Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

**Aufgabe 24:** *Stetige Abbildungen auf Punktmengen*

(i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

**Beweis:**
Wir benutzten für den Beweis das Folgenkonvergenz kriterium für Abgeschlossene Menge.
D.h. wenn $B$ eine abgeschlossene Menge ist muss für jede Folge $(x)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $B$, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_k\right) \in B$ gelten.

Nun gilt, aber, für jeden Punkt $x_0 \in \overline{A}$, dass es eine Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to n,\infty} x_k = x_0$.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \end{aligned}$$

Wir haben eine Folge von Bildern der Funktion. Wir wissen, dass in einer abgeschlossenen Menge jede konvergente Folge gegen einen Punkt innerhalb der Menge konvergiert. Da $f(x_0)$ eine konvergente Folge $f(x_k)$ besitzt, da die $x_k$ konvergieren und $f$ stetig ist, muss das Bild des Abschluss des Quellbereiches auch im Abschluss des Bild liegen.

□

(ii) Ist das stetige Bild $f(M)$ einer beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wieder offen bzw. abgeschlossen? Geben Sie ein Beispiel an.

**Lösung:**
(1) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f \equiv c \in \mathbb{R}^m$.
Dann ist $f$ stetig und $f(M) = \{c\}$. Die Menge $\{c\}$ ist aber nicht offen, da für alle $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_\varepsilon(c)$ nicht Teilmenge von $\{c\}$ ist.
(2) Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $M = (-\infty, 0]$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto e^x$ (also hier: $n = 1, m = 1$).
Dann ist M abgeschlossen, da für alle konvergenten Folgen $(x_k)$, mit $x_k \in M$ gilt: $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha < \infty$ und $\alpha \geq 0$ und damit $\alpha \in M$.

Es gilt weiterhin: $f(M) = f((-\infty, 0]) = (0, 1]$ wobei $(0, 1]$ nicht abgeschlossen ist in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ stetiger Bilder von beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Mengen müssen nicht wieder offen bzw. abgeschlossen sein.

(iii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Erfülle $M \subset \mathbb{R}^n$ die Heine-Borell-Eigenschaft. Dann erfüllt $f(M)$ diese Eigenschaft auch.
**Lösung:**
Sei $\bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckungvon $f(M)$, mit $I$ Indexmenge.
Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt: $f^{-1}(V)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$, für alle offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^m$.

Also folgt aus der Stetigkeit von $f$: $V_i := f^{-1}(U_i)$ ist offen, $i \in I$.

Da $M \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$ und $M$ die Heine-Borell-Eigenschaft erfüllt, existieren $i_1, i_2, ..., i_k \in I, k \in \mathbb{N}$ mit $M \subseteq \bigcup_{j=1}^k V_{i_j}$. Daraus folgt $f(M) \subseteq f(\bigcup_{j=1}^k V_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^k f(V_{i_j})$. Durch Einsetzen erhalten wir dann $f(M) \subseteq \bigcup_{j=1}^k f(f^{-1}(U_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$.

Also existiert eine endliche offene Überdeckung von $f(M)$
$\Rightarrow f(M)$ erfüllt die Heine-Borell-Eigenschaft. $\square$

**Aufgabe 25:** *Wachstum spezieller Funktionen*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \quad \text{für alle } x \neq 0 \\ f(cx) &= cf(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } c > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Beweis:**
Für $x = 0$ gilt $f(x) = 0$, denn
$f(0) = f(c \cdot 0) = c \cdot f(0)$, für alle $c > 0$.
Und damit $f(0) = c \cdot f(0) \Leftrightarrow (1-c)f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, $c > 0$.

Da auch $|x| = 0$ ist, gilt die Ungleichung in diesem Fall für alle $a, b > 0$.

Für $x \neq 0$ gilt:
$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \overset{|x|\neq 0}{\Leftrightarrow} a \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq b$
Durch die Eigenschaften von $f$ können wir nun Umformen:
$\frac{f(x)}{|x|} = \frac{1}{|x|} f(x) \overset{\frac{1}{|x|}>0}{=} f(\frac{x}{|x|})$, wobei der Ausdruck $\frac{x}{|x|}$ einen normierten Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ beschreibt, es gilt also $|\frac{x}{|x|}| = 1$.

Sei nun $M := \{x \in \mathbb{R}^n | |x| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge der normierten Vektoren.
Dann gilt: $M$ ist kompakt.
Beweis: $M \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ ($M$ kompakt $\Leftrightarrow$ $M$ beschränkt und abgeschlossen).
TBA: $M$ beschränkt und abgeschlossen.

Da $M$ kompakt und $f$ stetig, gilt: $f(M)$ nimmt in $M$ sein Maximum und Minimum an, es existieren also $p, q \in M$ mit $f(p) = \sup f(M)$ und $f(q) = \inf f(M)$.
Setze nun $a := f(q) > 0, b := f(q) > 0$, also folgt
$a = f(q) = \inf f(M) \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq \sup f(M) = f(q) = b$ und daraus die Behauptung.

**Aufgabe 26:** *Wegzusammenhang*

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in A$ eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to A$ gibt, mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Man nennt $\gamma$ einen *stetigen Weg von $x$ nach $y$.*

(i) Seien $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und $A$ wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A)$ wegzusammenhängend ist.
**Beweis:**
tbd

(ii) Zeige Sie, dass genau dann $A \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, wenn $A$ ein Intervall ist, d.h. wenn für alle $x, y \in A$, $x \leq y$, $[x, y] \subset A$.
**Beweis:**
tbd

(iii) Können Sie den bekannten Zwischenwertsatz aus der Analysis I auch auf Funktionen $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern.
**Beweis:** tbd

**Aufgabe 27** *Stetigkeit der Umkehrfunktion*

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-x^2} \end{array}$$

einen Homöomorphismus von $(0,1)$ nach $\mathbb{R}^+$ definiert, d.h. $f$ ist invertierbar zwischen den angegebenen Mengen und sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ ist stetig.

**Beweis.:**
Sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}^+$, mit $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$.
Z.z.: (1) $g$ bijektiv, (2) $g$ stetig, (3) $g^{-1}$ stetig.

(1) $g$ bijektiv
(1a) $g$ injektiv, also $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$, für alle $a, b \in (0,1)$.
Seien $a, b \in (0,1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(a) &= g(b) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} &= \frac{b}{1-b^2} \\ \Leftrightarrow a - ab^2 &= b - ba^2 \\ \Leftrightarrow a &= b \end{aligned}$$

(1b) $g$ surjektiv, also $\forall c \in \mathbb{R}^+ \exists x \in (0,1) : g(x) = c$.
Sei $c \in \mathbb{R}^+$. Wähle $x := \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$.
Dann: $0 < x < 1$ und $g(x) = c$. ausführlicher!
$\Rightarrow g$ bijektiv.

(2) $g$ stetig
irgendwie klar ...

(3) $g^{-1}$ stetig
blablabla

(ii) Sei die Funktion $f : [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,1) \\ x-1 & , x \in [2,3] \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass $f$ stetig und invertierbar ist, aber die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,2] \to [0,1) \cup [2,3]$ nicht stetig ist.

**Beweis:**
tbd