数值最优化方法实验报告

米科润　19 信计二班

201905755824

July 9, 2021

目录

1 梯度法和信赖域算法的求解

1.1 梯度法

输入：fun,gfun 分别是目标函数及其梯度，x_0 是初始点，epsilon 是容许误差。

输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val]=grad(fun,gfun,x0,epsilon)
maxk=5000;
beta=0.5; sigma=0.4;
k=0;
while(k<maxk)
    gk=feval(gfun,x0);
    dk=-gk;
    if(norm(gk)<epsilon), break; end
    m=0; mk=0;
    while(m<20)
        if(feval(fun,x0+beta^m*dk)...
            ≤feval(fun,x0)+sigma*beta^m*gk'*dk)
            mk=m; break;
        end
        m=m+1;
    end
    x0=x0+beta^mk*dk;
    k=k+1;
end
x=x0; val=feval(fun,x0);
end
```

1.2 信赖域方法

x_0 是初始点,epsilon 是容许误差

输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似极小点和近似极小值。

trustq 函数是利用光滑牛顿法求解信赖域子问题的程序

```
function [k,x,val] = trustm(x0,epsilon)
```

```
    n=length(x0); eta1=0.1; eta2=0.75;
    tau1=0.5; tau2=2.0;
    Δ=1; dtabar=2.0;
    x=x0; Bk=Hess(x);k=0;
    while(k<50)
        fk=fun(x);
        gk=gfun(x);
        if(norm(gk)<epsilon)
            break;
        end
        [d,val,lam,i]=trustq(fk,gk,Bk,Δ);
        Δq=fk-val;
        Δf=fun(x)-fun(x+d);
        rk=Δf/Δq;
        if(rk≤eta1)
            Δ=tau1*Δ;
        else if (rk≥eta2 & norm(d)==Δ)
                Δ=min(tau2*Δ,dtabar);
            else
                Δ=Δ;
            end
        end
        if(rk>eta1)
            x=x+d;
            Bk=Hess(x);
        end
        k=k+1;
    end
    val=fun(x);
    end
```

1.3 问题求解

$$min \quad f(x)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$$

$$x_0=(0,3)^T$$

答：编写目标函数 fun.m、梯度 gfun.m、Hess 阵 Hess.m 三个文件

```
%目标函数
function f=fun(x)
f=(x(1)-2)^4+(x(1)-2*x(2))^2;
end
%梯度
function gf=gfun(x)
gf=[4*(x(1)-2)^3+2*(x(1)-2*x(2));
      -4*(x(1)-2*x(2))];
end
%Hesse阵
function He=Hess(x)
He=[12*(x(1)-2)^2+2   -4;
      -4   8];
end
```

- 调用梯度法

```
>> x0=[0;3];
>> [k,x,val]=grad('fun','gfun',x0,1e-5)
```

结果如下图:

```
k =

        2111


x =

    2.0139
    1.0070


val =

   3.7685e-08
```

图 1: question1: 梯度法结果

- 调用信赖域算法

```
>> x0=[0.0 ,3.0 ]; epsilon=1e-5;
>> [k,x,val] = trustm(x0,epsilon)
```

结果如下图:

```
k =

    13


x =

    1.9891
    0.9945


val =

   1.4213e-08
```

图 2: question1: 信赖域算法结果

2 基本牛顿法的求解

基本牛顿法程序:

输入: fun,gfun,Hess 分别是目标函数及其梯度和 Hess 阵, x0 是初始点, epsilon 为容许误差。

输出: k 是迭代次数, x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val]=dampnm(fun,gfun,Hess,x0,epsilon)
maxk=5000;
beta=0.5; sigma=0.4; k=0;
while(k<maxk)
    gk=feval(gfun,x0);
    Gk=feval(Hess,x0);
    dk=-Gk\gk;
```

```
        if(norm(gk)<epsilon), break; end
            m=0; mk=0;
        while(m<20)
            if(feval(fun,x0+beta^m*dk)...
                <feval(fun,x0)+sigma*beta^m*gk'*dk)
                mk=m; break;
            end
            m=m+1;
        end
        x0=x0+beta^m*dk; k=k+1;
    end
    x=x0;
    val=feval(fun,x);
    end
```

求解问题

$$min \quad f(x) = 0.5x_1^2(\frac{x_1^2}{6}+1) + x_2arctanx_2 - 0.5ln(x^2+1)$$

$$x_0 = (1, 0.7)^T$$

$$or$$

$$x_0 = (1, 2)^T$$

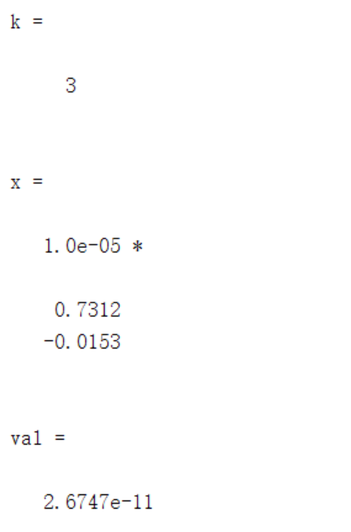
建立目标函数 fun.m, 梯度 gfun.m,Hesse 阵 Hess.m 函数

```
%目标函数
function f=fun(x)
f=0.5*x(1)^2*((x(1)^2)/6+1)+x(2)*atan(x(2))-0.5*log(x(2)^2+1);
end
%梯度
function gf=gfun(x)
gf=[(x(1)^3)/3+x(1);atan(x(2))];
end
%Hesse阵
function He=Hess(x)
He=[x(1)^2 + 1,0;
0,1/(x(2)^2 + 1)];
end
```

调用基本牛顿法:

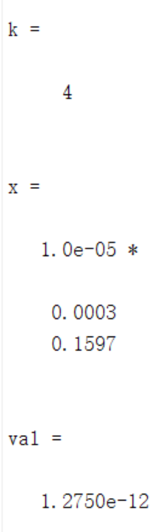
```
>> x0=[1,0.7];
>> x1=[1,2];
>> [k,x,val]=dampnm('fun','gfun','Hess',x0,1e-5)
>> [k,x,val]=dampnm('fun','gfun','Hess',x1,1e-5)
```

结果如下



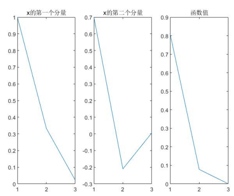
```
k =

     3


x =

   1.0e-05 *

    0.7312
   -0.0153


val =

   2.6747e-11
```

(a) $x_0 = (1, 0.7)^T$

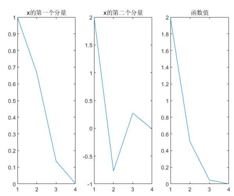


```
k =

     4


x =

   1.0e-05 *

    0.0003
    0.1597


val =

   1.2750e-12
```

(b) $x_0 = (1, 2)^T$



(c) 情况一结果



(d) 情况二结果

图 3: 基本牛顿法

3 牛顿型方法的数值比较

3.1 线搜索程序

3.1.1 精确线搜索

- 黄金分割法

输入: phi 是目标函数, a, b 是搜索区间的两个端点,delta, epsilon 分别是自变量和函数值的容许误差。

输出: s, phis 分别是近似极小点和极小值, G 是 nx4 矩阵, 其第 k 行分别是 a,p,q,b 的第 k 次迭代值 [ak,pk,qk,bk],E=[ds,dphi], 分别是 s 和 phis 的误差限。

```
function [s,phis,k,G,E]=golds(phi,a,b,△,epsilon)
t=(sqrt(5)-1)/2; h=b-a;
phia=feval(phi,a); phib=feval(phi,b);
p=a+(1-t)*h;  q=a+t*h;
phip=feval(phi,p); phiq=feval(phi,q);
k=1;  G(k,:)=[a, p, q, b];
while(abs(phib-phia)>epsilon)||(h>△)
    if (phip<phiq)
        b=q;  phib=phiq; q=p; phiq=phip;
        h=b-a; p=a+(1-t)*h; phip=feval(phi,p);
    else
        a=p; phia=phip; p=q; phip=phiq;
        h=b-a;  q=a+t*h;  phiq=feval(phi,q);
    end
    k=k+1;  G(k,:)=[a, p, q, b];
end
ds=abs(b-a); dphi=abs(phib-phia);
if(phip≤phiq)
    s=p;   phis=phip;
else
    s=q;   phis=phiq;
end
E=[ds,dphi];
end
```

- 抛物线法

  输入: phi 是目标函数, a 和 b 是搜索区间的端点， delta,epsilon 是容许误差。

  输出: s 是近似极小点, phis 是对应的近似极小值; k 是迭代次数， k 是迭代终止时的步长, ds 是 |s-s1|,dphi 是 |phi(s1)-phi(s)|; S 是迭代向量。

```
function [s,phis,k,ds,dphi,S]=qmin(phi,a,b,△,epsilon)
s0=a; maxj=20; maxk=30; big=1e6; err=1; k=1;
S(k)=s0; cond=0; h=1; ds=0.00001;
if (abs(s0)>1e4), h=abs(s0)*(1e-4); end
while (k<maxk && err>epsilon && cond≠5)
    f1=(feval(phi,s0+ds)-feval(phi,s0-ds))/(2*ds);
    if(f1>0), h=-abs(h); end
    s1=s0+h;      s2=s0+2*h;       bars=s0;
    phi0=feval(phi,s0);  phi1=feval(phi,s1);
    phi2=feval(phi,s2);  barphi=phi0; cond=0;
    j=0; %确定h使得phi1<phi0且phi1<phi2
    while(j<maxj&&abs(h)>△&&cond==0)
        if (phi0≤phi1),
            s2=s1; phi2=phi1; h=0.5*h;
            s1=s0+h; phi1=feval(phi,s1);
        else if (phi2<phi1),
            s1=s2; phi1=phi2; h=2*h;
            s2=s0+2*h; phi2=feval(phi,s2);
        else
            cond=-1;
        end
    end
    j=j+1;
    if(abs(h)>big||abs(s0)>big), cond=5; end
end
if(cond==5)
    bars=s1; barphi=feval(phi,s1);
else
    %二次插值求phis
    d=2*(2*phi1-phi0-phi2);
    if(d<0),
        barh=h*(4*phi1-3*phi0-phi2)/d;
    else
        barh=h/3; cond=4;
    end
    bars=s0+barh;   barphi=feval(phi,bars);
    h=abs(h);  h0=abs(barh);
    h1=abs(barh-h);  h2=abs(barh-2*h);
        %确定下一次迭代的h值
        if(h0<h), h=h0; end
```

```
            if(h1<h), h=h1; end
            if(h2<h), h=h2; end
            if(h==0), h=barh; end
            if(h<Δ), cond=1; end
            if(abs(h)>big||abs(bars)>big), cond=5; end
            err=abs(phi1-barphi);
            s0=bars; k=k+1; S(k)=s0;
        end
        if(cond==2 && h<Δ), cond=3; end
    end
    s=s0; phis=feval(phi,s);
    ds=abs(s-s1); dphi=err;
    end
```

3.1.2 非精确线搜索

- Armijo 准则

  fun 和 gfun 分别是指目标函数及其梯度函数的子程序

```
function [mk,alpha, newxk, fk, newfk] =armijo(xk,dk)
beta=0.5; sigma=0.2;
m=0; maxm=20;
while (m≤maxm)
    if(fun1(xk+beta^m*dk)≤...
        fun(xk)+sigma*beta^m*gfun(xk)'*dk)
        mk=m; break;
    end
    m=m+1;
end
alpha=beta^mk;
newxk=xk+alpha*dk;
fk=fun(xk);
newfk=fun(newxk);
end
```

- Wolfe-Powell 准则

```
function [alpha, newxk, fk, newfk] = wolfe(xk, dk)
rho = 0.25; sigma = 0.75;
alpha = 1; a = 0; b = Inf;
while (1)
    if ¬(fun(xk+alpha*dk)≤...
        fun(xk)+rho*alpha*gfun(xk)'*dk)
        b = alpha;
        alpha = (alpha+a)/2;
        continue;
    end
    if ¬(gfun1(xk+alpha*dk)'*dk ≥ sigma*gfun1(xk)'*dk)
        a = alpha;
        alpha = min([2*alpha, (b+alpha)/2]);
        continue;
    end
    break;
end
newxk = xk+alpha*dk;
fk = fun1(xk);
newfk = fun1(newxk);
```

3.2 阻尼牛顿法和修正牛顿法程序

- 阻尼牛顿法

  输入：fun,gfun,Hess 分别是目标函数及其梯度和 Hess 阵，x0 是初始点，epsilon 为容许误差。

  输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val]=dampnm(fun,gfun,Hess,x0,epsilon)
maxk=5000;
beta=0.5; sigma=0.4; k=0;
while(k<maxk)
    gk=feval(gfun,x0);
    Gk=feval(Hess,x0);
    dk=-Gk\gk;
    if(norm(gk)<epsilon), break; end
        m=0; mk=0;
```

```
        while(m<20)
            if(feval(fun,x0+beta^m*dk)...
                ≤feval(fun,x0)+sigma*beta^m*gk'*dk)
                mk=m; break;
            end
            m=m+1;
        end
        x0=x0+beta^m*dk; k=k+1;
    end
    x=x0;
    val=feval(fun,x);
    end
```

- 修正牛顿法

  输入：fun,gfun,Hess 分别是目标函数及其梯度和 Hess 阵，x0 是初始点，epsilon 为容许误差。

  输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
    function [k,x,val]=revisenm(fun,gfun,Hess,x0,epsilon)
    n=length(x0); maxk=5000;
    beta=0.5; sigma=0.4; tau=0.0; k=0;
    while(k<maxk)
        gk=feval(gfun,x0);
        muk=norm(gk)^(1+tau);
        Gk=feval(Hess,x0);
        Ak=Gk+muk*eye(n);
        dk=-Ak\gk;
        if(norm(gk)<epsilon), break; end
        m=0; mk=0;
        while(m<20)
            if(feval(fun,x0+beta^m*dk)...
                ≤feval(fun,x0)+sigma*beta^m*gk'*dk)
                mk=m; break;
            end
            m=m+1;
        end
        x0=x0+beta^mk*dk;
        k=k+1;
```

```
end
x=x0;
val=feval(fun,x);
end
```

3.3 对称秩 1、BFGS、DFP 算法程序

- 对称秩 1 算法

  输入: fun,gfun 分别是目标函数及其梯度,x_0 是初始点,epsilon 是容许误差,N 是最大迭代次数。

  输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val] = sr1(fun,gfun,x0,epsilon,N)
if nargin<5, N=1000; end
if nargin<4, epsilon=1.e-5; end
beta=0.55; sigma=0.4;
n=length(x0); Hk=eye(n); k=0;
while(k<N)
    gk=feval(gfun,x0);
    dk=-Hk*gk;
    if(norm(gk)<epsilon), break; end
    m=0; mk=0;
    while(m<20)
        if(feval(fun,x0+beta^m*dk)<=feval(fun,x0)...
            +sigma*beta^m*gk'*dk)
            mk=m; break;
        end
        m=m+1;
    end
    x=x0+beta^mk*dk;
    sk=x-x0; yk=feval(gfun,x)-gk;
    Hk=Hk+(sk-Hk*yk)*(sk-Hk*yk)'/((sk-Hk*yk)'*yk);
    k=k+1; x0=x;
end
val=feval(fun,x0);
end
```

- BFGS 算法

  输入: fun,gfun 分别是目标函数及其梯度,x_0 是初始点,varargin 是输入的可变参数变量，简单调用 BFGS 是可以忽略的。

  输出：k 是迭代次数,x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val] = bfgs(fun,gfun,x0,varargin)
N=1000;
epsilon=1.e-5;
beta=0.55; sigma=0.4;
n=length(x0); Bk=eye(n);
k=0;
while(k<N)
    gk=feval(gfun,x0,varargin{:});
    if(norm(gk)<epsilon), break; end
    dk=-Bk\gk;
    m=0; mk=0;
    while(m<20)
        newf=feval(fun,x0+beta^m*dk,varargin{:});
        oldf=feval(fun,x0,varargin{:});
        if(newf<=oldf+sigma*beta^m*gk'*dk)
            mk=m; break;
        end
        m=m+1;
    end
    x=x0+beta^mk*dk;
    sk=x-x0;
    yk=feval(gfun,x,varargin{:})-gk;
    if(yk'*sk>0)
        Bk=Bk-(Bk*sk*sk'*Bk)/(sk'*Bk*sk)+(yk*yk')/(yk'*sk);
    end
    k=k+1;
    x0=x;
end
val=feval(fun,x0,varargin{:});
end
```

- DFP 算法

  输入: fun,gfun 分别是目标函数及其梯度,x_0 是初始点,epsilon 是容许误差,N

是最大迭代次数。

输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val] = dfp(fun,gfun,x0,epsilon,N)
if nargin<5, N=1000; end
if nargin<4, epsilon=1.e-5; end
beta=0.55; sigma=0.4;
n=length(x0); Hk=eye(n); k=0;
while(k<N)
gk=feval(gfun,x0);
if(norm(gk)<epsilon), break; end
dk=-Hk*gk;
m=0; mk=0;
while(m<20)
    if(feval(fun,x0+beta^m*dk)<=feval(fun,x0)...
        +sigma*beta^m*gk'*dk)
        mk=m; break;
    end
    m=m+1;
end
x=x0+beta^mk*dk;
sk=x-x0; yk=feval(gfun,x)-gk;
if(sk'*yk>0)
    Hk=Hk-(Hk*yk*yk'*Hk)/(yk'*Hk*yk)+(sk*sk')/(sk'*yk);
end
k=k+1; x0=x;
end
val=feval(fun,x0);
end
```

3.4 问题求解

$$min\sum_{i=1}^{m} r_i^2(x)$$

3.4.1 Watson 函数

$$r_i(x)=\sum_{j=2}^{N}(j-1)x_jt_i^{j-2}-(\sum_{j=1}^{N}x_jt_i^{j-1})^2-1$$

$$t_i=\frac{i}{29},1\le i\le 29$$

$$r_{30}(x)=x_1$$

$$r_{31}(x)=x_2-x_1^2-1$$

$$2\le n\le 31,m=31$$

$$x_0=(0,\ldots,0)^T$$

构建 fun2.m、gfun2.m 函数

```
%%目标函数
function F=fun2(x)
F=0;
n=length(x);ff=0;t=(1:29)/29;
f(30)=x(1);
f(31)=x(2)-x(1)^2-1;
for i = 1:29
    for j = 2:n
        f(i)=f(i)+(j-1)*x(j)*t(i)^(j-2);
    end
    for k = 1:n
        ff=ff+x(k)*t(i)^(k-1);
    end
    f(i)=f(i)-ff^2-1;
    F=F+f(i)^2;
end
F=F+f(30)^2+f(31)^2;
end
%%梯度
function gf=gfun2(x)
n=length(x);
y=sym('x',[1,n]);
gf=vpa(zeros(n,1));
for i=1:n
```

```
        syms (['x',num2str(i)]);
    end
    for j = 1:n
        gf(j)=diff(fun2(y),y(j));
    end
    for k = 1:n
        for m = 1:n
            gf(k)=subs(gf(k),x(m));
        end
    end
    end
    %%命令行调用
    >>x0=[0;0];
    >>[k,x,val]=sr1('fun2','gfun2',x0);
    >>[k,x,val]=bfgs('fun2','gfun2',x0);
    >>[k,x,val]=dfp('fun2','gfun2',x0);
```

3.4.2 Discre boundary value 函数

$$r_i(x) = 2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} + h^2\frac{(x_i + t_i + 1)^3}{2}$$

$$h = \frac{1}{n+1}$$

$$t_i = ih$$

$$x_0 = x_{n+1} = 0$$

$$m = n$$

$$x_0 = (t_1(t_1 - 1), \ldots, t_n(t_n - 1))^T$$

构建 fun2.m、gfun2.m 函数

```
    %%目标函数
    function F=fun3(x)
    n=length(x);
    t=zeros(n,1);
    h=1/(n+1);F=0;
    for m = 1:n
```

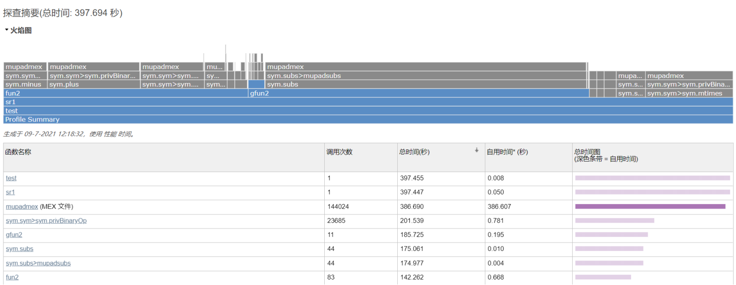
```
        t(m)=m*h;
    end
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            if j == 1
                f(j)=2*x(j)-x(j+1)+h^2*(x(j)+t(j)+1)^3/2;
            elseif j == n
                f(j)=2*x(j)-x(j-1)+h^2*(x(j)+t(j)+1)^3/2;
            else
                f(j)=2*x(j)-x(j-1)-x(j+1)+h^2*(x(j)+t(j)+1)^3/2;
            end
        end
    F=F+f(i)^2;
    end
    end
    %%梯度
    function gf=gfun3(x)
    n=length(x);
    y=sym('x',[1,n]);
    %gf=vpa(zeros(n,1));
    for i=1:n
        syms (['x',num2str(i)]);
    end
    for j = 1:n
        gf(j)=diff(fun3(y),y(j));
    end
    for k = 1:n
        for m = 1:n
            gf(k)=subs(gf(k),x(m));
        end
    end
    gf=gf';
    end
    %%调用函数
    n=2;t=zeros(n,1);h=1/(n+1);
    for m = 1:n
        t(m)=m*h;
    end
    for i = 1:n
        x0(i)=t(i)*(t(i)-1);
```

```
        end
        [k,x,val]=sr1('fun3','gfun3',x0);
        %[k,x,val]=bfgs('fun3','gfun3',x0);
        %[k,x,val]=dfp('fun3','gfun3',x0);
```

3.5 数据可视化

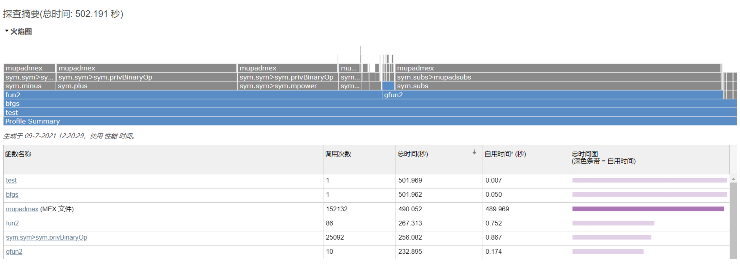
考虑 watson 函数，同时调用 sr1、bfgs、dfp 函数并比较

结果如图:



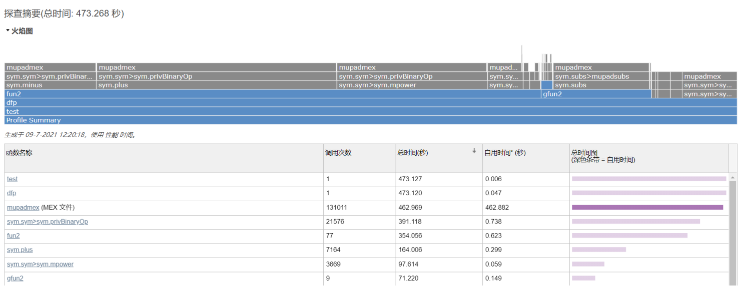
函数名称	调用次数	总时间(秒)	自用时间* (秒)	总时间图 (深色条带 = 自用时间)
test	1	397.455	0.008	
sr1	1	397.447	0.050	
mupadmex (MEX 文件)	144024	386.690	386.607	
sym.sym>sym.privBinaryOp	23685	201.539	0.781	
gfun2	11	185.725	0.195	
sym.subs	44	175.061	0.010	
sym.subs>mupadsubs	44	174.977	0.004	
fun2	83	142.262	0.668	

图 4: sr1 结果



函数名称	调用次数	总时间(秒)	自用时间* (秒)	总时间图 (深色条带 = 自用时间)
test	1	501.969	0.007	
bfgs	1	501.962	0.050	
mupadmex (MEX 文件)	152132	490.052	489.969	
fun2	86	267.313	0.752	
sym.sym>sym.privBinaryOp	25092	256.082	0.867	
gfun2	10	232.895	0.174	

图 5: BFGS 法结果



函数名称	调用次数	总时间(秒)	自用时间* (秒)	总时间图 (深色条带 = 自用时间)
test	1	473.127	0.006	
dfp	1	473.120	0.047	
mupadmex (MEX 文件)	131011	462.969	462.882	
sym.sym>sym.privBinaryOp	21576	391.118	0.738	
fun2	77	354.056	0.623	
sym.plus	7164	164.006	0.299	
sym.sym>sym.mpower	3669	97.614	0.059	
gfun2	9	71.220	0.149	

图 6: DFP 法结果

4 梯度型算法的比较

4.1 最速下降法

输入：fun,gfun 分别是目标函数及其梯度，x_0 是初始点，epsilon 是容许误差。

输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似最优点和最优值。

```
function [k,x,val]=grad(fun,gfun,x0,epsilon)
maxk=5000;
beta=0.5; sigma=0.4;
k=0;
while(k<maxk)
    gk=feval(gfun,x0);
    dk=-gk;
    if(norm(gk)<epsilon), break; end
    m=0; mk=0;
    while(m<20)
        if(feval(fun,x0+beta^m*dk)...
            <=feval(fun,x0)+sigma*beta^m*gk'*dk)
            mk=m; break;
        end
        m=m+1;
    end
x0=x0+beta^mk*dk;
k=k+1;
end
x=x0; val=feval(fun,x0);
end
```

4.2 共轭梯度法

以 FR 非线性共轭梯度法为例

输入：fun,gfun 分别是目标函数及其梯度，x_0 是初始点，epsilon 是容许误差，N 是最大迭代次数。

```
function [k,x,val] = frcg(fun,gfun,x0,epsilon,N)
```

```
    if nargin<5, N=1000; end
    if nargin<4, epsilon=1.e-5; end
    beta=0.6; sigma=0.4;
    n=length(x0); k=0;
    while(k<N)
        gk=feval(gfun,x0);
        itern=k-(n+1)*floor(k/(n+1));
        itern=itern+1;
        if(itern==1)
            dk=-gk;
        else
            betak=(gk'*gk)/(g0'*g0);
            dk=-gk+betak*d0; gd=gk'*dk;
            if(gd≥0.0), dk=-gk; end
        end
        if(norm(gk)<epsilon), break; end
        m=0; mk=0;
        while(m<20)
            if(feval(fun,x0+beta^m*dk)...
                ≤feval(fun,x0)+sigma*beta^m*gk'*dk)
                mk=m; break;
            end
            m=m+1;
        end
        x=x0+beta^mk*dk;
        g0=gk; d0=dk;
        x0=x;  k=k+1;
    end
    val=feval(fun,x);
    end
```

4.3 问题求解

$$min \quad f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 12x_2$$
$$x_0 = (-0.5, 1)^T$$

答：建立目标函数 fun.m 及其梯度 gfun.m

```
%%目标函数
function f=fun(x)
f=4*x(1)^2+4*x(2)^2-4*x(1)*x(2)-12*x(2);
end
%%梯度
function gf=gfun(x)
gf=[8*x(1)-4*x(2);8*x(2)-4*x(1)-12];
end
```

- 调用最速下降法

```
>> x0=[-0.5;1];
>> [k,x,val]=grad('fun','gfun',x0,1e-5)
```

结果如下：

```
k =

    20


x =

    1.0000
    2.0000


val =

  -12.0000
```

图 7: question4: 最速下降法结果

- 调用共轭梯度法

```
>> x0=[-0.5;1];
>> [k,x,val]=frcg('fun','gfun',x0)
```

结果如下：

- 分析：共轭梯度法迭代速度较快

```
k =

    11


x =

    1.0000
    2.0000


val =

  -12.0000
```

图 8: question4: 最速下降法结果

5 非线性最小二乘问题的求解算法的比较

5.1 Gauss-Newton 方法

输入：Fk，JFk 分别是求 $F(x_k)$ 及 $F'(x_k)$ 的函数,x_0 是初始点，epsilon 是容许误差，N 是最大迭代次数。

输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似解及 $||F(x_k)||$ 的值。

```
function [k,x,val] = gmm(Fk,JFk,x0,epsilon,N)
if nargin<5, N=1000; end
if nargin<4, epsilon=1.e-5; end
beta=0.55; sigma=0.4;
k=0;
while(k<N)
    fk=feval(Fk,x0);
    jfk=feval(JFk,x0);
    gk=jfk'*fk; dk=-(jfk'*jfk)\gk;
    if(norm(gk)<epsilon), break; end
    m=0; mk=0;
    while(m<20)
        fnew=0.5*norm(feval(Fk,x0+beta^m*dk))^2;
        fold=0.5*norm(feval(Fk,x0))^2;
        if(fnew<fold+sigma*beta^m*gk'*dk)
            mk=m; break;
        end
        m=m+1;
```

```
        end
        x0=x0+beta^mk*dk;
        muk=norm(feval(Fk,x0));
        k=k+1;
    end
    x=x0;
    val=0.5*muk^2;
    end
```

5.2 Levenberg-Marquardt 方法

输入：Fk，JFk 分别是求 $F(x_k)$ 及 $F'(x_k)$ 的函数,x_0 是初始点，epsilon 是容许误差，N 是最大迭代次数。

输出：k 是迭代次数，x,val 分别是近似解及 $||F(x_k)||$ 的值。

```
    function [k,x,val] = lmm(Fk,JFk,x0,epsilon,N)
    if nargin<5, N=1000; end
    if nargin<4, epsilon=1.e-5; end
    beta=0.55; sigma=0.4;
    n=length(x0);
    muk=norm(feval(Fk,x0));
    k=0;
    while(k<N)
        fk=feval(Fk,x0);
        jfk=feval(JFk,x0);
        gk=jfk'*fk; dk=-(jfk'*jfk+muk*eye(n))\gk;
        if(norm(gk)<epsilon), break; end
        m=0; mk=0;
        while(m<20)
            fnew=0.5*norm(feval(Fk,x0+beta^m*dk))^2;
            fold=0.5*norm(feval(Fk,x0))^2;
            if(fnew<fold+sigma*beta^m*gk'*dk)
                mk=m; break;
            end
            m=m+1;
        end
        x0=x0+beta^mk*dk;
        muk=norm(feval(Fk,x0));
```

```
            k=k+1;
        end
        x=x0;
        val=0.5*muk^2;
        end
```

5.3 问题求解

、

由于 Gauss-Newton 算法在迭代过程中要求矩阵 $J(x_k)$ 列满秩，这一问题在 Levenberg-Marquardt 方法中得到改进，这说明 L-M 方法的有效性优于 G-N 法，于是下述问题采用 L-M 方法。

5.3.1 问题 1

$$minf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} r_i(x)^2$$

$$r_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$$

$$r_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 1$$

$$r_3(x) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 - 1$$

$$r_4(x) = x_1 + x_2 - x_3 + 1$$

$$r_5(x) = x_1^3 + 3x_2^2 + (5x_3 - x_1 + 1)^2 - 36t$$

$$if \quad t = 1, x^* = (0, 0, 1)^T$$

构建目标函数 Fk.m 及其梯度 Jfk.m

```
%%目标函数
function F=Fk(x)
F=zeros(5,1);
t=1;%t可能为0.5或5
F(1)=x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-1;
F(2)=x(1)+x(2)+x(3)-1;
F(3)=x(1)^2+x(2)^2+(x(3)-2)^2-1;
F(4)=x(1)+x(2)-x(3)+1;
```

```
F(5)=x(1)^3+3*x(2)^2+(5*x(3)-x(1)+1)^2-36*t;
end
%%梯度
function JF = JFk(x)
JF=[2*x(1),2*x(2),2*x(3);
1,1,1;
2*x(1),2*x(2),2*(x(3)-2);
1,1,-1;
3*x(1)^2-2*(5*x(3)-x(1)+1),6*x(2),10*(5*x(3)-x(1)+1)];
end
```

结果如下:

```
k =

     8


x =

   -0.0000
    0.0000
    1.0000


val =

   9.4239e-24
```

图 9: question5:t=1 时

t=0.5 或 t=5 时结果如下:

```
k =

    13


x =

    0.3394
   -0.2002
    0.7144


val =

    0.4861
```

(a) t=0.5

```
k =

    91


x =

   -0.4907
    0.1031
    2.3843


val =

   14.4504
```

(b) t=5

图 10: question5:t 为其他情况

5.3.2 问题 2：扩展 Rosenbrock 问题

$$minf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} r_i(x)^2$$

$$r_{2i+1}(x) = 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2)$$

$$r_{2i}(x) = 1 - x_{2i-1}$$

$$x \in R^n, n = 2k(k \in N), m = n$$

$$x^* = (1, \ldots, 1)^T, f^* = 0$$

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

$$x_{2j-1}^{(0)} = -1.2, x_{2j}^{(0)} = 1$$

构建目标函数 Fk2.m 及其梯度 Jfk2.m

```
%%目标函数
function F=Fk2(x)
n=length(x);F=zeros(n,1);
for i =1:n
    if ¬mod(i,2)
        F(i)=1-x(i-1);
    elseif mod(i,2)
        F(i)=10*(x(i+1)-x(i)^2);
    end
```

```
end
end
%%梯度
function JF=JFk2(x)
n=length(x); JF=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j= 1:n
        if i==j && ¬mod(j,2)
            JF(i,j)=0;
        elseif i==j && mod(j,2)
            JF(i,j)=-20*x(i);
        end
        if (i-j)==1 && ¬mod(j,2)
            JF(i,j)=0;
        elseif (i-j)==1 && mod(j,2)
            JF(i,j)=-1;
        end
        if (j-i)==1 && ¬mod(i,2)
            JF(i,j)=0;
        elseif (j-i)==1 && mod(i,2)
            JF(i,j)=10;
        end
    end
end
%%命令窗口
>> n=10;
>> x0=x0(n);
>> [k,x,val] = gmm('Fk2','JFk2',x0)
```

结果如下图:

```
k =

    17


x =

    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000


val =

   7.7037e-31
```

图 11: question5：Rosenbrock 结果

6 约束优化问题的罚函数算法的比较

6.1 外点罚函数法求解

$$
\begin{gathered}
minf(x) = ln(1 + x_1^2) - x_2 \\
s.t. \quad (1 + x_1^2)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\
x_0 = (2, 2)^T \\
x^* = (0, \sqrt{3})^T, f(x^*) = -\sqrt{3}
\end{gathered}
$$

构建下列函数:

- 目标函数 obj.m
- 约束条件函数 constrains.m

- 增广目标函数 Al obj.m
- 罚函数 compare.m
- 罚函数求解函数 Al main.m

```
%%目标函数
function f=obj(x)
f=log(1+x(1)^2)-x(2);
end
%%约束条件函数
function [h,g]=constrains(x)
h=(1+x(1)^2)^2+x(2)^2-4;
end
%%增广目标函数
function f=AL_obj(x)
global pena N_equ;
h_equ=0;
h_inequ=0;
h=constrains(x);
for i=1:N_equ
    h_equ=h_equ+h(i).^2;
end
f=obj(x)+pena*(h_equ+h_inequ);
end
%%罚函数
function f=compare(x)
global pena N_equ;
h_equ=0;
h_inequ=0;
h=constrains(x);
for i=1:N_equ
    h_equ=h_equ+h(i).^2;
end
f=pena*(h_equ+h_inequ);
end
%%罚函数求解函数
function [X,FVAL]=AL_main(x_al,N_equ,N_inequ)
global pena N_equ;
pena=0.1;
```

```
    c_scale=2;
    e_al=1e-6;
    max_itera=100;
    out_itera=1;
    while out_itera<max_itera
        x_al0=x_al;
        [X,FVAL]=fminunc(@AL_obj,x_al0);
        x_al=X;
        if compare(x_al)≤e_al
            break;
        end
        pena=c_scale*pena;
        out_itera=out_itera+1;
    end
    X=x_al;
    FVAL=obj(X);
    end
```

结果如下：

```
迭代结果为：
    0.0000    1.7321

   -1.7321
```

图 12: question6: 外点罚函数法

分析：外点法对此问题有效

6.2 内点罚函数法求解

$$minf(x) = -x_1x_2x_3$$

$$s.t. \quad -x_1{}^2 - 2x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 48 \geq 0$$

$$x_0 = (1, 1, 1)$$

$$x^* = (a, b, c)^T, (a, -b, -c)^T, (-a, b, -c)^T, (-a, -b, c)^T, f(x^*) = -16\sqrt{2}$$

$$a = 4, b = 2\sqrt{2}, c = 2$$

构建下述 Matlab 文件

- 目标函数 obj.m
- 约束条件函数 constrains.m
- 增广目标函数 Al obj.m
- 罚函数 compare.m
- 罚函数求解函数 Al main.m

```
%%
function f=obj(x)
f=-(x(1)*x(2)*x(3));;
end
%%
function [h,g]=constrains(x)
g=-x(1)^2-2*x(2)^2-4*x(3)^2+48;
end
%%
function f=AL_obj(x)
global pena N_inequ;
h_inequ=0;
g=constrains(x);
for i=1:N_inequ
    h_inequ=h_inequ-log(g(i));
end
f=obj(x)+pena*(h_inequ);
end
%%
function f=compare(x)
global pena N_inequ;
h_inequ=0;
g=constrains(x);
for i=1:N_inequ
    h_inequ=h_inequ-log(g(i));
end
f=pena*(h_inequ);
end
%%
function [X,FVAL]=AL_main(x_al,N_equ,N_inequ)
global pena N_equ N_inequ;
```

```
    pena=10;
    c_scale=0.5;
    e_al=1e-6;
    max_itera=100;
    out_itera=1;
    while out_itera<max_itera
        x_al0=x_al;
        [X,FVAL]=fminunc(@AL_obj,x_al0);
        x_al=X;
        if compare(x_al)<=e_al
            break;
        end
        pena=c_scale*pena;
        out_itera=out_itera+1;
    end
    X=x_al;
    FVAL=obj(X);
    end
```

构建 main.m 输入参数求解

```
    function main()
    clc,clear;
    x_al=[4,2*sqrt(2),2];
    N_inequ=1;
    [X,FVAL]=AL_main(x_al,N_inequ);
    disp(X);disp(FVAL);
    end
```

结果如下

```
迭代结果为：
    4.100000000000000    2.863782463805518    2.025000000000000

  -23.776553905745310
```

图 13: 内点罚函数法结果

分析：当初值为 $x_0=(1,1,1)^T$ 时，内点法结果不为最优解，而当初值足够靠近最优解时，解也足够靠近最优值，说明对此问题，内点法有效性较差

6.3 乘子法求解

$$\min f(x) = (x_1-1)^2 + (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2$$

$$s.t. \quad x_1(1+{x_2}^2) + {x_3}^4 - 4 - 3\sqrt{2}$$

$$-10 \le x_i \le 10, i = 1,2,3$$

$$x_0 = (2,2,2)^T$$

$$x^* = (1.104859024, 1.196674194, 1.535262257)^T, f(x^*) = 0.03256820025$$

构建下述 Matlab 文件

- PHR 算法函数 multphr.m
- 增广拉格朗日函数 mpsi.m
- 增广拉格朗日函数的梯度 dmpsi.m
- 目标函数 f1.m
- 等式约束函数 h1.m
- 不等式约束函数 g1.m
- 目标函数的梯度 df1.m
- 等式约束的 Jacob 矩阵转置 dh1.m
- 不等式约束的 Jacob 矩阵转置 dg1.m

```
%%
function [x,mu,lam,output]=multphr(fun,hf,gf,dfun,dhf,dgf,x0)
maxk=1000;  %最大迭代次数
sigma=2.0;  %罚因子
theta=0.8;  eta=2.0;  %PHR算法中的实参数
k=0;  ink=0;  %k,ink分别是外迭代和内迭代次数
epsilon=1e-5;  %终止误差值
x=x0;  he=feval(hf,x);  gi=feval(gf,x);
n=length(x);  l=length(he);  m=length(gi);
%选取乘子向量的初始值
mu=0.1*ones(l,1);  lam=0.1*ones(m,1);
betak=10;  betaold=10;  %用来检验终止条件的两个值
while(betak>epsilon && k<maxk)
```

```
            %调用BFGS算法程序求解无约束子问题
            [ik,x,val]=bfgs('mpsi','dmpsi',x0,fun,hf,gf,dfun,...
            dhf,dgf,mu,lam,sigma);
            ink=ink+ik;
            he=feval(hf,x);  gi=feval(gf,x);
            %计算batak
            betak=sqrt(norm(he,2)^2+norm(min(gi,lam/sigma),2)^2);
            if betak>epsilon
                %更新乘子向量
                mu=mu-sigma*he;
                lam=max(0.0,lam-sigma*gi);
                if(k≥2 && betak>theta*betaold)
                    sigma=eta*sigma;
                end
            end
            k=k+1;
            betaold=betak;
            x0=x;
        end
        f=feval(fun,x);
        output.fval=f;
        output.iter=k;
        output.inner_iter=ink;
        output.beta=betak;
        %%
        function psi=mpsi(x,fun,hf,gf,dfun,dhf,dgf,mu,lam,sigma)
        f=feval(fun,x);   he=feval(hf,x);   gi=feval(gf,x);
        l=length(he);   m=length(gi);
        psi=f;   s1=0.0;
        for i=1:l
            psi=psi-he(i)*mu(i);
            s1=s1+he(i)^2;
        end
        psi=psi+0.5*sigma*s1;
        s2=0.0;
        for i=1:m
            s3=max(0.0,lam(i)-sigma*gi(i));
            s2=s2+s3^2-lam(i)^2;
        end
        psi=psi+s2/(2.0*sigma);
```

```
end
%%
function dpsi=dmpsi(x,fun,hf,gf,dfun,dhf,dgf,mu,lam,sigma)
dpsi=feval(dfun,x);
he=feval(hf,x);  gi=feval(gf,x);
dhe=feval(dhf,x);  dgi=feval(dgf,x);
l=length(he);  m=length(gi);
for i=1:l
    dpsi=dpsi+(sigma*he(i)-mu(i))*dhe(:,i);
end
for i=1:m
    dpsi=dpsi+(sigma*gi(i)-lam(i))*dgi(:,i);
end
end
%%
function f=f1(x)
f=(x(1)-1)^2+(x(1)-x(2))^2+(x(2)-x(3))^4;
end
%%
function he=h1(x)
he=x(1)*(1+x(2)^2)+x(3)^4-4-3*sqrt(2);
end
%%
function gi=g1(x)
gi=[x(1)+10;
x(2)+10;
x(3)+10;
-x(1)+10;
-x(2)+10;
-x(3)+10;];
end
%%
function g=df1(x)
g=[4*x(1)-2*x(2)-2;
2*x(2)-2*x(1)+4*(x(2)-x(3))^3;
-4*(x(2)-x(3))^3];
end
%%
function dhe=dh1(x)
dhe=[x(2)^2+1,2*x(1)*x(2),4*x(3)^3]';
```

```
    end
    %%
    function dgi=dg1(x)
    dgi=[eye(3);-1*eye(3)]';
    end
```

命令窗口输入：

```
x0=[2,2,2]';
[x,mu,lam,output]=multphr('f1','h1','g1','df1','dh1','dg1',x0)
```

结果如下

```
x =

    0.5397
    0.7449
    1.6495


mu =

    0.5325


lam =

     0
     0
     0
     0
     0
     0


output =

  包含以下字段的 struct:

          fval: 0.9238
          iter: 4
    inner_iter: 49
          beta: 7.1962e-07
```

图 14: 乘子法结果

```
<stopping criteria details>
迭代结果为：
   1.104795485345797    1.196572225359752    1.535284306381924

   0.032567089882592
```

图 15: 外点法结果

分析：由结果可知，乘子法对此问题有效性很差，而不难验证，使用本题第一问外点法 (修改函数) 求解此题，结果正确，但初始点却为可行点