Prof. Dr. Klaus Ecker
Dr. Theodora Bourni

19.06.2012
Abgabe: 26.06.2012
10.00 Uhr, Tutorenfächer

Aufgabenblatt 9

zur Analysis II

28. *Stetigkeit und Existenz partieller Ableitungen* *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{für } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

in jedem Punkt partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, jedoch im Ursprung $(0,0)$ nicht stetig ist.

29. *Parametrisierung des Torus* *(3+3+2 Punkte)*

(i) Welche Art von Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ wird durch die Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad \varphi \mapsto (a + b\cos\varphi, 0, b\sin\varphi),$$

für $a > b > 0$ beschrieben.

(ii) Rotieren Sie diese Kurve entgegen dem Uhrzeigesinn um die x_3-Achse. Bezeichnen Sie den Rotationswinkel mit ϑ. Sie erhalten so eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vermöge $(\varphi,\vartheta) \mapsto f(\varphi,\vartheta)$.

Die durch f dargestellte Fläche T im $\mathbb{R}^3$ nennt man einen *Torus.*

(iii) Skizzieren Sie T, ferner die Kurven $\varphi \mapsto f(\varphi,0)$ sowie $\vartheta \mapsto f(0,\vartheta)$ und schließlich die Vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\,(\varphi,\vartheta), \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,(\varphi,\vartheta)$$

an einem Punkt $f(\varphi,\vartheta)$ ihrer Wahl.

30. *Niveauflächen am Torus* *(2+2+4 Punkte)*

Für $x_1 > 0$, sei

$$h(x_1,x_3) := (x_1-a)^2 + x_3^2 - b^2$$

die beschreibende Funktion eines Kreises in der $[x_1,x_3]$-Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $b > 0$ und Mittelpunkt $(a,0,0)$, wobei $b < a$.

(i) Setzen Sie diese Funktion rotationssymmetrisch um die x_3-Achse auf den ganzen $\mathbb{R}^3$ fort, und bezeichnen Sie diese neue Funktion mit g.

(ii) Sei f die Funktion aus Aufgabe 29. Zeigen Sie, dass

$$f(\mathbb{R}^2) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, g(x) = 0\right\}.$$

Dies besagt, dass T die *Niveaufläche der Funktion g für den Wert* 0 ist.

Bitte wenden!

(iii) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Zeigen Sie

$$\nabla g(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in T$$

sowie

$$\nabla g(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vartheta}(\varphi, \vartheta) = \nabla g(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \vartheta) = 0$$

für alle $(\varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$ und $x = f(\varphi, \vartheta)$. Dies besagt, dass *der Gradient von g senkrecht zur Niveaufläche T ist.*