Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : not known

Aufgabe 1: Spezielle gleichmäßige Funktionen

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder stetig* mit Exponent $\alpha \in (0,1]$ wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in A$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}$$

gilt. Ist $\alpha = 1$ so nennt man f *Lipschitzstetig*

a) Sei $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = \sqrt{z}$. Zeigen Sie dass f Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

Lösung:

Sei $x, y \in [a, b]$, dann gilt

$$\begin{array}{rrcl} & |\sqrt{x} - \sqrt{y}| & \leq & |\sqrt{x}| - |\sqrt{y}| \leq C \cdot \sqrt{|x-y|} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 & \leq & C^2 \cdot |x-y| \\ \Leftrightarrow & x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y & \leq & C^2 \cdot |x-y| \leq C^2 \cdot (|x| + |-y|) \\ \Leftrightarrow & -2\sqrt{x}\sqrt{y} & \leq & (C^2 - 1)(x+y), \end{array}$$

Für $C > 1$, da $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ beide größer Null sind, ist die linke Seite der Gleichung kleiner Null. Da wir rechts $x + y$ rechnen und beide größer null sind, gilt $x + y > 0$. Wenn nun $C > 1$ belibt die rechte Seite positiv. Für ein $C > 1$ ist die Gleichung erfüllt und damit ist f Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$

b) Sei $A = \mathbb{R}$ und $f = \arctan$ (eingeschränkt auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz stetig ist.

Lösung:

tbd

c) Sei $f : A \to \mathbb{R}$ Hölderstetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

tbd

Aufgabe 2 : Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Finden Sie die Ableitung der Funktion $f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die folgenden Ausdrücke.

i) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin t \; dt$.

Lösung:
tbd

ii) $F(x) = \exp\left(\int_0^x p(t) \; dt\right)$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Lösung:

tbd

iii) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und f und g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Setzten Sie dann

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) \; dt$$

und berechnen die Ableitung von F.

Lösung:

tbd

Aufgabe 3 : Mittelwertsatz der Integralrechnung

i) Es sei f eine auf dem Interval $[a, b]$ integirebare Funktion mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit Eigenschaft

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)\mu.$$

Lösung:

tbd

ii) Es sei f stetig auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) f(\xi)$$

für ein $\xi \in [a, b]$. Begründen Sie anhand eins Gegenbeispiels, dass die Stetigkeit von f notwendig ist.

Lösung:

tbd

iii) Sei nun f stetig auf $[a, b]$, und g integrierbar und positiv (bzw. negativ) auf $[a, b]$. Zeigen Sie dass
$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$
für ein $\xi \in [a, b]$ gilt. Man nennt dies den Mittelwertsatz der Intergralrechnung . Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vorzeichenbedingung an g notwendig ist.

Aufgabe 4 : Positivitätseigenschaft des Integrals

i) Sei f integrierbar auf $[a, b]$ und $f \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass dann gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Lösung:

tbd

ii) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:
$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b],\ f(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in [a, b],\ \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Lösung

tbd

iii) Sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und f stetig int $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Lösung:

tbd

iv) Sei f stetig auf $[a, b]$. Es gelte
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$
für alle stetigen Funktionen g auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$