Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Sebastian Scherer

Aufgabe 1

z.z. Alle Lösungen der DG $x' = \lambda x + f, \lambda \in \mathbb{R}$ haben die Form

$$\alpha e^{\lambda t} + \int_0^t f(x) e^{\lambda(t-x)}\, dx$$

für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sei u eine Lösung der Differentialgleichung, es gilt also $u'(t) = \lambda u(t) + f(t)$. Wir wollen nun zeigen, dass sich u von der obigen Form nur um eine Konstante unterscheidet. Dazu bilden wir die Differenz sodass α auf der rechten Seite bleibt und zeigen, dass diese konstant für alle $t > 0$ ist. Setze der Übersichtlichkeit halber $g(t) := \int_0^t f(x) e^{\lambda(t-x)}\, dx$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left(\left(u(t) - \int_0^t f(x)e^{\lambda(t-x)}\,dx\right)e^{-\lambda t}\right) = \frac{d}{dt}\left((u(t)-g(t))e^{-\lambda t}\right) \\
= \;& \left(u'(t) - \frac{d}{dt}g(t)\right)e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}u(t) + \lambda e^{-\lambda t} g(t) \\
= \;& \left(\lambda u(t) + f(t) - \frac{d}{dt}g(t)\right)e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}u(t) + \lambda e^{-\lambda t} g(t) \\
= \;& \lambda u(t) e^{-\lambda t} + f(t)e^{-\lambda t} - \frac{d}{dt}g(t)e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}u(t) + \lambda e^{-\lambda t} g(t) \\
= \;& f(t)e^{-\lambda t} - \frac{d}{dt}g(t)e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}g(t) \\
= \;& e^{-\lambda t}\left(f(t) - \frac{d}{dt}g(t) + \lambda g(t)\right) \\
= \;& e^{-\lambda t}\left(f(t) - g'(t) + \lambda g(t)\right) \overset{(*)}{=} e^{-\lambda t}\cdot 0 \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

(*) gilt, da g eine Lösung der Differentialgleichung ist (für $\alpha = 0$).

$\Rightarrow \left(\left(u(t) - \int_0^t f(x)e^{\lambda(t-x)}\,dx\right)e^{-\lambda t}\right) = \alpha \in \mathbb{R}$ konstant.

□

Z.z. Die Menge aller Lösungen der DG $x' = \lambda x + f, \lambda \in \mathbb{R}$ ist ein affiner Unterraum von $V := \mathbb{R}^{[0.\infty)}$.

Sei $A = \{t \mapsto \alpha e^{\lambda t} + \int_0^t f(x) e^{\lambda(t-x)}\, dx\}$. Da für jedes $f \in A$ gilt: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \Rightarrow A \subseteq V$. Damit A ein affiner Unterraum von V ist, müssen wir A darstellen können als

$$A = v + U_A$$

mit $v \in V, U_A$ Untervektorraum von V.
Sei $v := \int_0^t f(x) e^{\lambda(t-x)}\, dx \in V$.
Sei $U_A := \{t \mapsto \alpha e^{\lambda t} |\, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
z.z.: U_A Untervektorraum von V:

(1) $U_A \neq \emptyset$ gilt wie man leicht sehen kann.
(2) $f(t), g(t) \in U_A \Rightarrow f(t) + g(t) \in U_A$.
Seien $f(t), g(t) \in U_A$. Dann ist $f(t) + g(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\lambda t} = (\alpha + \beta) e^{\lambda t} \equiv t \mapsto (\alpha + \beta) e^{\lambda t} \in U_A$.
(3) $f(t) \in U_A, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot f(t) \in U_A$.
Seien $f(t) \in U_A, c \in \mathbb{R}$. Dann ist $c \cdot f(t) = c \cdot \alpha e^{\lambda t} = (c\alpha) e^{\lambda t} \equiv t \mapsto (c\alpha) e^{\lambda t} \in U_A$.

$\Rightarrow U_A$ ist Untervektorraum von V.
$\Rightarrow A$ ist affiner Unteraum von V. $\square$

Aufgabe 2

a) Nach Aufgabe 1 ist die Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = 2x(t) + 2te^{2t}$ durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha e^{2t} + \int_0^t 2xe^{2x} e^{2t-2x}\, dx \\ &= \alpha e^{2t} + \int_0^t 2xe^{2t}\, dx \\ &= \alpha e^{2t} + 2e^{2t} \int_0^t x\, dx \\ &= \alpha e^{2t} + 2e^{2t} \frac{t^2}{2} \\ &= e^{2t}(\alpha + t^2) \end{aligned}$$

gegeben. Durch Einsetzen des Anfangswertes

$$x_0 = x(0) = e^0(\alpha + 0) = \alpha$$

erhalten wir direkt $\alpha = x_0$ und damit

$$x(t) = e^{2t}(x_0 + t^2)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

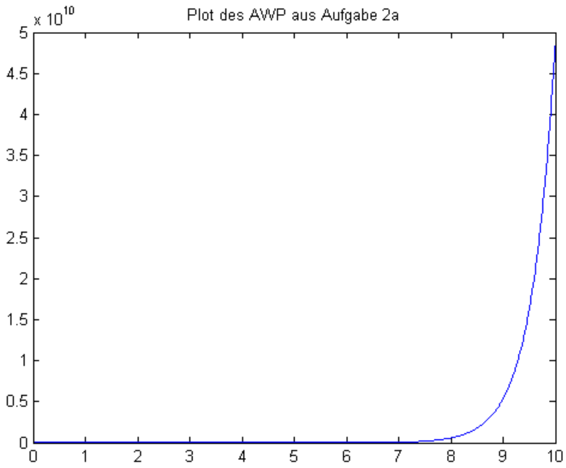
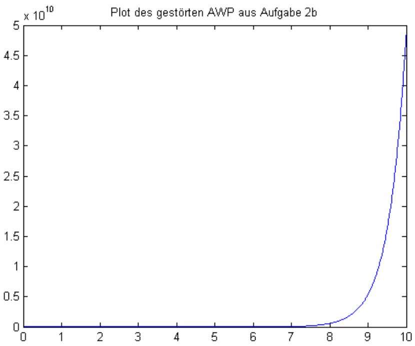
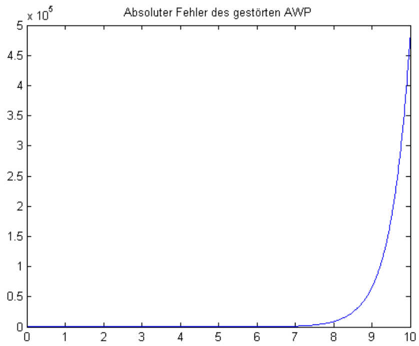


Abbildung 1: Plot des AWP über dem Intervall $[0, 10]$.

b) Für den gestörten Anfangswert erhalten wir folgenden Plot und Fehler:



(a) Plot des gestörten AWP



(b) Plot des Fehler $|x(t) - \tilde{x}(t)|$

Auffällig dabei ist, dass der absolute Fehler der beiden Plots exponentiell in x steigt und bei $x = 10$ schon einen Fehler von ca. $5 \cdot 10^5$ erreicht hat. Allerdings sehen die Plots von beiden AWP sehr ähnlich aus, da sich bei einer Größenordnung von 10^10 ein Fehler von ca. 10^5 nicht so sehr im Plot niederschlägt.
Der Fehler deckt sich mit dem theoretischen Ergebnis aus der Vorlesung:
Hiernach ist $\|x-\tilde{x}\|_\infty = e^{\lambda T}|x_0-\tilde{x}_0|$. Bei Einsetzen von $T = 10, x_0 = 1, \tilde{x}_0 = 1.001, \lambda = 2$ erhalten wir

$$\|x - \tilde{x}\|_\infty = e^{2\cdot 10}|1 - 1.001| = e^20 \cdot 0.001 \approx 4,85 \cdot 10^5$$

als maximalen Fehler. Dies deckt sich mit dem Fehlerplot.