Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: not known

Aufgabe 1 (Teilbarkeit)

Gegeben seien natürliche Zahlen $k, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $n = k \cdot m$.

a) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \ (a^m - b^m) | (a^n - b^n).$$

Beweis:
Seien $p_1, ..., p_s$ alle Primzahlen, die kleiner gleich $\max\{a, b\}$ sind.

b) Zeigen Sie weiter:

$$k \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad (\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a^m + b^m) | (a^n + b^n))$$

Beweis:

tbd by your mother

Aufgabe 2 (Primzahlen)

a) Bestimmen Sie mit dem Sieb des Erastrothenes alle Primzahlen zwischen 2 und 200.
$\{2, 3, 5, 7, 1, , 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83,$
$89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173,$
$179, 181, 191, 193, 197, 199\}$

Und nu darf hier noch wer den Algorithmus runter brechen.

b) Geben Sie die primfaktorzerlegung der Zahl $-1.601.320$ an.

$$-1.601.320 = -1 \cdot 43 \cdot 19 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 2^3$$

Aufgabe 3 (Teiler)

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $T_n := \{l \geq 1 | \ l | n\}$ die Menge ihrer Teiler.

a) Es sei $n = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}$ die Primfaktorzerlegung von n. Geben Sie eine Formel für die Anzahl $\#T_n$ der Teiler von n an.

b) Charakterisieren Sie diejenigen Zahlen, für die $\#T_n$ ungerade ist.

Augabe 4 (Die Amnestie)

Ein Herrscher hält 500 Personen in Einzelzellen gefangen, die von 1 bis 500 durchnummeriert sind. Anlässlich seines fünfizgsten Geburtstags gewährt er eine Amnestie nach folgenden Regeln:

- Am ersten Tag werden alle Zellen aufgeschlossen.
- Am Tag i wird der Schlüssel der Zellen $i, 2i, 3i$ usw. einmal umgedreht, d. h. Zelle j wird versperrt, wenn sie offen war, und geöffnet, wenn sie verschlossen war, $j = i, 2i, 3i$ usw., $i = 2, ..., 500$.

Wie viele Gefangene kommen frei? Ist der Insasse von Zelle 179 unter den Freigelassenen?