Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

Ausgabe 2

Ausgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll approximiert werden. Bekannt sind die Werte $f(0) = 0, f(1) = 0, f(1+\varepsilon) = 1$, mit $\varepsilon > 0$. Also sind die Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1+\varepsilon$.

(i) Lagrange-Interpolationspolynom p_L

Für das Polynom p_L gilt:

$$p_L(x) = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot L_k(x) = L_2(x)$$

. Berechne $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{x-0}{(1+\varepsilon)-0} \cdot \frac{x-1}{(1+\varepsilon)-1} = \frac{x^2-x}{\varepsilon^2+\varepsilon}$$

Also gilt: $p_L(x) = \frac{x^2-x}{\varepsilon^2+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}x^2 - \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}x$.
(ii) Newtonsches Interpolationspolynom

Berechne dividierte Differenzen:

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\
f[x_1] &= f(x_1) = 0 \\
f[x_2] &= f(x_2) = 1 \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = 0 \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{\varepsilon} \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$p_N(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{2} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

mit $a_i = f[x_0, ..., x_i]$.

Also ist $p_N(x) = 0 + 0 \prod_{k=0}^{0} (x - x_k) + \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon} \prod_{k=0}^{1} (x - x_k) = \frac{x^2-x}{\varepsilon^2+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon} x^2 - \frac{1}{\varepsilon^2+\varepsilon} x$.
Wie also zu sehen ist, kommen bei beiden Interpolationsarten die gleichen Polynome heraus. Wie an dem Polynom zu sehen ist, wird der Funktionswert an jeder Stelle sehr groß werden, falls der dritte Punkt sehr nach am zweiten liegt.