Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1

Es seien G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$, eine assoziative Verknüpfung mit einem linksneutralem Element $e \in G$ und einem linksinversen Element $g' \in G$ für jedes $g \in G$.

a) Es seien $g \in G$ und $g' \in G$ ein Element mit $g' \cdot g = e$. Zeigen Sie $g \cdot g' = e$.

Beweis:
Es seien $g, g' \in G$, sodass $g' \cdot g = e$. Es sei $g'' \in G$ ein Linksinverses zu g'. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e = g'' \cdot g' = g'' \cdot (e \cdot g') &= g'' \cdot ((g' \cdot g) \cdot g') \\ &\overset{assoz.}{=} (g'' \cdot g') \cdot (g \cdot g') = e \cdot (g \cdot g') \\ &= g \cdot g' \end{aligned}$$

□

b) Beweisen Sie, dass $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$ gilt.

Beweis:
Es seien $g, g' \in G$, sodass $g' \cdot g = e$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e \cdot g = (g' \cdot g) \cdot g &\overset{a)}{=} (g \cdot g') \cdot g \\ &\overset{assoz.}{=} g \cdot (g' \cdot g) = g \cdot e \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Auf $\mathbb{R}$ wird folgende Verknüpfung $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $(a, b) \mapsto a \cdot b + a + b$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\star$ das Assoziativgesetz erfüllt und es ein neutrales Element gibt.

Beweis:
Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \star (b \star c) &= a \star (b \cdot c + b + c) \\ &= a \cdot (b \cdot c + b + c) + a + (b \cdot c + b + c) \\ &= a \cdot b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c + a + b \cdot c + b + c \\ &= (a \cdot b + a + b) \cdot c + (a \cdot b + a + b) + c \\ &= (a \star b) \cdot c + (a \star b) + c = (a \star b) \star c \end{aligned}$$

□

Behauptung: $e = 0$ ist das neutrale Element bzgl. $\star$.
Beweis:
Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$0 \star a = 0 \cdot a + 0 + a = a$$

$\square$

b) Welche Elemente in $\mathbb{R}$ besitzen bzgl. $\star$ keine Inversen? Geben Sie die kleinste Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ an, für die $(\mathbb{R} \setminus N, \star)$ eine Gruppe ist.

Suche Inverses $b' \in \mathbb{R}$ zu $b \in \mathbb{R}$:

$$b' \star b = 0 \Leftrightarrow b' \cdot b + b' + b = 0$$
$$\Leftrightarrow b' = \frac{-b}{b+1}$$

Also besitzt $b = -1$ kein Inverses, da $\frac{-b}{b+1}$ für $b = -1$ nicht existiert.
$\Rightarrow N = \{-1\} \Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$ ist Gruppe.

Aufgabe 3

a) Es sei $g \in G$ eine Gruppe, so dass $g^2 = e$ für alle $g \in G$ gilt. Weisen Sie nach, dass G abelsch ist. Geben Sie für jedes $k \geq 1$ eine Gruppe G mit $2k$ Elementen an, in der $g^2 = e$ für jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt.

(1) $\forall g \in G : g^2 = e \Rightarrow G$ abelsch.

Beweis:
Sei $a, b \in G$. Dann gilt:

$$a \cdot b = e \cdot a \cdot b = b^2 \cdot a \cdot b$$
$$= b \cdot (b \cdot a) \cdot b \cdot e = b \cdot (b \cdot a) \cdot b \cdot a^2$$
$$= b \cdot (b \cdot a) \cdot (b \cdot a) \cdot a = b \cdot (b \cdot a)^2 \cdot a$$
$$= b \cdot e \cdot a = b \cdot a$$

$\square$

(2) Je eine Gruppe G wie oben mit 2^k Elementen.

Blablaba kein Bock

b) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g^2 = e.$$

Beweis:
Sei $\kappa : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ eine Funktion, wobei $g^{-1} \in G$ das Inverse zu $g \in G$ beschreibt. Da G Gruppe, besitzt jedes Element ein eindeutiges Inverses $\Rightarrow \kappa$ bijektiv $\Rightarrow \kappa(G) = G$. Also gilt:

$$\prod_{g \in G} g^2 = \prod_{g \in G} g \cdot g \overset{\text{G abelsch}}{=} \prod_{g \in G} g \prod_{g \in G} g$$

$$\stackrel{\kappa \text{ bij.}}{=} \prod_{g\in G} g \prod_{g\in G} \kappa(g) \stackrel{\text{Def.}}{=} \prod_{g\in G} g \prod_{g\in G} g^{-1}$$
$$\prod_{g\in G} g \cdot g^{-1} = \prod_{g\in G} e = e$$

□

Aufgabe 4

Es sei G eine endliche Gruppe und $\mathfrak{M} := \{M \subset G \mid M \text{ zyklisch}\}$ die Menge aller zyklischen Teilmengen von G.

a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier zyklischen Teilmengen von G zyklisch ist.

Seien $A, B \in \mathfrak{M}$ zyklische Teilmengen von G.

b) Zeichnen Sie die Zykelgraphen von $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$, der Gruppen aus Aufgabe 3 a) und der Diedergruppe D_6.

c) Geben Sie eine Gruppe mit dem Zykelgraphen vom Aufgabenblatt an.
Die Gruppe $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ besitzt genau den Zykelgraphen vom Aufgabenblatt.
Dabei ist die Zuordnung der Gruppenelemente z.B.:

$$e = (0,0)$$
$$g_1 = (1,1), g_2 = (2,2)$$
$$g_3 = (1,0), g_4 = (2,0)$$
$$g_5 = (0,1), g_6 = (0,2)$$
$$g_6 = (1,2), g_7 = (2,1)$$