Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1

Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \geq 0\}$.

1. $g(M) \subseteq M$
   Sei $x \in M$, dann gilt
   $$g(x) = \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\geq 0} \geq 0$$
   Also ist $g(x) \in M \Rightarrow g(M) \subseteq M$.

2. $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für $x \neq y$
   Seien $x, y \in M$, $x \neq y$. Sei weiterhin o.B.d.A. $x > y$. Dann gilt
   $$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y}| \\ &= |\underbrace{x - y}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}}_{<0}| \\ &\leq |x - y| + |\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}| \\ &= \left| x - y + \frac{x - y}{(1+x)(1+y)} \right| \\ &\overset{(1+x)(1+y)>1}{<} |x - y| \end{aligned}$$
   The last line holds, because we do not remove more than $2|x - y|$ such that we cannot remove to much.

3. g besitzt keinen Fixpunkt in M
   Beweis durch Widerspruch: Sei $x^* \in M$ Fixpunkt von g. Dann gilt
   $$\begin{aligned} g(x^*) = x^* &= x^* + \frac{1}{1+x^*} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{1+x^*} \end{aligned}$$
   Das ist aber ein Widerspruch, da es keine Zahl x gibt, für die $\frac{1}{1+x} = 0$ gilt. $\square$

Dies ist kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz, da es sich bei g nicht um eine Kontraktion handelt: Da $\frac{1}{x+1} \overset{x \to \infty}{\to} 0$ und damit

$$|g(x) - g(y)| = |\underbrace{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}}_{\overset{x,y \to \infty}{\to} 0} + x - y|$$

Für jedes feste $\alpha \in [0, 1)$ ist $|g(x) - g(y)| \to |x - y| > \alpha |x - y|$, für x, y groß genug.

Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a)

Zu zeigen: Es existiert ein eindeutiger Fixpunkt von F in $D := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, |x|_\infty \leq 1\}$.

Beweis: (1) $F(D) \subseteq D$
Sei $x \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |F(x)|_\infty &= \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right|_\infty \\ &= \max\{\underbrace{|\frac{1}{3} \overbrace{x_2^2}^{\leq 1} + \frac{1}{8}|}_{\leq 1}, \quad \underbrace{|\frac{1}{4} \overbrace{x_1^2}^{\leq 1} - \frac{1}{6}|}_{\leq 1}\} \\ &\Rightarrow x \in D \end{aligned}$$

(2) F ist Kontraktion
asd

b)

```
function [x] = myfixpoint (f, lambda, start, error)

lastx = start;
x = f(start);

while lambda / (1 - lambda) * norm(lastx - x, inf) > error
    lastx = x;
    x = f(x);
end;
```

Aufgabe 3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare konvexe Funktion mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &f(a) > 0 \text{ und } f(b) > 0 \\ &f'(x) > 0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ für } a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren mit $x_0 = b$ gegen die einzige Nullstelle konvergiert.

Lösung:
Da die Funktion monoton wächst ($f'(x) > 0$) wissen wir, dass die Funktion in a ihr Minimum annimmt und in b ihr Maximum. Wir haben eine Nullstelle in diesem Intervall nach dem Zwischenwertsatz, da $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und f stetig ist. Es ist die einzige Nullstelle, da die Funktion monoton ist.

f ist auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig mit $L = f(b) - f(a)$, da es die maximale Differenz von Werten auf diesem Intervall ist.

Nun wissen wir, dass nach dem Mittelwertsatz ein $x_M \in [a,b]$ existiert mit $f'(x_M) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \tau$. Nach Konvexität wissen wir, dass für $x > x_M$ $f'(x) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, desshalb haben wir auf dem Interval $[x_M, b]$ eine Untereschranke für die erste Ableitung.
Nun gilt $x_M < x*$, da wir sonst and der Position b $f(b)$ überschreiten würden. Damit wissen wir, wenn wir in b starten, dass f' immer durch $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nach unten beschränkt ist.
Da $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ wissen wir, dass wir f' invertieren können mit $f'(x)^{-1} = \frac{1}{f'(x)}$.

Nach dem Satz über die Konvergenz vom Newtonverfahren aus der VL wissen wir nun, dass eben dieses in einem Interval mit dem Radius

$$\frac{2\pi}{L \cdot \tau^{-1}} = \frac{2\pi}{(f(b)-f(a)) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}} = \frac{2\pi}{a-b}.$$

Und nun haben wir komplett den Faden verloren.