Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

22.05.2012
Abgabe: 29.05.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 5

zur Analysis II

13. *Fehlerrechnung* *(4+4 Punkte)*

Berechnen Sie die Werte

(i) $\sin(1)$ und

(ii) e

bis auf einen Fehler von 10^{-4}.

14. *Taylorentwicklung von* arctan *(4+2+2 Punkte)*

(i) Begründen Sie zunächst

$$\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} \quad \text{für } |t| < 1$$

(geometrische Reihe; ähnlich wie in der Vorlesung). Für welche t konvergiert die rechte Reihe gleichmäßig?

(ii) Bestimmen Sie nun die Taylorreihe von arctan durch Integration. Zeigen Sie, dass die so gefundene Reihe für alle $|x| \leq 1$ konvergiert (Leibniz-Kriterium).

(iii) Begründen Sie abschließend

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

15. *Schwarz-Ableitung* *(4+2+2 Punkte)*

Sei $f\colon (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Angenommen, die zweite Ableitung von f im Punkt a existiert. Zeigen Sie, dass dann

$$f''(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\,.$$

Den Limes auf der rechten Seite nennt man die *zweite Schwarzsche Ableitung* der Funktion f in a.

Hinweis: Taylorentwicklung zweiten Grades mit $x = a+h$ und $x = a-h$.

(ii) Es sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

existiert, obwohl $f''(0)$ nicht existiert.

(iii) Angenommen, f habe ein lokales Maximum in a, und die zweite Schwarzsche Ableitung von f in a existiert. Zeigen Sie, dass diese dann kleiner oder gleich 0 sein muss.