Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

Übungsblatt 8

Abgabe: Bis Dienstag, den 03.01.2012, 10Uhr

Weihnachtszettel: Für jeden erreichten Punkt wird Ihnen ein Bonuspunkt gutgeschrieben.

Aufgabe 1 (Vorzeichen und Ordnung eines Zykels; 3+3+4 Punkte).
a) Es sei $c \in S_n$ ein Zykel der Länge k. Berechnen Sie das Vorzeichen $\mathrm{Sign}(c)$.
b) Welche Ordnung hat ein Zykel $c \in S_n$ der Länge k?
c) Es seien $\sigma \in S_n$ eine Permutation und $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ ihr Zykeltyp. Welche Ordnung hat σ?

Aufgabe 2 (Links- vs. Rechtswirkungen; 10 Punkte).
Es seien G eine Gruppe, M eine Menge,

$$\sigma\colon G \times M \longrightarrow M$$

eine Linkswirkung von G auf M und

$$\rho\colon M \times G \longrightarrow G$$

eine Rechtswirkung.
Es seien

$$\begin{array}{rcl} \sigma^\star\colon M \times G & \longrightarrow & M \\ (m,g) & \longmapsto & \sigma(g^{-1}, m) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \rho^\star\colon G \times M & \longrightarrow & M \\ (g,m) & \longmapsto & \rho(m, g^{-1}). \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $\sigma^\star$ bzw. $\rho^\star$ eine Rechts- bzw. Linkswirkung von G auf M ist. Vergleichen Sie die Bahnen und Standgruppen bzgl. σ mit denen bzgl. $\sigma^\star$.

Aufgabe 3 (Das Zentrum; 5+5 Punkte).
a) Es seien k ein Körper und $n \geq 1$. Bestimmen Sie das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(k)$.
b) Geben Sie für $n \geq 1$ das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n an.

Aufgabe 4 (Ein Färbungsproblem; 3+4+3 Punkte).
Eine Kette soll aus sechs Perlen gefertigt werden. Die Perlen stehen in den Farben 1, ..., n zur Verfügung.
a) Welche Symmetriegruppe benutzt man sinnvollerweise, um verschiedene Ketten zu identifizieren?
b) Bestimmen Sie die Anzahl der wesentlich verschiedenen Ketten, die man herstellen kann.
c) Geben Sie die Anzahl der wesentlich verschiedenen Ketten an, die aus drei weißen und drei schwarzen Perlen bestehen.

Zusatzaufgabe 1 (Innere und äußere Automorphismen; 5+5 Bonuspunkte).
a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G genau dann abelsch ist, wenn alle ihre inneren Automorphismen trivial sind.
b) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G und einen **äußeren** Automorphismus $\varphi\colon G \longrightarrow G$ an.

Zusatzaufgabe 2 (Wichteln; 10 Bonuspunkte).
An einer Weihnachtsfeier nehmen n Personen teil. Jede bringt ein Geschenk mit. Am Ende der Feier werden die Geschenke zufällig an die TeilnehmerInnen verteilt. Wieviele Personen erhalten im Durchschnitt ihr eigenes Geschenk?
(Es handelt sich um eine Frage zu den Fixpunktmengen einer geeigneten Gruppenwirkung.)