

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 20: *Stetigkeit der Abstandsfunktion*

Für eine feste Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abstandsfunktion $\text{dist}(x, M) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit $(x, M) \mapsto \inf\{|x - y| \mid y \in M\}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\text{dist}(x, M) - \text{dist}(y, M)| \leq |x - y|$$

Beweis:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Und $z^*, z' \in M$, so dass $|x - z'| = \text{dist}(x, M)$, $|y - z^*| = \text{dist}(y, M)$.

$$\begin{aligned} |\text{dist}(x, M) - \text{dist}(y, M)| &\stackrel{\text{Def.}}{=} |\inf\{|x - z| \mid z \in M\} - \inf\{|y - z| \mid z \in M\}| \\ &\stackrel{z', z^*}{=} ||x - z'| - |z^* - y|| \\ &\leq |x - z' + z^* - y| \\ &= |x - y + z^* - z'| \\ &\leq |x - y| + |z^* - z'| \\ &\leq |x - y| \end{aligned}$$

Gilt, da auf dem Metrischen Raum \mathbb{R}^n die Dreiecksungleichung gilt. □

(ii) Ist die Distanzfunktion gleichmäßig stetig?

Lösung:

Wir haben es hier prinzipiell mit einer Lipschitz stetigen Funktion zu tun, mit der Konstante 1. Da wir den Satz aber noch nicht für metrische Räume gezeigt haben, werden wir wohl das ganze noch per Hand beweisen.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Sei $\delta = \varepsilon$.

Nun wissen wir, nach Voraussetzung gleichmäßigen Stetigkeit, dass $|x - y| < \delta = \varepsilon$ gelten soll. Aus dem ersten Teil wissen wir aber auch, dass $|\text{dist}(x, M) - \text{dist}(y, M)| \leq |x - y| < \varepsilon$ gelten muss.

Damit ist dist gleichmäßig stetig. □

Aufgabe 21 *Stetige Funktionen auf dichten Teilmengen*

Seien $g, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen. Sei ferner $S \subset \mathbb{R}^n$ eine *dichte* Teilmenge des \mathbb{R}^n , d.h. es gilt $\overline{S} = \mathbb{R}^n$. Schließlich gelte

$$\forall x \in S : f(x) = g(x).$$

Zeigen Sie, dass dann auch

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)$$

richtig ist.

Beweis:

Für stetige Funktionen gilt auch bei $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dass $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(\lim_{n \rightarrow a} n)$.

Nun wissen wir über den Abschluss, dass für jeden Punkt aus $x \in \overline{S}$ eine Folge $(t)_{n \in \mathbb{N}}$ in S existiert, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x$.

Nun sei $x \in \mathbb{R}^n = \overline{S}$. Wir wissen nun, dass eine Folge $(t)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{Def.:t}{=} f(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n) \\ &\stackrel{stetig}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \\ &\stackrel{Vor.}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) \\ &\stackrel{stetig}{=} g(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n) \\ &\stackrel{Def.:t}{=} g(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 22 *Stetigkeit in höheren Dimensionen*

Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

(i)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Lösung:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Sei nun $\delta > 0$ und es gelte $|x - x_0| = |x| < \delta$.

Da $|x| < \delta$ gilt, wissen wir, dass insbesondere $x = (x_1, x_2)$ $|x_1| < \delta$ und $|x_2| < \delta$ gelten muss.

Wenn wir nun annehmen, dass wir $\delta < 1$ gilt, dann gilt auch $x_1^2 < |x_1| < \delta$ und x_2 ebenso.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0)| &= |f(x, y) - f((0, 0))| \\ &= |f(x, y) - (0, 0)| = |f(x, y)| \\ &= \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \\ &< \frac{\delta^2}{2\delta} \\ &= \frac{1}{2}\delta \end{aligned}$$

Wählen wir nun ein $\delta' = 2\varepsilon$, dann ist $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$.

□

(ii)

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Lösung:

tbd

Aufgabe 23 *Halbstetige Funktionen*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

- (i) Definieren Sie analog *oberhalbstetig*.

Def.:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *oberhalbstetig* in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

- (ii) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine nicht stetige, aber oberhalbstetige Funktion f und für eine nicht stetige, aber unterhalbstetige Funktion g an. Skizzieren Sie!

Lösung:

tbd

- (iii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Menge

$$\Omega_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\}$$

offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis:

\Rightarrow :

Wir wollen zeigen, dass $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unterhalbstetig impliziert, dass Ω_a offen ist. Dazu nehmen wir an, dass Ω_a nicht offen ist.

Dies bedeutet, dass ein Punkt x_0 existiert, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ nicht komplett in Ω_a enthalten ist. Also existiert ein Punkt $y \in B_\varepsilon(x_0)$, für den gilt $x_0 \notin \Omega$.

Wir wissen nun also zum einen, dass $|x - y| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Darüber hinaus wissen wir auch, dass $f(y) \leq \Omega_a$. Wir haben also ein a , so dass $f(x) \leq f(x_0) - a$ gilt.

Dies bedeutet, dass f nicht unterhalbstetig ist.

\Leftarrow :

Wir bilden die Kontraposition. Wenn f nicht unterhalbstetig ist (z.B. nicht stetig aber oberhalbstetig), dann ist die Menge nicht offen.

In der Teilaufgabe (ii), haben wir eine Funktion angegeben, die nicht unterhalbstetig war. In x_0 galt nun, dass es keinen Wert links von diesem Wert gab, so dass der Funktionswert in jeder $\varepsilon > 0$ lag. Damit gab es insbesondere keine $x \in \mathbb{R}$ werte, so dass $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ galt.

Aus diesem ε können wir nun eine offene Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ bilden. In der unmittelbaren Umgebung lagen nun allerdings (nach links) keine Werte. Daher ist für alle $\varepsilon > 0$ nicht die ganze Kugel in der Menge.

□