Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 9: *Unbestimmte Integrale II*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a.

$$\int \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx.$$

Wir substituieren $y = (\log x)$, weil die Ableitung $\frac{1}{x}$ schon im Term steht.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx &\overset{sub.y}{=} \int \log y\,dy \\
&= y \cdot \log\, y - \int y \cdot \frac{1}{y}\,dy \\
&= y \log\, y - y \\
&\overset{resub.x}{=} (\log\, x)(\log(\log\, x)) - (\log\, x) \\
&= (\log\, x)(\log(\log\, x) - 1)
\end{aligned}$$

Zum Testen noch einmal ableiten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\log\, x)(\log(\log\, x) - 1) &= \frac{1}{x} \cdot (\log(\log\, x) - 1) + (\log\, x)(\frac{1}{\log\, x} \cdot \frac{1}{x}) \\
&= \frac{\log(\log\, x)}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\
&= \frac{\log(\log\, x)}{x}
\end{aligned}$$

□

b.

$$\int \sin^3(x)\,dx$$

Wir berechnen zunächst das Integral von $\cos^2(x)\sin(x)$ um es in der nächsten Formel benutzen zu können.

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\sin(x)\,dx &\overset{y=\cos(x)}{=} \int -y^2\,dy \\
&= -\frac{1}{3}y^3 \\
&\overset{resub.}{=} -\frac{1}{3}\cos^3(x)
\end{aligned}$$

Nun wenden wir uns dem Integral zu lösen es durch partielle Integration auf.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) - \int -\cos(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) + 2\int \cos^2(x)\sin(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^2(x) - \frac{2}{3}\cos^3(x)
\end{aligned}$$

Das könnten wir nun noch Umformen, aber wir haben nun schon einmal ein Integral.

Dieses testen wir noch durch ableiten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} - \cos(x)\sin^2(x) - \frac{2}{3}\cos^3(x) &= \sin(x)\sin^2(x) - \cos(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) - \frac{2}{3}3\cos^2(x)(-\sin(x)) \\
&= \sin^3(x) - 2\cos^2(x)\sin(x) + 2\cos^2(x)\sin(x) \\
&= \sin^3(x)
\end{aligned}$$

□

c.

$$\int (\arcsin(x))^2 \, dx$$

Partielle Integration, indem eine 1 multipliziert wird.

$$\begin{array}{rcl}
\int \arcsin^2(x)\,dx & = & \int \arcsin^2(x)\cdot 1\,dx \\
& \overset{parts}{=} & x\cdot\arcsin^2(x) + \int x\cdot 2\arcsin(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
& \overset{parts}{=} & x\arcsin^2(x) + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2\int 1\,dx \\
& = & x\arcsin^2(x) + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2x
\end{array}$$

Das Ergebnis testen wir nocheinmal durch Ableiten:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\left(x\arcsin^2(x) + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2x\right) & = & \arcsin^2(x) + x(\frac{d}{dx}\arcsin^2(x)) + 2\sqrt{1-x^2} \\
& & +(\frac{d}{dx}\arcsin(x)) + 2\arcsin(x)(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}) - 2 \\
& = & \arcsin^2(x) + x(2\arcsin(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
& & +2\arcsin(x)(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}) - 2 \\
& = & \arcsin^2(x)
\end{array}$$

□

d.

$$\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)}\,dx$$

Wir machen zunächst eine Generalbruchzerlegung und zeigen, dass diese stimmt.

Behauptung:

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{x-1}{x+3} + \frac{x}{x-1}$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{x-1}{x+3} + \frac{x}{x-1} & = & \frac{(x-1)(x-1)+(x)(x+3)}{(x+3)(x-1)} \\
& = & \frac{x^2-2x+1+x^2+3x}{(x+3)(x-1)} \\
& = & \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)}
\end{array}$$

Diese Zerlegung benutzen wir nun, um das Integral aufsummiert zu berechnen.

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)}\,dx & = & \int \frac{x-1}{x+3} + \frac{x}{x-1}\,dx \\
& = & \int \frac{x-1}{x+3}\,dx + \int \frac{x}{x-1}\,dx \\
& = & \int \frac{x+3-4}{x+3}\,dx + \int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx \\
& = & \int 1\,dx - 4\int \frac{1}{x+3}\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx \\
& = & x - 4\log(x+3) + x + \log(x-1) \\
& = & 2x - 4\log(x+3) + \log(x-1)
\end{array}$$

Dieses Ergebnis leiten wir zum Testen nocheinmal ab.

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\left(2x - 4\log(x+3) + \log(x-1)\right) & = & 2 - \frac{4}{x+3} - \frac{1}{x-1} \\
& = & \frac{2(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)} - \frac{4(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{x+3}{(x+3)(x-1)} \\
& = & \frac{2x^2+4x-6-4x+4+x+3}{(x+3)(x-1)} \\
& = & \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)}
\end{array}$$

□

Aufgabe 10 : *Identitäten*

Bei der Substituition von $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gelten die folgenden identitäten.

e.

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Wir setzen für t auf der linken Seite den substituierten Term ein.

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{1+t^2} &\overset{sub.t}{=} \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2} \\
&\overset{y=\frac{x}{2}}{=} \frac{2\tan(y)}{1+\tan^2(y)} \\
&= \frac{2\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}} \\
&= 2\frac{\sin(y)\cos^2(y)}{\cos(y)\cdot(\cos^2(y)+\sin^2(y))} \\
&= 2\sin(y)\cos(y) \\
&\overset{resub.}{=} 2\sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2}) \\
&= \sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2}) + \sin(\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x}{2}) \\
&\overset{Add.Thm}{=} \sin(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}) \\
&= \sin(x)
\end{aligned}$$

$\square$

f.

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Wir setzen wiederum links den Term ein und ersetzten $y = \frac{x}{2}$ gleich.

$$\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{1+t^2} &= \frac{1-\tan^2(y)}{1+\tan^2(y)} \\
&= \frac{1-\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}{1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}} \\
&= \frac{(\cos^2(y)-\sin^2(y))\cdot\cos^2(y)}{\cos^2(y)\cdot(\sin^2(y)+\cos^2(y))} \\
&= \cos^2(y) - \sin^2(y) \\
&= \cos(y)\cos(y) - \sin(y)\sin(y) \\
&\overset{Add.Thm.}{=} \cos(y+y) \\
&\overset{resub.}{=} \cos(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 11 : *Trigonometrische Integrale*

g.

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx$$

Wir benutzen zunächst die vorgeschlagene Ersetzung und formen danach weiter um.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx &\overset{sub.}{=} \int \frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{2\cdot(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+2t+1)}\,dt \\
&= 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\
&= 2(-\frac{1}{t+1}) \\
&= -\frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1}
\end{aligned}$$

Dies ist nun auf jedenfall ein Integral von $\frac{1}{1+\sin(x)}$. Dies könnte man noch vereinfachen ist aber nicht gefragt.

h.
$$\int \frac{1}{3+5\sin(x)}\,dx$$

Wir nutzen wieder die vorgeschlagene Ersetzung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+5\sin(x)}\,dx &\overset{sub.}{=} \int \frac{1}{3+5\cdot\frac{2t}{t^2+1}}\frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= 2\int \frac{1}{3t^2+10t+3}\,dt \\
&= 2\int \frac{3}{8(3t+1)} - \frac{1}{8(t+3)}\,dt \\
&= 2\left(\int \frac{3}{8(3t+1)}\,dt - \int \frac{1}{8(t+3)}\,dt\right) \\
&= 2\left(\frac{3}{8}\int \frac{1}{3u}\,du - \frac{1}{8}\int \frac{1}{(t+3)}\,dt\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{8}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{8}\log(t+3)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{8}\log(u) - \frac{1}{8}\log(t+3)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{8}\log(3t+1) - \frac{1}{8}\log(t+3)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{8}\log(3\tan(\frac{x}{2})+1) - \frac{1}{8}\log(\tan(\frac{x}{2})+3)\right) \\
&= \frac{1}{4}\log(3\tan(\frac{x}{2})+1) - \frac{1}{4}\log(\tan(\frac{x}{2})+3)
\end{aligned}$$