

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : not known

Aufgabe 1: Spezielle gleichmäßige Funktionen

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Hölder stetig* mit Exponent $\alpha \in (0, 1]$ wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in A$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$$

gilt. Ist $\alpha = 1$ so nennt man f *Lipschitzstetig*

- a) Sei $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = \sqrt{z}$. Zeigen Sie dass f Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

Lösung:

Sei $x, y \in [a, b]$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &\leq |\sqrt{x}| - |\sqrt{y}| \leq C \cdot \sqrt{|x - y|} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\leq C^2 \cdot |x - y| \\ \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y &\leq C^2 \cdot |x - y| \leq C^2 \cdot (|x| + |-y|) \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{x}\sqrt{y} &\leq (C^2 - 1)(x + y), \end{aligned}$$

Für $C > 1$, da \sqrt{x} und \sqrt{y} beide größer Null sind, ist die linke Seite der Gleichung kleiner Null. Da wir rechts $x + y$ rechnen und beide größer null sind, gilt $x + y > 0$. Wenn nun $C > 1$ belibt die rechte Seite positiv. Für ein $C > 1$ ist die Gleichung erfüllt und damit ist f Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$

- b) Sei $A = \mathbb{R}$ und $f = \arctan$ eingeschränkt auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass f Lipschitzstetig ist.

Lösung:

Es seien $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Da $f = \arctan$ stetig auf Einschränkung, folgt aus dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \exists \mu \in [x, y] : |f(x) - f(y)| &= f'(\mu) |x - y| \\ &= \frac{1}{\mu^2 + 1} |x - y| \leq 1 \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Also ist $f = \arctan$ eingeschränkt auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Lipschitzstetig mit Konstante $C = 1$.

c) Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Hölderstetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Hölderstetig

$\Rightarrow \exists \alpha \in (0, 1] \exists C > 0 \forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$

Es sei $\varepsilon > 0$ und $|x - y| < \delta$ für ein $\delta > 0 \forall x, y \in A$.

Z.z. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Also gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha < C \delta^\alpha = C \left(\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = \varepsilon$$

Aufgabe 2 : Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Finden Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch die folgenden Ausdrücke.

i) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t \, dt$.

Lösung:

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Ableitung die Umkehrung des Integrals. Die Grenzen werden nach Substitutionsmethode abgeleitet und als Faktor übernommen.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_0^{x^2} \sin t \, dt \right)' \\ &= (x^2)' \cdot \sin x^2 \\ &= 2x \cdot \sin x^2 + C \end{aligned}$$

ii) $F(x) = \exp\left(\int_0^x p(t) \, dt\right)$, wobei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Lösung:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\exp\left(\int_0^x p(t) \, dt\right) \right)' \\ &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \left(\int_0^x p(t) \, dt \right)' \cdot \exp\left(\int_0^x p(t) \, dt\right) \\ &= p(x) \cdot F(x) \end{aligned}$$

iii) Es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und f und g auf ganz \mathbb{R} differenzierbar. Setzen Sie dann

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) \, dt$$

und berechnen die Ableitung von F .

Lösung:

$$F'(x) = \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt \right)'$$

$$\stackrel{\text{Haupt.}}{=} g'(x)h(g(x)) - f'(x)h(f(x))$$

Die Ableitung existiert, da g und f differenzierbar sind. Da h stetig ist, kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet werden.

Aufgabe 3 : Mittelwertsatz der Integralrechnung

- i) Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktion mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit Eigenschaft

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)\mu.$$

Lösung:

Da $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ gilt die Abschätzung:

$$(b - a) \cdot m = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = (b - a) \cdot M$$

$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$ sodass

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)\mu$$

- ii) Es sei f stetig auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

für ein $\xi \in [a, b]$. Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Stetigkeit von f notwendig ist.

Lösung:

Es seien m, M wie aus Aufgabe 3 a). Aus Aufgabe 3 a) wissen wir, dass ein $\mu \in [m, M]$ existiert, mit

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)\mu$$

Da $\mu \in [m, M] = [f(\alpha), f(\beta)]$ für ein $\alpha, \beta \in [a, b]$ (eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenem Intervall sein Minimum und Maximum an) und f auf $[a, b]$ stetig, folgt aus dem Zwischenwertsatz: $f(\xi) = \mu$ für ein $\xi \in [a, b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$$

Dass f stetig ist, ist eine notwendige Bedingung. Sehen wir uns dazu das $\int_0^1 f(x) dx$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{an.}$$

Dass Integral $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Doch wie wir sehen, kann dieser Wert an keiner Stelle auf der gesamten Funktion, insbesondere des Intervalls angenommen werden.

- iii) Sei nun f stetig auf $[a, b]$, und g integrierbar und positiv (bzw. negativ) auf $[a, b]$. Zeigen Sie dass

$$\int_a^b g(x)f(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

für ein $\xi \in [a, b]$ gilt. Man nennt dies den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vorzeichenbedingung an g notwendig ist.

Lösung:

Sei $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, wie in Aufgabenteil i). Diese Gleichung setzen wir nun in unsere Bedingung ein. An dieser Stelle benutzen wir, dass $g \geq 0$ gelten soll. Sollte $g \leq 0$ gelten, würde sich die Relation umdrehen, da $x \geq y \wedge z < 0 \Rightarrow zx \leq zy$. Sollte der zweite Fall eintreten, müssten wir m und M vertauschen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b m \cdot g(x) dx &\leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \int_a^b M g(x) dx \\ \Leftrightarrow m \cdot \int_a^b g(x) dx &\leq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx \\ \stackrel{3i)}{\Rightarrow} \exists \mu \in [m, M] &: \mu \cdot \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx \\ \stackrel{3ii)}{\Rightarrow} \exists \xi \in [a, b] &: f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

Die Vorzeichenbedingung an g ist notwendig. Betrachten wir die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x \leq 0 \end{cases}.$$

Bla und kein Plan

Damit das ganze funktionieren kann, sollten wir zunächst zeigen, dass gilt: Seien f eine stetige Funktion und g integrierbar über $[a, b]$. Dann ist $f \cdot g$ eine integrierbar über $[a, b]$.

Aufgabe 4 : Positivitätseigenschaft des Integrals

- i) Sei f integrierbar auf $[a, b]$ und $f \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Lösung:

Sei $P = a = x_0 < \dots < x_n = b$ Partitionsfolge über n von $[a, b]$, sodass U_n und O_n Unter- und Obersummen konvergieren. Diese Partitionsfolge muss existieren, da die Funktion integrierbar ist (nach der bisher angenommenen definition von integrierbar). Dann gilt für alle $S_i = \sup\{f(y) \mid x_i < y < x_{i+1}\}$, $S_i \geq 0$, da jeder Funktionswert des Supremums größer gleich 0.

Nun ist $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} S_i \geq 0$, da jeder Summand, wie gezeigt größer oder gleich 0 ist.

- ii) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], f(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0.$$

Lösung

Sei $a < b \in \mathbb{R}$, $\psi = a + \frac{b-a}{2}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = \psi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Wir wählen als Partitionsfolge $\{a, \psi - \frac{b-a}{2^{i+2}}, \psi + \frac{b-a}{2^{i+2}}, b\}$, wobei $i \in \mathbb{N}$ der Index der Folge ist.

Für die Untersumme U_n gilt $U_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für die Obersumme O_n gilt $O_n = \psi + \frac{b-a}{2^{n+2}} - (\psi - \frac{b-a}{2^{n+2}}) = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Nun betrachten wir den Grenzwert der Obersumme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n+1}} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$$

Da der Grenzwert existiert und die Differenz von Unter- und Obersumme Null ist, ist das Integral von f definiert und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

- iii) Sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und f stetig mit $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch gilt

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Lösung:

tbd

- iv) Sei f stetig auf $[a, b]$. Es gelte

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

für alle stetigen Funktionen g auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$

Lösung:

Wie in 3 iii) gezeigt, existiert das Integral des Produktes der beiden Funktionen. Wahlweise kann hier gezeigt werden, dass das Produkt zweier stetigen Funktionen wieder stetig ist. Und damit muss das Integral auch existieren. Da die Aussage bezüglich f für alle stetigen Funktionen g gelten soll, muss die Aussage insbesondere für f selber gelten. Das Integral $\int_a^b f^2(x) dx$ muss also 0 sein. Da wir nun aber wissen, dass $\forall x \in [a, b] : f^2(x) \geq 0$ gilt, da das quadrieren nur in die positiven reellen Zahlen geht. Nehmen wir nun an, dass ein Wert x_0 existiert, mit $f(x_0) \neq 0$, dann gilt bezüglich unserer neuen Funktion $f^2(x_0) > 0$. Nach Aufgabe 4.iii) muss dann aber gelten, dass $\int_a^b f^2(x) dx > 0$ ist.

Demnach kann kein Wert x_0 existieren mit $f(x_0) \neq 0$.

Damit gilt $\forall x \in [a, b] : f(x) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.