Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1.

Im Folgenden werden zwei Vorhergehensweisen angeben, wie man den Algorithmus von Strassen zur Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen verwenden kann, falls n nicht unbedingt eine Zweierpotenz ist.
Bestimmen Sie die jeweilige Laufzeit einschließlich der Konstante im signifikantesten Term genau und berechnen Sie, für welche n diese Algorithmen weniger Operationen als die klassische Methode benötigen.

(a)

Die Matrizen werden bis zur nächsten Zweierpotenz geeignet aufgefüllt.

Lösung:

tbd

(b)

Ist n gerade so führt man einen Rekursionsschritt nach Strassen aus. Andernfalls zerlegt man

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

wobei A_{11} und B_{11} $(n-1) \times (n-1)$-, A_{12} und B_{12} $(n-1) \times 1$-, A_{21} und B_{21} $1 \times (n-1)$- und A_{22} und B_{22} 1×1- Matrizen sind.
Dann berechnet man AB in der Aufteilung, wie bei der klassischen Multiplikation von 2×2 Matrizen, wobei $A_{11}B_{11}$ rekursiv, die übrigen Produkte klassisch berechnet werden.

Lösung:

tbd

Aufgabe 2.

(a)

Zeigen Sie, dass die Multiplikation von $n \times n$- Matrizen mit $O(I(n))$ Operationen durchführbar ist, falls man mit $I(n)$ Operationen Matrizen invertieren kann.

Lösung:

tbd

(b)

Zeigen Sie, dass die Multiplikation von $n \times n$- Matrizen mit $O(S(n))$ Operationen durchführtbar ist, falls man mit $S(n)$ Operationen Matrizen quadrieren kann.

Lösung:

tbd

Aufgabe 3.

Bei der Multiplikation Boolescher Matrizen wird $+$ durch $\vee$ und $\cdot$ durch $\wedge$ ersetzt. Strassens Algorithmus ist nicht direkt anwendbar, da $(\{0,1\}, \vee, \wedge)$ kein Ring ist.
Zeigen Sie, dass die Boolsche Matrizenmultiplikation mit $O(n^{\omega+\varepsilon})$ Operationen aus $\{\vee, \wedge, \neg\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist, wenn die Matrizenmultiplikation für ganze Zahlen mit $O(n^{\omega})$ arithmetischen Operationen möglich ist.

Lösung:

tbd