Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass durch

$$u \sim v \;:\Leftrightarrow u \text{ und } v \text{ hängen zusammen}$$

eine Äquivalenzrelation auf den Knoten eines Graphen definiert wird.

Beweis:
Sei $G(V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Zwei Knoten u, v hängen zusammen, wenn ein Weg $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ existiert, mit $u = a_1$, $v = a_n$ und $\forall 1 \leq i < n \;:\; a_i a_{i+1} \in E$.

Reflexivität: Sei $u \in V$, dann ist (u) ein Weg in G, da es keine Kanten gibt die nicht in E liegen und Start- und Endknoten u sind. $\Rightarrow u \sim v$.

Symmetrisch: Sei $u, v \in V$ mit $u \sim v$.

Dann existiert ein Weg $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ nach Definition. Sei $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ ein Weg mit $b_j = (a_{n-j+1})$ für alle $1 \leq j \leq n$. Da alle Knoten aus V kommen, liegt dieser Weg auch in G. Es gilt $b_1 = a_{n-1+1} = a_n = v$ und $b_n = a_{n-n+1} = a_1 = u$.

Nun gilt für alle $1 \leq i < n$, dass

$$b_i b_{i+1} = a_{n-i+1} a_{n-i} \in E$$

da G ungerichtet ist und nach Vorraussetzung $a_{n-i} a_{n-i+1}$ in E liegt. Damit ist

$$v \sim u$$

Transitivität: Seien $u, v, w \in V$ mit $u \sim v$ und $v \sim w$ Sei $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ ein Weg von u nach v und $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ ein Weg von v nach w.

Dann ist $(c_i)_{1\leq i\leq 2n}$ ein Weg mit

$$c_i = \begin{cases} a_i & , i \leq n \\ b_{i-n} & , i > n \end{cases}$$

Es gilt $c_0 = a_0 = u$ und $c_{2n} = b_n = w$. Desweiteren gilt für alle $1 \leq i \leq n$, dass $c_i c_{i+1} = a_i a_{i+1} \in E$ gilt und für alle $n + 1 \leq i \leq 2n$, dass $c_{i-n} c_{i-n+1} = b_i b_{i+1} \in E$.

$\Rightarrow u \sim w$.

Damit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

$\square$

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass in jedem Graphen die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Beweis:

Sei $G(V, E)$ ein ungerichter Graph.

Wir betrachten nun $g = \sum_{v\ inV} \text{grad}(v) = 2|E|$. Dies gilt, da wir für jede Kante $(u, v) \in E$ sie einmal für den Grad von u und einmal für den Grad von v zählen.

Nun wissen wir, dass die summe von

1. gerade und gerade ist gerade.
2. gerade und ungrade ist ungerade.
3. ungerade und ungerade ist gerade.

Da die Summe aller Grade gerade ist, müssen es eine gerade Anzahl von Knoten mit geradem Grad sein.

□

Aufgabe 3.

Zeigen Sie: Eine Kante ist eine Brücke genau dann, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

Beweis:
Sei $G(V, E)$ ein Graph und $(u, v) \in E$.
"$\Rightarrow$":
Sei (u, v) eine Brücke und $G' = (V, E \setminus \{(u, v)\})$ der Graph nach dem Entfernen von Kante (u, v) aus G. Da (u, v) Brücke war, zerfällt die Komponente in der (u, v) lag, in zwei Komponenten K_1 und K_2. Insbesondere gibt in G' keinen Weg von K_1 nach K_2 und umgekehrt. Damit kann (u, v) in G in keinem Kreis enthalten sein, da sonst ein solcher Weg von u nach v existieren würde und so K_1 mit K_2 verbinden würde, deshalb könnte (u, v) keine Brücke sein.
"$\Leftarrow$":
Sei (u, v) eine Kante die auf einem Kreis liegt. Entfernen wir (u, v) aus dem G so existiert noch der Rest des Kreises in G, der nun einen Weg von u nach v bildet. Somit kann (u, v) keine Brücke sein.

□

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er keinen ungeraden Kreis enthält.

Beweis:

Ein Graph $G(V, E)$ ist nun bipartit, wenn man eine Partition der Knoten findet also $V = V_0 \cup V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, so dass $\forall v_1 \in V_i v_2 \in V_i : (v_1, v_2) \not\in E$ für $i = 0, 1$ gilt.

Sei $G(V, E)$ nun ein beliebiger ungerichteter Graph.

$\Rightarrow$:

Sei $k = a_1 a_2 .. a_n$ ein Kreis in G. Da k ein Kreis ist, gilt $a_1 = a_n$. Sei o.B.d.A. $a_1 \in V_0$, dann wissen wir, da G bipartit ist, dass $\forall 1 \leq i < n : a_i \in V_x \Rightarrow a_{i+1} \in V_{1-x}$ gilt.
Nach iterativer Anwendung ist für ungerade Indizes der Knoten in V_0 und für gerade Indizes der Knoten in V_1. Da $a_n = a_1 \in V_0$ muss auch n ungerade sein. Daher ist der Kreis gerade.
$\Leftarrow$:

Sei $k = a_1..a_n$ ein ungerader Kreis. Nehmen wir an G wäre bipartit, dann existiert eine Partition von V in V_0 und V_1 wie gehabt. Sei o.B.d.A $a_1 \in V_0$. Wie gehabt sind nu alle geraden Indizes in V_1 und alle ungeraden in V_0. Da K ungerader Kreis ist, ist n gerade. Nun wäre $a_1 \in V_0$ und $a_n \in V1$. Da aber $a_1 = a_n$ gilt ist dies unmöglich, da $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (Widerspruch)

$\square$