Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

Aufgabe 2

```
function [ x, t ] = theta_lin(theta, lambda,f, x0, T, tau )
%theta_lin approximiert das AWP
%AWP x' = lambda*x+f, x(0) = x0 mit einem
%aequidistanten Gitter 0 = t0 < t1 < ... < tn = T
%mit Hilfe des Theta-Verfahrens fuer Eingabe theta.

x(1) = x0;
t = 0:tau:T; %% Gitter mit Abstand tau

for k = 1:size(t,2)-1,
    x(k+1) = ((x(k)*lambda*tau)*(1 - theta) + x(k) + (f((k-1)*
        tau)*tau)*(1+theta)+ theta*tau*f(k*tau))/(1-tau*lambda*
        theta);
% f(k*tau) ist f(t_k+1)...
end
end
```

Funzt gut! :D

a) Sei nun $f(t) = 4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t), \lambda = -1, x_0 = 1$ und $T = 2$ und die Schrittweite $\tau = T/100 = 0.02$.

(1) Exakte Lösung des AWP:

$$x(t) \;=\; e^{-t} + \int_0^t f(x)e^{-t+x}\,dx = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t f(x)e^{x}\,dx$$

Das Integral lösen wir nun durch partielle Integration, dazu bilden wir die ersten beiden Ableitungen von f, die wir in der partiellen Integration benutzen werden. Dann gilt für die erste Ableitung f':

$$\begin{aligned}
f'(t) &= (4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t))' \\
&= (4\pi\cos(4\pi t))' - (\lambda\sin(4\pi t))' \\
&= (-16\pi^2\sin(4\pi t)) - (4\pi\lambda\cos(4\pi t)) \\
&= -16\pi^2\sin(4\pi t) - 4\pi\lambda\cos(4\pi t)
\end{aligned}$$

Und damit für die zweite Ableitung f'':

$$\begin{aligned}
f''(t) &= (-16\pi^2\sin(4\pi t) - 4\pi\lambda\cos(4\pi t))' \\
&= (-16\pi^2\sin(4\pi t))' - (4\pi\lambda\cos(4\pi t))' \\
&= (-16\cdot 4\pi^3\cos(4\pi t)) - (-16\pi^2\lambda\sin(4\pi t)) \\
&= -16\cdot 4\pi^3\cos(4\pi t) + 16\pi^2\lambda\sin(4\pi t) \\
&= -16\pi^2\,(4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t)) \\
&= -16\pi^2 f(t)
\end{aligned}$$

Nun können wir partiell integrieren:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f(x)e^x\,dx &= [e^x\cdot f(x)]_0^t - \int_0^t e^x f'(x)\,dx \\
&= [e^x\cdot f(x)]_0^t - \left([e^x\cdot f'(x)]_0^t - \int_0^t e^x f''(x)\,dx\right) \\
&= [e^x\cdot f(x)]_0^t - [e^x\cdot f'(x)]_0^t + \int_0^t e^x f''(x)\,dx \\
&= [e^x\cdot f(x)]_0^t - [e^x\cdot f'(x)]_0^t + \int_0^t e^x - 16\pi^2 f(x)\,dx \\
&= [e^x\cdot f(x)]_0^t - [e^x\cdot f'(x)]_0^t - 16\pi^2\int_0^t e^x f(x)\,dx \\
\Rightarrow 17\pi^2\int_0^t f(x)e^x\,dx &= [e^x\cdot f(x)]_0^t - [e^x\cdot f'(x)]_0^t \\
&= (e^t\cdot f(t) - e^0\cdot f(0)) - (e^t\cdot f'(t) - e^0\cdot f'(0)) \\
&= e^t\cdot(4\pi\cos(4\pi t) - \lambda\sin(4\pi t)) - 4\pi \\
&- e^t\cdot(-16\pi^2\sin(4\pi t) - 4\pi\lambda\cos(4\pi t)) - 4\pi\lambda \\
&= e^t 4\pi\cos(4\pi t) - e^t\lambda\sin(4\pi t) - 4\pi \\
&+ e^t 16\pi^2\sin(4\pi t) + e^t 4\pi\lambda\cos(4\pi t) - 4\pi\lambda \\
&\overset{\lambda=-1}{=} e^t 4\pi\cos(4\pi t) + e^t\sin(4\pi t) - 4\pi \\
&+ e^t 16\pi^2\sin(4\pi t) - e^t 4\pi\cos(4\pi t) + 4\pi \\
&= e^t\sin(4\pi t) + e^t 16\pi^2\sin(4\pi t)
\end{aligned}
$$

irgendwo kleine lücke...glaub ich. soll rauskommen: $x(t) = e^{-t} + \sin(4\pi t)$ also integral $= e^t * sin(4pit)$ TODO!

(2) Approximative Lösung des AWP mit $\Theta = 0, 0.5, 1$.
tda

b)