Lineare Algebra Übung II

Tutor : Elena

Max Wisniewski

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Normalform folgender Quadrik:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4xz - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z + 5 = 0\right\}$$

Besitzt F einen Mittelpunkt?

Als erstes bestimmen wir die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, aus einer symmetrischen Matrix, einem linear Teil und einer Konstante.

$$f(x) = \widetilde{x}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^t \widetilde{x} + 5$$

Mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nun gehen wir das Verfahren aus der Vorlesung durch:

(1) Symmetrisiere M

Wir haben M schon symmetrisch gewählt.

(2) Ist $b \in Im(M)$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{III-2I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \overset{III+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile kann nicht erfüllt werden $\Rightarrow b \notin Im(M)$.
Nun können wir die Konstante Eleminieren und erhalten die Form:
$f(x,y,z) = x^2 + 4xz - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z$

(3) Auf Normalform bringen

$$x^2 + 4xz - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z$$

$$= \left(x^2 + 2x(2z) + 4z^2\right) - 4z^2 - 3y^2 + 6yz + z^2 + x + 2y - z$$

$$= (x + 2z)^2 - 3z^2 - 3y^2 + 6yz + x + 2y - z$$

Setzte $x_1 = x + 2z$, $y_1 = y$, $z_1 = z$

$$\Rightarrow x_1^2 - 3z_1^2 - 3y_1^2 + 6y_1z_1 + x_1 + 2y_1 - 3z_1$$

$$= x_1^2 - 3\left(z_1^2 + 2z_1y_1 + y_1^2\right) + x_1 + 2y_1 - 3z_1$$

Setze $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1 + y_1$

$$\Rightarrow x_2^2 - 3z_2^2 + x_2 + 5y_2 - 3z_2$$

Setze $x_3 = x_2$, $-y_3 = x_2 + 5y_2 - 3z_2$, $z_3 = z_2$

$$\Rightarrow x_3^2 - 3z_3^2 - y_3$$

Nun normieren wir noch : $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3$, $z_4 = \frac{z_3}{\sqrt{3}}$

(4) Normalform

Aus der letzen Umforung erhalten wir die Normalform der Quadrik, mit

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 - z^2 - y = 0\right\}$$

Die Komponenten könnte man nun durch Umordnung auf die richige Form bringen, aber dies erscheint uns ersteinmal nicht so wichtig.

Aufgabe 2

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $F_s \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$x_1^2 + \left(2s^2 + 1\right)\left(x_2^2 + x_3^2\right) - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - \left(2s^2 - 3s + 1\right) = 0$$

Bestimmen Sie die Normalform.

Wir stellen zunächst die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \widetilde{x}^t M \widetilde{x} + b^t \widetilde{x} + c$$

Mit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2s^2+1 & -1 \\ 1 & -1 & 2s^2+1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -\left(2s^2 - 3s + 1\right)$

(1) Mache aus M eine symmetrische Matrix

Nach Konstruktion ist unser M schon symmetrisch.

(2) Ist $b \in Im\,(M)$?

Da $b = 0$ und $0 \in Im\,(M)$ liegen muss, ist b automatisch im Bild. Da der linear Term auch schon 0 ist, brauchen wir keine Translation mehr darauf.

(3) Auf Normalform bringen

Wir betrachten die Konstante erst wieder am Schluss. Da wir in der Umformung keine Translation ausführen, wird sich die Konstante auch nicht mehr ändern.

$$x_1^2 + \left(2s^2 + 1\right)\left(y_1^2 + z_1^2\right) - 2x_1y_1 + 2x_1z_1 - 2y_1z_1$$

$$\left(x_1 - (y_1 - z_1)\right)^2 - (y_1 - z_1)^2 + \left(2s^2 + 1\right)\left(y_1^2 + z_1^2\right) - 2y_1z_1$$

Setze $x_2 = x_1 - y_1 - z_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$

$$\Rightarrow x_2^2 - (y_2 - z_2)^2 + \left(2s^2+1\right)\left(y_2^2 + z_2^2\right) - 2y_2z_2$$

$$= x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 + \left(2s^2+1\right)\left(y_2^2 + z_2^2\right)$$

$$= x_2^2 + \left(2s^2\right) y_2^2 + \left(2s^2\right) z_2^2$$

Wir habe nun schon eine Diagonalisierte Form erreicht. Nun setzen wir wieder die Konstante dazu und wollen die Endgültige Form erreichen.

$$x_2^2 + \left(2s^2\right) y_2^2 + \left(2s^2\right) z_2^2 - \left(2s^2 - 3s + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 + \left(2s^2\right) y_2^2 + \left(2s^2\right) z_2^2 = 2s^2 - 3s + 1$$

Sollte die Konstante 0 sein, ($\Rightarrow 2s^2 \neq 0$), können wir durch ersetzen
$x_3 = x_2$, $y_3 = \frac{y_2}{\sqrt{2}s}$, $z_3 = \frac{z_2}{\sqrt{2}s}$ und die Form

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\right\}$$

Sollte die Konstante ungleich 0 sein formen wir ersteinmal weiter um:

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{2s^2 - 3s + 1} + \frac{2s^2 y_2^2}{2s^2 - 3s + 1} + \frac{2s^2 z_2^2}{2s^2 - 3s + 1} = 1$$

Nun müssen wir unterscheiden, ob $2s^2 - 3s + 1$ größer oder kleiner 0 ist. Diese Werte sind für s berechenbar, aber da es hier nicht gefordert wurde unterscheiden wir es einfach so:
$2s^2 - 3s + 1 > 0 \Rightarrow x_3 = \left(\sqrt{2s^2 - 3s + 1}x_2\right)$, $y_3 = \left(\sqrt{\frac{2s^2-3s+1}{2s^2}}y_2\right)$, $z_3 = \left(\sqrt{\frac{2s^2-3s+1}{2s^2}}z_2\right)$

$$\Rightarrow F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

$2s^2 - 3s + 1 < 0 \Rightarrow x_3 = -\left(\sqrt{-\left(2s^2 - 3s + 1\right)}x_2\right)$, $y_3 = -\left(\sqrt{-\frac{2s^2-3s+1}{2s^2}}y_2\right)$, $z_3 = -\left(\sqrt{-\frac{2s^2-3s+1}{2s^2}}z_2\right)$

$$\Rightarrow F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 - y^2 - z^2 = 1\right\}$$

(4) Ergebnis

Wir haben 3 Mögliche Normalformen gefunde:
$\left(2s^2 - 3s + 1\right) = 0 \ : \ F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\right\}$
$\left(2s^2 - 3s + 1\right) > 0 \ : \ F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$
$\left(2s^2 - 3s + 1\right) < 0 \ : \ F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 - y^2 - z^2 = 1\right\}$

Aufgabe 3

Sei $V = 0 + \mathbb{R}^3$, $f \ : \ V \to \mathbb{R}$ quadratisch und $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\right\}$. Geben Sie alle möglichen Normalformen von F an und skizzieren Sie diese.

Wir brauchen uns hier nur die Verschiedenen Kombinationen von Vorzeichen zu Betrachten und, ob 0 oder 1 die Konstante ist. Dies für die 3 Fälle, dass $rg(f) = 3, 2, 1$ ist:

Normalform	Beschreibung	Skizze
$rg\,(f) = 3$		
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	Kreis (Elipsoid)	
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	einschaliges Hyperbolid	
$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	zweischaliges Hyperbolid	
$-x^2 - y^2 - z^2 = 1$	$\emptyset$	
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Punkt(egal welche Vorzeichen)	.
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Doppelkegel	
$rg\,(f) = 2$		
$x^2 + y^2 - z = 0$	elliptisches Parabolid(Topf)	
$x^2 - y^2 - z = 0$	hyperbolisches Parabolid(Sattel)	
$x^2 + y^2 = -1$	leere Menge	

Normalform	Beschreibung	Skizze
$x^2 + y^2 = 1$	Zylinder(eliptisch)	
$x^2 - y^2 = 1$	hyperbolischer Zylinder	
$x^2 + y^2 = 0$	Gerade(hier z-Achse)	
$x^2 - y^2 = 0$	Ebenenkreuz	
$rg\,(f) = 1$		
$x^2 - y = 0$	parabolischer Zylinder	
$x^2 = 1$	Ebenen (parallel)	
$-x^2 = 1$	Leere Menge	
$x^2 = 0$	Ebene (einfach)	

Aufgabe 4

Fasse Sie die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wie gewohnt als 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{1, i\}$ auf.

a) Bestimmen Sie Basen von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$.
$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:
Wie in der VL gezeigt, können wir eine Basis des Raumes bestimmen, indem wir das Tensorprodukt der Basen nehmen:

$$\text{Basis von } \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} := \{(1 \otimes 1), (1 \otimes i), (i \otimes 1), (i \otimes i)\}$$

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$:

$$\text{Basis von } \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} := \{(1 \otimes 1), (i \otimes 1)\}$$

b) Bestimmen Sie die Basis von $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.
Da wir diesmal die Basis bezüglich des Körpers $\mathbb{C}$ arbeiten, können wir die einfachste Basis wählen:

$$\text{Basis von } \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} := \{(1 \otimes 1)\}$$

c) Zeigen Sie: Ist V ein K-Vektorraum, so gilt $V \otimes_K K \simeq V$ und $K \otimes_K V \simeq V$.

Beweis Um diesen Satz zu zeigen, wählen wir Basen für V und fassen K als 1-dimensionalen K-Vektorraum auf. Für V wählen wir ersteinmal die kanonischen Basen.

Nun stellen wir eine lineare Funktion $f : V \otimes_K K \to V$ auf. Mit
Für alle e_i aus der Basis von V:
$f(e_i \otimes 1) = e_i$.
Betrachten wir nun einmal die Dimensionen der beiden Bereiche, sehen wir, dass
$\dim(V \otimes_k K) = \dim(V) \cdot \dim(K) = \dim(V)$.
Weiterhin wissen wir, dass keine der Basisvektoren auf die 0 abgebildet wird, da e_i nicht die 0 ist. Somit kann nur die 0 auf 0 abgebildet werden.
$\Rightarrow Ker(f) = \{0\} \Rightarrow f$ ist injektiv.
Aus unserer ersten Überlegung folgt aus $Ker(f) = 0$ und der Dimensionsformel, dass
$\dim(Im(f)) = \dim(V) \Rightarrow f$ ist surjektiv.
f ist eine bijektive Abbildung zwischen $V \otimes_k K$ und V, somit sind die beiden Isomorph zu einander.

Stellen wir $g : K \otimes_k V \to V$, mit $\forall e_i \in$Basis : $f(1 \otimes e_i) = e_i$ auf, folgen die Überelgungen analog zu f.

Wir haben also sowohl $K \otimes_K V \simeq V$ als auch $V \otimes_k K \simeq V$ gezeigt. ■