

# Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

## Aufgabe 1.

Im Folgenden werden zwei Vorhergehensweisen angegeben, wie man den Algorithmus von Strassen zur Multiplikation zweier  $n \times n$  Matrizen verwenden kann, falls  $n$  nicht unbedingt eine Zweierpotenz ist.

Bestimmen Sie die jeweilige Laufzeit einschließlich der Konstante im signifikantesten Term genau und berechnen Sie, für welche  $n$  diese Algorithmen weniger Operationen als die klassische Methode benötigen.

### (primitive Methode)

Es bezeichne  $M_p(n)$  die Anzahl der Operationen bei Multiplikation zweier  $n \times n$ -Matrizen mit der primitiven Methode. Pro Eintrag in der Ergebnismatrix werden  $n$  Multiplikationen und  $n - 1$  Additionen benötigt. Es gilt also  $M_p(n) = n^2 \cdot (2n - 1) = 2n^3 - n^2$ .

### (a)

Die Matrizen werden bis zur nächsten Zweierpotenz geeignet aufgefüllt.

### Lösung:

Sei  $M_1(n)$  die Kosten dieser Methode bei Eingabe einer  $n \times n$ -Matrix. Sei weiterhin  $2^r \leq n \leq 2^{r+1}$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} M_1(n) &= 7 * M(n/2) + 18 \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ &= 2^{\log 7} n^{\log 7} - 6n^2 \end{aligned}$$

### (b)

Ist  $n$  gerade so führt man einen Rekursionsschritt nach Strassen aus. Andernfalls zerlegt man

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

wobei  $A_{11}$  und  $B_{11}$   $(n-1) \times (n-1)$ -,  $A_{12}$  und  $B_{12}$   $(n-1) \times 1$ -,  $A_{21}$  und  $B_{21}$   $1 \times (n-1)$ - und  $A_{22}$  und  $B_{22}$   $1 \times 1$ - Matrizen sind.

Dann berechnet man  $AB$  in der Aufteilung, wie bei der klassischen Multiplikation von  $2 \times 2$  Matrizen, wobei  $A_{11}B_{11}$  rekursiv, die übrigen Produkte klassisch berechnet werden.

### Lösung:

Sei  $M_2(n)$  die Laufzeit für dieses Verfahren. Dann untersuchen wir nun zwei Fälle:

**$n$  gerade:** Hier wird ein Rekursionsschritt nach Strassen ausgeführt, wir erhalten also in diesem Fall eine Laufzeit von  $M_2(n) = 7M_2(\frac{n}{2}) + 18 \left(\frac{n}{2}\right)^2$ , für  $n$  gerade.

$n$  **ungerade:** Hier betrachten wir die folgenden Produkte:

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

und damit die folgenden Operationen:

Produkt	Operationen	Kosten
$A_{11}B_{11}$	Rekursiver Berechnung	$M_2(n-1)$
$A_{12}B_{21}$	$(n-1)^2$ Mult.	$(n-1)^2$
$A_{11}B_{12}$	$(n-1)$ mal: $(n-1)$ Mult., $(n-2)$ Add.	$(n-1)^2(n-2)$
$A_{12}B_{22}$	$(n-1)$ Mult.	$(n-1)$
$A_{21}B_{11}$	$(n-1)$ mal: $(n-1)$ Mult., $(n-2)$ Add.	$(n-1)^2(n-2)$
$A_{22}B_{21}$	$(n-1)$ Mult.	$(n-1)$
$A_{21}B_{12}$	$(n-1)$ Mult., $(n-2)$ Add.	$(n-1)(n-2)$
$A_{22}B_{22}$	1 Mult.	1
	Zusammensetzen (Additionen)	$n^2$

Als Summe ergibt sich dann  $M_2(n) = M_2(n-1) + 2n^3 - 5n^2 + 7n - 2$ , für  $n$  ungerade.

Also ergibt sich also Rekursionsgleichung für diese Methode:

$$M_2(1) = 1$$

$$M_2(n) = \begin{cases} 7M_2(\frac{n}{2}) + 18(\frac{n}{2})^2 & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ M_2(n-1) + 2n^3 - 5n^2 + 7n - 2 & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

## Aufgabe 2.

(a)

Zeigen Sie, dass die Multiplikation von  $n \times n$ - Matrizen mit  $O(I(n))$  Operationen durchführbar ist, falls man mit  $I(n)$  Operationen Matrizen invertieren kann.

### Lösung:

Zur Multiplikation den Matrizen  $A, B$  betrachten wir das folgende Inverse einer  $3n \times 3n$ -Matrix  $M$ :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1_n & A & 0_n \\ 0_n & 1_n & B \\ 0_n & 0_n & 1_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1_n & -A & AB \\ 0_n & 1_n & -B \\ 0_n & 0_n & 1_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Wir sehen also in Gleichung (1), dass durch Invertierung der Matrix  $M$  das Produkt  $AB$  in der oberen rechten Ecke enthalten ist. Damit gilt  $M(n) = I(3n)$ , wobei  $M(n)$  die Kosten der Multiplikation darstellt. Eine Abschätzung erhalten wir durch Nutzung der Abschätzung (\*):  $I(n) = O(n^3)$ . Dann gilt:

$$M(n) = I(3n) \stackrel{(*)}{\leq} 9c \cdot I(n) = O(I(n)) \quad (2)$$

(b)

Zeigen Sie, dass die Multiplikation von  $n \times n$ -Matrizen mit  $O(S(n))$  Operationen durchführbar ist, falls man mit  $S(n)$  Operationen Matrizen quadrieren kann.

**Lösung:**

Zur Multiplikation der Matrizen  $A, B$  betrachten wir die gleiche  $3n \times 3n$ -Matrix  $M$  wie in a):

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1_n & A & 0_n \\ 0_n & 1_n & B \\ 0_n & 0_n & 1_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1_n & 2A & AB \\ 0_n & 1_n & 2B \\ 0_n & 0_n & 1_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Wieder steht das Produkt  $AB$  oben rechts. Es gilt also wieder  $M(n) = S(3n)$ . Auch für Quadrieren gilt die Abschätzung  $S(n) = O(n^3)$ , also:

$$M(n) = S(3n) \leq 9c \cdot S(n) = O(S(n)) \quad (4)$$

**Aufgabe 3.**

Bei der Multiplikation Boolescher Matrizen wird  $+$  durch  $\vee$  und  $\cdot$  durch  $\wedge$  ersetzt. Strassens Algorithmus ist nicht direkt anwendbar, da  $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$  kein Ring ist.

Zeigen Sie, dass die Boolesche Matrizenmultiplikation mit  $O(n^{\omega+\varepsilon})$  Operationen aus  $\{\vee, \wedge, \neg\}$  für jedes  $\varepsilon > 0$  möglich ist, wenn die Matrizenmultiplikation für ganze Zahlen mit  $O(n^\omega)$  arithmetischen Operationen möglich ist.

**Lösung:**

Eine Boolesche Matrix ist eine Matrix  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  mit  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ . Das Boolesche Matrixprodukt zweier Boolescher Matrizen  $AB$  ist eine Boolesche Matrix  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  mit  $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n a_{ik} \wedge b_{kj}$ . Um die Multiplikation zweier Boolescher Matrizen  $A, B$  zu lösen, definieren wir eine  $n \times n$ -Hilfsmatrix  $H = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  durch  $h_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$ . Es gilt nun  $0 \leq h_{ij} \leq n$ , damit können wir diese Berechnungen in  $\mathbb{Z}_{n+1}$  durchführen. Da  $\mathbb{Z}_{n+1}$  ein Ring ist, können wir den Algorithmus für Matrizenmultiplikation für ganze Zahlen (mit  $O(n^\omega)$  Operationen) nutzen.

Nun definieren wir die Ergebnismatrix  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  durch

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ if } h_{ij} = 0 \\ 1 & \text{ otherwise} \end{cases}$$

Die hierdurch erhaltene Produktmatrix  $C$  ist offensichtlich richtig ☺

**Laufzeit:** Wie bekannt ist, können wir die Multiplikation von zwei  $m$ -stelligen Binärzahlen durch  $O(m^2)$  Operationen berechnen. Addition benötigt  $O(m)$  Operationen.

Da jede Zahl aus  $\mathbb{Z}_{n+1}$  mit maximal  $O(\log n)$  Bits dargestellt werden kann, benötigen wir also pro arithmetischer Operation im Algorithmus  $O(\log^2 n)$  Operationen. Damit ist die Gesamtlaufzeit  $O(n^\omega \cdot \log^2 n) = O(n^{\omega+\varepsilon})$ , da  $\log^2 n = O(n^\varepsilon)$ , für jedes  $\varepsilon > 0$ .