

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Ansgar Schneider

Aufgabe 1a) Gesucht: Funktion $f : A \rightarrow B$, mit A, B cpos, f nicht stetig.Sei f f ist nicht stetig, denn für jede Kette $K \subseteq A$ gilt $\sup f(K) = \dots$ b) Z.z. $f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B$ stetig $\Rightarrow f \circ g : A \rightarrow C$ stetig, mit A, B, C cpo.**Beweis:**Sei $f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B$ stetig, A, B, C cpos und $K \subseteq A$ eine Kette. Dann ist $(f \circ g)(K) = f(g(K))$.(1) g stetig $\Rightarrow G := g(K) \subseteq B$ Kette. Da f stetig $\Rightarrow f(G) = f(g(K)) = (f \circ g)(K) \subseteq C$ Kette.(2) f stetig $\Rightarrow \forall K' \subseteq B$ Kette : $f(\sup K') = \sup f(K')$ und g stetig $\Rightarrow \forall K' \subseteq A$ Kette : $g(\sup K') = \sup g(K')$.Sei $G := g(K) \subseteq B$ Kette (nach (1)). $\Rightarrow (f \circ g)(\sup K) = f(g(\sup K)) = f(\sup g(K)) = f(\sup G) = \sup f(G) = \sup f(g(K)) = \sup (f \circ g)(K)$. \square **Aufgabe 2****Aufgabe 3****Aufgabe 4**Seien D_1, D_2 cpos und $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow D_1$ stetig.Z.z. $fix_{f \circ g} = f(fix_{g \circ f})$ und $fix_{g \circ f} = g(fix_{f \circ g})$.**Beweis:**Nach Aufgabe 1 gilt $f \circ g : D_2 \rightarrow D_2$ stetig und $g \circ f : D_1 \rightarrow D_1$ stetig. Dann gilt nach dem Fixpunktsatz: $fix_{f \circ g}$ und $fix_{g \circ f}$ existieren und

$$fix_{f \circ g} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{(f \circ g)^n(\perp_{D_2})\}, \quad fix_{g \circ f} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{(g \circ f)^n(\perp_{D_1})\}$$

Da sowohl $\{(f \circ g)^n(\perp_{D_2}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ als auch $\{(g \circ f)^n(\perp_{D_1}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ Ketten sind (siehe Beweis zu Satz 3.7), gilt:

$$\begin{aligned}
f(\text{fix}_{g \circ f}) &= f(\sup_{n \in \mathbb{N}} \{(g \circ f)^n(\perp_{D_2})\}) \\
&\stackrel{f \text{ stetig}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f((g \circ f)^n(\perp_{D_2}))\} \\
&\stackrel{\text{Umordnung}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{(f \circ g)^n(f(\perp_{D_2}))\} \\
&\stackrel{(*)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{(f \circ g)^n(\perp_{D_1})\} \\
&= \text{fix}_{f \circ g}
\end{aligned}$$