Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1

Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \geq 0\}$.

1. $g(M) \subseteq M$
   Sei $x \in M$, dann gilt
   $$g(x) = \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\geq 0} \geq 0$$
   Also ist $g(x) \in M \Rightarrow g(M) \subseteq M$.

2. $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für $x \neq y$
   Seien $x, y \in M$, $x \neq y$. Sei weiterhin o.B.d.A. $x > y$. Dann gilt
   $$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y}| \\ &= |\underbrace{x - y}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}}_{<0}| \\ &= \left| x - y + \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &\overset{(1+x)(1+y)>1}{<} |x - y| \end{aligned}$$
   The last line holds, because we do not remove more than $2|x - y|$ such that we cannot remove to much.

3. g besitzt keinen Fixpunkt in M
   Beweis durch Widerspruch: Sei $x^* \in M$ Fixpunkt von g. Dann gilt
   $$\begin{aligned} g(x^*) = x^* &= x^* + \frac{1}{1+x^*} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{1+x^*} \end{aligned}$$
   Das ist aber ein Widerspruch, da es keine Zahl x gibt, für die $\frac{1}{1+x} = 0$ gilt. □

Dies ist kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz, da es sich bei g nicht um eine Kontraktion handelt: Da $\frac{1}{x+1} \overset{x\to\infty}{\to} 0$ und damit

$$|g(x) - g(y)| = |\underbrace{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}}_{\overset{x,y\to\infty}{\to} 0} + x - y|$$

Für jedes feste $\alpha \in [0, 1)$ ist $|g(x) - g(y)| \to |x - y| > \alpha|x - y|$, für x, y groß genug.

Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a)

Zu zeigen: Es existiert ein eindeutiger Fixpunkt von F in $D := \{x \in \mathbb{R}^2 |\, |x|_\infty \leq 1\}$.

Beweis: (1) F ist kontraktion.
(i) $F(D) \subseteq D$
Sei $x \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|F(x)|_\infty &= \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right|_\infty \\ &= \max\{\underbrace{|\frac{1}{3}\overbrace{x_2^2}^{\leq 1} + \frac{1}{8}|}_{\leq 1}, \quad \underbrace{|\frac{1}{4}\overbrace{x_1^2}^{\leq 1} - \frac{1}{6}|}_{\leq 1}\} \\ &\Rightarrow x \in D\end{aligned}$$

(i) $\exists \lambda \in [0,1) \forall x, y \in D : |F(x) - F(y)|_\infty < \lambda\, |x - y|_\infty$.
Mit $\lambda = \frac{1}{3}$ gilt die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)|_\infty &= \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right|_\infty \\ &= \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_2^2 - y_2^2) \\ \frac{1}{4}(x_1^2 - y_1^2) \end{pmatrix}\right|_\infty \leq \frac{1}{3}\,|x - y|_\infty\end{aligned}$$

(2) Da der $\mathbb{R}^2$ eine Banachraum und F eine Kontraktion auf D ist, gilt nach dem Banachschen Fixpunktsatz, dass ein eindeutiger Fixpunkt in D existiert. $\square$

b)

Listing 1 zeigt die Matlab-Funktion `myfixpoint`, die bei Eingabe von
(1) `f`: der zu betrachtenden Funktion f
(2) `lambda`: der Lipschitzkonstanten λ von f
(3) `start`: einem Startpunkt der Iteration, und (4) `error`: dem Fehler, bei dem die Iteration abgerochen werden soll
näherungsweise den Fixpunkt von f berechnet und als `x` zurückgibt.

Listing 1: Funktion zur näherungsweisen Bestimmung eines Fixpunkts

```
function [x] = myfixpoint (f, lambda, start, error)
%% Fixpunktiteration fuer
%% Funktion f mit Lipschitzkonstante lambda
%% vom Startwert start und Abbruchfehler error.

%% Initialisierung der ersten beiden Folgenelementee
lastx = start;
x = f(start);

%% Iteration  mit Abbruchbedingung der a posteori-Abschaetzung
while lambda / (1 - lambda) * norm(lastx - x, inf) > error
    lastx = x;
    x = f(x);
end;
```

Wie in Listing 2 zu sehen ist, wurde mit Hilfe dieser Funktion der Fixpunkt der Funktion F bis auf einen Fehler von 10^{-8} auf $x_{fix} = (0.1338, -0,1622)$ bestimmt.

Listing 2: Testaufruf der Funktion myfixpoint

```
>> f = @(x) [1/3*x(2)^2 + 1/8, 1/4*x(1)^2 - 1/6]
>> myfixpoint(f,1/3,[1,1],10e-8)

ans =

    0.1338    -0.1622
```

Aufgabe 3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare konvexe Funktion mit den Eigenschaften

$$f(a) > 0 \text{ und } f(b) > 0$$
$$f'(x) > 0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ für } a \leq x \leq b.$$

Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren mit $x_0 = b$ gegen die einzige Nullstelle konvergiert.

Lösung:

Die Nullstelle existiert nach dem Zwischenwertsatz, da f stetig ist und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Diese Nullstelle ist eindeutig, da die Funktion streng monoton wächst und die Funktion stetig ist.

Wir zeigen nun, dass $\forall n \in \mathbb{N} : x^* \leq x_n$.

I.A. $n = 0$
$x^* = 0 < f(b)$, da $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ muss $x^* < b = x_0$.

I.S. $n \rightsquigarrow n + 1$

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &\overset{I.V.}{\geq} x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &\overset{(*)}{\geq} x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x_n)} \\ &= x^* - 0 \end{aligned}$$

Nun gilt $(*)$, da nach I.V. $x_n > x_*$ und da f streng monoton steigt wird der Term dadurch nur kleiner.
Nun können wir folgern, dass x_n monoton fällt.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &< x_n \end{aligned}$$

da $f(x_n) > 0$ wie gezeigt und $f'(x_n) > 0$ nach Vorraussetzung gilt. $\square$