Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

12.06.2012
Abgabe: 19.06.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 8

zur Analysis II

24. *Stetige Abbildungen auf Punktmengen* *(4+2+2 Punkte)*

    (i) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

    $$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}\,.$$

    (ii) Ist das stetige Bild $f(M)$ einer beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wieder offen bzw. abgeschlossen? Geben Sie Beispiele an!

    (iii) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Erfülle $M \subset \mathbb{R}^n$ die Heine-Borel-Eigenschaft. Dann erfüllt auch $f(M)$ die Heine-Borel-Eigenschaft. (Benutzung von Folgen nicht erlaubt!)

25. *Wachstum spezielle Funktionen* *(8 Punkte)*

    Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig mit folgenden Eigenschaften

    $$\begin{aligned} &f(x) > 0 \quad \text{für alle } x \neq 0, \\ &f(cx) = cf(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } c > 0. \end{aligned}$$

    Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

    $$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

26. *Wegzusammenhang* *(4+2+2 Punkte)*

    Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *wegzusammenhängend,* wenn es für je zwei Punkte $x, y \in A$ eine stetige Funktion $\gamma\colon [0,1] \to A$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Man nennt γ einen *stetigen Weg von x nach y.*

    (i) Seien $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig und A wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann auch $f(A)$ wegzusammenhängend ist.

    (ii) Zeigen Sie, dass genau dann $A \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, wenn A ein Intervall ist, d.h. wenn für alle $x, y \in A$, $x \leq y$, gilt $[x, y] \subset A$.

    (iii) Können Sie den bekannten Zwischenwertsatz aus der Analysis I auch auf Funktionen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern?

Bitte wenden!

27. *Stetigkeit der Umkehrfunktion* *(4+4 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1-x^2}\,,$$

einen Homöomorphismus von $(0,1)$ nach $\mathbb{R}^+$ definiert, d.h. f ist invertierbar zwischen den angegebenen Mengen und sowohl f als auch f^{-1} sind stetig.

(ii) Sei die Funktion $f\colon [0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x-1, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist und invertierbar, aber die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,2] \to [0,1) \cup [2,3]$ nicht stetig ist.