Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 5: *Unbestimmte Integrale*

Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int (\log x)^2 \, dx$:
Wir benutzen das Substitutionsverfahren und wählen $y = \log x$ als neue Basis. Damit ist $x = e^y$ und $dx = e^y \, dy$. Eingesetzt in die Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int (logx)^2 \, dx &\overset{sub.\, y}{=} \int y^2 \cdot e^y \, dx \\
&\overset{part.}{=} y^2 \cdot e^y - \int 2ye^x \, dy \\
&\overset{part.}{=} y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y \\
&= e^y \cdot (y^2 - 2y + 1) + e^y \\
&= e^y \cdot (y-1)^2 + e^y \\
&\overset{resub.\, y}{=} x \cdot ((\log x) - 1)^2 + x.
\end{aligned}$$

Dies können wir nun noch einmal ableiten um die Lösung zu verifizieren.

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx} x \cdot ((\log x) - 1)^2 + x &= (\tfrac{d}{dx} x \cdot (\log x - 1))^2 + 1 \\
&= (\log x - 1)^2 + x \cdot 2(\log x - 1)\tfrac{1}{x} + 1 \\
&= ((\log x - 1) + 1)^2 = (\log x)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

(ii) $\int \frac{1}{x \log x} \, dx$:
Wir substituiren wieder druch $y = \log x$ und bekommen $x = e^y$ und $dx = e^y \, dy$.

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{x \log x} \, dx &\overset{sub.\, y}{=} \int \tfrac{1}{e^y \cdot y} \cdot e^y \, dy \\
&= \int \tfrac{1}{y} \, dy \\
&= \log y \, dy \\
&\overset{resub.\, y}{=} \log(\log x).
\end{aligned}$$

Wir testen das Ergebnis nocheinmal, indem wir ableiten.

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx} \log \log x &= (\tfrac{d}{dx} \log x) \tfrac{1}{\log x} \\
&= \tfrac{1}{x} \cdot \tfrac{1}{\log x} \\
&= \tfrac{1}{x \cdot \log x}
\end{aligned}$$

(iii) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$:

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx & = & \int \frac{1}{1-e^x}\,dx + \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx \\
 & & \text{Wir verfahren mit den einzelintegralen fort} \\
\int \frac{1}{1-e^x}\,dx & \stackrel{y=e^x}{=} & \int \frac{1}{(1-y)y}\,dy \\
 & = & \int \frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}\,dy \\
 & = & \int \frac{1}{y}\,ds - \frac{1}{1-y}\,dy \\
 & = & \ln y - \ln(1-y) \\
 & \stackrel{resub.}{=} & x - \ln(1-e^x) \\
\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx & \stackrel{z=1-e^x}{=} & \int \frac{e^x}{z} \cdot -e^x\,dz \\
 & = & -\frac{1}{z}\,dz \\
 & = & \ln(1-e^x) \\
 & \stackrel{resub.}{=} & x \\
\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx & = & x - 2\ln(1-e^x)
\end{array}$$

Einmal Ableiten zum gegenchecken:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx} x - 2\ln(1-e^x) & = & 1 - 2\frac{1}{1-e^x} \cdot -e^x \\
 & = & 1 + 2\frac{e^x}{1-e^x} \\
 & = & \frac{1-e^x+2e^x}{1-e^x} \\
 & = & \frac{1+e^x}{1-e^x}
\end{array}$$

(iv) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$:

$$\begin{array}{rcl}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx & \stackrel{x=\sin y}{=} & \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cdot \cos y\,dy \\
 & \stackrel{Geo.Pyth}{=} & \int \sqrt{\cos^2 y} \cdot \cos y\,dy \\
 & = & \int \cos^2 y\,dy \\
 & \stackrel{Tip.}{=} & \int \frac{\cos(2y)+1}{2}\,dy \\
 & = & \frac{1}{2}\int \cos(2y)\,dy + \int \frac{1}{2}\,dy \\
 & \stackrel{z=2y}{=} & \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos z + \int \frac{1}{2}\,dz \\
 & = & \frac{1}{4}\int \cos z + \int \frac{1}{2}\,dy \\
 & = & \frac{\sin z}{4} + \frac{y}{2} \\
 & \stackrel{resub.z}{=} & \frac{\sin 2y}{4} + \frac{y}{2} \\
 & = & \frac{1}{2}\sin y \cdot \cos y + \frac{y}{2} \\
 & \stackrel{y=\arcsin x}{=} & \frac{1}{2} \cdot (x \cdot \cos \arcsin x + \arcsin x) \\
 & = & \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}x + \arcsin x\right)
\end{array}$$

Es bleibt der Tip zu zeigen:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1+\cos(2x)}{2} & = & \frac{1+\cos(x+x)}{2} \\
 & \stackrel{Add.}{=} & \frac{1+\cos^2(x)-\sin^2(x)}{2} \\
 & \stackrel{Geo.Pyt}{=} & \frac{2\cos^2(x)}{2} \\
 & = & \cos^2(x)
\end{array}$$

Aufgabe 6: *Uneigentliche Integrale I*

Für eine Funktion $f \,.\, (0,b) \to \mathbb{R}$ definiert man das *uneigentliche Integral* durch

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b f(x)dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(i) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

Lösung:
Wir integrieren zunächst und untersuchen danach das Verhalten im Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \textstyle\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}) \\
&= 2\sqrt{1} - \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} \\
&= 2\sqrt{1} - 0 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert und $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$ gilt.

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx\ ?$$

Lösung:
Wir formen das ganze wie gehabt um und untersuchen, wie sich der Grenzwert verhätl.:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \textstyle\int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx \\
&\overset{p\neq 1}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\tfrac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_\varepsilon^1 \\
&= \tfrac{1}{1-p}\cdot 1^{1-p} - \lim_{\varepsilon\to 0^+} \tfrac{1}{1-p}\cdot\varepsilon^{1-p} \\
&= \tfrac{1}{1-p} - \tfrac{1}{1-p}\cdot \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-p}
\end{aligned}$$

Nun können wissen wir, dass für $q > 0$ gilt, dass $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^q = 0$. Daraus können wir zum einen schließen, dass für $p < 1$ der Grenzwert definiert ist und $\frac{1}{1-p}$ ist.
Für $p > 1$ divergiert es bestimmt gegen unendlich.
Für den vorhin ausgenommen Fall $p = 1$ gilt $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$ und diese Funktion ist für $x \to 0$ nicht definiert.
Es ist also nur für $p < 1$ uneigentlich integrierbar.

Aufgabe 7: *Uneigentliche Integrale II*

Man definiert das *uneigentliche Integral* einer Funktion $f \,.\, [a,\infty) \to \mathbb{R}$ als

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(i) Bestimmen Sei

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \tfrac{1}{x^4} dx &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \tfrac{1}{x^4}\, dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\tfrac{1}{-3} \cdot x^{-3}\right]_1^N \\
&= \lim_{N\to\infty} -\tfrac{1}{3} \cdot N^{-3} - (-\tfrac{1}{3} \cdot 1^{-3}) \\
&= 0 - (-\tfrac{1}{3}) \\
&= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Der Grenzwert von $\frac{1}{x^p}, p > 1$ ist Null, wie in Ana I bewiesen. Damit ist der Grenzwert definiert und $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3}$

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \;?$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \tfrac{1}{x^p} dx &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \tfrac{1}{x^p} dx \\
&\overset{p\neq 1}{=} \lim_{N\to\infty} \left[\tfrac{1}{1-p} x^{1-p}\right]_1^N \\
&= \tfrac{1}{1-p} 1^{1-p} - \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{1-p} N^{1-p} \\
&= \tfrac{1}{1-p} - \tfrac{1}{1-p} \cdot \lim_{N\to\infty} N^{1-p}
\end{aligned}$$

Nach Ana I wissen wir nun, dass $\lim\limits_{N\to\infty} N^q,\ q < 0$ gegen Null strebt. Damit existiert der Grenzwert für $p > 1$ und ist $\frac{1}{(1-p)}$.
Also ist das Integral nur für $p > 1$ definiert.

Aufgabe 8: *Uneigentliche Integrale III*

Die Gamma-Funktion ist wie folgt definiert:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

(i) Zeigen Sie die folgende Version der partiellen Integration:

$$\int_a^\infty u'(x)v(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^\infty - \int_a^\infty u(x)v'(x)\, dx,$$

wobei mit dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ gemeint ist. Weiter sei vorausgesetzt, dass all diese Grenzwerte existieren.

Lösung:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^\infty u'(x)v(x)\,dx &\overset{Def.}{=} \lim_{N\to\infty} \textstyle\int_a^N u'(x)v(x)\,dx \\ &\overset{Parts.}{=} \lim_{N\to\infty}\left([u(x)v(x)]_a^N \textstyle\int_a^N u(x)v'(x)\,dx\right) \\ &\overset{Def.}{=} [u(x)v(x)]_a^\infty - \textstyle\int_a^\infty u(x)v'(x)\,dx\end{aligned}$$

Das integral ist nun genau dann definiert, wenn die Grenzwerte der einzel Ausdrücke definiert sind. Dies ist aber nach Aufgabe vorrausgesetzt. Damit gilt die Formel.

(ii) Zeigen Sei, dass für alle $x > 0$ das uneigentliche Integral $\Gamma(x)$ wohldefiniert ist.
Lösung:

Sei $x > 0$. Es ist

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

Es muss also gezeigt werden, dass beide uneigentlichen Integrale konvergieren.

(i) Erster Term
Wegen $t > 0 \Rightarrow e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1}$. Also gilt:

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt < \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}1^x - \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{x}a^x = \frac{1}{x} < \infty$$

Also konvergiert $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$.
(ii) Zweiter Term
Da $t \geq 1$ ex. für $a > 0$ ein $c > 0$, s.d. für $0 < x \leq a$ gilt: $t^{x-1} < c \cdot e^{\frac{t}{2}}$. Also gilt:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}t^{x-1}\,dt \leq \lim_{b\to\infty} c\int_1^b e^{-\frac{t}{2}}\,dt < \infty$$

Also konvergiert $\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$$

gilt und daraus folgt, dass

$$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \Gamma(n+1) = n!$$

gilt.

Lösung:
(i) Funktionalgleichung:

Sei $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x \cdot \Gamma(x) &= x \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \\
&\overset{a)}{=} x \cdot \left(\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{x} t^x - e^{-t}\, dt \right) \\
&= x \cdot \left(\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt \right) \\
&\overset{(*)}{=} x \cdot \left(\frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt \right) \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt \\
&= \Gamma(x+1)
\end{aligned}$$

(*) gilt, da $\frac{t^x}{x} e^{-t}\big|_0^\infty = 0$, denn:

$$\frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{x} e^{-t} - (\frac{0^x}{x} e^{-0}) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{x} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x} \lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t}$$

Da $x^t = o(e^t)$, also der Nenner echt schneller wächst als der Zähler (vgl. Regel von L'Hopital), gilt

$$\frac{1}{x} \lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t} = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$$

(ii) Beziehung zur Fakuktät:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der Funktionalgleichung:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$$

Zusätzlich gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\, dt \\
&= -e^{-t}\big|_0^\infty \\
&= \lim_{t\to\infty} -e^{-t} - -e^0 \\
&= 0 - (-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.