Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Ansgar Schneider

Aufgabe 1 *Typüberprüfung*

Bestimmen Sie die Typen der folgenden Funktionen.

(i) $\lambda f\,x.(f\,x) + 1$
Lösung:
Die ersten beiden Hinweise, die wir haben, ist, dass wir eine Konstante $1 \in K^{\mathbb{N}_\perp}$ und eine Funktion $+ : [\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp]$. Da wir f in die + Funktion stecken, muss der Rückgabetyp $\mathbb{N}_\perp$ sein. Über die Eingabe müssen wir nicht mehr wissen nur, dass f eine Variable nimmt und das x daher diesen Typ haben muss.

$\lambda f\,x.(f\,x) + 1 \;:\; [[D \to \mathbb{N}_\perp] \to \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp]$

Nun setzten wir die Variablen ein und überprüfen.
Sei $f \in X^{[D \to \mathbb{N}_\perp]}$ und $x \in X^D$.
Dann ist das einsetzen Korrekt, da $(\lambda f\,x.(f\,x) + 1)fx = (f\,x) + 1 \;:\; \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$
$1 \in K^{\mathbb{N}_\perp}$ das gilt also, nun überprüfen wir, ob $f(\,x) \;:\; \mathbb{N}$ erfüllt.
$f \in X^{[D \to \mathbb{N}_\perp} x \in X^D$, daher ist $fx \;:\; \mathbb{N}_\perp$.

Der Typ ist daher korrekt.

(ii) $\lambda(x, y)f\;.\;f\,x\,y$
Lösung:
Sei $x \in X^{D_1}$, $y \in X^{D_2}$ und $f \in X^{D_3}$.
Die Funktion $h = \lambda(x, y)f\;.\;f\,x\,y \;:\; D_1 \times D_2 \to D_3 \to D_4$. Wir müssen also überprüfen, was D_1, D_2, D_3 ist und welchen Rückgabetyp wir erhalten.

Setzten wir $h\,(x, y)f$ ein erhalten wir:
$f\,x\,y \;:\; D_4$.
Damit wir nun am Ende ein Element von einem Typ erhalten (hier hätten auch 3 Atome stehen können).
Daher muss f eine Funktion sein, die beide Elemente x, y aufnehmen kann.
$\Rightarrow D_3 = D_1 \to D_2 \to D_5$. Und da wir nichts anderes tun ist auch $D_4 = D_5$.
Weiter können wir nun nichts mehr sagen, also gilt:
$h \;:\; D_1 \times D_2 \to [D_1 \to D_2 \to D_4] \to D_4$.

(iii) $\lambda f.(f \lambda y.y)$
Lösung:
Sei $f \in X^{D_1}$. Dann hat die Funktion den folgenden Typ $h = \lambda f.(f \lambda y.y) \;:\; D_1 \to D_2$.

Nun setzten wir unser f ein und erhalten
$(f \lambda y.y) \;:\; D_2$.
Nun muss nach selben Überlegungen wie oben das f die Funktion $\lambda y.y \;:\; [D_3 \to D_3]$ schlucken

können.

Daher braucht ist der Typ $f\ :\ [[D_3 \to D_3] \to D_4]$.
Da dies nun der letzte Schritt ist muss $D_4 = D_2$ sein, da $(f\lambda y.y)\ :\ D_2$ gelten muss.

Die FUnktion hat also den folgenden Typ (umbenennung der Typklassen):
$(h = \lambda f.(f\lambda y.y)\ :\ [[T \to T] \to S] \to S$

Aufgabe 2 *Faltung*

Der Faltungsoperator lit sei informall bestimmt durch:
$\underline{\text{lit}} = f(x_1, ...x_n)x_{n+1} = fx_1(fx_2(...(fx_nx_{n+1})))$

(i) Bestimmen Sie den Typ von lit.
Lösung:
tbd

(ii) Definieren Sie den Operator lit im getypten λ - Kalkül unter Verwendung der Gleichungsschreibweise.

(iii) Definieren Sie eine Funktion f im getpyten λ - Kalkül, so dass

$$f(x_1, ..., x_n)x = \begin{cases} wahr & \text{, falls } \exists i \leq n\ :\ x = x_i \\ false & \text{, sonst} \end{cases}$$

(iv) Bearbeiten Sie (i)-(iii) für
$\underline{lit'}f(x_1, ..., x_{n+1}) = (f((...(fx_1x_2)...x_{n+1})$