

層係数コホモロジーの理論

@Big_ToiletPaper

2022 年 8 月 9 日

これは小木曾啓示『代数曲線論』の5章を読み勉強した内容をノートにしたものである。

Definition 1.

X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を開被覆とする. このとき, $\iota = (i_0, i_1, \dots, i_q) \in I^{q+1}$ に対して,

$$U_\iota = U_{i_0 i_1 \dots i_q} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$$

と定める.

Definition 2. (q -コチェイン群)

上の状況に加え \mathcal{F} を X 上の層とする. このとき, $q \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{\iota \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_\iota)$$

を層 \mathcal{F} の開被覆 \mathcal{U} に関する Čech q -コチェイン群という (the Čech q -cochain group of the sheaf \mathcal{F} with respect to the open covering \mathcal{U}). また, Čech q -コチェイン群の元を Čech q -コチェインという. コチェイン群には \mathcal{F} と同じ代数構造が入る.

Exempli gratia 3. (0, 1, 2-コチェイン群の元)

1. 0-コチェイン群は

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$$

であるから, 0-コチェインは $(f_i)_{i \in I}$, $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ で与えられる.

2. 1-コチェイン群は

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_{ij})$$

であるから, 1-コチェインは $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ 達によって $(f_{ij})_{(i, j) \in I^2}$ という形をしている.

3. 2-コチェインは $f_{ijk} \in \mathcal{F}(U_{ijk})$ によって $(f_{ijk})_{(i, j, k) \in I^3}$ と表される.

0-コチェイン $(f_i)_{i \in I}$ が貼り合わさり大域的な元 $f \in \mathcal{F}(X)$ を定めるためには, 各開集合 U_i , U_j に関して $f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$ が成立すればよい. これは $f_{ij} := f_j|_{U_{ij}} - f_i|_{U_{ij}}$ が 0 になることを意味し, $(f_i)_{i \in I}$ が線形写像 $\partial^0: C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}); (f_i)_{i \in I} \mapsto (f_{ij})_{(i, j) \in I^2}$ の核に入ることを意味する.

Definition 4. (境界作用素)

コチェイン群の間の準同型 $\partial^q: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を $f = (f_\iota)_{\iota \in I^{q+1}}$ に対して次のように定める:

$$\partial^q f := \left(\sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{q+1}} |_{U_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}}} \right)_{(i_0 i_1 \dots i_{q+1}) \in I^{q+2}}$$

$f_{i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{q+1}}$ は $\mathcal{F}(U_{i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{q+1}})$ の元であり, それを $U_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}}$ に制限したものとなる.

Proposition 5.

$\partial^{q+1} \circ \partial^q = 0$. 即ち $\text{Im}(\partial^q) \subset \text{Ker}(\partial^{q+1})$ である.

Proof.

各 $\iota = (i_0, i_1, \dots, i_{q+1}) \in I^{q+2}$ に対して, $\partial \circ \partial$ によって写ったものは, ι から異なる 2 つの添字 i_j, i_k を抜いたものになる. この操作の順番により符号が入れ替わるため和を取ると 0 となる. \square

従ってコチェイン群と境界作用素によって複体 $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d^\bullet)$ を得る.

Definition 6. (q -コサイクル, q -コバウンダリー, q 次 Čech コホモロジー) —

1. $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Ker } \partial^q$ とおき, $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の元を \mathcal{F} の \mathcal{U} に関する Čech q -コサイクル (Čech q -cocycle) という.
2. $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Im } \partial^{q-1}$ とおき, $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の元を \mathcal{F} の \mathcal{U} に関する Čech q -コバウンダリー (Čech q -boundary) という.
3. 商空間 $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を \mathcal{F} の \mathcal{U} に関する q 次 Čech コホモロジー群 (q -th Čech cohomology group) という.

Exempli gratia 7. (コサイクルの例)

1. 0-コサイクルは各 $U_i \cap U_j$ 上 $f_i = f_j$ が成立するようなものから成る.
2. 1-コサイクルは $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ によって, $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たすものから成る. このことから $f_{ii} = 0$, $f_{ij} = -f_{ji}$ が従う.

Remark 8.

$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の元は, $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の元, つまり $(f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ で $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たすようなもので代表される.

Definition 9. (細分) —

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ を X の開被覆とする. このとき, 開被覆 \mathcal{V} が開被覆 \mathcal{U} の細分である (\mathcal{V} is a refinement of \mathcal{U}) とは, 各 $j \in J$ について, $V_j \subset U_{\pi(j)}$ となるような写像 $\pi: J \rightarrow I$ が存在することと定める. このような写像 π のことを細分写像 (refinement mapping) といい, \mathcal{V} が \mathcal{U} の細分であるとき $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ と表す.

Remark 10.

細分写像は $V_j \subset U_i$ なる U_i の取り方に依るから一般に一意ではないが, 細分写像から誘導される複体の射はホモトピックであるためホモロジー群の間の写像は一意に定まる.

Definition 11. —

$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ とし, π を細分写像とする. このとき, 複体の間の写像 $\pi^*: C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ を次のように定める: 準同型 $\pi^{*,q}: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ を $f = (f_{i_0 i_1 \dots i_q})$ に対し,

$$\pi^{*,q} f = (f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\dots\pi(j_q)} | V_{j_0 j_1 \dots j_q})_{(j_0, j_1, \dots, j_q) \in J^{q+1}}$$

と定める. $V_{j_0 j_1 \dots j_q} \subset U_{\pi(j_0)\pi(j_1)\dots\pi(j_q)}$ となるため $V_{j_0 j_1 \dots j_q}$ に制限ができる.

Remark 12.

$\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in K} > \mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J} > \mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ とするとき, 細分写像 $\sigma: K \rightarrow J$, $\tau: J \rightarrow I$ について $\sigma \circ \tau$ もまた細分写像であり, 定義から明らかに

$$(\sigma \circ \tau)^{*,q} = \sigma^{*,q} \circ \tau^{*,q}$$

が従う.

Proposition 13.

$\pi^*: C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ は複体の射である。即ち、各 $q \in \mathbb{Z}$ に対して次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\partial^{q,\mathcal{U}}} & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \pi^{*,q} \downarrow & & \downarrow \pi^{*,q+1} \\ C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\partial^{q,\mathcal{V}}} & C^{q+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{array}$$

Proof.

$f = (f_{i_0 i_1 \dots i_q}) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ とする。

$$\begin{aligned} & \partial^{q,\mathcal{V}} \circ \pi^{*,q}(f) \\ &= \partial^{q,\mathcal{V}} \left((f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\dots\pi(j_q)} | V_{j_0 j_1 \dots j_q})_{(j_0, j_1, \dots, j_q) \in J^{q+1}} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\dots\pi(j_{k-1})\pi(j_{k+1})\dots\pi(j_{q+1})} | V_{j_0 j_1 \dots j_{q+1}} \right)_{(j_0, j_1, \dots, j_{q+1}) \in J^{q+2}} \end{aligned}$$

であり、一方

$$\begin{aligned} & \pi^{*,q+1} \circ \partial^{q,\mathcal{U}}(f) \\ &= \pi^{*,q+1} \left(\left(\sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{q+1}} | U_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}} \right)_{(i_0 i_1 \dots i_{q+1}) \in I^{q+2}} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\dots\pi(j_{k-1})\pi(j_{k+1})\dots\pi(j_{q+1})} | V_{j_0 j_1 \dots j_{q+1}} \right)_{(j_0, j_1, \dots, j_{q+1}) \in I^{q+2}} \end{aligned}$$

であるから図式を可換にする。 □

よって次が従う。

Proposition 14.

$\pi^{*,q}$ はコサイクルをコサイクルに、コバウンダリーをコバウンダリーに写す。つまり、次のような準同型が得られる。

$$\begin{aligned} \pi^{*,q}: Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ \pi^{*,q}: B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow B^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

これによりコホモロジー群の間に準同型が得られた。

Definition 15.

$$H(\pi^{*,q}): H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}); [a] \mapsto [\pi^{*,q}(a)], a \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

次に細分写像がホモトピックであることを示す。

Proposition 16.

π, ρ を細分写像とする。このとき、 π^* と ρ^* はホモトピックである。即ち、各 $q \in \mathbb{Z}$ に対して準同型 $k^q: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ が存在して

$$\pi^{*,q} - \rho^{*,q} = \partial^{q-1,\mathcal{V}} \circ k^q + k^{q+1} \circ \partial^{q,\mathcal{U}}$$

を満たす。

Proof.

面倒臭かった □

$f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ に対して,

$$\begin{aligned}\pi^{*,q}(f) - \rho^{*,q}(f) &= \partial^{q-1,\mathcal{V}} \circ k^q(f) + k^{q+1} \circ \partial^{q,\mathcal{U}}(f) \\ &= \partial^{q-1,\mathcal{V}}(k^q(f)) \in B^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})\end{aligned}$$

より, $H(\pi^{*,q})([f]) = H(\rho^{*,q})([f])$ である. 従って細分写像は Čech コホモロジー群の間に一意的な準同型を定める.

Definition 17.

$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ の細分写像によって一意的に定まるホモロジー群の間の射を

$$\tau_{\mathcal{U}}^{q,\mathcal{V}}: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

で表す. 即ち複体 $H^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ から $H^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ への射

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}: H^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

を得る.

Proposition 18.

任意の細分 $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k \in K} > \mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J} > \mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ に対して次が成り立つ:

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \circ \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \quad (1)$$

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \text{id}_{\mathcal{U}} \quad (2)$$

Proof.

細分写像 $\sigma: K \rightarrow J, \tau: J \rightarrow I$ を取る. このとき, $\tau \circ \sigma: K \rightarrow I$ もまた細分写像であるから remark 12 より, 各 $q \in \mathbb{Z}$ と $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ について, $H((\tau \circ \sigma)^{*,q})([f]) = [(\tau \circ \sigma)^{*,q}(f)] = H(\tau^{*,q})([\sigma^{*,q}(f)]) = H(\tau^{*,q}) \circ H(\sigma^{*,q})([f])$ となる. 従って式 (1) を得る. また, 恒等写像 $\text{id}_I: I \rightarrow I$ によって $\mathcal{U} > \mathcal{U}$ であるから式 (2) も従う. □

従って開被覆で添字付けることにより構成される順系 $(H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})$ を得る. これにより得られる順極限を $H^q(X, \mathcal{F})$ とする. 具体的には次のように構成される:

Definition 19. (Čech コホモロジー群)

$\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 上の関係 \sim を次のように定める: 各 $a, b \in \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ に対して, 唯一の開被覆 \mathcal{U}, \mathcal{V} で $a \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), b \in H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ となるものが存在した. このとき,

$$(a, \mathcal{U}) \sim (b, \mathcal{V}) \iff \exists \mathcal{W}: \text{refinement of } \mathcal{U} \text{ and } \mathcal{V} \text{ s.t. } \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(a) = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(b)$$

この関係は明らかに反射律と対称律を満たす. また, 開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}, \{V_j\}_{j \in J}$ に対して, $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ もまた開被覆になることから関係 \sim は同値関係となる. この同値関係によって得られる商群

$$H^q(X, \mathcal{F}) := \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \sim$$

を層 \mathcal{F} の q 次 Čech コホモロジー群という (the q -th Čech cohomology group of the sheaf \mathcal{F}).

Proposition 20.

$\alpha, \beta \in H^q(X, \mathcal{F})$ とする. このとき, ある開被覆 \mathcal{U} が存在して, $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ によって $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ と表示できる.

Proof.

$c \in H^q(\mathcal{U}_1, \mathcal{F})$, $d \in H^q(\mathcal{U}_2, \mathcal{F})$ によって $\alpha = [c]$, $\beta = [d]$ と代表元表示する. このとき, $\mathcal{U}_k = \{U_{k,i}\}_{i \in I_k}$ とし, $\mathcal{U} = \{U_{1i} \cap U_{2j}\}_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ とすればこれは $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ の細分になっている. 従って $a = \tau_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{U}}(c)$, $b = \tau_{\mathcal{U}_2}^{\mathcal{U}}(d)$ とすれば $[a] = [c]$, $[b] = [d]$ であり, $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ となっている. \square

Definition 21.

$\alpha, \beta \in H^q(X, \mathcal{F})$ とし, $k, l \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $\alpha = [a], \beta = [b]$ となる $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が上の命題から取れた. この表示によって

$$k\alpha + l\beta := [ka + lb] \in H^q(X, \mathcal{F})$$

と定める.

Remark 22.

$k\alpha + l\beta$ は $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ が準同型 (線形写像) であるため代表元表示に依らない.

Remark 23.

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ の定義から次が成立する:

1. 自然な射影 $\tau_{\mathcal{U}}^q: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{F}); a \mapsto [a]$ は準同型である.
2. すべての細分 $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ について, $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{V}} \circ \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ が成立.
3. $\tau_{\{X\}}^0$ は次の図式を可換にし, $\mathcal{F}(X) \simeq H^0(\{X\}, \mathcal{F})$ と $H^0(X, \mathcal{F})$ の間に同型を与える:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},0}} & & H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\
 & \searrow \tau_{\mathcal{U}}^{\{X\},0} & & \swarrow \tau_{\mathcal{V}}^{\{X\},0} & \\
 & & H^0(\{X\}, \mathcal{F}) & & \\
 & \searrow \tau_{\mathcal{U}}^0 & \downarrow \tau_{\{X\}} & \swarrow \tau_{\mathcal{V}}^0 & \\
 & & H^0(X, \mathcal{F}) & &
 \end{array}$$

この対応で $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ と $H^0(X, \mathcal{F})$ を同一視する.

次では 1 次 Čech コホモロジー群の性質を述べていく.

Proposition 24.

X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ を X の開被覆とする. このとき, 準同型 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}$, $\tau_{\mathcal{U}}^1$ は単射である.

Proof.

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(\eta) = 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})/B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ とする. $\eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}]$, $f_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ とし, $\pi: J \rightarrow I$ を細

分写像とする。このとき,

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(\eta) &= [\pi((f_{ij})_{i,j \in I})] \\ &= [(f_{\pi(k)\pi(l)}|V_{kl})_{k,l \in J}]\end{aligned}$$

である。 $g_{kl} = f_{\pi(k)\pi(l)}|V_{kl}$ とおく。このとき、仮定より $(g_{kl})_{k,l \in J} \in B^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ であるから、 $(g_k)_{k \in J} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ で、 $(g_{kl})_{k,l \in J} = \partial^0((g_k)_{k \in J}) = (g_l - g_k|V_{kl})_{k,l \in J}$ となるものが存在する。各 $i \in I$ について、 $U_i \cap V_{kl} = (U_i \cap V_k) \cap (U_i \cap V_l)$ 上、

$$\begin{aligned}g_l - f_{i\pi(l)} &= f_{\pi(k)\pi(l)} + g_k - f_{i\pi(l)} \\ &= g_k + f_{i\pi(l)} + f_{\pi(k)i} - f_{i\pi(l)} \\ &= g_k + f_{\pi(k)i} = g_k - f_{i\pi(k)}\end{aligned}$$

であるから、 $\{U_i \cap V_k\}_{k \in J}$ を U_i の開被覆だと思つと、貼り合わせ条件から $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ で $h_i|U_i \cap V_k = g_k - f_{i\pi(k)}$ となるものが取れる。また、各 $k \in J$ について、 $U_i \cap U_j \cap V_k = (U_i \cap V_k) \cap (U_j \cap V_k)$ 上、

$$\begin{aligned}h_j - h_i|U_{ij} \cap V_k &= g_k - f_{j\pi(k)} - (g_k - f_{i\pi(k)}) \\ &= f_{i\pi(k)} - f_{j\pi(k)} = f_{ij}\end{aligned}$$

であるから、 $\{U_i \cap U_j \cap V_k\}_{k \in J}$ を $U_i \cap U_j$ の開被覆だと思つと、貼り合わせ条件から $U_i \cap U_j$ 上 $h_i - h_j = f_{ij}$ が成立する。これは $(f_{ij})_{i,j \in I} = \partial^0((h_i)_{i \in I}) \in B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を意味する。従つて、 $\eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}] = 0$ であるから $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射である。

$\tau_{\mathcal{U}}$ が単射であることは上から従う。実際、 $\tau_{\mathcal{U}}(\eta) = 0$ なら、Čech コホモロジー群の定義から、ある \mathcal{U} の細分 \mathcal{V} が存在して、 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(\eta) = 0$ となる。 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射であるから $\eta = 0$ となり $\tau_{\mathcal{U}}$ が単射であることが従う。 \square

Definition 25. (Leray 被覆)

位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ が

$$H^1(U_i, \mathcal{F}|U_i) = 0 \quad \text{as the 1-st Čech cohomology group of the sheaf } \mathcal{F} \text{ on the topological space } U_i \text{ for } \forall i \in I$$

を満たすとき、 \mathcal{U} を Leray 被覆という。

Proposition 26.

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ が Leray 被覆であるとき、 $\tau_{\mathcal{U}}: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ は同型写像である。

Proof.

任意の \mathcal{U} の細分 $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$ について、 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ が同相写像であれば良い。実際、任意に $\eta \in H^1(X, \mathcal{F})$ を取るとき、ある開被覆 \mathcal{W} と $a \in H^1(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ によって $\eta = [a]$ と表示される。 \mathcal{U}' を \mathcal{U} と \mathcal{W} の細分とすると、 $[a] = [\tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}',1}(a)]$ であり、 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $H^1(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ は同型であったから、 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}',1}(c) = \tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}',1}(a)$ となる $c \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が存在する。 $[a] = [c]$ であるから、 $\tau_{\mathcal{U}}^1(c) = \eta$ となるものが取れた。従つて $\tau_{\mathcal{U}}^1$ は全射であり、 Proposition 24 より全単射である。よつて $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は $H^1(X, \mathcal{F})$ と同型であることが得られる。

Proposition 24 より $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射であったから全射であることを示せば良い。任意に $f = (f_{kl})_{k,l \in K}$ を取る。 $\mathcal{V}_i := \{U_i \cap V_k\}_{k \in K} (> \{U_i\})$ とするとき、 $f \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ より制限することにより $(f_{kl}|U_i \cap V_k \cap V_l)_{k,l \in K} \in Z^1(\mathcal{V}_i, \mathcal{F}|U_i)$ を得る。 $\tau_{\mathcal{V}_i}^1: H^1(\mathcal{V}_i, \mathcal{F}|U_i) \rightarrow H^1(U_i, \mathcal{F}|U_i) = 0$ であり、 $\tau_{\mathcal{V}_i}^1$ が単射であったことから $H^1(\mathcal{V}_i, \mathcal{F}|U_i) = 0$ である。よつて $(f_{kl}|U_i \cap V_k \cap V_l)_{k,l \in K} \in B^1(\mathcal{V}_i, \mathcal{F}|U_i)$ であるから、 $(g_k(i))_{k \in K} \in C^0(\mathcal{V}_i, \mathcal{F}|U_i)$ で、

$$(f_{kl}|U_i \cap V_k \cap V_l)_{k,l \in K} = \partial^0((g_k(i))_{k \in K}) = (g_l(i) - g_k(i)|U_i \cap V_l \cap V_k)_{k,l \in K}$$

となるものが取れる. $U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$ 上,

$$g_l(i) - g_k(i) = g_l(j) - g_k(j) = f_{kl}|_{U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l}$$

であるから, $U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$ 上,

$$-(g_l(j) - g_l(i)) = -(g_k(j) - g_k(i))$$

を得る. $k, l \in K$ を動かすことにより, 貼り合わせ条件から $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ で, $F_{ij}|_{V_k} = -(g_k(j) - g_k(i))$ を満たすものが取れる. よって $F := (F_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を得る. これが 1-コサイクルであることを見る. $U_i \cap U_j \cap U_h \cap V_k$ 上,

$$F_{ih} + F_{hj} = -(g_k(h) - g_k(i)) - (g_k(j) - g_k(h)) = -(g_k(j) - g_k(i)) = F_{ij}$$

より, V_k を動かすことにより $F_{ij} = F_{ih} + F_{hj} \iff F_{ih} - F_{ij} + F_{hj} = 0$ を満たすから, これは 1-コサイクルである. よって $F \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ である. $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(F) = f$ を示す. $V_k \cap V_l \subset U_{\pi(k)} \cap U_{\pi(l)}$ 上,

$$f_{kl} - F_{\pi(k)\pi(l)} = g_l(\pi(k)) - g_k(\pi(k)) - (g_l(\pi(l)) - g_k(\pi(l))) = g_l(\pi(l)) - g_k(\pi(k)) \quad (3)$$

である. $U_{\pi(k)} \cap V_k = V_k$ であるから $(g_k(\pi(k)))_{k \in K} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ であり, 等式 (3) より,

$$f - F = (g_l(\pi(k)) - g_l(\pi(l)))_{k,l \in K} = \partial(g_k(\pi(k)))_{k \in K} \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

を得る. 従って, $f - \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(F) = 0$ となり $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}$ は全射である. □

層の準同型 $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は Čech 複体の間の準同型 $\alpha^\bullet: H^\bullet(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{G})$ を誘導することを示していく.

Proposition 27. —

$\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を層の間の準同型とし, \mathcal{U} を開被覆とする. このとき,

$$\alpha_{\mathcal{U}}^q: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, \mathcal{G}); [(f_{i_0 \dots i_q})] \mapsto [\alpha(f_{i_0 \dots i_q})]$$

が well-defined に定まる.

Proof.

$\alpha_{\mathcal{U}}^q: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ を $\alpha^q(f_{i_0 \dots i_q}) = (\alpha(f_{i_0 \dots i_q}))$ と定める. このとき, 次の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\partial^q} & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \alpha_{\mathcal{U}}^q \downarrow & & \downarrow \alpha_{\mathcal{U}}^{q+1} \\ C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial^q} & C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \end{array}$$

従って, $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ なら,

$$\begin{aligned} \partial^q(\alpha_{\mathcal{U}}^q(f)) &= \alpha_{\mathcal{U}}^{q+1}(\partial^q(f)) \\ &= \alpha_{\mathcal{U}}^{q+1}(0) = 0 \end{aligned}$$

より

$$\alpha_{\mathcal{U}}^q(Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

を得る. 同様に,

$$\alpha_{\mathcal{U}}^q(B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

を得る. 従って次の写像が誘導される:

$$H(\alpha_{\mathcal{U}}^q): H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}); [(f_{i_0 \dots i_q})] \mapsto [(\alpha(f_{i_0 \dots i_q}))]$$

次に, 写像

$$\alpha^q: H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{G}); [[(f_{i_0 \dots i_q})]] \mapsto [[(\alpha(f_{i_0 \dots i_q}))]]$$

が well-defined であることを示す. \mathcal{V} を \mathcal{U} の細分とする. このとき次の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}, q}} & H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ H(\alpha_{\mathcal{U}}^q) \downarrow & & \downarrow H(\alpha_{\mathcal{V}}^q) \\ H^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}, q}} & H^q(\mathcal{V}, \mathcal{G}) \end{array}$$

このことより α^q が well-defined であることが従う. $\eta_1 = \eta_2 \in H^q(X, \mathcal{F})$ なら, $f_i = (f_{i_0 \dots i_q}^i) \in H^q(\mathcal{U}_i, \mathcal{F})$, $\eta_i = [f_i]$ ($i = 1, 2$) で, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ の細分 \mathcal{W} が存在して $\tau_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{W}, q}(f_1) = \tau_{\mathcal{U}_2}^{\mathcal{W}, q}(f_2)$ が成立する. よって,

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{W}, q}(H(\alpha_{\mathcal{U}_1}^q)(f_1)) &= H(\alpha_{\mathcal{W}}^q)(\tau_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{W}, q}(f_1)) \\ &= H(\alpha_{\mathcal{W}}^q)(\tau_{\mathcal{U}_2}^{\mathcal{W}, q}(f_2)) \\ &= \tau_{\mathcal{U}_2}^{\mathcal{W}, q}(H(\alpha_{\mathcal{U}_2}^q)(f_2)) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \alpha^q(\eta_1) &= [[(\alpha(f_{i_0 \dots i_q}^1))]] = [H(\alpha_{\mathcal{U}_1}^q)(f_1)] \\ &= [H(\alpha_{\mathcal{U}_2}^q)(f_2)] \\ &= [[(\alpha(f_{i_0 \dots i_q}^2))]] = \alpha^q(\eta_2) \end{aligned}$$

が成立. 従って α^q は well-defined であるから準同型

$$\alpha^\bullet: H^\bullet(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{G})$$

を得る. □

Definition 28.

上で得られるような準同型を層の準同型写像 α が誘導するコホモロジー群の準同型写像という.

Remark 29.

適当に開被覆 \mathcal{U} を取り, $\eta = [f] = [(f_{i_0 \dots i_q})]$, $(f_{i_0 \dots i_q}) \in H(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と代表元表示するとき,

$$\begin{aligned} \alpha^q(\eta) &= [H(\alpha_{\mathcal{U}}^q)((f_{i_0 \dots i_q})_{i_0, \dots, i_q \in I})] \\ &= [[\alpha_{\mathcal{U}}^q(f_{i_0 \dots i_q})_{i_0, \dots, i_q \in I}]] \\ &= [[(\alpha(f_{i_0 \dots i_q}))_{i_0, \dots, i_q \in I}]] \end{aligned}$$

である. $q = 1$ とする. $\alpha^1(\eta) = 0$ であるとは, ある \mathcal{U} の細分 \mathcal{V} が存在して, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(H(\alpha_{\mathcal{U}}^1)(f)) = 0$ であることと同値であり, $\pi: K \rightarrow I$ を細分写像とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(H(\alpha_{\mathcal{U}}^1)(f)) \\ &= [(\alpha(f_{\pi(k)\pi(l)|V_k \cap V_l})_{k, l \in K})] \end{aligned}$$

より, $\alpha^1(\eta) = 0$ であることと, $(\alpha(f_{\pi(k)\pi(l)}|_{V_k \cap V_l}))_{k,l \in K} \in \text{Im } \partial^{0,\mathcal{V}}$ であることは同値である. 即ち, 開被覆を適当な開被覆 \mathcal{W} に取り替えることにより, $\eta = [g] = [[(g_{s,t})_{s,t \in J}]]$ と表示するとき,

$$\alpha^1(\eta) = 0 \iff (\alpha(g_{s,t}))_{s,t \in J} \in \text{Im } \partial^{0,\mathcal{W}}$$

となる. 一般の次数においても同様の議論ができる.

Proposition 30.

層の短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

が与えられたとき, 次の完全系列が誘導される:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \quad (4)$$

$$H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H}) \quad (5)$$

Proof.

(4) は, 同型 $\mathcal{F}(X) \simeq H^0(X, \mathcal{F})$ から従うから, (5) のみ示せばよい.

- $\text{Im } \alpha^1 \subset \text{Ker } \beta^1$ を示す.

$\eta \in \text{Im } \alpha^1$ なら, 開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ と $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ によって

$$\eta = \alpha^1([(f_{ij})_{i,j \in I}]) = [(\alpha(f_{ij}))_{i,j \in I}]$$

と表示することができる. このとき, $\beta(U_{ij}) \circ \alpha(U_{ij}) = 0$ より,

$$\begin{aligned} \beta^1(\eta) &= (\beta^1 \circ \alpha^1)([(f_{ij})_{i,j \in I}]) \\ &= [(\beta \circ \alpha)(f_{ij})_{i,j \in I}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. 従って $\eta \in \text{Ker } \beta^1$ である.

- $\text{Im } \alpha^1 \supset \text{Ker } \beta^1$ を示す.

$g \in \text{Ker } \beta^1$ なら, 開被覆 \mathcal{U} を取り, $(g_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(X, \mathcal{G})$ によって

$$g = [(g_{ij})_{i,j \in I}]$$

と表示する. このとき, Remark 29 より, $\beta(g) = 0$ であるから

$$(\beta(g_{ij}))_{i,j \in I} \in \text{Im } \partial^{0,\mathcal{U}} = B^1(\mathcal{U}, \mathcal{H})$$

を仮定してよい. よって $(h_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ で

$$(\beta(g_{ij}))_{i,j \in I} = \partial(h_i)_{i \in I} = (h_j - h_i)_{i,j \in I}$$

となるものが取れる. 各 $P \in X$ に対して, $i(P) \in I$ を, $P \in U_{i(P)}$ となるように取ってくる. このとき, $\beta_P: \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{H}_P$ は全射であったから, $\beta_P(g_P) = (h_{i(P)})_P$ となる $g_P \in \mathcal{G}_P$ が取れる. Stalk の定義より, $g \in \mathcal{H}(U)$, $h_{i(P)} \in \mathcal{H}(U_{i(P)})$ となる開集合 U と $V_P \subset U_{i(P)}$ を取るとき,

$$\beta(g|_{V_P}) = \beta(g)|_{V_P} = h_{i(P)}|_{V_P}$$

を満たす. $g^P = g|_{V_P} \in \mathcal{H}(V_P)$ とすれば,

$$\beta(g^P) = h_{i(P)}|_{V_P}$$

を満たすようなものが構成できた。こうして構成される \mathcal{U} の細分を $\mathcal{V} = \{V_P\}_{P \in X}$ とする。 $i: X \rightarrow I$ は細分写像となっている。 $g^{PQ} = g_{i(P)i(Q)}|V_P \cap V_Q$ とおく。このとき、

$$[[g^{PQ}]_{P,Q \in X}] = [\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}((g_{ij})_{i,j \in I})] = [[(g_{ij})_{i,j \in I}]] = g$$

である。 \mathcal{V} を \mathcal{U} と置きなおすと、 $g = [[(g^{PQ})_{P,Q \in X}]]$, $\beta(g_{i(P)i(Q)}) = h_{i(Q)} - h_{i(P)}|V(P) \cap V(Q) = \beta(g^Q) - \beta(g^P)$ は、 $g = [[(g_{ij})_{i,j \in I}]]$, $\beta(g_{ij}) = \beta(g_j) - \beta(g_i)$ と書ける。 U_{ij} 上、

$$\beta(g_{ij} - g_j + g_i) = 0$$

より、 $\beta_{ij} - g_j + g_i \in \text{Ker } \beta(U_{ij}) = \text{Im } \alpha(U_{ij})$ であるから、

$$\alpha(f_{ij}) = g_{ij} - g_j + g_i$$

となる $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ が取れる。このとき、

$$\begin{aligned} \alpha(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) &= \alpha(f_{jk}) - \alpha(f_{ik}) + \alpha(f_{ij}) \\ &= g_{jk} - g_k + g_j - (g_{ik} - g_k + g_i) + g_{ij} - g_j + g_i \\ &= g_{jk} - g_{ik} + g_{ij} = 0 \end{aligned}$$

であり、 α は単射であったから、

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$$

となり $f := (f_{ij})_{i,j \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は 1-コサイクルである。

$$\alpha(f) - g = \partial(g_i)_{i \in I}$$

より、

$$\alpha^1([[f]]) = [[\alpha(f)]] = g$$

となり $g \in \text{Im } \alpha^1$ が示された。

□

次に、与えられた層の短完全列 $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ に対して、 $H^0(X, \mathcal{H})$ と $H^1(X, \mathcal{F})$ の間に連結準同型と呼ばれる準同型を構成し完全列 $0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H})$ を構成する：

$h \in H^0(X, \mathcal{H})$ を取る。各点 $P \in X$ に対し、 $\beta_P: \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{H}_P$ は全射であったから、 $h_P \in \mathcal{H}_P$ に対して、

$$\beta_P(g_P) = h_P$$

となる $g_P \in \mathcal{G}_P$ が取れた。stalk の定義から、点 P の開近傍 U_P と $g^P \in \mathcal{H}(U_P)$ が存在して、

$$\beta(g^P) = h|U_P$$

となる。 $P \in X$ を動かすことにより、

$$\beta(g_i) = h|U_i$$

を満たすような X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ ができた。 U_{ij} 上、

$$\begin{aligned} \beta(g_i - g_j) &= \beta(g_i) - \beta(g_j) \\ &= h - h = 0 \end{aligned}$$

より $g_i - g_j \in \text{Ker } \beta(U_{ij}) = \text{Im } \alpha(U_{ij})$ であるから,

$$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j|_{U_{ij}}$$

を満たす $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ が取れる. よって 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j \in I}$ ができた. これは 1-コサイクルである. 実際, U_{ijk} 上,

$$\alpha(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) = (g_j - g_k) - (g_i - g_k) + (g_i - g_j) = 0$$

であり, α の単射性から $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たす. 従って, $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ である. $f_{\mathcal{U}} = [(f_{ij})_{i,j \in I}] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ で定める. また, $f = \tau_{\mathcal{U}}(f) \in H^1(X, \mathcal{F})$ と定め, $\delta^0(h) = f$ と定める. これは \mathcal{U} の取り方などには依存せずに定まるから, 準同型 $\delta^0: H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ が定まる.

Definition 31. (連結準同型)

上で構成した準同型 $\delta^0: H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ を連結準同型 (connecting homomorphism) という.

Theorem 32.

X を位相空間, $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ を X 上の層の短完全列とする. このとき, 次は完全系列である:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H})$$

Proof.

$\text{Im } \beta^0 = \text{Ker } \delta^0$ と $\text{Im } \delta^0 = \text{Ker } \alpha^1$ を示せば良い.

- $\text{Im } \beta^0 = \text{Ker } \delta^0$
hoge
- $\text{Im } \delta^0 = \text{Ker } \alpha^1$
huga

□

Remark 33.

X がパラコンパクト多様体であるとき, 同様の方法で連結準同型 $\delta^n: H^n(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F})$ が定まり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \\ &\xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H}) \\ &\dots \\ &\xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(X, \mathcal{H}) \\ &\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^{q+1}} H^{q+1}(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^{q+1}} H^{q+1}(X, \mathcal{H}) \\ &\dots \end{aligned}$$

は完全系列となる.