5. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Höhere Algorithmik WiSe 2011/12

Wolfgang Mulzer, Claudia Dieckmann, Romain Grunert, Tillmann Miltzow, Lena Schlipf

Abgabe am 25. November 2011 vor der Vorlesung in die Mitarbeiterschachteln

Aufgabe 1 Varianten der Vorlesungsbeispiele *10 Punkte*

(a) Betrachten Sie die Variante des Einkaufsproblems, bei dem von jedem Artikel beliebig viele Exemplare zur Verfügung stehen. Das heißt, wir haben Artikel 1 bis n gegeben und jeder Artikel hat einen Preis p_i und einen Wert w_i. Wir haben ein Budget B und möchten eine *Multimenge* von Artikeln finden, die unser Budget beachtet und den Wert maximiert.

Zeigen Sie, wie man auch diese Variante des Einkaufsproblems in Zeit $O(nB)$ lösen kann.

(b) In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie das Rundreiseproblem mit Hilfe von dynamischem Programmieren gelöst werden kann. Arbeiten Sie die Details des Algorithmus aus und geben Sie Pseudocode an, um eine optimale Tour zu berechnen.

Aufgabe 2 Münzwechseln *10 Punkte*

(a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der berechnet, auf wieviele Arten ein Euro (und allgemeiner: n Cent) mit beliebig vielen 1-, 2-, 5-, 10-, 20-, 50-Centstücken und 1-Eurostücken gewechselt werden kann. Verwenden Sie für Ihre Lösung das Prinzip der dynamischen Programmierung. Der Algorithmus soll auch für beliebige andere Währungen funktionieren.

Hinweis: Bestimmen Sie mit dynamischem Programmieren für $i = 1, \dots, k$ (k ist die Anzahl der unterschiedlichen Münzen) die Zahlen $c_{n,i}$, die angeben, auf wieviele Arten n Cent mit den i kleinsten Münzen dargestellt werden können.

(b) Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

(c) (*freiwillig, 5 Zusatzunkte*) Implementieren Sie Ihren Algorithmus in Java und wenden Sie ihn an, um die unter (a) angegebenen Umtauschmöglichkeiten sowie die von 1 Dollar in 1-, 5-, 10- und 25-Centstücke zu berechnen.

Bitte wenden

Aufgabe 3 Versteckte Markov-Modelle *10 Punkte*

(a) Betrachten Sie das folgende versteckte Markov-Modell.

- Zustände: $Q = \{q, r, s\}$.
- Alphabet: $\Sigma = \{a, b\}$.
- Anfangsverteilung: $\{q : 0.1,\ r : 0.4,\ s : 0.5\}$.
- Ausgabeverteilung für q: $\{a : 0.2,\ b : 0.8\}$.
- Ausgabeverteilung für r: $\{a : 0.7,\ b : 0.3\}$.
- Ausgabeverteilung für s: $\{a : 0.5,\ b : 0.5\}$.
- Übergangsverteilung für q: $\{q : 0.8,\ r : 0.1,\ s : 0.1\}$.
- Übergangsverteilung für r: $\{q : 0.3,\ r : 0.3,\ s : 0.4\}$.
- Übergangsverteilung für s: $\{q : 0.2,\ r : 0.4,\ s : 0.4\}$.

Benutzen Sie den Viterbi-Algorithmus, um die wahrscheinlichste Erklärung für die Ausgabefolge *abba* zu ermitteln.

(b) Bei einer Implementierung des Viterbi-Algorithmus rechnet man oft mit den Werten $\log p_i$ statt den Wahrscheinlichkeiten p_i. Erklären Sie, warum das eine gute Idee ist.

(c) Eine Anwendung von versteckten Markov-Modellen ist die Fehlerkorrektur. Wir wollen uns an einem Beispiel überlegen, wie dies prinzipiell funktionieren kann.

Angenommen, wir möchten einen deutschsprachigen Text über dem Alphabet $\{a, b, c, \ldots, z, '\ '\}$ über eine gestörte Leitung übermitteln ($'\ '$ stellt das Leerzeichen dar, der Einfachheit halber werden Satzzeichen ignoriert). Wir wissen, dass die Leitung ungefähr 10 Prozent der übertragenen Zeichen zufällig ändert. Trotzdem möchten wir aus der empfangenen Nachricht einen möglichst korrekten Text rekonstruieren.

Beschreiben Sie, wie man diese Situation mit Hilfe eines versteckten Markov-Modells modellieren kann. Was sind die Zustände? Wie könnte man die zugrunde liegenden Verteilungen sinnvoll ermitteln? Welche Annahmen werden in dem Modell gemacht? Inwiefern treffen diese Annahmen in der Wirklichkeit zu?