Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 (Vorzeichen und Ordnung eines Zykels)

a) Es sei $c \in S_n$ ein Zykel der Länge k. Berechnen Sie das Vorzeichen $\text{Sign}(c)$.

Sei $c = (c_1 \dots c_k) \in S_n,\ k \in \mathbb{N}, k > 1$. Dann gilt nach VL:

$$c = (c_1 \dots c_k) = (c_1\ c_k) \cdot (c_1\ c_{k-1}) \cdot \ldots \cdot (c_1\ c_2)$$

Also wird das Zykel c durch $k-1$ Transpositionen erzeugt. Da für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt: $\text{Sign}(\tau) = -1$ und ferner

$$\text{Sign}((c_1\ c_k) \cdot (c_1\ c_{k-1}) \cdot \ldots \cdot (c_1\ c_2)) = \text{Sign}(c_1\ c_k) \cdot \text{Sign}(c_1\ c_{k-1}) \cdot \ldots \cdot \text{Sign}(c_1\ c_2)$$

gilt, folgt:

$$\text{Sign}(c) = (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Welche Ordnung hat ein Zykel $c \in S_n$ der Länge k?

Sei $c = (c_0 \dots c_{k-1}) \in S_n,\ 1 \leq k-1 < n$.
Dann ist die $\text{Ord}(c) = k$, denn für ein $i < k$ gilt:
$(c_0 \dots c_{k-1})^k(c_i) = c_{(i+k \mod k)} = c_i$ und $(c_0 \dots c_{k-1})^{k-1}(c_i) = c_{(i+k-1 \mod k)} \neq c_i$.
Für alle $i \leq n, i \notin \{c_0, \dots, c_{k-1}\}$ gilt natürlich auch $(c_0 \dots c_{k-1})^k(i) = i$. $\square$

c) Es seien $\sigma \in S_n$ eine Permutation und $n = (n_1, ..., n_s)$ ihr Zykeltyp. Welche Ordnung hat σ?

Behauptung: $\text{Ord}(\sigma) = \text{kgV}(n_1, n_2, ..., n_s)$.
Beweis:
Sei $\sigma = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s, c_i \in S_n, 1 \leq i \leq s$.
Dann gilt nach b): $\text{Ord}(c_i) = n_i, 1 \leq i \leq s$. Da die Ordnung die kleinste Zahl $j \geq 1$ ist, für die $\sigma^j = id$ ist, ist die kleinste Zahl, die allen Zykeln c_i zugleich gerecht wird, eben das kleinste gemeinsame Vielfache, also $\text{Ord}(\sigma) = \text{kgV}(n_1, n_2, ..., n_s)$.

Aufgabe 2 (Links- vs. Rechtswirkungen)

Es seien G eine Gruppe, M eine Menge, $\sigma : G \times M \to M$ eine Linkswirkung von G auf M und $\rho : M \times G \to M$ eine Rechtswirkung. Es seien
$\sigma^* : M \times G \to M,\ (m, g) \mapsto \sigma(g^{-1}, m)$ und $\rho^* : G \times M \to M,\ (g, m) \mapsto \rho(m, g^{-1})$.

i) Zu zeigen: σ^*, ρ^* sind Wirkungen.
Sei $m \in M, g_1, g_2 \in G$. Dann gilt

(1) für σ^*:

$$\sigma^*(m, e) = \sigma(e^{-1}, m) = \sigma(e, m) \overset{\sigma \text{ Wirking}}{=} m$$

$$\sigma^*(\sigma^*(m,g_1),g_2) = \sigma^*(\sigma(g_1^{-1},m),g_2) = \sigma(g_2^{-1},\sigma(g_1^{-1},m))$$
$$\overset{\sigma \text{ Wirking}}{=} \sigma(g_2^{-1}\cdot g_1^{-1},m) = \sigma((g_1\cdot g_2)^{-1},m) = \sigma^*(m,g_1\cdot g_2)$$

□

(2) für ρ^*:

$$\rho^*(e,m) = \rho(m,e^{-1}) = \rho(m,e) \overset{\rho \text{ Wirking}}{=} m$$
$$\rho^*(g_2,\rho^*(g_1,m)) = \rho^*(g_2,\rho(m,g_1^{-1})) = \rho(\rho(m,g_1^{-1}),g_2^{-1})$$
$$\overset{\rho \text{ Wirking}}{=} \rho(m,g_1^{-1}\cdot g_2^{-1}) = \rho(m,(g_2\cdot g_1)^{-1}) = \rho^*(g_2\cdot g_1,m)$$

□

ii) Vergleich der Bahnen und Standgruppen von σ mit σ^*.
Sei $x \in M$.

(1) Bahnen:
Dann ist $G \cdot_\sigma x = \{g \cdot_\sigma x \mid g \in G\}$ die Bahn von x bzgl. σ.
Und $x \cdot_{\sigma^*} G = \{x \cdot_{\sigma^*} g \mid g \in G\}$ die Bahn von x bzgl. σ^*.
Dann ist
$$x \cdot_{\sigma^*} G = \{x \cdot_{\sigma^*} g \mid g \in G\} = \{g^{-1} \cdot_\sigma x \mid g \in G\}$$
$$\overset{*}{=} \{g \cdot_\sigma x \mid g \in G\} = G \cdot_\sigma x$$
(*) gilt weil für jedes $g \in G$ auch g^{-1} in G enthalten ist.

(2) Standgruppen:
Es ist $G_x^\sigma = \{g \in G \mid g \cdot_\sigma x = x\}$ die Standgruppe von x bzgl σ.
Es ist $G_x^{\sigma^*} = \{g \in G \mid x \cdot_{\sigma^*} g = x\}$ die Standgruppe von x bzgl σ^*.
Dann ist
$$G_x^{\sigma^*} = \{g \in G \mid x \cdot_{\sigma^*} g = x\} = \{g \in G \mid g^{-1} \cdot_\sigma x = x\}$$
$$= \{g^{-1} \in G \mid g \cdot_\sigma x = x\} = \{g^{-1} \mid g \in G_x^\sigma\}$$

Es folgt insbesondere, dass die Mächtigkeiten der Standgruppen und Bahnen gleich groß sind.

Aufgabe 3 (Das Zentrum)

a) Es seien k ein Körper und $n \geq 1$. Bestimmen Sie das Zentrum von $GL_n(k)$.

Es gilt: $Z(GL_n(k)) = \{k \cdot E_n, k \neq 0\}$.
Beweis:
"$\subseteq$":
Für $M = (m_{ij}) \in Z(GL_n(k))$ kommutiert die Multiplikation mit allen Matrizen, insbesondere mit den Elemtarmatrizen E_{kl}, was einer elementaren Zeilen- bzw. Spaltentransformation entspricht. Daher muss M diagonalgestalt haben.
Für $M \cdot E_{kl} = E_{kl} \cdot M$ erhält man durch Koeffizientenvergleich, dass $m_{ii} = m_{jj}$ gelten muss, für alle i,j. $\Rightarrow M = c \cdot E_n, c \neq 0$.
"$\supseteq$":
Für $c \neq 0$ ist ersichtlich, dass $cE_n \cdot M = M \cdot cE_n$, $\forall M \in GL_n(k)$. □

b) Geben Sie für $n \geq 1$ das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n an.
Für $n \in \{1,2\}$ ist $Z(S_n) = S_n$ (kann man sehr leicht nachrechnen, da wenige Elemente).
Für $n > 2$ ist $Z(S_n) = \{id\}$: Sei $\sigma \in S_n, \sigma \neq id$.
$\Rightarrow \exists k, l \leq n: \ \sigma(k) = l \neq k$. Da nun aber $n > 2 \Rightarrow \exists m: \ m \neq k, m \neq l$.
Dann gilt

$$((k\ m) \cdot \sigma)(k) = l = \sigma(k) \neq \sigma(m) = (\sigma \cdot (k\ m))(k)$$
$$\Rightarrow \sigma \notin Z(S_n)$$
$$\Rightarrow Z(S_n) = \{id\}$$

□

Aufgabe 4 (Ein Färbungsproblem)

a) Welche Symmetriegruppe benutzt man sinnvollerweise, um verschiedene Ketten zu identifizieren?

Wir können eine sechsgliedrige Kette als regelmäßiges Sechseck auffassen, also bietet sich dessen Symmetriegruppe, also D_6 an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der wesentlich verschiedenen Ketten, die man herstellen kann.

Sei nun $G = D_6, \#G = 12$ und $M = \{f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,\ldots,n\}\}, \#M = n^6$.
Zählen der Fixpunkte für die Elemente in G:

- **i)** $g = e$: $\#M^e = n^6$.
- **ii)** $g =$ Drehung der Ordnung 6: $\#M^g = n$ (davon gibt es zwei)
- **iii)** $g =$ Drehung der Ordnung 3: $\#M^g = n^2$ (davon gibt es zwei)
- **iv)** $g =$ Drehung der Ordnung 2: $\#M^g = n^3$ (davon gibt es eine)
- **v)** $g =$ Spiegelung: $\#M^g = n^3$ (davon gibt es 6).

Dann gilt nach Formel für die Anzahl s der wesentlich verschiedenen Färbungen:

$$s = \frac{1}{12} \cdot (n^6 + 7n^3 + 2n^2 + 2n)$$

c) Geben Sie die Anzahl der wesentlich verschiedenen Ketten an, die aus drei weißen und drei schwarzen Perlen bestehen.

Wie in b) bilden wir M mit $n = 2$. Nun wählen wir die Perlen aus, die weiß gefärbt werden, also haben wir

$$P = \{N \subset M | \#N = 3\}, \#P = \binom{6}{3} = 20$$

verschiedene Färbungen dafür zur Verfügung.
Das ergibt dann 5 verschiedene Färbungen.