Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Ansgar Schneider

Aufgabe 1

a) Gesucht: Funktion $f : A \to B$, mit A, B cpos, f nicht stetig.
Sei $|A| \geq 2, |B| \geq 2$, sei $\alpha \neq \perp_A \in A$ und $\beta \neq \perp_B \in B$.
Sei $f : A \to B$, mit $a \mapsto \begin{cases} \perp_B & \text{, falls } a \neq \perp_A \\ \beta & \text{, sonst} \end{cases}$
f ist nicht stetig, da für die Kette $\{\perp_A, \alpha\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sup f(\{\perp_A, \alpha\}) &= \sup\{\beta, \perp_B\} \\ &= \beta \\ &\neq \perp_B \\ &= f(\alpha) \\ &= f(\sup\{\perp_A, \alpha\}) \end{aligned}$$

b) Z.z. $f : B \to C, g : A \to B$ stetig $\Rightarrow f \circ g : A \to C$ stetig, mit A, B, C cpo.

Beweis:
Sei $f : B \to C, g : A \to B$ stetig, A, B, C cpos und $K \subseteq A$ eine Kette. Dann ist $(f \circ g)(K) = f(g(K))$.
(1) g stetig $\Rightarrow G := g(K) \subseteq B$ Kette. Da f stetig $\Rightarrow f(G) = f(g(K)) = (f \circ g)(K) \subseteq C$ Kette.

(2) f stetig $\Rightarrow \forall K' \subseteq B$ Kette $: f(\sup K') = \sup f(K')$ und
g stetig $\Rightarrow \forall K' \subseteq A$ Kette $: g(\sup K') = \sup g(K')$.
Sei $G := g(K) \subseteq B$ Kette (nach (1)).
$\Rightarrow (f \circ g)(\sup K) = f(g(\sup K)) = f(\sup g(K)) = f(\sup G) = \sup f(G) = \sup f(g(K)) = \sup(f \circ g)(K)$. $\square$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Seien D_1, D_2 cpos und $f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to D_1$ stetig.
Z.z. $fix_{f \circ g} = f(fix_{g \circ f})$ und $fix_{g \circ f} = g(fix_{f \circ g})$.

Beweis:
Nach Aufgabe 1 gilt $f \circ g : D_2 \to D_2$ stetig und $g \circ f : D_1 \to D_1$ stetig. Dann gilt nach dem Fixpunktsatz: $fix_{f \circ g}$ und $fix_{g \circ f}$ existieren und

$$fix_{f \circ g} = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{(f \circ g)^n(\perp_{D_1})\}, \quad fix_{g \circ f} = \sup_{n \in \mathbb{N}}\{(g \circ f)^n(\perp_{D_2})\}$$

Da sowohl $\{(f \circ g)^n(\perp_{D_1}) | \, n \in \mathbb{N}\}$ als auch $\{(g \circ f)^n(\perp_{D_2}) | \, n \in \mathbb{N}\}$ Ketten sind (siehe Beweis zu Satz 3.7), gilt:

$$
\begin{aligned}
f(fix_{g \circ f}) &= f(\sup_{n \in \mathbb{N}}\{(g \circ f)^n(\perp_{D_2})\}) \\
&\overset{f \text{ stetig}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}}\{f((g \circ f)^n(\perp_{D_2}))\} \\
&\overset{\text{Umordnung}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}}\{(f \circ g)^n(f(\perp_{D_2}))\} \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}}\{(f \circ g)^n(\perp_{D_1})\} \\
&= fix_{f \circ g}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(fix_{f \circ g}) &= g(\sup_{n \in \mathbb{N}}\{(f \circ g)^n(\perp_{D_1})\}) \\
&\overset{g \text{ stetig}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}}\{g((f \circ g)^n(\perp_{D_1}))\} \\
&\overset{\text{Umordnung}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}}\{(g \circ f)^n(g(\perp_{D_1}))\} \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}}\{(g \circ f)^n(\perp_{D_2})\} \\
&= fix_{g \circ f}
\end{aligned}
$$

(*) gilt, weil f, g strikt sind....blabla $\square$