

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Lena Schlipf

Aufgabe 1

Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene, In der Vorlesung haben Sie einen Algorithmus kennengelernt, der ein engstes Paar von p in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt. Dabei haben wir angenommen, dass alle x -Koordinate in P verschieden sind. Zeigen Sie, wie man den Algorithmus anpassen kann, damit wir diese Annahme nicht mehr benötigen. Die Laufzeit soll immer noch $O(n \log n)$ betragen.

Lösung:

Das Problem an dieser Stelle ist, dass wir nach dem Algorithmus die Menge P in 2 Teilsparaten $R_L = \{p \in P \mid p_x < q_x\} \cup \{q\}$ und $R_R = \{p \in P \mid p_x > q_x\}$, wobei q der Median der x -Koordinaten ist. Nun würden wir aber alle Elemente, die die selbe x -Koordinate des Medians haben, nicht mit betrachten. Im schlimmsten Fall würden wir also alle Punkte paarweise betrachten müssen, weil in R_L nur q liegt und $R_R = \emptyset$ gilt, wenn alle Elemente die selbe x -Koordinate haben. Da innerhalb dieser Mengen kein Abstand existiert, muss $\delta = \infty$ gelten. Würden wir nur 10 Elemente paarweise vergleichen, würden wir den geringsten Abstand unter Umständen nicht finden.

Dieses Problem können wir lösen indem wir uns die Optimierung des Algorithmus aus der VL betrachten und uns ansehen, was bei gleichen Elementen passiert.

Wir haben die Punkte nach x -Koordinaten vorsortiert. Danach geben wir nur noch Zeiger für ein minimales Element und ein Zeiger für ein maximales Element weiter. Um den x Median zu finden müssen wir nun nur bei $\frac{\min + \max}{2}$ nachsehen und haben q . Nun teilen wir die Punktmenge in 2 gleichgroße Teile, indem wir als Zeiger $(\min, \frac{\min + \max}{2})$ und $(\frac{\min + \max}{2} + 1, \max)$ weiter geben. So haben wir nicht nur die kleinere und größeren in 2 Teile gespalten, sondern auch noch die gleichen. Hier geraten wir also nicht in die Verlegenheit einige Punkte nicht zu betrachten. Sonst bleibt der Algorithmus gleich.

Als Laufzeit ergibt sich exakt die selbe, da wir eigentlich nichts gemacht haben. Wir haben die Vorverarbeitungszeit $O(n \log n)$ und pro Schritt benötigen wir wieder $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$. Da wir beim Teilen nicht mehr tun müssen als vorher. Dies ergibt wieder eine Laufzeit von $O(n \log n)$

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Gittergraph mit n Zeilen und n Spalten. Formal heißt das:

$V = \{(i, j), (i', j') \mid |i - i'| + |j - j'| = 1\}$. Desweiteren sei jeder Knoten $v \in V$ mit einer Zahl $x_v \in \mathbb{R}$ beschriftet, so dass die x_v paarweise verschieden sind. Ein *lokales Minimum* von G ist ein Knoten, dessen Beschriftung kleiner ist als die Beschriftung seiner Nachbarn.

(a) Zeigen Sie, dass immer ein lokales Minimum existiert.

Lösung:

Der Graph G hat nach Definition n^2 viele Knoten. Dies bedeutet insbesondere, dass $W = \{x_v \mid v \in V\}$ eine endliche, nicht-leere Menge ist.

Für jede endliche, nicht-leere Teilmenge über einer total geordneten Grundmenge gilt, dass diese ein (globales) Minimum und Maximum besitzt¹. Nun ist \mathbb{R} eine total geordnete Menge und $W \subset \mathbb{R}$. Damit besitzt W ein (globales) Minimum.

Sei $m \in M$ nun der Knoten mit $x_m = \min W$. Da gilt, dass die Elemente aus W alle paarweise verschieden sind, gilt insbesondere, dass
 $\forall v \in V : x_v \leq x_m$ oder $\forall v \in V \setminus \{m\} : x_v < x_m$.

Dies gilt insbesondere auch für die Nachbarknoten von m . Damit ist m auch sowohl *globales Minimum* als auch *lokales Minimum* in diesem Graphen.

(b) Der folgende Algorithmus heißt *lokale Suche*: Beginne bei einem beliebigen Knoten $v \in V$. Falls ein v ein *lokales Minimum* ist, sind wir fertig. Ansonsten hat v einen Nachbarn w mit $x_w < x_v$ (wenn es mehr als einen solchen Nachbarn gibt, wählen wir denjenigen mit dem kleinsten x_w). Gehe zu w und wiederhole, bis ein lokales Minimum erreicht ist.

Zeigen Sie, dass lokale Suche im schlimmsten Fall $\Omega(n^2)$ viele Schritte benötigt.

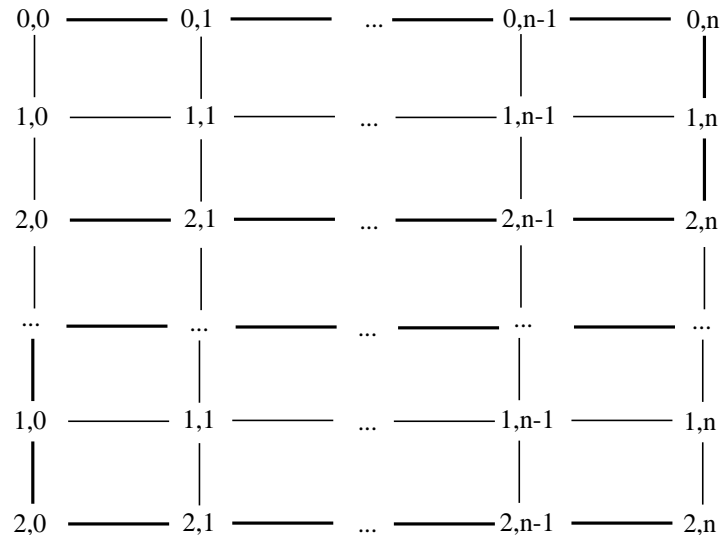
Lösung:

Um diese Laufzeit zu erreichen konstruieren wir uns einen Fall, indem bei gegebenem $v \in V$ der Algorithmus jedes (i-te) Element $winV$ besuchen muss, wobei $i \in \mathbb{N}$ konstant ist.

Unsere Konstruktion sieht wie folgt aus: Wir starten bei v in der linken, oberen Ecke $i = j = 0$. Nun wählen wir Schlangenlinien durch unseren Pfad, so dass wir immer eine Zeile überspringen (am Rand nur 1 Element berühren). Die Knoten entlang dieses Pfades sind immer um 1 kleiner als der Vorgänger. (Wir starten bei $x_{0,0} = n^2$. Die Knoten aus den frei gelassenen Ebenen, wählen wir so, dass wir sie nicht betreten, groß genug und beliebig ($> n^2$)).

Als Folge erhalten wir so : $x_{0,0} > x_{0,1} > \dots > x_{0,n} > x_{1,n} > x_{2,n} > x_{2,n-1} > \dots > x_{2,0} > x_{3,0} > \dots > x_{n,n}$ (Wenn n gerade ist, sonst $x_{0,n}$). Der Weg sieht also folgendermaßen aus:

¹Wie in Mafi I gezeigt wurde



Stellt einen Pfad dar, der $\Omega(n^2)$ viele Knoten besucht.

Wir berühren hier $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ Knoten. Diese kommen zustande indem wir jede zweite Spalte komplett durchgehen und jede andere nur ein Element betrachten. Auf jedem dieser Felder haben wir 4 Vergleiche gemacht. Dies lässt uns bei einer Laufzeit von $\Omega(n^2)$.

- (c) Zeigen Sie, wie man ein lokales Minimum in $O(n)$ Zeit finden kann. Begründen Sie Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.

Lösung:

Die Idee dieser Lösung sieht wie folgt aus:

Wir legen in jedem Schritt ein Kreuz über das Feld, so dass es das gesamte Gitter in 4 (in etwa) gleichgroße Teile zerlegt. Als nächstes suchen wir uns das Minimum dieser $2 \cdot n - 1$ Elemente, die auf dem Kreuz liegen. Von dem Knoten des Minimums aus, betrachten wir die beiden Nachbarn, die nicht in dem Streifen liegen (wahlweise auch alle, da kein Nachbar auf dem Streifen kleiner sein kann). Ist keines der Elemente kleiner, so haben wir lokales Minimum. Sonst gehen wir in Richtung des kleineren Nachbarns. Damit haben wir ein $\frac{3}{4}$ des Quadrates weggeworfen und müssen nur nach das verbleibende Viertel mit den Maßen $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ weiter machen.

Korrektheit:

Für die Korrektheit zeigen wir, dass ein *lokales Minimum* im eingeschränkten Viertel liegen muss (außer wir haben schon eins im Streifen gefunden gefunden).

Betrachten wir für den Beweis das Porgram aus b). Wir wählen als Startknoten des Algorithmus das Minimum unseres Streifen y . Wir wissen, dass der Algorithmus entlang der kleinere Elemente läuft. Nun wissen wir, dass er immer ein *lokales Minimum* finden muss (Sollte dies nicht gegeben sein, nehmen wir die Quellensuche auf POSETs, wie sie in Mafi I gezeigt wird, da diese analog abläuft). Im ersten Schritt betritt der Algorithmus unser ausgewählte Rechteck nach Konstruktion.

Nun wissen wir, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der besuchten Knoten eine monoton fallende sein muss, mit $a_0 = m$, da jeder folgende Wert kleiner sein muss (nach Algorithmus).

Da nun aber für das Kreuz K gilt, dass

$$\forall k \in K \setminus \{m\} : k > m$$

und für die Folge, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < m, \text{ was direkt aus der Monotonie folgt.}$$

$$\Rightarrow \forall k \in K \forall a \in (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : k > a \Rightarrow K \cap (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{m\}$$

Da wir nach Konstruktion aber nicht über m zurücklaufen können, da wir nur in Richtung eines echt kleineren gehen können, also keine Schleifen bilden können. Die Folge muss also auf ein Element innerhalb unsere eingeschränkten Quadrates liegen. \square

Laufzeit:

Um das Minimum von $2n - 1$ Elementen zu finden benötigen wir $2n - 2$ Vergleiche². Von da aus brauchen wir noch 2 Vergleiche um den Teil des kleineren Nachbarn zu ermitteln. Danach fahren wir auf den halbierten Zeilen und Spalten fort (sollten wir zu wenig haben für die Hälfte, nehmen wir uns weitere Elemente aus dem Streifen, dies macht es nicht falsch, aber leichter zu analysieren).

$$\Rightarrow T(n) = \begin{cases} c_1 n & , n < 4 \text{ (egal solange konstant)} \\ T(\frac{n}{2}) + c_2 n & , \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ konstant.

Dies können wir nun mithilfe des Mastertheorems abschätzen:

$$a = 1, b = 2, f(n) = c_2 n$$

Wir prüfen den 3. Fall des Theorems:

$$f(n) = c_2 \cdot n = \Omega(n^{0+1}) = \Omega(n^{\log_1 2+1}), \text{ mit } \varepsilon = 1$$

und

$$af(\frac{n}{b}) = f(\frac{n}{2}) = \frac{1}{2}n \leq c \cdot n, \text{ mit } c = \frac{3}{4}$$

Damit sind die Bedingungen für den 3. Fall des Mastertheorems erfüllt und es gilt:

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n)$$

Damit haben wir gezeigt, dass wir ein *lokales Minimum* in $O(n)$ finden können.

Aufgabe 3

Für eine gegebene Folge M_1, M_2, \dots, M_n von n Matrizen ist das *Matrizenkettenprodukt* $M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_n$ zu berechnen. Die Matrizen haben dabei verschiedene Dimensionen. M_1 ist eine $p_1 \times p_2$ Matrix, M_2 ist eine $p_2 \times p_3$ Matrix usw.

Um eine $a \times b$ Matrix mit einer $b \times c$ Matrix zu multiplizieren, benötigen wir bekanntlich acb Multiplikationen und $ac(b - 1)$ Additionen, also insgesamt $ac(2b - 1)$ Additionen, also insgesamt $ac(2b - 1)$ elementare Operationen.

- (a) Bezeichne mit $P[i, j]$ die Kosten für eine optimale Klammerung des Matrizenkettenprodukts $M_i \cdot \dots \cdot M_j$ ($1 \leq i \leq j \leq n$). Unser Ziel ist, $P[1, n]$ zu berechnen. Finden Sie eine geeignete Rekursionsgleichung für $P[i, j]$.

²gezeigt in ALP3

Lösung:

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i = j \leq n & : P[i, j] = 0 \\ \forall 1 \leq i \leq n & : P[i, i+1] = p_i \cdot p_{i+2} \cdot (2 \cdot p_{i+1} - 1) \\ & P[i, j] = \min_{a \in (i, j)} P[i, a] + P[a+1, j] + p_i \cdot p_{j+1} \cdot (2 \cdot p_{a+1} - 1) \end{aligned}$$

- (b) Benutzen Sie Ihre Rekursion, um Pseudocode für einen Algorithmus anzugeben, welcher die optimalen Kosten $P[1, n]$ bestimmt. Analysieren Sie Laufzeit und Platzbedarf.
- (c) Erweitern Sie Ihren Algorithmus so, dass er auch eine optimale Klammerung ausgibt.
- (d) Implementieren Sie ein Programm, das eine optimale Klammerung für die Matrixmultiplikation bestimmt und die Multiplikation durchführt. Vergleichen Sie Ihr Programm mit einer naiven Implementierung, welche die Matrizen von links nach rechts multipliziert.