Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 Die Tetraedergruppe

Gegeben seien folgende Punkte $\mathbb{R}^3$:

$$P = (1,1,1),\ Q = (-1,-1,1),\ R = (1,-1,-1),\ S = (-1,1,-1)$$

(a) Berechnen Sie die Abstände $d(P,Q), d(P,R), d(P,S), d(Q,R), d(Q,S)$ und $d(R,S)$. Schließen Sie, dass die angegebenen Punkte die Eckpunkte eines regulären Tetraeders T sind.

Lösung:

$$\begin{aligned}
d(P,Q) &= \sqrt{2^2+2^2+0} = \sqrt{8}\\
d(P,R) &= \sqrt{0+2^2+2^2} = \sqrt{8}\\
d(P,S) &= \sqrt{2^2+0+2^2} = \sqrt{8}\\
d(Q,R) &= \sqrt{2^2+0+2^2} = \sqrt{8}\\
d(Q,S) &= \sqrt{0+2^2+2^2} = \sqrt{8}\\
d(R,S) &= \sqrt{2^2+2^2+0} = \sqrt{8}
\end{aligned}$$

Die von P,Q,R,S definierte Form hat 4 Punkte, die paarweise den selben Abstand ($\geq 0+\varepsilon, \varepsilon > 0$) haben, darum erfüllen Sie die Bedingung, dass alle paarweise verscheiden sind. Deshalb handelt es sich hier bei um ein *regelmäßiges* Tetraeder.

(b) Wählen Sie eine Ecke $E \in \{P,Q,R,S\}$. Dann sei D die Achse durch E und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite des Tetraeders T. Geben Sie die Abbildungsmatrix für die Drehung um D um den Winkel 120° und 240° bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:
Wir gehen nach dem folgenden Prinzip vor. Wir wählen unsere Basis so, dass die Drehachse unsere z-Achse darstellt und Drehen nur in der x-y-Ebene. Danach führen wir einen Basiswechsel durch um in die Standardbasis zu kommen.

Wenn wir Berechnen zunächst M_1 die Drehung um 120°.

$$M_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ\\ \sin 120^\circ\\ 0 \end{pmatrix},\ M_1 \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 120^\circ\\ \cos 120^\circ\\ 0 \end{pmatrix},\ M_1 \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ & 0\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir Berechnen zunächst M_2 die Drehung um 240°.

$$M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 240° \\ \sin 240° \\ 0 \end{pmatrix}, \; M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 240° \\ \cos 240° \\ 0 \end{pmatrix}, \; M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} \cos 240° & \sin 240° & 0 \\ \sin 240° & \cos 240° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir nur noch die Basiswechselmatrix S und die Inversematrix S^{-1} berechnen. (Diese existiert nach Satz aus Lina I).

KEIN BOCK

(c) Wählen Sie zwei gegenüberliegende Kanten von T. Dann sei D die Achse durch die Mittelpunkte dieser beiden Kanten. Geben Sie die Abbildungsmatrix für die Drehung um D um den Winkel 180° bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung:

WAYNE

Aufgabe 2 Würfel, Okta- und Dodekaeder

(a) Es sei $W \subset \mathbb{R}^3$ der Würfel mit den Eckpunkten

$$(1,1,\pm1),\ (-1,1,\pm1),\ (-1,-1,\pm1),\ (1,-1,\pm1)$$

Bestimmen Sie die spezielle Symmetriegruppe $SO(W)$

Lösung:
Als Drehungen haben wir die folgenden Möglichkeiten:

- Identität
- Achse durch die Mittelpunkte 2er gegenüberliegender Seiten
  3 Achsen mit Drehungen um $90°,\ 180°,\ 270°$
- Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte
  4 Achsen mit Drehungen um $120°, 240°$
- Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten
  6 Achsen mit Drehungen um $180°$

Macht insgesammt $\#SO(W) = 24$.

(b) Die Punkte

$$(\pm1,0,0),\ (0,\pm1,0),\ (0,0,\pm1)$$

sind Eckpunkte eines Polyeders $O \subset \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie O. Bestimmen Sie die spezielle Symmeriegruppe $SO(O)$. Vergleichen Sie $SO(\mathrm{O})$ und $SO(W)$. Was stellen Sie fest? Haben Sie eine Erklärung dafür?

Lösung:
Als Drehungen haben wir die folgenden Möglichkeiten:

- Identität
- Achse durch die Mittelpunkte 2er gegenüberliegender Seiten
  4 Achsen mit Drehungen um $120°,\ 240°$
- Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte
  3 Achsen mit Drehungen um $90°,\ 180°,\ 270°$
- Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten
  6 Achsen mit Drehungen um $180°$

Das Macht insgesammt $\#SO(O) = 24$. Wir sehen also, dass die beiden Symmetriegruppen die selben Anzahlen von Elementen haben. Die Drehungen teilen sich dabei auch noch gleich auf die selbe Anzahl von korrespondierenden Achsen auf. Damit sind die beiden Gruppen isomorph zu einander.

(c) Ein Dodekaeder $D \subset \mathbb{R}^3$ ist ein reguläres Polyeder, das von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird. Beschreiben Sie die spezielle Symmetriegruppe $SO(D)$

Lösung:
Das ganze verhält sich analog zu den Köpern aus *a)* und *b)*.

Als Drehungen haben wir die folgenden Möglichkeiten:

- Identität

- Achse durch die Mittelpunkte 2er gegenüberliegender Seiten
  6 Achsen mit Drehungen um 60°, 120°, 180°, 240°
- Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte
  10 Achsen mit Drehungen um 120°, 240°
- Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten
  15 Achsen mit Drehungen um 180°

Das Macht insgesammt $\#SO(D) = 60$.

(d) Recherchieren Sie den Begriff "platonischer Körper" und dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Platonische Körper sind dreidimensionale Polyeder, also Körper, die von Ebenen begrenzt werden. Das besondere an Platonischen Körpern ist ihre "hohe Symmetrie" und Gleichmäßigkeit. Sie werden alle aus jeweils gleichgroßen, regelmäßigen Flächen zusammengesetzt und besitzen viele Symmetrieeigenschaften:
So kann sowohl jeder Eckpunkt, jede Seitenfläche als auch jede Kante auf die jeweiligen anderen gedreht werden. Bereits in Euklids Werk "Die Elemente" wurde gezeigt, dass es nur fünf dieser speziellen Polyeder gibt.
Mögliche Platonische Körper sind der Tetraeder (vier gleichseitige Dreiecke), der Würfel (sechs Quadrate), der Oktaeder (acht gleichseitige Dreiecke), der Dodekaeder (12 regelmäßige Fünfecke) und der Ikosaeder (20 gleichseitige Dreiecke).
Diese Körper sind schon seit der Antike bekannt, ihre Symmetriegruppen treten an einigen Stellen der Mathematik wieder auf. Auch in der Natur treten einige Regelmäßigkeiten in Form von Platonischen Körpern auf (Kristalle von Mineralien, Struktur einiger Kohlenwasserstoffe.

Aufgabe 3 Solitaire

(a) Bestimmen Sie alle Endpositionen des des Solitairspiels mit genau zwei Steinen.

(b) Führen Sie die Diskussion aus der Vorlesung für das Spielfeld (siehe Zettel) durch.