# Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

## Übungsblatt 6

Abgabe: Bis Dienstag, den 6.12.2011, 10Uhr

---

Aufgabe 1 (Die additive Gruppe von $\mathbb{Q}$; 10 Punkte).
Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt ist, d.h. für jede **endliche** Teilmenge $M \subset \mathbb{Q}$ gilt

$$\langle M \rangle \subsetneq \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 2 (Zykelzerlegungen; 3+4+3 Punkte).
Es sei $n \geq 1$. Zwei Zykel $c_1 = (i_1 \ \cdots \ i_k)$ und $c_2 = (j_1 \ \cdots \ j_l)$ in $S_n$ heißen *disjunkt*, falls

$$\forall \mu = 1, ..., k, \ \nu = 1, ..., l: \quad i_\mu \neq j_\nu.$$

a) Es seien $c_1$ und $c_2$ zwei disjunkte Zykel in $S_n$. Zu zeigen ist $c_1 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1$.
b) Beweisen Sie folgende Aussage:
**Satz.** *Es seien $c_1$, ..., $c_s$ und $d_1$, ..., $d_t$ Zykel, so dass $c_i$ und $c_j$ für $1 \leq i < j \leq s$ und $d_k$ und $d_l$ für $1 \leq k < l \leq t$ disjunkt sind. Aus*

$$c_1 \cdot \cdots \cdot c_s = d_1 \cdot \cdots \cdot d_t$$

*folgt*

$$\{c_1, ..., c_s\} = \{d_1, ..., d_t\},$$

*d.h. $s = t$ und die Zykel $c_1$, ..., $c_s$ stimmen mit den Zykeln $d_1$, ..., $d_s$ bis auf die Reihenfolge überein.*
c) Leiten Sie das folgende Ergebnis ab:
**Folgerung.** *Jede Permutation $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$ besitzt eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Darstellung*

$$\sigma = c_1 \cdot \cdots \cdot c_s$$

*als Produkt paarweise disjunkter Zykel.*

Aufgabe 3 (Rechnen in der symmetrischen Gruppe; 5+5+5 Punkte).
a) Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 5 & 7 & 13 & 14 & 1 & 12 & 10 & 8 & 9 & 2 & 6 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

als Produkt disjunkter Zykel.

b) Stellen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 4 & 9 & 3 & 10 & 5 & 2 & 8 & 12 & 6 & 13 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Transpositionen dar.
c) Geben Sie das Vorzeichen der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 6 & 5 & 10 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 4 (Gruppenwirkungen; 2+2+1 Punkte).
Für die folgenden Beispiele einer Gruppe $G$, einer Menge $M$, eines Elements $g \in G$ und eines Elements $x \in M$ ist das Element $g \cdot x$ anzugeben. Dabei sei die Gruppenwirkung $\sigma \colon G \times M \longrightarrow M$ die in der Vorlesung eingeführte.
a) $G := S_7$, $M := \{1, \ldots, 7\}$, $g := (1\;3\;6) \cdot (3\;5)$, $x := 5$.
b) $G := \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, $M := \mathbb{R}^2$, $g$ die Drehung um den Winkel $\pi/4$, $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $M := \mathbb{R}^2$, $g := \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.