Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

29.05.2012
Abgabe: 05.06.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 6

zur Analysis II

16. *Die Ungleichungen von Hölder und Young* *(4+4 Punkte)*
Seien reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_n$ gegeben.

   (i) Zeigen Sie, dass für
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1,$$
   und für alle $x, y \geq 0$ die *Youngsche Ungleichung*
$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\, x + \frac{1}{q}\, y$$
   richtig ist.

   Hinweis: Mit $z := \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, ist $f(z) := \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\, z - z^{\frac{1}{q}} \geq 0$ für alle $z > 0$ zu zeigen. Sie dürfen gerne differenzieren.

   (ii) Zeigen Sie nun unter Verwendung der Youngschen Ungleichung die *Höldersche Ungleichung*
$$\Big| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$
   Für welche p und q gewinnen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung?

17. *Durchschnitt und Vereinigung von Mengen* *(4+4 Punkte)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

   (i) $\overline{M} = \bigcap \big\{ A \subset \mathbb{R}^n \,:\, A \text{ abgeschlossen}, M \subset A \big\}$,

   (ii) $\mathring{M} = \bigcup \big\{ \Omega \subset \mathbb{R}^n \,:\, \Omega \text{ offen}, \Omega \subset M \big\}$.

18. *Durchmesser und Abstand von Mengen* *(2+4+2 Punkte)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Man definiert
$$\operatorname{diam} M := \sup \big\{ |x - y| \,:\, x, y \in M \big\} .$$
   (i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} \overline{M}$.

Für $x \in M$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den *Abstand von x zu M* durch
$$\operatorname{dist}(x, M) := \inf \big\{ |x - y| \,:\, y \in M \big\} .$$
   (ii) Zeigen Sie
$$\begin{aligned} x \in \overline{M} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{dist}(x, M) = 0, \\ x \in \mathring{M} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{dist}(x, M^c) > 0, \\ x \text{ Randpunkt von } M \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M^c) = 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

(iii) Für $\varepsilon > 0$ definiere die *ε-Umgebung einer Menge M* durch

$$M_\varepsilon := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \operatorname{dist}(x, M) < \varepsilon\right\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge M_ε offen ist, und bestimmen Sie

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon \,.$$

19. *Umfang von Mengen* *(2+2+4 Punkte)*

(i) Man zeige, dass es für jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, die aus mindestens zwei Punkten besteht, genau eine Kugel $K = \overline{B_R(a)}$ mit kleinstmöglichem Radius $R > 0$ gibt, die M enthält. Man nennt diese Kugel K die *Umkugel von M* und den Radius R den *Umkugelradius von M*.

(ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ symmetrisch um den Ursprung, dass heißt

$$x \in M \quad \Longleftrightarrow \quad -x \in M.$$

Zeigen Sie, dass $M \subset \overline{B_{(\operatorname{diam} M)/2}(0)}\,$.

(iii) Man zeige, dass zwischen dem Umkugelradius R und dem Durchmesser $\delta := \operatorname{diam} M$ einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit mindestens zwei Elementen die Beziehung

$$R \leq \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

besteht. Geben Sie ein Beispiel für eine dreipunktige Menge M, für die Gleichheit

$$R = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

richtig ist.