Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 31 *Satz von euler über homogene Funktionen*

(i) Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *homogon vom Grade* m, wenn

$$f(tx) = t^m f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } t \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

Sei f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\nabla f(x) \cdot x = m f(x) \text{ für alle} x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis:
tbd

(ii) Berechnen Sie explizit $\nabla f(x) \cdot x$ für

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (i).

Lösung:
tbd

Aufgabe 32

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar mit stetigen zweiten Ableitungen. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen Sie die zweite Ableitungsfunktion der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = f(tx)$.

Lösung:
tbd

Aufgabe 33 *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung*

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \end{aligned}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \Delta u$$

erfüllt.

Beweis:
tbd

Aufgabe 34 *Extremalwertaufgabe*

Ermitteln Sie, an welcher Stelle die Funktion

$$z(x,y) = x^3 + 3xy + y^3, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Extrema besitzt.

Lösung:
Für die Lösung bestimmen wir zunächst die kritischen Punkte $p_0 = (x_0, y_0)$, für die gilt $\nabla f(p_0) = 0$.

$$\nabla f(p_0) = \begin{pmatrix} 3x_0^2 + 3y_0 \\ 3x_0 + 3y_0^2 \end{pmatrix}$$

Nun haben wir 2 Bedingungen:

$$\begin{array}{crcl}
I: & 0 & = & 3x_0^2 + 3y_0 \\
II: & 0 & = & 3x_0 + 3y_0^2 \\
\hline
I: & y_0 & = & -x_0^2 \\
\text{in } II: & 0 & = & 3x_0 + 3x_0^4 \\
 & & = & 3(x_0)(1 + x_0^3) \\
 & \Rightarrow & & x_0 = 0 \ \vee \ x_0 = -1 \\
\hline
0 \text{ in } I: & y - 0 & = & -0^2 \\
 & & = & 0 \\
-1 \text{ in } I: & y_0 & = & -(-1)^2 \\
 & & = & -1
\end{array}$$

Die beiden kritischen Punkte sind also $p_0 = (0,0)$ und $p_1 = (-1,-1)$. Nun untersuchen wir die Hesse Matrix bezüglich dieser Werte.

Hessematrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix}$$

Die Matrix bezüglich p_0 ist also

$$H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist nun leider nur semidefinit, daher handelt es sich hier um kein Extrempunkt, sondern aller Wahrscheinlichkeit nach um einen Sattelpunkt.

Die Matrix bezüglich p_1 ist

$$H(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Nach dem Hauptminoren Kriterium haben wir die Determinanten -6 und 27 also können wir wiederum keine Aussage treffen.