Definition 1. (分離公理)

X を位相空間とする．このとき,

1. 任意の $x \in X$ について一点集合 $\{x\}$ が閉集合であるとき, X を T_1 空間という．
2. 任意の相異なる二点 $x, y \in X$ について $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \varnothing$ となるような開集合 U, V が存在するとき, X を T_2 空間あるいは Hausdorff 空間という．
3. T_1 空間 X が任意の $x \in X$ と任意の x を含まない閉集合 F に対して, $x \in U, F \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすような開集合 U, V が存在するとき, X を正則空間という．
4. T_1 空間 X が任意の交わらない閉集合 E, F に対して $E \subset U$, $F \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすような開集合 U, V が存在するとき, X を正規空間という．

Theorem 2.

X を位相空間とする． X が正規空間ならば正則空間であり, 正則空間ならば Hausdorff 空間であり, Hausdorff 空間ならば T_1 空間である．

Proof.

1. X を正規空間とする．任意に点 $x \in X$ を取ってくる．このとき, X は T_1 空間であるので一点集合 $\{x\}$ は閉集合である．任意の x を含まない閉集合 F を取ってくると, $\{x\} \cap F = \varnothing$ であるので $\{x\} \subset U$, $F \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすような開集合 U, V が存在する．従って $x \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ であるので X は正則空間である．
2. 任意に異なる 2 点 $x, y \in X$ を取ってくる．このとき X が T_1 空間であることより一点集合 $\{x\}$, $\{y\}$ は閉集合である．$x \neq y$ より $x \notin \{y\}$ であるので, $x \in U$, $\{y\} \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ であるような開集合 U, V が存在する．従って $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ であるので X は Hausdorff 空間である．
3. 任意に $x \in X$ を取ってくる．このとき点 x と異なる任意の点 $y \in X$ に対して, $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \varnothing$ となるような開集合 U, V が存在するので, $y \in U \subset X \setminus \{x\}$ である．従って $X \setminus \{x\}$ は開集合である．

□

Theorem 3. (Hausdorff 性の特徴付け)

X を位相空間とする．このとき以下は同値である．

1. X は Hausdorff 空間である．
2. $\Delta = \{(x,x) \in X \mid x \in X\}$ は直積位相の下 $X \times X$ 上閉である．

Proof.

1. $\Rightarrow$ 2.

$(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ なら $x \neq y$ であるので，それぞれ x ,y の開近傍 U ,V で $U \cap V = \varnothing$ であるものが存在する．このとき $x \neq y$ より $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$ であり，$(x,y) \in U \times V$ であるので $(X \times X) \setminus \Delta$ は開集合である．従って対角線集合 Δ は閉集合である．

2. $\Rightarrow$ 1.

任意に $x, y \in X$, $x \neq y$ を取ってくる．このとき $(x,y) \notin \Delta$ であるので，ある開集合 U, V を用いて $(x,y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$ とできる．従って $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$ より $U \cap V = \varnothing$ かつ $x \in U$, $y \in V$ であるので X は Hausdorff 空間である． $\square$