Übung 2

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Blatt.
Zu zeigen: G ist ein Baum $\Leftrightarrow G' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(v))$ ist ein Baum.
Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei G ein Baum.
(1) In G' kann kein Kreis entstanden sein, da keine Kanten hinzu kamen.
(2) G' ist zusammenhängend: Da v ein Blatt ist, gibt es genau einen Knoten, der adjazent zu v ist. Damit kann durch das Entfernen von v keine neue Zusammenhangskomponente entstehen.
"$\Leftarrow$": Sei $G' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(v))$ ein Baum.
(1) G ist kreisfrei: G' war kreisfrei; der hinzugefügte Knoten v kann nicht Teil eines neuen Kreises sein da $d(v) = 1$ gilt, jeder auf einem Kreis liegende Knoten aber mindestens Grad 2 haben muss.
(2) G ist zusammenhängend,da keine Kanten entfernt worden sind und ein Knoten mit genau einer Kante hinzugefügt worden ist. $\square$

Aufgabe 2.

Zu zeigen: Ein Baum G mit Maximalgrad $\Delta(G)$ hat mindestens $\Delta(G)$ Blätter.
Die Aussage ist offensichtlich falsch für Bäume mit unendlich vielen Knoten (man betrachte z.B. einen unendlichen Pfad). Darum beschränken wir uns auf eine endliche Anzahl von Knoten.
Beweis:
Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| < \aleph_0$ und Maximalgrad $\Delta(G)$. D.h. es existiert ein Knoten $v \in V$ mit $d(v) = \Delta(G) =: d$. Falls $\Delta(G) = 0$ folgt die Behauptung direkt, also nehmen wir im folgenden $\Delta(G) \geq 1$ an. Seien $G_1, \ldots, G_d$ die Unterbäume von v; dann gilt $1 \leq |G_i| < \omega$. Seien $\tilde{G}_i$ die Bäume die man durch Hinzufügen von (1) v und (2) der Originalkante von v nach G_i aus G_i enthält. Nach dem "Blattlemma" (2.5) haben alle $\tilde{G}_i$ jeweils mindestens 2 Blätter. Betrachten wir also wieder den Originalgraphen $G = \bigcup \tilde{G}_i$, kann jedes $\tilde{G}_i$ höchstens ein Blatt verloren haben (nämlich v falls es nicht selber ein Blatt in G ist). Damit enthält G mindestens $\Delta(G)$ Blätter (in jedem G_i eines). $\square$

Aufgabe 3.

Lösung:

Wir haben den Namen **MAXWISNIE** gewählt. Ins Alphabet modulo 9 und um eins inkrementiert ergibt sich der Code 527612616. Für den Algorithmus führen wir eine Liste mit markierten Knoten (müssen noch eingefügt werden und stehen nicht in der Liste) und den verbleibenden Code. (Wir waren uns bei der Aufgabenstellung im unklaren ob wir nun die ersten 9 oder die ersten 7 nehmen sollen)

Runde	Code	Marked	New Edge
0	527612616	$\{3, 4, 8, 9, 10, 11\}$	5-3
1	27612616	$\{4, 5, 8, 9, 10, 11\}$	2-4
2	7612616	$\{5, 8, 9, 10, 11\}$	7-5
3	612616	$\{7, 8, 9, 10, 11\}$	6-7
4	12616	$\{8, 9, 10, 11\}$	1-8
5	2616	$\{9, 10, 11\}$	2-9
6	616	$\{2, 10, 11\}$	6-2
7	16	$\{10, 11\}$	1-10
8	6	$\{1, 11\}$	6-1
9	-	$\{6, 11\}$	6-11

Tabelle 1: Ausführung der Decodierung vom Prüfercode

Der dazugehörige Graph sieht wie folgt aus:

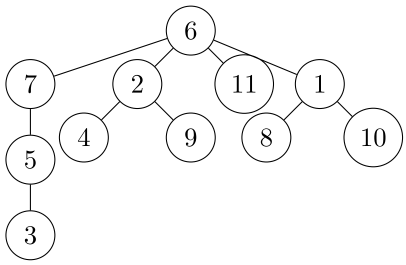
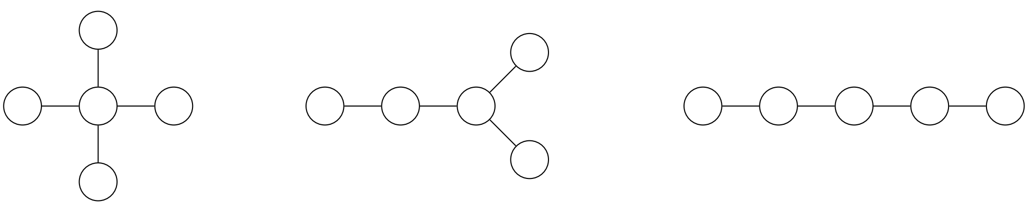


Tabelle 2: Baum für den Prüfercode 527612616

Aufgabe 4.

a)

Wie viele Klassen isomorpher Bäume gibt es in T_5?
Lösung:
Es gibt genau drei Klassen isomorpher Bäume:



(1) Alle isomorphen Bäume mit maximaler Pfadlänge 3 (links).
(2) Alle isomorphen Bäume mit maximaler Pfadlänge 4 (mitte).
(3) Alle isomorphen Bäume mit maximaler Pfadlänge 5 (rechts).

b)

Gesucht: $|[T]|$ für alle Isomorphieklassen. Seien T_1, T_2, T_3 die Bäume aus (a), dann ist:

1. $|[T_1]| = 5$
2. $|[T_2]| = 120$
3. $|[T_3]| = 120$

T_2, T_3 ergeben sich, da wenn man einmal spiegelt wieder der selbe Graph herraus kommt. Daher haben wir $5!/2$ viele Isomorphismen. Bei T_1 können wir wählen welches der 5 Elemente wir in die Mitte stellen. Danach sind alle Graphen gleich.

c)

$\sum_{[T]} |[T]| = |[T_1]| + |[T_2]| + |[T_3]| = 5+60+60 = 125 = 5^3$ Dieses Ergebnis ist auch sinvoll, da die Summe alle Bäume ergeben muss und wir nach dem Satz von Caley wissen, dass dies eben 125 sind.