# Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

## Übungsblatt 2

Abgabe: Bis Dienstag, den 08.11.2011, 10Uhr

---

Aufgabe 1 (GgT und kgV; 5+5 Punkte).
Es seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ natürliche Zahlen sowie

$$a = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s} \quad \text{und} \quad b = q_1^{l_1} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}$$

ihre Primfaktorzerlegungen.
a) Geben Sie die Primfaktorzerlegungen von $\mathrm{ggT}(a,b)$ und $\mathrm{kgV}(a,b)$ an.
b) Beweisen Sie die Formel

$$\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = a \cdot b$$

mit den Ergebnissen aus a).

Aufgabe 2 (Der euklidische Algorithmus; 3+3+4 Punkte).
a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 165 und 585 mit dem euklidischen Algorithmus.
b) Geben Sie die Primfaktorzerlegungen von 165 und 585 an und überprüfen Sie das Ergebnis aus a) mit Ihrer Formel aus Aufgabe 1, a).
c) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $d$ von 142 und 202 und ganze Zahlen $a$ und $b$, so dass

$$d = a \cdot 142 + b \cdot 202.$$

Aufgabe 3 (Ein Teilbarkeitstest; 10 Punkte).
Es sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die periodische Folge $(1,3,2,-1,-3,-2,...)$, d.h. $\varepsilon_{6l} = 1$, $\varepsilon_{6l+1} = 3$, $\varepsilon_{6l+2} = 2$, $\varepsilon_{6l+3} = -1$, $\varepsilon_{6l+4} = -3$ und $\varepsilon_{6l+5} = -2$, $l \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie, dass eine ganze Zahl $a = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k$ genau dann durch 7 teilbar ist, wenn ihre **gewichtete Quersumme**

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k \cdot a_k$$

es ist. Testen Sie mit diesem Kriterium die Zahlen 10.167.157 und 8.484.372 auf Teilbarkeit durch 7.

Zusatzaufgabe 1 (Teilbarkeitstests; 5+5 Bonuspunkte).
a) Entwicklen Sie einen zu Aufgabe 3 analogen Teilbarkeitstest für die Zahl 13. Wenden Sie diesen Test auf die Zahl 28.286.375 an.
b) Es sei $a = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k \cdot 2^k$, $\varepsilon_k \in \{0,1\}$, $k = 0, ..., m$, eine ganze Zahl in **binärer Darstellung**. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Zahlen $\varepsilon_0$, ..., $\varepsilon_m$ an, damit $a$ durch 3 teilbar ist. Schreiben Sie die Zahl 351 in binärer Schreibweise und wenden den Test auf sie an.

Aufgabe 4 (Der chinesische Restsatz; 10 Punkte).
Von einem Bienenvolk sind folgende Daten bekannt: Es hat zwischen 200 und 250 Mitglieder. Stellen sich die Bienen in 7er-Reihen auf, dann bleibt eine Biene alleine. Wenn sie sich in 5er-Reihen aufstellen, dann bleiben drei übrig. Wieviele Mitglieder hat das Bienenvolk?