インテリジェントロボットモーション

ラグランジュ法

Lagrangian Formulation

2023 年 7 月 20 日 提出

千葉工業大学 先進工学部 未来ロボティクス学科

20C1102 馬場 琉生

概要

ラグランジュ法

三次元空間で運動する場合，並進運動と回転運動の 2 つの成分に分けられる．並進運動はニュートンの運動方程式，回転運動はオイラーの運動方程式で記述することができ，これらを合わせてニュートン・オイラー法と呼ぶ．ニュートン・オイラー法を利用することで，各リンクの重心に作用する力とトルクを計算することができる．この代替手法として，ラグランジュ法が挙げられる．ラグランジュ法は，エネルギベースのアプローチで，剛体リンクを備えた直動マニピュレータにある程度特化している．

キーワード: ラグランジュ，運動エネルギ，位置エネルギ

目次

図目次

第 1 章

マニピュレータの正しい描き方

マニピュレータには正しい図の描き方がある．図に描いたマニピュレータの例を以下の図 1 に示す．（a）と（b）はそれぞれ 2 自由度のマニピュレータを表しており，角度 θ と長さ l の矢印以外は同じである．角度 θ についてはプラスとマイナスがあるため，矢印の方向に気を付ける必要がある．よって，（b）のような矢印の描き方が望まれる．また，長さ l についてはプラスしかないため，これも（b）のような矢印の描き方が望まれる．

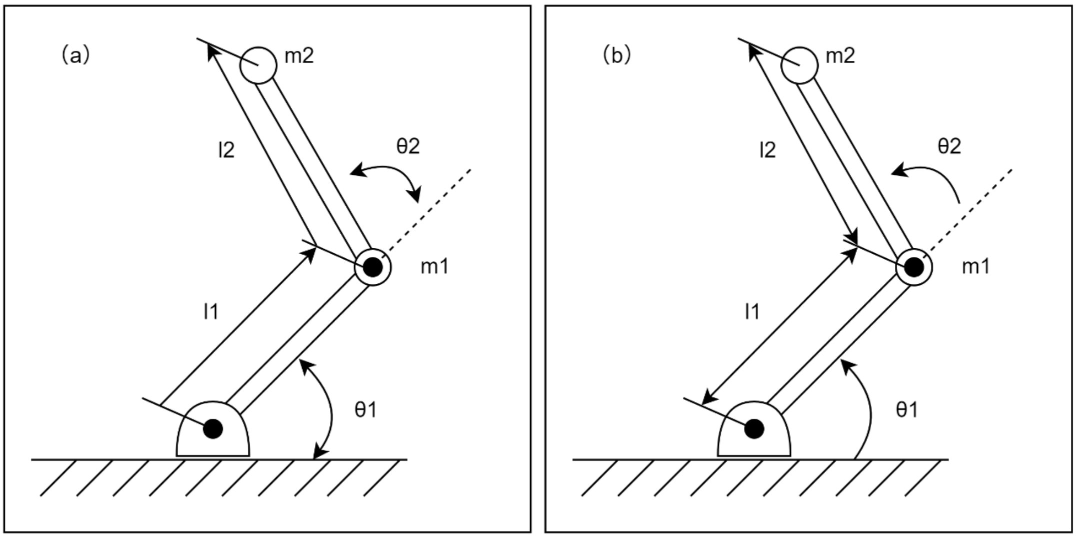

Fig. 1.1　Manipulator

第 2 章

ラグランジュ法

三次元空間で運動する場合，並進運動と回転運動の 2 つの成分に分けられる．並進運動はニュートンの運動方程式，回転運動はオイラーの運動方程式で記述することができ，これらを合わせてニュートン・オイラー法と呼ぶ．ニュートン・オイラー法を利用することで，各リンクの重心に作用する力とトルクを計算することができる．この代替手法として，**ラグランジュ法**が挙げられる．ラグランジュ法は，エネルギベースのアプローチで，剛体リンクを備えた直動マニピュレータにある程度特化している．

2.1　運動エネルギ

マニピュレータの運動エネルギの式を定義する．i 番目のリンクの運動エネルギ k は，以下の式 (2.1) のように表すことができる．

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2}\, {}^i\omega_i^T \, {}^{Ci}I_i \, {}^i\omega_i \tag{2.1}$$

ここで，式 (2.1) の第 1 項はリンクの重心の速度による運動エネルギであり，第 2 項はリンクの角速度による運動エネルギである．マニピュレータの総運動エネルギは，個々のリンクの運動エネルギの合計なので，

$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{2.2}$$

と表すことができる．式 (2.1) の v_{Ci} と ${}^i\omega_i$ は θ と $\dot{\theta}$ の関数なので，マニピュレータの運動エネルギは関節の位置と速度 $k(\theta, \dot{\theta})$ の関数としてスカラで記述できる．実際，マニピュレータの運動エネルギは次のように与えられる．

$$k(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \tag{2.3}$$

ここで，$M(\theta)$ は $n \times n$ で表されるマニピュレータの質量行列である．式 (2.3) の形式は，二次関数として知られている．展開すると，結果として得られるスカラ方程式が二次関数に依存する項のみで構成される．さらに，総運動エネルギは常に正でなければならないため，マニピュレータの質量行列は正定行列である必要がある．正定行列は，二次関数が常に正のスカラであるという特性を持つ行列である．

2.2　位置エネルギ

マニピュレータの位置エネルギの式を定義する．i 番目のリンクの位置エネルギ u_i は，以下の式 (2.4) のように表すことができる．

$$u_i = -m_i {}^0g^T\ {}^0P_{Ci} + u_{refi} \tag{2.4}$$

ここで，${}^0g$ は 3×1 の重力ベクトル，${}^0P_{Ci}$ は i 番目のリンクの重心位置を示すベクトル，u_{refi} は u_i の最小値が得られるように選択された定数である．マニピュレータに保存される位置エネルギの合計は，個々のリンクの位置エネルギの合計なので，

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \tag{2.5}$$

と表すことができる．式 (2.4) の ${}^0P_{Ci}$ は θ の関数なので，マニピュレータの位置エネルギは関節位置 $u(\theta)$ の関数としてスカラで記述できる．

2.3 ラグランジュ

動的なラグランジュの定式では，機械システムの運動エネルギと位置エネルギの差として定義されるラグランジュと呼ばれるスカラ関数から方程式を導き出す手段を提供している．マニピュレータのラグランジュを式で表すと以下の式 (2.6) のようになる．

$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = k(\theta,\dot{\theta}) - u(\theta) \tag{2.6}$$

マニピュレータの運動方程式は以下の式 (2.7) のようになる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \tau \tag{2.7}$$

ここで τ はアクチュエータのトルクで $n \times 1$ ベクトルである．マニピュレータの場合，この方程式は,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau \tag{2.8}$$

のように $k(\cdot)$ と $u(\cdot)$ の引数は簡潔のため省略される．

参考文献

[1] インテリジェントロボットモーションの授業内容を参考に作成した.