Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

Übungsblatt 7

Abgabe: Bis Dienstag, den 13.12.2011, 10Uhr

Zusatzaufgabe 1 (Vorzeichen und Determinante; 5+5 Bonuspunkte).
a) Zeigen Sie, dass es zu jeder Permutation $\sigma \in S_n$ genau einen linearen Automorphismus $L_\sigma \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$L_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gibt und dass

$$\begin{array}{rcl} \iota\colon S_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & L_\sigma \end{array}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Dabei bezeichne $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.)
b) Beweisen Sie

$$\forall \sigma \in S_n : \quad \mathrm{Sign}(\sigma) = (\mathrm{Det} \circ \iota)(\sigma) = \mathrm{Det}(L_\sigma).$$

Aufgabe 1 (Die entgegengesetzte Gruppe; 10 Punkte).
Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und

$$\begin{array}{rcl} \star\colon G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & h \cdot g. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $G^{\mathrm{op}} := (G, \star)$ eine Gruppe ist. Sie heißt die zu G *entgegengesetzte Gruppe*.

Aufgabe 2 (Wirkungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$; 5+5 Punkte).
a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,z) & \longmapsto & \exp(t) \cdot z \end{array}$$

eine Linkswirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ gegeben ist. Geben Sie für jede komplexe Zahl z die Bahn $\mathbb{R} \cdot z$ und die Standgruppe $\mathbb{R}_z$ an. Fertigen Sie eine Skizze der Bahnen an.
b) Es sei

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,z) & \longmapsto & \exp(i \cdot t) \cdot z. \end{array}$$

Weisen Sie nach, dass σ eine Linkswirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ist, und geben Sie für jede komplexe Zahl z die Bahn $\mathbb{R} \cdot z$ und die Standgruppe $\mathbb{R}_z$ an. Skizzieren Sie die Bahnen.

Aufgabe 3 (Wirkung einer Untergruppe von S_8; 4+6 Punkte).
Es sei

$$\sigma := (1\ 2\ 3) \cdot (5\ 6\ 7\ 8) \in S_8.$$

a) Bestimmen Sie die Ordnung von σ.
b) Es seien $G := \langle \sigma \rangle \subset S_8$ und

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : G \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\} & \longrightarrow & \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\ (\sigma^i, j) & \longmapsto & \sigma^i(j). \end{array}$$

Geben Sie für jedes der Elemente 1, 4 und 5 seine G-Bahn und seine Standgruppe in G an.

Aufgabe 4 (Zyklische Gruppen; 10 Punkte).
Es seien $m, n > 0$ positive ganze Zahlen, so dass

$$\mathrm{ggT}(m,n) = 1.$$

Zeigen Sie, dass das Element $(1,1) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ Ordnung $m \cdot n$ hat und folgern Sie

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{m \cdot n}.$$