Max Wisniewski , Alexander Steen

Tutor : Adrian Steffens

Aufgabe 10: *Berechnung von Taylorpolynomen*

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad n um den Punkt $x_0 = 0$. Die Taylorformel um den Entwicklungspunkt x_0 sieht folgender Maßen aus

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

(i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$:
Beh.: $\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$
I.A.: $k = 1$
$f^{(1)}(x) = f'(x) = (\frac{d}{dx}1 + x) \cdot -1 \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$
$= (-1)^1 \cdot 1! \frac{1}{(1+x)^2}$
$k = 0$ ist die Funktion selber.
I.S.: $k \rightarrow: k+1$

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)} \\ &\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left((-1)^k k! \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \cdot 1 \cdot -(k+1)\frac{1}{(1+x)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \frac{1}{(1+x)^{k+2}} \end{aligned}$$

□

Diese Ableitung benutzen wir nun, um das Taylorpolynom aufzuschreiben.

$$\begin{aligned} T_n(x) &\overset{Def.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \\ &\overset{Abl.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k! \frac{1}{(1+a)^{k+1}}}{k!}(x-a)^k. \\ &\overset{a=0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(1+0)^{k+1}} \cdot (x-0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

Wir haben nun die Monomdarstellung erreicht, wobei die Koeffizienten $a_k = (-1)^k$ sind.

(ii) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$:
Sei $\xi(z) = \prod_{k=0}^{z-1} 2k+1$, das Produkt aller ungeraden Zahlen bis vor die z-te ungerade Zahl.
Beh.: $g^{(k)} = \frac{\xi(k)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1+2k}{2}}$
I.A.:

$k = 0$ $g^{(0)} = \frac{1}{2^0}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = g(x)$
I.S.: $k \to k+1$

$$\begin{aligned}
g^{(k+1)} &= \frac{d}{dx} g^{(k)} \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{\xi(k)}{2^k}(1-x)^{-\frac{1+2k}{2}}\right) \\
&= \frac{\xi(k)}{2^k} \cdot -1 \cdot -\frac{2k+1}{2}(1-x)^{1+\frac{1+2k}{2}} \\
&= \frac{\xi(k) \cdot (2k+1)}{2^k \cdot 2}(1-x)^{\frac{2(k+1)}{2}} \\
&= \frac{\xi(k+1)}{2^{k+1}}(1-x)^{\frac{1+2(k+1)}{2}}
\end{aligned}$$

Mit dieser Ableitung können wir nun das Taylorpolynom aufschreiben:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\xi(k)}{2^k}(1-a)^{-\frac{1+2k}{2}}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\xi(k)}{2^k} 1^{-\frac{1+2k}{2}} x^k \\
&= \frac{\xi(k)}{2^k k!} x^k
\end{aligned}$$

Wir lassen es an dieser Stelle so stehen. Wir haben einen Faktor, abhängig von k und sind in der Monomdarstellung.
Man kann sich gerne davon überzeugen, dass $a_k = \frac{\xi(k)}{2^k k!} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} k!}$ gilt.

(iii) $h(x) = xe^x$
Beh.: $h^{(k)}(x) = (x+k)e^x$
I.A.: $k = 0$ $h^{(0)} = (x+0)e^x = xe^x = h(x)$
I.S.: $k \to k+1$

$$\begin{aligned}
h^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} h^{(k)}(x) \\
&= \frac{d}{dx}(x+k)e^x \\
&= e^x + (x+k)e^x \\
&= (x+(k+1))e^x
\end{aligned}$$

Nun können wir das Taylorpolynom vom Grad n am Entwicklungspunkt $a = 0$ aufstellen.

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+k)e^a}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k
\end{aligned}$$

Wir haben die Monomdarstellung mit den Koeffizienten $a_k = \frac{1}{(k-1)!}$.

Aufgabe 11: *Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionsfolgen den punktweisen Limes

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(falls er existiert) und prüfen Sie, welche der Folgen gleichmäßig konvergiert.

(i) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ auf $[-1, 1]$.
Zunächst bestimmen wir den Limes punktweise:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{x^2}\right)^{-n} \end{aligned}$$

Für $a \geq 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, Wir wissen, dass e^x streng monoton steigt und bei $x = 0$ eins erreicht. Daher ist e^x für alle $x > 0$ größer als 1. Daraus folgt, dass $f_n(x) = 0$ auf $[-1, 0)$ und $(0, 1]$.
Im Fall $x = 0$ ergibt sich $e^{0\cdot -n} = 1$ für alle n. Daher ist $f(0) = 1$.

Gleichmäßige Konvergenz TBD.

(ii) $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ auf $[0, \infty)$.
Wir wissen, dass die Funktion $\sqrt{\cdot}$ auf dem Interval stetig ist. Wir können den Limes also in die Funktion ziehen.

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} g_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \\ &= \sqrt{(\lim_{n\to\infty} x^2) + (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n})} \\ &= \sqrt{x^2 + 0} \\ &= x \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz: TBD.

(iii) $h_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$
Wir wissen nach Umformung, dass gilt $n = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$ die als inverses Element bezüglich der Multiplikation. Nun können wir auf. $h_n(x) = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{\frac{1}{n}}$ den Satz von l'Hopital anwenden.

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{n\to\infty} h_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{\frac{1}{n}} \\ &\overset{l'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \cdot -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} -n^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} -n^2 \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n^2}}{n^2 \cdot 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n^2}}{2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x+\frac{1}{n}}} \\ & \quad \text{Alles konergiert nun} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+0} \cdot 0}{2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x+0}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz: TBD.

(iv) $k_n(x) = \arctan(nx)$ auf $[-\infty, \infty]$.
tbd

Aufgabe 12: *Gleichmäßige Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie folgende Funktionsreihen auf gleichmäßige Konvergenz.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ für $x \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha > 1$.
Wir schätzen zunächst die einzelnen Folgeglieder ab

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \\ &\overset{\sin(a)\leq 1}{\leq} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Folge von Zahlen gefunden $M_k = \frac{1}{k^\alpha}$ so dass du Funktionen der Reihe alle kleiner sind. Nach dem Weierstrass M-Test, gilt also, dass die urpsrüngliche Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_n$ konvergiert[1].

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Wir zeigen über eine Fallunterscheidung, dass die Reihe bis auf $x = 0$ punktweise divergiert. Damit ist klar, dass es nicht gleichmäßig konvergieren kann, da diesen implizieren würde, dass die Reihe punktweise konvergieren würde.
Fall 1: $x > 0$
Jeder Summand ist größer als Null. Nun gilt

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n(1+nx^2)} > \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow\; & \frac{x}{1+nx^2} > 1 \end{aligned}$$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Diese Reihe konvergiert Punktweise, daher kann der Trick von eben nicht angewandt werden. Wir zeigen aber, dass die Reihe trotzdem nicht gleichmäßig konvergiert.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{x^2}{n^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n} \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert und da er unabhängig von x ist, passiert dies auch gleichmäßig. Im zweiten Teil steht nun x^2 als Faktor drin. Wir können den Wert jetzt also durch die Veränderung von x beliebig groß oder klein machen. Wir können also ein x so wählen, dass jede ε Schranke durchbrochen werden kann.
Damit ist die Reihe nicht gleichmäßig stetig.

[1] Diese Reihe konvergiert in der Tat gegen $\zeta(\alpha)$