UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA EN TELECOMUNICACIONES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁTEDRA: **ÁLGEBRA LINEAL**

GUÍA PRÁCTICA Nº 4

ESPACIOS VECTORIALES Y SUBESPACIOS VECTORIALES

1. Los siguientes conjuntos junto con las operaciones dadas *no* son espacios vectoriales reales. Enumere las propiedades de la definición de espacio vectorial real que no se satisfacen y muéstrelo con contraejemplos.

   a) El conjunto de todas las matrices 2×1, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $x \leq 0$, con las operaciones ordinarias en $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

   b) El conjunto de todos los triples ordenados de números reales con las operaciones

$$\begin{aligned} (x,y,z) \oplus (x',y',z') &= (x+x', y+y', z+z') \\ \alpha \odot (x,y,z) &= (x,1,z) \end{aligned}$$

   c) El conjunto de todos los pares ordenados de números reales con las operaciones

$$\begin{aligned} (x,y) \oplus (x',y') &= (x+y', x'+y) \\ \alpha \odot (x,y) &= (\alpha x, \alpha y) \end{aligned}$$

   d) El conjunto de todas las matrices 2×2 con componentes reales, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con las operaciones

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} \\ \alpha \odot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   e) El conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y el polinomio nulo con las operaciones:

$$\begin{aligned} (a_1x^2+b_1x+c_1) \oplus (a_2x^2+b_2x+c_2) &= (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \\ \alpha \odot (ax^2+bx+c) &= (\alpha a)x^2+bx+(\alpha c) \end{aligned}$$

2. Sea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas por

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) &= (x_1+x_2, y_1y_2) \\ c \odot (x_1,y_1) &= (cx_1, cy_1) \end{aligned}$$

   a) ¿Tiene esta estructura un neutro aditivo? De ser afirmativa su respuesta, indíquelo.

   b) ¿Cuáles axiomas de los espacios vectoriales no se cumplen en $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \oplus, \odot)$?

3. Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial real. Demuestre que si $v \in V$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha\cdot v = \beta\cdot v$, entonces $\alpha = \beta$.

4. ¿Cuáles de los siguientes vectores se pueden escribir como combinación lineal de $v_1 = (-1, 1, 2)$ y $v_2 = (2, 1, -2)$?

   (a) $(0, 1, 4)$ (b) $(1, 5, 2)$ (c) $(3, 9, 2)$ (d) $(0, -6, 4)$ (e) $(2, 7, 2)$

5. ¿Cuáles de los siguientes vectores se pueden escribir como combinación lineal de $v_1 = (-9, 6)$ y $v_2 = (6, -4)$?

   (a) $(0, 0)$ (b) $(-1, 4)$ (c) $(3, -2)$ (d) $(0, 7)$ (e) $(6, -4)$

6. ¿Cuáles de los siguientes vectores se pueden escribir como combinación lineal de $v_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,

   $v_2 = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$,$v_3 = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ y $v_4 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$?

   (a) $\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -23 \\ 25 & -7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 27 & -8 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Determinar para qué valores reales del parámetro $\mathbf{a}$ se puede representar al vector $(\mathbf{a}^2, 1, 1, 3\mathbf{a})$ como combinación lineal de los vectores $(\mathbf{a}, 1, 3, 6)$, $(1, -1, -1, -1)$ y $(1, 1, -1, -1)$. Encuentre, además, los coeficientes de la combinación lineal.

8. Dados los siguientes conjuntos de vectores de los espacios vectoriales reales indicados a la derecha:

   a) $S = \{(2, 0), (1, 1)\}$; $\mathbb{R}^2$

   b) $S = \{(4, -2), (-2, 1)\}$; $\mathbb{R}^2$

   c) $S = \{(-2, 1), (1, 3), (2, , -2)\}$; $\mathbb{R}^2$

   d) $S = \{(-7, 4)\}$; $\mathbb{R}^2$

   e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$; $\mathbb{R}^{2\times 1}$

   f) $S = \{2x^2 - x + 1, x^2 + 2\}$; $\mathbb{P}_2$

   g) $S = \{-x + 1, 2x\}$; $\mathbb{P}_1$

   h) $S = \{x^3 + x + 1, x^3 + 2x^2, -x, x^2 - 2x\}$; $\mathbb{P}_3$

   i) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right\}$; $\mathbb{R}^{2\times 2}$

   j) $S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$; $\mathbb{R}^{5\times 1}$

   Para cada caso, determine lo siguiente:

   (i) ¿Es linealmente dependiente o independiente el conjunto de vectores dado?

   (ii) ¿Genera el conjunto al espacio vectorial indicado?

   (iii) ¿Es el conjunto dado una base del espacio vectorial indicado?

9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{P}_3$ son *linealmente independientes*? ¿Cuáles son *linealmente dependientes*?
   a) $\{x^3+x^2+2x+1, x^3+2, 4x^3+6x^2+8x+6, 3x^2+2x+1\}$
   b) $\{x^3-2x^2+3x-1, -2x^3+4x^2-6x+2\}$
   c) $\{x^3+x^2+x+1, 2x^3+3x^2+x+2, 3x^3+x^2+2x+1, 2x^3+2x^2+x+1\}$
   d) $\{4x^3+2x^2-x+3, 6x^3+5x^2-5x+1, 2x^3-x^2+3x+5\}$

10. ¿Para qué valores reales de $\mathbf{c}$ son linealmente dependientes los vectores $(-1,0,-1),(2,1,2)$ y $(1,1,\mathbf{c})$ en $\mathbb{R}^3$?

11. ¿Para qué valores de α son linealmente dependientes los vectores
$$(\alpha+2)x^2+(\alpha-1)x+2,\ 2(\alpha+1)x^2+(\alpha-1)x+3-\alpha,\ 4x^2+2(\alpha-1)x+\alpha+1$$
en $\mathbb{P}_2$?

12. Indique cuáles de los siguientes enunciados son **verdaderos** (**V**) y cuáles son **falsos** (**F**). En cada caso, considere que trabaja en un espacio vectorial real $(V,+,\cdot)$ de dimensión $n\in\mathbb{Z}^+$.
   a) Si $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V, entonces *siempre* es cierto que S genera a V.
   b) Si $S=\{v_1,v_2,...,v_k\}\subset V$ tal que $k<n$, entonces *siempre* es cierto que S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.
   c) Si $S\subseteq V$ tal que $|S|=1$, entonces *siempre* es cierto que S es un conjunto de vectores linealmente independientes.
   d) Si S_1 y S_2 son subconjuntos finitos de V tales que $S_1\subseteq S_2$, entonces
      i) Si S_1 es linealmente dependiente, también lo es S_2.
      ii) Si S_1 es linealmente independiente, también lo es S_2.
      iii) Si S_2 es linealmente dependiente, también lo es S_1.
      iv) Si S_2 es linealmente independiente, también lo es S_1.
   e) Si $S\subseteq V$ tal que $|S|=n$, entonces *siempre* es cierto que S es una base de V.
   f) Si $V=\mathbb{R}^2$, $S=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}\subset\mathbb{R}^2$ y $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$, entonces *siempre* es cierto que S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

13. Construya una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(-2,1,0,0)$ y $(1,0,0,1)$.

14. Determine todos los valores reales de $\mathbf{a}$ para los cuales el conjunto
$$\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{a}^2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\\mathbf{a}\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$
es una base para $\mathbb{R}^{3\times1}$.

15. Determine todos los valores reales de λ para que el conjunto
$$\{t+3, 2t+\lambda^2+2\}$$
sea una base para $\mathbb{P}_1$.

16. Determine todos los valores reales de $\mathbf{x}$ para los cuales el conjunto

$$\left\{(\mathbf{x}^2,1,0),(-1,-2,\mathbf{x}),(-1,-1,0)\right\}$$

es una base para $\mathbb{R}^3$.

17. Determine todos los valores reales de $\mathbf{m}$ para que el conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{m} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{m} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{m} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{m} \end{bmatrix}\right\}$$

sea una base para $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

18. Determine todos los valores reales de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ para los cuales el conjunto

$$\left\{x^2+\mathbf{a}x+\mathbf{a}^2, x^2+\mathbf{a}x+\mathbf{ab}, \mathbf{b}x^2+\mathbf{a}^2x+\mathbf{a}^2\mathbf{b}\right\}$$

es una base para $\mathbb{P}_2$.

19. Sea $B=\{(1,2,3),(1,-1,0),(1,\mathbf{k}^2,2)\}$ y $\overrightarrow{v}=(6,3,\mathbf{k}+8)$.

   a) Determine todos los valores reales de $\mathbf{k}$ para los que B es una base de $\mathbb{R}^3$.

   b) ¿Para qué valores reales de $\mathbf{k}$ el vector $\overrightarrow{v}$ no puede ser escrito como combinación lineal de los vectores de B? Justifique su respuesta.

20. Si los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del espacio vectorial V son linealmente independientes, demuestre que los vectores $b_1=a_1$, $b_2=a_1+a_2, \ldots,$ $b_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ son linealmente independientes.

21. Sea $B_1=\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial real V.

   Determine si el conjunto formado por los vectores:

$$B_2=\{\alpha_1v_1, \alpha_1v_1+\alpha_2v_2, \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3, \ldots, \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\cdots+\alpha_nv_n\}$$

   donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ son números reales diferentes de cero, es una base de V.

22. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

   a) $W_1=\{(a,0,b)\in\mathbb{R}^3\}$

   b) $W_2=\{(2,a,b)\in\mathbb{R}^3\}$

   c) $W_3=\{(a,-b,3a+2b)\in\mathbb{R}^3\}$

   d) $W_4=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a\geq 0\}$

   e) $W_5=\{(a,a,b)\in\mathbb{R}^3\}$

   f) $W_6=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 2a-3b+c=0\}$

   g) $W_6=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a+b-c=0 \wedge 3a+b+2c=0\}$

23. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

   a) $W_1=\left\{\begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\right\}$

   b) $W_2=\{\text{Matrices simétricas de } \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

c) $W_3 = \{\text{Matrices antisimétricas de } \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

d) $W_4 = \{\text{Matrices no singulares de } \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

e) $W_5 = \{\text{Matrices triangulares inferiores de } \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

f) $W_6 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : |A| = 1\}$

g) $W_7 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : 2a - b - c = 0 \wedge a - 2c = 0 \wedge b - 3c = 0 \right\}$

24. Sea $W_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 = \alpha^2\}$ donde α es una constante real. Encuentre todos los valores reales de α para los que W_α es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

25. Respecto al conjunto

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b+c \\ b-a & b-a \end{bmatrix} \right\}$$

responda lo siguiente:

a) Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Encuentre una base y la dimensión de W.

26. Dado el conjunto

$$S = \left\{ A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : A = \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta - \alpha \\ \alpha - \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

b) Encuentre una base y la dimensión de S.

27. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demuestre que $W = \{X \in \mathbb{R}^{n\times 1} : AX = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times 1}$. *(Este conjunto W suele conocerse como "espacio solución" del sistema homogéneo $AX = 0$).*

28. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Demuestre que $W = \{X \in \mathbb{R}^{n\times 1} : AX = B\}$ *no* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times 1}$, si consideramos $B \neq 0$. *(Nótese que ahora estamos considerando el conjunto de todas las soluciones de un sistema lineal no homogéneo $AX = B$, $B \neq 0$).*

29. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : a = b + c \wedge 3d + e + f = c \wedge b + d + f = e \right\}$

a) Demuestre que W es un subespacio del espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

b) Pruebe que el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de W.

c) Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ en la base B.

30. Sea V el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes conjuntos son subespacios de V?

a) $W_1 = \{f \in V : f^{\ 2}(x) = f(x^2)\}$

b) $W_2 = \{f \in V : f\ \ (2) = f(0)\}$

31. Dado
$$W = \left\{A \in \mathbb{R}^{5\times5} : A = S + K \text{ donde } S = S^t \text{ y } K = -K^t\right\}$$
¿Es W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{5\times5}$?

32. Para $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2} : \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b+c \\ b-a & b-a \end{bmatrix} \right\}$, responda lo siguiente:

a) Demuestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

b) Obtenga una base y la dimensión de W.

33. Considere el conjunto $H = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times2} : A = \begin{bmatrix} a-b & 2b-a \\ a+b & b-a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$ y responda lo siguiente:

a) Demuestre que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

b) Halle una base y la dimensión de H.

c) Verifique si la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ pertenece o no al subespacio H.

34. Sea
$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 3\mathbf{k}-4 \\ \mathbf{k}+1 \\ 3\mathbf{k}-3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{k}+5 \\ 2\mathbf{k}-4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 3\mathbf{k}-8 \\ 2(1-\mathbf{k}) \end{bmatrix} \right\}$$
un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^{3\times1}$.

a) Determine todos los valores reales de $\mathbf{k}$ para los que el conjunto B es una base de $\mathbb{R}^{3\times1}$.

b) Halle todos los valores reales de $\mathbf{k}$ para los que el subespacio generado por B es de dimensión 2.

c) Para $\mathbf{k} = -1$, verifique si el conjunto $B^* = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ es una base del subespacio generado por B.

35. Dados los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^4$:
$$\begin{aligned} M &= \{(1,-1,1,0), (0,2,-1,1), (2,0,1,1), (-1,3,-2,1)\} \\ N &= \{(1,1,0,1), (1,3,-1,2), (-1,1,-1,0)\} \end{aligned}$$

a) Halle una base y la dimensión de $[M]$.

b) Determine si $[M] = [N]$.

36. Considere el siguiente subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^{2\times2}$
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \right\}$$

a) ¿Pertenece el vector $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ al subespacio generado por S?

b) Determine las *condiciones* que deben cumplir los elementos de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para que pertenezca al subespacio generado por S.

37. Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3k-4 \\ k+1 \\ 3k-3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k+5 \\ 2k-4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 3k-8 \\ 2(1-k) \end{bmatrix} \right\}$ un conjunto de vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

    a) Obtenga todos los valores reales de k para los que $[B]$ tiene dimensión (i) 1, (ii) 2.

    b) Para $k = 2$, responda lo siguiente:

    (i) Halle una base y la dimensión de $[B]$.

    (ii) Determine si el subespacio generado por $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ es igual a $[B]$.

    (iii) ¿El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ pertenece a $[B]$?

38. Encuentre las ecuaciones que determinan el subespacio generado por los vectores

$$p(t) = t^2 - 3t + 1,\ q(t) = t^2 - t + 1,\ r(t) = t^2 - 5t + 1$$

de $\mathbb{P}_4$ y la dimensión de $[p(t), q(t), r(t)]$.

39. Encuentre una base y la dimensión del subespacio $W_1 \cap W_2$ y la suma $W_1 + W_2$, si

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{P}_4 : 2a - b + \frac{4}{3}c - d = 0 \wedge a + \frac{2}{3}c - e = 0 \right\} \\ W_2 &= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{P}_4 : 9a - 3b + 6c - 3d - 3e = 0 \right\} \end{aligned}$$

40. Sea $\mathbb{R}^{2\times 3}$ el espacio de las matrices 2×3 y

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : a = f = 0, b + c = d + e \right\} \\ W_2 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Determine una base y la dimensión de los subespacios $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Sea $T : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ definida como

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c-d \\ 0 & c+e \\ 2a & f \end{pmatrix}$$

¿Es T una transformación lineal? Justifique su respuesta.

2. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b - c, 2a + c + 1)$$

¿Es T una transformación lineal? Justifique su respuesta.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(a, b) = (a, a + b, (a + b)^2)$$

¿Es T una transformación lineal? Justifique su respuesta.

4. Sea C una matriz de $n \times n$ fija y sea $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como $T(A) = CA$. Demuestre que T es una transformación lineal.

5. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z, r, t) = (x + 2y - 4z + 3r - t,\ x + 2y - z + 2r + t,\ 2x + 4y - 2z + 4t)$$

   a) Determine una base y la dimensión del núcleo y de la imagen de T.
   b) ¿El vector $(1, 2, 3)$ pertenece a la imagen de T?

6. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ una transformación lineal.

   a) Si $\dim(Nuc(T)) = 2$, ¿cuál es la $\dim(Im(T))$?
   b) Si $\dim(Im(T)) = 3$, ¿cuál es la $\dim(Nuc(T))$?

7. Sea $T : V \to \mathbb{R}^5$ una transformación lineal.

   a) Si T es sobre y $\dim(Nuc(T)) = 2$, ¿cuál es la $\dim(V)$?
   b) Si T es biyectiva, ¿cuál es la $\dim(V)$?

8. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ una transformación lineal cuya matriz asociada a las bases ordenadas

$$B_1 = \left\{1, 1 + x, 1 + x^2\right\}, B_2 = \left\{2, x, 1 + x^2, x - x^3\right\}$$

es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar $T(a + bx + cx^2)$.
   b) Determine una base del núcleo y una base de la imagen de T.

9. Demuestre que la aplicación

$$T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{definida por} \quad T(X) = A^t X A, \ \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal. Hallar una base y la dimensión del núcleo de T.

10. Construya una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nuc(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y - z\}$ y $T(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Obtenga también una base y dimensión de (i) el núcleo de T y (ii) la imagen de T.

11. Sea T una transformación lineal de V en W. Si los vectores $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)$ son linealmente independientes, ¿qué se puede asegurar de $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$? Justifique su respuesta.

12. Dada la aplicación

$$T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3 \quad \text{definida por} \quad T(p(x)) = (x^2 - 1)p''(x)$$

   a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) Halle la matriz asociada a T respecto a las bases ordenadas $B_1 = \{1, x^2, x, x^3\}$ y $B_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$.

   c) Determinar una base y la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

   d) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobre?

13. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una transformación lineal tal que

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = a - b + (3a - 2b + 2c)x + (a - b - 2c)x^2$$

   Sea B_1 la base canónica (ordenada) de $\mathbb{P}_2$ y $B_2 = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ otra base ordenada de $\mathbb{P}_2$.

   a) Halle la matriz asociada a T respecto a las bases ordenadas B_1 y B_2.

   b) Halle una base y la dimensión de $Nuc(T)$.

   c) Halle una base y la dimensión de $Im(T)$.

14. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,1,1) = (2,3,3) \qquad T(1,1,0) = (2,3,4) \qquad T(1,0,0) = (2,4,2)$$

   a) Encuentre $T(2, 4, -5)$

   b) Mostrar que T es invertible.

   c) Hallar la transformación inversa T^{-1}.

15. Dada la transformación lineal

$$T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$$
$$T(p(x)) = \int_0^x p(t)dt$$

   y las bases ordenadas $B_1 = \{2x - 1, 2x + 1, x(x + 1)\}$ y $B_2 = \left\{x - 1, x + 1, x^2, \frac{x^3}{3}\right\}$, de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_3$, respectivamente.

   a) Hallar la matriz asociada a T respecto a B_1 y B_2.

   b) Determine una base y la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

c) Hallar la integral del polinomio $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ usando la matriz de la transformación T (sin utilizar la integral) y verificar el resultado integrando.

16. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$, tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + az + bxy \\ 5x + 3y - z + cy^2 + d \\ x - y + 3z + f + g \end{pmatrix}$$

Determine para qué valores de a, b, c, d, e, f y g, la transformación T es lineal y la dimensión del núcleo es igual a 1.

17. Sea la función T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y) = (x \cos b - y \operatorname{sen} b,\ x \operatorname{sen} b + y \cos b)$$

con b un real fijo.

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Determine una base y dimensión del núcleo y de la imagen de T .

18. Sea

$$B_1 = \left\{ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

una base ordenada del espacio vectorial de las matrices $\mathbb{R}^{2\times2}$.

a) Halle una transformación lineal T de $\mathbb{R}^{2\times2}$ en el espacio vectorial $\mathbb{P}_3$ tal que

$$\begin{array}{ll} T(\alpha_1) = -3t^2 + 2t^3 + 2 & T(\alpha_2) = t + t^3 - 1 \\ T(\alpha_3) = -2t + t^2 + 4 & T(\alpha_4) = -t - 3t^2 + t^3 + 3 \end{array}$$

b) Hallar la matriz asociada de T respecto a B_1 y $B_2 = \{1, t, t^2, t^3\}$.

c) Determine una base y la dimensión del núcleo y la imagen de T .

19. Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^{2\times2}$ la transformación lineal definida por

$$\begin{array}{ll} T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & T(-x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T(x^2 - 2x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & T(x^3 - x) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Halle la matriz asociada a T respecto a las bases ordenadas

$$B_1 = \{x^3, x^2, x, 1\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Halle $T(a + bx + cx^2 + dx^3)$.

c) Halle una base y la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

d) ¿Es T invertible? Justifique su respuesta. De ser invertible, obtenga $T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

20. Sean $T:\mathbb{R}^{3\times 1}\to\mathbb{P}_2$ una transformación lineal,

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\text{ y } B_2=\left\{-x+1,\ x^2+1,\ x\right\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ y $\mathbb{P}_2$, respectivamente. Si $k\in\mathbb{R}$ y $M_T=\begin{bmatrix}2&-k&4\\k-3&1&-2\\1&0&1\end{bmatrix}$ es la matriz asociada a T respecto a las bases B_1 y B_2, responda lo siguiente:

a) ¿Para qué valores reales de k la transformación lineal T es invertible?

b) Para $k=1$

1) ¿T es inyectiva?
2) ¿T es sobreyectiva?
3) ¿Existe T^{-1}? En caso afirmativo halle una fórmula para $T^{-1}\left(ax^2+bx+c\right)$.

21. Sea $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ una transformación lineal definida por $T(A)=A+A^t$.

a) Halle una base y la dimensión del núcleo de T.

b) Halle una base y la dimensión de la imagen de T.

c) Si consideramos las siguientes bases ordenadas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}\text{ y}$$

$$B_2=\left\{\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix}\right\}.$$

Halle la matriz de la transformación lineal T respecto a las bases B_1 y B_2.

d) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva? ¿Es T biyectiva?

e) ¿Es T invertible? Justifique su respuesta. De ser invertible, obtenga T^{-1}.

22. Sean $B_1=\{t^2-1,-t^2+2t,2t^2\}, B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ bases ordenadas de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}^{3\times 1}$, respectivamente. Sea $T:\mathbb{P}_2\to\mathbb{R}^{3\times 1}$ una transformación lineal cuya matriz asociada respecto a B_1 y B_2 es:

$$M_T=\begin{bmatrix}-2&3&\alpha^2-3\\-6&1-4\alpha&3\\\alpha^2&-6&-2\end{bmatrix}\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

a) Hallar la fórmula para $T(at^2+bt+c)$.

b) Hallar todos los valores reales de α para los cuales T es invertible.

c) Para $\alpha=2$ halle una base y la dimensión del núcleo de T.

23. Sea $T:\mathbb{P}_2\longrightarrow\mathbb{P}_3$ una función definida por

$$T(p(x))=xp'(x)+\int_0^{x+1}p(t)dt$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

24. Sean $B_1 = \{(1,1,-1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ y $B_2 = \{t^2 - t, 2t, -t+2\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_2$ respectivamente, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ una transformación lineal cuya matriz asociada respecto a B_1 y B_2 es $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Halle:

   a) una fórmula para $T(x, y, z)$.

   b) una base y la dimensión para el núcleo de T y para la imagen de T.