

## Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

**Aufgabe 24:** *Stetige Abbildungen auf Punktmengen*

- (i) Sei
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- stetig. Zeigen Sie, dass für jede Menge
- $A \subset \mathbb{R}^n$
- gilt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

**Beweis:**

Wir benutzen für den Beweis das Folgenkonvergenzkriterium für Abgeschlossene Menge.

D.h. wenn  $B$  eine abgeschlossene Menge ist muss für jede Folge  $(x)_{k \in \mathbb{N}}$  aus  $B$ ,  $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_k\right) \in B$  gelten.

Nun gilt, aber, für jeden Punkt  $x_0 \in \overline{A}$ , dass es eine Folge  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k = x_0$ .

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \end{aligned}$$

Wir haben eine Folge von Bildern der Funktion. Wir wissen, dass in einer abgeschlossenen Menge jede konvergente Folge gegen einen Punkt innerhalb der Menge konvergiert. Da  $f(x_0)$  eine konvergente Folge  $f(x_k)$  besitzt, da die  $x_k$  konvergieren und  $f$  stetig ist, muss das Bild des Abschluss des Quellbereiches auch im Abschluss des Bild liegen.

□

- (ii) Ist das stetige Bild
- $f(M)$
- einer beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Menge
- $M \subset \mathbb{R}^n$
- wieder offen bzw. abgeschlossen? Geben Sie ein Beispiel an.

**Lösung:**

(1) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen, und sei  $f \equiv c \in \mathbb{R}^m$ .

Dann ist  $f$  stetig und  $f(M) = \{c\}$ . Die Menge  $\{c\}$  ist aber nicht offen, da für alle  $\varepsilon > 0$  die Kugel  $B_\varepsilon(c)$  nicht Teilmenge von  $\{c\}$  ist.

(2) Sei  $M \subset \mathbb{R}$  mit  $M = (-\infty, 0]$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $x \mapsto e^x$  (also hier:  $n = 1, m = 1$ ).

Dann ist  $M$  abgeschlossen, da für alle konvergenten Folgen  $(x_k)$ , mit  $x_k \in M$  gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha < \infty$  und  $\alpha \geq 0$  und damit  $\alpha \in M$ .

Es gilt weiterhin:  $f(M) = f((-\infty, 0]) = (0, 1]$  wobei  $(0, 1]$  nicht abgeschlossen ist in  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  stetiger Bilder von beliebigen offenen bzw. abgeschlossenen Mengen müssen nicht wieder offen bzw. abgeschlossen sein.

- (iii) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Erfülle  $M \subset \mathbb{R}^n$  die Heine-Borell-Eigenschaft. Dann erfüllt  $f(M)$  diese Eigenschaft auch.

**Lösung:**

Sei  $\bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung von  $f(M)$ , mit  $I$  Indexmenge.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt:  $f^{-1}(V)$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$ , für alle offenen Mengen  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Also folgt aus der Stetigkeit von  $f$ :  $V_i := f^{-1}(U_i)$  ist offen,  $i \in I$ .

Da  $M \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$  und  $M$  die Heine-Borell-Eigenschaft erfüllt, existieren  $i_1, i_2, \dots, i_k \in I, k \in \mathbb{N}$  mit  $M \subseteq \bigcup_{j=1}^k V_{i_j}$ . Daraus folgt  $f(M) \subseteq f(\bigcup_{j=1}^k V_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^k f(V_{i_j})$ . Durch Einsetzen erhalten wir dann  $f(M) \subseteq \bigcup_{j=1}^k f(f^{-1}(U_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$ .

Also existiert eine endliche offene Überdeckung von  $f(M)$

$\Rightarrow f(M)$  erfüllt die Heine-Borell-Eigenschaft. □

**Aufgabe 25: Wachstum spezieller Funktionen**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 && \text{für alle } x \neq 0 \\ f(cx) &= cf(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } c > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten  $a, b > 0$  gibt, so dass

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Beweis:**

Für  $x = 0$  gilt  $f(x) = 0$ , denn

$$f(0) = f(c \cdot 0) = c \cdot f(0), \text{ für alle } c > 0.$$

Und damit  $f(0) = c \cdot f(0) \Leftrightarrow (1 - c)f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0, c > 0$ .

Da auch  $|x| = 0$  ist, gilt die Ungleichung in diesem Fall für alle  $a, b > 0$ .

Für  $x \neq 0$  gilt:

$$a|x| \leq f(x) \leq b|x| \stackrel{|x| \neq 0}{\Leftrightarrow} a \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq b$$

Durch die Eigenschaften von  $f$  können wir nun umformen:

$\frac{f(x)}{|x|} = \frac{1}{|x|} f(x) \stackrel{\frac{1}{|x|} > 0}{=} f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ , wobei der Ausdruck  $\frac{x}{|x|}$  einen normierten Vektor aus dem  $\mathbb{R}^n$  beschreibt, es gilt also  $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$ .

Sei nun  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$  die Menge der normierten Vektoren.

Dann gilt:  $M$  ist kompakt.

Beweis:  $M \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow (M \text{ kompakt} \Leftrightarrow M \text{ beschränkt und abgeschlossen})$ .

TBA:  $M$  beschränkt und abgeschlossen.

Da  $M$  kompakt und  $f$  stetig, gilt:  $f(M)$  nimmt in  $M$  sein Maximum und Minimum an, es existieren also  $p, q \in M$  mit  $f(p) = \sup f(M)$  und  $f(q) = \inf f(M)$ .

Setze nun  $a := f(p) > 0, b := f(q) > 0$ , also folgt

$$a = f(p) = \inf f(M) \leq \frac{f(x)}{|x|} \leq \sup f(M) = f(q) = b \text{ und daraus die Behauptung.}$$

**Aufgabe 26: Wegzusammenhang**

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte  $x, y \in A$  eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  gibt, mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ . Man nennt  $\gamma$  einen *stetigen Weg von  $x$  nach  $y$* .

- (i) Seien  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig und  $A$  wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann auch  $f(A)$  wegzusammenhängend ist.

**Beweis:**

Seien  $x, y \in f(A)$ . Nun wissen wir, dass es 2 Punkte  $a, b \in A$  geben muss, mit  $f(a) = x$  bzw.  $f(b) = y$ , da  $x, y$  sonst nicht im Bild liegen würden.

Nach Voraussetzung ist  $A$  wegzusammenhängend, d.h. es gibt eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ , mit  $\gamma(0) = a$  und  $\gamma(1) = b$ .

Da die Komposition von 2 stetigen Funktionen wiederum stetig ist, wählen wir als Wegfunktion in  $f(A)$  die Funktion  $(f \circ \gamma)$ .

Diese Funktion ist stetig und es gilt:

$$(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(a) = x \text{ und}$$

$$(f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(b) = y.$$

Diese Funktion können wir also für 2 beliebige Punkte in  $f(A)$  angeben. Damit existiert ein stetiger Weg von  $x$  nach  $y$  in  $f(A)$  und damit ist auch  $f(A)$  *wegzusammenhängend*.

□

- (ii) Zeige Sie, dass genau dann  $A \subset \mathbb{R}$  wegzusammenhängend ist, wenn  $A$  ein Intervall ist, d.h. wenn für alle  $x, y \in A$ ,  $x \leq y$ ,  $[x, y] \subset A$ .

**Beweis:**

Nehmen wir an, dass  $A$  kein Intervall ist, aber *wegzusammenhängend*.

Da  $A$  kein Intervall ist gilt

$\exists x, y \in A$   $x < y$ ,  $[x, y] \not\subset A$ , insbesondere muss also ein Wert  $z \in [x, y]$  existieren, mit  $z \notin A$ .

Da  $A$  aber *wegzusammenhängend* sein soll, existiert eine stetige Funktion  $\gamma$ , mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

Nach dem Zwischenwertsatz, muss die Funktion  $\gamma$  jeden Wert zwischen  $x$  und  $y$  einmal annehmen, da  $\gamma$  stetig ist.

Sei  $\xi \in [0, 1]$  der Wert mit  $\gamma(\xi) = z$ . Wir untersuchen  $\gamma$  nun im Punkt  $\xi$ .

Da  $[0, 1]$  abgeschlossen ist, existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $[0, 1]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ .

Da  $f$  stetig ist, muss gelten  $f(\xi) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = z$ . Da wir nun aber eine konvergente Folge angeben konnten, muss  $\xi$  im Bild liegen. Dies ist aber nach Voraussetzung unmöglich.

□

- (iii) Können Sie den bekannten Zwischenwertsatz aus der Analysis I auch auf Funktionen  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  verallgemeinern.

**Beweis:**

Ich hab keine Ahnung, was das sein soll.

### Aufgabe 27 *Stetigkeit der Umkehrfunktion*

- (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

einen Homöomorphismus von  $(0, 1)$  nach  $\mathbb{R}^+$  definiert, d.h.  $f$  ist invertierbar zwischen den angegebenen Mengen und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  ist stetig.

**Beweis.:**

Sei  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , mit  $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ .

Z.z.: (1)  $g$  bijektiv, (2)  $g$  stetig, (3)  $g^{-1}$  stetig.

(1)  $g$  bijektiv

(1a)  $g$  injektiv, also  $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$ , für alle  $a, b \in (0, 1)$ .

Seien  $a, b \in (0, 1)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(a) &= g(b) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} &= \frac{b}{1-b^2} \\ \Leftrightarrow a - ab^2 &= b - ba^2 \\ \Leftrightarrow a &= b \end{aligned}$$

(1b)  $g$  surjektiv, also  $\forall c \in \mathbb{R}^+ \exists x \in (0, 1) : g(x) = c$ .

Sei  $c \in \mathbb{R}^+$ . Wähle  $x := \frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c}$ .

Dann gilt  $x > 0$ , da  $c > 0$  ist steht im Zähler immer eine positive Zahl ( $\sqrt{1+x} \geq 1$  für  $x > 0$ ), und der Nenner  $2c > 0$ .

Es gilt darüber hinaus, dass  $x < 1$ , da

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1+4c^2}-1}{2c} < 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+4c^2}-1 &< 2c \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+4c^2} &< 2c+1 \\ >0(\text{siehe oben}) \Leftrightarrow 1+4c^2 &< 4c^2+4c+1 \\ \Leftrightarrow 0 &< 2c \end{aligned}$$

Und dies gilt, da  $c > 0$  ist.  $\Rightarrow g$  bijektiv.

(2)  $g$  stetig

Da die Funktion im Nenner  $1-x^2$  stetig ist und auf dem Intervall  $(0, 1)$  keine Nullstellen hat, sowie  $x$  stetig ist, ist nach Sätzen aus Ana I der Quotient aus den beiden wieder eine stetige Funktion.

(3)  $g^{-1}$  stetig

blablabla

(ii) Sei die Funktion  $f : [0, 1) \cup [2, 3] \rightarrow [0, 2]$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0, 1) \\ x - 1 & , x \in [2, 3] \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass  $f$  stetig und invertierbar ist, aber die Umkehrfunktion  $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1) \cup [2, 3]$  nicht stetig ist.

**Beweis:**

tbd