = XYZ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad D = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

Wir nehmen vorerst an, dass A_{11} ebenfalls invertierbar ist. Wir kommen später darauf zurück. Für die Determinante von A gilt nun:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A_{11} \det D \end{aligned}$$

Stellen wir nun die Rekursionsgleichung für $D(n)$ (Anz. Operationen für die Berechnung der Determinanten) auf und lösen sie:

$$\begin{aligned} D(1) &= 1 \\ D(n) &= 2 \cdot D\left(\frac{n}{2}\right) + 3O\left(M\left(\frac{n}{2}\right)\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 2 \cdot D\left(\frac{n}{2}\right) + cM\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \ldots \\ &= 2^k D\left(\frac{n}{2^k}\right) + c\left(M\left(\frac{n}{2}\right) + 2M\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots + 2^{k-1}M\left(\frac{n}{2^k}\right)\right) \\ &\overset{(*)}{=} 2^k D\left(\frac{n}{2^k}\right) + M(n) \cdot c \sum_{i=0}^{k} (2a)^i \\ &\overset{k=\log n}{=} 2^{\log n} + M(n) \cdot c' \\ &= O(M(n)) \end{aligned}$$

Umformung (*) gilt, da $M(\frac{n}{2}) \leq a \cdot M(n)$ für ein $a < 1/2$.

Die Annahme, dass A_{11} invertierbar ist, können wir treffen, da wir im Zweifelsfall den Algorithmus auf $B := A \cdot A^t$ anwenden, und dort die linke obere Teilmatrix immer invertierbar ist.
Da dann $\det B = (\det A)^2$ gilt hier $|\det A| = \sqrt{\det B}$.

Aufgabe 2

Aufgabe 3