Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

a) Verifizieren Sie, dass die Entwicklung der Wassertemperatur $\Theta(t)$ durch folgendes AWP modelliert wird

$$\Theta'(t) = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t)), \quad \Theta(0) = \Theta_0$$

Sei $\Delta t > 0$, dann ist $\Theta(t + \Delta t) = \Theta(t) + \Delta\Theta$, wobei $\Delta\Theta$ die Temperaturänderung von t bis $t + \Delta t$ bezeichnet.

Die Menge des zugelaufenen und abgelaufenen Wassers nach Δt vergangener Zeit beträgt jeweils $\Delta t f$. Dann ist $\frac{1}{V_0}(\Delta t f \Theta_1 - \Delta t f \Theta(t))$ der gewichtete Durchschnitt (Temperaturdifferenz verteilt auf das Volumen) der Temperaturunterschiede und damit die Temperaturdifferenz $\Delta\Theta$. Also ist $\Theta(t+\Delta t) = \Theta(t)+\frac{1}{V_0}(\Delta t f \Theta_1 - \Delta t f \Theta(t)) = \Delta t \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t))$.

Durch Umstellen erhalten wir $\frac{\Theta(t+\Delta t)-\Theta(t)}{\Delta t} = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t))$ und damit für den Grenzübergang $t \to \infty$:

$\Theta'(t) = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t))$. Dass beim Zeitpunkt $t = 0$ das Wasser seine Ausgangstemperatur besitzt, also $\Theta(0) = \Theta_0$ gilt, ist offensichtlich.

b) Lösung des Anfangswertproblems:

$$\Theta'(t) = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta(t)) = -\frac{f}{V_0}\Theta(t) + \frac{f}{V_0}\Theta_1$$

Da $-\frac{f}{V_0} =: \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \frac{f}{V_0}\Theta_1 =: \nu \in \mathbb{R}$ konstante Funktion, können wir Satz 3.2 anwenden und die Lösung der DGL von oben ist

$$\begin{aligned}
\Theta(t) &= \alpha e^{\lambda t} + \int_0^t f(x) \cdot e^{\lambda(t-x)}\, dx \\
&= \alpha e^{\lambda t} + \nu \int_0^t e^{\lambda(t-x)}\, dx \\
&= \alpha e^{\lambda t} + \nu \int_0^t e^{\lambda t} e^{\nu x}\, dx \\
&= \alpha e^{\lambda t} + \nu e^{\lambda t} \int_0^t e^{\nu x}\, dx \\
&= \alpha e^{\lambda t} + \nu e^{\lambda t} \frac{V_0}{f}(e^{\nu t} - 1) \\
&= \alpha e^{\lambda t} + \Theta_1 e^{\lambda t}(e^{\nu t} - 1) \\
&= \alpha e^{-\frac{f}{V_0}t} + \Theta_1 e^{\frac{-f}{V_0}t}(e^{\frac{f}{V_0}t} - 1)
\end{aligned}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Einsetzen von des Anfangswertes $\Theta_0 = \Theta(0) = \alpha e^{\lambda 0} + \Theta_1 e^{\frac{-f}{V_0}0}(e^{\frac{f}{V_0}0} - 1) = \alpha$ liefert $\alpha = \Theta_0$ und damit

$$\Theta(t) = \Theta_0 e^{-\frac{f}{V_0}t} + \Theta_1 e^{\frac{-f}{V_0}t}(e^{\frac{f}{V_0}t} - 1)$$

als Lösung des Anfangswertproblem.

c) Die DGL besitzt die stationäre Lösung $\Theta_{stat}(t) = \Theta_1$.

Für eine stationäre Lösung einer DGL der Form $x'(t) = \lambda x(t) + f(t)$ gilt $x'(t) = 0$. Also setzen wir ein:

$$\begin{aligned}
\Theta'(t) = \frac{f}{V_0}(\Theta_1 - \Theta_{stat}(t)) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{f}{V_0}\Theta_1 - \frac{f}{V_0}\Theta_{stat}(t) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{f}{V_0}\Theta_1 &= \frac{f}{V_0}\Theta_{stat}(t) \\
\Leftrightarrow \Theta_1 &= \Theta_{stat}(t)
\end{aligned}$$

Also ist die stationäre Lösung $\Theta_{stat}(t) = \Theta_1$.

d) Es gilt für jedes Θ_0: $\lim_{t\to\infty} \Theta(t) = \Theta_1$.
Es sei $\Theta_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \Theta(t) &= \lim_{t\to\infty} \Theta_0 e^{-\frac{f}{V_0}t} + \Theta_1 e^{\frac{-f}{V_0}t}(e^{\frac{f}{V_0}t} - 1) \\
&= \Theta_0 \lim_{t\to\infty}(e^{-\frac{f}{V_0}t}) + \Theta_1 \lim_{t\to\infty}\left(e^{-\frac{f}{V_0}t}e^{\frac{f}{V_0}t} - e^{-\frac{f}{V_0}t}\right) \\
&= \Theta_0 \lim_{t\to\infty}(e^{-\frac{f}{V_0}t}) + \Theta_1 \lim_{t\to\infty}\left(e^{0} - e^{-\frac{f}{V_0}t}\right) \\
&= \Theta_0 \lim_{t\to\infty}(e^{-\frac{f}{V_0}t}) + \Theta_1 \lim_{t\to\infty} e^0 - \Theta_1 \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{f}{V_0}t} \\
&= \Theta_0 \cdot 0 + \Theta_1 \cdot 1 - \Theta_1 \cdot 0 \\
&= \Theta_1
\end{aligned}$$

e) Wann besitzt das Wasser $38°C$, bei $V_0 = 150l, \Theta_0 = 30°C, f = 0.1ls^{-1}, \Theta_1 = 60°C$?

Wir lösen die Gleichung

$$30e^{-\frac{0.1}{150}t} + 60e^{-\frac{0.1}{150}t}(e^{\frac{0.1}{150}t} - 1) = 38$$

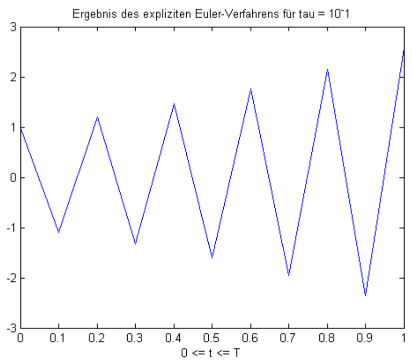
nach t unter der Nutzung von wolfram alpha (www.wolframalpha.com) mittels solve-Befehl.

Aus der Gleichung ergibt sich $t \approx 465,2324$. Wir müssen also ca. 465 Sekunden warten, bis das Wasser eine Temperatur von $38°C$ besitzt.

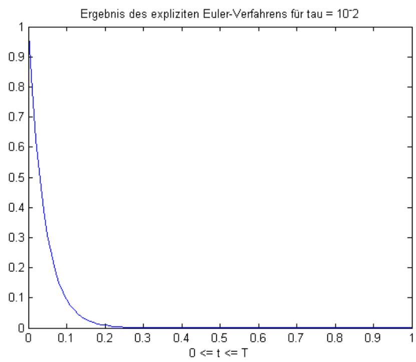
Aufgabe 2

Die folgenden zwei Programme setzen das explizite bzw. das implizite Euler-Verfahren um. Dabei wurden die Berechnungsvorschriften dem Skript entnommen.

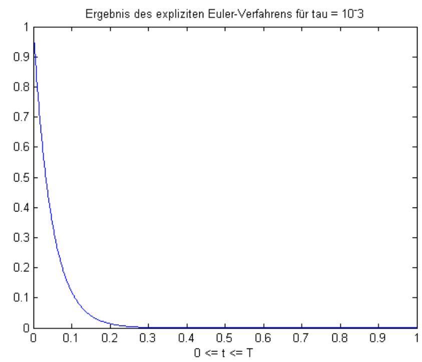
```
function [ xk ] = expliciteuler(T, tau, lambda, f, x0 )
%EXPLICITEULER berechnet das Eulersche Polygonzugverfahren
%fuer das AWP x' = lambda*x+f, x(0) = x0 mit einem
%aequidistanten Gitter 0 = t0 < t1 < ... < tn = T

xk(1) = x0;
range = 0:tau:T; %% Gitter mit Abstand tau

%% Berechnungsvorschrift aus dem Skript in einer Schleife
for k = 1:size(range,2)-1,
    xk(k+1) = xk(k) + tau*(lambda*xk(k)+f((k-1)*tau));
end
end
```



(a) Plot des expliziten Euler-Verfahrens mit $\tau = 0.1$



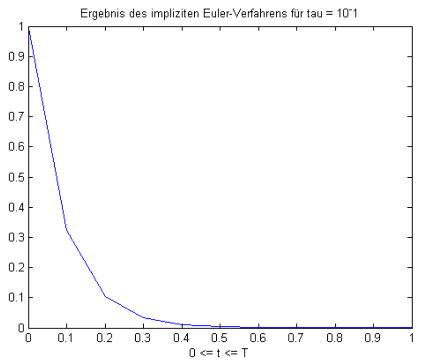
(b) Plot des expliziten Euler-Verfahrens mit $\tau = 0.01$



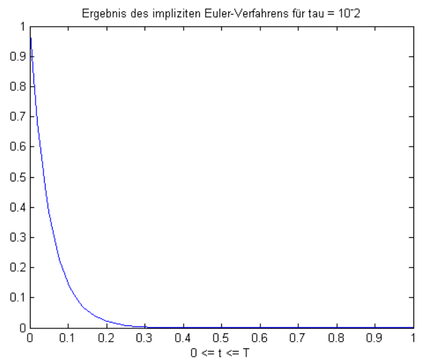
(c) Plot des expliziten Euler-Verfahrens mit $\tau = 0.001$

Im folgenden Programm wurde die Berechnung von x_{k+1} durch Umstellen der Gleichung aus dem Skript erreicht.

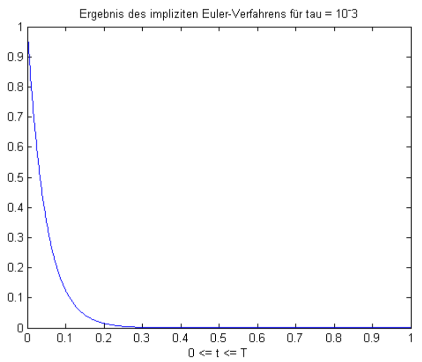
```
function [ xk ] = impliciteuler(T, tau, lambda, f, x0 )
%impliciteuler berechnet das implizite Euler-Verfahren
%fuer das AWP x' = lambda*x+f, x(0) = x0 mit einem
%aequidistanten Gitter 0 = t0 < t1 < ... < tn = T

xk(1) = x0;
range = 0:tau:T; %% Gitter mit Abstand tau

%% Berechnungsvorschrift aus dem Skript in einer Schleife
for k = 1:size(range,2)-1,
    %% S bezeichnet die nach x_k (also xk(k)) umgestellte
    %% Gleichung der Berechnungsvorschrift
    S = (f(k*tau)*tau+xk(k))/(1-tau*lambda);
    xk(k+1) = S;
end
end
```



(d) Plot des impliziten Euler-Verfahrens mit $\tau = 0.1$



(e) Plot des impliziten Euler-Verfahrens mit $\tau = 0.01$



(f) Plot des impliziten Euler-Verfahrens mit $\tau = 0.001$

Wir zu sehen ist, liefert das implizite Euler-Verfahren schon bei einer gröberen Schrittweite von $\tau = 0.1$ brauchbare Ergebnisse, wobei beim expliziten Euler-Verfahren bereits eine zehnfach genauere Schrittweite genutzt werden muss um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Für feinere Gitter ($\tau \leq 0.01$) liefern beide Verfahren letztendlich gute Ergebnisse.