Lineare Algebra II: Übung 10

Tutorin: Elena, Di 14-16

June 21, 2011

Aufgabe 1

Sei $A = P + V_A = 0 + \mathbb{R}^3$ affiner Raum und F Quadrik mit
$F = \{-x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 5 = 0\}$.
Wähle kanonische Basis $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_i = e_i$.
Dann ist $f(x) = x^t \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}^t x - 5$
Also $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, c = -5.$
Wende Verfahren aus 5.33 an:
(1) M ist bereits symmetrisch, Symmetrisieren nicht nötig.
(2) Ist $b \in ImM$?
Stelle inhomogenes lineares Gleichungssystem $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$ auf:
$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right)$ Löse nach Gauß-Verfahren
$\Rightarrow x_1 = \frac{32}{7}, x_2 = -\frac{3}{7}, x_3 = \frac{20}{7}$
$\Rightarrow$Lösung existiert $\Rightarrow b \in ImM$.
(3) Da $b \in ImM \Rightarrow F$ besitzt Mittelpunkt.
Eliminiere Linearform, also Translation um $a = (a_1, a_2, a_3)^t$ mit $b + 2Ma = 0$.
Finde a, stelle Gleichungssystem auf $b + 2Ma = 0 \Leftrightarrow 2Ma = -b$, also:
$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 & -10 \\ 2 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \overset{II+3I, III+I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 22 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{III-\frac{2}{11}II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 22 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{11} & -\frac{20}{11} \end{array}\right)$
$\Rightarrow a_3 = -\frac{10}{7}, a_2 = \frac{3}{14}, a_1 = -\frac{16}{7}$.
Dann ist nach Translation um $a = (-\frac{10}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{16}{7})^t$ $P' = P + \sum_{i=1}^n a_i v_i$ Mittelpunkt, mit
$P' = 0 + \sum a_i e_i = (-\frac{10}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{16}{7})^t$.

Aufgabe 2

Sei $A : P + V_a$ affiner Raum, V_a $\mathbb{R}-$VR, $f(x) = \tilde{x}^t Mx + b^t x + c$ quadratisch, $M \in M(n, n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Sei $F = \{x \in A \,|\, f(x) = 0\}$.
z.z.. M positiv definit $\Rightarrow F$ hat genau einen Mittelpunkt
Sei $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \beta(x) = b^t x, \quad \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \alpha(x) = Mx$
Es gibt eine Zerlegung $V_a = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$, mit $V_0 = \ker \alpha$.
$M|_{V_+}$ ist der Teil„ auf dem M positiv definit ist. Da nach Voraussetzung M positiv definit
$\Rightarrow \dim V_+ = \dim A = n \Rightarrow \dim V_0 = 0 = \ker \alpha$.
$\Rightarrow \ker \alpha = \{0\} \Rightarrow b \in ImM$
$\Rightarrow$Mittelpunkt P' existiert nach Satz 5.27.

Da $b \in ImM$ existiert ein $a \in A$, sodass f nach Translation um a folgende Form hat (Satz 5.28):
$f(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 + c$ wobei p die Anzahl der positiven Eigenwerte und $r = rgM$.
Da M symmetrisch $\Rightarrow$ M diagonalisierbar $\Rightarrow r = rgM = n$
Da M positiv definit $\Rightarrow$Alle Eigenwerte von M positiv$\Rightarrow p = n$
$\Rightarrow f(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 + c$
$\Rightarrow M = E_n$
$\Rightarrow f(x) = \tilde{x}^t E_n \tilde{x} + c$
Suche a' sodass $2Ma' = -b \Leftrightarrow 2E_n a' = 0$
$\Leftrightarrow a' = 0$
$\Rightarrow P$ ist Mittelpunkt von F. Da Lösung zu $2Ma' = 0$ eindeutig $\Rightarrow P$ eindeutig
Für M negativ definit ist analog $\dim V_- = n$ und damit nach Translation $f(x) = -x_1^2 - ... - x_n^2 + c$
$\Rightarrow M = -E_n$, Rest analog.

Aufgabe 3

Sei $M \in M(n,n,\mathbb{R})$.

a)

z.z. $\exists A, B \in M(n,n,\mathbb{R}) : M = A + B$, s.d. A symmetrisch, B schiefsymmetrisch.
Wähle $A = \frac{1}{2}(M + M^t)$ (symmetrisiere wie in der VL) $\Rightarrow A$ symmetrisch.
Wähle nun $B = M - \frac{1}{2}(M + M^t) = \frac{1}{2}(2M - M - M^t) = \frac{1}{2}(M - M^t)$
$\Rightarrow A + B = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^t + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^t = M$
z.z. B ist schiefsymmetrisch, also $B = -B^t$
$-B^t = -\left(\frac{1}{2}(M - M^t)\right)^t = -\left(\frac{1}{2}\left(M^t - M^{t^t}\right)\right) = -\left(\frac{1}{2}(M^t - M)\right) = \frac{1}{2}(-M^t + M) = \frac{1}{2}(M - M^t) = B$

b)

Sei $A, B, A', B' \in M(n,n,\mathbb{R})$, sei $M = A + B = A' + B'$, A, A' symmetrisch, B, B' schiefsymmetrisch.
Sei dann $A' := A + C$ und $B' := B - C$ für ein $C \in M(n,n,\mathbb{R})$.
$M = A + B = A' + B' = (A + C) + (B - C)$
$A + C$ symmetrisch, $B + C$ schiefsymmetrisch: $(a_{ij} + c_{ij} = a_{ji} + c_{ji}) \wedge (b_{ij} - c_{ij} = -b_{ji} + c_{ji}) \forall i, j$
$\Leftrightarrow c_{ij} = c_{ji} \wedge -c_{ij} = c_{ji} \forall i, j \Rightarrow c_{ij} = 0 \forall i, j$
$\Rightarrow A = A' \wedge B = B'$

c)

Sei nun $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Dann ist nach Konstruktion aus a)
$A = \frac{1}{2}(M + M^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} = A + B.$

Aufgabe 4

Sei V endlich dimensionaler $\mathbb{R}-VR$, $\alpha: V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform.

a)

z.z. Bzgl. jeder Basis von V wird α durch eine schiefsymmetrische Matrix $M \in M(n, n\mathbb{R})$ repräsentiert.
Beweis:

Sei o.B.d.A. $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ Basis von V.

Sei $x, y \in V$. Dann ist $x = (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $y = (y_1, ..., y_n) = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$.
$\Rightarrow \alpha(x,y) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) \overset{\alpha\, billinear}{=} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \alpha(v_i, v_j)$.
Wir setzen also $\alpha(x,y) := x^t M y$, $M := (\alpha(v_i, v_j))_{ij}$, also

$$M = \begin{pmatrix} \alpha(v_1, v_1) & & \cdots & \alpha(v_1, v_n) \\ & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha(v_n, v_1) & & \cdots & \alpha(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Nach 1.2 ist M darstellende Matrix der Bilinearform.
" $\Rightarrow$ ":
$\alpha: V \times V \to \mathbb{R}$ schiefsymmetrisch, mit $\alpha(x,y) = x^t M y$, $M \in M(n, n, \mathbb{R})$.
Dann ist M schiefsymmetrisch, da
$\alpha(x,y) = -\alpha(y,x) \Rightarrow m_{ij} = -m_{ji}$
" $\Leftarrow$ " :
$M \in M(n, n, \mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, also $M = -M^t$
Dann ist $\alpha(x,y) := x^t M y$ schiefsymmetrisch, da
$\alpha(x,y) = x^t M y \overset{M=-M^t}{=} -\left((x^t M y)^t\right) = -(y^t M x) = -\alpha(y,x)$.

b)

Sei o.B.d.A. $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \{v_1, .., v_n\}$ Basis von V.
z.z. α nicht ausgeartet $\Rightarrow \dim V = n$ gerade.
Beweis via Induktion über $\dim V = n$:
αnicht ausgeartet $\overset{def.}{\Rightarrow} \forall x \in V \backslash \{0\} \exists y \in V: \alpha(x,y) \neq 0, \forall y \in V \backslash \{0\} \exists x \in V: \alpha(x,y) \neq 0$
(a) $\dim V = n = 0$
Nichts zu zeigen, gilt trivialerweise und 0 gerade.
(b) $\dim V = n = 1$
Da $\dim V = 1$ ist für $x \in \mathcal{A}$:
$\alpha(x,x) \overset{schief-symm}{=} -\alpha(x,x) \Leftrightarrow 2\alpha(x,x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x,x) = 0$
$\Rightarrow \alpha$ ausgeartet
(c) $\dim V = n \geq 2$
Wähle $x \in \mathcal{A}$. Da α nicht ausgeartet $\exists y \in A: \alpha(x,y) \neq 0$, also ist auch $\alpha(y,x) \neq 0$, da $\alpha(y,x) = -\alpha(x,y) \neq 0$
Sei nun $\alpha|_{V \backslash \langle x,y \rangle}: V \backslash \langle x,y \rangle \times V \backslash \langle x,y \rangle \to \mathbb{R}$ die Bilinearform eingeschränkt auf $V \backslash \langle x,y \rangle$, mit $\dim V \backslash \langle x,y \rangle = n-2$.
Die eingeschränkte Funktion $\alpha|_{V \backslash \langle x,y \rangle}$ ist ebenfalls so geartet, wie α (wir verändern ja nichts an der Funktion).
Nun wiederholen wir diese Prozedur solange bis wir Fall (a) oder (b) erreichen.
Nun ist αnach Voraussetzung nicht ausgeartet $\Rightarrow$Induktionsanker (a) wird erreicht $\Rightarrow \dim V = n$ gerade.