位相空間の距離化について

2021 年 1 月 5 日

第 1 章

本論

本 PDF において集合 X の冪集合のことを $\mathcal{P}(X)$ と書く.

1.1 基本的知識

Definition 1.1.1. (位相空間, 開集合, 閉集合, 開基)
X を集合をとする.

1. すべての X の部分集合 A に対し, A の閉包と呼ばれる集合 $\overline{A}$ が対応していて以下をみたすとき, X を位相空間という:
   (a) $A \subset \overline{A}$,
   (b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
   (c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
   (d) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.
   このとき, A の閉包を $\overline{A}$, $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Cl}_X(A)$ と書き, X の元のことを点という.
2. $A \in \mathcal{P}(X)$ とする.
   (a) $A = \overline{A}$ をみたすとき A は X で閉という.
   (b) A がある閉集合の補集合となるとき, A は X で開といい, A を X の開集合という.
3. X を位相空間, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ とする. このとき, 任意の X の開集合全体の集合が $\mathcal{U}$ と一致するとき, $\mathcal{U}$ は X の位相であるという.
4. $\mathcal{U}$ を X の位相, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ とする. このとき以下の条件をみたす $\mathcal{B}$ を X の開基という:
   (a) $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B$,
   (b) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.
5. X を集合 (まだ位相空間でない), $\mathcal{B}$ を上の 2 条件を満たす X の部分集合族とする. このとき $\mathscr{T} = \{U \subset X \mid \forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset U\}$ を $\mathcal{B}$ によって生成される位相という.
6. $\mathcal{W}^{\#} = \bigcup\{W \mid W \in \mathcal{W}\}$ とおく.

Definition 1.1.2. (距離空間, 近傍, 距離化)
X を集合, d を $X \times X$ から $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ への写像とする.

1. d が以下の条件をみたすとき, d を X 上の距離という:
   (a) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
   (b) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$,
   (c) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).
   このとき, 対 (X, d) あるいは単に X を距離空間と呼ぶ.
2. (X, d) を距離空間とする. このとき, 集合 $S_\varepsilon(x) = S(x : \varepsilon) = \{y \in X |\ d(x, y) < \varepsilon\}$ を点 x の ε 近傍という.
3. (X, d) を距離空間, A, $B \subset X$ とする. このとき,
   (a) A と B の距離 $d(A, B)$ を $\inf\{d(x, y)|\ x \in A, y \in B\}$,
   (b) A の直径 $d(A)$ を $\sup\{d(x, y)|x, y \in A\}$,
   (c) A の ε 近傍 $S_\varepsilon(A)$ または $S(A : \varepsilon)$ を $\{x \in X|\ d(x, A) < \varepsilon\}$ と定める.
4. (X, d) を距離空間, $\mathcal{B}$ を距離 d によって定まる集合 $\{S_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ とする.
   このとき, $\mathcal{B}$ によって生成される位相を距離 d によって生成される位相と呼ぶ.
5. $(X, \mathscr{T})$ を位相空間とする. $\mathscr{T}$ が生成されるようなある距離 d が存在するとき X は距離化可能空間であるという.

Remark 1.1.3.
$S(x\colon \varepsilon) = S(\{x\}\colon \varepsilon)$ であるので記号が混ざることはない.

Example 1.1.4.
有限集合 X に離散位相を入れた空間は離散距離 d によって距離空間になる.

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

Definition 1.1.5. 集合 X と部分集合 A に対して, X の部分集合族 $\mathcal{G}$ は, $A \subset \bigcup \mathcal{G}$ であるとき, A を被覆するといい, $\mathcal{G}$ は A の被覆であるという. A の被覆 $\mathcal{G}$ の部分集合 $\mathcal{G}'$ に対しても $A \subset \bigcup \mathcal{G}'$ であるとき, $\mathcal{G}'$ を $\mathcal{G}$ の部分被覆といい, $\mathcal{G}$ は部分被覆 $\mathcal{G}'$ をもつという.

特に, 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ と X の部分集合 A に対して, 位相 $\mathscr{T}$ の部分集合 A は, 任意の開被覆が有限な部分被覆をもつとき, すなわち, A の任意の開集合による被覆 (開被覆) $\mathcal{G}$ に対して, $\mathcal{G}$ に属する有限個の開集合 $O_1, \ldots,\ O_n$ を選んで $A \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$ となるようにできるとき, コンパクト集合といい, 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ はコンパクトであるという.

Example 1.1.6.
$\varepsilon > 0$ に対し, $\{S_\varepsilon(x)|\ x \in X\}$ は X の開被覆である.

Definition 1.1.7. (分離公理)
X を位相空間とする. このとき,

1. 任意の $x \in X$ について一点集合 $\{x\}$ が閉集合であるとき, X を T_1 空間という.
2. 任意の相異なる二点 $x, y \in X$ について $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となるような開集合 U, V が存在するとき, X を T_2 空間あるいは Hausdorff 空間という.

3. T_1 空間 X が任意の $x \in X$ と任意の x を含まない閉集合 F に対して, $x \in U, F \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすような開集合 U, V が存在するとき, X を正則空間という.
4. T_1 空間 X が任意の交わらない閉集合 E, F に対して $E \subset U$, $F \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすような開集合 U, V が存在するとき, X を正規空間という.

Remark 1.1.8.
正則空間と正規空間に T_1 公理を課していることに注意すると, 一般に正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$ である.

Example 1.1.9. (T_1 空間の例)
代数多様体上の Zariski 位相

Example 1.1.10. (T_2 空間の例)
ノルム線形空間

Example 1.1.11. (正則空間の例)

$$X = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$$
$$\mathcal{B}(p, q) = \begin{cases} \{U_\varepsilon(p, q) := \{(x, y) \mid (x-p)^2 + (y-q)^2 < \varepsilon^2\} \mid \varepsilon > 0\} & (q > 0) \\ \{V_\varepsilon(p) := \{(p, 0)\} \cup \{(x, y) \mid (x-p)^2 + (y-\varepsilon)^2 < \varepsilon^2\} \mid \varepsilon > 0\} & (q = 0) \end{cases}$$

とするときこの $\mathcal{B}$ で生成された空間は正則である.

Definition 1.1.12. (Sorgenfrey 直線)
$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ によって生成される位相空間を Sorgenfrey 直線という.

Example 1.1.13. (正規空間の例)
Sorgenfrey 直線は正規である.
また, $X = \{0, 1\}, \mathscr{T} = \{\varnothing, \{1\}, X\}$ とするとき $(X, \mathscr{T})$ は正規空間である.

1.2 準備

Definition 1.2.1. (細分)
X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta \mid \beta \in B\}$ とする. このとき, 写像 $\varphi\colon A \to B$ で $\varphi(\alpha) = \beta$ なら $U_\alpha \subset V_\beta$ となるような写像が存在するとき, $\mathcal{U}$ は $\mathcal{V}$ の細分であるという. $\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ の細分であるとき, $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ と書き, $\{U\} < \mathcal{V}$ のとき単純に $U < \mathcal{V}$ と書く.

Definition 1.2.2. (全体正規空間, Δ 細分)
X を位相空間とする. $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, $A \subset X$ に対し,

(a) $\mathcal{U}(A) := \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \varnothing\}$,
(b) $\mathcal{U}^\Delta := \{\mathcal{U}(\{x\}) \mid x \in X\}$ と定める.

このとき,

1. X の部分集合族の列 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ について, すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{U}_i$ が X の開被覆であり, $\mathcal{U}_i \supset \mathcal{U}_{i+1}^{\Delta}$ であるとき正規列であるという.(要確認)
2. $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$ となるような正規列 $\{\mathcal{U}_i\}$ が存在するとき, 開被覆 $\mathcal{U}$ は正規であるという.
3. 任意の開被覆が正規であるような位相空間 X を全体正規空間という.
4. X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U} > \mathcal{V}^{\Delta}$ となるような X の開被覆 $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の Δ 細分であるという.

Example 1.2.3. (正規列の例)
(Stone [2],1948) パラコンパクト空間の任意の開被覆は正規である.

Example 1.2.4. (全体正規空間の例)
距離空間は全体正規空間である.

Fact 1.2.5.
X を位相空間とする. このとき以下は同値.

1. X は正規空間,
2. 任意の有限開被覆が正規.

Corollary 1.2.6.
全体正規空間は正規空間である.

Theorem 1.2.7. (Turkey)
距離空間 X は全体正規空間である.

Proof. $\mathcal{U}$ を任意の X の開被覆とする. この開被覆 $\mathcal{U}$ に対して $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$ であるような正規列 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を構成する. 各点 $x \in X$ に対し, $0 < \varepsilon(x) < 1$ を $S(x\colon 6\varepsilon(x))$ が $\mathcal{U}$ を細分するようなものとする. $\mathcal{V} = \{S(p\colon \varepsilon(p)) \mid p \in X\}$ が $\mathcal{U}$ の Δ 細分であることを示す. 任意に $x \in X$ を取ってくる.

$$A_x = \{y \in X \mid S(y, \varepsilon(y)) \cap \{x\} \neq \varnothing\} = \{y \in X \mid x \in S(y, \varepsilon(y))\}$$

$$\mathcal{V} = \bigcup \{S(y\colon \varepsilon(y)) \mid y \in A_x\} \tag{1.1}$$

$$a = \sup\{\varepsilon(y) \mid y \in A_x\} \tag{1.2}$$

とおく. $z \in A_x$ で以下を満たすようなものを任意に取ってくる.

$$a/2 < \varepsilon(z) \leq a \tag{1.3}$$

u を $\mathcal{V}(x) = \bigcup\{U \in \mathcal{V} \mid U \cap \{x\} \neq \varnothing\} = \bigcup\{U \in \mathcal{V} \mid x \in U\}$ の任意の点とする. このとき $y \in A_x$ を

$$\{u,\ x\} \subset S(y\colon \varepsilon(y)) \tag{1.4}$$

を満たすように取ってくる. (1.3) を満たすような $\varepsilon(z)$ は a の定め方 (sup の性質) より存在し,

(1.4) を満たすような $y \in A_x$ は (理由考え中) 存在する. (1.3), (1.4) より,

$$\begin{aligned} d(z,u) &\leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,u) \\ &< \varepsilon(z) + \varepsilon(y) + \varepsilon(y) \leq 3a \end{aligned}$$

である. 故に $u \in S(z\colon 3\varepsilon(a))$ である. 即ち $\mathcal{V}(x) \subset S(z\colon 3a)$ である. 一方 (1.2) より $3a < 6\varepsilon(z)$ であるので, $S(z\colon 3a) \subset S(z\colon 6\varepsilon(z))$ である. 従って $\mathcal{V}(x) \subset S(z\colon 6\varepsilon(z))$ である. $S(z\colon 6\varepsilon(z)) < \mathcal{U}$ であったので, $\mathcal{V}^{\Delta} < \mathcal{U}$ である. 故に $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の Δ 細分である. □

Definition 1.2.8. (局所有限, 疎, σ-局所有限, σ-疎)
X を位相空間, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\} \subset \mathcal{P}(X)$ とする. このとき

1. 各点 $x \in X$ に対して $|\{U_\alpha \in \mathcal{U} | V \cap U_\alpha \neq \varnothing\}| < \infty$ となるような x の開近傍 V が存在するとき, $\mathcal{U}$ は X で局所有限であるという.
2. $\mathcal{U}$ は疎である. (これの定義を再確認したい)
   $\overline{\mathcal{U}}$:disjoint, $\mathcal{U}$:locally finite.
3. $\mathcal{U}$ を X で局所有限とする. このとき, $\mathcal{U}$ が可算個の局所有限な集合の和によって書かれるとき, $\mathcal{U}$ は σ-局所有限であるという. 即ち, ある局所有限な族 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在して $\mathcal{U} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_i$ を満たすとき $\mathcal{U}$ は σ-局所有限であるという. σ-疎も同様に定義される.

Definition 1.2.9. (パラコンパクト)
X を位相空間とする. 任意の開被覆の族 $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を細分するような局所有限な開被覆の族 $\{\mathcal{V}_\mu\}_{\mu\in M}$ が存在するとき X をパラコンパクトという.

Fact 1.2.10. (A.H.Stone)
X を全体正規空間, $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ を X の任意の開被覆とする. このとき $\mathcal{U}$ は 局所有限で σ-疎な開被覆によって細分される. つまり全体正規空間はパラコンパクトである.

Fact 1.2.11. (A.H.Stone-Michael)
X を正則空間とする. このとき以下は同値である.

1. X はパラコンパクト,
2. 任意の X の開被覆が σ-疎な X の開被覆によって細分される,
3. 任意の X の開被覆が σ-局所有限な X の開被覆によって細分される.

Definition 1.2.12. (族正規)
X を位相空間とする. 任意の疎である閉集合族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して, $F_\alpha \subset G_\alpha$ $(\alpha \in A)$ となる互いに素な開集合族が存在するとき, X を族正規という.

Lemma 1.2.13.
正規空間 X の任意の開被覆が σ-局所有限な X の開被覆によって細分されるとき X は族正規である.

Proof. $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ を疎な閉集合族, $\mathcal{U}$ を (ここは自分の英語が酷くて読めない) とする. □

Example 1.2.14.
Sorgenfrey 直線は族正規空間である.

Fact 1.2.15. (Urysohn の補題)
X を正規空間, A と B を交わらない閉集合とする. このとき, A の元を 0, B の元を 1 に写すような連続関数 $f : X \to [0,1]$ が存在する.

1.3 Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理

Theorem 1.3.1. (Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理, BNS)
正則空間 X について以下は同値である.

1. X は距離化可能,
2. X は σ-疎な開基を持つ,
3. X は σ-局所有限な開基を持つ.

Proof. Turkey の定理より X は全体正規空間である. 従って X はパラコンパクトである. Fact(hoge) より $\mathcal{U}_i$ が $\{S_{1/i}(x) \mid x \in X\}$ を細分するような σ-疎な開被覆 $\mathcal{U}_i$ が存在する. 任意に $x \in X$ を取ってくる. このとき, $\mathcal{U}_i$ は開被覆であることより, $B_1,\ B_2 \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_i$ で $x \in B_1 \cap B_2$ であるようなものが存在する. また, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{S_{1/i}(x) \mid x \in X\}$ が X の開被覆であることより, $S_{1/i_0}(x) \subset B_1 \cap B_2$ かつ σ-疎な開被覆 $\mathcal{U}_{i_0}$ によって細分されるような $i_0 \in \mathbb{N}$ が存在することから, $x \in \mathcal{V} \subset S_{1/i_0}(x)$ となるような $\mathcal{V} \in \mathcal{U}_{i_0}$ が存在する. 従って $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_i$ は σ-疎な X の開基である. □

Example 1.3.2.
有限集合とは限らない集合について, 離散空間を考えたときこの位相空間は距離化可能である.
具体的には, 離散距離によって距離化可能である.

Example 1.3.3.
Sorgenfrey 直線は距離化可能ではない.

第 2 章

付録

どんな空間が距離化可能であるかという問題は,Bing-Nagata-Smirnov の距離化定理で終わりではない. この定理は他の距離化定理を示すときによく使われる.

2.1 BNS を用いる距離化定理

BNS を用いる距離化定理を紹介する. また,BNS を用いると Urysohn の補題は自明となる.

Theorem 2.1.1. (Urysohn の距離化定理)
第二可算かつ正規な位相空間 X は距離化可能である.

Definition 2.1.2. (展開列, 展開空間)
$(X, \mathscr{T})$ を位相空間とする. このとき,

1. X の開被覆の列 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が X の展開列である.
   $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X,\ \{\mathcal{U}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$:local basis of x.
   $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X, \forall U \in \mathcal{U}(x), \exists B \in \{\mathcal{U}_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$ s.t. $B \subset U$
2. 空間 X は展開空間である. $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ は展開列を持つ.

Fact 2.1.3. (Alexandroff-Urysohn)
空間 X が正規列な展開列 $\{\mathcal{U}_i\}$ を持つとき, X は距離化可能である.

Fact 2.1.4. (Bing)
族正規な展開空間 X は距離化可能である.

参考文献

[1] 児玉 之宏, 永見 啓応 (1974)『位相空間論』

[2] A. H. Stone(1948)『Paracompactness and product spaces』