Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1

Es seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ natürliche Zahlen, sowie

$$a = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_s^{k_s} \quad \text{und} \quad b = q_1^{l_1} \cdot ... \cdot q_s^{l_t}$$

Fassen wir nun a, b als Produkt der Primzahlen auf, die in mindestens einer von beiden Zerlegungen auftreten, also

$$a = z_1^{i_1} \cdot ... \cdot z_u^{i_u}$$

wobei $i_j = k_j$ falls die Primzahl in der echten Zerlegung von a existiert, sonst $i_j = 0$. Analog ist

$$b = z_1^{h_1} \cdot ... \cdot z_u^{h_u}$$

wobei $h_j = l_j$ falls die Primzahl in der echten Zerlegung von b existiert, sonst $h_j = 0$.

a) Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $\text{ggT}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b)$ an.
Nach der obigen Zerlegung gilt:

$$\text{ggT}(a, b) = \prod_{m=0}^{u} z_m^{\min(i_m, h_m)}$$

Dies macht Sinn, da der ggT das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren(-potenzen) der Zahlen a und b ist.

$$\text{kgV}(a, b) = \prod_{m=0}^{u} z_m^{\max(i_m, h_m)}$$

Diese Formel macht in sofern Sinn, als dass, wenn wir die Zahlen einfach multilpzieren, erhalten wir $z_m^{i_m + h_m}$. Diese Form ist aber unter umständen zu groß. Um diesen Umstand zu vermindern, ziehen wir einfach den gemeinsamen Teil herraus. Wir wir aus der vorgegangenen Formel sehen, ist der gemeinsame Teil genua das Minimum. Ziehen wir von $a + b$ das Minimum ab, erhalten wir das Maximum der beiden Elemente.

b) Beweisen Sie die Formel

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$$

Beweis:

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = \prod_{m=0}^{u} z_m^{\min(i_m, h_m)} \cdot \prod_{m=0}^{u} z_m^{\max(i_m, h_m)}$$

$$= \prod_{m=0}^{u} z_m^{\min(i_m, h_m)} \cdot z_m^{\max(i_m, h_m)}$$

$$= \prod_{m=0}^{u} z_m^{i_m} \cdot z_m^{h_m} = \prod_{m=0}^{u} z_m^{i_m} \cdot \prod_{m=0}^{u} z_m^{h_m}$$
$$= a \cdot b$$

□

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 165 und 585 mit dem euklidischen Algorithmus. $585 = 3 \cdot 165 + 90$
$165 = 1 \cdot 90 + 75$
$90 = 1 \cdot 75 + 15$
$75 = 5 \cdot 15 + 0$

$\Rightarrow \text{ggT}(165, 585) = 15$

b) Geben Sie die Primfaktorzerlegungen von 165 und 585 an und überprüfen Sie das Ergebnis aus a) mit Ihrer Formel aus Aufgabe 1, a).

$$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Nach **1 a)** gilt dann für den größten gemeinsamen Teiler:

$$\text{ggT}(585, 165) = 3 \cdot 5 = 15$$

c) Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von 142 und 202 und ganze Zahlen a und b, sodass

$$d = a \cdot 142 + b \cdot 202.$$

$$\begin{aligned} 202 &= 1 \cdot 142 + 60 \\ 142 &= 2 \cdot 60 + 22 \\ 60 &= 2 \cdot 22 + 16 \\ 22 &= 1 \cdot 16 + 6 \\ 16 &= 2 \cdot 6 + 4 \\ 6 &= 1 \cdot 4 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

i	a_i	q_i	x_i	y_i
0	202	-	1	0
1	142	-	0	1
2	60	1	1	-1
3	22	2	-2	3
4	16	2	5	-7
5	6	1	-7	10
6	4	2	19	-27
7	2	1	-26	37
8	0	2	33	

$\Rightarrow d = \text{ggT}(142, 202) = 2, b = -26, a = 37$

Aufgabe 3

Es sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die periodische Folge $(1, 3, 2, -1, -3, -2, ...)$.
Beweisen Sie, dass eine ganze Zahl $a = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k$ genau dann durch 7 teilbar ist, wenn ihre gewichtete Quersumme es ist.
Testen Sie es mit diesem Kriterium die Zahlen 10.167.157 und 8.484.372 auf Teilbarkeit durch 7.

Es gilt

$$\begin{aligned}
10^0 &\equiv 1 \mod 7\\
10^1 &\equiv 3 \mod 7\\
10^2 &\equiv 2 \mod 7\\
10^3 &\equiv -1 \mod 7\\
10^4 &\equiv -3 \mod 7\\
10^5 &\equiv -2 \mod 7\\
10^6 &\equiv 1 \mod 7\\
&...\\
10^k &\equiv \varepsilon_k \mod 7
\end{aligned}$$

Also ergibt sich für eine Zahl a

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \varepsilon_k \mod 7$$

$\square$

Sei nun $a = 10167157$.
Test: $7 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 7 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0$. Da $0|7 \Rightarrow 10167157|7$.
Sei nun $a = 8484372$.
Test: $2 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 8 = 1$. Da $1 \nmid 7 \Rightarrow 8484372 \nmid 7$.

Aufgabe 4

Vor einem Bienenvolk sind folgende Daten bekannt: Es hat zwischen 200 und 250 Mitglieder. Stellen sich die Bienen in 7er-Reihen auf, dann bleibt eine Biene alleine. Wenn sie sich in 5er-Reihen aufstellen, dann bleiben drei übrig. Wie viele Mitglieder hat das Bienenvolk?

Aus der Aufgabenstellung erstellen wir folgendes Kongruenzsystem $(*)$:

$$\begin{aligned}
x &\equiv 1 \mod 7\\
x &\equiv 3 \mod 5
\end{aligned}$$

Aus dem chinesischen Restsatz folgt direkt (da $\mathrm{ggT}(5, 7) = 1$):

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow x &\equiv 1 - (-2) \cdot 7 \cdot (1 - 2)\\
&\equiv -27 \mod 35
\end{aligned}$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $200 \leq -27 + k \cdot 35 \leq 250$
$\Rightarrow k = 7$
$\Rightarrow$ Das Bienenvolk hat $-27 + 7 \cdot 35 = 218$ Mitglieder.