Übungen zur Vorlesung „Algebra und Zahlentheorie“

WS 2011/2012

A. Schmitt

Übungsblatt 10

Abgabe: Bis Dienstag, den 17.01.2012, 10Uhr

Aufgabe 1 (Gruppen der Ordnung 1000; 10 Punkte).
Beweisen Sie, dass eine endliche Gruppe G der Ordnung 1000 einen Normalteiler H mit $\{e\} \subsetneq H \subsetneq G$ besitzt.

Aufgabe 2 (Kommutierende Normalteiler; 5+5 Punkte).
Es seien G eine Gruppe und H, J Normalteiler von G, so dass $H \cap J = \{e\}$.
i) Beweisen Sie

$$\forall h \in H,\ j \in J: \quad h \cdot j = j \cdot h.$$

ii) Nun sei G eine endliche Gruppe, und es gelte zusätzlich $\#G = \#H \cdot \#J$. Zeigen Sie

$$G \cong H \times J.$$

Aufgabe 3 (Zyklische Gruppen; 2+4+4 Punkte).
Es seien $p < q$ Primzahlen, so dass $q \not\equiv 1 \mod p$, und G eine endliche Gruppe der Ordnung $p \cdot q$.
i) Geben Sie mindestens vier Beispiele für Paare (p, q) mit den obigen Eigenschaften an.
ii) Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung p und einen Normalteiler der Ordnung q hat.
iii) Zeigen Sie, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ist, und folgern Sie, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 4 (Endliche abelsche Gruppen; 10 Punkte).
Listen Sie alle Isomorphieklassen von endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 36 auf.