Übung 1

Max Wisniewski, Alexander Steen

Aufgabe 1

Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \geq 0\}$.

1. $g(M) \subseteq M$
   Sei $x \in M$, dann gilt
   $$g(x) = \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\geq 0} \geq 0$$
   Also ist $g(x) \in M \Rightarrow g(M) \subseteq M$.

2. $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ für $x \neq y$
   Seien $x, y \in M$, $x \neq y$. Sei weiterhin o.B.d.A. $x > y$. Dann gilt
   $$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x + \frac{1}{1+x} - y - \frac{1}{1+y}| \\ &= |\underbrace{x - y}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}}_{<0}| \\ &< |x - y| \end{aligned}$$

3. g besitzt keinen Fixpunkt in M
   Beweis durch Widerspruch: Sei $x^* \in M$ Fixpunkt von g. Dann gilt
   $$\begin{aligned} g(x^*) = x^* &= x^* + \frac{1}{1+x^*} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{1+x^*} \end{aligned}$$
   Das ist aber ein Widerspruch, da es keine Zahl x gibt, für die $\frac{1}{1+x} = 0$ gilt. $\square$

Dies ist kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz, da es sich bei g nicht um eine Kontraktion handelt: Da $\frac{1}{x+1} \overset{x\to\infty}{\to} 0$ und damit

$$|g(x) - g(y)| = |\underbrace{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}}_{\overset{x,y\to\infty}{\to} 0} + x - y|$$

Für jedes feste $\alpha \in [0, 1)$ ist $|g(x) - g(y)| \to |x - y| > \alpha|x - y|$, für x, y groß genug.

Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a)

Zu zeigen: Es existiert ein eindeutiger Fixpunkt von F in $D := \{x \in \mathbb{R}^2 | \, |x|_\infty \leq 1\}$.

Beweis: (1) $F(D) \subseteq D$
Sei $x \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |F(x)|_\infty &= \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right|_\infty \\ &= \max\{\underbrace{|\frac{1}{3}\overbrace{x_2^2}^{\leq 1} + \frac{1}{8}|}_{\leq 1}, \quad \underbrace{|\frac{1}{4}\overbrace{x_1^2}^{\leq 1} - \frac{1}{6}|}_{\leq 1}\} \\ &\Rightarrow x \in D \end{aligned}$$

(2) F ist Kontraktion
asd

b)

```
f = @(x) (1/3 * x(2)^2 + 1/8, 1/4 * x(1)^2 + 1/6);
lambda = 0.99 //lipschitz-konstante

lastx = (1,1); // x0: Startwert mit |x0| <= 1
x = f(1,1); // F(x0)

while lambda/(1-lambda) * norm(lastx - x,inf) > 1.0e-8
  x = f(x); // x(n+1) = F(x(n))
end;

return x;
```

Aufgabe 3