Lineare Algebra Übung 8

Max Wisniewski

Tutor : Elena

Aufgabe 1

Geben Sie $S \in Gl(n, \mathbb{R})$ an, sodass $S^{-1}AS$ für folgende Matrix A Jordansche Normalform hat:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & 4 \\ 1 & -3-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t+1)^2(t-1)$$

Wir hab also die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, mit $r_1 = \mu(\lambda_1) = 2$
und $\lambda_2 = 1$, mit $r_2 = \mu(\lambda_2) = 1$

Haupträume bestimmen

$H(A, \lambda_1)$:

$\ker((A + E_3))$

$$\ker \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{2\cdot II+I \\ III-2\cdot I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen aus der letzten Spalte, dass wir c frei wählen können:

II : $-4b = 2c \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}c$

III : $-2a - 2c + 4c = 0 \Leftrightarrow -2a = -2c \Leftrightarrow a = c$

$\Rightarrow \ker((A + E_3)) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\dim(\ker(A + E_3)) = 1 < r_1$, d.h. wir müssen weiter rechnen.

$$\ker\left((A + E_3)^2\right) = \ker \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ -12 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (Rechnung analog zu der obrigen)}$$

da $\dim\left(\ker\left((A + E_3)^2\right)\right) = r_1$, ist der Hauptraum $\ker((A + E_3))$

$H(A, \lambda_2)$:

$$\ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Basen berechen

Für λ_2 sind wir trivialerweise fertig.
Für λ_1:

$U_2 = \ker\left((A + E_3)^2\right)$, $U_1 = \ker\left((A + E_3)^1\right)$, $U_0 = 0$

Bestimmen einer Basis von U_1, so dass $U_2 = U_1 \oplus w_2$, mit $w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

Nun ist eine günstige Basis von U_1, der Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (den wir schon berechnet haben). w_2, u_1 sind offensichtich linear unabhängig (1./3. Komponente gleich, bei -1 aber 2. bei -$\frac{1}{2}$). Beide bilden eine Basis von U_2, da

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die alte Basis (wir haben bisher nur erzeugendes Sytem gezeigt gehabt) darstellbar ist. Weiter gilt zu zeigen, dass $f(w_2) \in U_1$ liegt: $f(w_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun suchen wir noch eine Basis von U_0, so dass $U_1 = U_0 \oplus w_1$

Wir haben ebend schon die Basis von U_1 mit $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschrieben und übernehmen

diesen Vektor nun einfach. $U_1 = 0 \oplus w_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dies haben wir bereits gezeigt.

Transformationsmatrix

Setzen wir nun die Basen ein:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Jordanche Normalfrom von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1-t & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1-t & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2-t \end{pmatrix} = ... = t^4 - 2t^2 + 1 = (t-1)^2 (t+1)^2$$

Die Eigenwert sind also
$\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit $r_1 = \mu(\lambda_1) = 2$
$\lambda_2 = -1$ mit Vielfachheit $r_2 = 2$.

Haupträume

$H(A, \lambda_1)$

$$\ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim(\ker(A - E_3)) = 1 < r_1, \text{ fortfahren}$$

$$\ker\left((A-E_3)^2\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim\ker\left((A-E_3)^2\right) = 2 = r_1$$

fertig.
Wir haben einen Jordanblock zu λ_1 der Größe 2×2
$H(A, \lambda_2)$

$$\ker(A+E_3) = \ker\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim\ker(A+E_3) = 1 \neq r_2, \text{ fortfahren}$$

$$\ker\left((A+E_3)^2\right) = \ker\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim\ker\left((A+E_3)^2\right) = 2 = r_2$$

Wir haben ein Jordanblock zu λ_2 der Größe 2×2

Jordansche Normalform

Wir tragen die Jordanblöcke, die wir ermittelt haben, auf der Diagonalen ein. Die Jordanblöcke selber enthalten die EW auf der Diagonalen und 1en direkt darüber

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0- & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, $V \subseteq \mathbb{R}[t]$ der UVR der rellen Polynome vom Grad $\leq n$.
Sei $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(p) = p'$. Bestimmen Sie eine Basis von V bzgl. der φ Jordansche Normalform hat.

Sei $\mathcal{A} = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$.
Da $|\mathcal{A}| = \dim V$ und $\mathcal{A}$ linear unabhängig, ist $\mathcal{A}$ eine Basis von V.
Dann ergibt sich $L_{\varphi,\mathcal{A}^*,\mathcal{A}^*}$ durch spaltenweises Eintragen der Bilder von $\mathcal{A}^*$ bzgl. φ:
$\varphi(1) = 0$, $\varphi(t) = 1$, $\varphi(t^2) = 2t$, ..., $\varphi(t^n) = nt^{n-1}$
Also ist

$$B = L_{\varphi,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom

$$p_B(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = (-\lambda)^{n+1}$$

Damit ist der Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit $r_1 = \mu(\lambda_1) = n+1$.

(2) Berechnung des Hauptraumes $H(A, \lambda_1)$:

$$\ker(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim(\ker(B)) = 1 < r_1, \text{ fortfahren}$$

$$\ker\left(B^2\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim\left(\ker\left(B^2\right)\right) = 2 < r_1, \text{ forfahren}$$

In der VL haben wir uns nun schon einmal mit diesem Problem beschäftigt. Wir haben eine Matri, die nur auf der Diagonalen, üerhalb der Hauptdiagonalen Einträge besitzt. Wie in der VL gezeigt, können wir eine solche Matrix $C \in M(k, k, \mathbb{R})$ in $k+1$ Schritten zur Nulmatrix potenzieren: $C^{k+1} = 0$. Dies können wir nun auf unser Problem anwenden

$$\ker(B^n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker\left(B^{n+1}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = V$$

Bestimmung der Basis

Sei $U_0 := 0$, $U_1 := \ker(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$U_2 := \ker\left(B^2\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

...

$$U_n := \ker(B^n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$U_{n+1} := \ker\left(B^{n+1}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = V$$

Wir suchen nun W_{n+1} mit $U_{n+1} = U_n \oplus W_{n+1}$

Wähle $W_{n+1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \right\rangle$, da $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \right\rangle = V$ die Vorraussetzung erfüllt.

Fahre fort mit W_n mit $U_n = U_{n-1} \oplus W_n$ und $\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \in W_n$

$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 \end{pmatrix}$. Wähles $W_n = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, dann ist $U_{n-1} \oplus W_n = U_n$.

Das gleiche nun wiederholen bis:

W_1 mit $U_1 = \{0\} \oplus W_1$ und $\varphi^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \in W_1$

$\varphi^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wähle $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, dann ist $W_1 = U_1$.

Basis bestimmen

Basis $\mathcal{A}'$ ergibt sich nach der Konstruktion aus der VL aus den Basen der einzelnen U_i.

$$\mathcal{A}' = \left\{ \varphi^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix}, \varphi^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix}, ..., \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{n!} \end{pmatrix} \right\}$$

Einmal ausgerechnet ergibt das$\mathcal{A}' = \{1, t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3, ..., \frac{1}{n!}t^n\}$.

Jordansche Normalform

Da wir die Eigenwerte und den Hauptraum bestimmt haben, wissen wir, dass wir einen Jordanblock der Größe $(n+1) \times (n+1)$ haben, auf dessen Hauptdiagonalen nur 0en stehen.

Die Jordansche Normalform sieht also folgender Maßen aus:

$$L_{\varphi,\mathcal{A}',\mathcal{A}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben nun die Jordansche Normalforn und die Basis $\mathcal{A}'$ bezüglich der φ diese Normalform erreicht.

Aufgabe 4

Sei $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ mit $A^3 = A$. Zeigen Sie, dass A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.
Sei λ EW von A und v EV zu diesem λ.

$$\lambda v = A(v)\, A^3(v) = A^2(\lambda v) = \lambda A^2(v) = \lambda^3 v$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^3 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0.$$

Nun kennen wir die 3 Möglichen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$. (Alle in $\mathbb{R}$)

Daraus ergeben sich die Eigenräume:
$E(A, \lambda_1) = \{v \mid Av = -v\}$
$E(A, \lambda_0) = \{v \mid Av = 0\} = \ker(A)$
$E(A, \lambda_{-1}) = \{v \mid Av = v\}$

Wir kennen die Vielfachheiten nicht, aber da wir alle Eigenräume haben können wir bestimmen, dass

$$\dim(V) = n = \dim(E(A, \lambda_1)) + \dim(E(A, \lambda_0)) + \dim(E(A, \lambda_{-1}))$$

Aus der Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(\ker(A)) + \dim(Im(A))$$

folgt nun

$$\dim(E(A, \lambda_1)) + \dim(E(A, \lambda_0)) + \dim(E(A, \lambda_{-1})) = \dim(\ker(A)) + \dim(Im(A))$$

$$\Leftrightarrow \dim(E(A, \lambda_1)) + \dim(E(A, \lambda_{-1})) = \dim(Im(A)) = \dim\left(Im\left(A^3\right)\right)$$

Nun müssen bestrachten, wie die Vektoren aussehen, die in A nicht auf 0 abgebildet werden.

Sei $\mathcal{A}$ die Basis von $Im(A)$.

Nun betrachten wir $w \in \mathcal{A}$. Gilt
$Aw = w$ gelten, liegt $w \in E(A, \lambda_{-1})$
$Aw = -w$, liegt $w \in E(A, \lambda_{-1})$

Gilt keiner der beiden Fälle, würde gelten:
$Aw = \sum_{x_i \in \mathcal{A}} k_i x_i$. Nun würde
$AAAw = \sum_{x_j \in \mathcal{A}} k_j \left(\sum_{x_l \in \mathcal{A}} k_l \left(\sum_{x_i \in \mathcal{A}} k_i x_i\right)\right)$.

Der Vektor kann nun nur noch auf den selber Wert abgebildet werden, wenn einer der oberen beiden Fälle eingetreten ist. Somit existiert dieser Fall faktisch gar nicht.

$$\Rightarrow E(A, \lambda_1) \cup E(A, \lambda_{-1}) = Im(A)\,,\ E(A, \lambda_1) \cap E(A, \lambda_{-1}) = \{0\}$$

Damit sind auch die Dimensionen gleich. Wir haben also herrausgefunden, dass wir genau n Eigenvektoren finden. Damit muss die Matrix A diagonalisierbar sein. ■