

Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1

Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \geq 0\}$.

1. $g(M) \subseteq M$

Sei $x \in M$, dann gilt

$$g(x) = \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\geq 0} \geq 0$$

Also ist $g(x) \in M \Rightarrow g(M) \subseteq M$.

2. $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für $x \neq y$

Seien $x, y \in M$, $x \neq y$. Sei weiterhin o.B.d.A. $x > y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y} \right| \\ &= \left| \underbrace{x - y}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}}_{<0} \right| \\ &< |x - y| \end{aligned}$$

3. g besitzt keinen Fixpunkt in M

Beweis durch Widerspruch: Sei $x^* \in M$ Fixpunkt von g . Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x^*) &= x^* = x^* + \frac{1}{1+x^*} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{1+x^*} \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch, da es keine Zahl x gibt, für die $\frac{1}{1+x} = 0$ gilt. \square

Dies ist kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz, da es sich bei g nicht um eine Kontraktion handelt: Da $\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, gibt es keine Konstante $\alpha \in [0, 1)$, sodass $|g(x) - g(y)| \leq \alpha |x - y|$. Beweis:

$$|g(x) - g(y)| = \left| \underbrace{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}}_{x, y \rightarrow \infty \rightarrow 0} + x - y \right|$$

Für jedes feste $\alpha \in [0, 1)$... bla

Aufgabe 2

Aufgabe 3