Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass durch

$$u \sim v \;:\Leftrightarrow u \text{ und } v \text{ hängen zusammen}$$

eine Äquivalenzrelation auf den Knoten eines Graphen definiert wird.

Beweis:
Sei $G(V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Zwei Knoten u, v hängen zusammen, wenn ein Weg $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ existiert, mit $u = a_1$, $v = a_n$ und $\forall 1 \leq i < n \;:\; a_i a_{i+1} \in E$.

Reflexivität: Sei $u \in V$, dann ist (u) ein Weg in G, da es keine Kanten gibt die nicht in E liegen und Start- und Endknoten u sind. $\Rightarrow u \sim v$.

Symmetrisch: Sei $u, v \in V$ mit $u \sim v$.

Dann existiert ein Weg $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ nach Definition. Sei $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein Weg mit $b_j = (a_{n-j+1})$ für alle $1 \leq j \leq n$. Da alle Knoten aus V kommen, liegt dieser Weg auch in G. Es gilt $b_1 = a_{n-1+1} = a_n = v$ und $b_n = a_{n-n+1} = a_1 = u$.

Nun gilt für alle $1 \leq i < n$, dass

$$b_i b_{i+1} = a_{n-i+1} a_{n-i} \in E$$

da G ungerichtet ist und nach Vorraussetzung $a_{n-i} a_{n-i+1}$ in E liegt. Damit ist

$$v \sim u$$

Transitivität: Seien $u, v, w \in V$ mit $u \sim v$ und $v \sim w$ Sei $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein Weg von u nach v und $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ ein Weg von v nach w.

Dann ist $(c_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ ein Weg mit

$$c_i = \begin{cases} a_i & , i \leq n \\ b_{i-n} & , i > n \end{cases}$$

Es gilt $c_0 = a_0 = u$ und $c_{2n} = b_n = w$. Desweiteren gilt für alle $1 \leq i \leq n$, dass $c_i c_{i+1} = a_i a_{i+1} \in E$ gilt und für alle $n+1 \leq i \leq 2n$, dass $c_{i-n} c_{i-n+1} = b_i b_{i+1} \in E$.

$\Rightarrow u \sim w$.

Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

$\square$

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass in jedem Graphen die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Beweis:

Sei $G(V, E)$ ein ungerichter Graph.

Wir betrachten nun $g = \sum_{v \ inV} \text{grad}(v) = 2|E|$. Dies gilt, da wir für jede Kante $(u, v) \in E$ sie einmal für den Grad von u und einmal für den Grad von v zählen.

Nun wissen wir, dass die summe von

1. gerade und gerade ist gerade.
2. gerade und ungrade ist ungerade.
3. ungerade und ungerade ist gerade.

Da die Summe aller Grade gerade ist, müssen es eine gerade Anzahl von Knoten mit geradem Grad sein.

□

Aufgabe 3.

Zeigen Sie: Eine Kante ist eine Brücke genau dann, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

Beweis:
Sei $G(V, E)$ ein Graph. und $(u, v) \in E$.
$\Rightarrow$
tbd
$\Leftarrow$

tbd

Afugabe 4.

Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er keinen ungeraden Kreis enthält.

Beweis:

tbd