Max Wisniewski

Tutorin : Jan (Do 12-14)

4. Hausdorff-Maß und äußeres Maß

Seien, wie in der Vorlesung definiert, $\mathcal{H}_\delta^m$ das approximative m-dimensionale Hausdorff-Maß (für ein $\delta > 0$) und $\mathcal{H}^m$ das m-dimensionale Hausdroff-Maß auf einem metrischen Raum S.

(i)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}_\delta^m$ ein äußeres Maß ist.

Beweis:

Wir nehmen an, dass wir über einer Grundmenge S messen.

a) z.z. $\mathcal{H}_\delta^m(\emptyset) = 0$.
Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen, mit $B_i = \emptyset \forall i \in \mathbb{N}$.
Nun ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam}(B_i)}{2} \right)^m = 0.$$

Das Hausdorff-Maß ist als infimum der Überdeckungen definiert, deren Mengen maximal Duchmesser δ haben. Kleiner als 0 kann es nicht werden und $\emptyset = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ es ist eine Überdeckung.

b) Sei $A \in S$ und $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ eine Familie von Menge, die A überdeckt.
z.z. $\mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m A_i$.

Sei $(B_j^i)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen, so dass $A_i \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j^i$, $\forall j \in \mathbb{N} \ : \ \text{diam}(B_j^i) < \delta$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam} B_j^i}{2} \right)^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ (*).

Nun ist für A die doppelte Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j^i$ auch eine eine Überdeckung (da jede der Überdeckenden Mengen überdeckt wurde). Diese Mengen haben nun alle einen Durchmesser kleiner δ. Daher können wir diese in der Definition des approximativen Hausdorff-Maßes benutzten.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\delta^m &\overset{inf}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam} B_i}{2} \right)^m \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}_\delta^m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m(A_i) \right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Lassen wir nun unser ε gegen 0 laufen, so erhalten wir

$$(A)_\delta^m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m(A_i).$$

$\square$

(ii)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^m$ ein äußeres Maß ist.
Beweis:

a) z.z. $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$.
Wie gezeigt, ist $\mathcal{H}_\delta^m(\emptyset) = 0 \quad \forall \delta > 0$. Daher ist auch $\mathcal{H}^m(\emptyset) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^m(\emptyset) = 0$.

b) Sei $A \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ eine überdeckung von A.
z.z. $\mathcal{H}^m(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(A_i)$.

Da wir schon in *a)* gezeigt haben, dass es sich beim approximativen Hausdorff-Maß um ein Maß handelt, können wir unsere A_i für alle $\delta > 0$ so überdecken mit $(B_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$, dass $\mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m(A_i)$.

Aus Analysis I wissen, wir, dass sich im Grenzwert die Relation nicht umkehren kann (nur abschwächen).
Daher gilt $\mathcal{H}^m(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \lim\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^m(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta(A_i)$.

Wir können den Grenzwert in die Summe ziehen, da die einzelnen Summanden unabhängig von einander bezüglich δ sind.

Beweis:

$\square$

5. Hausdorff-Maß und Lebesque-Maß

Seien $\mathcal{L}$ das Lebesque-Maß und $\mathcal{H}_\delta^1$ das approximative Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $A \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{L}^1(A) = H_\delta^1(A) \qquad \text{für alle } \delta > 0$$

Beweis:

Um dies zu zeigen, beweise ich zunächst das folgende.

Behauptung 1. *Im $\mathbb{R}^1$ ist für einen Würfel $I \in \mathcal{K} = (a,b)$, sein Volumen $I = b - a$, das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1(I) = b - a$ und das approximierte Hausdorff-Maß $\mathcal{H}_\delta^1(I) = b - a$ für alle $\delta > 0$.*

Behauptung 2. *Sei $(a,b]$ ein Intervall. Dann ist ist $\mathcal{L}^1((a,b]) = \mathcal{L}^1((a,b))$. D.h. es ist egal, ob die Intervall geschlossen oder offen sind. (Ebenso $[a,b]$, $[a,b)$).*

Schlussfolgerung: Für das Lebesgue-Maß ist es egal, welche Intervalle wir benutzten.

Beweis 1.

Das Volumen eines Würfels gerade als $|(a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)| = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$ definiert. Nun muss für das Lebesque-Maß die Menge mit Würfeln übderdeckt werden. Sei also $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Überdeckung, mit $I_1 = I$, sonst $\emptyset$. Damit ist $\mathcal{L}^1(I) = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = |I_1| = b - a$.

Für das Hausdorff - Maß unterscheiden wir zunächst. Ist $b - a < \delta$ können wir es direkt mit dem Würfel überdecken. Ist δ zu klein wählen wir als die Überdeckung $B_i = (a, a + \frac{\delta}{b-a}], (a + \frac{\delta}{b-a}, a + 2\frac{\delta}{b-a}], ...(b - \frac{\delta}{b-a}, b), \emptyset, ...$ und die restlichen Mengen sind $\emptyset$. Wie man erkennt, ist nun $\mathcal{H}^m_\delta(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_1 \left(\frac{B_i}{2} \right) = b - a$, da $\omega_1 = 2$ ist.

□

Beweis 2

Sei $(a, b]$ das Intervall. Dann wird es durch (a, b) und $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ übderdeckt. Seien $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene Würfel, so dass $B_1 = (a, b)$, $B_2 = (b - \varepsilon, b - \varepsilon)$, $B_i = \emptyset$ $\forall i > 2$.
Nun ist $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = b - a + 2\varepsilon$. Lässt man nun ε gegen 0 laufen, erhält man nur noch $b - a$.
Es kann auch nicht weniger werden, da man sonst einen Wert nicht mehr erreicht.

□

Nun zeigen wir den Satz:
$\mathcal{L}^1(A) \geq \mathcal{H}^1_\delta(A)$.

Dies gilt trivialerweise. Sei $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine überdeckung mit Würfeln sodass $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq \mathcal{L}^1(A) + \varepsilon$, mit Seitenlängen, maximal δ. Dann ergibt sich, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_1 \frac{\text{diam} I_i}{2} \leq \mathcal{L}^1(a) + \varepsilon$. Lässt man ε nun gegen 0 laufen, drehen sich die relationen nicht um. Da nun das approximative Hausdorff-Maß als das Infimum aller Überdeckungen definiert ist, muss es kleiner gleich diesem sein.

$\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}^1_\delta(A)$.

Sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung für A, mit $\text{diam} B_i < \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wir können davon ausgehen, dass B_i nur aus Intervallen besteht. Nehmen wir an B_j für ein $j \in \mathbb{N}$ wäre kein Intervall, dann gäbe es eine Menge von Intervallen $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $B_j = \bigcup I_k$. Nehmen wir ferner an, sie sind sortiert. $I_1 = (a_1, b_1), ..., I^\infty = (a_\infty, b_\infty)$.
Dann ist
$\sum_{i=1}^{\infty} \omega_1 \frac{b_i - a_i}{2} \leq b_\infty - a_\infty$. Damit ist die Überdeckung für das Hausdorff-Maß aus Intervallen gebildet, da diese kleiner sind.

Da wir nun nur noch Intervalle betrachten müssen für unsere Überdeckung von A, können wir die selbe Überdeckung für das Lebesgue-Maß wählen (Dies ist nach 2 Möglich, da wir uns nicht um offene oder abgeschlossene Mengen kümmern müssen). Wie schon öfters gesehen, ist die Berechnungsformel der beiden im ein-dimensionalen gleich, falls die Überdeckung aus Würfeln mit Durchmesser kleiner als δ gebildet wird.

$\square$

6. Nicht-messbare Mengen

Man betrachte das Maß $\mathcal{H}^1_\delta$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > 0\}.$$

Zeigen Sie:
A ist nicht $\mathcal{H}^1_\delta$-messbar für beliebiges $\delta > 0$.