

## Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: not known

**Aufgabe 1 (Teilbarkeit)**

Gegeben seien natürliche Zahlen  $k, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , so dass  $n = k \cdot m$ .

a) Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a^m - b^m) | (a^n - b^n).$$

**Beweis:**

Seien  $p_1, \dots, p_s$  alle Primzahlen, die kleiner gleich  $\max\{a, b\}$  sind.

b) Zeigen Sie weiter:

$$k \text{ ungerade} \Rightarrow (\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a^m + b^m) | (a^n + b^n))$$

**Beweis:**

tbd by your mother

**Aufgabe 2 (Primzahlen)**

a) Bestimmen Sie mit dem Sieb des Erastrothenes alle Primzahlen zwischen 2 und 200.  
 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199\}$

Und nun darf hier noch wer den Algorithmus runter brechen.

b) Geben Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl  $-1.601.320$  an.

$$-1.601.320 = -1 \cdot 43 \cdot 19 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 2^3$$

**Aufgabe 3 (Teiler)**

Für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  sei  $T_n := \{l \geq 1 \mid l|n\}$  die Menge ihrer Teiler.

a) Es sei  $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$ . Geben Sie eine Formel für die Anzahl  $\#T_n$  der Teiler von  $n$  an.

Für diese Formel reicht uns ein einfaches kombinatorisches Argument. Wir haben  $s$  verschiedene Elemente mit jeweils  $k_i$  vorkommen. Diese wollen wir nun in allen kombination Möglichkeiten haben. Dies führt zur Formel:

$$\#T_n = \prod_{j=0}^s (k_j + 1)$$

b) Charakterisieren Sie diejenigen Zahlen, für die  $\#T_n$  ungerade ist.

**Vermutung:**  $\#T_n$  ungerade  $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} : a^2 = n$ .

**Beweis:**

#### Aufgabe 4 (Die Amnestie)

Ein Herrscher hält 500 Personen in Einzelzellen gefangen, die von 1 bis 500 durchnummeriert sind. Anlässlich seines fünfzigsten Geburtstags gewährt er eine Amnestie nach folgenden Regeln:

- Am ersten Tag werden alle Zellen aufgeschlossen.
- Am Tag  $i$  wird der Schlüssel der Zellen  $i, 2i, 3i$  usw. einmal umgedreht, d. h. Zelle  $j$  wird versperrt, wenn sie offen war, und geöffnet, wenn sie verschlossen war,  $j = i, 2i, 3i$  usw.,  $i = 2, \dots, 500$ .

Wie viele Gefangene kommen frei? Ist der Insasse von Zelle 179 unter den Freigelassenen?

**Eigenschaft:** Der Schlüssel einer Zelle wird genau dann umgedreht, wenn der Tag Teiler der Zahl ist.

**Beweis:**

” $\Leftarrow$ ”

1. Tag, werden alle Zellen geöffnet.  $k \neq 0 \Rightarrow 1|k$ . Da die Zellen im Bereich  $[1, 500]$  liegen ist  $k \neq 0$ . Am Tag  $j$  gilt:  $\forall k \in \mathbb{N} : k \cdot i$  wird geöffnet.  $k \cdot i$ .

Hat Zelle  $z$  nun den Teiler  $j$ , so gilt:  $\exists k' \in \mathbb{N} : z = j \cdot k'$ . Dies erfüllt die drehen Voraussetzung.

” $\Rightarrow$ ”

Sei  $z$  Zelle und  $j$  Tag und es gilt  $j \nmid z \Rightarrow \exists k, r \in \mathbb{N} : k \cdot j + r = z \wedge 0 < r < j$ .

Da aber nur  $t \cdot j$  für beliebige  $t$  gedreht wird, kann bei der Zelle das Schloss nicht nochmal gedreht werden.  $\square$

**Vermutung:** Die Zelle  $z$  ist am Ende offen, genau dann wenn  $\#T_z$  ungerade ist.

**Beweis:**

” $\Leftarrow$ ”

$$\exists k \in \mathbb{N} : z = 2 \cdot k + 1$$

Am ersten Tag werden alle Türen geöffnet. Bleibe  $2 \cdot k$  Drehvorgänge. Da aber nach Beschreibung sich 2 Vorgänge paarweise aufheben, wird die Tür am Ende geöffnet sein.

” $\Rightarrow$ ”  $\exists k \in \mathbb{N} : z = 2 \cdot k + 2$  ist möglich, da 0 keine unserer Türen ist.

Am ersten Tag wird die Tür wieder geöffnet. Bleiben  $2 \cdot k + 1$  Drehvorgänge, von denen sich  $2 \cdot k$  gegenseitig aufheben. Bleib uns ein Drehvorgang, der die Tür abschließt.  $\square$

Nach 3b) müssen wir jetzt nur noch sehen, welche der Zellen Quadratzahlen sind:  
 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144  
 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 484

Da die 179 keine Quadratzahl ist, wird die Zelle am Ende der 500 Tage geschlossen sein.