Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 10: *Berechnung von Taylorpolynomen*

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad n um den Punkt $x_0 = 0$. Die Taylorformel um den Entwicklungspunkt x_0 sieht folgender Maßen aus

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

(i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$:
Beh.: $\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$
I.A.: $k = 1$
$f^{(1)}(x) = f'(x) = (\frac{d}{dx} 1 + x) \cdot -1 \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$
$= (-1)^1 \cdot 1! \frac{1}{(1+x)^2}$
$k = 0$ ist die Funktion selber.
I.S.: $k \rightarrow: k+1$

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)} \\ &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^k k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \cdot 1 \cdot -(k+1) \frac{1}{(1+x)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \frac{1}{(1+x)^{k+2}} \end{aligned}$$

□

Diese Ableitung benutzen wir nun, um das Taylorpolynom aufzuschreiben.

$$\begin{aligned} T_n(x) &\overset{Def.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \\ &\overset{Abl.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k! \frac{1}{(1+a)^{k+1}}}{k!}(x-a)^k. \\ &\overset{a=0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(1+0)^{k+1}} \cdot (x-0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

Wir haben nun die Monomdarstellung erreicht, wobei die Koeffizienten $a_k = (-1)^k$ sind.

(ii) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$:
Sei $\xi(z) = \prod_{k=0}^{z-1} 2k+1$, das Produkt aller ungeraden Zahlen bis vor die z-te ungerade Zahl.
Beh.: $g^{(k)} = \frac{\xi(k)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1+2k}{2}}$
I.A.:

$k = 0$ $g^{(0)} = \frac{1}{2^0}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = g(x)$
I.S.: $k \to k+1$

$$\begin{aligned} g^{(k+1)} &= \frac{d}{dx} g^{(k)} \\ &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{\xi(k)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1+2k}{2}}\right) \\ &= \frac{\xi(k)}{2^k} \cdot -1 \cdot -\frac{2k+1}{2}(1-x)^{1+\frac{1+2k}{2}} \\ &= \frac{\xi(k)\cdot(2k+1)}{2^k\cdot 2}(1-x)^{\frac{2(k+1)}{2}} \\ &= \frac{\xi(k+1)}{2^{k+1}}(1-x)^{\frac{1+2(k+1)}{2}} \end{aligned}$$

Mit dieser Ableitung können wir nun das Taylorpolynom aufschreiben:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\xi(k)}{2^k}(1-a)^{-\frac{1+2k}{2}}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{\xi(k)}{2^k} 1^{-\frac{1+2k}{2}} x^k \\ &= \frac{\xi(k)}{2^k k!} x^k \end{aligned}$$

Wir lassen es an dieser Stelle so stehen. Wir haben einen Faktor, abhängig von k und sind in der Monomdarstellung.
Man kann sich gerne davon überzeugen, dass $a_k = \frac{\xi(k)}{2^k k!} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}k!}$ gilt.

(iii) $h(x) = xe^x$
Beh.: $h^{(k)}(x) = (x+k)e^x$
I.A.: $k = 0$ $h^{(0)} = (x+0)e^x = xe^x = h(x)$
I.S.: $k \to k+1$

$$\begin{aligned} h^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} h^{(k)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}(x+k)e^x \\ &= e^x + (x+k)e^x \\ &= (x+(k+1))e^x \end{aligned}$$

Nun können wir das Taylorpolynom vom Grad n am Entwicklungspunkt $a = 0$ aufstellen.

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+k)e^a}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k \end{aligned}$$

Wir haben die Monomdarstellung mit den Koeffizienten $a_k = \frac{1}{(k-1)!}$.

Aufgabe 11: *Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionsfolgen den punktweisen Limes

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(falls er existiert) und prüfen Sie, welche der Folgen gleichmäßig konvergiert.

(i) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ auf $[-1, 1]$.
Zunächst bestimmen wir den Limes punktweise:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{x^2}\right)^{-n} \end{aligned}$$

Für $a \geq 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, Wir wissen, dass e^x streng monoton steigt und bei $x = 0$ eins erreicht. Daher ist e^x für alle $x > 0$ größer als 1. Daraus folgt, dass $f_n(x) = 0$ auf $[-1, 0)$ und $(0, 1]$.
Im Fall $x = 0$ ergibt sich $e^{0 \cdot -n} = 1$ für alle n. Daher ist $f(0) = 1$.

Gleichmäßige Konvergenz:
Da e^x für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist und f nicht stetig ist, kann die Folge f_n nicht gleichmäßig konvergieren (Der Grenzwert jeder gleichmäßig konvergierenden Funktionsfolge stetiger Funktionen ist wieder stetig).

(ii) $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ auf $[0, \infty)$.
Wir wissen, dass die Funktion $\sqrt{\cdot}$ auf dem Interval stetig ist. Wir können den Limes also in die Funktion ziehen.

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} g_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \\ &= \sqrt{(\lim_{n\to\infty} x^2) + (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})} \\ &= \sqrt{x^2 + 0} \\ &= x \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz:
Sei $\varepsilon > 0$. Z.z. $\exists N > 0 \forall n > N \forall x : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} & \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{N}} - x\right| &<& \varepsilon \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} & \sqrt{x^2 + \frac{1}{N}} - x &<& \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + \frac{1}{N}} &<& \varepsilon + x \\ \Leftrightarrow & x^2 + \frac{1}{N} &<& \varepsilon^2 + 2\varepsilon x + x^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{N} &<& \varepsilon^2 + 2\varepsilon x \end{aligned}$$

Und da $\frac{1}{N} < \varepsilon^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon x$ gilt die Ungleichung für alle $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Also ist g_n gleichmäßig konvergent (N hängt nicht von x ab).

(*) gilt, da der rechte Term der Differenz immer kleiner als der linke ist.

(iii) $h_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$
Wir wissen nach Umformung, dass gilt $n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$ die als inverses Element bezüglich der Multiplikation. Nun können wir auf. $h_n(x) = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{\frac{1}{n}}$ den Satz von l'Hopital

anwenden.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \lim_{n\to\infty} h_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}}{\frac{1}{n}} \\
&\overset{l'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\cdot -\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} -n^2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} -n^2\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}}{n^2\cdot 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}}{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \\
& \text{Alles konvergiert nun} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+0}\cdot 0}{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x+0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz:
Die Folge konvergiert gleichmäßig, das kann man ganz schön auf einem Plot sehen.
Aber irgendwie fällt uns dazu keine guter Beweis ein :(

(iv) $k_n(x) = \arctan(nx)$ auf $(-\infty, \infty)$.
Analysieren der Funktion durch Fallunterscheid:
Fall 1: $x = 0$.
Für $x = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} k_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(n\cdot 0) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(0) = 0$.

Fall 2: $x > 0$.
Für $x > 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(nx) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(n) \overset{(**)}{=} \frac{\pi}{2}$.

Fall 3: $x < 0$.
Für $x < 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(nx) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(-n) \overset{(**)}{=} -\frac{\pi}{2}$.

Also ist $k(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{, falls } x < 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$.

Insbesondere ist k nicht stetig auf $(-\infty, \infty)$, allerdings ist $\arctan(x)$ stetig für alle $x \in \mathbb{R}$. Also kann die Folge $k_n(x)$ nicht gleichmäßig konvergieren (Der Grenzwert jeder gleichmäßig konvergierenden Funktionsfolge stetiger Funktionen ist wieder stetig).

(**) gilt, da für $\tan(x)$ für $x = \pm\frac{\pi}{2}$ Asymptoten sind (und arctan die Umkehrfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist).

Aufgabe 12: *Gleichmäßige Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie folgende Funktionsreihen auf gleichmäßige Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha > 1$.
Wir schätzen zunächst die einzelnen Folgeglieder ab

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \right| & \\ & \overset{\sin(a)\leq 1}{\leq} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right| \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Folge von Zahlen gefunden $M_k = \frac{1}{k^\alpha}$ so dass du Funktionen der Reihe alle kleiner sind. Nach dem Weierstrass M-Test, gilt also, dass die urpsrüngliche Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} M_n$ konvergiert[1].

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Wir zeigen über eine Fallunterscheidung, dass die Reihe bis auf $x = 0$ punktweise divergiert. Damit ist klar, dass es nicht gleichmäßig konvergieren kann, da diesen implizieren würde, dass die Reihe punktweise konvergieren würde.
Fall 1: $x > 0$
Jeder Summand ist größer als Null. Nun gilt

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n(1+nx^2)} > \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{1+nx^2} > 1 \end{aligned}$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Diese Reihe konvergiert Punktweise, daher kann der Trick von eben nicht angewandt werden. Wir zeigen aber, dass die Reihe trotzdem nicht gleichmäßig konvergiert.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{x^2}{n^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n} \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert und da er unabhängig von x ist, passiert dies auch gleichmäßig. Im zweiten Teil steht nun x^2 als Faktor drin. Wir können den Wert jetzt also durch die Veränderung von x beliebig groß oder klein machen. Wir können also ein x so wählen, dass jede ε Schranke durchbrochen werden kann.
Damit ist die Reihe nicht gleichmäßig stetig.

[1] Diese Reihe konvergiert in der Tat gegen $\zeta(\alpha)$