

# Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

## Übungsblatt 4

Abgabe: Bis Dienstag, den 22.11.2011, 10Uhr

---

Aufgabe 1 (Die Tetraedergruppe; 5+5+5 Punkte).

Gegeben seien folgende Punkte in  $\mathbb{R}^3$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Abstände  $d(P, Q)$ ,  $d(P, R)$ ,  $d(P, S)$ ,  $d(Q, R)$ ,  $d(Q, S)$  und  $d(R, S)$ .<sup>1</sup> Schließen Sie, dass die angegebenen Punkte die Eckpunkte eines regulären Tetraeders  $T$  sind.

b) Wählen Sie eine Ecke  $E \in \{P, Q, R, S\}$ . Dann sei  $D$  die Achse durch  $E$  und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite des Tetraeders  $T$ . Geben Sie die Abbildungsmatrizen für die Drehungen um  $D$  um die Winkel  $120^\circ$  und  $240^\circ$  bzgl. der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  an.

c) Wählen Sie zwei gegenüberliegende Kanten von  $T$ . Dann sei  $D$  die Achse durch die Mittelpunkte dieser beiden Kanten. Geben Sie die Abbildungsmatrix für die Drehung um  $D$  um den Winkel  $180^\circ$  bzgl. der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  an.

Aufgabe 2 (Würfel, Okta- und Dodekaeder; 5+5+5 Punkte).

a) Es sei  $W \subset \mathbb{R}^3$  der Würfel mit den Eckpunkten

$$(1, 1, \pm 1), \quad (-1, 1, \pm 1), \quad (-1, -1, \pm 1), \quad (1, -1, \pm 1).$$

Bestimmen Sie die spezielle Symmetriegruppe  $SO(W)$ .

b) Die Punkte

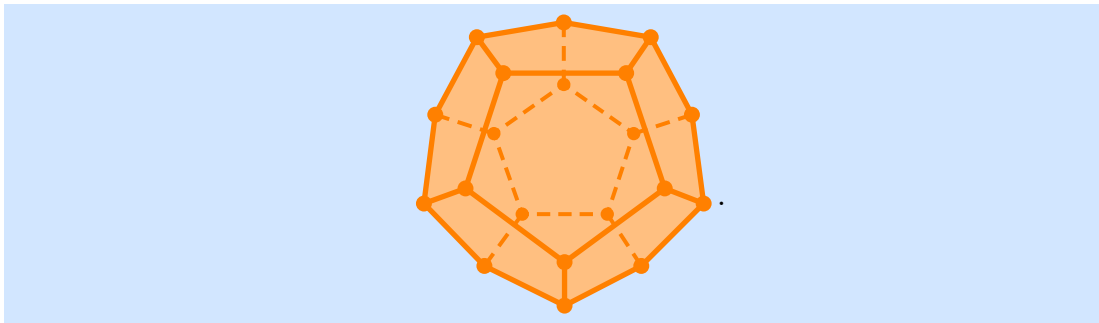
$$(\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, \pm 1)$$

sind Eckpunkte eines Polyeders  $O \subset \mathbb{R}^3$ . Skizzieren Sie  $O$ . Bestimmen Sie die spezielle Symmetriegruppe  $SO(O)$ . Vergleichen Sie  $SO(O)$  und  $SO(W)$ . Was stellen Sie fest? Haben Sie eine Erklärung dafür?

c) Ein Dodekaeder  $D \subset \mathbb{R}^3$  ist ein reguläres Polyeder, das von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird:

---

<sup>1</sup>Hier ist  $d$  der euklidische Abstand (Skript Analysis II, Beispiel 1.2.4, i).



Beschreiben Sie die spezielle Symmetriegruppe  $SO(D)$ .

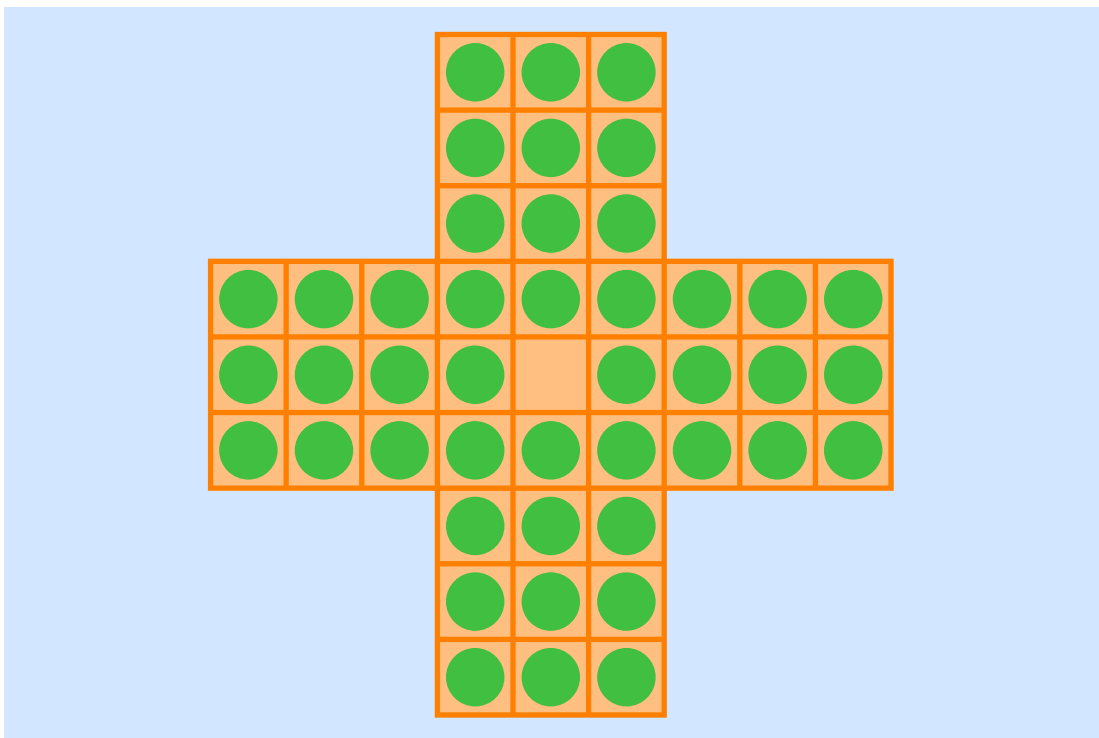
Zusatzaufgabe 1 (Platonische Körper; 10 Bonuspunkte).

Recherchieren Sie den Begriff „platonischer Körper“ und dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3 (Solitaire; 5+5 Punkte).

a) Bestimmen Sie alle Endpositionen des Solitairespiels mit genau zwei Steinen.

b) Führen Sie die Diskussion aus der Vorlesung für das Spielfeld



durch.