層係数コホモロジーの理論

@Big_ToiletPaper

2022 年 8 月 10 日

これは小木曽啓示『代数曲線論』の 5 章を読み勉強した内容をノートにしたものである.

第 1 章

層係数コホモロジー

層に関する性質は既知のものとする. 例えば, 層の短完全列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$$

は, 開集合 U について切断の左完全列

$$0 \to \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathscr{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathscr{H}(U)$$

を誘導する.

Definition 1.1.

X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を開被覆とする. このとき, $\iota = (i_0, i_1, \ldots, i_q) \in I^{q+1}$ に対して,

$$U_\iota = U_{i_0 i_1 \cdots i_q} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}$$

と定める.

Definition 1.2. (q-コチェイン群)

上の状況に加え $\mathscr{F}$ を X 上の層とする. このとき, $q \in \mathbb{N}$ に対して

$$C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) := \prod_{\iota \in I^{q+1}} \mathscr{F}(U_\iota)$$

を層 $\mathscr{F}$ の開被覆 $\mathcal{U}$ に関する Čech q-コチェイン群という (the Čech q-cochain group of the sheaf $\mathscr{F}$ with respect to the open covering $\mathcal{U}$). また, Čech q-コチェイン群の元を Čech q-コチェインという. コチェイン群には $\mathscr{F}$ と同じ代数構造が入る.

Exempli gratia 1.3. ($0, 1, 2$-コチェイン群の元)

1. 0-コチェイン群は
$$C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i \in I} \mathscr{F}(U_i)$$
であるから, 0-コチェインは $(f_i)_{i \in I}$, $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ で与えられる.
2. 1-コチェイン群は
$$C^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i,j \in I} \mathscr{F}(U_{ij})$$
であるから, 1-コチェインは $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ 達によって $(f_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ という形をしている.
3. 2-コチェインは $f_{ijk} \in \mathscr{F}(U_{ijk})$ によって $(f_{ijk})_{(i,j,k) \in I^3}$ と表される.

0-コチェイン $(f_i)_{i\in I}$ が貼り合わさり大域的な元 $f \in \mathscr{F}(X)$ を定めるためには, 各開集合 U_i, U_j に関して $f_i|U_{ij} = f_j|U_{ij}$ が成立すればよい. これは $f_{ij} := f_j|U_{ij} - f_i|U_{ij}$ が 0 になることを意味し, $(f_i)_{i\in I}$ が線形写像 $\partial^0\colon C^0(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathscr{F}); (f_i)_{i\in I} \mapsto (f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ の核に入ることを意味する.

Definition 1.4. (境界作用素)

コチェイン群の間の準同型 $\partial^q\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を $f = (f_\iota)_{\iota\in I^{q+1}}$ に対して次のように定める:

$$\partial^q f := \left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}}|U_{i_0 i_1\cdots i_{q+1}}\right)_{(i_0 i_1\cdots i_{q+1})\in I^{q+2}}$$

$f_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}}$ は $\mathscr{F}(U_{i_0 i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{q+1}})$ の元であり, それを $U_{i_0 i_1\cdots\cdots i_{q+1}}$ に制限したものとなる.

Proposition 1.5.

$\partial^{q+1}\circ\partial^q = 0$. 即ち $\mathrm{Im}\,(\partial^q) \subset \mathrm{Ker}\,(\partial^{q+1})$ である.

Proof.

各 $\iota = (i_0, i_1, \ldots, i_{q+1}) \in I^{q+2}$ に対して, $\partial\circ\partial$ によって写ったものは, ι から異なる 2 つの添字 i_j, i_k を抜いたものになる. この操作の順番により符号が入れ替わるため和を取ると 0 となる. □

従ってコチェイン群と境界作用素によって複体 $(C^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F}), d^\bullet)$ を得る.

Definition 1.6. (q-コサイクル, q-コバウンダリー, q 次 Čech コホモロジー)

1. $Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) := \mathrm{Ker}\,\partial^q$ とおき, $Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元を $\mathscr{F}$ の $\mathcal{U}$ に関する Čech q-コサイクル (Čech q-cocycle) という.
2. $B^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) := \mathrm{Im}\,\partial^{q-1}$ とおき, $B^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元を $\mathscr{F}$ の $\mathcal{U}$ に関する Čech q-コバウンダリー (Čech q-boundary) という.
3. 商空間 $H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) := Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})/B^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を $\mathscr{F}$ の $\mathcal{U}$ に関する q 次 Čech コホモロジー群 (q-th Čech cohomology group) という.

Exempli gratia 1.7. (コサイクルの例)

1. 0-コサイクルは各 $U_i \cap U_j$ 上 $f_i = f_j$ が成立するようなものから成る.
2. 1-コサイクルは $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ によって, $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たすものから成る. このことから $f_{ii} = 0$, $f_{ij} = -f_{ji}$ が従う.

Remark 1.8.

$H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元は, $Z^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ の元, つまり $(f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ で $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たすようなもので代表される.

Definition 1.9. (細分)

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ を X の開被覆とする. このとき, 開被覆 $\mathcal{V}$ が開被覆 $\mathcal{U}$ の細分である ($\mathcal{V}$ is a refinement of $\mathcal{U}$) とは, 各 $j \in J$ について, $V_j \subset U_{\pi(j)}$ となるような写像 $\pi\colon J \to I$ が存在することと定める. このような写像 π のことを細分写像 (refinement mapping) といい, $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分であるとき $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ と表す.

Remark 1.10.

細分写像は $V_j \subset U_i$ なる U_i の取り方に依るから一般に一意ではないが, 細分写像から誘導される複体の射はホモ

トピックであるためホモロジー群の間の写像は一意に定まる.

Definition 1.11.

$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ とし, π を細分写像とする. このとき, 複体の間の写像 $\pi^*\colon C^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V},\mathscr{F})$ を次のように定める: 準同型 $\pi^{*,q}\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$ を $f = (f_{i_0 i_1 \cdots i_q})$ に対し,

$$\pi^{*,q} f = \left(f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_q)}|V_{j_0 j_1\cdots j_q}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_q)\in J^{q+1}}$$

と定める. $V_{j_0 j_1\cdots j_q} \subset U_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_q)}$ となるため $V_{j_0 j_1\cdots j_q}$ に制限ができる.

Remark 1.12.

$\mathcal{W} = \{W_k\}_{k\in K} > \mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J} > \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ とするとき, 細分写像 $\sigma\colon K \to J$, $\tau\colon J \to I$ について $\sigma\circ\tau$ もまた細分写像であり, 定義から明らかに

$$(\sigma\circ\tau)^{*,q} = \sigma^{*,q}\circ\tau^{*,q}$$

が従う.

Proposition 1.13.

$\pi^*\colon C^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V},\mathscr{F})$ は複体の射である. 即ち, 各 $q\in\mathbb{Z}$ に対して次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc}
C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) & \xrightarrow{\partial^{q,\mathcal{U}}} & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F}) \\
{\scriptstyle \pi^{*,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{*,q+1}} \\
C^q(\mathcal{V},\mathscr{F}) & \xrightarrow{\partial^{q,\mathcal{V}}} & C^{q+1}(\mathcal{V},\mathscr{F})
\end{array}$$

Proof.

$f = (f_{i_0 i_1\cdots i_q}) \in C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ とする.

$$\begin{aligned}
&\partial^{q,\mathcal{V}}\circ\pi^{*,q}(f) \\
&= \partial^{q,\mathcal{V}}\left(\left(f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_q)}|V_{j_0 j_1\cdots j_q}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_q)\in J^{q+1}}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_{k-1})\pi(j_{k+1})\cdots\pi(j_{q+1})}|V_{j_0 j_1\cdots j_{q+1}}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_{q+1})\in I^{q+2}}
\end{aligned}$$

であり, 一方

$$\begin{aligned}
&\pi^{*,q+1}\circ\partial^{q,\mathcal{U}}(f) \\
&= \pi^{*,q+1}\left(\left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{i_0 i_1\cdots i_{k-1} i_{k+1}\cdots i_{q+1}}|U_{i_0 i_1\cdots i_{q+1}}\right)_{(i_0 i_1\cdots i_{q+1})\in I^{q+2}}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k f_{\pi(j_0)\pi(j_1)\cdots\pi(j_{k-1})\pi(j_{k+1})\cdots\pi(j_{q+1})}|V_{j_0 j_1\cdots j_{q+1}}\right)_{(j_0,j_1,\cdots,j_{q+1})\in I^{q+2}}
\end{aligned}$$

であるから図式を可換にする. □

よって次が従う.

Proposition 1.14.

$\pi^{*,q}$ はコサイクルをコサイクルに, コバウンダリーをコバウンダリーに写す. つまり, 次のような準同型が得られる.

$$\pi^{*,q}\colon Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to Z^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$
$$\pi^{*,q}\colon B^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to B^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$

これによりコホモロジー群の間に準同型が得られた.

Definition 1.15.

$H(\pi^{*,q})\colon H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathscr{F}); [a] \mapsto [\pi^{*,q}(a)]$, $a \in Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$

次に細分写像がホモトピックであることを示す.

Proposition 1.16.

π,ρ を細分写像とする. このとき, π^* と ρ^* はホモトピックである. 即ち, 各 $q \in \mathbb{Z}$ に対して準同型 $k^q\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^{q-1}(\mathcal{V},\mathscr{F})$ が存在して

$$\pi^{*,q} - \rho^{*,q} = \partial^{q-1,\mathcal{V}} \circ k^q + k^{q+1} \circ \partial^{q,\mathcal{U}}$$

を満たす.

Proof.
面倒臭かった □

$f \in Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ に対して,

$$\begin{aligned}\pi^{*,q}(f) - \rho^{*,q}(f) &= \partial^{q-1,\mathcal{V}} \circ k^q(f) + k^{q+1} \circ \partial^{q,\mathcal{U}}(f) \\ &= \partial^{q-1,\mathcal{V}}(k^q(f)) \in B^{q-1}(\mathcal{V},\mathscr{F})\end{aligned}$$

より, $H(\pi^{*,q})([f]) = H(\rho^{*,q})([f])$ である. 従って細分写像は Čech コホモロジー群の間に一意的な準同型を定める.

Definition 1.17.

$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ の細分写像によって一意的に定まるホモロジー群の間の射を

$$\tau_{\mathcal{U}}^{q,\mathcal{V}}\colon H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$

で表す. 即ち複体 $H^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F})$ から $H^\bullet(\mathcal{V},\mathscr{F})$ への射

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\colon H^\bullet(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to H^\bullet(\mathcal{V},\mathscr{F})$$

を得る.

Proposition 1.18.

任意の細分 $\mathcal{W} = \{W_k\}_{k\in K} > \mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J} > \mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ に対して次が成り立つ:

$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}} = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \circ \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \tag{1.1}$$
$$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{U}} \tag{1.2}$$

Proof.
細分写像 $\sigma\colon K \to J$, $\tau\colon J \to I$ を取る. このとき, $\tau\circ\sigma\colon K \to I$ もまた細分写像であるから remark 1.12 より, 各

$q \in \mathbb{Z}$ と $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ について, $H((\tau \circ \sigma)^{*,q})([f]) = [(\tau \circ \sigma)^{*,q}(f)] = H(\tau^{*,q})([\sigma^{*,q}(f)]) = H(\tau^{*,q}) \circ H(\sigma^{*,q})([f])$ となる. 従って式 (1.1) を得る. また, 恒等写像 $\mathrm{id}_I : I \to I$ によって $\mathcal{U} > \mathcal{U}$ であるから式 (1.2) も従う. □

従って開被覆で添字付けることにより構成される順系 $(H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}), \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})$ を得る. これにより得られる順極限を $H^q(X, \mathscr{F})$ とする. 具体的には次のように構成される:

Definition 1.19. (Čech コホモロジー群)

$\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ 上の関係 $\sim$ を次のように定める: 各 $a, b \in \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ に対して, 唯一の開被覆 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ で $a \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, $b \in H^q(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ となるものが存在した. このとき,

$$(a, \mathcal{U}) \sim (b, \mathcal{V}) \iff \exists \mathcal{W} : \text{refinement of } \mathcal{U} \text{ and } \mathcal{V} \text{ s.t. } \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(a) = \tau_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(b)$$

この関係は明らかに反射律と対称律を満たす. また, 開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$, $\{V_j\}_{j \in J}$ に対して, $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ もまた開被覆になることから関係 $\sim$ は同値関係となる. この同値関係によって得られる商群

$$H^q(X, \mathscr{F}) := \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) / \sim$$

を層 $\mathscr{F}$ の q 次 Čech コホモロジー群という (the q-th Čech cohomology group of the sheaf $\mathscr{F}$).

Proposition 1.20.

$\alpha, \beta \in H^q(X, \mathscr{F})$ とする. このとき, ある開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して, $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ によって $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ と表示できる.

Proof.

$c \in H^q(\mathcal{U}_1, \mathscr{F})$, $d \in H^q(\mathcal{U}_2, \mathscr{F})$ によって $\alpha = [c]$, $\beta = [d]$ と代表元表示する. このとき, $\mathcal{U}_k = \{U_{k,i}\}_{i \in I_k}$ とし, $\mathcal{U} = \{U_{1i} \cap U_{2j}\}_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ とすればこれは $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ の細分になっている. 従って $a = \tau_{\mathcal{U}_1}^{\mathcal{U}}(c)$, $b = \tau_{\mathcal{U}_2}^{\mathcal{U}}(b)$ とすれば $[a] = [c]$, $[b] = [d]$ であり, $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ となっている. □

Definition 1.21.

$\alpha, \beta \in H^q(X, \mathscr{F})$ とし, $k, l \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $\alpha = [a], \beta = [b]$ となる $a, b \in H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が上の命題から取れた. この表示によって

$$k\alpha + l\beta := [ka + lb] \in H^q(X, \mathscr{F})$$

と定める.

Remark 1.22.

$k\alpha + l\beta$ は $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ が準同型 (線形写像) であるため代表元表示に依らない.

Remark 1.23.

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ の定義から次が成立する:

1. 自然な射影 $\tau_{\mathcal{U}}^q : H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^q(X, \mathscr{F}); a \mapsto [a]$ は準同型である.
2. すべての細分 $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ について, $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{V}} \circ \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ が成立.

3. $\tau^0_{\{X\}}$ は次の図式を可換にし, $\mathscr{F}(X) \simeq H^0(\{X\}, \mathscr{F})$ と $H^0(X, \mathscr{F})$ の間に同型を与える:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \arrow[rr, "\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},0}"] \arrow[dr, "\tau_{\mathcal{U}}^{\{X\},0}"] \arrow[ddr, "\tau_{\mathcal{U}}^0"'] & & H^0(\mathcal{V}, \mathscr{F}) \arrow[dl, "\tau_{\mathcal{V}}^{\{X\},0}"'] \arrow[ddl, "\tau_{\mathcal{V}}^0"] \\
& H^0(\{X\}, \mathscr{F}) \arrow[d, "\tau_{\{X\}}"] & \\
& H^0(X, \mathscr{F}) &
\end{tikzcd}$$

この対応で $\mathscr{F}(X) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ と $H^0(X, \mathscr{F})$ を同一視する.

次では 1 次 Čech コホモロジー群の性質を述べていく.

Proposition 1.24.

X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{V} = \{V_i\}_{j \in J}$ を X の開被覆とする. このとき, 準同型 $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}$, $\tau_{\mathcal{U}}^1$ は単射である.

Proof.

$\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(\eta) = 0 \in H^1(\mathcal{V}, \mathscr{F}) = Z^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})/B^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ とする. $\eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}]$, $f_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ とし, $\pi\colon J \to I$ を細分写像とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(\eta) &= [\pi((f_{ij})_{i,j \in I})] \\
&= [(f_{\pi(k)\pi(l)}|V_{kl})_{k,j \in J}]
\end{aligned}$$

である. $g_{kl} = f_{\pi(k)\pi(l)}|V_{kl}$ とおく. このとき, 仮定より $(g_{kl})_{k,l \in J} \in B^0(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ であるから, $(g_k)_{k \in J} \in C^0(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ で, $(g_{kl})_{k,l \in J} = \partial^0((g_k)_{k \in J}) = (g_l - g_k|V_{kl})_{k,l \in J}$ となるものが存在する. 各 $i \in I$ について, $U_i \cap V_{kl} = (U_i \cap V_k) \cap (U_i \cap V_l)$ 上,

$$\begin{aligned}
g_l - f_{i\pi(l)} &= f_{\pi(k)\pi(l)} + g_k - f_{i\pi(l)} \\
&= g_k + f_{i\pi(l)} + f_{\pi(k)i} - f_{i\pi(l)} \\
&= g_k + f_{\pi(k)i} = g_k - f_{i\pi(k)}
\end{aligned}$$

であるから, $\{U_i \cap V_k\}_{k \in J}$ を U_i の開被覆だと思うと, 貼り合わせ条件から $h_i \in \mathscr{F}(U_i)$ で $h_i|U_i \cap V_k = g_k - f_{i\pi(k)}$ となるものが取れる. また, 各 $k \in J$ について, $U_i \cap U_j \cap V_k = (U_i \cap V_k) \cap (U_j \cap V_k)$ 上,

$$\begin{aligned}
h_j - h_i|U_{ij} \cap V_k &= g_k - f_{j\pi(k)} - (g_k - f_{i\pi(k)}) \\
&= f_{i\pi(k)} - f_{j\pi(k)} = f_{ij}
\end{aligned}$$

であるから, $\{U_i \cap U_j \cap V_k\}_{k \in J}$ を $U_i \cap U_j$ の開被覆だと思うと, 貼り合わせ条件から $U_i \cap U_j$ 上 $h_i - h_j = f_{ij}$ が成立する. これは $(f_{ij})_{i,j \in I} = \partial^0((h_i)_{i \in I}) \in B^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ を意味する. 従って, $\eta = [(f_{ij})_{i,j \in I}] = 0$ であるから $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射である.

$\tau_{\mathcal{U}}$ が単射であることは上から従う. 実際, $\tau_{\mathcal{U}}(\eta) = 0$ なら, Čech コホモロジー群の定義から, ある $\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V}$ が存在して, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(\eta) = 0$ となる. $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射であるから $\eta = 0$ となり $\tau_{\mathcal{U}}$ が単射であることが従う. □

Definition 1.25. (Leray 被覆)

位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ が

$$H^1(U_i, \mathscr{F}|U_i) = 0 \quad \text{as the 1-st Čech cohomology group of the sheaf } \mathscr{F} \text{ on the topological space } U_i \text{ for } \forall i \in I$$

を満たすとき, $\mathcal{U}$ を Leray 被覆という.

Proposition 1.26.

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ が Leray 被覆であるとき, $\tau_{\mathcal{U}} \colon H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^1(X, \mathscr{F})$ は同型写像である.

Proof.

任意の $\mathcal{U}$ の細分 $V = \{V_k\}_{k \in K}$ について, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1} \colon H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ が同相写像であれば良い. 実際, 任意に $\eta \in H^1(X, \mathscr{F})$ を取るとき, ある開被覆 $\mathcal{W}$ と $a \in H^1(\mathcal{W}, \mathscr{F})$ によって $\eta = [a]$ と表示される. $\mathcal{U}'$ を $\mathcal{U}$ と $\mathcal{W}$ の細分とするとき, $[a] = \left[\tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}',1}(a)\right]$ であり, $H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ と $H^1(\mathcal{U}', \mathscr{F})$ は同型であったから, $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}',1}(c) = \tau_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}',1}(a)$ となる $c \in H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が存在する. $[a] = [c]$ であるから, $\tau_{\mathcal{U}}^1(c) = \eta$ となるものが取れた. 従って $\tau_{\mathcal{U}}^1$ は全射であり, Proposition 1.24 より全単射である. よって $H^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ は $H^1(X, \mathscr{F})$ と同型であることが得られる.

Proposition 1.24 より $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ は単射であったから全射であることを示せば良い. 任意に $f = (f_{kl})_{k,l \in K}$ を取る. $\mathcal{V}_i := \{U_i \cap V_k\}_{k \in K} (> \{U_i\})$ とするとき, $f \in Z^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ より制限することにより $(f_{kl}|U_i \cap V_k \cap V_l)_{k,l \in K} \in Z^1(\mathcal{V}_i, \mathscr{F}|U_i)$ を得る. $\tau_{\mathcal{V}_i}^1 \colon H^1(\mathcal{V}_i, \mathscr{F}|U_i) \to H^1(U_i, \mathscr{F}|U_i) = 0$ であり, $\tau_{\mathcal{V}_i}^1$ が単射であったことから $H^1(\mathcal{V}_i, \mathscr{F}|U_i) = 0$ である. よって $(f_{kl}|U_i \cap V_k \cap V_l)_{k,l \in K} \in B^1(\mathcal{V}_i, \mathscr{F}|U_i)$ であるから, $(g_k(i))_{k \in K} \in C^0(\mathcal{V}_i, \mathscr{F}|U_i)$ で,

$$(f_{kl}|U_i \cap V_k \cap V_l)_{k,l \in K} = \partial^0((g_k(i))_{k \in K}) = (g_l(i) - g_k(i)|U_i \cap V_l \cap V_k)_{k,l \in K}$$

となるものが取れる. $U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$ 上,

$$g_l(i) - g_k(i) = g_l(j) - g_k(j) = f_{kl}|U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$$

であるから, $U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$ 上,

$$-(g_l(j) - g_l(i)) = -(g_k(j) - g_k(i))$$

を得る. $k, l \in K$ を動かすことにより, 貼り合わせ条件から $F_{ij} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ で, $F_{ij}|V_k = -(g_k(j) - g_k(i))$ を満たすものが取れる. よって $F := (F_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ を得る. これが 1-コサイクルであることを見る. $U_i \cap U_j \cap U_h \cap V_k$ 上,

$$F_{ih} + F_{hj} = -(g_k(h) - g_k(i)) - (g_k(j) - g_k(h)) = -(g_k(j) - g_k(i)) = F_{ij}$$

より, V_k を動かすことにより $F_{ij} = F_{ih} + F_{hj} \iff F_{ih} - F_{ij} + F_{hj} = 0$ を満たすから, これは 1-コサイクルである. よって $F \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ である. $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(F) = f$ を示す. $V_k \cap V_l \subset U_{\pi(k)} \cap U_{\pi(l)}$ 上,

$$f_{kl} - F_{\pi(k)\pi(l)} = g_l(\pi(k)) - g_k(\pi(k)) - (g_l(\pi(k)) - g_l(\pi(l))) = g_l(\pi(l)) - g_k(\pi(k)) \tag{1.3}$$

である. $U_{\pi(k)} \cap V_k = V_k$ であるから $(g_k(\pi(k)))_{k \in K} \in C^0(\mathcal{V}, \mathscr{F})$ であり, 等式 (1.3) より,

$$f - F = (g_l(\pi(k)) - g_l(\pi(l)))_{k,j \in K} = \partial(g_k(\pi(k)))_{k \in K} \in B^1(\mathcal{V}, \mathscr{F})$$

を得る. 従って, $f - \tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}(F) = 0$ となり $\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V},1}$ は全射である. □

層の準同型 $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ は Čech 複体の間の準同型 $\alpha^\bullet\colon H^\bullet(X,\mathscr{F}) \to H^\bullet(X,\mathscr{G})$ を誘導することを示していく.

Proposition 1.27.

$\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を層の間の準同型とし, $\mathcal{U}$ を開被覆とする. このとき,

$$\alpha^q_{\mathcal{U}}\colon H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathscr{G}); [(f_{i_0\cdots i_q})] \mapsto [\alpha(f_{i_0\cdots i_q})]$$

が well-defined に定まる.

Proof.

$\alpha^q_{\mathcal{U}}\colon C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U},\mathscr{G})$ を $\alpha^q(f_{i_0\cdots i_q}) = (\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))$ と定める. このとき, 次の図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd} C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\partial^q"] \arrow[d, "\alpha^q_{\mathcal{U}}"'] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[d, "\alpha^{q+1}_{\mathcal{U}}"] \\ C^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \arrow[r, "\partial^q"] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{G}) \end{tikzcd}$$

従って, $f \in Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$ なら,

$$\begin{aligned} \partial^q(\alpha^q_{\mathcal{U}}(f)) &= \alpha^{q+1}_{\mathcal{U}}(\partial^q(f)) \\ &= \alpha^{q+1}_{\mathcal{U}}(0) = 0 \end{aligned}$$

より

$$\alpha^q_{\mathcal{U}}(Z^q(\mathcal{U},\mathscr{F})) \subset Z^q(\mathcal{U},\mathscr{G})$$

を得る. 同様に,

$$\alpha^q_{\mathcal{U}}(B^q(\mathcal{U},\mathscr{F})) \subset B^q(\mathcal{U},\mathscr{G})$$

を得る. 従って次の写像が誘導される:

$$H(\alpha^q_{\mathcal{U}})\colon H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{U},\mathscr{G}); [(f_{i_0\cdots i_q})] \mapsto [(\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))]$$

次に, 写像

$$\alpha^q\colon H^q(X,\mathscr{F}) \to H^q(X,\mathscr{G}); [[(f_{i_0\cdots i_q})]] \mapsto [[(\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))]]$$

が well-defined であることを示す. $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の細分とする. このとき次の図式が可換である:

$$\begin{tikzcd} H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\tau^{\mathcal{V},q}_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "H(\alpha^q_{\mathcal{U}})"'] & H^q(\mathcal{V},\mathscr{F}) \arrow[d, "H(\alpha^q_{\mathcal{V}})"] \\ H^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \arrow[r, "\tau^{\mathcal{V},q}_{\mathcal{U}}"] & H^q(\mathcal{V},\mathscr{G}) \end{tikzcd}$$

このことより α^q が well-defined であることが従う. $\eta_1 = \eta_2 \in H^q(X,\mathscr{F})$ なら, $f_i = (f^i_{i_0\cdots i_q}) \in H^q(\mathcal{U}_i,\mathscr{F})$, $\eta_i = [f_i]$ $(i=1,2)$ で, $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ の細分 $\mathcal{W}$ が存在して $\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_1}(f_1) = \tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_2}(f_2)$ が成立する. よって,

$$\begin{aligned} \tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_1}(H(\alpha^q_{\mathcal{U}_1})(f_1)) &= H(\alpha^q_{\mathcal{W}})(\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_1}(f_1)) \\ &= H(\alpha^q_{\mathcal{W}})(\tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_2}(f_2)) \\ &= \tau^{\mathcal{W},q}_{\mathcal{U}_2}(H(\alpha^q_{\mathcal{U}_2})(f_2)) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \alpha^q(\eta_1) = [[(\alpha(f^1_{i_0\cdots i_q}))]] &= [H(\alpha^q_{\mathcal{U}_1})(f_1)] \\ &= [H(\alpha^q_{\mathcal{U}_2})(f_2)] \\ &= [[(\alpha(f^2_{i_0\cdots i_q}))]] = \alpha^q(\eta_2) \end{aligned}$$

が成立. 従って α^q は well-defined であるから準同型

$$\alpha^\bullet \colon H^\bullet(X, \mathscr{F}) \to H^\bullet(X, \mathscr{G})$$

を得る. □

Definition 1.28.

上で得られるような準同型を層の準同型写像 α が誘導するコホモロジー群の準同型写像という.

Remark 1.29.

適当に開被覆 $\mathcal{U}$ を取り, $\eta = [f] = [[(f_{i_0\cdots i_q})]]$, $(f_{i_0\cdots i_q}) \in H(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ と代表元表示するとき,

$$\begin{aligned}\alpha^q(\eta) &= [H(\alpha^q_{\mathcal{U}})([(f_{i_0\cdots i_q})_{i_0,\ldots,i_q\in I}])] \\ &= [[\alpha^q_{\mathcal{U}}(f_{i_0\cdots i_q})_{i_0,\ldots,i_q\in I}]] \\ &= [[(\alpha(f_{i_0\cdots i_q}))_{i_0,\ldots,i_q\in I}]]\end{aligned}$$

である. $q = 1$ とする. $\alpha^1(\eta) = 0$ であるとは, ある $\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V}$ が存在して, $\tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(H(\alpha^1_{\mathcal{U}})(f)) = 0$ であることと同値であり, $\pi \colon K \to I$ を細分写像とするとき,

$$\begin{aligned}0 &= \tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(H(\alpha^1_{\mathcal{U}})(f)) \\ &= [(\alpha(f_{\pi(k)\pi(l)|V_k\cap V_l})_{k,l\in K})]\end{aligned}$$

より, $\alpha^1(\eta) = 0$ であることと, $(\alpha(f_{\pi(k)\pi(l)|V_k\cap V_l}))_{k,l\in K} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{V}}$ であることは同値である. 即ち, 開被覆を適当な開被覆 $\mathcal{W}$ に取り替えることにより, $\eta = [g] = [[(g_{s,t})_{s,t\in J}]]$ と表示するとき,

$$\alpha^1(\eta) = 0 \iff (\alpha(g_{s,t}))_{s,t\in J} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{W}}$$

となる. 一般の次数においても同様の議論ができる.

Proposition 1.30.

層の短完全列

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$$

が与えられたとき, 次の完全系列が誘導される:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathscr{H}) \tag{1.4}$$

$$H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathscr{H}) \tag{1.5}$$

Proof.

(1.4) は, 同型 $\mathscr{F}(X) \simeq H^0(X, \mathscr{F})$ から従うから, (1.5) のみ示せばよい.

- $\mathrm{Im}\ \alpha^1 \subset \mathrm{Ker}\ \beta^1$ を示す.
  $\eta \in \mathrm{Im}\ \alpha^1$ なら, 開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ と $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ によって

  $$\eta = \alpha^1([(f_{ij})_{i,j\in I}]) = [[(\alpha(f_{ij}))_{i,j\in I}]]$$

  と表示することができる. このとき, $\beta(U_{ij}) \circ \alpha(U_{ij}) = 0$ より,

  $$\begin{aligned}\beta^1(\eta) &= (\beta^1 \circ \alpha^1)(([(f_{ij})_{i,j\in I}])) \\ &= [[(\beta \circ \alpha)(f_{ij})_{i,j\in I}]] \\ &= 0\end{aligned}$$

である．従って $\eta \in \mathrm{Ker}\ \beta^1$ である．

- $\mathrm{Im}\ \alpha^1 \supset \mathrm{Ker}\ \beta^1$ を示す．

  $g \in \mathrm{Ker}\ \beta^1$ なら, 開被覆 $\mathcal{U}$ を取り, $(g_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(X, \mathscr{G})$ によって

$$g = [[(g_{ij})_{i,j\in I}]]$$

と表示する．このとき, Remark 1.29 より, $\beta(g) = 0$ であるから

$$(\beta(g_{ij}))_{i,j\in I} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{U}} = B^1(\mathcal{U}, \mathscr{H})$$

を仮定してよい．よって $(h_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{H})$ で

$$(\beta(g_{ij}))_{i,j\in I} = \partial(h_i)_{i\in I} = (h_j - h_i)_{i,j\in I}$$

となるものが取れる．各 $P \in X$ に対して, $i(P) \in I$ を, $P \in U_{i(P)}$ となるように取ってくる．このとき, $\beta_P \colon \mathscr{G}_P \to \mathscr{H}_P$ は全射であったから, $\beta_P(g_P) = (h_{i(P)})_P$ となる $g_P \in \mathscr{G}_P$ が取れる．Stalk の定義より, $g \in \mathscr{H}(U)$, $h_{i(P)} \in \mathscr{H}(U_{i(P)})$ となる開集合 U と $V_P \subset U_{i(P)}$ を取るとき,

$$\beta(g|V_P) = \beta(g)|V_P = h_{i(P)}|V_P$$

を満たす．$g^P = g|V_p \in \mathscr{H}(V_p)$ とすれば,

$$\beta(g^P) = h_{i(P)}|V_P$$

を満たすようなものが構成できた．こうして構成される $\mathcal{U}$ の細分を $\mathcal{V} = \{V_P\}_{P\in X}$ とする．$i \colon X \to I$ は細分写像となっている．$g^{PQ} = g_{i(P)i(Q)}|V_P \cap V_Q$ とおく．このとき,

$$[[(g^{PQ})_{P,Q\in X}]] = [\tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}((g_{ij})_{i,j\in I})] = [[(g_{ij})_{i,j\in I}]] = g$$

である．$\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ と置きなおすと, $g = [[(g^{PQ})_{P,Q\in X}]]$, $\beta(g_{i(P)i(Q)}) = h_{i(Q)} - h_{i(P)}|V(P) \cap V(Q) = \beta(g^Q) - \beta(g^P)$ は, $g = [[(g_{ij})_{i,j\in I}]]$, $\beta(g_{ij}) = \beta(g_j) - \beta(g_i)$ と書ける．U_{ij} 上,

$$\beta(g_{ij} - g_j + g_i) = 0$$

より, $\beta_{ij} - g_j + g_i \in \mathrm{Ker}\ \beta(U_{ij}) = \mathrm{Im}\ \alpha(U_{ij})$ であるから,

$$\alpha(f_{ij}) = g_{ij} - g_j + g_i$$

となる $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ が取れる．このとき,

$$\begin{aligned}\alpha(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) &= \alpha(f_{jk}) - \alpha(f_{ik}) + \alpha(f_{ij}) \\ &= g_{jk} - g_k + g_j - (g_{ik} - g_k + g_i) + g_{ij} - g_j + g_i \\ &= g_{jk} - g_{ik} + g_{ij} = 0\end{aligned}$$

であり, α は単射であったから,

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$$

となり $f := (f_{ij})_{i,j\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ は 1-コサイクルである．

$$\alpha(f) - g = \partial(g_i)_{i\in I}$$

より,

$$\alpha^1([[f]]) = [[\alpha(f)]] = g$$

となり $g \in \mathrm{Im}\ \alpha^1$ が示された．

□

次に, 与えられた層の短完全列 $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ に対して, $H^0(X,\mathscr{H})$ と $H^1(X,\mathscr{F})$ の間に連結準同型と呼ばれる準同型を構成し完全列 $0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \to H^0(X,\mathscr{G}) \to H^0(X,\mathscr{H}) \to H^1(X,\mathscr{F}) \to H^1(X,\mathscr{G}) \to H^1(X,\mathscr{H})$ を構成する:

$h \in H^0(X,\mathscr{H})$ を取る. 各点 $P \in X$ に対し, $\beta_P \colon \mathscr{G}_P \to \mathscr{H}_P$ は全射であったから, $h_P \in \mathscr{H}_P$ に対して,

$$\beta_P(g_P) = h_P$$

となる $g_P \in \mathscr{G}_P$ が取れた. stalk の定義から, 点 P の開近傍 U_P と $g^P \in \mathscr{H}(U_P)$ が存在して,

$$\beta(g^P) = h|U_P$$

となる. $P \in X$ を動かすことにより,

$$\beta(g_i) = h|U_i \tag{1.6}$$

を満たすような X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathscr{G})$ ができた. U_{ij} 上,

$$\begin{aligned}\beta(g_i - g_j) &= \beta(g_i) - \beta(g_j)\\ &= h - h = 0\end{aligned}$$

より $g_i - g_j \in \mathrm{Ker}\ \beta(U_{ij}) = \mathrm{Im}\ \alpha(U_{ij})$ であるから,

$$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j|U_{ij} \tag{1.7}$$

を満たす $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ が取れる. よって 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I}$ ができた. これは 1-コサイクルである. 実際, U_{ijk} 上,

$$\alpha(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) = (g_j - g_k) - (g_i - g_k) + (g_i - g_j) = 0$$

であり, α の単射性から $f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0$ を満たす. 従って, $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ である. $f_{\mathcal{U}} = [(f_{ij})_{i,j\in I}] \in H^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ で定める. また, $f = \tau_{\mathcal{U}}(f) \in H^1(X,\mathscr{F})$ と定め, $\delta^0(h) = f$ と定める. これは $\mathcal{U}$ の取り方などには依存せずに定まるから, 準同型 $\delta^0 \colon H^0(X,\mathscr{H}) \to H^1(X,\mathscr{F})$ が定まる.

Definition 1.31. (連結準同型)

上で構成した準同型 $\delta^0 \colon H^0(X,\mathscr{H}) \to H^1(X,\mathscr{F})$ を連結準同型 (connecting homomorphism) という.

Remark 1.32.

$\delta^0(h)$ を見るには式 (1.6) を満たすような開被覆 $\mathcal{U}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathscr{G})$ を作り, α の単射性から唯一である 1-コサイクル $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U},\mathscr{F})$ を見ればよい.

Theorem 1.33.

X を位相空間, $0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \to 0$ を X 上の層の短完全列とする. このとき, 次は完全系列である:

$$0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X,\mathscr{H})$$

Proof.

$\mathrm{Im}\ \beta^0 = \mathrm{Ker}\ \delta^0$ と $\mathrm{Im}\ \delta^0 = \mathrm{Ker}\ \alpha^1$ を示せば良い.

- $\mathrm{Im}\ \beta^0 = \mathrm{Ker}\ \delta^0$

$h \in \mathrm{Im}\ \beta^0$ なら, $h = \beta^0(g)$ となる $g \in H^0(X, \mathscr{G}) = \mathscr{G}(X)$ が取れる. X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を取るとき,

$$h|U_i = \beta(g)|U_i = \beta(g|U_i)$$

を満たす. $g_i = g|U_i$ とおけば,

$$h|U_i = \beta(g_i)$$

である. δ^0 の構成に従い

$$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j|U_{ij}$$

となる $f_{ij} \in \mathscr{F}(U_{ij})$ を取るが,

$$g_i - g_j = g - g = 0$$

より, α の単射性から $f_{ij} = 0$ である. 従って, $\delta^0(h) = 0$ となり $h \in \mathrm{Ker}\ \delta^0$ である.
$h \in \mathrm{Ker}\ \delta^0$ なら, stalk の全射性から式 (1.6) を満たす, すなわち

$$\beta(g_i) = h|U_i$$

となる開被覆 $\mathcal{U}$ と 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ が取れる. このとき, δ^0 の構成に従うと,

$$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$$

となる 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が取れる.

$$0 = \delta^0(h) = [[(f_{ij})_{i,j\in I}]]$$

より, 適当に $\mathcal{U}$ の細分を取り直すと, $(f_{ij})_{i,j\in I} \in \partial^{0,\mathcal{U}}$ となる. 即ち, $f_{ij} = f_j - f_i$ となる $(f_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が取れる. このとき, U_{ij} 上,

$$\alpha(f_j) - \alpha(f_i) = \alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$$

より,

$$\alpha(f_j) + g_j = \alpha(f_i) + g_i$$

であるから, 貼り合わせ条件から $g \in \mathscr{G}(X)$ で,

$$g|U_i = \alpha(f_i) + g_i$$

となるものが取れる. $\beta(U_i) \circ \alpha(U_i) = 0$ より,

$$\beta(g)|U_i = \beta(g|U_i) = \beta(g_i) = h|U_i$$

であるから, 貼り合わせ条件から $\beta(g) = h$ となる. 従って $h \in \mathrm{Im}\ \beta^0$ となり等号が従う.

- $\mathrm{Im}\ \delta^0 = \mathrm{Ker}\ \alpha^1$
  $f \in \mathrm{Im}\ \delta^0$ とする. このとき, $f = \delta^0(h)$ となる $h \in H^0(X, \mathscr{H})$ が取れる. このとき, δ^0 の構成から, 式 (1.6), (1.7) を満たす X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$, 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ が取れ, $f = [[(f_{ij})_{i,j\in I}]]$ と表示される. このとき,

$$\begin{aligned}\alpha^1(f) &= [[(\alpha(f_{ij}))_{i,j\in I}]]\\ &= [[(g_i - g_j)_{i,j\in I}]]\\ &= [[\partial^{0,\mathcal{U}}(-(g_i)_{i\in I})]] = 0\end{aligned}$$

  であるから, $f \in \mathrm{Ker}\ \alpha^1$ である.

$f \in \mathrm{Ker}\ \alpha^1$ とする．Remark 1.29 より，適当な X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ と 1-コチェイン $(f_{ij})_{i,j\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ によって，

$$(\alpha(f_{ij}))_{i,j\in I} \in \mathrm{Im}\ \partial^{0,\mathcal{U}}$$

となる．よって $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$ となる 0-コチェイン $(g_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ が取れる．このとき，U_{ij} 上，$0 = \beta\alpha(f_{ij}) = \beta(g_j) - \beta(g_i)$ より，貼り合わせ条件によって

$$h|U_i = -\beta(g_i)$$

となる $h \in \mathscr{H}(X) = H^0(X, \mathscr{H})$ が取れる．このとき，h の構成を遡るとこれは $\delta^0(h)$ の構成となっていることから，$\delta^0(h) = [[(f_{ij})_{i,j\in I}]] = f$ を得る．

□

Remark 1.34.

X がパラコンパクト多様体であるとき，同様の方法で連結準同型 $\delta^n\colon H^n(X, \mathscr{H}) \to H^{n+1}(X, \mathscr{F})$ が定まり，次の系列は完全系列となる:

$$\begin{aligned}
&0 \to H^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X,\mathscr{H}) \\
&\xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X,\mathscr{H}) \\
&\cdots \\
&\xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^q} H^q(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^q} H^q(X,\mathscr{H}) \\
&\xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha^{q+1}} H^{q+1}(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\beta^{q+1}} H^{q+1}(X,\mathscr{H}) \\
&\cdots
\end{aligned}$$

層の同型 $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を考えてみる．即ち，層の準同型で各切断について，$\varphi(U)\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ が同型写像であるときを考える．開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を与えたとき，Čech 複体に関しては，同型 $\mathscr{F}(U_\iota) \simeq \mathscr{G}(U_\iota)$, $\iota \in I^{q+1}$ によって

$$\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$$

が同型になる．層の準同型は制限と可換になることから，次の図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd}
C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^q"] \arrow[d, "\partial^q"] & C^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \arrow[d, "\partial^q"] \\
C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\varphi^{q+1}"] & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{G})
\end{tikzcd}$$

従って，次の写像が誘導される:

$$\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon B^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to B^q(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \tag{1.8}$$

$$\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to Z^q(\mathcal{U}, \mathscr{G}) \tag{1.9}$$

これらの群の間に φ^q が同型を与えている．単射性は元の写像 $\varphi^q_{\mathcal{U}}\colon C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$ から得られ，全射性も diagram chasing により従う．この写像によって，$\mathscr{F}, \mathscr{G}$ の $\mathcal{U}$ に関する Čech コホモロジー群の間の同型写像

$$H(\varphi^q_{\mathcal{U}})\colon H^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathscr{G})$$

を得る. 次の図式が可換になることから, 順極限の普遍性により同型 $H^q(X,\mathscr{F}) \simeq H^q(X,\mathscr{G})$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
H^q(\mathcal{U},\mathscr{G}) \arrow[rr, "\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "H(\varphi_{\mathcal{U}}^q)"] & & H^q(\mathcal{V},\mathscr{G}) \arrow[d, "H(\varphi_{\mathcal{V}}^q)"] \\
H^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \arrow[rr, "\tau_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "\tau_{\mathcal{U}}"] \arrow[ddr, "\tau_{\mathcal{U}}\circ H(\varphi_{\mathcal{U}}^q)^{-1}"'] & & H^q(\mathcal{V},\mathscr{F}) \arrow[dl, "\tau_{\mathcal{V}}"'] \arrow[ddl, "\tau_{\mathcal{V}}\circ H(\varphi_{\mathcal{V}}^q)^{-1}"] \\
& H^q(X,\mathscr{F}) \arrow[d] & \\
& H^q(X,\mathscr{G}) &
\end{tikzcd}
$$

従って, 次が得られる:

Theorem 1.35.

層の間の同型 $\mathscr{F} \simeq \mathscr{G}$ が与えられたとき, この同型は Čech コホモロジー群の間の同型 $H^q(X,\mathscr{F}) \simeq H^q(X,\mathscr{G})$ を誘導する.

第 2 章

三大定理

Definition 2.1.

X を閉 Riemann 面, U を開集合とするとき, $\mathcal{M}_X(U)$ を U 上の有理型関数全体, $\mathcal{O}_X(U)$ を U 上の正則関数全体の成す $\mathbb{C}$ 代数し, $\Omega_X(U)$ を U 上の正則微分全体の成す $\mathbb{C}$ 代数とする．このとき, 因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ と開集合 U に対し,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_X(D)(U) &:= \{f \in \mathcal{M}(U) \mid \mathrm{div}(f) + D|_U \geq 0\} \\
\mathcal{L}_X(D) &:= \mathcal{O}_X(D)(X) \\
\Omega_X(D)(U) &:= \{\omega \in \Omega_X(U) \mid \mathrm{div}(\omega) + D|_U \geq 0\} \\
\mathfrak{J}_X(D) &:= \Omega_X(D)(X)
\end{aligned}$$

と定める．これにより $\mathcal{O}_X$ 代数の層 $\mathcal{O}_X(D)$, $\Omega_X(D)$ を定める．また,

$$\begin{aligned}
h^0(\mathcal{O}(D)) &:= \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}(D)) \\
h^1(\mathcal{O}(D)) &:= \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}(D))
\end{aligned}$$

と定める．

次の 3 つの定理を将来的に示す:

Theorem 2.2. (Riemann-Roch の定理)

因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ について次が成立:

$$h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \deg D$$

Theorem 2.3. (Serre 双対性)

留数写像

$$\mathrm{res}\colon H^1(X,\Omega_X^1)\to\mathbb{C};\alpha\mapsto\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\iint_X\beta,\ \delta^0(\beta)=\alpha$$

とカップ積

$$\cup\colon H^0(X,\Omega_X^1(-D))\times H^1(X,\mathcal{O}_X(D))\to H^1(X,\Omega_X^1);\ (\alpha,[[(\beta_{ij})_{i,j}]])\mapsto\mathrm{res}([[(\alpha\beta_{ij})_{i,j}]])$$

の合成

$$\langle *,**\rangle=\mathrm{res}\circ\cup\colon H^0(X,\Omega_X^1(-D))\times H^1(X,\mathcal{O}_X(D))\mapsto\mathbb{C};(\alpha,[[(\beta_{ij})_{i,j}]])\mapsto\mathrm{res}([[(\alpha\beta_{ij})_{i,j}]])$$

は非退化な双一次形式である．特に次の等式が成り立つ:

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X-D))=h^0(\Omega_X^1(-D))=h^1(\mathcal{O}_X(D))$$

Theorem 2.4. (消滅定理)

X 上の因子 $D,C\in\mathrm{Div}(X)$ について次が成立:

1. $\deg E <\Rightarrow h^0(\mathcal{O}_X(E))=0$
2. $\deg D\geq 2g-1(=\deg K_X+1)\Rightarrow h^1(\mathcal{O}_X(D))=0$

$\mathcal{O}_X(K_X-D)\simeq\Omega_X(D)$ であった．また, Serre 双対性

$$h^1(\mathcal{O}_X(D))=h^0(\mathcal{O}_X(K_X-D))$$

によって, $h^0(\mathcal{O}_X(K_X-D))=\dim_{\mathbb{C}}H^0(X,\Omega_X(D))=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{I}_X(D)$ であるから, Riemann-Roch の定理を次のように書き換えることができる:

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}_X(D)-\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{I}_X(D)=1-g+\deg D$$