TESTE DIAGNÓSTICO BLACKBOARD

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3 + 2\ell_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. A é não-singular?

V $\quad car(A) = n = 3$

2. $det(A) = -1$?

F $\quad |A| = (-1)^{3+3} * (-1) * \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$

3. ∘ $\dim CS(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

V $\quad$ ∘ $v_1 = (1,0,2)$ $\quad v_2 = (-2,-1,-2)$ $\quad v_3 = (0,0,-1)$

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$?

$$\left.\begin{array}{l} I_3 x = v_1 \\ I_3 x = v_2 \\ I_3 x = v_3 \end{array}\right\}$$ são sempre possíveis, logo é verdade, e portanto,

3 é vdd.

4. $\sigma(A) = \{0,1\}$?

F

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \times (\lambda+1) \times \Big((\lambda-1)(\lambda+1)\Big)$$

$$= (\lambda+1)^2 (\lambda-1)$$

$\sigma(A) = \{-1, 1\}$

$$= (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$= \lambda^3 + \cancel{2}\lambda^2 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda^2} - \cancel{2}\lambda - 1$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$$

(5) O poli. car. de A é x^3+x^2-x-1

(V)

(6) $m_a(-1)=2$

(V)

$(\lambda+1)=(\lambda-(-1))$ surge ao quadrado no polinómio característico (é um zero duplo)

(7) $m_g(-1)=1$

(F)

$$N(-I-A)=\begin{pmatrix}-1-1 & +2 & 0\\ 0 & -1+1 & 0\\ -2 & 2 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_3-l_1}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow -2x+2y+0z=0$$

$$\Leftrightarrow -2x=-2y$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$N(-I-A)=\{(1,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\dim N(-I-A)=2=m_g(-1)$$

(8)

(F)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{l_3-2l_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3+2l_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{l_1-2l_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ +2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

(9) $\underline{A^2 = I_3}$

(V) $AA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1+0+0 & -2+2+0 & 0 \\ 0+0+0 & +1 & 0 \\ 2-2 & -4+2+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

<u>A é diagonalizável?</u>

(10) Pode obter-se dois vectores de $\lambda = -1$ e um de $\lambda = 1$ linearmente indp., e como a matriz A é 3×3, então é diagonalizável.

(V)

OU

Uma vez que, para qualquer $\lambda \in \sigma(A)$, $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$, então a matriz é diagonalizável.

(11) <u>car(A) = 2</u>

Ver (1)

(F)

(12) $nul(A) = n - car(A) = 3 - 3 = 0 \neq 1$

(F)

(13) $\underline{CS(A') = \langle (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) \rangle}$

(V) Uma vez que estes três vectores são l.i. e a dim $CS(A')$ = dim $CS(A)$, $CS(A') = CS(A)$.

(14) $\underline{N(A) = \{(0,0,0)\}}$

(V)

$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(15) $Ax=b$ é sempre possível e determinado, $\forall b$.

(V) porque $car(A)=3=n$.

(16) $CS(A') = \langle \underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{v_2}, \underbrace{(-1,1,-1)}_{v_3} \rangle$

(F)

$CS(A') = \langle [v_1\ v_2\ v_3] \rangle =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{X} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ são l. dependentes

$\Rightarrow car(X)=2$

$\Rightarrow \dim CS(A')=2$

Como $\dim CS(A') = 2 \neq 3 = \dim CS(A)$, $CS(A') \neq CS(A)$.

(17) A é ortogonal

(F) $\Downarrow$

a sua inversa é igual à sua transposta

de (8) se verifica que $A^{-1} \neq A^T$

(18) $(0,0,1)$ é vector próprio do valor próprio -1

(V)

Ver (7)