Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 24: *Stetige Abbildungen auf Punktmengen*

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Beweis:
Wir benutzten für den Beweis das Folgenkonvergenz kriterium für Abgeschlossene Menge.
D.h. wenn B eine abgeschlossene Menge ist muss für jede Folge $(x)_{k\in\mathbb{N}}$ aus B, $\left(\lim_{n\to\infty} x_k\right) \in B$ gelten.

Nun gilt, aber, für jeden Punkt $x_0 \in \overline{A}$, dass es eine Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{n\to n,\infty} x_k = x_0$.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{aligned}$$

Wir haben eine Folge von Bildern der Funktion. Wir wissen, dass in einer abgeschlossenen Menge jede konvergente Folge gegen einen Punkt innerhalb der Menge konvergiert. Da $f(x_0)$ eine konvergente Folge $f(x_k)$ besitzt, da die x_k konvergieren und f stetig ist, muss das Bild des Abschluss des Quellbereiches auch im Abschluss des Bild liegen.

$\square$

(ii) Ist das stetige Bild $f(M)$ einer beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wieder offen bzw. abgeschlossen? Geben Sie ein Beispiel an.
Lösung:
tbd

(iii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Erfülle $M \subset \mathbb{R}^n$ die Heine - Borell - Eigenschaft. Dann erfüllt $f(M)$ diese Eigenschaft auch.
Lösung:
tbd

Aufgabe 25: *Wachstum spezieller Funktionen*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\quad \text{für alle } x \neq 0 \\ f(cx) = cf(x) &\quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } c > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis:
tbd

Aufgabe 26: *Wegzusammenhang*

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in A$ eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to A$ gibt, mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Man nennt γ einen *stetigen Weg von x nach y.*

(i) Seien $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und A wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A)$ wegzusammenhängend ist.
Beweis:
tbd

(ii) Zeige Sie, dass genau dann $A \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, wenn A ein Intervall ist, d.h. wenn für alle $x, y \in A,\ x \leq y,\ [x, y] \subset A$.
Beweis:
tbd

(iii) Können Sie den bekannten Zwischenwertsatz aus der Analysis I auch auf Funktionen $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern.
Beweis: tbd

Aufgabe 27 *Stetigkeit der Umkehrfunktion*

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-x^2} \end{array}$$

einen Homöomorphismus von $(0,1)$ nach $\mathbb{R}^+$ definiert, d.h. f ist invertierbar zwischen den angegebenen Mengen und sowohl f als auch f^{-1} ist stetig.

Beweis.:
tbd

(ii) Sei die Funktion $f : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,1) \\ x - 1 & , x \in [2,3] \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig und invertierbar ist, aber die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,2] \to [0,1) \cup [2,3]$ nicht stetig ist.

Beweis:
tbd