層係数コホモロジーの理論

@Big_ToiletPaper

2022 年 8 月 15 日

これは小木曽啓示『代数曲線論』の 5 章を読み勉強した内容をノートにしたものである. 私は今野一宏『リーマン面と代数曲線』にて Riemann-Roch の定理を扱っているため, その知識と合流することを目的としたノートとなっている.

第 1 章

層係数コホモロジー

特に断らない限り X は位相空間とする.

1.1 Čech コホモロジー

層に関する性質は既知のものとする. 例えば, 層の短完全列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$$

は, 開集合 U について切断の左完全列

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathscr{H}(U)$$

を誘導する.

Definition 1.1.1.

X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を開被覆とする. このとき, $\iota = (i_0, i_1, \ldots, i_q) \in I^{q+1}$ に対して,

$$U_\iota = U_{i_0 i_1 \cdots i_q} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}$$

と定める.

Definition 1.1.2. (q-コチェイン群)

上の状況に加え $\mathscr{F}$ を X 上の層とする. このとき, $q \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := \prod_{\iota \in I^{q+1}} \mathscr{F}(U_\iota)$$

を層 $\mathscr{F}$ の開被覆 $\mathcal{U}$ に関する Čech q-コチェイン群という (the Čech q-cochain group of the sheaf $\mathscr{F}$ with respect to the open covering $\mathcal{U}$). また, Čech q-コチェイン群の元を Čech q-コチェインという. コチェイン群には $\mathscr{F}$ と同じ代数構造が入る.

Exempli gratia 1.1.3. ($0, 1, 2$-コチェイン群の元)

1. 0-コチェイン群は
$$C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i \in I} \mathscr{F}(U_i)$$
であるから, 0-コチェインは $(f_i)_{i \in I},\ f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ で与えられる.

2. 1-コチェイン群は
$$C^1(\mathcal{U},\mathscr{F}) = \prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_{ij})$$
であるから, 1-コチェインは $f_{ij}\in\mathscr{F}(U_{ij})$ 達によって $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ という形をしている.
3. 2-コチェインは $f_{ijk}\in\mathscr{F}(U_{ijk})$ によって $(f_{ijk})_{(i,j,k)\in I^3}$ と表される.

0-コチェイン $(f_i)_{i\in I}$ が貼り合わさり大域的な元 $f\in\mathscr{F}(X)$ を定めるためには, 各開集合 U_i, U_j に関して $f_i|U_{ij} = f_j|U_{ij}$ が成立すればよい. これは $f_{ij} := f_j|U_{ij} - f_i|U_{ij}$ が 0 になることを意味し, $(f_i)_{i\in I}$ が線形写像 $\partial^0\colon C^0(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^1(\mathcal{U},\mathscr{F}); (f_i)_{i\in I}\mapsto (f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ の核に入ることを意味する.

Definition 1.1.4. (境界作用素)

コチェイン群の間の準同型 $\partial^q\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を $f=(f_\iota)_{\iota\in I^{q+1}}$ に対して次のように定める:
$$\partial^q f := \left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}}|U_{i_0 i_1\cdots i_{q+1}}\right)_{(i_0 i_1\cdots i_{q+1})\in I^{q+2}}$$
$f_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}}$ は $\mathscr{F}(U_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}})$ の元であり, それを $U_{i_0 i_1\cdots\cdots i_{q+1}}$ に制限したものとなる.

Proposition 1.1.5.

$\partial^{q+1}\circ\partial^q = 0$. 即ち $\mathrm{Im}\,(\partial^q)\subset\mathrm{Ker}\,(\partial^{q+1})$ である.

Proof.

各 $\iota = (i_0, i_1, \ldots, i_{q+1})\in I^{q+2}$ に対して, $\partial\circ\partial$ によって写ったものは, ι から異なる 2 つの添字 i_j, i_k を抜いたものになる. この操作の順番により符号が入れ替わるため和を取ると 0 となる. □

従ってコチェイン群と境界作用素によって複体 $(C^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F}), d^\bullet)$ を得る.

Definition 1.1.6. (q-コサイクル, q-コバウンダリー, q 次 Čech コホモロジー)

1. $Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) := \mathrm{Ker}\,\partial^q$ とおき, $Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元を $\mathscr{F}$ の $\mathcal{U}$ に関する Čech q-コサイクル (Čech q-cocycle) という.
2. $B^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) := \mathrm{Im}\,\partial^{q-1}$ とおき, $B^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元を $\mathscr{F}$ の $\mathcal{U}$ に関する Čech q-コバウンダリー (Čech q-boundary) という.
3. 商空間 $H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) := Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})/B^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を $\mathscr{F}$ の $\mathcal{U}$ に関する q 次 Čech コホモロジー群 (q-th Čech cohomology group) という.

Exempli gratia 1.1.7. (コサイクルの例)

1. 0-コサイクルは各 $U_i\cap U_j$ 上 $f_i = f_j$ が成立するようなものから成る.
2. 1-コサイクルは $f_{ij}\in\mathscr{F}(U_{ij})$ によって, $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たすものから成る. このことから $f_{ii} = 0$, $f_{ij} = -f_{ji}$ が従う.

Remark 1.1.8.

$H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元は, $Z^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元, つまり $(f_{ij})\in C^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ で $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たすようなもので代表さ

れる.

Definition 1.1.9. (細分)

$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{V}=\{V_j\}_{j\in J}$ を X の開被覆とする. このとき, 開被覆 $\mathcal{V}$ が開被覆 $\mathcal{U}$ の細分である ($\mathcal{V}$ is a refinement of $\mathcal{U}$) とは, 各 $j\in J$ について, $V_j\subset U_{\pi(j)}$ となるような写像 $\pi\colon J\to I$ が存在することと定める. このような写像 π のことを細分写像 (refinement mapping) といい, $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分であるとき $\mathcal{V}>\mathcal{U}$ と表す.

Remark 1.1.10.

細分写像は $V_j\subset U_i$ なる U_i の取り方に依るから一般に一意ではないが, 細分写像から誘導される複体の射はホモトピックであるためホモロジー群の間の写像は一意に定まる.

Definition 1.1.11.

$\mathcal{V}>\mathcal{U}$ とし, π を細分写像とする. このとき, 複体の間の写像 $\pi^*\colon C^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^\bullet(\mathcal{V},\mathscr{F})$ を次のように定める: 準同型 $\pi^{*,q}\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$ を $f=(f_{i_0i_1\cdots i_q})$ に対し,

$$\pi^{*,q}f=\left(f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_q)}|V_{j_0j_1\cdots j_q}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_q)\in J^{q+1}}$$

と定める. $V_{j_0j_1\cdots j_q}\subset U_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_q)}$ となるため $V_{j_0j_1\cdots j_q}$ に制限ができる.

Remark 1.1.12.

$\mathcal{W}=\{W_k\}_{k\in K}>\mathcal{V}=\{V_j\}_{j\in J}>\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ とするとき, 細分写像 $\sigma\colon K\to J$, $\tau\colon J\to I$ について $\sigma\circ\tau$ もまた細分写像であり, 定義から明らかに

$$(\sigma\circ\tau)^{*,q}=\sigma^{*,q}\circ\tau^{*,q}$$

が従う.

Proposition 1.1.13.

$\pi^*\colon C^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^\bullet(\mathcal{V},\mathscr{F})$ は複体の射である. 即ち, 各 $q\in\mathbb{Z}$ に対して次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc}
C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) & \xrightarrow{\partial^{q,\mathcal{U}}} & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F})\\
{\scriptstyle\pi^{*,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi^{*,q+1}}\\
C^q(\mathcal{V},\mathscr{F}) & \xrightarrow{\partial^{q,\mathcal{V}}} & C^{q+1}(\mathcal{V},\mathscr{F})
\end{array}$$

Proof.

$f=(f_{i_0i_1\cdots i_q})\in C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ とする.

$$\begin{aligned}
&\partial^{q,\mathcal{V}}\circ\pi^{*,q}(f)\\
&=\partial^{q,\mathcal{V}}\left(\left(f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_q)}|V_{j_0j_1\cdots j_q}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_q)\in J^{q+1}}\right)\\
&=\left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_{k-1})\pi(j_{k+1})\cdots\pi(j_{q+1})}|V_{j_0j_1\cdots j_{q+1}}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_{q+1})\in I^{q+2}}
\end{aligned}$$

であり, 一方

$$\begin{aligned}&\pi^{*,q+1}\circ\partial^{q,\mathcal{U}}(f)\\&=\pi^{*,q+1}\left(\left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}}|U_{i_0 i_1\cdots i_{q+1}}\right)_{(i_0 i_1\cdots i_{q+1})\in I^{q+2}}\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_{k-1})\pi(j_{k+1})\cdots\pi(j_{q+1})}|V_{j_0 j_1\cdots j_{q+1}}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_{q+1})\in I^{q+2}}\end{aligned}$$

であるから図式を可換にする. □

よって次が従う.

Proposition 1.1.14.

$\pi^{*,q}$ はコサイクルをコサイクルに, コバウンダリーをコバウンダリーに写す. つまり, 次のような準同型が得られる.

$$\pi^{*,q}\colon Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})\to Z^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$
$$\pi^{*,q}\colon B^q(\mathcal{U},\mathscr{F})\to B^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$

これによりコホモロジー群の間に準同型が得られた.

Definition 1.1.15.

$H(\pi^{*,q})\colon H^q(\mathcal{U},\mathscr{F})\to H^q(\mathcal{V},\mathscr{F}); [a]\mapsto[\pi^{*,q}(a)],\ a\in Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$

次に細分写像がホモトピックであることを示す.

Proposition 1.1.16.

π,ρ を細分写像とする. このとき, π^* と ρ^* はホモトピックである. 即ち, 各 $q\in\mathbb{Z}$ に対して準同型 $k^q\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^{q-1}(\mathcal{V},\mathscr{F})$ が存在して

$$\pi^{*,q}-\rho^{*,q}=\partial^{q-1,\mathcal{V}}\circ k^q+k^{q+1}\circ\partial^{q,\mathcal{U}}$$

を満たす.

Proof.

面倒臭かった □

$f\in Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ に対して,

$$\begin{aligned}\pi^{*,q}(f)-\rho^{*,q}(f)&=\partial^{q-1,\mathcal{V}}\circ k^q(f)+k^{q+1}\circ\partial^{q,\mathcal{U}}(f)\\&=\partial^{q-1,\mathcal{V}}(k^q(f))\in B^{q-1}(\mathcal{V},\mathscr{F})\end{aligned}$$

より, $H(\pi^{*,q})([f]) = H(\rho^{*,q})([f])$ である. 従って細分写像は Čech コホモロジー群の間に一意的な準同型を定める.

Definition 1.1.17.

$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ の細分写像によって一意的に定まるホモロジー群の間の射を

$$\tau_{\mathcal{U}}^{q,\mathcal{V}} \colon H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathscr{F})$$

で表す. 即ち複体 $H^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ から $H^\bullet(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ への射

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \colon H^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^\bullet(\mathcal{V}, \mathscr{F})$$

を得る.

Proposition 1.1.18.

任意の細分 $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k\in K} > \mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J} > \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ に対して次が成り立つ:

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \circ \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \tag{1.1}$$

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{U}} \tag{1.2}$$

Proof.

細分写像 $\sigma\colon K \to J$, $\tau\colon J \to I$ を取る. このとき, $\tau\circ\sigma\colon K \to I$ もまた細分写像であるから remark 1.1.12 より, 各 $q \in \mathbb{Z}$ と $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ について, $H((\tau\circ\sigma)^{*,q})([f]) = [(\tau\circ\sigma)^{*,q}(f)] = H(\tau^{*,q})([\sigma^{*,q}(f)]) = H(\tau^{*,q})\circ H(\sigma^{*,q})([f])$ となる. 従って式 (1.1) を得る. また, 恒等写像 $\mathrm{id}_I\colon I \to I$ によって $\mathcal{U} > \mathcal{U}$ であるから式 (1.2) も従う. □

従って開被覆で添字付けることにより構成される順系 $(H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}), \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})$ を得る. これにより得られる順極限を $H^q(X, \mathscr{F})$ とする. 具体的には次のように構成される:

Definition 1.1.19. (Čech コホモロジー群)

$\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ 上の関係 $\sim$ を次のように定める: 各 $a, b \in \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ に対して, 唯一の開被覆 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ で $a \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, $b \in H^q(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ となるものが存在した. このとき,

$$(a, \mathcal{U}) \sim (b, \mathcal{V}) \iff \exists \mathcal{W} : \text{refinement of } \mathcal{U} \text{ and } \mathcal{V} \text{ s.t. } \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(a) = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(b)$$

この関係は明らかに反射律と対称律を満たす. また, 開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$ に対して, $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ もまた開被覆になることから関係 $\sim$ は同値関係となる. この同値関係によって得られる商群

$$H^q(X, \mathscr{F}) := \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) / \sim$$

を層 $\mathscr{F}$ の q 次 Čech コホモロジー群という (the q-th Čech cohomology group of the sheaf $\mathscr{F}$).

Proposition 1.1.20.

$\alpha, \beta \in H^q(X, \mathscr{F})$ とする. このとき, ある開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して, $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ によって $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ と表示できる.

Proof.

$c \in H^q(\mathcal{U}_1, \mathscr{F})$, $d \in H^q(\mathcal{U}_2, \mathscr{F})$ によって $\alpha = [c]$, $\beta = [d]$ と代表元表示する. このとき, $\mathcal{U}_k = \{U_{k,i}\}_{i\in I_k}$ とし, $\mathcal{U} = \{U_{1i} \cap U_{2j}\}_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ とすればこれは $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ の細分になっている. 従って $a = \tau_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{U}}(c)$, $b = \tau_{\mathcal{U}_2}^{\mathcal{U}}(b)$ とすれば $[a] = [c]$, $[b] = [d]$ であり, $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ となっている. □

Definition 1.1.21.

$\alpha, \beta \in H^q(X, \mathscr{F})$ とし, $k, l \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $\alpha = [a], \beta = [b]$ となる $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が上の命題から取れた. この表示によって

$$k\alpha + l\beta := [ka + lb] \in H^q(X, \mathscr{F})$$

と定める.

Remark 1.1.22.

$k\alpha + l\beta$ は $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ が準同型 (線形写像) であるため代表元表示に依らない.

Remark 1.1.23.

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ の定義から次が成立する:

1. 自然な射影 $\tau_{\mathcal{U}}^q \colon H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F}); a \mapsto [a]$ は準同型である.
2. すべての細分 $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ について, $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{V}} \circ \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ が成立.
3. $\tau_{\{X\}}^0$ は次の図式を可換にし, $\mathscr{F}(X) \simeq H^0(\{X\}, \mathscr{F})$ と $H^0(X, \mathscr{F})$ の間に同型を与える:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \arrow[rr, "\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},0}"] \arrow[dr, "\tau_{\mathcal{U}}^{\{X\},0}"] \arrow[ddr, "\tau_{\mathcal{U}}^0"'] & & H^0(\mathcal{V}, \mathscr{F}) \arrow[dl, "\tau_{\mathcal{V}}^{\{X\},0}"'] \arrow[ddl, "\tau_{\mathcal{V}}^0"] \\
& H^0(\{X\}, \mathscr{F}) \arrow[d, "\tau_{\{X\}}"] & \\
& H^0(X, \mathscr{F}) &
\end{tikzcd}$$

この対応で $\mathscr{F}(X) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ と $H^0(X, \mathscr{F})$ を同一視する.

次では 1 次 Čech コホモロジー群の性質を述べていく.

Proposition 1.1.24.

X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{V} = \{V_i\}_{j \in J}$ を X の開被覆とする. このとき, 準同型 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}$, $\tau_{\mathcal{U}}^1$ は単射である.

Proof.

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(\eta) = 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathscr{F}) = Z^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})/B^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ とする. $\eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}]$, $f_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ とし, $\pi \colon J \to I$ を細分写像とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(\eta) &= [\pi((f_{ij})_{i,j \in I})] \\
&= [(f_{\pi(k)\pi(l)}|V_{kl})_{k,j \in J}]
\end{aligned}$$

である. $g_{kl} = f_{\pi(k)\pi(l)}|V_{kl}$ とおく. このとき, 仮定より $(g_{kl})_{k,l \in J} \in B^0(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ であるから, $(g_k)_{k \in J} \in C^0(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ で, $(g_{kl})_{k,l \in J} = \partial^0((g_k)_{k \in J}) = (g_l - g_k|V_{kl})_{k,l \in J}$ となるものが存在する. 各 $i \in I$ について, $U_i \cap V_{kl} = (U_i \cap V_k) \cap (U_i \cap V_l)$ 上,

$$\begin{aligned}
g_l - f_{i\pi(l)} &= f_{\pi(k)\pi(l)} + g_k - f_{i\pi(l)} \\
&= g_k + f_{i\pi(l)} + f_{\pi(k)i} - f_{i\pi(l)} \\
&= g_k + f_{\pi(k)i} = g_k - f_{i\pi(k)}
\end{aligned}$$

であるから, $\{U_i\cap V_k\}_{k\in J}$ を U_i の開被覆だと思うと, 貼り合わせ条件から $h_i\in\mathscr{F}(U_i)$ で $h_i|U_i\cap V_k=g_k-f_{i\pi(k)}$ となるものが取れる. また, 各 $k\in J$ について, $U_i\cap U_j\cap V_k=(U_i\cap V_k)\cap(U_j\cap V_k)$ 上,

$$\begin{aligned} h_j-h_i|U_{ij}\cap V_k &= g_k-f_{j\pi(k)}-(g_k-f_{i\pi(k)}) \\ &= f_{i\pi(k)}-f_{j\pi(k)}=f_{ij} \end{aligned}$$

であるから, $\{U_i\cap U_j\cap V_k\}_{k\in J}$ を $U_i\cap U_j$ の開被覆だと思うと, 貼り合わせ条件から $U_i\cap U_j$ 上 $h_i-h_j=f_{ij}$ が成立する. これは $(f_{ij})_{i,j\in I}=\partial^0((h_i)_{i\in I})\in B^0(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を意味する. 従って, $\eta=[(f_{ij})_{i,j\in I}]=0$ であるから $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射である.

$\tau_{\mathcal{U}}$ が単射であることは上から従う. 実際, $\tau_{\mathcal{U}}(\eta)=0$ なら, Čech コホモロジー群の定義から, ある $\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V}$ が存在して, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(\eta)=0$ となる. $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射であるから $\eta=0$ となり $\tau_{\mathcal{U}}$ が単射であることが従う. □

Definition 1.1.25. (Leray 被覆)

位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ が

$$H^1(U_i,\mathscr{F}|U_i)=0 \quad \text{as the 1-st Čech cohomology group of the sheaf } \mathscr{F} \text{ on the topological space } U_i \text{ for } \forall i\in I$$

を満たすとき, $\mathcal{U}$ を Leray 被覆という.

Proposition 1.1.26.

$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ が Leray 被覆であるとき, $\tau_{\mathcal{U}}\colon H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})\to H^1(X,\mathscr{F})$ は同型写像である.

Proof.

任意の $\mathcal{U}$ の細分 $V=\{V_k\}_{k\in K}$ について, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}\colon H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})\to H^1(\mathcal{V},\mathscr{F})$ が同相写像であれば良い. 実際, 任意に $\eta\in H^1(X,\mathscr{F})$ を取るとき, ある開被覆 $\mathcal{W}$ と $a\in H^1(\mathcal{W},\mathscr{F})$ によって $\eta=[a]$ と表示される. $\mathcal{U}'$ を $\mathcal{U}$ と $\mathcal{W}$ の細分とするとき, $[a]=\left[\tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}',1}(a)\right]$ であり, $H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ と $H^1(\mathcal{U}',\mathscr{F})$ は同型であったから, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}',1}(c)=\tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}',1}(a)$ となる $c\in H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ が存在する. $[a]=[c]$ であるから, $\tau_{\mathcal{U}}^1(c)=\eta$ となるものが取れた. 従って $\tau_{\mathcal{U}}^1$ は全射であり, Proposition 1.1.24 より全単射である. よって $H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ は $H^1(X,\mathscr{F})$ と同型であることが得られる.

Proposition 1.1.24 より $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射であったから全射であることを示せば良い. 任意に $f=(f_{kl})_{k,l\in K}$ を取る. $\mathcal{V}_i:=\{U_i\cap V_k\}_{k\in K}(>\{U_i\})$ とするとき, $f\in Z^1(\mathcal{V},\mathscr{F})$ より制限することにより $(f_{kl}|U_i\cap V_k\cap V_l)_{k,l\in K}\in Z^1(\mathcal{V}_i,\mathscr{F}|U_i)$ を得る. $\tau_{\mathcal{V}_i}^1\colon H^1(\mathcal{V}_i,\mathscr{F}|U_i)\to H^1(U_i,\mathscr{F}|U_i)=0$ であり, $\tau_{\mathcal{V}_i}^1$ が単射であったことから $H^1(\mathcal{V}_i,\mathscr{F}|U_i)=0$ である. よって $(f_{kl}|U_i\cap V_k\cap V_l)_{k,l\in K}\in B^1(\mathcal{V}_i,\mathscr{F}|U_i)$ であるから, $(g_k(i))_{k\in K}\in C^0(\mathcal{V}_i,\mathscr{F}|U_i)$ で,

$$(f_{kl}|U_i\cap V_k\cap V_l)_{k,l\in K}=\partial^0((g_k(i))_{k\in K})=(g_l(i)-g_k(i)|U_i\cap V_l\cap V_k)_{k,l\in K}$$

となるものが取れる. $U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l$ 上,

$$g_l(i)-g_k(i)=g_l(j)-g_k(j)=f_{kl}|U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l$$

であるから, $U_i\cap U_j\cap V_k\cap V_l$ 上,

$$-(g_l(j)-g_l(i))=-(g_k(j)-g_k(i))$$

を得る. $k,l\in K$ を動かすことにより, 貼り合わせ条件から $F_{ij}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$ で, $F_{ij}|V_k=-(g_k(j)-g_k(i))$ を満たすものが取れる. よって $F:=(F_{ij})_{i,j\in I}\in C^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を得る. これが 1-コサイクルであることを見る. $U_i\cap U_j\cap U_h\cap V_k$ 上,

$$F_{ih}+F_{hj}=-(g_k(h)-g_k(i))-(g_k(j)-g_k(h))=-(g_k(j)-g_k(i))=F_{ij}$$

より, V_k を動かすことにより $F_{ij} = F_{ih} + F_{hj} \iff F_{ih} - F_{ij} + F_{hj} = 0$ を満たすから, これは 1-コサイクルである. よって $F \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ である. $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(F) = f$ を示す. $V_k \cap V_l \subset U_{\pi(k)} \cap U_{\pi(l)}$ 上,

$$f_{kl} - F_{\pi(k)\pi(l)} = g_l(\pi(k)) - g_k(\pi(k)) - (g_l(\pi(k)) - g_l(\pi(l))) = g_l(\pi(l)) - g_k(\pi(k)) \tag{1.3}$$

である. $U_{\pi(k)} \cap V_k = V_k$ であるから $(g_k(\pi(k)))_{k\in K} \in C^0(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ であり, 等式 (1.3) より,

$$f - F = (g_l(\pi(k)) - g_l(\pi(l)))_{k,j\in K} = \partial(g_k(\pi(k)))_{k\in K} \in B^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$$

を得る. 従って, $f - \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(F) = 0$ となり $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}$ は全射である. □

層の準同型 $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ は Čech 複体の間の準同型 $\alpha^\bullet\colon H^\bullet(X, \mathscr{F}) \to H^\bullet(X, \mathscr{G})$ を誘導することを示していく.

Proposition 1.1.27.

$\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を層の間の準同型とし, $\mathcal{U}$ を開被覆とする. このとき,

$$\alpha_{\mathcal{U}}^q\colon H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathscr{G}); [(f_{i_0\cdots i_q})] \mapsto [\alpha(f_{i_0\cdots i_q})]$$

が well-defined に定まる.

Proof.

$\alpha_{\mathcal{U}}^q\colon C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ を $\alpha^q(f_{i_0\cdots i_q}) = (\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))$ と定める. このとき, 次の図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd}
C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\partial^q"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{U}}^q"'] & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{U}}^{q+1}"] \\
C^q(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \arrow[r, "\partial^q"] & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

従って, $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ なら,

$$\begin{aligned}\partial^q(\alpha_{\mathcal{U}}^q(f)) &= \alpha_{\mathcal{U}}^{q+1}(\partial^q(f)) \\ &= \alpha_{\mathcal{U}}^{q+1}(0) = 0\end{aligned}$$

より

$$\alpha_{\mathcal{U}}^q(Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$$

を得る. 同様に,

$$\alpha_{\mathcal{U}}^q(B^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})) \subset B^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$$

を得る. 従って次の写像が誘導される:

$$H(\alpha_{\mathcal{U}}^q)\colon H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathscr{G}); [(f_{i_0\cdots i_q})] \mapsto [(\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))]$$

次に, 写像

$$\alpha^q\colon H^q(X, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{G}); [[(f_{i_0\cdots i_q})]] \mapsto [[(\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))]]$$

が well-defined であることを示す. $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の細分とする. このとき次の図式が可換である:

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},q}"] \arrow[d, "H(\alpha_{\mathcal{U}}^q)"'] & H^q(\mathcal{V}, \mathscr{F}) \arrow[d, "H(\alpha_{\mathcal{V}}^q)"] \\
H^q(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \arrow[r, "\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},q}"] & H^q(\mathcal{V}, \mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

このことより α^q が well-defined であることが従う． $\eta_1 = \eta_2 \in H^q(X,\mathscr{F})$ なら, $f_i = (f^i_{i_0\cdots i_q}) \in H^q(\mathcal{U}_i,\mathscr{F})$, $\eta_i = [f_i]$ $(i = 1,2)$ で, $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ の細分 $\mathcal{W}$ が存在して $\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_1}(f_1) = \tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_2}(f_2)$ が成立する．よって,

$$\begin{aligned}\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_1}(H(\alpha^q_{\mathcal{U}_1})(f_1)) &= H(\alpha^q_{\mathcal{W}})(\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_1}(f_1)) \\ &= H(\alpha^q_{\mathcal{W}})(\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_2}(f_2)) \\ &= \tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_2}(H(\alpha^q_{\mathcal{U}_2})(f_2))\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\alpha^q(\eta_1) = [[(\alpha(f^1_{i_0\cdots i_q}))]] &= [H(\alpha^q_{\mathcal{U}_1})(f_1)] \\ &= [H(\alpha^q_{\mathcal{U}_2})(f_2)] \\ &= [[(\alpha(f^2_{i_0\cdots i_q}))]] = \alpha^q(\eta_2)\end{aligned}$$

が成立. 従って α^q は well-defined であるから準同型

$$\alpha^\bullet\colon H^\bullet(X,\mathscr{F}) \to H^\bullet(X,\mathscr{G})$$

を得る. □

Definition 1.1.28.

上で得られるような準同型を層の準同型写像 α が誘導するコホモロジー群の準同型写像という.

Remark 1.1.29.

適当に開被覆 $\mathcal{U}$ を取り, $\eta = [f] = [[(f_{i_0\cdots i_q})]]$, $(f_{i_0\cdots i_q}) \in H(\mathcal{U},\mathscr{F})$ と代表元表示するとき,

$$\begin{aligned}\alpha^q(\eta) &= [H(\alpha^q_{\mathcal{U}})([(f_{i_0\cdots i_q})_{i_0,\ldots,i_q\in I}])] \\ &= [[\alpha^q_{\mathcal{U}}(f_{i_0\cdots i_q})_{i_0,\ldots,i_q\in I}]] \\ &= [[(\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))_{i_0,\ldots,i_q\in I}]]\end{aligned}$$

である． $q = 1$ とする． $\alpha^1(\eta) = 0$ であるとは, ある $\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V}$ が存在して, $\tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(H(\alpha^1_{\mathcal{U}})(f)) = 0$ であることと同値であり, $\pi\colon K \to I$ を細分写像とするとき,

$$\begin{aligned}0 &= \tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(H(\alpha^1_{\mathcal{U}})(f)) \\ &= [(\alpha(f_{\pi(k)\pi(l)|V_k\cap V_l})_{k,l\in K})]\end{aligned}$$

より, $\alpha^1(\eta) = 0$ であることと, $(\alpha(f_{\pi(k)\pi(l)|V_k\cap V_l}))_{k,l\in K} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{V}}$ であることは同値である．即ち, 開被覆を適当な開被覆 $\mathcal{W}$ に取り替えることにより, $\eta = [g] = [[(g_{s,t})_{s,t\in J}]]$ と表示するとき,

$$\alpha^1(\eta) = 0 \iff (\alpha(g_{s,t}))_{s,t\in J} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{W}}$$

となる．一般の次数においても同様の議論ができる.

Proposition 1.1.30.

層の短完全列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$$

が与えられたとき, 次の完全列が誘導される:

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X,\mathscr{H}) \tag{1.4}$$

$$H^1(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X,\mathscr{H}) \tag{1.5}$$

Proof.
(1.4) は, 同型 $\mathscr{F}(X) \simeq H^0(X, \mathscr{F})$ から従うから, (1.5) のみ示せばよい.

- $\mathrm{Im}\ \alpha^1 \subset \mathrm{Ker}\ \beta^1$ を示す.
$\eta \in \mathrm{Im}\ \alpha^1$ なら, 開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ と $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ によって
$$\eta = \alpha^1([(f_{ij})_{i,j \in I}]) = [[(\alpha(f_{ij}))_{i,j \in I}]]$$
と表示することができる. このとき, $\beta(U_{ij}) \circ \alpha(U_{ij}) = 0$ より,
$$\begin{aligned}\beta^1(\eta) &= (\beta^1 \circ \alpha^1)(([(f_{ij})_{i,j \in I}])) \\ &= [[(\beta \circ \alpha)(f_{ij})_{i,j \in I}]] \\ &= 0\end{aligned}$$
である. 従って $\eta \in \mathrm{Ker}\ \beta^1$ である.
- $\mathrm{Im}\ \alpha^1 \supset \mathrm{Ker}\ \beta^1$ を示す.
$g \in \mathrm{Ker}\ \beta^1$ なら, 開被覆 $\mathcal{U}$ を取り, $(g_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(X, \mathscr{G})$ によって
$$g = [[(g_{ij})_{i,j \in I}]]$$
と表示する. このとき, Remark 1.1.29 より, $\beta(g) = 0$ であるから
$$(\beta(g_{ij}))_{i,j \in I} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{U}} = B^1(\mathcal{U}, \mathscr{H})$$
を仮定してよい. よって $(h_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{H})$ で
$$(\beta(g_{ij}))_{i,j \in I} = \partial(h_i)_{i \in I} = (h_j - h_i)_{i,j \in I}$$
となるものが取れる. 各 $P \in X$ に対して, $i(P) \in I$ を, $P \in U_{i(P)}$ となるように取ってくる. このとき, $\beta_P \colon \mathscr{G}_P \to \mathscr{H}_P$ は全射であったから, $\beta_P(g_P) = (h_{i(P)})_P$ となる $g_P \in \mathscr{G}_P$ が取れる. Stalk の定義より, $g \in \mathscr{H}(U)$, $h_{i(P)} \in \mathscr{H}(U_{i(P)})$ となる開集合 U と $V_P \subset U_{i(P)}$ を取るとき,
$$\beta(g|V_P) = \beta(g)|V_P = h_{i(P)}|V_P$$
を満たす. $g^P = g|V_p \in \mathscr{H}(V_p)$ とすれば,
$$\beta(g^P) = h_{i(P)}|V_P$$
を満たすようなものが構成できた. こうして構成される $\mathcal{U}$ の細分を $\mathcal{V} = \{V_P\}_{P \in X}$ とする. $i \colon X \to I$ は細分写像となっている. $g^{PQ} = g_{i(P)i(Q)}|V_P \cap V_Q$ とおく. このとき,
$$[[(g^{PQ})_{P,Q \in X}]] = [\tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}((g_{ij})_{i,j \in I})] = [[(g_{ij})_{i,j \in I}]] = g$$
である. $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ と置きなおすと, $g = [[(g^{PQ})_{P,Q \in X}]]$, $\beta(g_{i(P)i(Q)}) = h_{i(Q)} - h_{i(P)}|V(P) \cap V(Q) = \beta(g^Q) - \beta(g^P)$ は, $g = [[(g_{ij})_{i,j \in I}]]$, $\beta(g_{ij}) = \beta(g_j) - \beta(g_i)$ と書ける. U_{ij} 上,
$$\beta(g_{ij} - g_j + g_i) = 0$$
より, $\beta_{ij} - g_j + g_i \in \mathrm{Ker}\ \beta(U_{ij}) = \mathrm{Im}\ \alpha(U_{ij})$ であるから,
$$\alpha(f_{ij}) = g_{ij} - g_j + g_i$$

となる $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ が取れる. このとき,

$$\begin{aligned}\alpha(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) &= \alpha(f_{jk}) - \alpha(f_{ik}) + \alpha(f_{ij}) \\ &= g_{jk} - g_k + g_j - (g_{ik} - g_k + g_i) + g_{ij} - g_j + g_i \\ &= g_{jk} - g_{ik} + g_{ij} = 0\end{aligned}$$

であり, α は単射であったから,

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$$

となり $f := (f_{ij})_{i,j\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ は 1-コサイクルである.

$$\alpha(f) - g = \partial(g_i)_{i\in I}$$

より,

$$\alpha^1([[f]]) = [[\alpha(f)]] = g$$

となり $g \in \mathrm{Im}\ \alpha^1$ が示された.

□

次に, 与えられた層の短完全列 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ に対して, $H^0(X, \mathscr{H})$ と $H^1(X, \mathscr{F})$ の間に連結準同型と呼ばれる準同型を構成し完全列 $0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{G}) \to H^0(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{G}) \to H^1(X, \mathscr{H})$ を構成する:

$h \in H^0(X, \mathscr{H})$ を取る. 各点 $P \in X$ に対し, $\beta_P\colon \mathscr{G}_P \to \mathscr{H}_P$ は全射であったから, $h_P \in \mathscr{H}_P$ に対して,

$$\beta_P(g_P) = h_P$$

となる $g_P \in \mathscr{G}_P$ が取れた. stalk の定義から, 点 P の開近傍 U_P と $g^P \in \mathscr{H}(U_P)$ が存在して,

$$\beta(g^P) = h|U_P$$

となる. $P \in X$ を動かすことにより,

$$\beta(g_i) = h|U_i \tag{1.6}$$

を満たすような X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ ができた. U_{ij} 上,

$$\begin{aligned}\beta(g_i - g_j) &= \beta(g_i) - \beta(g_j) \\ &= h - h = 0\end{aligned}$$

より $g_i - g_j \in \mathrm{Ker}\ \beta(U_{ij}) = \mathrm{Im}\ \alpha(U_{ij})$ であるから,

$$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j|U_{ij} \tag{1.7}$$

を満たす $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ が取れる. よって 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I}$ ができた. これは 1-コサイクルである. 実際, U_{ijk} 上,

$$\alpha(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) = (g_j - g_k) - (g_i - g_k) + (g_i - g_j) = 0$$

であり, α の単射性から $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たす. 従って, $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ である. $f_{\mathcal{U}} = [(f_{ij})_{i,j\in I}] \in H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ で定める. また, $f = \tau_{\mathcal{U}}(f) \in H^1(X, \mathscr{F})$ と定め, $\delta^0(h) = f$ と定める. これは $\mathcal{U}$ の取り方などには依存せずに定まるから, 準同型 $\delta^0\colon H^0(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{F})$ が定まる.

Definition 1.1.31. (連結準同型)

上で構成した準同型 $\delta^0\colon H^0(X, \mathscr{H}) \to H^1(X, \mathscr{F})$ を連結準同型 (connecting homomorphism) という.

Remark 1.1.32.

$\delta^0(h)$ を見るには式 (1.6) を満たすような開被覆 $\mathcal{U}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ を作り, α の単射性から唯一である 1-コサイクル $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ を見ればよい.

Theorem 1.1.33.

X を位相空間, $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ を X 上の層の短完全列とする. このとき, 次は完全列である:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathscr{H})$$

Proof.

$\mathrm{Im}\ \beta^0 = \mathrm{Ker}\ \delta^0$ と $\mathrm{Im}\ \delta^0 = \mathrm{Ker}\ \alpha^1$ を示せば良い.

- $\mathrm{Im}\ \beta^0 = \mathrm{Ker}\ \delta^0$

  $h \in \mathrm{Im}\ \beta^0$ なら, $h = \beta^0(g)$ となる $g \in H^0(X, \mathscr{G}) = \mathscr{G}(X)$ が取れる. X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を取るとき,

  $$h|U_i = \beta(g)|U_i = \beta(g|U_i)$$

  を満たす. $g_i = g|U_i$ とおけば,

  $$h|U_i = \beta(g_i)$$

  である. δ^0 の構成に従い

  $$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j|U_{ij}$$

  となる $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ を取るが,

  $$g_i - g_j = g - g = 0$$

  より, α の単射性から $f_{ij} = 0$ である. 従って, $\delta^0(h) = 0$ となり $h \in \mathrm{Ker}\ \delta^0$ である.

  $h \in \mathrm{Ker}\ \delta^0$ なら, stalk の全射性から式 (1.6) を満たす, すなわち

  $$\beta(g_i) = h|U_i$$

  となる開被覆 $\mathcal{U}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ が取れる. このとき, δ^0 の構成に従うと,

  $$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$$

  となる 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が取れる.

  $$0 = \delta^0(h) = [[(f_{ij})_{i,j\in I}]]$$

  より, 適当に $\mathcal{U}$ の細分を取り直すと, $(f_{ij})_{i,j\in I} \in \partial^{0,\mathcal{U}}$ となる. 即ち, $f_{ij} = f_j - f_i$ となる $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が取れる. このとき, U_{ij} 上,

  $$\alpha(f_j) - \alpha(f_i) = \alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$$

  より,

  $$\alpha(f_j) + g_j = \alpha(f_i) + g_i$$

  であるから, 貼り合わせ条件から $g \in \mathscr{G}(X)$ で,

  $$g|U_i = \alpha(f_i) + g_i$$

  となるものが取れる. $\beta(U_i) \circ \alpha(U_i) = 0$ より,

  $$\beta(g)|U_i = \beta(g|U_i) = \beta(g_i) = h|U_i$$

  であるから, 貼り合わせ条件から $\beta(g) = h$ となる. 従って $h \in \mathrm{Im}\ \beta^0$ となり等号が従う.

- $\mathrm{Im}\ \delta^0 = \mathrm{Ker}\ \alpha^1$

  $f \in \mathrm{Im}\ \delta^0$ とする．このとき，$f = \delta^0(h)$ となる $h \in H^0(X, \mathscr{H})$ が取れる．このとき，δ^0 の構成から，式 (1.6)，(1.7) を満たす X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$，0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$，1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が取れ，$f = [[(f_{ij})_{i,j\in I}]]$ と表示される．このとき，

$$\begin{aligned}\alpha^1(f) &= [[(\alpha(f_{ij}))_{i,j\in I}]] \\ &= [[(g_i - g_j)_{i,j\in I}]] \\ &= [[\partial^{0,\mathcal{U}}(-(g_i)_{i\in I})]] = 0\end{aligned}$$

  であるから，$f \in \mathrm{Ker}\ \alpha^1$ である．

  $f \in \mathrm{Ker}\ \alpha^1$ とする．Remark 1.1.29 より，適当な X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ と 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ によって，

$$(\alpha(f_{ij}))_{i,j\in I} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{U}}$$

  となる．よって $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$ となる 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ が取れる．このとき，U_{ij} 上，$0 = \beta\alpha(f_{ij}) = \beta(g_j) - \beta(g_i)$ より，貼り合わせ条件によって

$$h|U_i = -\beta(g_i)$$

  となる $h \in \mathscr{H}(X) = H^0(X, \mathscr{H})$ が取れる．このとき，h の構成を遡るとこれは $\delta^0(h)$ の構成となっていることから，$\delta^0(h) = [[(f_{ij})_{i,j\in I}]] = f$ を得る．

□

Remark 1.1.34.

X がパラコンパクト多様体であるとき，同様の方法で連結準同型 $\delta^n\colon H^n(X, \mathscr{H}) \to H^{n+1}(X, \mathscr{F})$ が定まり，次の系列は完全列となる:

$$\begin{aligned}&0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathscr{H}) \\ &\xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathscr{H}) \\ &\cdots \\ &\xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(X, \mathscr{H}) \\ &\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^{q+1}} H^{q+1}(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^{q+1}} H^{q+1}(X, \mathscr{H}) \\ &\cdots\end{aligned}$$

層の同型 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を考えてみる．即ち，層の準同型で各切断について，$\varphi(U)\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ が同型写像であるときを考える．開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を与えたとき，Čech 複体に関しては，同型 $\mathscr{F}(U_\iota) \simeq \mathscr{G}(U_\iota)$，$\iota \in I^{q+1}$ によって

$$\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$$

が同型になる．層の準同型は制限と可換になることから，次の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\varphi^q} & C^q(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial^q} & & \downarrow{\scriptstyle \partial^q} \\ C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\varphi^{q+1}} & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \end{array}$$

従って, 次の写像が誘導される:

$$\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon B^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to B^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \tag{1.8}$$
$$\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to Z^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \tag{1.9}$$

これらの群の間に φ^q が同型を与えている. 単射性は元の写像 $\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U},\mathscr{G})$ から得られ, 全射性も diagram chasing により従う. この写像によって, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ の $\mathcal{U}$ に関する Čech コホモロジー群の間の同型写像

$$H(\varphi^q_{\mathcal{U}})\colon H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{U},\mathscr{G})$$

を得る. 次の図式が可換になることから, 順極限の普遍性により同型 $H^q(X,\mathscr{F}) \simeq H^q(X,\mathscr{G})$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \arrow[rr, "\tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "H(\varphi^q_{\mathcal{U}})"] & & H^q(\mathcal{V},\mathscr{G}) \arrow[d, "H(\varphi^q_{\mathcal{V}})"] \\
H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[rr, "\tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}"] \arrow[dr, "\tau_{\mathcal{U}}"] \arrow[ddr, "\tau_{\mathcal{U}}\circ H(\varphi^q_{\mathcal{U}})^{-1}"'] & & H^q(\mathcal{V},\mathscr{F}) \arrow[dl, "\tau_{\mathcal{V}}"'] \arrow[ddl, "\tau_{\mathcal{V}}\circ H(\varphi^q_{\mathcal{V}})^{-1}"] \\
& H^q(X,\mathscr{F}) \arrow[d] & \\
& H^q(X,\mathscr{G}) &
\end{tikzcd}$$

従って, 次が得られる:

Theorem 1.1.35.

層の間の同型 $\mathscr{F} \simeq \mathscr{G}$ が与えられたとき, この同型は Čech コホモロジー群の間の同型 $H^q(X,\mathscr{F}) \simeq H^q(X,\mathscr{G})$ を誘導する.

1.2 1 次 Čech コホモロジーの例

Theorem 1.2.1.

X 上の摩天楼層 (サポートが有限な層) $\mathcal{S}$ について, $H^1(X,\mathcal{S}) = 0$ である.

Proof.

□

Lemma 1.2.2.

$\mathcal{U}$ を局所有限な X の開被覆とする. このとき, $H^1(\mathcal{U},\mathcal{A}^{p,q}_X) = 0$ である. 特に, $H^1(X,\mathcal{A}^{p,q}_X) = 0$.

Proof.

□

Lemma 1.2.3. (ドルボールの補題)

$0 < R \leq \infty$ とする. $\Delta_R \subset \mathbb{C}$ を原点中心で半径 R とする開円板とする. また, $R = \infty$ のとき, $\Delta_R = \mathbb{C}$ とする. このとき, $h \in \mathcal{A}^0_{\Delta_R}(\Delta_R)$ なら, 偏微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = h$$

の解 $g \in \mathcal{A}^0_{\Delta_R}(\Delta_R)$ が存在する.

Corollary 1.2.4.

$H^1(\Delta_R, \mathcal{O}_{\Delta_R}) = 0$ である. 特に, $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = 0$ である.

第 2 章

三大定理

この章では断りの無い限り X は閉 Riemann 面とする.

2.1 今野一宏『リーマン面と代数曲線』における Riemann-Roch の定理

Definition 2.1.1. (算術種数)

X を閉 Riemann 面とする. このとき, $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ は実は有限次元複素ベクトル空間で, その次元 $g(X) = g = h^1(\mathcal{O}_X)$ を算術種数という. これは, 実 2 次元の向き付け可能な閉曲面に対して定まる種数と一致している.

Definition 2.1.2.

X を閉 Riemann 面, U を開集合とするとき, $\mathcal{M}_X(U)$ を U 上の有理型関数全体, $\mathcal{O}_X(U)$ を U 上の正則関数全体の成す $\mathbb{C}$ 代数し, $\Omega_X(U)$ を U 上の正則微分全体の成す $\mathbb{C}$ 代数とする. このとき, 因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ と開集合 U に対し,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_X(D)(U) &:= \{f \in \mathcal{M}(U) \mid \mathrm{div}(f) + D|_U \geq 0\} \\
\mathcal{L}_X(D) &:= \mathcal{O}_X(D)(X) \\
\Omega_X(D)(U) &:= \{\omega \in \Omega_X(U) \mid \mathrm{div}(\omega) + D|_U \geq 0\} \\
\mathfrak{I}_X(D) &:= \Omega_X(-D)(X)
\end{aligned}$$

と定める. これにより $\mathcal{O}_X$ 代数の層 $\mathcal{O}_X(D)$, $\Omega_X(D)$ を定める. また,

$$\begin{aligned}
h^0(\mathcal{O}(D)) &:= \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}(D)) \\
h^1(\mathcal{O}(D)) &:= \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}(D))
\end{aligned}$$

と定める.

層係数コホモロジーを使った Riemann-Roch の定理を今野一宏『リーマン面と代数曲線』で示したものに書き換えていく.

Theorem 2.1.3. (Riemann-Roch の定理)

因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ について次が成立:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \deg D$$

Theorem 2.1.4. (Serre 双対性)

$$H^0(X, \Omega_X^1(-D)) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(D))^*$$

である．特に,

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) = h^0(\Omega_X^1(-D)) = h^1(\mathcal{O}_X(D))$$

である．

$\mathcal{O}_X(K_X - D) \simeq \Omega_X(D)$ であった．また, Serre 双対性

$$h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D))$$

によって, $h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X(D)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{I}_X(D)$ であるから, Riemann-Roch の定理を次のように書き換えることができる:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_X(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{I}_X(D) = 1 - g + \deg D \tag{2.1}$$

逆に, 式 (2.1) から Serre 双対性により theorem 2.1.3 を得るため, 以下では Serre 双対性と消滅定理のみ示していく．

2.2 Serre 双対性

Serre 双対性を示すための準備をしていく．

Definition 2.2.1. (非退化な双線型形式)

V, W を有限次元線形空間とする．このとき, 写像 $\langle *, ** \rangle \colon V \times W \to \mathbb{C}$ が次を満たすとき, $\langle *, ** \rangle$ を双一次形式, 双線型形式という:

1. $\langle *, w \rangle \colon V \to \mathbb{C}$ がすべての $w \in W$ に対して線形写像である．
2. $\langle v, ** \rangle \colon W \to \mathbb{C}$ がすべての $v \in V$ に対して線形写像である．

加えて次の条件を満たすとき, 双線型形式 $\langle *, ** \rangle$ は非退化 (nondegenerate) という:

3. 線形写像 $\iota_V \colon V \to W^*; v \mapsto \langle v, * \rangle$ は単射
4. 線形写像 $\iota_W \colon W \to V^*; w \mapsto \langle *, w \rangle$ は単射

Proposition 2.2.2.

V, W を有限次元線形空間, $\langle *, ** \rangle \colon V \times W \to \mathbb{C}$ を非退化な双線型形式とする．このとき, V と W は自然に互いを双対空間と見なすことができ, 特に $\dim V = \dim W$ である．

Proof.

条件 3, 4 より,

$$\dim V \leq \dim W^*$$
$$\dim W \leq \dim V^*$$

である．$\dim V = \dim V^*$, $\dim W = \dim W^*$ より,

$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq \dim V^*$$

であるから, ι_V, ι_W は同型写像となり主張が従う. $\square$

Proposition 2.2.3.

X を閉 Riemann 面とするとき, 次の系列は完全列となる:

$$0 \to \Omega_X^1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_X^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^{1,1} = \mathcal{A}_X^2 \to 0 \tag{2.2}$$

Proof.

各点 $P \in X$ について,

- ι_P は単射
- $\mathrm{Im}\ \iota_P = \mathrm{Ker}\ d_P$
- d_P は全射

を示せば良い. ι_P の単射性は明らかである. (z, U) を P での座標近傍系とし, U は座標開円板であるとする.

- $\mathrm{Im}\ \iota_P = \mathrm{Ker}\ d_P$
  $\eta \in \mathcal{A}_{X,P}^{1,0}$ は U 上の C^∞ 級関数 f によって, U 上 $\eta = [f(z)dz]$ と表示できる. $\eta \in \mathrm{Ker}\ d_P$ なら,
  $$d_P\eta = \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz\right] = 0$$
  より, ある $P \in V \subset U$ なる開近傍 V 上で
  $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0 \text{ on } V$$
  である. 即ち, V 上 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ であり, これは f が V 上正則であることを意味する. 従って fdz は正則 1 形式であるから, $\eta = [fdz] \in \Omega_{X,P}^1 = \mathrm{Im}\ \iota_P$ となる. これらの主張は同値であるから $\eta \in \mathrm{Ker}\ d_P \iff \eta \in \mathrm{Im}\ \iota_P$ となり主張が従う.
- d_P は全射
  $\eta \in \mathcal{A}_{X,P}^2$ の元は, $g \in C^\infty(U)$ によって,
  $$\eta = [g d\bar{z} \wedge dz]$$
  と表示される. このとき, lemma 1.2.3 より,
  $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$
  となる $f \in C^\infty(U)$ が取れる. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = d(fdz)$ より, $\eta = [d(fdz)] = d_P([fdz]) \in \mathrm{Im}\ d_P$ となる. よって d_P は全射である.

以上により系列 (2.2) は完全列であることが示された. $\square$

次に留数写像を定める.

完全列 (2.2) から誘導される Čech コホモロジー群の完全列

$$H^0(X, \mathcal{A}_X^{1,0}) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{A}_X^2) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \Omega_X^1) \to H^1(X, \mathcal{A}_X^{1,0}) = 0$$

によって δ^0 は全射となることから, $\alpha \in H^1(X, \Omega_X^1)$ を取れば, $\delta^0(\beta) = \alpha$ となる $\beta \in H^0(X, \mathcal{A}_X^2)$ が $dH^0(X, \mathcal{A}_X^{1,0})$ の和の違いを除き一意に定まる. このとき, 留数写像 $\mathrm{res}\colon H^1(X, \Omega_X^1) \to \mathbb{C}$ を,

$$\mathrm{res}(\alpha) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_X \beta$$

と定めるとこれは well-defined である．実際, $\gamma \in H^0(X, \mathcal{A}_X^{1,0})$ を取るとき,

$$\int_X d\gamma = \int_{\partial X} \gamma = 0$$

である．

Remark 2.2.4.

δ^0 の準同型性により, $a, a' \in \mathbb{C}$, $\alpha, \alpha' \in H^1(X, \Omega_X^1)$ について, α, α' の持ち上げを β, β' とするとき, $a\alpha + a'\alpha'$ の持ち上げは $a\beta + a'\beta'$ であるため留数写像は線形写像である．

X 上の因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ について, $\mathcal{O}_X(D)$ と $\Omega_X^1(-D) \simeq \mathcal{O}_X(K_X - D)$ は階数 1 の局所自由層 (可逆層) である．即ち, 各点 $P \in X$ に対して, 開円板 $P \in U_P$ が存在して, $\mathcal{O}_{U_P}$-加群の層として $\mathcal{O}_X(D)|_{U_P}$, $\Omega_X^1(-D)|_{U_P} \simeq \mathcal{O}_{U_P}$ となるものが取れる．こうして得られる開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ は同型 $\Omega_X^1(-D) \simeq \mathcal{O}_X(K_X - D)$ と Corollary 1.2.4 より Leray 被覆である．従って,

$$\tau_{\mathcal{U}} \colon H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$$
$$\tau_{\mathcal{U}} \colon H^1(\mathcal{U}, \Omega_X^1(-D)) \to H^1(X, \Omega_X^1(-D))$$

は同型写像となる．即ち, $\tau_{\mathcal{U}}$ によって $\eta \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(D))$ と $[\eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ を同一視する．$\eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}]$ と代表元表示すれば, この同一視により, $[\eta] = \eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}]$ となる．こうしてカップ積を次のように定める:

$$\cup \colon H^0(X, \Omega_X^1(-D)) \times H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to H^1(X, \Omega_X^1); (\alpha, [(\beta_{ij})_{i,j \in I}]) \mapsto [(\alpha\beta_{ij})_{i,j \in I}]$$

$\Omega_X^1(-D)$ は $\mathcal{O}_X$-加群であるから, $\alpha\beta_{ij} \in \Omega_X^1(-D)(U_{ij})$ となり確かに写像は定まっている．こうして留数写像とカップ積の合成により次の双線形形式を得る:

$$\langle *, ** \rangle = \mathrm{res} \circ \cup \colon H^0(X, \Omega_X^1(-D)) \times H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \mathbb{C}; (\alpha, [(\beta_{ij})_{i,j \in I}]) \mapsto \mathrm{res}([(\alpha\beta_{ij})_{i,j \in I}])$$

Leray 被覆は任意の細分 $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ について $H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \simeq H^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ であったから, 開被覆に依存せず上の写像は定まっている．

Theorem 2.2.5. (Serre 双対性)

上で定めた写像

$$\langle *, ** \rangle = \mathrm{res} \circ \cup \colon H^0(X, \Omega_X^1(-D)) \times H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to \mathbb{C}; (\alpha, [(\beta_{ij})_{i,j \in I}]) \mapsto \mathrm{res}([(\alpha\beta_{ij})_{i,j \in I}])$$

は非退化な双線型形式である．

Proof of theorem 2.1.4.

凄まじく大変そうなので気が向くまで読まないかもしれない． □

2.3 消滅定理

閉 Riemann 面の上の次数の十分大きい因子 D に付随する層 $\mathcal{O}_X(D)$ は消滅する (0 となる) ことを示していく．これらは Riemann-Roch の定理と Serre 双対性から従う．

Theorem 2.3.1. (消滅定理)

X 上の因子 $D, C \in \mathrm{Div}(X)$ について次が成立:

1. $\deg E < 0 \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(E)) = 0$
2. $\deg D \geq 2g-1 (= \deg K_X + 1) \Rightarrow h^1(\mathcal{O}_X(D)) = 0$

Proof.

1. $h^0(\mathcal{O}_X(E)) \neq 0$ なら，$f \in \mathcal{O}_X(E)(X) \setminus \{0\}$ が取れる．このとき，$E' = \mathrm{div}(f) + E \geq 0$ と定めると，$\deg E' = \deg E$ であり，$E' \geq 0$ より $\deg E = \deg E' \geq 0$ である．従って対偶を取ることにより主張が得られる．
2. $\deg K_X = 2g-2$ より，$\deg(K_X - D) < 0$ である．よって $h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X - D)) = 0$ である． □

Corollary 2.3.2.

$\deg D \geq 2g-1 \Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \deg D$

Proof.

消滅定理と Riemann-Roch の定理より明らかである． □

第 3 章

正則ベクトル束

3.1 正則ベクトル束

ここでは X は断りが無い限り (コンパクトとは限らない)Riemann 面とする．

Definition 3.1.1. (正則ベクトル束, C^∞-ベクトル束)

L を位相空間, $\pi\colon L \to X$ を連続写像とし, 各点 $p \in X$ に対して, 図式

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_p) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr] & & \mathbb{C}^r \times U_p \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

を可換にするような点 p の開近傍 U_p と同相写像 $\tau_i\colon \pi^{-1}(U_p) \to \mathbb{C}^r \times U_p$ が定まっているとする．このとき, 次の条件を満たすような連続写像 $\pi\colon L \to X$ と同相写像の族 $\{\tau_p\}$ の組 $(\pi,\ \{\tau_p\}_{p\in X})$, または単に L を正則ベクトル束という:

$U_p \cap U_q \neq \varnothing$ なら, 同相写像 $\tau_i \circ \tau_j^{-1}\colon \mathbb{C}^r \times (U_p \cap U_q) \to \mathbb{C}^r \times (U_p \cap U_q)$ は, ある $n \times n$ 行列 $g \in \mathrm{GL}(n; \mathcal{O}_X(U_p \cap U_q))$ によって, $\tau_i \circ \tau_j^{-1}(l, z) = (g(z)l, z)$ $((l, z) \in \mathbb{C}^r \times (U_p \cap U_q))$ と表される．

このとき, 族 $\{\tau_p\}_{p\in L}$ を正則ベクトル束 L の正則構造 (a holomorphic strucure on the holomorphic vector bundle L) といい, r をその階数という．また, 正則構造 $\{\tau_p\}_{p\in L}$ を L の局所自明化 (local trivialization of L) という．

Remark 3.1.2.

各点 $p \in X$ に対して正則ベクトル束の条件を満たすような開近傍 U_p が取れる．p を動かすことにより X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ が作れる．従って, 定義を開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ について, 各 $i \in I$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr] & & \mathbb{C}^r \times U_i \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

を可換にし, $U_{ij} \neq \varnothing$ なら, 同相写像 $\tau_i \circ \tau_j^{-1}\colon \mathbb{C}^r \times U_{ij} \to \mathbb{C}^r \times U_{ij}$ は, ある $n \times n$ 行列 $g \in \mathrm{GL}(n; \mathcal{O}_X(U_{ij}))$ によって, $\tau_i \circ \tau_j^{-1}(l, z) = (g(z)l, z)$ $((l, z) \in \mathbb{C}^r \times U_{ij})$ と表されることを正則ベクトル束の定義としてもよい．そのと

きは, 正則ベクトル束の正則構造は $\{\tau_i\}_{i\in I}$ で与えられる.

Definition 3.1.3.

L, L' を階数 r の正則ベクトル束とする. 開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ によって L と L' の正則構造をそれぞれ $\{\tau_i\}_{i\in I}$ と $\{\tau_i'\}_{i\in I}$ で与える. このとき, 正則構造 $\{\tau_i\}_{i\in I}$ と $\{\tau_i'\}_{i\in I}$ が同値であるとは, ある同相写像 $\varphi\colon L \to L'$ が存在して, φ から誘導される同相写像 $\varphi_{U_i}\colon \pi^{-1}(U_i) \to (\pi')^{-1}(U_i)$ によって得られる同相写像 $\tau_i' \circ \varphi_{U_i} \circ \tau_i^{-1}\colon \mathbb{C}^r \times U_i \to \mathbb{C}^r \times U_i$ が, 正則関数 $g_i \in \mathrm{GL}(r; \mathcal{O}(U_i))$ によって

$$(\tau_i' \circ \varphi_{U_i} \circ \tau_i^{-1})(l, z) = (g_i(z)l, z)$$

と表されるときをいう.

Remark 3.1.4.

$L = L'$ であるとき, 同値な正則構造を $\{\tau_i\}_{i\in I}$, $\{\tau_i'\}_{i\in I}$ を与えると, 同相写像 φ は恒等写像 id_L で与えられ,

$$\begin{aligned}\tau_j' \circ \tau_i(l, z) &= (\tau_j' \circ (\tau_i')^{-1}) \circ (\tau_i' \circ \tau_i)(z, l)\\ &= (\tau_j' \circ (\tau_i')^{-1})(g_i(z)l, z)\\ &= (g_{ij}(z)g_i(z)l, z)\end{aligned}$$

となる. これは $\{\tau_i\}_{i\in I} \cup \{\tau_i'\}_{i\in I}$ が再び正則構造であることを意味している. 従って, 一般に正則構造が同型であるとは, 同相写像 $\varphi\colon L \to L'$ によって L と L を同一視したとき, $\{\tau_i\}_{i\in I} \cup \{\tau_i'\}_{i\in I}$ が再び $L \simeq L'$ の正則構造であることを意味している.

Remark 3.1.5.

正則ベクトル束 L について開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ に対して正則構造 $\{\tau_i\}_{i\in I}$ を与えたとき, 任意の細分 $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J} > \mathcal{U}$ に対して自然に正則構造が定まる. V_j に対して, $V_j \subset U_i$ なる U_i を取り, $\tau_j'\colon \pi^{-1}(V_j) \to \mathbb{C}^r \times V_j$ を, 同相写像 $\tau_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{C}^r \times U_i$ の制限と思えば良い. $\tau_s' \circ \tau_t'(l, z) = (g_{st}(z)l, z)$ となる $g_{st} \in \mathrm{GL}(r; \mathcal{O}_X(V_{st}))$ は, $V_s \subset U_i$, $V_t \subset U_j$ となる U_i, U_j によって U_{ij} 上 $\tau_i \circ \tau_j^{-1}(l, z) = (g(z)l, z)$ となる $g \in \mathrm{GL}(r; \mathcal{O}_X(U_{ij}))$ の各要素を V_{st} に制限したものとして与えられる.

Definition 3.1.6.

$\pi\colon L \to X$, $\pi'\colon L' \to X$ を正則ベクトル束とし, X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ によって, L, L' の正則構造をそれぞれ $\{\tau_i\}_{i\in I}$, $\{\tau_j'\}_{j\in J}$ で与えるとする. このとき, 正則ベクトル束 L, L' がベクトル束として同型であるとは, ある $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ の細分 $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k\in K}$ によって与えられる L と L' 上の正則構造 $\{\tau_k''\}_{k\in K}$ が存在して, $\{\tau_i\}_{i\in I}$ と $\{\tau_k''\}_{k\in K}$, $\{\tau_j'\}_{j\in J}$ と $\{\tau_k''\}_{k\in K}$ がそれぞれ同値な正則構造であるときと定める.

Remark 3.1.7.

当然, 正則ベクトル束 $\pi\colon L \to X$ の上の正則構造 $\{\tau_i\}_{i\in I}, \{\tau'_j\}_{j\in J}$ を 2 つ与えたときこれらは同値となる.

Definition 3.1.8. (正則切断)

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を開被覆, $(\pi\colon L \to X, \{\tau_i\}_{i\in I})$ を階数 r の正則ベクトル束とし, 開集合 $U \subset X$ 上の写像 $s\colon U \to \pi^{-1}(U)$ を連続写像とする. このとき, s が L に値を持つ U 上の正則切断であるとは次を満たすときである:

1. $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$
2. ある $l \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)^r$ によって, 制限の合成写像

$$U \cap U_i \xrightarrow{s|U\cap U_i} \pi^{-1}(U \cap U_i) \xrightarrow{\tau_i|\pi^{-1}(U\cap U_i)} \mathbb{C}^r \times (U \cap U_i)$$

が $z \mapsto (l(z), z)$ で与えられる.

L に値を持つ U 上の正則切断全体の集合を $\mathcal{O}_X(L)(D)$ と表す.