Übung 2

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Blatt.
Zu zeigen: G ist ein Baum $\Leftrightarrow G' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(v))$ ist ein Baum.
Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei G ein Baum.
(1) In G' kann kein Kreis entstanden sein, da keine Kanten hinzu kamen.
(2) G' ist zusammenhängend: Da v ein Blatt ist, gibt es genau einen Knoten, der adjazent zu v ist. Damit kann durch das Entfernen von v eine neue Zusammenhangskomponente entstehen. **(MUSS HIER MEHR HIN?)**
"$\Leftarrow$": Sei $G' := (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(v))$ ein Baum.
(1) G ist kreisfrei: G' war kreisfrei; der hinzugefügte Knoten v kann nicht Teil eines neuen Kreises sein da $d(v) = 1$ gilt, jeder auf einem Kreis liegende Knoten aber mindestens Grad 2 haben muss.
(2) G ist zusammenhängend,da keine Kanten entfernt worden sind und ein Knoten mit genau einer Kante hinzugefügt worden ist. □

Aufgabe 2.

Zu zeigen: Ein Baum G mit Maximalgrad $\Delta(G)$ hat mindestens $\Delta(G)$ Blätter.
Die Aussage ist offensichtlich falsch für Bäume mit unendlich vielen Knoten (man betrachte z.B. einen unendlichen Pfad). Darum beschränken wir uns auf eine endliche Anzahl von Knoten.
Beweis:
Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| < \omega$ und Maximalgrad $\Delta(G)$. Dh. es existiert ein Knoten $v \in V$ mit $d(v) = \Delta(G) =: d$. Falls $\Delta(G) = 0$ folgt die Behauptung direkt, also nehmen wir im folgenden $\Delta(G) \geq 1$ an. Seien $G_1, \ldots, G_d$ die Unterbäume von v; dann gilt $1 \leq |G_i| < \omega$. Seien $\tilde{G}_i$ die Bäume die man durch Hinzufügen von (1) v und (2) der Originalkante von v nach G_i aus G_i enthält. Nach dem "Blattlemma" (2.5) haben alle $\tilde{G}_i$ jeweils mindestens 2 Blätter. Betrachten wir also wieder den Originalgraphen $G = \bigcup \tilde{G}_i$, kann jedes $\tilde{G}_i$ höchstens ein Blatt verloren haben (nämlich v falls es nicht selber ein Blatt in G ist). Damit enthält G mindestens $\Delta(G)$ Blätter (in jedem G_i eines). □

Aufgabe 3.

Beweis:

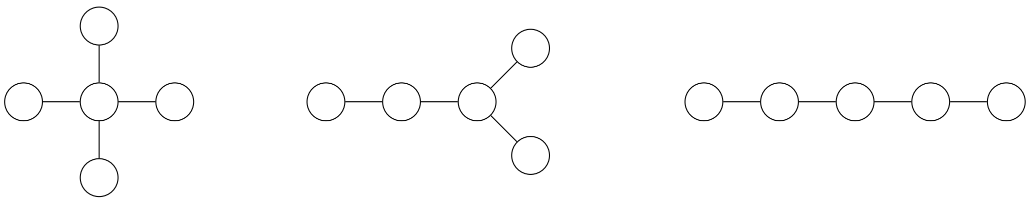
□

Aufgabe 4.

a)

Wie viele Klassen isomorpher Bäume gibt es in T_5?
Lösung:

Es gibt genau drei Klassen isomorpher Bäume:



(1) Alle isomorphen Bäume mit maximaler Pfadlänge 3 (links).
(2) Alle isomorphen Bäume mit maximaler Pfadlänge 4 (mitte).
(3) Alle isomorphen Bäume mit maximaler Pfadlänge 5 (rechts).

b)

Gesucht: $|[T]|$ für alle Isomorphieklassen. Seien T_1, T_2, T_3 die Bäume aus (a), dann ist:

1. $|[T_1]|$

c)

$\sum_{[T]} |[T]| = 125 = 5^3$ (Auch Satz von Cayley) $\square$