Max Wisniewski, Alexander Steen

Tutor: David Müßig

Aufgabe 1 (Gruppen der Ordnung 10)

Beweisen Sie, dass eine endliche Gruppe G der Ordnung 1000 einen Normalteiler H mit $\{e\} \subsetneq H \subsetneq G$ besitzt.

Die Ordnung von G ist $\#G = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$.
$\overset{\text{1. Sylowsatz}}{\Rightarrow}$ Es existieren h 5-Sylow-Untergruppen. Für h muss gelten: $h \equiv 1 \mod 5$ und $h \mid 2^3 = 8$. Die Teiler von 8 sind 1,2,4. Da aber da nur $1 \equiv 1 \mod 5$ gilt, gibt es genau eine 5-Sylow-Untergruppe.
Wegen der Eindeutigkeit der Sylow-Untergruppe folgt aus dem zweiten Sylowsatz, dass diese ein Normalteiler von G ist. □

Aufgabe 2 (Kommutierende Normalteiler)

Es seien G eine Gruppe und H, J Normalteiler von G, so dass $H \cap J = \{e\}$.

a) Beweisen Sie $\forall h \in H \ \forall j \in J : \ h \cdot j = j \cdot h$.

Sei $h \in H, j \in J$.
Betrachte $g = h \cdot j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1} \in G$.
(1) Es gilt: $H \lhd G \Rightarrow j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1} \in H \Rightarrow h \cdot (j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1}) \in H$.
(2) Es gilt: $J \lhd G \Rightarrow h \cdot j \cdot h^{-1} \in J \Rightarrow (h \cdot j \cdot h^{-1}) \cdot j^{-1} \in J$.
$\Rightarrow g \in H \cap J \Rightarrow g = e$. Also gilt nun:

$$h \cdot j \cdot h^{-1} \cdot j^{-1} = e \Leftrightarrow h \cdot j = j \cdot h$$

□

b) Nun sei G eine endliche Gruppe mit $\#G = \#H \cdot \#J$. Zeigen Sie $G \cong H \times J$.

Wir konstruieren $\varphi : H \times J \to G$, mit $(h, j) \mapsto h \cdot j$.
z.z.: φ ist Isomorphismus.

φ ist homomorph:

$$\begin{aligned} \varphi(e, e) &= e \cdot e \\ &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall h \in H, j \in J \ : \ \varphi((h, j) \cdot (h', j')) &= \varphi((h \cdot h'), (j \cdot j')) \\ &= h \cdot h' \cdot j \cdot j' \\ &\overset{a)}{=} h \cdot j \cdot h' \cdot j' \\ &= \varphi(h, j) \cdot \varphi(h', j') \end{aligned}$$

Nun gilt zu zeigen, dass φ bijektiv ist. Da wir schon wissen, dass $\#G = \#(H \times J)$ gilt, müssen wir nur noch zeigen, dass φ injektiv ist und sind damit fertig.

Seien $(h, j), (h', j') \in H \times J$ und $\varphi(h, j) = \varphi(h', j')$.

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(h,j) & = & \varphi(h',j') \\ \Leftrightarrow & h \cdot j & = & h' \cdot j' \\ \Leftrightarrow & h'^{-1}h & = & j' \cdot j^{-1} \end{array}$$

Da aber die Bedingung an H, J war, dass $H \cap J = \{e\}$ gilt. Muss gelten, dass $h'^{-1}h = e \Leftrightarrow h' = h$ und $j'j^{-1} = e \Leftrightarrow j = j'$, da sonst im Schnitt mehr als das neutrale Element liegen würde.

$\Rightarrow \varphi$ ist Isomorphismus zwischen $(G, \cdot)$ und $(H \times J, \cdot) \Rightarrow G \cong H \times J$

$\square$

Aufgabe 3 (Zyklische Gruppen)

Es seien $p < q$ Primzahlen, so dass $q \not\equiv 1 \mod p$, und G eine endliche Gruppe der Ordnung $p \cdot q$.

a) Geben Sie mindestens vier Beispiele für Paare (p, q) mit den obigen Eigenschaften an.

$$(3, 5), (5, 7), (7, 11), (11, 13)$$

b) Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung p und einen Normalteiler der Ordnung q hat.

Nach dem ersten Sylow-Satz existieren sowohl p - Sylow-Untergruppen als auch q - Sylow-Untergruppen.
Da $q \not\equiv 1 \mod p$ und q Primzahl $\Rightarrow$ ex. genau eine p-Sylow-Untergruppe. Damit ist diese ein Normalteiler.
Da $p < q$ ist nur die 1 Teiler von q mit Restklasse 1. $\Rightarrow$ ex. genau eine q-Sylow-Untergruppe. Damit ist diese ein Normalteiler. $\square$

c) Zeigen Sie, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ist, und folgern Sie, dass G zyklisch ist.

Sei A die p-Sylow-Gruppe und B die q-Sylow-Gruppe aus b).
Da $\#A$ und $\#B$ Primzahl ist, sind A, B zyklisch.
Für ein $g \in A \cap B, g \neq e$ gilt, dass $\text{Ord}(g) = p \wedge \text{Ord}(g) = q$ und weil $p < q \Rightarrow g = e$.

Also ist $A \cap B = \{e\}$.
Dann gilt nach Aufgabe 2b), dass $G \cong A \times B$ (Hier könnte man auch einfach einen Isomorphismus zwischen Potenzen der Erzeuger von A bzw. B und G aufstellen).
Da A, B zyklisch gilt: $A \cong \mathbb{Z}_p$ und $B \cong \mathbb{Z}_q$ und damit

$$G \cong A \times B \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

$\square$

Aufgabe 4 (Endliche abelsche Gruppen)

Listen Sie alle Isomorphieklassen von endlichen abelschen Gruppen A der Ordnung 36 auf.

Die Ordnung von A ist $\#A = 36 = 2^2 \cdot 3^2$.
Dann gilt einer der folgenden Isomorphien (wie man durch Sylow-Untergruppen-Betrachtung herausfinden kann):

$$\begin{aligned}
&A \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9\\
&A \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_9\\
&A \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)\\
&A \cong \mathbb{Z}_4 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)
\end{aligned}$$