Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 13: *Fehlerrechnung*

Berechnen Sie die folgenden Werte bis auf einen Fehler von 10^{-4}.

(i) $\sin(1)$:
Wir berechnen die Taylorformel an dieser Stelle, wie in der Vorlesung von f im Entwicklungspunkt 0. Daher können wir gleichmäßige Konvergenz schon vorraus setzten.
$f^{(4n)} = \sin$, $f^{(4n+1)} = \cos$, $f^{(4n+2)} = -\sin$, $f^{(4n+3)} = -\cos$. Diese setzen wir nun in die Taylorreihe ein:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\cos(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir nun, dass diese Reihe für $|x| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert, deshalb müssen wir nur noch das n berechnen, so dass der Fehler klein genug wird, daher schätzen wir den Fehler durch das Restglied ab.

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \tfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \tfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \left[\sum_{m=0}^{n} \tfrac{(1-t)^m}{m!} f^{(m)}(t) \right]_0^1 \\ &= \sin(1) - \sum_{n=0}^{m} \tfrac{1}{m!} f^{(m)}(t) \end{aligned}$$

Wie in der nächsten Aufgabe, haben wir nun den trivialen absoluten Fehler erreicht beim ausrechnen stoßen wir darauf, dass wir bei $n = 5$ noch knapp unter 10^{-4} liegen und erst bei $n = 7$ einen Wert erreichen, der mit $\approx 2.730 \cdot 10^{-6}$ endlich klein genug ist.

(ii) e:
Wir wählen den Entwicklungspunkt $a = 0$ und erhalten so die übliche Darstellung der e-Funktion. $e^{(n)}(x) = e^x$ und somit $e^0 = 1$.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Wie bereits bekannt ist, konvergiert diese Reihe gleichmäßig, wir müssen also nur den Fehler abschätzen $R_n(x) < 10^{-4}$.

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt \\
&= \left[\frac{(x-t)^n}{n!} e^t\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t\,dt \\
&= \left[e^t \cdot \sum_{m=0}^{n} \frac{(x-t)^m}{m!}\right]_a^x \\
&= e^x \sum_{m=0}^{n} \frac{(x-x)^m}{m!} + e^a \sum_{m=0}^{n} \frac{(x-a)^m}{m!} \\
&= e - \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebniss sollte uns nicht verwundern, da es sich quasi nur um die Definition des absoluten Fehlers handelt. Da wir nun aber soweit sind, dass wir es auf den Fehler gebracht haben, können wir berechnen, dass ab $n = 7$ der Wert näher als 10^{-4} am gesuchten Wert dran ist.

Aufgabe 14: *Taylorentwicklung von arctan*

(i) Begründen Sie zunächst, dass

$$\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

für $|t| < 1$, für welche t die Reihe gleichmäßig konvergiert.

Lösung:

Wir benutzen das (NAME FEHLT HIER) Kriterium, um zu zeigen, dass die Reihe auf $(-t, t)$ gleichmäßig konvergiert. Da hier die Grenzen leider nicht konvergieren, sondern die Reihe 2 Häufungspunkte für $t = 1$ besitzt untersuchen wir eine $\varepsilon > 0$ unter $t = 1$. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-\varepsilon)^{2n}$. Wir untersuchen die Reihe mit dem Leibnitz - Kriterium. $(1-\varepsilon)^{2n}$ ist ein streng monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert (Die geometrische Reihe mit $(a)_{n\in\mathbb{N}} = aq^n$ mit $0 \leq q < 1$ konvergiert gegen 0).
Wir wissen nun, dass die Reihe für alle $0 < t < 1$ gleichmäßig konvergiert. Für den negativen Fall setzten wir nun $-t$ ein. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-t)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t)^{2n}$ gilt, da das ganze Symmetrisch in t ist. Nun wissen wir, dass die Reihe auf $(-t, 0)$ und $(0, t)$ gleichmäßig konvergiert. Der letzte Fall ist $t = 0$. Aber für $t = 0$ ist die Reihe für alle n 0. Somit können wir das größte N von allen 3 Bereichen nehmen und sagen, dass die Reihe auf $(-t, t)$ gleichmäßig konvergiert.

□

(ii) Bestimmen Sie nun die Taylorreihe von arctan durch Integration. Zeigen Sie, dass die so gefundene Reihe für alle $|x| \leq 1$ konvergiert.

Lösung:

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung ist

$$\int \left(\frac{d}{dt} \arctan(t)\right) dt = \arctan.$$

Nun haben wir für die Ableitung die Reihendarstellung

$$\int \left(\frac{d}{dt} \arctan(t)\right) dt = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt$$

Wir wissen aus Aufgabenteil (i), dass die Reihe gleichmäßig konvergiert, also gilt:

$$\begin{aligned}\arctan(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n t^{2n}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}\end{aligned}$$

Da in diesem letzten Ausdruck kein Integral mehr auftaucht und wir eine gültige Reihendarstellung erreicht haben, befinden wir dies als fertige Auflösung des Tangenz.

Im Gegensatz zur Ableitung konvergiert diese Darstellung nun auch für $t = 1$ gleichmäßig. Die gleichmäßige Stetigkeit Argumentiert sich genau, wie bei (i), nur sehen wir diesmal, dass in $t = 1$ immer noch die Reihe über die Folge $(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ stehen bleibt, die Nullkonvergent ist und streng monoton fällt. Dammit konvergiert arctan auf $[-1, 1]$ stetig. (Für -1 müssen wir dieses mal $(-1)^{n+1}$ bilden).

□

(iii) Begründen Sie abschließend

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

Hierfür sollte man zunächst betrachten, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist. Da arctan die Umkehrabbildung ist, setzten wir die 1 in unsere Reihe ein und erhalten

$$\begin{aligned}\arctan(1) &= \tfrac{\pi}{4} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{2n+1} 1^2 n \\ &= \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + ...\end{aligned}$$

□

Aufgabe 15: *Schwarz-Ableitung*

Sei $f\ :\ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Angenommen die zweite Ableitung von f im Punkt a existiert. Zeigen Sie, dass dann

$$f''(a) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}$$

gilt.

Lösung:

Um den Satz zu beweisen stellen wir die zweite Ableitung über den Differentialquotient der Funktion auf. Dieser existiert nach Vorraussetzung.

$$f'(x) = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x + h_1) - f(x)}{h_1}$$

und

$$f''(x) = \lim_{h_2\to 0} \frac{f'(x + h_2) - f'(x)}{h_2}.$$

Nun setzten wir die erste in die zweite Formel ein

$$\begin{aligned}f''(x) &= \lim_{h_2\to 0} \tfrac{f'(x+h_2)-f'(x)}{h_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0}\lim_{h_1\to 0} \frac{\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_2)}{h_1} - \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}}{h_2} \\ &= \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \tfrac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_2)-f(x+h_1)+f(x)}{h_1\cdot h_2}\end{aligned}$$

Nun wenden wir unser Wissen über den Differentialquotient an, dass uns sagt, dass wenn die Folge konvergiert, dann muss es für jede Nullkonvergente Folge den selben Wert ergeben. Daher können wir für h_1, h_2 insbesondere die selbe Folge verwenden, eben die Folge, die wir in der Schwarzschen Ableitung verwenden werden.

$$f''(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+2h_n) - 2f(x+h_n) + f(x)}{h_n^2}$$

Nun sehen wir uns dagegen die schwarzsche Ableitung an.

$$f^S(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) + f(x-h_n) - 2f(x)}{h_n^2}$$

Die beiden Terme sehen an dieser Stelle schon fast identisch aus. Wir verwenden nun unser Wissen dass eine differenzierbare Funktion stetig ist um zu Schlussfolgern, dass die Wert über den Bruchstrich den selben Wert ergeben, da wir den Grenzwert in die Funktion ziehen können und damit den selben Wert erhalten. □

(ii) Es sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & fr\, x \geq 0 \\ -x^2 & fr\, x < 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h\to\infty} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2}$$

existiert, obwohl $f''(0)$ nicht existiert.

Lösung:

Einfache Umformung aufgrund der Grenzwertrechenregeln. Der zweite Schritt ist unabhängig davon, ob $h < 0$ ist oder nicht, da wir ohnehin beide Fälle aufsummieren werden.

$$\begin{aligned} f^S(x) &= \lim_{h\to\infty} \tfrac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to\infty} \tfrac{h^2-h^2-2\cdot 0^2}{h^2} \\ &= \lim_{h\to\infty} \tfrac{h^2}{h^2} - \tfrac{h^2}{h^2} \\ &= 1-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite schwarzsche Ableitung gibt uns also einen Grenzwert.

□

(iii) Angenommen f habe ein lokales Maximum in a und die zweite Schwarz'sche Ableitung von f in a exisitert. Zeigen Sie, dass diese dann kleiner oder gleich 0 sein muss.

Lösung:

Ein lokales Maximum haben wir, wenn alle Werte in der Umgebung um den Wert a auf der Funktion f kleiner sind als der Wert $f(a)$. Das bedeutet für uns $Exists\varepsilon' > 0 \forall \varepsilon' \geq \varepsilon > 0 \,:\, f(a+\varepsilon) \leq f(a) \wedge f(a-\varepsilon) \leq f(a)$. Diese Aussage ist gleichbeutend mit $f(a+\varepsilon) - f(a) \leq 0$ und $f(a-\varepsilon) - f(a) \leq 0$. Für uns bedeutet dass, dass wir unseren Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}$ bilden, dass heißt insbesondere, dass wir ab einem bestimmten Punkt in diese Umgebung um a laufen, so dass alle umgebenden Werte kleiner sein müssen.

$$\begin{aligned} f^S(a) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(f(a+h)-f(a))+(f(a-h)-f(a))}{h^2} \end{aligned}$$

Im Zähler steht nun eine Summe von 2 Zahlen, die nach Definition des lokalen Maximums kleiner gleich als 0 sein müssen, damit steht im Zähler eine Zahl, die kleiner gleich 0 ist. Im Nenner steht eine quadratische Zahl, damit ist der Nenner bei jeder Folge, die wir angeben positiv. Damit gilt $f^S(a) \leq 0$. $\square$