

## Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : not known

**Aufgabe 1:** Spezielle gleichmäßige Funktionen

Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Hölder stetig* mit Exponent  $\alpha \in (0, 1]$  wenn es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so dass für alle  $x, y \in A$  die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$$

gilt. Ist  $\alpha = 1$  so nennt man  $f$  *Lipschitzstetig*

- a) Sei  $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(z) = \sqrt{z}$ . Zeigen Sie dass  $f$  Hölderstetig mit  $\alpha = \frac{1}{2}$  ist.

**Lösung:**

Sei  $x, y \in [a, b]$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &\leq |\sqrt{x}| - |\sqrt{y}| \leq C \cdot \sqrt{|x - y|} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\leq C^2 \cdot |x - y| \\ \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y &\leq C^2 \cdot |x - y| \leq C^2 \cdot (|x| + |-y|) \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{x}\sqrt{y} &\leq (C^2 - 1)(x + y), \end{aligned}$$

Für  $C > 1$ , da  $\sqrt{x}$  und  $\sqrt{y}$  beide größer Null sind, ist die linke Seite der Gleichung kleiner Null. Da wir rechts  $x + y$  rechnen und beide größer null sind, gilt  $x + y > 0$ . Wenn nun  $C > 1$  belibt die rechte Seite positiv. Für ein  $C > 1$  ist die Gleichung erfüllt und damit ist  $f$  Hölderstetig mit  $\alpha = \frac{1}{2}$

- b) Sei  $A = \mathbb{R}$  und  $f = \arctan$  eingeschränkt auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Zeigen Sie, dass  $f$  Lipschitzstetig ist.

**Lösung:**

Es seien  $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Da  $f = \arctan$  stetig auf Einschränkung, folgt aus dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \exists \mu \in [x, y] : |f(x) - f(y)| &= f'(\mu) |x - y| \\ &= \frac{1}{\mu^2 + 1} |x - y| \leq 1 \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Also ist  $f = \arctan$  eingeschränkt auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  Lipschitzstetig mit Konstante  $C = 1$ .

c) Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  Hölderstetig. Zeigen Sie, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist.

**Lösung:**

Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  Hölderstetig

$\Rightarrow \exists \alpha \in (0, 1] \exists C > 0 \forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha$

Es sei  $\varepsilon > 0$  und  $|x - y| < \delta$  für ein  $\delta > 0 \forall x, y \in A$ .

Z.z.  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Wähle  $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Also gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha < C \delta^\alpha = C \left(\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = \varepsilon$$

## Aufgabe 2 : Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Finden Sie die Ableitung der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch die folgenden Ausdrücke.

i)  $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t \, dt$ .

**Lösung:**

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Ableitung die Umkehrung des Integrals. Die Grenzen werden nach Substitutionsmethode abgeleitet und als Faktor übernommen.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left( \int_0^{x^2} \sin t \, dt \right)' \\ &= (x^2)' \cdot \sin x^2 \\ &= 2x \cdot \sin x^2 \end{aligned}$$

ii)  $F(x) = \exp\left(\int_0^x p(t) \, dt\right)$ , wobei  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**Lösung:**

ACHTUNG : KÖNNTE EINE FALLSE SEIN, DA  $p$  NICHT STETIG ODER INTEGRIERBAR IST.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left( \exp\left(\int_0^x p(t) \, dt\right) \right)' \\ &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \left( \int_0^x p(t) \, dt \right)' \cdot \exp\left(\int_0^x p(t) \, dt\right) \\ &= p(x) \cdot F(x) \end{aligned}$$

iii) Es sei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f$  und  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar. Setzen Sie dann

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) \, dt$$

und berechnen die Ableitung von  $F$ .

**Lösung:**

$$F'(x) = \left( \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt \right)'$$

$$\stackrel{\text{Haupt.}}{=} g'(x)h(g(x)) - f'(x)h(f(x))$$

Die Ableitung existiert, da  $g$  und  $f$  differenzierbar sind. Da  $h$  stetig ist, kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet werden.

**Aufgabe 3 : Mittelwertsatz der Integralrechnung**

- i) Es sei  $f$  eine auf dem Intervall  $[a, b]$  integrierbare Funktion mit  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann gibt es ein  $\mu \in [m, M]$  mit Eigenschaft

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\mu.$$

**Lösung:**

Da  $m \leq f(x) \leq M$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt die Abschätzung:

$$(b-a) \cdot m = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = (b-a) \cdot M$$

$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$  sodass

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\mu$$

- ii) Es sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$ . Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$$

für ein  $\xi \in [a, b]$ . Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Stetigkeit von  $f$  notwendig ist.

**Lösung:**

Es seien  $m, M$  wie aus Aufgabe 3 a). Aus Aufgabe 3 a) wissen wir, dass ein  $\mu \in [m, M]$  existiert, mit

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\mu$$

Da  $\mu \in [m, M] = [f(\alpha), f(\beta)]$  für ein  $\alpha, \beta \in [a, b]$  (eine Funktion nimmt auf einem abgeschlossenem Intervall sein Minimum und Maximum an) und  $f$  auf  $[a, b]$  stetig, folgt aus dem Zwischenwertsatz:  $f(\xi) = \mu$  für ein  $\xi \in [a, b]$ .

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$$

HIER FEHLT GEGENBEISPIEL BZGL. STETIGKEIT

- iii) Sei nun  $f$  stetig auf  $[a, b]$ , und  $g$  integrierbar und positiv (bzw. negativ) auf  $[a, b]$ . Zeigen Sie dass

$$\int_a^b g(x)f(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

für ein  $\xi \in [a, b]$  gilt. Man nennt dies den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vorzeichenbedingung an  $g$  notwendig ist.

### Aufgabe 4 : Positivitätseigenschaft des Integrals

- i) Sei  $f$  integrierbar auf  $[a, b]$  und  $f \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

**Lösung:**

Sei  $P = a = x_0 < \dots < x_n = b$  Partitionsfolge über  $n$  von  $[a, b]$ , sodass  $U_n$  und  $O_n$  Unter- und Obersummen konvergieren. Diese Partitionsfolge muss existieren, da die Funktion integrierbar ist (nach der bisher angenommenen Definition von integrierbar). Dann gilt für alle  $S_i = \sup\{f(y) \mid x_i < y < x_{i+1}\}$ ,  $S_i \geq 0$ , da jeder Funktionswert des Supremums größer gleich 0.

Nun ist  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} S_i \geq 0$ , da jeder Summand, wie gezeigt größer oder gleich 0 ist.

- ii) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion  $f$  mit folgenden Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], f(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0.$$

**Lösung**

$$\text{Sei } a < b \in \mathbb{R}, \psi = a + \frac{b-a}{2} \text{ und } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = \psi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir wählen als Partitionsfolge  $\{a, \psi - \frac{b-a}{2^{i+2}}, \psi + \frac{b-a}{2^{i+2}}, b\}$ , wobei  $i \in \mathbb{N}$  der Index der Folge ist.

Für die Untersumme  $U_n$  gilt  $U_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Für die Obersumme  $O_n$  gilt  $O_n = \psi + \frac{b-a}{2^{n+2}} - (\psi - \frac{b-a}{2^{n+2}}) = \frac{b-a}{2^{n+1}}$ .

Nun betrachten wir den Grenzwert der Obersumme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^{n+1}} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$$

Da der Grenzwert existiert und die Differenz von Unter- und Obersumme Null ist, ist das Integral von  $f$  definiert und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

- iii) Sei  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  und  $f$  stetig mit  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) > 0$ . Zeigen Sie, dass dann auch gilt

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

**Lösung:**

tbd

- iv) Sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$ . Es gelte

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

für alle stetigen Funktionen  $g$  auf  $[a, b]$ . Zeigen Sie, dass  $f \equiv 0$