Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

Übungsblatt 9

Abgabe: Bis Dienstag, den 10.01.2012, 10Uhr

Aufgabe 1 (Untergruppen von Primzahlindex; 10 Punkte).
Geben Sie für jede Primzahl $p > 2$ endliche Gruppen G und H an, so dass $\#(G/H) = p$ und H kein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 2 (Die orthogonale Gruppe; 2+3+3+2 Punkte).
a) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(2)$ von Spiegelungen erzeugt wird.
b) Es sei $N \trianglelefteq \mathrm{O}(2)$ eine normale Untergruppe, die eine Spiegelung enthält. Beweisen Sie $N = \mathrm{O}(2)$.
c) Es seien $r \in \mathrm{O}(2)$ eine Drehung und $G = \langle r \rangle$. Weisen Sie nach, dass N eine normale Untergruppe ist.
d) Wann ist die Untergruppe G aus Teil c) endlich?

Aufgabe 3 (Die Kommutatoruntergruppe von S_n; 10 Punkte).
Beweisen Sie, dass für $n \geq 2$

$$[S_n, S_n] = A_n.$$

Aufgabe 4 (Die alternierende Gruppe A_4; 7+3 Punkte).
a) Zeigen Sie, dass e zusammen mit den Permutationen vom Zykeltyp $(2,2)$ eine normale Untergruppe $H \lhd A_4$ bildet.
b) Geben Sie einen Homomorphismus $\varphi : A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ mit $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$ an, H die Untergruppe aus Teil a).

Zusatzaufgabe 1 (Die Kommutatoruntergruppe von GL_n; 10 Bonuspunkte).
Es seien k ein Körper und $n \geq 2$. Falls $n = 2$, gelte $\#k \geq 3$. Zeigen Sie

$$[\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)] = \mathrm{SL}_n(k).$$