Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor: Tilmann

Aufgabe 1

Die Funktionen der Aufgabe sollen derart geordnet werden, so dass $g_i \in \Omega(g_{i+1})$ gilt. Geben Sie auch an, wenn sogar $g_i = \Theta(g_{i+1})$ ist.

Die Folge erfüllt die Eigenschaft und enthält die Elemente, die geordent werden müssen:

$$(g_i)_{1\leq i\leq 10} = (n^{\frac{1}{\log n}}, \ln n, \log^2 n, (\sqrt{2})^{\log n}, n^2, 4^{logn}, (\lceil \log n \rceil)!, n^{log(log(n))}, 2^n, 2^{(2^n)})$$

Beweis

1. $2^n \in \Omega(2^{(2^n)})$:
   $\underset{n\to\infty}{lim} \frac{2^n}{2^{(2^n)}} = \underset{n\to\infty}{lim} \frac{2^n \cdot 1}{2^n \cdot 2^{(2^n)-n}} = \underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{2^{(2^n)-n}}$
   Da 2^n stärker wächst als n, gilt:
   $\underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{2^{(2^n)-n}} = 0$
   Damit gilt nach konvergenz Kriterium $2^n \in \Omega(2^{(2^n)}) \Rightarrow g_9 \in \Omega(g_{10})$
2. $n^{log(\log(n))} \in \Omega(2^n)$:
   Kein Plan
3. $(\lceil \log n \rceil)! \in \Omega(n^{log(\log(n))})$:
   Später
4. $4^{\log(n)} \in \Omega((\lceil \log n \rceil)!)$:
   Wie gehabt
5. $n^2 \in \Theta(4^{\log(n)})$:
   Wir zeigen an dieser Stelle, das gilt: $n^2 = 4^{\log(n)}$. Damit gilt die Beziehung für Θ sofort.
   $4^{\log n} = (2^2)^{\log n} = 2^{2\cdot\log n} = 2^{\log n^2} = n^2$
   $\Rightarrow g_5 \in \Theta(g_6)$
6. $(\sqrt{2})^{\log n} \in \Theta(n^2)$:
   Ersteinmal gilt : $(\sqrt{2})^{\log n} = (2^{\frac{1}{2}})^{\log n} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\log n} = 2^{\log\sqrt{n}} = \sqrt{2}$
   Nun wenden wir wieder das Konvergenzkreterium an:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1.5}} = 0$
   $\Rightarrow (\sqrt{2})^{\log n} \in \Theta(n^2) \Rightarrow g_4 \in \Omega(g_5)$
7. $\log^2 n \in \Omega(\sqrt{2})$:
   tbd
8. $\ln n \in \Omega(\log^2 n)$:
   tbd
9. $n^{\frac{1}{\log n}} \in \Omega(\ln n)$:
   Zunächst gilt: $n^{\frac{1}{\log n}} = 2^{\frac{\log n}{\log n}} = 2.$
   Daraus folgt offensichtlich:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln n} = 0 \Rightarrow g_1 \in \Omega(g_2)$