Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1

Es seien G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$, eine assoziative Verknüpfung mit einem linksneutralem Element $e \in G$ und einem linksinversen Element $g' \in G$ für jedes $g \in G$.

a) Es seien $g \in G$ und $g' \in G$ ein Element mit $g' \cdot g = e$. Zeigen Sie $g \cdot g' = e$.

Beweis:
Es seien $g, g' \in G$, sodass $g' \cdot g = e$. Es sei $g'' \in G$ ein Linksinverses zu g'. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e = g'' \cdot g' = g'' \cdot (e \cdot g') &= g'' \cdot ((g' \cdot g) \cdot g') \\ &\overset{assoz.}{=} (g'' \cdot g') \cdot (g \cdot g') = e \cdot (g \cdot g') \\ &= g \cdot g' \end{aligned}$$

□

b) Beweisen Sie, dass $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$ gilt.

Beweis:
Es seien $g, g' \in G$, sodass $g' \cdot g = e$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e \cdot g = (g' \cdot g) \cdot g &\overset{a)}{=} (g \cdot g') \cdot g \\ &\overset{assoz.}{=} g \cdot (g' \cdot g) = g \cdot e \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Auf $\mathbb{R}$ wird folgende Verknüpfung $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $(a, b) \mapsto a \cdot b + a + b$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\star$ das Assoziativgesetz erfüllt und es ein neutrales Element gibt.

Beweis:
Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \star (b \star c) &= a \star (b \cdot c + b + c) \\ &= a \cdot (b \cdot c + b + c) + a + (b \cdot c + b + c) \\ &= a \cdot b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c + a + b \cdot c + b + c \\ &= (a \cdot b + a + b) \cdot c + (a \cdot b + a + b) + c \\ &= (a \star b) \cdot c + (a \star b) + c = (a \star b) \star c \end{aligned}$$

□

Behauptung: $e = 0$ ist das neutrale Element bzgl. $\star$.
Beweis:
Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$0 \star a = 0 \cdot a + 0 + a = a$$

$\square$

b) Welche Elemente in $\mathbb{R}$ besitzen bzgl. $\star$ keine Inversen? Geben Sie die kleinste Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ an, für die $(\mathbb{R} \setminus N, \star)$ eine Gruppe ist.

Suche Inverses $b' \in \mathbb{R}$ zu $b \in \mathbb{R}$:

$$b' \star b = 0 \Leftrightarrow b' \cdot b + b' + b = 0$$
$$\Leftrightarrow b' = \frac{-b}{b+1}$$

Also besitzt $b = -1$ kein Inverses, da $\frac{-b}{b+1}$ für $b = -1$ nicht existiert.
$\Rightarrow N = \{-1\} \Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$ ist Gruppe.

Aufgabe 3

a) Es sei $g \in G$ eine Gruppe, so dass $g^2 = e$ für alle $g \in G$ gilt. Weisen Sie nach, dass G abelsch ist. Geben Sie für jedes $k \geq 1$ eine Gruppe G mit $2k$ Elementen an, in der $g^2 = e$ für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt.

(1) $\forall g \in G : g^2 = e \Rightarrow G$ abelsch.
Beweis:
Sei $a, b \in G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= e \cdot a \cdot b = b^2 \cdot a \cdot b \\ &= b \cdot (b \cdot a) \cdot b \cdot e = b \cdot (b \cdot a) \cdot b \cdot a^2 \\ &= b \cdot (b \cdot a) \cdot (b \cdot a) \cdot a = b \cdot (b \cdot a)^2 \cdot a \\ &= b \cdot e \cdot a = b \cdot a \end{aligned}$$

$\square$

(2) Je eine Gruppe G wie oben mit 2^k Elementen.
...

b) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g^2 = e.$$

Beweis:
... $\square$

Aufgabe 4

a)

b)

c)