

## Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

**Aufgabe 1** (Gruppen der Ordnung 10)

Beweisen Sie, dass eine endliche Gruppe  $G$  der Ordnung 1000 einen Normalteiler  $H$  mit  $\{e\} \subsetneq H \subsetneq G$  besitzt.

Die Ordnung von  $G$  ist  $\#G = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$ .

1. Sylowsatz  $\Rightarrow$  Es existieren  $h$  5-Sylow-Untergruppen. Für  $h$  muss gelten:  $h \equiv 1 \pmod{5}$  und  $h \mid 2^3 = 8$ . Die Teiler von 8 sind 1, 2, 4. Da aber da nur  $1 \equiv 1 \pmod{5}$  gilt, gibt es genau eine 5-Sylow-Untergruppe.

Wegen der Eindeutigkeit der Sylow-Untergruppe folgt aus dem zweiten Sylowsatz, dass diese ein Normalteiler von  $G$  ist.  $\square$

**Aufgabe 2** (Kommutierende Normalteiler)

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $H, J$  Normalteiler von  $G$ , so dass  $H \cap J = \{e\}$ .

a) Beweisen Sie  $\forall h \in H \forall j \in J : h \cdot j = j \cdot h$ .

Sei  $h \in H, j \in J$ .

Betrachte  $g = h \cdot j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1} \in G$ .

(1) Es gilt:  $H \triangleleft G \Rightarrow j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1} \in H \Rightarrow h \cdot (j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1}) \in H$ .

(2) Es gilt:  $J \triangleleft G \Rightarrow h \cdot j \cdot h^{-1} \in J \Rightarrow (h \cdot j \cdot h^{-1}) \cdot j^{-1} \in J$ .

$\Rightarrow g \in H \cap J \Rightarrow g = e$ . Also gilt nun:

$$h \cdot j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1} = e \Leftrightarrow h \cdot j = j \cdot h$$

 $\square$ 

b) Nun sei  $G$  eine endliche Gruppe mit  $\#G = \#H \cdot \#J$ . Zeigen Sie  $G \cong H \times J$ .

Da ... gilt, folgt ... q.e.d.

 $\square$

**Aufgabe 3** (Zyklische Gruppen)

Es seien  $p < q$  Primzahlen, so dass  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ , und  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $p \cdot q$ .

a) Geben Sie mindestens vier Beispiele für Paare  $(p, q)$  mit den obigen Eigenschaften an.

$$(3, 5), (5, 7), (7, 11), (11, 13)$$

b) Beweisen Sie, dass  $G$  einen Normalteiler der Ordnung  $p$  und einen Normalteiler der Ordnung  $q$  hat.

Nach dem ersten Sylow-Satz existieren sowohl  $p$ -Sylow-Untergruppen als auch  $q$ -Sylow-Untergruppen.

Da  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$  und  $q$  Primzahl  $\Rightarrow$  ex. genau eine  $p$ -Sylow-Untergruppe. Damit ist diese ein Normalteiler.

Da  $p < q$  ist nur die 1 Teiler von  $q$  mit Restklasse 1.  $\Rightarrow$  ex. genau eine  $q$ -Sylow-Untergruppe. Damit ist diese ein Normalteiler.  $\square$

c) Zeigen Sie, dass  $G$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  ist, und folgern Sie, dass  $G$  zyklisch ist.

Sei  $A$  die  $p$ -Sylow-Gruppe und  $B$  die  $q$ -Sylow-Gruppe aus b).

Da  $\#A$  und  $\#B$  Primzahl ist, sind  $A, B$  zyklisch.

Für ein  $g \in A \cap B, g \neq e$  gilt, dass  $\text{Ord}(g) = p \wedge \text{Ord}(g) = q$  und weil  $p < q \Rightarrow g = e$ .

Also ist  $A \cap B = \{e\}$ .

Dann gilt nach Aufgabe 2b), dass  $G \cong A \times B$  (Hier könnte man auch einfach einen Isomorphismus zwischen Potenzen der Erzeuger von  $A$  bzw.  $B$  und  $G$  aufstellen).

Da  $A, B$  zyklisch gilt:  $A \cong \mathbb{Z}_p$  und  $B \cong \mathbb{Z}_q$  und damit

$$G \cong A \times B \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

$\square$

**Aufgabe 4** (Endliche abelsche Gruppen)

Listen Sie alle Isomorphieklassen von endlichen abelschen Gruppen  $A$  der Ordnung 36 auf.

Die Ordnung von  $A$  ist  $\#A = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ .

Dann gilt einer der folgenden Isomorphismen (wie man durch Sylow-Untergruppen-Betrachtung herausfinden kann):

$$\begin{aligned} A &\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \\ A &\cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_9 \\ A &\cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \\ A &\cong \mathbb{Z}_4 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \end{aligned}$$