Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Christof Schütte, A. Hartkopf

2. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik 2

SoSe 2012

`https://dms-numerik.mi.fu-berlin.de/knowledgeTree/jump.php?VL=coma2`

Abgabe: Mo 07.05.2012, 10:00 Uhr, Tutorenfächer, Arnimallee 3, 1. OG

Allgemeine Hinweise

Jedes Übungblatt beinhaltet 12 Punkte. Werden bei Programmieraufgaben Testläufe gefordert, protokollieren Sie diese mit dem `matlab`-Befehl `diary`. **Legen Sie ferner ein Programm bei, daß alle geforderten Testläufe ausführt und ohne Angabe von Argumenten gestartet werden kann.**
Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang an den jeweiligen Tutor geschickt werden. Die Betreff/Subject-Zeile muss dabei **immer** mit dem Text `[CoMa2]` beginnen. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat. Auerdem sind Ausdrucke der Dateien zusammen mit den Theorieaufgaben abzugeben.

1. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

das quadratische Interpolationspolynom mit den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ nach der Methode von Lagrange sowie das kubische Interpolationspolynom mit der zusätzlichen Stützstelle $x_3 = 1/2$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Sei $x_0 < x_2 < \cdots < x_n$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ ein Satz von $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen und $p_f \in \mathcal{P}^n$ das Interpolationspolynom von f mit Grad höchstens n und $p_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie, daß die so genannte Vandermondematrix $A \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1}$ mit $A_{ij} = x_{i-1}^{j-1}$ invertierbar ist und

$$p_f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{i+1} x^i$$

mit $p = A^{-1} f(x_{i-1})_{i=1,\ldots,n+1}$ gilt.

b) Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `p=monomialcoefficients(xi,f)`, das zu einer gegebenen Funktion `f` und einem Stützstellenvektor `xi` den Koeffizientenvektor `p` der Interpolierten bezüglich der Monombasis berechnet. Schreiben Sie ferner ein `matlab`-Programm `y=monomialinterpolation(x,p)`, welches das Interpolationspolynom zum Koeffizientenvektor `p` an den Stellen `x` auswertet.

c) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$. Wie lautet der exakte Koeffizientenvektor? Testen Sie Ihr Programm indem Sie für diese Funktion und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, 1]$ mit $n = 1, \ldots, 200$ den Fehler der berechneten Koeffizientenvektoren in der Maximumsnorm über n plotten. Was beobachten Sie? Untersuchen Sie die Kondition der Vandermondematrix (Hinweis: `cond, condest`).

d) Testen Sie Ihr Programm für `f=@sin` und n uniform verteilte Stützstellen auf $[0, \pi]$ mit $n = 1, \ldots, 200$ indem Sie $\max |p_f(x_i) - f(x_i)|$ über n plotten. Plotten Sie außerdem die Funktion und die Interpolationspolynome für $n = 10, 20, 40, 80$.

   Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `y=lagrangeinterpolation(x,p,xi)` welches das Interpolationspolynom mit den Koeffizientenvektor `p` bezüglich der Lagrangepolynome zum Stützstellenvektor `xi` an den Stellen `x` auswertet und wiederholen Sie die Testläufe dieser Teilaufgabe mit diesem Programm.

   Was beobachten Sie?