Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ soll nach der Methode von Lagrange interpoliert werden.

(i) Als quadratisches Polynom:

Suche Knotenbasis $\mathfrak{P}$ des P_2 mit $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$.
Es gilt:

$$\mathfrak{p}_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Stützstellen sind $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, also gilt für die Basis $\mathfrak{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_0(x) = L_0(x) &= \prod_{i=1}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \\
&= \frac{x - 0}{(-1) - 0} \cdot \frac{x - 1}{(-1) - 1} = -x \cdot \frac{x - 1}{-2} = \frac{1}{2}(x^2 - x) \\
\mathfrak{p}_1(x) = L_1(x) &= \prod_{i=0, i\neq 1}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} = (x + 1) \cdot -(x - 1) = -x^2 + 1 \\
\mathfrak{p}_2(x) = L_2(x) &= \prod_{i=0}^{1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{x + 1}{2} \cdot x = \frac{1}{2}(x^2 + x)
\end{aligned}$$

Suche nun das Polynom $p \in P_2$:
Das Polynom p wird durch $p = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\mathfrak{p}_k(x)$ bestimmt, also gilt:

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\mathfrak{p}_k(x) \\
&= f(-1) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - x) + f(0) \cdot (-x^2 + 1) + f(1) \cdot \frac{1}{2}(x^2 + x) \\
&= \frac{1}{4}(x^2 - x) + (-x^2 + 1) + \frac{1}{4}(x^2 + x) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + 1
\end{aligned}$$

(ii) Als kubisches Polynom mit zusätzlicher Stelle $x_3 = \frac{1}{2}$.

Suche Knotenbasis $\mathfrak{Q}$ des P_3 mit $\mathfrak{Q} = \{\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3\}$.

$\mathfrak{P}$ wie oben, zusätzliche Stützstelle $x_3 = 1/2$, also gilt für die Basis $\mathfrak{Q}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_0(x) &= \mathfrak{p}_0 \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x) \cdot \frac{x - 1/2}{-3/2} = \frac{1}{6}(-2x^3 + 3x^2 - x) \\
\mathfrak{q}_1(x) &= \mathfrak{p}_1 \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \\
&= (-x^2 + 1) \cdot \frac{x - 1/2}{-1/2} = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \\
\mathfrak{q}_2(x) &= \mathfrak{p}_2 \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + x) \cdot \frac{x - 1/2}{1/2} = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
\mathfrak{q}_3(x) &= \prod_{i=0}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \\
&= \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x - (-1)}{1/2 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{1/2 - 0} \cdot \frac{x - 1}{1/2 - 1} = \frac{8}{3}(x - x^3)
\end{aligned}$$

Suche nun das Polynom $p' \in P_3$:
Das Polynom p' wird durch $p' = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\mathfrak{q}_k(x)$ bestimmt, also gilt:

$$\begin{aligned}
p' &= \sum_{k=0}^{3} f(x_k)\mathfrak{q}_k(x) \\
&= f(-1) \cdot \frac{1}{6}(-2x^3 + 3x^2 - x) + f(0) \cdot (2x^3 - x^2 - 2x + 1) \\
&\quad + f(1) \cdot (x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + f(1/2) \cdot \frac{8}{3}(x - x^3) \\
&= \frac{1}{12}(-2x^3 + 3x^2 - x) + (2x^3 - x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2}(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) + \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3}(x - x^3) \\
&= \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x + 1
\end{aligned}$$

Ausgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Vandermondematrix $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ mit $A_{ij} = x_{i-1}^{j-1}$ invertierbar ist und $p_f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1}x^i$ gilt. Bezeichnungen wie in der Aufgabenstellung.

Wie aus der Literatur zu entnehmen ist, gilt

$$det(A) = \prod_{n \geq k > j \geq 1} x_k - x_j$$

Sind also nun die x_i paarweise verschieden, so ist jedes $x_k - x_j \neq 0 \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar.

Die Vandermonde-Matrix stellt das LGS für die Monomkoeffizienten dar, also gilt die Identität nach Konstruktion.

b) Schreiben Sie ein matlab-Programm `monomialcoefficients`, welches den Koeffizientenvektor p bzgl. der Monombasis einer interpolierten Funktion f an den Stellen x_i berechnet. Schreiben Sie ein matlab-Programm `monomialinterpolation`, welches ein Polynom p an der Stelle x auswertet.

(i) `monomialcoefficients`:

```
function [p] = monomialcoefficients(xi, f)
% xi bezeichnet den Stuetzstellenvektor
% f bezeichnet die zu interpolierende Funktion

% Welchen Grad wird das Polynom haben?
% Grad ist size(xi,2) - 1, also haben
% wir size(xi,2) Stuetzstellen
grad = size(xi,2);

% Berechne Lagrange-Polynome L_k(x),
% fuer jedes 1 <= k <= grad
for k = 1:grad,
    % temp enthaelt das neutrale Element
    % der Polynommultiplikation
    %
    temp = [1];

    % Konstruiere Vektor der Indizes,
    % ueber die das Produkt der Monome
    % berechnet wird. Hier wird jeder
    % Term mit i != k ausgewaehlt.
    range = 1:grad;
    indices = ones(1,grad);
    indices(k) = 0;
    % Multipliziere Polynome
    for i = range(logical(indices)),
      temp = conv(temp, [1/(xi(k)-xi(i)),
                  -xi(i)/(xi(k)-xi(i))]);
    end
    % Speichere k-tes Lagrange-Polynom
    L(k,:) = temp;
end

% Nun sind alle Lagrange-Polynome
% berechnet.
% Erstelle Matrix mit Funktionswerten
% von f auf der Diagonalen.
fks = eye(grad);
for i = 1:grad,
    fks(i,i) = f(xi(i));
end
% Multipliziere Funktionswert von f
% auf die jeweiligen Polynome.
L = fks * L;
% Bilde die zeilenweise Summe
% der Polynome.
p = L' * ones(grad,1);
p = p';
% p enthaelt nun die Koeffizienten
% der interpolierten Funktion
```

(ii) `monomialinterpolation`:

```
function [y] = monomialinterpolation(x, p)
% x bezeichnet die Stelle , an der der das Polynom
% mit dem Koeffizientenvektor p ausgewertet
% werden soll.

% Grad des Polynoms p ist size(p,2)-1, also
% muessen wir size(p,2) viele Monome verrechnen.
grad = size(p,2);

% Zwischenergebnis in temp abgelegt ,
% anfangs neutrales Element der Addition
temp = 0;

% Fuer jeden Exponenten zwischen grad-1 und 0
% Monom-Ergebnisse aufaddieren
for i = 1:grad,
    temp = temp + p(i)*x^(grad-i)
end

% Ergebnis steht nun in y
y = temp
```

c) Berechnung des Fehlers wie auf dem Aufgabenblatt beschrieben.

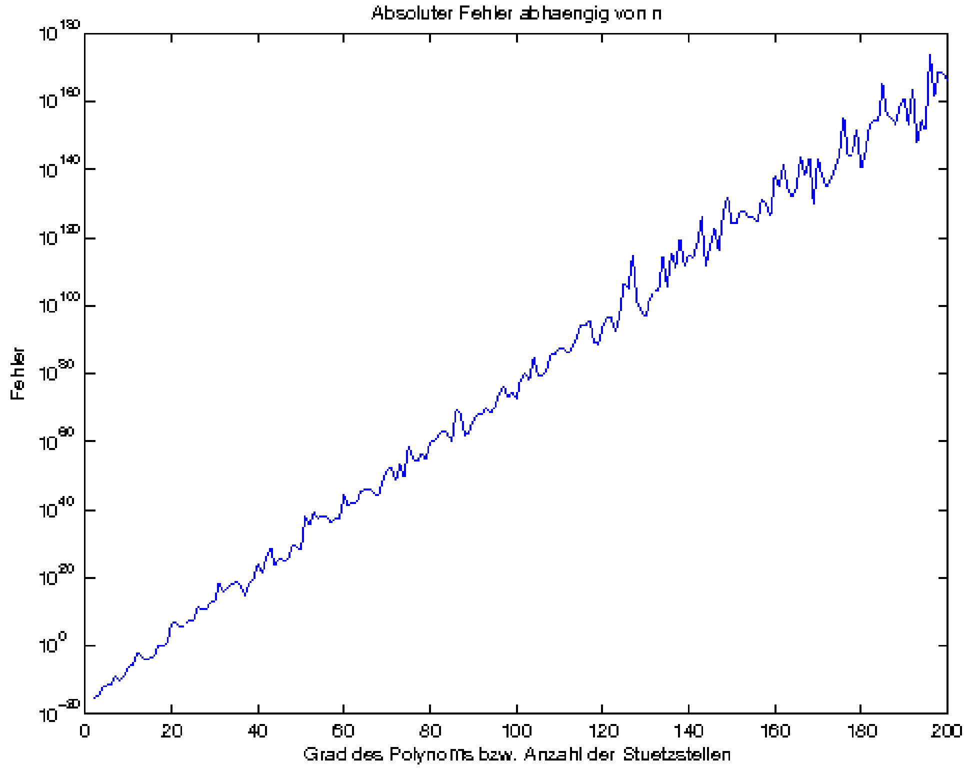
Wir haben den Fehler mittels folgendem Code ausgerechnet und geplottet:

```
for n = 1:200,
    % Das sind die korrekten Koeffizienten
    coeff = ones(1,n);
    % Polynomfunktion f
    f= @(x) polyval(coeff,x);
    % Zufaellige Stuetzstellen
    xi = rand(1,n);
    p = monomialcoefficients(xi,f);
    % Fehler berechnen
    fehler(n) = norm(coeff - p,'inf');
end

h = semilogy(fehler);
title('Absoluter␣Fehler␣der␣Interpolation␣in␣Abhaengigkeit␣
   von␣n');
xlabel('Grad␣des␣Polynoms␣n,␣bzw.␣Anzahl␣der␣Stuetzstellen'
   );
ylabel('Absoluter␣Fehler');
saveas(h,'plotfehler.png');
```

Dabei fällt uns auf, dass das Verfahren einen extrem großen Fehler produziert. Für große n ist der absolute Fehler über 10^{100}. Im Folgenden ist der absolute Fehler über n geplottet:

Die zugeörigen Vandermonde-Matrizen sind beliebig schlecht konditioniert, in matlab als Ïnfinity"berechnet.

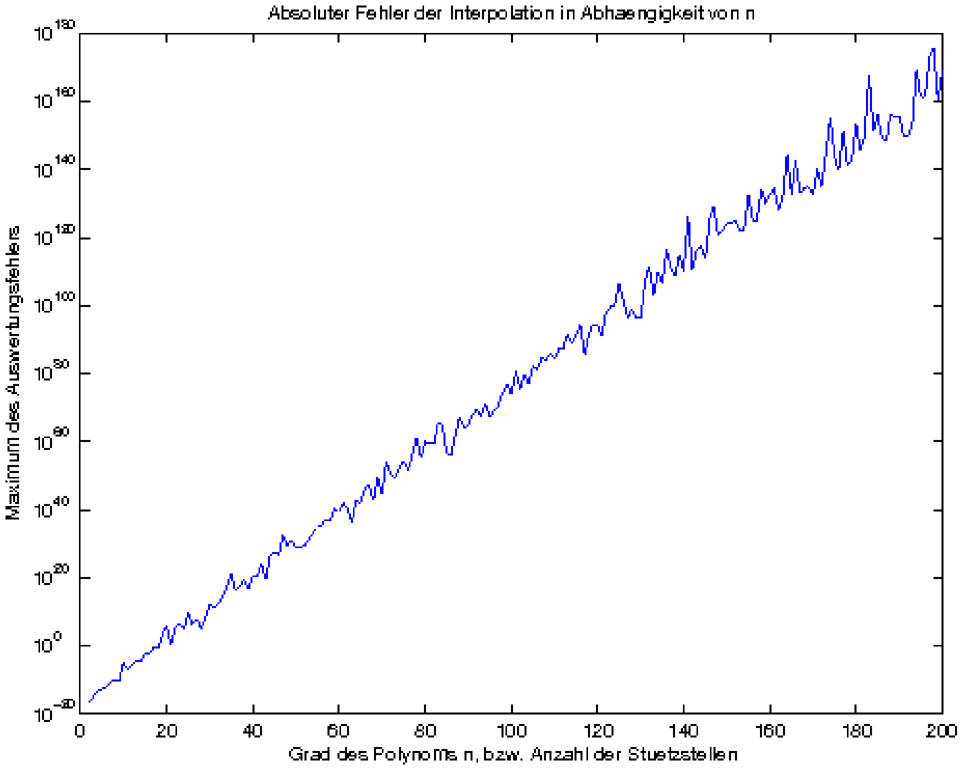
Abbildung 1: Plot aus Aufgabe 2c



d) Test an sin wie auf dem Blatt.

```
for n = 1:200,
    f= @sin;
    % Zufaellige Stuetzstellen
    xi = pi*rand(1,n);
    p = monomialcoefficients(xi,f);
    % Fehler berechnen
    for i = 1:n,
        val(i) = abs(polyval(p,xi(i)) - f(xi(i)));
    end
    fehler(n) = max(val);
end

h = semilogy(fehler);
title('Absoluter␣Fehler␣der␣Interpolation␣in␣Abhaengigkeit␣
   von␣n');
xlabel('Grad␣des␣Polynoms␣n,␣bzw.␣Anzahl␣der␣Stuetzstellen'
   );
ylabel('Maximum␣des␣Auswertungsfehlers');
saveas(h,'plotsinfehler.png');
```

Abbildung 2: Plot des Fehlers der Funktionsauswertung

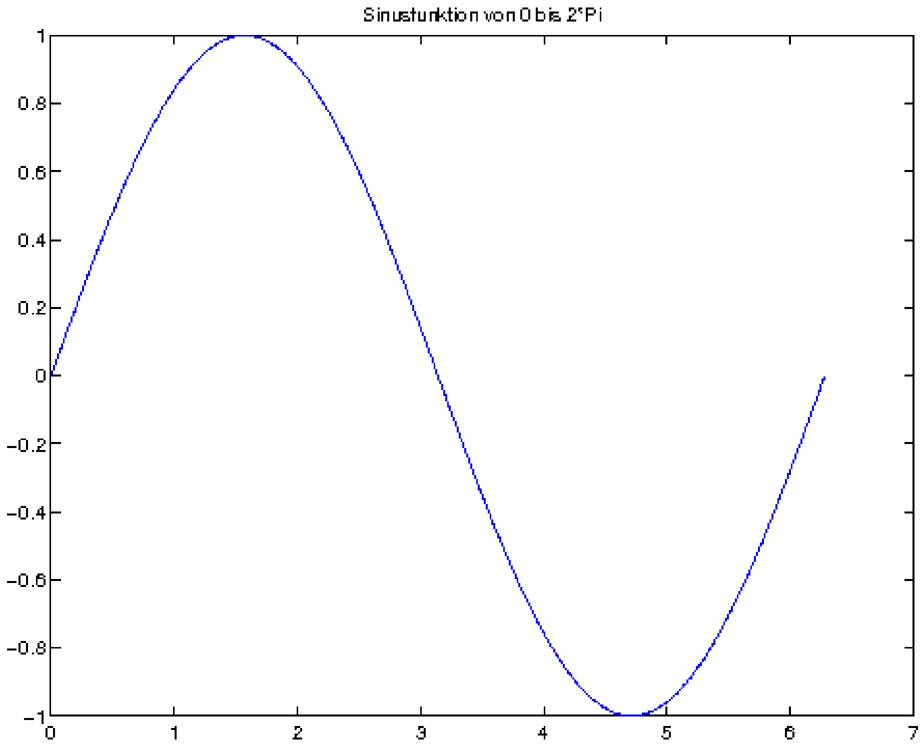


Mit diesem Code wird Sinus und seine Interpolationen geplottet:

```
x = 0:0.01:2*pi;
y = sin(x);
h = plot(x,y);

title('Sinusfunktion von 0 bis 2*Pi');
saveas(h,'plotsin.png');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Nun mit Interpolationsfunktionen:

f= @sin;

% Zufaellige Stuetzstellen
% 10 Stueck
xi10 = pi*rand(1,10);
p10 = monomialcoefficients(xi10,f);
% 20 Stueck
xi20 = pi*rand(1,20);
p20 = monomialcoefficients(xi20,f);
% 40 Stueck
xi40 = pi*rand(1,40);
p40 = monomialcoefficients(xi40,f);
% 80 Stueck
xi80 = pi*rand(1,80);
p80 = monomialcoefficients(xi80,f);

% Auswerten
x = 0:0.01:2*pi;
y10 = polyval(p10,x);
y20 = polyval(p20,x);
y40 = polyval(p40,x);
```

```
y80 = polyval(p80,x);

% Plotten
h = plot(x,y10);
title('Sinusfunktions-Interpolation␣von␣0␣bis␣2*Pi␣mit␣n␣=␣
    10');
saveas(h,'plotsininterpol10.png');

h = plot(x,y20,x,y40,x,y80);
title('Sinusfunktions-Interpolation␣von␣0␣bis␣2*Pi␣mit␣n␣=␣
    20,40,80');
saveas(h,'plotsininterpol20undmehr.png');
```

Abbildung 3: Plot der Sinusfunktion



Die Sinus-Interpolationen mit 20, 40 und 80 Stützstellen sind sehr ungenau und wachsen extrem schnell, werden daher nicht geplottet.

Abbildung 4: Plot der Interpolation des Sinus mit 10 Stützstellen