

Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Lena Schlipf

Aufgabe 1

Die Funktionen der Aufgabe sollen derart geordnet werden, so dass $g_i \in \Omega(g_{i+1})$ gilt. Geben Sie auch an, wenn sogar $g_i = \Theta(g_{i+1})$ ist.

Die Folge erfüllt die Eigenschaft und enthält die Elemente, die geordnet werden müssen:

$$(g_i)_{1 \leq i \leq 10} = (2^{(2^n)}, 2^n, n^{\log(\log(n))}, (\lceil \log n \rceil)!, 4^{\log n}, n^2, (\sqrt{2})^{\log n}, \log^2 n, \ln n, n^{\frac{1}{\log n}})$$

Was wir an dieser Stelle benutzen werden, sind die Definitionen:

1. $f \in O(g) \Leftrightarrow 0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$
2. $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists x_0 > 0 \forall x > x_0 : |f(x)| \geq c \cdot |g(x)|$

Und der Satz:

$$f \in \Omega(g) \Leftrightarrow g \in O(f)$$

Die Äquivalenz der jeweils passenden Definitionen wurde in vorangegangenen Vorlesung gezeigt, genau so wie die Richtigkeit des Satzes.

Beweis

1. $2^n \in O(2^{(2^n)})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{(2^n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n \cdot 1}}{2^{n \cdot 2^{(2^n)} - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{(2^n) - n}}$$

Da 2^n stärker wächst als n , gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{(2^n) - n}} = 0$$

Damit gilt nach Konvergenz Kriterium $2^n \in O(2^{(2^n)}) \Rightarrow g_1 \in \Omega(g_2)$

2. $n^{\log(\log(n))} \in O(2^n)$:

Es gilt: $n^{\log \log n} = 2^{\log n \cdot \log \log n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\log n \cdot \log \log n}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(\log n \cdot \log \log n) - n} = 0 \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n + \log n) - n = -\infty$$

Nun können wir das asymptotische Verhalten der beiden Terme betrachten, um festzustellen, ob sie gegen $-\infty$ fallen, d.h. gegen 0, wenn man den vorderen Term durch den hinteren teilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x \cdot \log \log x}{x} \stackrel{\text{alles} > 0}{\leq} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \log x}{x} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Aus unserer Vorüberlegung folgt: $n^{\log(\log n)} \in O(2^n) \Rightarrow g_2 \in \Omega(g_3)$

3. $(\lceil \log n \rceil)! \in O(n^{\log(\log(n))})$:

Beweisskizze: Wir werden zeigen, dass die Funktion $\frac{(\lceil \log n \rceil)!}{n^{\log(\log(n))}}$ innerhalb von Zweierpotenzen streng monoton fällt und danach, dass die Eckpunkte, das heißt die Zweierpotenzen an sich, auch monoton fallen. Damit kann man schlussfolgern, dass eine Kurve, die durch die Punkte an den Zweierpotenzen geht, wie der \limsup konvergiert, da die Funktion niemals größer als diese springen wird. Als erstes ist zu beachten, dass $\frac{(\lceil \log n \rceil)!}{n^{\log(\log(n))}} > 0$ gilt, da keiner dieser Terme bei $n \geq 0$ eine negative Zahl produziert.

Eckpunkte fallen: $n = 2^m$ z.z.

$$\begin{aligned} \frac{(\lceil \log n \rceil)!}{n^{\log(\log(n))}} &> \frac{(\lceil \log 2 \cdot n \rceil)!}{(2 \cdot n)^{\log(\log(2 \cdot n))}} \\ \frac{(\lceil \log 2^{m+1} \rceil)!}{(2^{m+1})^{\log(\log(2^{m+1}))}} &= \frac{(m+1)!}{(2^{m+1})^{\log m+1}} \\ &= \frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}} \quad (\Rightarrow \text{für } m: \frac{m!}{m^m}) \\ &= \frac{m}{(m+1)^m} \quad (\text{kleinere Basis im Nenner, mach es größer}) \\ &< \frac{m}{m^m} = \frac{(\lceil \log n \rceil)!}{n^{\log(\log(n))}} \end{aligned}$$

Intervalle fallen: Auf dem Intervall $(n, 2n)$, für n der Form $n = 2^m$ fällt die Funktion.

Zu beachten, zwischen $\log 2^m = m$ und $\log 2^{m+1} = m+1$ liegt keine natürliche Zahl. Deshalb kann auf dem Intervall eingeschänkt dieser Teil als Konstante angenommen werden.

$\Rightarrow \frac{k}{n^{\log(\log n)}}$ die Funktion im Nenner wächst, da jede Einzelkomponente wächst.

\Rightarrow Innerhalb der Intervalle fällt die Funktion und die obere Grenze pro Intervall fällt streng monoton. Dies ist nach Analysis ein Konvergenzkriterium. Da wir nicht zeigen müssen, dass es nicht Θ ist, hören wir an dieser Stelle auf und zeigen nicht, dass es wirklich gegen 0 konvergiert.

$\Rightarrow g_3 \in \Omega(g_4)$

4. $4^{\log(n)} \in O((\lceil \log n \rceil)!)$:

Wie wir im nächsten Schritt zeigen gilt: $4^{\log n} = n^2$.

Wir bedienen uns hier des gleichen Kriteriums, wie im letzten Schritt.

Punkte fallen: für $n = 2^m$, nach $2n = 2^{m+1}$ z.z.

$$\frac{2^{2m+2}}{\lceil \log 2^{m+1} \rceil!} = \frac{4^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{4}{m+1} \cdot \frac{4^m}{m!} \quad \text{für } m > 3 \quad < \frac{4^m}{m!} = \frac{n^2}{\lceil \log n \rceil!}$$

Intervallmaxima fallen monoton Da wir diesmal wieder eine konstante annehmen können, sieht die Folge so aus: $\frac{1}{k} \cdot n^2$. Da $n > 0$, wird n^2 streng monoton steigen. Deshalb und aus dem ersten Punkt folgt, dass das Maximum kurz vor der letzten Zweierpotenz liegen muss, also kurz bevor der Nenner einen neuen Wert annimmt. z.z.:

$$\frac{(2^{m+1} - 1)^2}{(m)!} < \frac{(2^m - 1)^2}{(m-1)!}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{(2^{m+1}-1)^2}{(m)!} &= \frac{(2 \cdot 2^m - 1)^2}{m \cdot (m-1)!} \\
 &= \frac{4 \cdot 2^{2m} - 4 \cdot 2^m + 1}{m \cdot (m-1)!} \\
 &= \frac{3 \cdot 2^{2m} - 2 \cdot 2^m}{m} \cdot \frac{(2^m - 1)^2}{(m-1)!} \\
 &< \frac{(2^m - 1)^2}{(m-1)!}
 \end{aligned}$$

Nun lässt sich zeigen (was in dieser Stelle ausgenommen wurde), dass beide Folgen (obere und untere) gegen 0 fallen. Nach Sandwich Kriterium muss also auch die eingeschlossene Folge gegen 0 konvergieren.

$$\Rightarrow g_4 \in \Omega(g_5)$$

5. $n^2 \in \Theta(4^{\log(n)})$:

Wir zeigen an dieser Stelle, dass gilt: $n^2 = 4^{\log(n)}$. Damit gilt die Beziehung für Θ sofort.

$$4^{\log n} = (2^2)^{\log n} = 2^{2 \cdot \log n} = 2^{\log n^2} = n^2$$

$$\Rightarrow g_5 \in \Theta(g_6)$$

6. $(\sqrt{2})^{\log n} \in O(n^2)$:

$$\text{Ersteinmal gilt: } (\sqrt{2})^{\log n} = (2^{\frac{1}{2}})^{\log n} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \log n} = 2^{\log \sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

Nun wenden wir wieder das Konvergenzkriterium an:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1.5}} = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^{\log n} \in O(n^2) \Rightarrow g_6 \in \Omega(g_7)$$

7. $\log^2 n \in O(\sqrt{n})$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2 n}{\sqrt{n}} &\stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \sqrt{n} \cdot \log n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \log n}{\sqrt{n}} \\
 &\stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \sqrt{n}}{n} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sollte offensichtlich sein, dass es gegen 0 konvergiert.

$$\Rightarrow g_7 \in \Omega(g_8)$$

8. $\ln n \in \Omega(\log^2 n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\log^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2)(\log n)}{\log^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{\log n} = 0$$

Nach Konvergenzkriterium gilt: $g_8 \in \Omega(g_9)$

9. $n^{\frac{1}{\log n}} \in \Omega(\ln n)$:

$$\text{Zunächst gilt: } n^{\frac{1}{\log n}} = 2^{\frac{\log n}{\log n}} = 2.$$

Daraus folgt offensichtlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\ln n} = 0 \Rightarrow g_9 \in \Omega(g_{10})$$

Aufgabe 2

Sei n die Anzahl der verschiedenen Sammelbilder. Sei X Zufallsvariable für die Anzahl der benötigten Packungen Müsli, bis wir alle n Sammelbilder haben. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Bild ist gleichverteilt.

(a)

tbd

(b)

$E[X_i] = \frac{1}{p_i}$, mit p_i Wahrscheinlichkeit ein neues Bild (das i -te Bild) zu erhalten.

Für p_i ergibt sich $p_i = \frac{n-i+1}{n}$, da wir in Runde 1 eine Wahrscheinlichkeit von $p_1 = \frac{n-1+1}{n} = 1$, in Runde 2 $p_2 = \frac{n-2+1}{n} = \frac{n-1}{n}$, etc. haben, ein neues Bild zu erhalten.

Dann ist

$$E[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{1}{\frac{n-i+1}{n}} = \frac{n}{n-i+1}$$

(c)

z.z.: $E[X] = O(n \log n)$

$$\begin{aligned} E[X] &\stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^n E[X_i] \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1} \\ &\stackrel{(*)}{=} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = n \cdot O(\log n) = O(n \log n) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a)

Selectionsort

Beschreibung: Solange bis die zu sortierende Liste leer ist, sucht Selectionsort das kleinste Element, löscht dieses aus der Liste und fügt es hinten an eine am Anfang neu erzeugte Liste an.

Laufzeit: Um das kleinste Element in einer unsortierten Liste zu finden, muss man sich jedes Element einmal ansehen. Bei einer Liste der Länge n bedeutet dies $T_{\text{smallest}}(n) = n$.

Nach der obigen Beschreibung nehmen wir n mal das kleinste Element aus der Liste, wobei die Liste in jedem Schritt um ein Element schrumpft. Um das Element hinten an die neue Liste zu hängen, können wir konstante laufzeit annehmen. (LinkedList rear oder Array auf das ende + 1).

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (n^2 - n) \end{aligned}$$

Mergesort

Beschreibung: Teile die Liste rekursiv in 2 gleichgroße Listen, bis die Teile trivial zu lösen sind, z.B. bei einem Element, und vereinige danach die sortierten Teillisten auf dem Weg den Rekursionsbaum hoch wieder, in der richtigen Reihenfolge.

Laufzeit: In jedem Schritt Teilen wir die Liste in 2 Teile. Haben wir Listen der Größe 1 erreicht, können wir aufhören. Diese sind ohne weiteres sortiert. Nach jedem Teilen benötigen wir noch n Schritte um beide Listen zu mergen (da

wir im Worst-Case immer abwechselnd ein Element aus den jeweiligen Listen nehmen müssen)

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(1) &= 0 \\ T(2) &= 2, \text{ aus folgender Formel ausgerechnet} \\ T(n) &= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n, n > 1\end{aligned}$$

Da n eine Zweierpotenz ist, können wir $n = 2^k$ substituieren.

$$\Rightarrow T(2^k) = T(\lfloor 2^{k-1} \rfloor) + T(\lceil 2^{k-1} \rceil) + n$$

Nun gilt $\forall a > 0 : 2^{n-1} \in \mathbb{N}$ und da $n > 1 \Rightarrow k > 0$.

$$\Rightarrow T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + n$$

Nun stellen wir die charakteristische Gleichung für den homogenen Teil auf:

$$x^k = 2 \cdot x^{k-1} \Leftrightarrow x = 2$$

Als Lösung des inhomogenen Teils wählen wir $k \cdot 2^k$:

$$\begin{aligned}T(2^k) &= c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot k \cdot 2^k \\ \stackrel{\text{resub.}}{\Leftrightarrow} T(n) &= c_1 \cdot n + c_2 \cdot n \cdot \log n \\ T(1) &= 0 \\ T(1) = 0 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot \log 1 \\ 0 &= c_1 \\ T(2) &= 2 \\ T(2) = 2 &= 0 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 \cdot \log 2 \\ 2 &= c_2 \cdot 2 \\ c_2 &= 1\end{aligned}$$

Setzen wir dies in unsere aufgelöste Form ein erhalten wir:

$$\begin{aligned}T(n) &= c_1 \cdot n + c_2 \cdot n \cdot \log n \\ &= 0 \cdot n + 1 \cdot n \log n \\ &= n \cdot \log n\end{aligned}$$

(b)

Nachdem wir in der letzten Aufgabe die inhomogene Rekursion schon gelöst haben, können wir jetzt einfach die Gleich erneut mit anderem Anker auflösen. In der Rechnung ist zu beachten, dass wir $m \leq 1$ annehmen, da schon bei dieser Größe keine echte Sortierung per Selection mehr passiert.

$$\begin{aligned}T(m) = \frac{m^2 - m}{2} &= 2c_1 m + 2c_2 m \cdot \log m \\ T(2m) = m^2 + m &= 2c_1 m + 2c_2 m \log(2m)\end{aligned}$$

Anker m beschreibt die Größe, wenn wir Selektionsort ausführen und die nächste 2er Potenz (die wir annehmen durften) ist bei $2m$ zu finden.

$$\begin{aligned}II - I : 1 &= c_2 \cdot \log(2m) - c_2 \cdot \log m \\ 1 &= c_2 \cdot (\log(2m) - \log m) = c_2 \\ \text{in II } m^2 - m &= 2c_1 \cdot m + 2m \log m \\ c_1 &= \frac{m-1}{2} - \log m\end{aligned}$$

Nun können wir die konstanten einsetzen und die Formel endgültig aufstellen:

$$T(n) = \frac{mn - n}{2} - n \cdot \log m + n \log n$$

Diese Form macht auf den ersten Blick in sofern sinn, als das wir bei $n = m$ die reine Laufzeit für Selectionsort haben und bei $m = 1$ reines Mergesort benutzen. In sofern schaut die Form schon einmal sinnvoll aus.

Als nächsten betrachten wir, wann MMergesort sich als am besten herausstellt.

(c)

Der Header mit allen wichtigen Member sieht folgender Maßen aus:

```
public class MMergesort<E extends Comparable<E>>{
    int m;

    // 2 debug member

    E[] array;
    E[] mergeArray;
```

Die aufrufe von SORT sorgen dafür, dass array und mergeArray immer die selbe größe haben.

Unsere Implementierung von MMergesort beinhaltet 3 wichtige Funktionen.

```
private void sortHelper(){
    //First, use selection sort for parts below size of m:
    if(m > 1){
        int start = 0;
        int end = m > array.length ? array.length : m;
        while(start < array.length){
            selectionSort(start, end);
            start = start + m;
            end = end + m;
            end = end > array.length ? array.length : end;
        }
    }
    //now we begin merging the parts
    int partSize = (m > 1) ? m : 1;
    while(partSize < array.length){
        int start = 0;
        int middle = start + partSize;
        int end = middle + partSize;
        end = end > array.length ? array.length : end;
        while(start < array.length){
            if(middle > start && end > middle){
                merge(start, middle, end);
            }
            start = start + partSize;
            middle = middle + partSize;
            end = middle + partSize;
            end = end > array.length ? array.length : end;
        }
        partSize *= 2;
    }
}
```

Sorthelper führt am Anfang das Selectionsort auf den $n \bmod m$ Teilstücken aus. Danach werden diese Teile Schritt für Schritt gemerged. Da wir auf einem Array arbeiten, benötigen wir den Dividestep nicht, da das Array uns schon einen linksvollständigen

Baum darstellt. Je nachdem, welche 2er Potenz wir als Index und Breite nehmen, haben wir einen kompletten Unterbaum. So werden erst alle Bäume der Größe m gemerged. Danach der Größe $2m$ und so weiter. Wir achten bei der Ausführung darauf, dass die Indizes nicht über die Arraygrenze rutschen, was bei Größen, die keine Zweierpotenz sind passieren kann. Als nächsten wird noch betrachtet, ob m mindestens 2 ist, da sonst der Aufruf von Selectionsort ohnehin nichts tun wird.

```
private void selectionSort(int start, int end){
    int swap;
    E save;
    for(int i = start; i < end - 1; i++){
        swap = i;
        for(int j=i; j < end - 1; j++){
            compCounter++;
            if(array[j].compareTo(array[swap]) < 0) swap = j;
        }
        save = array[i];
        array[i] = array[swap];
        array[swap] = save;
    }
}
```

Das Selectionsort arbeitet In-Place. Dazu wird angenommen, dass in jedem Durchlauf der äußeren Schleife links von i die Liste sortiert ist und rechts der unsortierte Teil ist. Nun wird rechts von i das kleinste Element gesucht und mit i gewappt. Soweit entspricht es der Beschreibung in 3a). Das dieser Algorithmus funktioniert wurde in ALP2 und ALP3 gezeigt.

```
private void merge(int start, int middle, int end){
    System.arraycopy(array, start, mergeArray, start, middle - start);
    int fst=start, snd=middle, pos = start;
    while(fst < middle && snd < end){
        if(fst == middle){
            //Copy the second until the end
            for(int i = snd; i < end; i++){
                array[pos] = array[i];
                pos++;
            }
            return;
        } else if(snd == end){
            //Copy the first until the end
            for(int i = fst; i < middle; i++){
                array[pos] = mergeArray[i];
                pos++;
            }
            return;
        } else{
            //Wenn beides noch offen ist
            if(mergeArray[fst].compareTo(array[snd]) < 0){
                array[pos] = mergeArray[fst];
                fst++;
            } else{
                array[pos] = array[snd];
                snd++;
            }
            pos++;
        }
    }
}
```

Als erstes speichern wir den ersten Teil der Liste zwischen. Der Algorithmus arbeitet so, dass es immer die ersten beiden Elemente der beiden Listen vergleicht (fst und snd) das minimum der beiden nimmt und hinten an die neu entstehenden Liste anhängt. Sollte eine der beiden Listen leer sein, können wir den Rest der anderen jeweils komplett hinten anfügen. Das megen ended, wenn wir bei beiden Listen am Ende sind oder wenn nachdem der Rest einer der beiden Listen kopiert werden konnte.

Nachdem wir MMergesort so implementiert haben ist Mergesort leicht:

```
public class Mergesort<E> extends Comparable<E>> extends
    MMergesort<E>{
    public Mergesort(){
        super(1);
    }
}
```

Da wir schon darauf geachtet haben, dass bei zu kleinem m kein Selectionsort benutzt wird, ist MMergesort mit $m = 1$ ein einfaches Mergesort.

Die Testklasse benutzt 2 Arrays ns und ms , die jeweils speichern, welche Werte von n und m getestet werden und probiert dann jede kombination aus.

Mithilfe dieser konstruktion konnte eine Schranke bei etwa *MUSS NOCH GEMACHT WERDEN* gefunden werden.