Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 2

```
function [ x, t ] = theta_lin(theta, lambda,f, x0, T, tau )
%theta_lin approximiert das AWP
%AWP x' = lambda*x+f, x(0) = x0 mit einem
%aequidistanten Gitter 0 = t0 < t1 < ... < tn = T
%mit Hilfe des Theta-Verfahrens fuer Eingabe theta.

x(1) = x0;
t = 0:tau:T; %% Gitter mit Abstand tau

% Formel umgestellt nach x_k+1
for k = 1:size(t,2)-1,
    x(k+1) = ((x(k)*lambda*tau)*(1 - theta) + x(k) + (f((k-1)*tau)*tau)*(1-theta)+ theta*tau*f(k*tau))/(1-tau*lambda*theta)
end
end
```

a) Sei nun $f(t) = 4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t), \lambda = -1, x_0 = 1$ und $T = 2$ und die Schrittweite $\tau = T/100 = 0.02$.

(1) Exakte Lösung des AWP:

$$x(t) \;=\; e^{-t} + \int_0^t f(x)e^{-t+x}\,dx = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t f(x)e^{x}\,dx$$

Das Integral lösen wir nun durch partielle Integration, dazu bilden wir die ersten beiden Ableitungen von f, die wir in der partiellen Integration benutzen werden. Dann gilt für die erste Ableitung f':

$$\begin{aligned} f'(t) &= (4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t))' \\ &= (4\pi\cos(4\pi t))' - (\lambda\sin(4\pi t))' \\ &= (-16\pi^2\sin(4\pi t)) - (4\pi\lambda\cos(4\pi t)) \\ &= -16\pi^2\sin(4\pi t) - 4\pi\lambda\cos(4\pi t) \end{aligned}$$

Und damit für die zweite Ableitung f'':

$$\begin{aligned} f''(t) &= (-16\pi^2\sin(4\pi t) - 4\pi\lambda\cos(4\pi t))' \\ &= (-16\pi^2\sin(4\pi t))' - (4\pi\lambda\cos(4\pi t))' \\ &= (-16\cdot 4\pi^3\cos(4\pi t)) - (-16\pi^2\lambda\sin(4\pi t)) \\ &= -16\cdot 4\pi^3\cos(4\pi t) + 16\pi^2\lambda\sin(4\pi t) \\ &= -16\pi^2\left(4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t)\right) \\ &= -16\pi^2 f(t) \end{aligned}$$

Nun können wir partiell integrieren:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f(x)e^x \, dx &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - \int_0^t e^x f'(x) \, dx \\
&= [e^x \cdot f(x)]_0^t - \left([e^x \cdot f'(x)]_0^t - \int_0^t e^x f''(x) \, dx \right) \\
&= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t + \int_0^t e^x f''(x) \, dx \\
&= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t + \int_0^t e^x - 16\pi^2 f(x) \, dx \\
&= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t - 16\pi^2 \int_0^t e^x f(x) \, dx \\
\Rightarrow 17\pi^2 \int_0^t f(x)e^x \, dx &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t \\
&= (e^t \cdot f(t) - e^0 \cdot f(0)) - (e^t \cdot f'(t) - e^0 \cdot f'(0)) \\
&= e^t \cdot (4\pi \cos(4\pi t) - \lambda \sin(4\pi t)) - 4\pi \\
&- e^t \cdot (-16\pi^2 \sin(4\pi t) - 4\pi\lambda \cos(4\pi t)) - 4\pi\lambda \\
&= e^t 4\pi \cos(4\pi t) - e^t \lambda \sin(4\pi t) - 4\pi \\
&+ e^t 16\pi^2 \sin(4\pi t) + e^t 4\pi\lambda \cos(4\pi t) - 4\pi\lambda \\
&\overset{\lambda=-1}{=} e^t 4\pi \cos(4\pi t) + e^t \sin(4\pi t) - 4\pi \\
&+ e^t 16\pi^2 \sin(4\pi t) - e^t 4\pi \cos(4\pi t) + 4\pi \\
&= e^t \sin(4\pi t) + e^t 16\pi^2 \sin(4\pi t)
\end{aligned}
$$

Irgendwo ist hier ein Rechenfehler, denn es soll herauskommen: $\int_0^t f(x)e^x \, dx = e^t \sin(4\pi t)$ und damit als Lösung

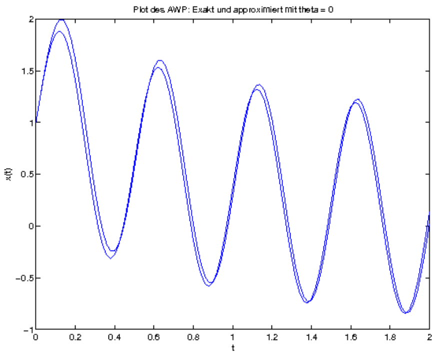
$$x(t) = e^{-t} + \sin(4\pi t)$$

(2) Approximative Lösung des AWP mit $\Theta = 0, 0.5, 1$.
Die Lösung aus (1) wird nun als Vergleich mit den approximativen Lösungen geplottet.

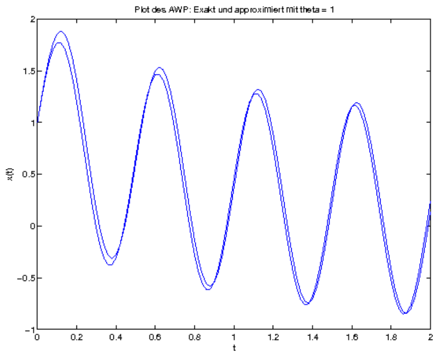
Wie zu sehen ist, ist der Graph bei der $\theta = 0$-Approximation stets etwas zu groß (über der exakten Lösung), bei der $\theta = 1$-Approximation stets etwas zu klein (unter dem Graphen der exakten Lösung). Die $\theta = 0.5$-Approximation gleicht genau diese Schwäche aus, in dem der Mittelwert der beiden Approximationen benutzt wird. Der Graph liegt fast genau auf dem der exakten Lösung.

b) Um die Konvergenzordnung zu sehen, wählen wir eine doppelt logarithmische Skala, plotten der Fehler und können dann die Steigung der Geraden (der Plot ergibt eine Gerade) als Konvergenzordnung ansehen:

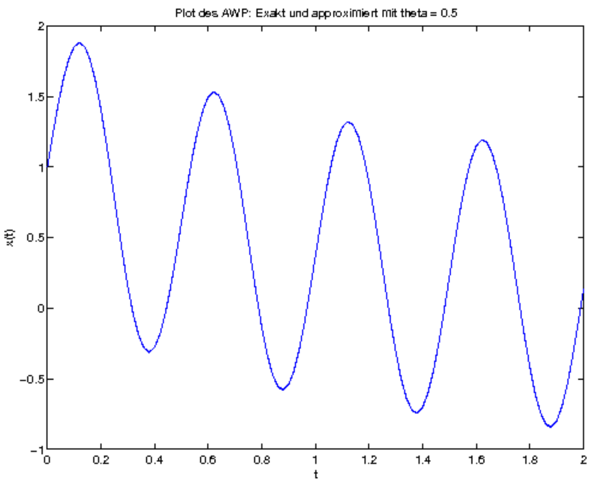
Die Auswertung der Plots ergibt für $\theta = 0$ und für $\theta = 1$ eine Konvergenzordnung von 1, für $\theta = 0.5$ eine Konvergenzordnung von ca. 2.



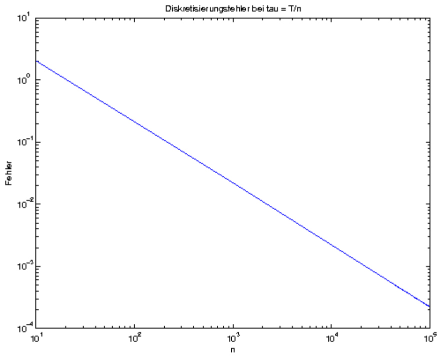
(a) Lösung des AWP gegen Approximation mit $\theta = 0$



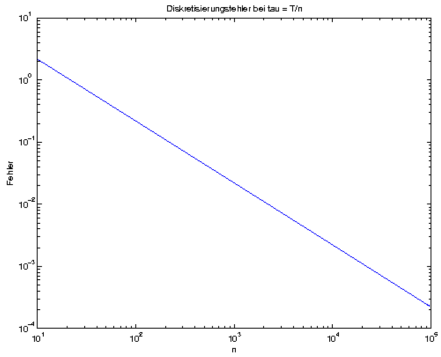
(b) Lösung des AWP gegen Approximation mit $\theta = 1$



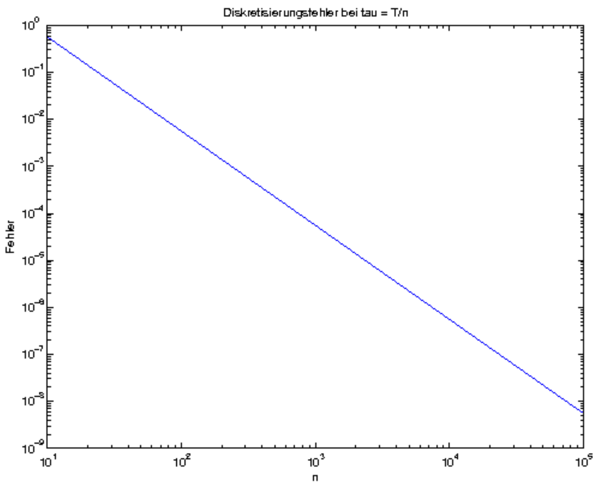
(c) Lösung des AWP gegen Approximation mit $\theta = 0.5$



(d) Diskretisierungsfehler über τ mit $\theta = 0$



(e) Diskretisierungsfehler über τ mit $\theta = 1$



(f) Diskretisierungsfehler über τ mit $\theta = 0.5$