Lineare Algebra II: Übung 11

Tutorin: Elena, Di 14-16

June 28, 2011

Aufgabe 1

Gesucht: Normalform der Quadrik $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + 4xz - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z + 5 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Also ist $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$f(x) = \tilde{x}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^t \tilde{x} + 5$

setze also $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, c := 5.$

(1) M symmetrisieren ✓

(2) Feststellen: $b \in ImM$?

Löse Lineares Gleichungssystem:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{III-2I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow b \notin ImM$

Also können hat f nach Translation die Form (eliminiere Konstante)

$f(x,y,z) = x^2 + 4xz - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z$

(3) Normalisiere mit quadratischer Ergänzung nach 5.32

$x^2 + 4xz - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z = \left(x^2 + 4xz + 4z^2\right) - 4z^2 - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z$

$= (x + 2z)^2 - 3z^2 - 3y^2 + 6yz + x + 2y - z$

Setze $x' = x + 2z', y' = y, z' = z$

$\Rightarrow (x+2z)^2 - 3z^2 - 3y^2 + 6yz + x + 2y - z = x'^2 - 3z'^2 - 3y'^2 + 6y'z' + x' - 3z' + 2y'$

$= x'^2 - 3\left(z'^2 - 2y'z' + y'^2\right) + 3y'^2 - 3y'^2 + x' - 3z' + 2y' = x'^2 - 3\left(z' - y'\right)^2 + x' - 3z' + 2y'$

Setze $x'' = x', y'' = y', z'' = z' - y''$

$\Rightarrow x'^2 - 3\left(z' - y'\right)^2 + x' - 3z' + 2y' = x''^2 - 3z''^2 + x'' - 3\left(z'' - y''\right) + 2y''$

$= x''^2 - 3z''^2 + x'' - 3z'' + 3y'' + 2y'' = x''^2 - 3z''^2 + x'' - 3z'' + 5y''$

Setze $x''' = x'', z''' = z'', y''' = x''' - 3z''' + 5y''$

$\Rightarrow x''^2 - 3z''^2 + x'' - 3z'' + 5y'' = x'''^2 - 3z'''^2 + y'''$

Setze $x'''' = x''', y'''' = y''', z'''' = \sqrt{3}z'''$

$\Rightarrow x''''^2 - z''''^2 + y''''$ ist Normalform.

(Die Form passt auch dazu, dass M einen pos. Eigenwert,
einen neg. Eigenwert, und $rg(M) = 2$ ist, sowie $b \notin ImM$.)

Aufgabe 2

Sei $s \in \mathbb{R}, F_s \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$F_s = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + (2s^2+1)y^2 + (2s^2+1)z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - \left(2s^2 - 3s + 1\right) = 0\right\}$$

$f(x) = \tilde{x}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2s^2+1 & -1 \\ 1 & -1 & 2s^2+1 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \tilde{x} - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$

setze also $M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2s^2+1 & -1 \\ 1 & -1 & 2s^2+1 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c := -\left(2s^2 - 3s + 1\right)$.

Es ist also M symmetrisch, und $b \in ImM$. Linearer Term ist bereits eliminiert. Normalisiere mit quadratischer Ergänzung nach 5.32

$x^2 + (2s^2+1)y^2 + (2s^2+1)z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
$= \left(x^2 - 2xy + y^2\right) - y^2 + (2s^2+1)y^2 + (2s^2+1)z^2 + 2xz - 2yz - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
$= (x-y)^2 + 2s^2y^2 + (2s^2+1)z^2 + 2xz - 2yz - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
Setze $x' = x - y', y' = y, z' = z$
$\Rightarrow (x-y)^2 + 2s^2y^2 + (2s^2+1)z^2 + 2xz - 2yz - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
$= x'^2 + 2s^2y'^2 + (2s^2+1)z'^2 + 2x'z' - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
$= \left(x'^2 + 2x'z' + z'^2\right) - z'^2 + 2s^2y'^2 + (2s^2+1)z'^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
$= (x'+z')^2 + 2s^2y'^2 + 2s^2z'^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
Setze $x'' = x' + z'', z'' = z', y'' = y'$
$\Rightarrow (x'+z')^2 + 2s^2y'^2 + 2s^2z'^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$
$= x''^2 + 2s^2y''^2 + 2s^2z''^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$

Fall 1: $s = 0$
$\Rightarrow x''^2 + 2s^2y''^2 + 2s^2z''^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right) = x''^2$ ist Normalform.

Fall 2: $s \neq 0$
Setze $x''' = x'', y''' = \sqrt{2s^2}y'', z''' = \sqrt{2s^2}z''$
$\Rightarrow x''^2 + 2s^2y''^2 + 2s^2z''^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right) = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right)$

Fall 2a: $s = 1 \vee s = \frac{1}{2}$
Da hier $2s^2 - 3s + 1 = 0$ hat f die Form:
$f(x,y,z) = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - 0$

Fall 2b: $s \neq n1 \wedge s \neq n2$
Nach normalisieren der Konstante hat f die Form:
$f(x,y,z) = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - 1$

Aufgabe 3

Sei b der Linearterm und c die Konstante einer Quadrik.

Fall	Normalform	Name	Skizze
(1) mit $b \neq 0$			
(1a) mit $c \neq 0$			
	$-x^2 - y^2 = 1$	$\emptyset$	
(1b) mit $c = 0$			
	$x^2 + y^2 - z = 0$	ellipt. Paraboloid	
	$x^2 - y^2 - z = 0$	hyperb. Paraboloid	
	$x^2 - y = 0$	parabol. Zylinder	
(2) mit $b = 0$			
(2a) mit $c \neq 0$			
	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	Ellipsoid	
	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	$\emptyset$	
	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid	
	$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid	

	$x^2 + y^2 = 1$	ellipt. Zylinder	
	$-x^2 + y^2 = 1$	hyperb. Zylinder	
	$x^2 = 1$	zwei Ebenen	
	$-x^2 = 1$	$\emptyset$	
(2b) mit $c = 0$			
	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Ein Punkt	
	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	elliptischer Kegel	
	$x^2 + y^2 = 0$	Gerade	
	$x^2 - y^2 = 0$	Ebenenschnitt	

	$x^2 = 0$	Ebene	

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-VR mit Basis $\{1, i\}$.

(a)

Basis von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i\}$, Basis von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ ist $\{1 \otimes 1, i \otimes 1\}$

(b)

Basis von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ ist $\{1 \otimes 1\}$

(c)

Sei V ein K-VR mit Basis $\{v_i\} \subset V$, sei 1 das neutrale Element der Multiplikation in K.

Dann ist $\{1 \otimes v_i\}$ eine Basis von $K \otimes_K V$ mit $\dim K \otimes_K V = \dim V$

Dann ex. die bijektive Funktion $\rho : K \otimes_K V \to V$, $1 \otimes v_i \mapsto v_i$

$\Rightarrow K \otimes_K V \simeq V$

Dann ist $\{v_i \otimes 1\}$ eine Basis von $V \otimes_K K$ mit $\dim V \otimes_K K = \dim V$

Dann ex. die bijektive Funktion $\rho : V \otimes_K K \to V$, $v_i \otimes 1 \mapsto v_i$

$\Rightarrow V \otimes_K K \simeq V$