Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

## Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ soll nach der Methode von Lagrange interpoliert werden.

(i) Als quadratisches Polynom:

Suche Knotenbasis $\mathfrak{P}$ des $P_2$ mit $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$.
Es gilt:

$$\mathfrak{p}_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Stützstellen sind $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, also gilt für die Basis $\mathfrak{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_0(x) = L_0(x) &= \prod_{i=1}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \\
&= \frac{x - 0}{(-1) - 0} \cdot \frac{x - 1}{(-1) - 1} = -x \cdot \frac{x-1}{-2} = \frac{1}{2}(x^2 - x) \\
\mathfrak{p}_1(x) = L_1(x) &= \prod_{i=0, i\neq 1}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} = (x+1) \cdot -(x-1) = -x^2 + 1 \\
\mathfrak{p}_2(x) = L_2(x) &= \prod_{i=0}^{1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{x+1}{2} \cdot x = \frac{1}{2}(x^2 + x)
\end{aligned}$$

Suche nun das Polynom $p \in P_2$:
Das Polynom $p$ wird durch $p = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\mathfrak{p}_k(x)$ bestimmt, also gilt:

$$p = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\mathfrak{p}_k(x) = f(-1) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - x) + f(0) \cdot (-x^2 + 1) + f(1) \cdot \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - x) + (-x^2 + 1) + \frac{1}{4}(x^2 + x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

(ii) Als kubisches Polynom mit zusätzlicher Stelle $x_3 = \frac{1}{2}$.

Suche Knotenbasis $\mathfrak{Q}$ des $P_3$ mit $\mathfrak{Q} = \{\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3\}$.

$\mathfrak{P}$ wie oben, zusätzliche Stützstelle $x_3 = 1/2$, also gilt für die Basis $\mathfrak{Q}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_0(x) &= \mathfrak{p}_0 \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x) \cdot \frac{x - 1/2}{-3/2} = \frac{1}{6}(-2x^3 + 3x^2 - x) \\
\mathfrak{q}_1(x) &= \mathfrak{p}_1 \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \\
&= (-x^2 + 1) \cdot \frac{x - 1/2}{-1/2} = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\
\mathfrak{q}_2(x) &= \mathfrak{p}_2 \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + x) \cdot \frac{x - 1/2}{1/2} = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
\mathfrak{q}_3(x) &= \prod_{i=0}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \\
&= \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x - (-1)}{1/2 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{1/2 - 0} \cdot \frac{x - 1}{1/2 - 1} = \frac{8}{3}(x - x^3)
\end{aligned}$$

Suche nun das Polynom $p' \in P_3$:
Das Polynom $p'$ wird durch $p' = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\mathfrak{q}_k(x)$ bestimmt, also gilt:

$$p' = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\mathfrak{q}_k(x) = f(-1)\cdot\frac{1}{6}(-2x^3+3x^2-x)+f(0)\cdot(2x^3-x^2-2x+1)+f(1)\cdot(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)+f(1/2)\cdot\frac{8}{3}(x-x$$

$$= \frac{1}{12}(-2x^3+3x^2-x)+(2x^3-x^2-2x+1)+\frac{1}{2}(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{3}(x-x^3) = \frac{1}{5}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x+1$$

## Ausgabe 2

**a)** asd

**b)** asd

```
function [p] = monomialcoefficients(xi, f)
%% grad bezeichnet den grad der inpolation, entspricht der
   laenge der eingabeliste - 1
%% L enthaelt die lagrangepolynome
grad = size(xi,2) %% nur die laengendimension interessiert
   uns
L = []
for k = 1:grad,
  temp = [1];
  range = 1:grad;
  indices = ones(1,grad);
  indices(k) = 0;
  for i = range(logical(indices)),
    temp = conv(temp, [1/(xi(k)-xi(i)), -xi(i)/(xi(k)-xi(i)
       )]);
  end
  L(k,:) = temp;
end
  fks = eye(grad);
  for i = 1:grad,
    fks(i,i) = f(xi(i));
  end
  L = fks * L
  p = L'␣*␣ones(grad,1);
␣␣p␣=␣p'
```

```
function [y] = monomialinterpolation(x, p)
grad = size(p,2);
temp = 0;
for i = 1:grad,
temp = temp + p(i)*x^(grad-i)
end
y = temp
```

**c)** asd

**d)** asd