Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 (Die entgegengesetzte Gruppe)

Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\star : G \times G, (g, h) \mapsto h \cdot g$.
Zeigen Sie, dass $G^{op} := (G, \star)$ eine Gruppe ist.
Es sei e das neutrale Element von G, e_op das neutrale Element von G^{op}. a^{-1} beschreibt das inverse Element von a bzgl. G, a_{op}^{-1} das inverse Element von a bzgl. G^{op}, falls es existiert.

Beweis:
(i) $\exists e_{op} \in G^{op}$
Es gilt $e_{op} = e$, da $\forall g \in G : e \star g = g \cdot e = g$ und $e \in G^{op}$ gilt nach Konstruktion.

(ii) $\forall a, b, c \in G^{op} : \ (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
Es seien $a, b, c \in G^{op}$. Dann gilt:

$$(a \star b) \star c = (b \cdot a) \star c = c \cdot (b \cdot a)$$
$$= (c \cdot b) \cdot a = a \star (c \cdot b) = a \star (b \star c)$$

(iii) $\forall a \in G^{op} : \ a_{op}^{-1} \in G^{op}$
Es gilt: $a_{op}^{-1} = a^{-1} \ \forall a \in G_{op}$
Beweis: Sei $a \in G_{op}$.

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

$\forall a \in G_{op} : \ a^{-1} \in G_{op}$ nach Konstruktion.

Rechtsinverse sind auch Linksinverse, analog für neutrale Elemente (nach VL und vorige Zettel). $\square$

Aufgabe 2 (Wirkungen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$)

a) Zeigen Sie, dass durch $\sigma : \ \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (t, z) \mapsto \exp(t) \cdot z$ eine Linkswirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ gegeben ist. Geben Sie für jede komplexe Zahl z die Bahn $\mathbb{R} \cdot z$ und die Standgruppe $\mathbb{R}_z$ an. Fertigen Sie eine Skizze der Bahnen an.

(1) σ ist Linkswirkung.
Beweis:
Fasse $\mathbb{R}$ als additive Gruppe auf.

(i) $\forall z \in \mathbb{C} : \ \sigma(0, z) = z$
Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\sigma(0, z) = \exp(0) \cdot z = 1 \cdot z = z$$

(ii) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}: \ \sigma(x_1, \sigma(x_2, z)) = \sigma(x_1 + x_2, z)$
Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\sigma(x_1, \sigma(x_2, z)) &= \sigma(x_1, \exp(x_2) \cdot z) \\ \exp(x_1) \cdot (\exp(x_2) \cdot z) &= (\exp(x_1) \cdot \exp(x_2)) \cdot z \\ \exp(x_1 + x_2) \cdot z &= \sigma(x_1 + x_2, z)\end{aligned}$$

□

(2) Bahnen
Sei $z \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{R} \cdot z = \{\exp(r) \cdot z | r \in \mathbb{R}\} = \{\rho \cdot z | \rho > 0\}$, also alle reellen Vielfachen von z ("Streckung" von z).

(3) Standgruppen Sei $z \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{R}_z = \{r \in \mathbb{R} | \exp(r) \cdot z = z\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{, falls } z = 0 \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}$

(4) Skizze

b) Zeigen Sie, dass durch $\sigma: \ \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (t, z) \mapsto exp(i \cdot t) \cdot z$ eine Linkswirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ gegeben ist. Geben Sie für jede komplexe Zahl z die Bahn $\mathbb{R} \cdot z$ und die Standgruppe $\mathbb{R}_z$ an. Fertigen Sie eine Skizze der Bahnen an.

(1) σ ist Linkswirkung.
Beweis:
Fasse $\mathbb{R}$ als additive Gruppe auf.

(i) $\forall z \in \mathbb{C}: \ \sigma(0, z) = z$
Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\sigma(0, z) = \exp(i \cdot 0) \cdot z = \exp(0) \cdot z = 1 \cdot z = z$$

(ii) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}: \ \sigma(x_1, \sigma(x_2, z)) = \sigma(x_1 + x_2, z)$
Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\sigma(x_1, \sigma(x_2, z)) &= \sigma(x_1, \exp(i \cdot x_2) \cdot z) \\ \exp(i \cdot x_1) \cdot (\exp(i \cdot x_2) \cdot z) &= (\exp(i \cdot x_1) \cdot \exp(i \cdot x_2)) \cdot z \\ \exp(i \cdot x_1 + i \cdot x_2) \cdot z &= \exp(i \cdot (x_1 + x_2)) \cdot z = \sigma(x_1 + x_2, z)\end{aligned}$$

□

(2) Bahnen
Sei $z \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{R} \cdot z = \{\exp(i \cdot r) \cdot z | r \in \mathbb{R}\}$, also alle 'Drehungen' von z (falls man z als Vektor mit Länge $|z|$ interpretiert).

(3) Standgruppen Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\mathbb{R}_z = \{r \in \mathbb{R} | \exp(i \cdot r) \cdot z = z\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{, falls } z = 0 \\ \{2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

(4) Skizze

Aufgabe 3 (Wirkung einer Untergruppe von S_8)

Es sei $\sigma := (1\ 2\ 3)(5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von σ.
Den ersten Zykel müsste man ein Vielfaches von Drei mal ausführen, den zweiten ein Vielfaches von Vier mal ausführen. Damit nun beiden gerecht wird, entspricht dies dem kGV.
Die Ordnung entspricht also $\mathrm{kgV}(3,4) \overset{\mathrm{ggT}(3,4)=1}{=} 3 \cdot 4 = 12$.

b) Es seien $G := <\sigma> \subseteq S_8$ und

$$\Gamma :\ G \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$(\sigma^i, j) \mapsto s^i(j).$$

Geben Sie für jedes der Elemente 1, 4 und 5 seine G-Bahn und seine Standgruppe in G an.

$$\sigma \cdot 1 = \{\sigma^i(1)\} = \{1,2,3\}$$
$$\sigma_1 = \{\sigma^i \in G \,|\, \sigma^i(1) = 1\} = \{\sigma^{3k} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sigma \cdot 4 = \{\sigma^i(4)\} = \{4\}$$
$$\sigma_1 = \{\sigma^i \in G \,|\, \sigma^i(3) = 4\} = G$$

$$\sigma \cdot 5 = \{\sigma^i(5)\} = \{5,6,7,8\}$$
$$\sigma_1 = \{\sigma^i \in G \,|\, \sigma^i(5) = 5\} = \{\sigma^{4k} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 4 (Zyklische Gruppen)

Es seien $m, n > 0$ positive ganze Zahlen, so dass $\text{ggT}(m, n) = 1$.
Zeigen Sie, dass das Element $(1, 1) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ Ordnung $m \cdot n$ hat und folgern Sie

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{m \cdot n}$$

Lösung:
Offenbar gilt $(1, 1)^{m \cdot n} = (1, 1)$.
Da das erste Element in m zyklisch und das zweite Element in n zyklisch ist, muss ein gemeinsames Vielfaches von m und n die Ordnung sein. Da nun $\text{ggT}(m, n) = 1 \Rightarrow \text{kgV}(m, n) = m \cdot n$.
$\Rightarrow ord((1, 1)) = m \cdot n$.

Sei nun o.B.d.A. $m > n$. Dann ist

$$\varphi : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{m \cdot n}$$

$$(i, j) \mapsto i \cdot n + j$$

ein Gruppenisomorphismus.
Beweis:
Sei $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.
$\varphi(x + y) = \varphi(a + c, b + d) = (a + c) \cdot n + (b + d)$
$= a \cdot n + c \cdot n + b + d = a \cdot n + b + c \cdot n + d$
$= \varphi(a, b) + \varphi(c, d)$

φ ist wohldefiniert, da wir minimal $\varphi(0, 0) = 0$ und maximal $\varphi(m - 1, n - 1) = (m - 1) \cdot n + (n - 1) = m \cdot n - 1 \in \mathbb{Z}_{m \cdot n}$ haben.
φ^{-1} existiert, mit

$$\varphi^{-1} : \mathbb{Z}_{m \cdot n} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$

$$j \mapsto (a, b)$$

mit $j = a \cdot n + b$ (ganzzahlige Division).
Da die Umkehrfunktion von φ existiert, ist φ bijektiv. $\square$