Max Wisniewski

Tutorin : Kristen (Mi 12-14)

1. Äquivalenz von Metriken

Auf $\mathbb{R}^n$ seien drei verschiedene Metriken gegeben durch

$$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$$\sigma(x,y) := \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i| \qquad , \qquad \varrho(x,y) := \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

(i)

Es bezeichen $B_r^d(x), B_r^\sigma(x)$ und $B_r^\varrho(x)$ offene Kugeln um $x \in \mathbb{R}^n$ mit dem Radius r. Finden Sie nur von n abhängige Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4, so dass

$$B_{C_1 r}^\varrho(x) \subset B_r^d(x) \subset B_{C_2 r}^\sigma(x) \text{ sowie } B_{C_3 r}^\sigma(x) \subset B_r^d(x) \subset B_{C_2 r}^\varrho(x).$$

Lösung:

a) $B_{C_1 r}^\varrho(x) \subset B_r^d(x)$.
Wir wollen also zeigen, dass $\forall y \in B_{C_1 r}^\varrho(x) \ : \ d(x,y) < r$ gilt.
Sei $y \in B_{C_1 r}^\varrho(x)$ beliebig. Dann wissen wir

$$\begin{aligned}\varrho(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| < C_1 r\\ &\Rightarrow |x_i-y_i| < C_1 r,\ \forall 1\leq i\leq n\end{aligned}$$

Dies wissen wir, da alle Summanden größer als 0 sind und sonst die Summe gesammt größer wäre. Nun setzen wir es in die Metrik von d ein:

$$\begin{aligned}d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\\ &< \sqrt{\sum_{i=1}^{n}C_1^2 r^2}\\ &= \sqrt{n}C_1 r\end{aligned}$$

Wir wir sehen, ist für $C_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ die Gleichung erfüllt und ist somit eine Grenze.

b) $B^d_r(x) \subset B^\sigma_{C_2 r}(x)$.
Wir wollen zeigen, dass $\forall y \in B^d_r(x) \ : \ \sigma(x,y) < r$ gilt.
Sei $y \in B^d_r(x)$ beliebig. Dann wissen wir

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} < r \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < r^2 \\ &\Rightarrow |x_i - y_i| < r \ , \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Nun setzen wir es in die Metrik von σ ein:

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \\ &\overset{Vor.}{<} r \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung für $C_2 = 1$ gilt.

c) $B^\sigma_{C_3 r}(x) \subset B^d_r(x)$.
Wir wollen zeigen, dass $\forall y \in B^\sigma_{C_3 r}(x) \ : \ d(x,y) < r$ gilt.
Sei $y \in B^\sigma_{C_3 r}(x)$ beliebig. Dann wissen wir

$$\sigma(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| < C_3 r \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n \ : \ |x_i - y_i| < C_3 r.$$

Nun setzen wir es in die Metrik von d ein:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ &\overset{Vor.}{<} \sqrt{\sum_{i=1}^n C_3^2 r^2} \\ &= \sqrt{n} C_3 r \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung für $C_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ erüllt ist.

d) $B^d_r(x) \subset B^\varrho_{C_4 r}(x)$.
Wir wollen zeigen, dass $\forall y \in B^d_r(x) \ : \ \varrho(x,y) < C_4 r$ gilt.
Sie $y \in B^d_r(x)$ beliebig. Dann wissen wir aus *b)* $|x_i - y_i| < r$. Nun setzten wir es in die Metrik von ϱ ein:

$$\begin{aligned} \varrho(x,y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ &\overset{Vor.}{<} \sum_{i=1}^n r \\ &= n \cdot r \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Gleichung mit $C_4 = n$ gilt.

$\square$

(ii)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen in $(\mathbb{R}^n, d)$. Zeigen Sie, dass dann U auch offen ist in $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ und $(\mathbb{R}^n, \sigma)$.

Lösung:

Für den ersten Teil U offen in $(\mathbb{R}^n, \varrho)$, müssen wir zeigen, dass

$$\forall x \in U \exists r > 0 \ : \ B_r^{\varrho}(x) \subset U$$

gilt. Sei $x \in U$ beliebig aber fest.
Nun wissen wir allerdings, dass ein $r' > 0$ existiert, so dass $B_r'^{d}(x) \subset U$ ist, da U offen bezüglich d ist.
Nach (i) wissen wir, dass $B_{C_1 r'}^{\varrho}(x) \subset B_{r'}^{d}(x)$ gilt und da $\subset$ transitiv ist, folgt die Behauptung $B_{C_1 r'}^{\varrho}(x) \subset U$, da $C_1 r' > 0$ ist.

Der zweite Teil mit

$$\forall x \in U \exists r > 0 \ : \ B_r^{\sigma}(x) \subset U$$

folgt analog mit $C_3 r' > 0$.

$\square$

2. Vollständigkeit von Funktionsräumen

Für $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset$ setzen wir

$$B(E) := \{f \ : \ E \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}.$$

Ferner definieren wir für zweit Funktionen $f, g \ : \ E \to \mathbb{R}$ ihren Abstand

$$d(f, g) := \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|.$$

Zeigen Sie, dass $(B(E), d)$ vollständig ist.

Lösung:

Metrik:
Als erstes müssen wir zeigen, dass es sich bei $(B(E), d)$ um eine Metrik handelt.

1. $\forall f, g \in B(E) \ : \ d(f, g) \geq 0$.
   Dies gilt trivialerweise, da $\forall x \in \mathbb{E} \ : \ |f(x) - g(x)| \geq 0$, da es sich um die Betragsfunktion handelt.
   $\forall f, g \in B(E) \ : \ d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.
   <=:
   Wenn $f = g$ gilt, dass gilt insbesondere $\forall x \in E \ : \ f(x) = g(x)$. Daher ist $M = \{|f(x) - g(x)| \ , \ x \in E\} = \{0\}$ und $\sup M = 0$.
   =>:
   Da $d(f, g) \geq 0$ wissen wir, dass $\forall x \in E \ : \ f(x) - g(x) = 0$ gelten muss. Gäbe es nur einen Wert, der $\neq 0$ ist, so wäre das $\sup > 0$.
   Nun folgt daraus aber, dass $\forall x \in E \ : \ f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$.

2. $\forall f, g \in B(E) \ : \ d(f, g) = d(g, f)$.
   Dies folgt aus der Symmetrie von $|a - b| = |b - a| \forall a, b \in \mathbb{R}$.

3. $\forall f, g, h \in B(E) \ : \ d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$
   Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - g(x_n)| = d(f,g)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} |f(y_n) - h(y_n)| = d(f,h)$, und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} |h(z_n) - g(z_n)| = d(h,g)$.

   Nun gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - g(x_n)| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - h(x_n)| + |h(x_n) - g(x_n)|$, da $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - h(x_n)| \leq |f(y_n) - h(y_n)|$ und für z_n ebenso gilt, da die Folgen, als das supremum definiert waren und alle Funktionen in unserem Raum beschränkt sind. Es kann also kein größeren Wert geben.

Konvergenz:
Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy - Folge beliebig, aber fest.

Nun ist die Folge der Werte $f_n(x_0)$ für jedes $x_0 \in E$ eine Cauchy - Folge in $\mathbb{R}$, da gilt
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 \ : \ |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \sup\limits_{x\in E} |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$
Wobei das $\varepsilon > 0$ aus der Definition der Cauchyfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genommen werden kann.

Da nun $f_n(x_0)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, wissen wir, dass die Folge konvergiert. So können wir nun unsere mögliche Grenzfunktion $f^\infty \ : \ E \to \mathbb{R}$ über
$x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Nun zeige ich, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n) = f^\infty$ gilt.

Dies zeigen wir auf folgende weise. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq n_1$ $d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Diese Gleichung ist erfüllt, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist.
Nach der gezeigten konvergenz für die einzelnen Punkte, wissen wir, dass für all $x \in E$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq n_2$ gilt $|f_k(x) - f^\infty(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nun wählen wir $n_3 \geq \max\{n_1, n_2\}$, denn dann gilt:

$$|f_n(x) - f^\infty(x)| \overset{Dreieck}{\leq} |f_n(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Als letzter Schritt müssen wir zeigen, dass $f^\infty \in B(E)$ liegt.
Da nun aber f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und $|f_n(x) - f^\infty(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in E$ gilt, kann f^∞ nicht divergieren, da sonst die differenz nicht nach 0 gehen kann.

$\square$

3. Norm und Skalarprodukt

Sei $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf einem rellen Vektorraum X. Wir definieren eine Norm auf X gemäß

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >}.$$

Zeigen Sie:

(i)

$< x, y > \leq \|x\| \|y\|$
Lösung:

Seien $x, y \in X$ und $t \in \mathbb{R}$.

Sei $g(t) =< x + ty, x + ty >=< x, x > +2t < x, y > +t^2 < y, y >$.
Aus der ersten characterisierung mit $z = x + ty$ erhalten wir $g(t) =< z, z > \geq 0$, da es sich um ein Skalarprodukt handelt.
Nun leiten wir g nach t ab, was $g'(t) = 2t < y, y > +2 < x, y >$ ergibt und bestimmen das minimum. (Es ist ein Minimum, da $< y, y > \geq 0$.)

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & g'(t_0) \\ \Leftrightarrow \quad 0 & = & 2t_0 < y, y > +2 < x, y > \\ \Leftrightarrow \quad t & = & -\frac{<x,y>}{<y,y>} \end{array}$$

Hier ist zu beachten, dass im Fall $< y, y >= 0$ gilt, dass $< x, y >= 0$ gelten muss, womit die Gleichung trivialier Weise erfüllt ist. Wir können also $< y, y >> 0$ im folgenden Annehmen.

Dies setzten wir nun erneut in $g(t)$ ein:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & g(t_0) \\ & = & < x, x > -2\frac{<x,y>}{<y,y>} \cdot < x, y > + \frac{<x,y>^2}{<y,y>} \\ & = & < x, x > - \frac{<x,y>^2}{<y,y>} \\ & = & \|x\|^2 - \frac{<x,y>^2}{\|y\|^2} \\ \Leftrightarrow \qquad \|x\|^2 & \geq & \frac{<x,y>^2}{\|y\|^2} \\ \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 & \geq & < x, y >^2 \\ \Leftrightarrow \qquad \|x\| \|y\| & \geq & < x, y > \end{array}$$

$\square$

(ii)

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Lösung:

Der Beweis ist durch (i) straight-forward.

$$\begin{array}{rcl} \|x + y\| & = & \sqrt{< x + y, x + y >} \\ & = & \sqrt{< x, x + y > + < y, x + y >} \\ & \overset{(i)}{\leq} & \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2} \\ & = & \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2} \\ & = & \|x\| + \|y\| \end{array}$$

$\square$

(iii)

Betrachte nun den Folgenraum

$$l^2 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \;;, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq \infty\}$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

eine Norm auf l^2 definiert ist.

Lösung:

Wir fassen den l^2 als unendlich dimensionalen Vektorraum auf, wobei ein Folgenglied x_i einer Folge aus l^2 die i-te Komponente ist.

Zunächst müssen zeige ich, dass durch

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf l^2 definiert ist.
Seien $x, y, z \in l^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Bilinear

$$\begin{aligned}
< \alpha x, y > &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i) y_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \\
&= \alpha < x, y > \\
< x, \beta y > &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i (\beta y_i) \\
&= \beta \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \\
&= \beta < x, y > \\
< x + z, y > &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + z_i) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + z_i y_i \\
&\overset{<\infty}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} z_i y_i \\
&= < x, y > + < z, y > \\
< x, y + z > &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i (y_i + z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + x_i z_i \\
&\overset{<\infty}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \\
&= < x, y > + < x, y >
\end{aligned}$$

b) Symmetrisch
Trivial, da die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ symmetrisch ist.

c) positiv definit

$$
\begin{aligned}
< x, x > &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 \\
&\overset{x_i^2 > 0}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nun zeigen wir die Eigenschaften einer Norm:

I) Positiv
$x_i^2 > 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2} > 0 \Rightarrow \|x\| > 0$
Sei $x \in l^2$. z.z. $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$.
$\Rightarrow$:
$x = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : x_i = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2} = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$
$\Leftarrow$:
Da $\|x\| = 0$ gilt, können wir aus der ersten Eigenschaft folgern, dass $\forall i \in \mathbb{N} : x_i = 0$ gilt. $\Rightarrow x = 0$.

II) Homogenität
Sei $x \in l^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\|dx\| &= \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} (dx_i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} d^2 x_i^2} \\
&= |d| \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2} \\
&= |d| \|x\|
\end{aligned}
$$

III) Dreiecksungleichung
Seien $x, y \in l^2$.
Dann gilt, da wir nun eine Norm durch ein Skalarprodukt definiert haben

$$
\|x + y\| \overset{(ii)}{\leq} \|x\| + \|y\|
$$

□