

Aufgabenblatt 4

zur Analysis II

10. *Berechnung von Taylorpolynomen* (4+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grade n um den Punkt $x_0 = 0$ von

$$(i) \ f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad (ii) \ g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (iii) \ h(x) = xe^x.$$

11. *Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen* (2+2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionenfolgen den punktweisen Limes

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{usw.}$$

(falls er existiert), und prüfen Sie, welche der Folgen gleichmäßig konvergiert.

(i) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ auf $[-1, 1]$.

(ii) $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ auf $[0, \infty)$.

(iii) $h_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$ auf $[a, \infty)$ mit reellem $a > 0$.

(iv) $k_n(x) = \arctan(nx)$ auf $(-\infty, \infty)$.

12. *Gleichmäßige Konvergenz von Reihen* (2+2+4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha > 1$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.