Max Wisniewski

Tutorin : Kristen (Mi 12-14)

1. Äquivalenz von Metriken

Auf $\mathbb{R}^n$ seien drei verschiedene Metriken gegeben durch

$$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$$\sigma(x,y) := \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i| \qquad , \qquad \varrho(x,y) := \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

(i)

Es bezeichen $B_r^d(x), B_r^\sigma(x)$ und $B_r^\varrho(x)$ offene Kugeln um $x \in \mathbb{R}^n$ mit dem Radius r. Finden Sie nur von n abhängige Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4, so dass

$$B^\varrho_{C_1 r}(x) \subset B^d_r(x) \subset B^\sigma_{C_2 r}(x) \text{ sowie } B^\sigma_{C_3 r}(x) \subset B^d_r(x) \subset B^\varrho_{C_2 r}(x).$$

Lösung:

a) $B^\varrho_{C_1 r}(x) \subset B^d_r(x)$.
Wir wollen also zeigen, dass $\forall y \in B^\varrho_{C_1 r}(x) \ : \ d(x,y) < r$ gilt.
Sei $y \in B^\varrho_{C_1 r}(x)$ beliebig. Dann wissen wir

$$\begin{aligned} \varrho(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| < C_1 r \\ &\Rightarrow |x_i-y_i| < C_1 r, \ \forall 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Dies wissen wir, da alle Summanden größer als 0 sind und sonst die Summe gesammt größer wäre. Nun setzen wir es in die Metrik von d ein:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \\ &< \sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_1^2 r^2} \\ &= \sqrt{n} C_1 r \end{aligned}$$

Wir wir sehen, ist für $C_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ die Gleichung erfüllt und ist somit eine Grenze.

b) $B^d_r(x) \subset B^\sigma_{C_2 r}(x)$.
Wir wollen zeigen, dass $\forall y \in B^d_r(x) \ : \ \sigma(x,y) < r$ gilt.
Sei $y \in B^d_r(x)$ beliebig. Dann wissen wir

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} < r \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 < r^2 \\ &\Rightarrow |x_i-y_i| < r \ , \forall 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Nun setzen wir es in die Metrik von σ ein:

$$\begin{aligned}\sigma(x,y) &= \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| \\ &\overset{Vor.}{<} r\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung für $C_2 = 1$ gilt.

c) $B^{\sigma}_{C_3 r}(x) \subset B^d_r(x)$.
Wir wollen zeigen, dass $\forall y \in B^{\sigma}_{C_3 r}(x) \ : \ d(x,y) < r$ gilt.
Sei $y \in B^{\sigma}_{C_3 r}(x)$ beliebig. Dann wissen wir

$$\sigma(x,y) = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| < C_3 r \Rightarrow \forall 1 \le i \le n \ : \ |x_i - y_i| < C_3 r.$$

Nun setzen wir es in die Metrik von d ein:

$$\begin{aligned}d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \\ &\overset{Vor.}{<} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_3^2 r^2} \\ &= \sqrt{n} C_3 r\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung für $C_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ erüllt ist.

d) $B^d_r(x) \subset B^{\varrho}_{C_4 r}(x)$.
Wir wollen zeigen, dass $\forall y \in B^d_r(x) \ : \ \varrho(x,y) < C_4 r$ gilt.
Sie $y \in B^d_r(x)$ beliebig. Dann wissen wir aus *b)* $|x_i - y_i| < r$. Nun setzten wir es in die Metrik von ϱ ein:

$$\begin{aligned}\varrho(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \\ &\overset{Vor.}{<} \sum_{i=1}^{n} r \\ &= n \cdot r\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung mit $C_4 = n$ gilt.

(ii)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen in $(\mathbb{R}^n, d)$. Zeigen Sie, dass dann U auch offen ist in $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ und $(\mathbb{R}^n, \sigma)$.

Lösung:

Für den ersten Teil U offen in $(\mathbb{R}^n, \varrho)$, müssen wir zeigen, dass

$$\forall x \in U \exists r > 0 \ : \ B^{\varrho}_r(x) \subset U$$

gilt. Sei $x \in U$ beliebig aber fest.
Nun wissen wir allerdings, dass ein $r' > 0$ existiert, so dass $B'^d_r(x) \subset U$ ist, da U offen bezüglich d ist.
Nach (i) wissen wir, dass $B^{\varrho}_{C_1 r'}(x) \subset B^d_{r'}(x)$ gilt und da $\subset$ transitiv ist, folgt die Behauptung $B^{\varrho}_{C_1 r'}(x) \subset U$, da $C_1 r' > 0$ ist.

Der zweite Teil mit

$$\forall x \in U \exists r > 0 \ : \ B^{\sigma}_r(x) \subset U$$

folgt analog mit $C_3 r' > 0$.

2. Vollständigkeit von Funktionsräumen

Für $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset$ setzen wir

$$B(E) := \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}.$$

Ferner definieren wir für zweit Funktionen $f, g : E \to \mathbb{R}$ ihren Abstand

$$d(f, g) := \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|.$$

Zeigen Sie, dass $(B(E), d)$ vollständig ist.

Lösung:

Als erstes müssen wir zeigen, dass es sich bei $(B(E), d)$ um eine Metrik handelt.

1. $\forall f, g \in B(E) : d(f, g) \geq 0$.
   Dies gilt trivialerweise, da $\forall x \in \mathbb{E} : |f(x) - g(x)| \geq 0$, da es sich um die Betragsfunktion handelt.
   $\forall f, g \in B(E) : d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.
   <=:
   Wenn $f = g$ gilt, dass gilt insbesondere $\forall x \in E : f(x) = g(x)$. Daher ist $M = \{|f(x) - g(x)|\ ,\ x \in E\} = \{0\}$ und $\sup M = 0$.
   =>:
   Da $d(f, g) \geq 0$ wissen wir, dass $\forall x \in E : f(x) - g(x) = 0$ gelten muss. Gäbe es nur einen Wert, der $\neq 0$ ist, so wäre das sup > 0.
   Nun folgt daraus aber, dass $\forall x \in E : f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$.

2. $\forall f, g \in B(E) : d(f, g) = d(g, f)$.
   Dies folgt aus der Symmetrie von $|a - b| = |b - a| \forall a, b \in \mathbb{R}$.

3. $\forall f, g, h \in B(E) : d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$
   Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n) - g(x_n)| = d(f, g)$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} |f(y_n) - h(y_n)| = d(f, h)$, und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} |h(z_n) - g(z_n)| = d(h, g)$.

   Nun gilt $\lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n) - g(x_n)| \leq \lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - g(x_n)|$, da $\lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n) - h(x_n)| \leq |f(y_n) - h(y_n)|$ und für z_n ebenso gilt, da die Folgen, als das supremum definiert waren und alle Funktionen in unserem Raum beschränkt sind. Es kann also kein größeren Wert geben.

Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy - Folge beliebig, aber fest.
Als erstes zeigen wir, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
Nach definition einer Cauchyfolge, gilt $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > n_0 : d(f_n, f_m) < \varepsilon$. Da es sich nun bei $d(f_n, f_m)$ um einen Wert in $\mathbb{R}$ handelt, konvergiert die Reihe in $\mathbb{R}$.

Sei nun $x \in E$ beliebig, aber fest.

3. Norm und Skalarprodukt

Sei $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf einem rellen Vektorraum X. Wir definieren eine Norm auf X gemäß

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >}.$$

Zeigen Sie:

(i)

$< x, y > \leq \|x\| \|y\|$
Lösung:

(ii)

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Lösung:

(iii)

Betrachte nun den Folgenraum

$$l^2 := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \; ; , \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq \infty\}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

eine Norm auf l^2 definiert ist.

Lösung: