

## Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

## Aufgabe 2

```

1 function [ x, t ] = theta_lin(theta, lambda, f, x0, T, tau )
2 %theta_lin approximiert das AWP
3 %AWP x' = lambda*x+f, x(0) = x0 mit einem
4 %aequidistanten Gitter 0 = t0 < t1 < ... < tn = T
5 %mit Hilfe des Theta-Verfahrens fuer Eingabe theta.
6
7 x(1) = x0;
8 t = 0:tau:T; %% Gitter mit Abstand tau
9
10 % Formel umgestellt nach x_{k+1}
11 for k = 1:size(t,2)-1,
12     x(k+1) = ((x(k)*lambda*tau)*(1 - theta) + x(k) + (f((k-1)*
13         tau)*tau)*(1-theta)+ theta*tau*f(k*tau))/(1-tau*lambda*
14         theta)
13 end
14 end

```

- a) Sei nun  $f(t) = 4\pi \cos(4\pi t) - \lambda \sin(4\pi t)$ ,  $\lambda = -1$ ,  $x_0 = 1$  und  $T = 2$  und die Schrittweite  $\tau = T/100 = 0.02$ .

(1) Exakte Lösung des AWP:

$$x(t) = e^{-t} + \int_0^t f(x)e^{-t+x} dx = e^{-t} + e^{-t} \int_0^t f(x)e^x dx$$

Das Integral lösen wir nun durch partielle Integration, dazu bilden wir die ersten beiden Ableitungen von  $f$ , die wir in der partiellen Integration benutzen werden. Dann gilt für die erste Ableitung  $f'$ :

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= (4\pi \cos(4\pi t) - \lambda \sin(4\pi t))' \\
 &= (4\pi \cos(4\pi t))' - (\lambda \sin(4\pi t))' \\
 &= (-16\pi^2 \sin(4\pi t)) - (4\pi \lambda \cos(4\pi t)) \\
 &= -16\pi^2 \sin(4\pi t) - 4\pi \lambda \cos(4\pi t)
 \end{aligned}$$

Und damit für die zweite Ableitung  $f''$ :

$$\begin{aligned}
 f''(t) &= (-16\pi^2 \sin(4\pi t) - 4\pi \lambda \cos(4\pi t))' \\
 &= (-16\pi^2 \sin(4\pi t))' - (4\pi \lambda \cos(4\pi t))' \\
 &= (-16 \cdot 4\pi^3 \cos(4\pi t)) - (-16\pi^2 \lambda \sin(4\pi t)) \\
 &= -16 \cdot 4\pi^3 \cos(4\pi t) + 16\pi^2 \lambda \sin(4\pi t) \\
 &= -16\pi^2 (4\pi \cos(4\pi t) - \lambda \sin(4\pi t)) \\
 &= -16\pi^2 f(t)
 \end{aligned}$$

Nun können wir partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t f(x)e^x dx &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - \int_0^t e^x f'(x) dx \\
 &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - \left( [e^x \cdot f'(x)]_0^t - \int_0^t e^x f''(x) dx \right) \\
 &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t + \int_0^t e^x f''(x) dx \\
 &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t + \int_0^t e^x - 16\pi^2 f(x) dx \\
 &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t - 16\pi^2 \int_0^t e^x f(x) dx \\
 \Rightarrow 17\pi^2 \int_0^t f(x)e^x dx &= [e^x \cdot f(x)]_0^t - [e^x \cdot f'(x)]_0^t \\
 &= (e^t \cdot f(t) - e^0 \cdot f(0)) - (e^t \cdot f'(t) - e^0 \cdot f'(0)) \\
 &= e^t \cdot (4\pi \cos(4\pi t) - \lambda \sin(4\pi t)) - 4\pi \\
 &\quad - e^t \cdot (-16\pi^2 \sin(4\pi t) - 4\pi \lambda \cos(4\pi t)) - 4\pi \lambda \\
 &= e^t 4\pi \cos(4\pi t) - e^t \lambda \sin(4\pi t) - 4\pi \\
 &\quad + e^t 16\pi^2 \sin(4\pi t) + e^t 4\pi \lambda \cos(4\pi t) - 4\pi \lambda \\
 &\stackrel{\lambda=-1}{=} e^t 4\pi \cos(4\pi t) + e^t \sin(4\pi t) - 4\pi \\
 &\quad + e^t 16\pi^2 \sin(4\pi t) - e^t 4\pi \cos(4\pi t) + 4\pi \\
 &= e^t \sin(4\pi t) + e^t 16\pi^2 \sin(4\pi t)
 \end{aligned}$$

Irgendwo ist hier ein Rechenfehler, denn es soll herauskommen:  $\int_0^t f(x)e^x dx = e^t \sin(4\pi t)$  und damit als Lösung

$$x(t) = e^{-t} + \sin(4\pi t)$$

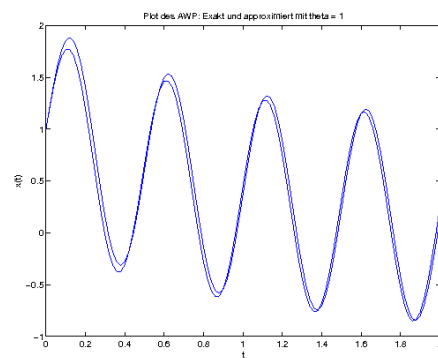
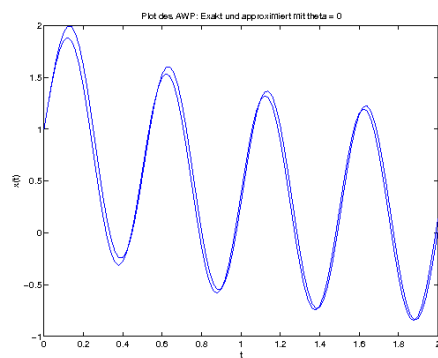
(2) Approximative Lösung des AWP mit  $\Theta = 0, 0.5, 1$ .

Die Lösung aus (1) wird nun als Vergleich mit den approximativen Lösungen geplottet.

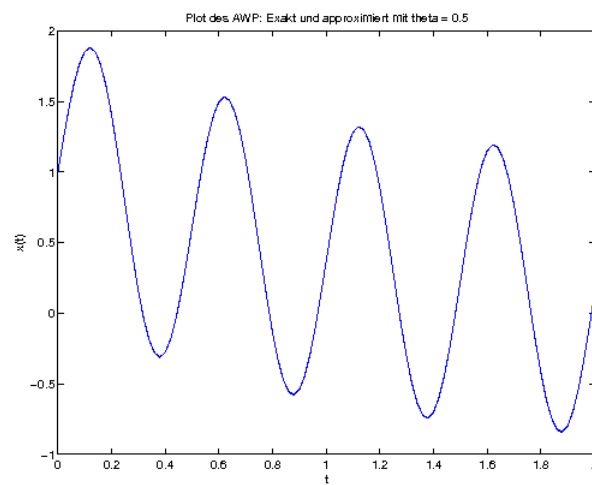
Wie zu sehen ist, ist der Graph bei der  $\theta = 0$ -Approximation stets etwas zu groß (über der exakten Lösung), bei der  $\theta = 1$ -Approximation stets etwas zu klein (unter dem Graphen der exakten Lösung). Die  $\theta = 0.5$ -Approximation gleicht genau diese Schwäche aus, in dem der Mittelwert der beiden Approximationen benutzt wird. Der Graph liegt fast genau auf dem der exakten Lösung.

- b)** Um die Konvergenzordnung zu sehen, wählen wir eine doppelt logarithmische Skala, plotten der Fehler und können dann die Steigung der Geraden (der Plot ergibt eine Gerade) als Konvergenzordnung ansehen:

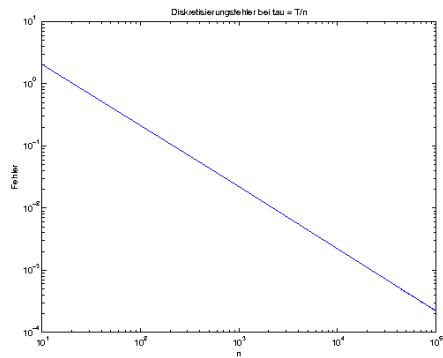
Die Auswertung der Plots ergibt für  $\theta = 0$  und für  $\theta = 1$  eine Konvergenzordnung von 1, für  $\theta = 0.5$  eine Konvergenzordnung von ca. 2.



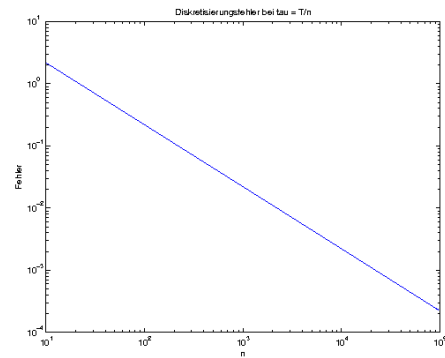
(a) Lösung des AWP gegen Approximation mit  $\theta = 0$  (b) Lösung des AWP gegen Approximation mit  $\theta = 1$



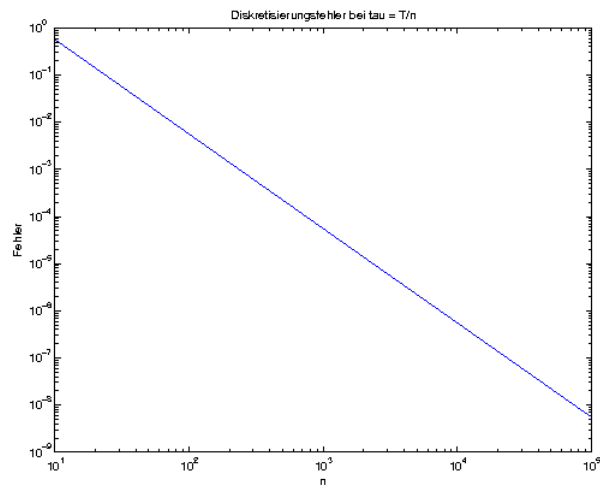
(c) Lösung des AWP gegen Approximation mit  $\theta = 0.5$



(d) Diskretisierungsfehler über  $\tau$  mit  $\theta = 0$



(e) Diskretisierungsfehler über  $\tau$  mit  $\theta = 1$



(f) Diskretisierungsfehler über  $\tau$  mit  $\theta = 0.5$