

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 13: FehlerrechnungBerechnen Sie die folgenden Werte bis auf einen Fehler von 10^{-4} .(i) $\sin(1)$:

Wir berechnen die Taylorformel an dieser Stelle, wie in der Vorlesung von f im Entwicklungspunkt 0. Daher können wir gleichmäßige Konvergenz schon voraussetzen.

$f^{(4n)} = \sin$, $f^{(4n+1)} = \cos$, $f^{(4n+2)} = -\sin$, $f^{(4n+3)} = -\cos$. Diese setzen wir nun in die Taylorreihe ein:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(0)}{n!} x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir nun, dass diese Reihe für $|x| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert, deshalb müssen wir nur noch das n berechnen, so dass der Fehler klein genug wird, daher schätzen wir den Fehler durch das Restglied ab.

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

(ii) e :

Wir wählen den Entwicklungspunkt $a = 0$ und erhalten so die übliche Darstellung der e -Funktion. $e^{(n)}(x) = e^x$ und somit $e^0 = 1$.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Wie bereits bekannt ist, konvergiert diese Reihe gleichmäßig, wir müssen also nur

den Fehler abschätzen.

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\
 &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \\
 &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_a^x - \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \\
 &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_a^x + \left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t \right]_a^x - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} e^t dt \\
 &\quad \text{Fortsetzen bis } (x-t)^0 \text{ erreicht ist} \\
 &= \left[\sum_{m=1}^n \frac{(x-t)^m}{m!} e^t \right]_a^x - \int_a^x \frac{e^t}{1!} dt \\
 &= \sum_{m=0}^n \frac{(x-x)^m}{m!} e^x - \sum_{m=0}^n \frac{(x)^m}{m!} e^0 - \frac{e^x}{1!} + \frac{e^0}{1!} \\
 &= 0 - \frac{n+1}{n!} - \frac{e}{n!} + \frac{1}{n!} \\
 &= -\frac{n+e}{n!}
 \end{aligned}$$

In unserem Fall landen wir bei $n = 9$ bei einer Zahl, die um 10^4 nah an der Eingabe dran ist. Wir können $e = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 1.7182815$ abschätzen und sehen, dass der Fehler erst nach der 4. Nachkommastelle auftritt.

Aufgabe 14: Taylorentwicklung von \arctan

- (i) Begründen Sie zunächst, dass

$$\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

für $|t| < 1$, für welche t die Reihe gleichmäßig konvergiert.

Lösung:

Wir benutzen das (NAME FEHLT HIER) Kriterium, um zu zeigen, dass die Reihe auf $(-t, t)$ gleichmäßig konvergiert. Da hier die Grenzen leider nicht konvergieren, sondern die Reihe 2 Häufungspunkte für $t = 1$ besitzt untersuchen wir eine $\varepsilon > 0$ unter $t = 1$. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - \varepsilon)^{2n}$. Wir untersuchen die Reihe mit dem Leibnitz -

Kriterium. $(1 - \varepsilon)^{2n}$ ist eine streng monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert (Die geometrische Reihe mit $(a)_{n \in \mathbb{N}} = aq^n$ mit $0 \leq q < 1$ konvergiert gegen 0).

Wir wissen nun, dass die Reihe für alle $0 < t < 1$ gleichmäßig konvergiert. Für den negativen Fall setzten wir nun $-t$ ein. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-t)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t)^{2n}$ gilt, da das ganze Symmetrisch in t ist. Nun wissen wir, dass die Reihe auf $(-t, 0)$ und $(0, t)$ gleichmäßig konvergiert. Der letzte Fall ist $t = 0$. Aber für $t = 0$ ist die Reihe für alle n 0. Somit können wir das größte N von allen 3 Bereichen nehmen und sagen, dass die Reihe auf $(-t, t)$ gleichmäßig konvergiert.

- (ii) Bestimmen Sie nun die Taylorreihe von \arctan durch Integration. Zeigen Sie, dass die so gefundene Reihe für alle $|x| \leq 1$ konvergiert.

Lösung:

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung ist

$$\int \left(\frac{d}{dt} \arctan(t) \right) dt = \arctan.$$

Nun haben wir für die Ableitung die Reihendarstellung

$$\int \left(\frac{d}{dt} \arctan(t) \right) dt = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

Wir wissen aus Aufgabenteil (i), dass die Reihe gleichmäßig konvergiert, also gilt:

$$\begin{aligned}\arctan(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}\end{aligned}$$

Da in diesem letzten Ausdruck kein Integral mehr auftaucht und wir eine gültige Reihendarstellung erreicht haben, befinden wir dies als fertige Auflösung des Tangenz.

Im Gegensatz zur Ableitung konvergiert diese Darstellung nun auch für $t = 1$ gleichmäßig. Die gleichmäßige Stetigkeit argumentiert sich genau, wie bei (i), nur sehen wir diesmal, dass in $t = 1$ immer noch die Reihe über die Folge $(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ stehen bleibt, die Nullkonvergent ist und streng monoton fällt. Damit konvergiert \arctan auf $[-1, 1]$ stetig. (Für -1 müssen wir dieses mal $(-1)^{n+1}$ bilden).

(iii) Begründen Sie abschließend

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Hierfür sollte man zunächst betrachten, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist. Da \arctan die Umkehrabbildung ist, setzen wir die 1 in unsere Reihe ein und erhalten

$$\begin{aligned}\arctan(1) &= \frac{\pi}{4} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 1^{2n} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\end{aligned}$$

Aufgabe 15: Schwarz-Ableitung

Sei $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Angenommen die zweite Ableitung von f im Punkt a existiert. Zeigen Sie, dass dann

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

gilt.

Lösung:

tbd

(ii) Es sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2}$$

existiert, obwohl $f''(0)$ nicht existiert.

Lösung:

tbd

(iii) Angenommen f habe ein lokales Maximum in a und die zweite Schwarz'sche Ableitung von f in a existiert. Zeigen Sie, dass diese dann kleiner oder gleich 0 sein muss.

Lösung:

tbd