Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : not known

Aufgabe 1: Spezielle gleichmäßige Funktionen

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder stetig* mit Exponent $\alpha \in (0,1]$ wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in A$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}$$

gilt. Ist $\alpha = 1$ so nennt man f *Lipschitzstetig*

a) Sei $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = \sqrt{z}$. Zeigen Sie dass f Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

Lösung:

Sei $x, y \in [a, b]$, dann gilt

$$\begin{array}{rrcl} & |\sqrt{x} - \sqrt{y}| & \leq & |\sqrt{x}| - |\sqrt{y}| \leq C \cdot \sqrt{|x-y|} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 & \leq & C^2 \cdot |x-y| \\ \Leftrightarrow & x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y & \leq & C^2 \cdot |x-y| \leq C^2 \cdot (|x| + |-y|) \\ \Leftrightarrow & -2\sqrt{x}\sqrt{y} & \leq & (C^2 - 1)(x+y), \end{array}$$

Für $C > 1$, da $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ beide größer Null sind, ist die linke Seite der Gleichung kleiner Null. Da wir rechts $x + y$ rechnen und beide größer null sind, gilt $x + y > 0$. Wenn nun $C > 1$ belibt die rechte Seite positiv. Für ein $C > 1$ ist die Gleichung erfüllt und damit ist f Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$

b) Sei $A = \mathbb{R}$ und $f = \arctan$ eingeschränkt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Zeigen Sie, dass f Lipschitzstetig ist.

Lösung:

Es seien $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Da $f = \arctan$ stetig auf Einschränkung, folgt aus dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \exists \mu \in [x,y] :\ |f(x) - f(y)| &= f'(\mu)\,|x-y| \\ &= \frac{1}{\mu^2 + 1}\,|x-y| \leq 1 \cdot |x-y| \end{aligned}$$

Also ist $f = \arctan$ eingeschränkt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Lipschitzstetig mit Konstante $C = 1$.

c) Sei $f : A \to \mathbb{R}$ Hölderstetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ Hölderstetig
$\Rightarrow \exists \alpha \in (0,1] \exists C > 0 \forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}$
Es sei $\varepsilon > 0$ und $|x-y| < \delta$ für ein $\delta > 0$ $\forall x, y \in A$.

Z.z. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
Also gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha} < C\delta^{\alpha} = C\left(\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \varepsilon$$

Aufgabe 2 : Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Finden Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die folgenden Ausdrücke.

i) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t\; dt$.

Lösung:

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Ableitung die Umkehrung des Integrals. Die Grenzen werden nach Substitutionsmethode abgeleitet und als Faktor übernommen.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_0^{x^2} \sin t\; dt\right)' \\ &= (x^2)' \cdot \sin x^2 \\ &= 2x \cdot \sin x^2 \end{aligned}$$

ii) $F(x) = \exp\left(\int_0^x p(t)\; dt\right)$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

Lösung:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\exp\left(\int_0^x p(t)\; dt\right)\right)' \\ &\overset{\text{Subst.}}{=} \left(\int_0^x p(t)\; dt\right)' \cdot \exp\left(\int_0^x p(t)\; dt\right) \\ &= p(x) \cdot F(x) \end{aligned}$$

iii) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und f und g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Setzten Sie dann

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\; dt$$

und berechnen die Ableitung von F.

Lösung:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt\right)' \\ &\overset{\text{Haupt.}}{=} g'(x)h(g(x)) - f'(x)h(f(x)) \end{aligned}$$

Die Ableitung existiert, da g und f differenzierbar sind. Da h stetig ist, kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet werden.

Aufgabe 3 : Mittelwertsatz der Integralrechnung

i) Es sei f eine auf dem Interval $[a, b]$ integrierbare Funktion mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\mu.$$

Lösung:
Da $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ gilt die Abschätzung:

$$(b - a) \cdot m = \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx = (b - a) \cdot M$$

$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$ sodass

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\mu$$

ii) Es sei f stetig auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)f(\xi)$$

für ein $\xi \in [a, b]$. Begründen Sie anhand eins Gegenbeispiels, dass die Stetigkeit von f notwendig ist.

Lösung:

Es seien m, M wie aus Aufgabe 3 a). Aus Aufgabe 3 a) wissen wir, dass ein $\mu \in [m, M]$ existiert, mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\mu$$

Da $\mu \in [m, M] = [f(\alpha), f(\beta)]$ für ein $\alpha, \beta \in [a, b]$ und f auf $[a, b]$ stetig, folgt aus dem Zwischenwertsatz: $f(\xi) = \mu$ für ein $\xi \in [a, b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = (b - a)f(\xi)$$

HIER FEHLT GEGENBEISPIEL BZGL. STETIGKEIT

iii) Sei nun f stetig auf $[a, b]$, und g integrierbar und positiv (bzw. negativ) auf $[a, b]$. Zeigen Sie dass

$$\int_a^b g(x)f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

für ein $\xi \in [a, b]$ gilt. Man nennt dies den Mittelwertsatz der Intergralrechnung . Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vorzeichenbedingung an g notwendig ist.

Aufgabe 4 : Positivitätseigenschaft des Integrals

i) Sei f integrierbar auf $[a,b]$ und $f \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Lösung:

Sei $P = a = x_0 < ... < x_n = b$ Partitionsfolge über n von $[a,b]$, sodass U_n und O_n Unter- und Obersummen konvergieren. Diese Partitonsfolge muss existieren, da die Funktion integrierbar ist (nach der bisher angenommenen definition von integrierbar). Dann gilt für alle $S_i = \sup\{f(y) \mid x_i < y < x_{i+1}\}$, $S_i \geq 0$, da jeder Funktionswert des Supremums größer gleich 0.

Nun ist $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} S_i \geq 0$, da jeder Summand, wie gezeigt größer oder gleich 0 ist.

ii) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a,b],\ f(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in [a,b], \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Lösung

tbd

iii) Sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und f stetig mit $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Lösung:

tbd

iv) Sei f stetig auf $[a,b]$. Es gelte

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

für alle stetigen Funktionen g auf $[a,b]$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$