Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 20: *Stetigkeit der Abstandsfunktion*

Für eine feste Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Abstandsfunktion $dist(x, M) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $(x, M) \mapsto \inf\{|x - y| \mid y \in M\}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ |dist(x, M) - dist(y, M)| \leq |x - y|$$

Beweis:
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Und $z^*, z' \in M$, so dass $|x-z'| = dist(x, M)$, $|y-z^*| = dist(y, M)$.

$$\begin{aligned}
|dist(x, M) - dist(y, M)| &\overset{Def.}{=} |\inf\{|x - z| \mid z \in M\} - \inf\{|y - z| \mid z \in M\}| \\
&\overset{z',z^*}{=} |\,|x - z'| - |z^* - y|\,| \\
&\leq |\,|x - z' + z^* - y|\,| \\
&= |x - y + z^* - z'| \\
&\leq |x - y| + |z^* - z'| \\
&\leq |x - y|
\end{aligned}$$

Gilt, da auf dem Metrischen Raum $\mathbb{R}^n$ die Dreicksungleichung gilt. □

(ii) Ist die Distanzfunktion gleichmäßig stetig?
Lösung:
Wir haben es hier prinzipiell mit eine Lipschitz stetigen Funktion zu tun, mit der Konstante 1. Da wir den Satz aber noch nicht für metrische Räume gezeigt haben, werden wir wohl das ganze noch per Hand beweisen.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Sei $\delta = \varepsilon$.
Nun wissen wir, nach Vorraussetzung gleichmäßigen Stetigkeit, dass $|x - y| < \delta = \varepsilon$ gelten soll. Aus dem ersten Teil wissen wir aber auch, dass $|dist(x, M) - dist(y, M| \leq |x - y|| < \varepsilon$ gelten muss.

Damit ist *dist* gleichmäßig stetig.

□

Aufgabe 21 *Stetige Funktionen auf dichten Teilmengen*

Seien $g, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen. Sei fernen $S \subset \mathbb{R}^n$ eine *dichte* Teilmenge des $\mathbb{R}$, d.h. es gilt $\overline{S} = \mathbb{R}^n$. Schließlich gelte

$$\forall x \in S \ : \ f(x) = g(x).$$

Zeigen Sie, dass dann auch

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = g(x)$$

richtig ist.

Beweis:
Für stetige Funktionen gilt auch bei $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dass $\lim\limits_{n\to a} f(n) = f(\lim\limits_{n\to a} n)$.

Nun wissen wir über den Abschluss, dass für jeden Punkt aus $x \in \overline{S}$ eine Folge $(t)_{n\in\mathbb{N}}$ in S existiert, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$.

Nun sei $x \in \mathbb{R}^n = \overline{S}$. Wir wissen nun, dass eine Folge $(t)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$.

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{Def.:t}{=} f(\lim_{n\to\infty} t_n)\\
&\overset{stetig}{=} \lim_{n\to\infty} f(t_n)\\
&\overset{Vor.}{=} \lim_{n\to\infty} g(t_n)\\
&\overset{stetig}{=} g(\lim_{n\to\infty} t_n)\\
&\overset{Def.:t}{=} g(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 22 *Stetigkeit in höheren Dimensionen*

Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

(i)

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösung:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Sei nun $\delta > 0$ und es gelte $|x - x_0| = |x| < \delta$.
Da $|x| < \delta$ gilt, wissen wir, dass insbesondere $x = (x_1, x_2)$ $|x_1| < \delta$ und $|x_2| < \delta$ gelten muss.
Wenn wir nun annehmen, dass wir $\delta < 1$ gilt, dann gilt auch $x_1^2 < |x_1| < \delta$ und x_2 ebenso.

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x_0)| &= |f(x,y) - f((0,0))|\\
&= |f(x,y) - (0,0)| = |f(x,y)|\\
&= |\tfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}|\\
&= \tfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\\
&\overset{\delta}{<} \tfrac{\delta^2}{2\delta}\\
&= \tfrac{1}{2}\delta
\end{aligned}$$

Wählen wir nun ein $\delta' = 2\varepsilon$, dann ist $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.

$\square$

(ii)

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lösung:
Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \big((x_k^1, 0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge über $\mathbb{R}^2$ mit $x_k^1 \to 0$ für $k \to \infty$ also insbesondere mit $x_k \to (0,0)$ für $k \to \infty$.

Nun gilt aber $f(x_k) = f(x_k^1, 0) = \frac{\left(x_k^1\right)^2 - 0}{\left(x_k^1\right)^2 + 0} = \frac{\left(x_k^1\right)^2}{\left(x_k^1\right)^2} = 1$ und damit $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1 \neq 0 = f(0,0)$.
Damit ist die Funktion nicht in $(0,0)$ stetig.

Aufgabe 23 *Halbstetige Funktionen*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

(i) Definieren Sie analog *oberhalbstetig*.
Def.:
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *oberhalbstetig* in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

(ii) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine nicht stetige, aber oberhalbstetige Funktion f und für eine nicht stetige, aber unterhablstetige Funktion g an. Skizzieren Sie!
Lösung:
Wir bilden die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \begin{cases} \sin(x) + 1 & , x \geq 2 \\ \sin(x) - 1 & , x < 2 \end{cases} \\ g(x) &:= \begin{cases} \sin(x) + 1 & , x > 2 \\ \sin(x) - 1 & , x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

f ist nun oberhalbstetig und g ist unterhalbstetig. Die Funktionen sind bekanntermaßen bis auf $x_0 = 2$ stetig.
Bei f und x_0 haben wir in unmittelbarer Umgebung einen Sprung nach unten. Von $\sin(2) + 1$ auf $\sin(2) - 1$. Da dieser Sprung aber nach unten geht, ist das ganze nun in der Definition abgefangen. Nach Rechts ist die Funktion stetig, daher können wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, da die rechtsseitige Folge konvergiert.
In $x_0 = 2$ sind beide Funktionen nicht stetig, da zwischen den beiden Grenzwerten eine Differenz von 2 herrscht.

g ist nun prinzipiell analog, da wir nu den Wert von $\sin(2) + 1$ auf $\sin(2) - 1$ geändert haben. Damit ist es oberhalbstetig, da wir den Sprung nur nach oben haben, und die linksseitige Folge konvergiert.
Skizze:

(iii) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann unterhalbstetig ist, wenn die Menge

$$\Omega_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > a\}$$

offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis:

$\Rightarrow$:

Wir wollen zeigen, dass $f : \mathbb{R}^n \to$ unterhalbstetig impliziert, dass Ω_a offen ist. Dazu nehmen wir an, dass Ω_a nicht offen ist.

Dies bedeutet, dass ein Punkt x_0 existiert, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ nicht komplett in Ω_a enthalten ist. Also existiert ein Punkt $y \in B_\varepsilon(x_0)$, für den gilt $x_0 \notin \Omega$.

Wir wissen nun also zum einen, dass $|x-y| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Darüber hinaus wissen wir auch, dass $f(y) \leq \Omega_a$. Wir haben also ein a, so dass $f(x) \leq f(x_0) - a$ gilt.

Dies bedeutet, dass f nicht unterhalbstetig ist.

$\Leftarrow$:

Wir bilden die Kontraposition. Wenn f nicht unterhalbstetig ist (z.B. nicht stetig aber oberhalbstetig), dann existiert eine Menge Ω_a die nicht offen ist.

In der Teilaufgabe (ii), haben wir eine Funktion angegeben, die nicht unterhalbstetig war. In $x_0 = 2$ galt nun, dass es keinen Wert links von diesem Wert gab, so dass der Funktionwert in jeder $\varepsilon > 0$ lag. Damit gab es insbesondere keine $x \in \mathbb{R}$ werte, so dass $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ galt.

Aus diesem ε können wir nun eine offene Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ bilden. In der unmittelbaren Umgebung lagen nun allerdings (nach links) keine Werte. Daher ist für alle $\varepsilon > 0$ nicht die ganze Kugel in der Menge.

$\square$