Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

30.04.2012
Abgabe: (Mittwoch) 09.05.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 2

zur Analysis II

5. *Unbestimmte Integrale* *(2+2+2+2 Punkte)*

Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int (\log x)^2 dx$.

(ii) $\int \frac{1}{x \log x} dx$.

(iii) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$.

(iv) $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Für (iv) beweisen und benutzen Sie die Formel $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$.

6. *Uneigentliche Integrale I* *(4+4 Punkte)*

Für eine Funktion $f : (0, b) \to \mathbb{R}$ definiert man das *uneigentliche Integral* durch

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^b f(x)dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(i) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \ ?$$

7. *Uneigentliche Integrale II* *(4+4 Punkte)*

Man definiert das *uneigentliche Integral* einer Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ als

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x)dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(i) Bestimmen Sie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx.$$

(ii) Für welche $p \in \mathbb{R}$ existiert

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \ ?$$

Bitte wenden!

8. *Uneigentliche Integrale III* *(2+4+2 Punkte)*

In dieser Aufgabe lernen wir die *Gamma-Funktion* Γ kennen, eine der wichtigsten Funktion in der Mathematik.

(i) Zeigen Sie zunächst folgende Version der partiellen Integration:

$$\int_a^\infty u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^\infty - \int_a^\infty u(x)v'(x)dx,$$

wobei mit dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ gemeint ist. Weiter sei vorausgesetzt, dass all diese Grenzwerte existieren.

Die Gamma-Funktion ist nun wie folgt definiert:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ das uneigentliche Integral $\Gamma(x)$ wohldefiniert ist.

(iii) Zeigen mit Hilfe von Aufgabenteil (i), dass gilt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

und folgern Sie daraus

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Die Γ-Funktion interpoliert also die Fakultät, die sonst nur für natürliche Zahlen definiert ist.