Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

a) Da $s_n(x)$ auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}), 0 \leq i \leq n-2$ konstant gleich $f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ ist (für das letzte Intervall analog als geschlossenes Intervall), können wir die Quadraturformel erhalten, in dem wir den Inhalt jedes Intervallrechtecks einzeln aufsummieren. Also ergibt sich die Formel

$$\int_a^b s_n \, dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

mit $h = \frac{b-a}{n}$ als konstante Breite der Streifen.

b) Testweise wurde $f = \sin$ gewählt und auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ geplottet. Vergleichend wurde ebenfalls s_{20} geplottet.

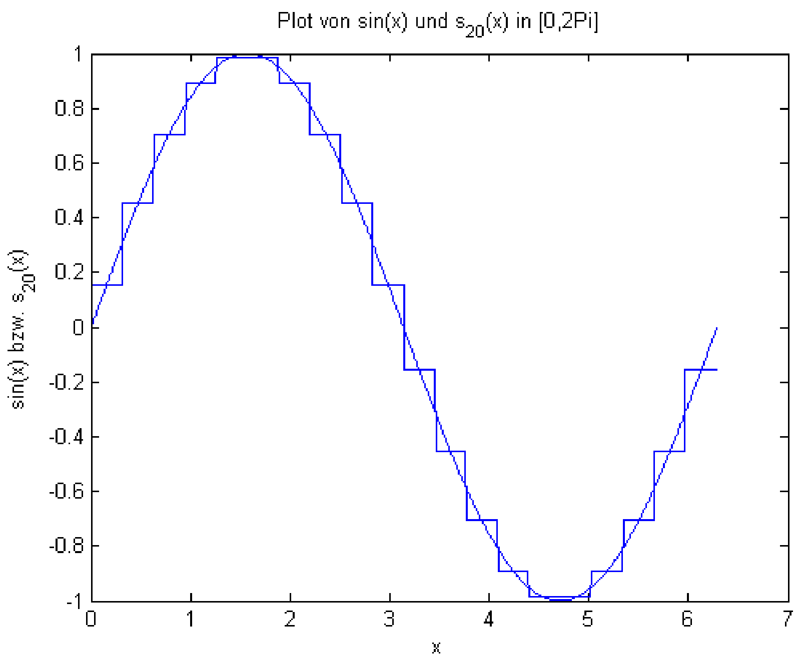

Abbildung 1: Plot von sin bzw. s_{20}.

c) Die folgende Funktion berechnet numerisch das Integral nach obiger Defintion:

```
function y = gauss(f, n, a, b)
% Diese Funktion berechnet die Integral
% von f von a bis b mittels
% Gauss-Quadratur und
% sog. Mittelpunktregel
% f Funktion
% n Anzahl der Stuetzstellen
% a, b Grenzen

% Breite des Gitters
h = (b-a)/n;
% Schritte im Intervall
xi = a:h:b;
% Berechne Funktionswerte an den geg. Stellen
for i = 1:n,
   fx(i) = f((xi(i)+xi(i+1))/2);
end
% Aufsummieren
y = h * sum(fx);
```

d) "[...] die Quadraturformeln heissen Gauss-Formeln bzw. man spricht von Gauss-Quadratur."(Wensch, Jörg: Computerorientiertes Rechnen Skript, Seite 38).

Aufgabe 2

a) $\dot{x}(t) = 2x(t)$

(i) Gewöhnlich: Es treten nur Ableitungen nach einer Variablen auf

(ii) Linear: Gilt, da für Lösungen f, g gilt: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha 2f + \beta 2g = 2(\alpha f + \alpha g)$. Damit sind alle Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen.

(iii) 1. Ordnung: Es treten nur Ableitung der 1. Ordnung auf.
$\Rightarrow$ Gewöhnliche, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

b) $\dot{x}(t) = 4x(t)^2 + x(t)$
Linearität nicht gegeben:
Für Lösungen f, g gilt: $(f+g)' = f' + g' = 4f^2 + f + 4g^2 + g = 4(f^2 + g^2) + (f + g)$.
Da i.A. $(f+g)^2 \neq (f^2 + g^2)$, ist $(f+g)$ keine Lösung der Differentialgleichung.

c) $\ddot{x}(t) = \lambda x(t) + 1$
Die Differentialgleichung ist nicht 1. Ordnung, da Ableitungen der 2. Ordnung auftreten.

Aufgabe 3

Zu lösendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -y \end{aligned}$$

Lösung:
Wie aus dem Skript bekannt, lässt sich die Differentialgleichung $y' = -y$ durch $\alpha e^{-t}, \alpha \in \mathbb{R}$ lösen. Setzen wir den Anfangswert $y(0) = 1$ ein, ergibt sich für α: $1 = y(0) = \alpha e^0 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$. Also löst $y(t) = e^{-t}$ den unteren Teil des Gleichungssystems.
Suchen wir nun eine Funktion $x(t)$, mit $x'(t) = y(t) = e^{-t}$. Durch Integrieren erhalten wir als Lösung $x(t) = -e^{-t} + c, c \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen des Anfangswertes erhalten wir schließlich: $0 = x(0) = -e^0 + c = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$.
Also ist die Lösung des Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - e^{-t} \\ y(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$