Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

24.04.2012
Abgabe: (Mittwoch) 02.05.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 1

zur Analysis II

1. *Spezielle gleichmäßig stetige Funktionen* *(2+2+4 Punkte)*

   Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder stetig* mit Exponent $\alpha \in (0,1]$ wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt so dass für alle $x, y \in A$ die Ungleichung

   $$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

   gilt. Ist $\alpha = 1$ so nennt man f *Lipschitzstetig*.

   (i) Sei $A = \{z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = \sqrt{z}$. Zeigen Sie dass Hölderstetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

   (ii) Sei $A = \mathbb{R}$ und $f = \arctan$ (die Umkehrfunktion von tan eingeschränkt auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Zeigen Sie, dass f Lipschitz stetig ist.

   (iii) Sei $f : A \to \mathbb{R}$ Hölderstetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

2. *Hauptsatz der Differential und Integralrechnung* *(2+2+4 Punkte)*

   Finden Sie die Ableitungen der Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die folgenden Ausdrücke.

   (i) $F(x) = \int_{x^2}^0 \sin t dt$.

   (ii) $F(x) = \exp\left(\int_0^x p(t)dt\right)$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

   (iii) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und f und g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierter. Setzen Sie dann

   $$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

   und berechnen die Ableitung von F.

3. *Mittelwertsatz der Integralrechnung* *(2+2+4 Punkte)*

   (i) Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktion mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit Eigenschaft

   $$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu.$$

   (ii) Es sei f stetig auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass gilt

   $$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

   für ein $\xi \in [a, b]$. Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Stetigkeit von f notwendig ist.

   Bitte wenden!

(iii) Sei nun f stetig auf $[a, b]$, und g sei integrierbar und positiv (bzw. negativ) auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

für ein $\xi \in [a, b]$. Man nennt dies den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*. Begründen Sie anhand eines Gegenspiels, dass die Vorzeichenbedingung an g notwendig ist.

4. *Positivitätseigenschaften des Integrals* *(2+2+2+2 Punkte)*

(i) Sei f integrierbar auf $[a, b]$ und $f \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(ii) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a, b], \quad f(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)dx = 0.$$

(iii) Sei $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, und f sei stetig in $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

(iv) Sei f stetig auf $[a, b]$. Es gelte

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \text{ für alle stetigen Funktionen } g \text{ auf } [a, b].$$

Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$.