Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1

Es seien G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G, (g,h) \mapsto g \cdot h$, eine assoziative Verknüpfung mit einem linksneutralem Element $e \in G$ und einem linksinversen Element $g' \in G$ für jedes $g \in G$.

a) Es seien $g \in G$ und $g' \in G$ ein Element mit $g' \cdot g = e$. Zeigen Sie $g \cdot g' = e$.

Beweis:
Es seien $g, g' \in G$, sodass $g' \cdot g = e$. Es sei $g'' \in G$ ein Linksinverses zu g'. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e &= g'' \cdot g' = g'' \cdot (e \cdot g') = g'' \cdot ((g' \cdot g) \cdot g') \\ &\overset{assoz.}{=} (g'' \cdot g') \cdot (g \cdot g') = e \cdot (g \cdot g') \\ &= g \cdot g' \end{aligned}$$

$\square$

b) Beweisen Sie, dass $g \cdot e = g$ für alle $g \in G$ gilt.

Beweis:
Es seien $g, g' \in G$, sodass $g' \cdot g = e$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} e \cdot g &= (g' \cdot g) \cdot g \overset{a)}{=} (g \cdot g') \cdot g \\ &\overset{assoz.}{=} g \cdot (g' \cdot g) = g \cdot e \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2

Auf $\mathbb{R}$ wird folgende Verknüpfung $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $(a,b) \mapsto a \cdot b + a + b$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\star$ das Assoziativgesetz erfüllt und es ein neutrales Element gibt.

Beweis:

b) Welche Elemente in $\mathbb{R}$ besitzen bzgl. $\star$ keine Inversen? Geben Sie die kleinste Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ an, für die $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \star)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3

a)

b)

Aufgabe 4

a)

b)

c)