Apontamentos das aulas de Complementos de Análise Matemática

Lucile Vandembroucq e Thomas Kahl

2005/2006

Conteúdo

1 Equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem **2**
- 1.1 Equações diferenciais lineares de 1^a ordem . . . 2
- 1.2 Teorema de existência e unicidade . . . 4
- 1.3 Equações separáveis . . . 4
- 1.4 Equações exactas . . . 8
- 1.5 Mudança de função incógnita . . . 10
  - 1.5.1 Equação de Bernoulli . . . 10
  - 1.5.2 Equações homogéneas . . . 12

2 Equações diferenciais lineares de ordem n **14**
- 2.1 Conceitos básicos . . . 14
- 2.2 Equação linear homogénea . . . 15
  - 2.2.1 Resultados gerais . . . 15
  - 2.2.2 Polinómios . . . 17
  - 2.2.3 Equação linear homogénea com coeficientes constantes . . . 18
- 2.3 Determinação de uma solução particular . . . 18

3 Transformada de Laplace **21**
- 3.1 Integrais de funções seccionalmente contínuas . . . 21
- 3.2 Transformada de Laplace . . . 21
  - 3.2.1 Definição e exemplos básicos . . . 21
  - 3.2.2 Propriedades . . . 22
  - 3.2.3 Existência da transformada de Laplace . . . 23
  - 3.2.4 Transformada de Laplace e derivadas . . . 23
- 3.3 Transformada de Laplace inversa . . . 23
- 3.4 Convolução . . . 25
- 3.5 Aplicação às equações diferenciais . . . 26

4 Séries de Fourier **30**
- 4.1 Série de Fourier de funções periódicas . . . 30
- 4.2 Convergência da série de Fourier . . . 30
- 4.3 Coeficientes de Fourier e paridade . . . 31
- 4.4 Série de Fourier de senos de uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ . . . 32

4.5 Série de Fourier de co-senos de uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ 32

5 Equações com derivadas parciais **34**
5.1 Equação do calor (ou da difusão) 34
5.2 Equação da corda vibrante (ou das ondas) 36

1 Equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem

Vocabulário geral

Uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem é uma equação cuja incógnita é uma função real de uma variável real e que se escreve em termos da variável (por exemplo x), da função incógnita (por exemplo y) e da derivada da 1^a ordem dela (denotada por y' ou por $\dfrac{dy}{dx}$).

As equações diferenciais da 1^a ordem que vamos estudar serão equações que poderão sempre escrever-se sob a forma

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ ou, mais brevemente, } y' = f(x, y)$$

onde f é uma função definida e contínua num aberto D de $\mathbb{R}^2$.

Chamaremos *solução* da equação $y' = f(x, y)$ a uma função y definida e de classe C^1 num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ que verifica:

(i) $\forall x \in I \quad (x, y(x)) \in D$,

(ii) $\forall x \in I \quad y'(x) = f(x, y(x))$.

1.1 Equações diferenciais lineares de 1^a ordem

Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma equação diferencial (ordinária) linear de 1^a ordem em I é uma equação diferencial do tipo

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in I$$

onde a, b e c são funções (conhecidas) contínuas em I e, para todo o $x \in I$, $a(x) \neq 0$.

Nota. Como a função a nunca se anula em I esta equação pode escrever-se sob a forma $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}y = \dfrac{c(x)}{a(x)}$ ou seja $y' = -\dfrac{b(x)}{a(x)}y + \dfrac{c(x)}{a(x)}$. A função f dada por $f(x, y) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}y + \dfrac{c(x)}{a(x)}$ é contínua em $D = I \times \mathbb{R}$.

Ex. 1.

$$xy'(x) + y(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in]0, +\infty[$$

é uma equação diferencial linear de 1^a ordem em $]0, +\infty[$.

Ex. 2.

$$2y' + 3y = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

é uma equação diferencial linear de 1^a ordem em $\mathbb{R}$. Uma tal equação, em que as funções a e b são constantes, é chamada *equação diferencial linear de* 1^a *ordem com coeficientes constantes.*

Ex. 3. As equações diferenciais

$$y' + y^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y'(y+1) - xy = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

não são lineares.

Resolução das equações diferenciais lineares de 1^a ordem

Seja

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in I \tag{1}$$

uma equação diferencial linear de 1^a ordem. Como a função a nunca se anula em I esta equação diferencial é equivalente à seguinte equação

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \quad x \in I \tag{2}$$

onde P e Q são as funções contínuas em I dadas por $P(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ e $Q(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$. Logo chega resolver a equação 2, o que se pode fazer do seguinte modo:

Seja $\int P(x)dx$ uma primitiva de P em I (existe pois P é contínua em I) e seja y uma função definida num intervalo aberto $J \subset I$. Como a função $e^{\int P(x)dx}$ nunca se anula em J temos:

$$y : J \to \mathbb{R} \text{ é solução da equação (2)}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad && \forall x \in J \quad && y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \\
&\Leftrightarrow && \forall x \in J && e^{\int P(x)dx}y'(x) + e^{\int P(x)dx}P(x)y(x) = e^{\int P(x)dx}Q(x) \\
&\Leftrightarrow && \forall x \in J && (e^{\int P(x)dx}y(x))' = e^{\int P(x)dx}Q(x) \\
&\Leftrightarrow && \exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in J && e^{\int P(x)dx}y(x) = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C \\
&\Leftrightarrow && \exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in J && y(x) = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}
\end{aligned}$$

Temos portanto o seguinte resultado:

Teorema. *As soluções da equação diferencial $y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \quad x \in I$ são as funções y definidas em intervalos abertos $J \subset I$ dadas por $y(x) = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}$ onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante.*

Nota. Dado $C \in R$, a solução $y : J \to \mathbb{R}$ dada por $y(x) = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}$ é, se $J \neq I$, a restrição da solução definida em tudo I pela mesma formula. Portanto a cada constante $C \in \mathbb{R}$ corresponde uma solução definida em tudo I. Temos então uma infinidade de soluções definidas em tudo I e a forma geral

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R},\, x \in I$$

é chamada *solução geral* da equação diferencial $y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \quad x \in I$.

Exercício. a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$(\mathcal{E}) : xy' - 2y = x, \quad x \in]0, +\infty[.$$

b) Determine todas as soluções da equação $(\mathcal{E})$ que verificam $y(1) = 2$.

1.2 Teorema de existência e unicidade

Nesta secção consideramos uma função $f : D \to \mathbb{R}$ definida e contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e a seguinte equação diferencial de 1^a ordem

$$(\mathcal{E}) \quad y' = f(x, y)$$

Seja $(x_0, y_0) \in D$ e seja y uma solução da equação $(\mathcal{E})$ definida num intervalo aberto I.

• Diz-se que y *passa* pelo ponto (x_0, y_0) se $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$.
• Diz-se que y é uma solução *maximal* se não é prolongável a uma outra solução de $(\mathcal{E})$ definida num intervalo aberto J tal que $I \subset J$ e $I \neq J$.

Teorema. *Seja $(x_0, y_0) \in D$. Se a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em D então:*

i) existe uma e uma só solução maximal de $(\mathcal{E})$ que passa por (x_0, y_0);

ii) toda a solução de $(\mathcal{E})$ pode ser prolongada a uma solução maximal;

iii) se y_1 e y_2 são duas soluções de $(\mathcal{E})$ definidas em intervalos I_1 e I_2 contendo x_0 que verificam $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ então $y_1(x) = y_2(x)$ para todo o $x \in I_1 \cap I_2$.

Nota. 1) Pela alínea (i) o seguinte *problema com condição inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução maximal. Resolver um tal problema consiste portanto em determinar e descrever esta solução maximal.

2) Toda a solução da da equação $(\mathcal{E})$ sendo, pela alínea (ii), ou uma solução maximal ou a restrição de uma solução maximal chega, para conhecer todas as soluções de uma equação diferencial, determinar apenas as soluções maximais dessa equação. Na seguida, quando resolveremos uma equação, apenas apresentaremos as soluções maximais dessa equação.

3) Pela alínea (iii) os gráficos de duas soluções definidas num intervalo aberto I que não são idênticas nunca se intersectam.

1.3 Equações separáveis

Definição. Uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem é dita *separável* se pode ser reduzida a uma equação diferencial do tipo

$$y' = g(x)h(y)$$

onde g é uma função real contínua e não identicamente nula num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e h é uma função real contínua num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$.

Nota. 1)Observe que a equação escreve-se sob a forma $y' = f(x, y)$ onde f é dada por $f(x, y) = g(x)h(y)$ e é contínua em $D = I \times J$.

2)Se h é de classe C^1 em J então $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em D e estamos nas condições do teorema de existência e unicidade.

Ex. As equações

$$\begin{aligned} y' &= xy^3, \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \\ (1+x^2)y' &= \frac{1}{y}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]0,+\infty[\\ y' &= x\cos^2 y, \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

são separáveis. A equação

$$y' = x^2 + y^2, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

não é separável.

Resolução das equações separáveis

Seja

$$(\mathcal{E}) \quad y' = g(x)h(y), \quad x \in I, y \in J$$

uma equação separável em que h é de classe C^1 em J.

1) Determinação das soluções constantes.

Proposição. *As soluções (maximais) constantes de* $(\mathcal{E})$ *são as funções* $y : I \to \mathbb{R}$ *dadas por* $y(x) = \lambda$ *onde* $\lambda \in J$ *é um zero de* h.

Ex.

- A função $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ é a única solução constante da equação $y' = xy^3, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.
- A equação $(1+x^2)y' = \dfrac{1}{y}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in]0,+\infty[$ não tem soluções constantes.
- A equação $y' = x\cos^2 y, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ tem uma infinidade de soluções constantes, são as funções $y(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$.

2) Determinação das soluções não constantes.

Como estamos nas condições do teorema de existência e unicidade o gráfico de uma solução y não constante de $(\mathcal{E})$ nunca intersecterá o gráfico de uma solução constante. Portanto temos $h(y(x)) \neq 0$ para todo o x no domínio de y e podemos supôr que y é da forma

$$y : I' \to J'$$

onde I' é um subintervalo de I e J' é um subintervalo de J em que h nunca se anula.

Seja H uma primitiva de $\dfrac{1}{h}$ em J', isto é $\dfrac{dH}{dy} = \dfrac{1}{h}$. Observemos que:

- $\forall x \in I' \quad (H(y(x)))' = \dfrac{y'(x)}{h(y(x))}$

- $H : J' \to \mathrm{Im}H$ é contínua, sobrejectiva e estritamente monótona. Logo H é bijectiva e admite uma função inversa que será denotada por H^{-1}.

Seja G uma primitiva de g em I. Logo G é também uma primitiva de g em I'. Temos

$$
\begin{array}{lll}
 & \multicolumn{2}{c}{y : I' \to J' \text{ é solução de } y' = g(x)h(y)} \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & y'(x) = g(x)h(y(x)) \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & \dfrac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & (H(y(x)))' = g(x) \\
\Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I' & H(y(x)) = G(x) + C \\
\Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I' & y(x) = H^{-1}(G(x) + C)
\end{array}
$$

O domínio I' de y fica para determinar (eventualmente em função da constante C). Mais precisamente, observe que, dado $C \in \mathbb{R}$, I' é um intervalo contido no conjunto $\{x \in I \,|\, G(x) + C \in \mathrm{Im}H\}$.

Ex. Como $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ é a única solução constante da equação

$$(\mathcal{E}) \quad y'(x) = xy^3(x)$$

e como a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy^3$ satisfaz as hipóteses do teorema de existência e unicidade sabemos que toda solução não constante de $(\mathcal{E})$ será ou estritamente positiva no seu domínio ($y > 0$) ou estritamente negativa no seu domínio ($y < 0$).

Determinemos as soluções (maximais) positivas de $(\mathcal{E})$ ou seja, resolvamos a equação

$$y'(x) = xy^3(x), x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Seja I' um intervalo de $I = \mathbb{R}$ e seja $y : I' \to]0, +\infty[$ uma função. Temos

$$
\begin{array}{lll}
 & \multicolumn{2}{c}{y \text{ é solução de } y' = xy^3} \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & y'(x) = xy^3(x) \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & \dfrac{y'(x)}{y(x)^3} = x \quad (\text{pois} y > 0) \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & -2\dfrac{y'(x)}{y(x)^3} = -2x \\
\Leftrightarrow & \forall x \in I' & (\dfrac{1}{y^2(x)})' = -2x \\
\Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I' & \dfrac{1}{y^2(x)} = -x^2 + C
\end{array}
$$

Observe que a imagem da função H dada por $H(y) = \dfrac{1}{y^2}$, $y > 0$ é $]0, +\infty[$. Como, para $C \leq 0$, não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $-x^2 + C \in]0, +\infty[$ não haverá soluções nesse caso. Por outro lado, se $C > 0$, temos

$$-x^2 + C > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{C} < x < \sqrt{C}.$$

Portanto, para $C > 0$ e $x \in] - \sqrt{C}, \sqrt{C}[$, temos

$$\frac{1}{y^2(x)} = -x^2 + C,\ y > 0 \Leftrightarrow y^2(x) = \frac{1}{-x^2 + C},\ y > 0 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + C}}.$$

Em conclusão, as soluções (maximais) positivas de $(\mathcal{E})$ são as funções dadas por

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + C}}, \quad C > 0,\ x \in] - \sqrt{C}, \sqrt{C}[.$$

Do mesmo modo, calculamos que as soluções (maximais) negativas de $(\mathcal{E})$ são as funções dadas por

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{-x^2 + C}}, \quad C > 0,\ x \in] - \sqrt{C}, \sqrt{C}[.$$

Nota. Na prática a resolução de uma equação separável pode fazer-se " separando as variáveis":

$$\begin{array}{ll}
 & y' = g(x)h(y) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{dy}{h(y)} = g(x)dx \\
\Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \quad \int \dfrac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C \\
\Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \quad H(y) = \int g(x)dx + C \\
\Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \quad y = H^{-1}(\int g(x)dx + C)
\end{array}$$

Nota. Por vezes, embora que a sua existência seja teoricamente garantida, não é possível explicitar a função H^{-1}. Diremos, então, que as soluções $y(x)$ são *implicitamente* dadas por $H(y) = \int g(x)dx + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1.4 Equações exactas

Definição. Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas. Suponhamos que Q nunca se anula em D e consideremos a seguinte equação diferencial ordinária de 1^a ordem

$$(\mathcal{E}) \quad P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Esta equação diferencial é dita *exacta* em D se existir uma função $F : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\forall (x,y) \in D, \quad (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right).$$

Nota. 1) Como a função Q nunca se anula em D a equação pode escrever-se sob a forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

2) Se P e Q forem de classe C^1 a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ satisfaz as hipóteses do teorema de existência e unicidade.

Condições de exactidão

Recordemos que um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é *convexo* se, dados dois pontos quaisquer (x_0, y_0) e (x_1, y_1) de C, o segmento de recta que os une está inteiramente contido em C, ou seja,

$$\forall (x_0, y_0) \in D, \forall (x_1, y_1) \in D \, \forall t \in [0,1] \quad (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \in C.$$

Teorema. *Sejam P e Q duas funções classe C^1 num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que Q nunca se anula em D e que D é convexo. Então a equação diferencial*

$$(\mathcal{E}) \quad P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta se e só se

$$\forall (x,y) \in D \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Resolução de uma equação exacta

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas tais que Q nunca se anula em D. Suponhamos que a seguinte equação diferencial

$$(\mathcal{E}) \quad P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta e seja $F : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que[1]

$$\forall (x,y) \in D, \quad (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

---

[1] Quando existir, uma tal função F deve, para verificar $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$, ser da forma $F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + k(y)$ onde $\int P(x,y)\,dx$ é uma primitiva de P em ordem a x, isto é $\dfrac{\partial}{\partial x}(\int P(x,y)\,dx) = P(x,y)$, e k é uma função que só depende da variável y. A análise, a partir dessa expressão de F, da condição $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$ permitira muitas vezes na prática de obter uma expressão explicita de uma tal função F.

Uma função y de classe C^1 num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$, $(x, y(x)) \in D$ é uma solução da equação $(\mathcal{E})$ se e só se

$$\begin{array}{lrl} & \forall x \in I, & P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x) = 0 \\ \text{sse} & \forall x \in I, & \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))y'(x) = 0 \\ \text{sse} & \forall x \in I, & \dfrac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0 \\ \text{sse} & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, & F(x,y(x)) = C \end{array}$$

Proposição. *As soluções da equação $(\mathcal{E})$ são as funções y de classe C^1 num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tais que*

- *para todo o $x \in I$, $(x, y(x)) \in D$*
- $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ F(x, y(x)) = C$.

Nota. Como a função Q nunca se anula em D, o teorema da função implícita garante a existência de soluções. Quando não será possível, na prática, explicitar estas soluções, diremos que são dadas implicitamente pela relação $F(x, y) = C$.

Exercício. Mostre que a equação diferencial

$$\frac{1}{y} + x - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx} = 0, \quad x > 0,\ y > 0$$

é exacta em $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ e determine explicitamente a sua solução geral.

Factor integrante Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas tais que Q nunca se anula em D. Consideremos a seguinte equação

$$(\mathcal{E}) \quad P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Definição. Uma função contínua $\mu : D \to \mathbb{R} \subset \{0\}$ é chamada *factor integrante* da equação $(\mathcal{E})$ se a equação diferencial

$$(\mu\mathcal{E}) \quad \mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta em D.

Nota. Como μ nunca se anula, as duas equações $(\mathcal{E})$ e $(\mu\mathcal{E})$ são equivalentes. É portanto possível resolver $(\mathcal{E})$ resolvendo $(\mu\mathcal{E})$.

Exercício. a) Mostre $\mu :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} \subset \{0\}$ dada por $\mu(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$ é um factor integrante da equação $y + xy^2 - x\dfrac{dy}{dx} = 0$.

b) Resolva a equação diferencial $y + xy^2 - x\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad x > 0,\ y > 0.$

Exercício. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $g : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua não identicamente nula.

a) Mostre que a equação $y' + g(x)y = 0$ não é exacta em $D = I \times \mathbb{R}$.

b) Verifique que $\mu : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mu(x, y) = e^{\int g(x)dx}$ é um factor integrante da equação da alínea (a).

c) Usando a alínea (b) resolva a equação diferencial $y' + g(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

1.5 Mudança de função incógnita

1.5.1 Equação de Bernoulli

Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma *equação de Bernoulli* é uma equação diferencial do tipo

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), \quad x \in I$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e a, b são funções contínuas em I.

Nota. Se $k = 0$ ou 1 a equação é linear.

Resolução para $k \notin \{0, 1\}$

Consideremos a seguinte equação de Bernoulli

$$(\mathcal{E}) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), \quad x \in I,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Observemos que a função constante $y(x) = 0$, $x \in I$ é solução de $(\mathcal{E})$. Como estamos nas condições do teorema de existência e unicidade (verifique!) toda outra solução nunca se anulará (e será ou positiva no seu domínio ou negativa no seu domínio). Vamos determinar as soluções de $(\mathcal{E})$ que nunca se anulam através da mudança de função incógnita

$$z(x) = y^{1-k}(x).$$

Correspondência entre y e z

Para $y > 0$ temos

$$z = y^{1-k} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-k}}.$$

Para $y < 0$ e k ímpar temos

$$z = y^{1-k} \Leftrightarrow y = -z^{\frac{1}{1-k}}.$$

Para $y < 0$ e k par temos

$$z = y^{1-k} \Leftrightarrow y = -(-z)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Mudança de função incógnita

Sejam $J \subset I$ um intervalo aberto, $y : J \to \mathbb{R}$ uma função que nunca se anula e $z : J \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$z(x) = y^{1-k}(x).$$

Das correspondências acima segue que y é de classe C^1 se e só se z é de classe C^1. Temos

$$z'(x) = (1-k)y^{-k}(x)y'(x).$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned}
& y \text{ é solução de } (\mathcal{E}) \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x) \\
\Leftrightarrow \ & \forall x \in J \quad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x) \\
\Leftrightarrow \ & \forall x \in J \quad (1-k)y^{-k}(x)y'(x) = (1-k)y^{-k}(x)a(x)y(x) + (1-k)y^{-k}(x)b(x)y^k(x) \\
\Leftrightarrow \ & \forall x \in J \quad (1-k)y^{-k}(x)y'(x) = (1-k)a(x)y^{1-k}(x) + (1-k)b(x) \\
\Leftrightarrow \ & \forall x \in J \quad z'(x) = (1-k)a(x)z(x) + (1-k)b(x) \\
\Leftrightarrow \ & z \text{ é solução de } (\mathcal{E}') \quad z' = (1-k)a(x)z + (1-k)b(x).
\end{aligned}$$

A equação diferencial $(\mathcal{E}')$ é uma equação diferencial linear de 1^a ordem que sabemos resolver. As soluções não identicamente nulas da equação $(\mathcal{E})$ são então as funções obtidas a partir das soluções de $(\mathcal{E}')$ através da correspondência entre y e z.

Exercício. Resolva a seguinte equação de Bernoulli:

$$y' = \frac{1}{x}y + y^2, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Nota. (expoentes negativos e racionais) A mudança de função incógnita

$$z(x) = y^{1-k}(x)$$

transforma as seguintes equações em equações lineares:

$$\begin{aligned}
y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), &\quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ x \in I,\ y > 0; \\
y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), &\quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ x \in I,\ y < 0; \\
y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), &\quad k \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z},\ x \in I,\ y > 0.
\end{aligned}$$

Por exemplo, a equação $y' = \dfrac{2}{x}y + x\sqrt{y}$, $x > 0$, $y > 0$ pode se resolver através da mudança $z = \sqrt{y}$. Estas equações serão também chamadas *equações de Bernoulli.*

Exercício. (*equação logística*) Um biólogo observa o crescimento de uma população de bactérias em meio fechado. A população inicial é de 100 bactérias. Devido às condições limitantes, a capacidade máxima do meio é de 1000 bactérias. Seja $N(t)$ o número de bactérias no instante t (exprimido em horas). As observações conduzem à modelisação da situação pela seguinte equação diferencial:

$$N'(t) = 0,7N(t) - \frac{0,7}{1000}N^2(t)$$

Determine $N(t)$.

Esta equação é chamada *equação logística*. Mais geralmente uma equação da forma

$$P'(t) = \alpha P(t) - \beta P^2(t)$$

onde α e β são constantes positivas é chamada *equação logística* e permite modelisar o crescimento de certas populações. Observe que é uma equação de Bernoulli e que também é uma equação separável.

1.5.2 Equações homogéneas

Nesta secção considera-se conjuntos $D \subset \mathbb{R}^2$ que têm a propriedade que, se (x, y) pertence a D, então, para qualquer $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o ponto (tx, ty) também pertence a D.

Definição. Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dita *homogénea* se, para todo o $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verifica-se

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Ex. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 + y^2}$ é homogénea.

Ex. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ é homogénea.

Definição. Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua. A equação diferencial

$$y' = f(x, y)$$

é dita *homogénea* se a função f for homogénea.

Ideia da resolução Uma equação homogénea $y' = f(x, y)$ será transformada numa equação separável através da mudança de função incógnita

$$y(x) = xv(x).$$

Exemplo. Resolvemos a seguinte equação diferencial:

$$(\mathcal{E}) \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad x > 0, y < 0.$$

Seja $D =]0, +\infty[\times] - \infty, 0[$. A função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ é homogénea. Logo $(\mathcal{E})$ é uma equação homogénea.

Mudança de função incógnita
Sejam $I \subset]0, +\infty[$ um intervalo aberto, $y : I \to] - \infty, 0[$ uma função e v a função definida em I por

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Essa função é bem definida pois x nunca se anula em I. Para todo o $x \in I$, temos

$$v(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xv(x)$$

Disso segue que

- $y < 0$ se e só se $v < 0$ pois $x > 0$
- y é de classe C^1 em I se e só se v é de classe C^1 em I.

Também temos
$$y'(x) = v(x) + xv'(x).$$
Portanto temos:
$$y : I \to]-\infty, 0[\text{ é solução de } (\mathcal{E})$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{xy(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad v(x) + xv'(x) = \frac{x^2 + x^2v^2(x)}{x(xv(x))} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad v(x) + xv'(x) = \frac{1}{v(x)} + v(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad xv'(x) = \frac{1}{v(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad v'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{v(x)} \quad (\text{pois } x \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \quad v : I \to]-\infty, 0[\text{ é solução de } (\mathcal{E}') \quad v'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{v(x)}, \quad x > 0, v < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, através da mudança $y = xv$ a equação diferencial
$$(\mathcal{E}) \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad x > 0, y < 0$$
é equivalente à equação diferencial
$$(\mathcal{E}') \quad v' = \frac{1}{x}\frac{1}{v}, \quad x > 0, v < 0.$$
A equação diferencial $(\mathcal{E}')$ é uma equação diferencial separável cujas soluções são as funções
$$v(x) = -\sqrt{2\ln x + 2C}, \quad C \in \mathbb{R}, x \in]e^{-C}, +\infty[.$$
Portanto as soluções da equação $(\mathcal{E})$ são as funções
$$y(x) = -x\sqrt{2\ln x + 2C}, \quad C \in \mathbb{R}, x \in]e^{-C}, +\infty[.$$

2 Equações diferenciais lineares de ordem n

2.1 Conceitos básicos

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Recordemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita de classe C^n se todas as suas derivadas de ordem $k \leq n$ existem e são contínuas. Quando existir a derivada de ordem k de f é denotada por $f^{(k)}$ ou ainda por $\dfrac{d^k f}{dx^k}$.

Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma equação diferencial (ordinária) linear de ordem n em I é uma equação diferencial do tipo

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ e s são funções (conhecidas) contínuas em I e, para todo o $x \in I$, $a_n(x) \neq 0$.

Uma *solução* desta equação diferencial é uma função $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n tal que

$$\forall x \in I \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = s(x)$$

As funções $a_0, a_1, ..., a_n$ são chamadas *coeficientes* da equação linear. Em particular, quando $a_0, a_1, ..., a_n$ forem constantes, diremos que a equação é uma equação linear com coeficientes constantes.

A função $s(x)$ é chamada *segundo membro* da equação. Se s for a função nula, diremos que a equação é uma equação linear *homogénea*. Caso contrário, diremos que a equação é uma equação linear *não-homogénea*.

• **Condições iniciais.**

Teorema. *Dados $x_0 \in I$ e $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ em $\mathbb{R}$, existe uma única solução $y : I \to \mathbb{R}$ da equação*

$$(\mathcal{E}) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

tal que

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \quad ... \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

As condições $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \quad ... \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são chamadas *condições iniciais.*

• **Estrutura das soluções.**
À equação linear não-homogénea

$$(\mathcal{E}) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

associaremos a seguinte equação linear homogénea.

$$(\mathcal{E}_0) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

Teorema. *Seja $y_p : I \to \mathbb{R}$ uma solução particular da equação linear*

$$(\mathcal{E}) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = s(x), \quad x \in I.$$

Então uma função $y : I \to \mathbb{R}$ é solução de $(\mathcal{E})$ se e só se existe uma solução da equação linear homogénea $(\mathcal{E}_0)$ tal que $y = y_0 + y_p$.

Em outras palavras, as soluções da equação linear $(\mathcal{E})$ são da forma

$$y = y_0 + y_p$$

onde

- $y_0 : I \to \mathbb{R}$ é uma solução qualquer da equação linear homogénea $(\mathcal{E}_0)$ associada à equação $(\mathcal{E})$;
- $y_p : I \to \mathbb{R}$ é uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$.

2.2 Equação linear homogénea

2.2.1 Resultados gerais

Nesta secção consideramos a seguinte equação linear homogenéa de ordem n:

$$(\mathcal{E}_0) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

($a_0, a_1, ..., a_n$ são funções contínuas no intervalo aberto I e, para todo o $x \in I$, $a_n(x) \neq 0$).

Proposição. *Se $f_1, ..., f_p$ forem soluções de $(\mathcal{E}_0)$, então toda a combinação linear de $f_1, ..., f_p$ também é solução de $(\mathcal{E}_0)$, isto é,*

$$\forall \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p \text{ é solução de } (\mathcal{E}_0).$$

Sejam $f_1, ..., f_p$ p funções reais definidas no intervalo I. Recordemos que $f_1, ..., f_p$ são ditas

- *linearmente dependentes* se existir uma combinação linear $\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p$ tal que
  - $\lambda_1, ..., \lambda_p$ não são todos nulos,
  - $\forall x \in I \quad \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_p f_p(x) = 0$.
- *linearmente independentes* se não são linearmente dependentes, ou seja, se

$$\forall x \in I, \quad \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_p f_p(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0.$$

Independência linear e Wronskiano.

Suponhamos que $f_1, ..., f_p$ são p funções reais de classe C^{p-1} no intervalo I. À função $W(f_1, ..., f_p) : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$W(f_1, ..., f_p)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & ... & f_p(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & ... & f_p'(x) \\ .. & .. & .. & .. \\ f_1^{(p-1)}(x) & f_2^{(p-1)}(x) & ... & f_p^{(p-1)}(x) \end{vmatrix}$$

chamamos *Wronskiano* das funções $f_1, ..., f_p$.

Teorema 1. *Sejam $f_1, ..., f_p$ p funções reais de classe C^{p-1} em I. Se existir $x_0 \in I$ tal que $W(f_1, ..., f_p)(x_0) \neq 0$ então as funções $f_1, ..., f_p$ são linearmente independentes.*

Nota. A recíproca deste teorema é falsa. Por exemplo as funções $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x|x|$ são linearmente independentes mas $W(f_1, f_2) = 0$.

No entanto temos:

Teorema 2. *Sejam $f_1, ..., f_n$ n soluções de $(\mathcal{E}_0)$. As funções $f_1, ..., f_n$ são linearmente independentes se e só se, para todo o $x \in I$, $W(f_1, ..., f_n)(x) \neq 0$.*

Conjunto fundamental de soluções.

Definição. Chamamos *conjunto fundamental de soluções* duma equação linear homogénea de ordem **n** a um qualquer conjunto $\{f_1, ..., f_n\}$ de **n** soluções linearmente independentes.

Teorema 3. *1) A equação linear homogénea $(\mathcal{E}_0)$ admite um conjunto fundamental de soluções.*
2) Se $\{f_1, ..., f_n\}$ for um conjunto fundamental de soluções de $(\mathcal{E}_0)$, então toda a solução de $(\mathcal{E}_0)$ será uma combinação linear de $f_1, ..., f_n$, isto é, se y é solução de $(\mathcal{E}_0)$ então

$$\exists\, C_1, ..., C_p \in \mathbb{R}, \quad y = C_1 f_1 + ... + C_p f_p.$$

A forma geral

$$y(x) = C_1 f_1(x) + ... + C_p f_p(x), \quad x \in I$$

onde $C_1, ..., C_n$ são constantes reais arbitrarias, é chamada *solução geral* da equação $(\mathcal{E}_0)$.

2.2.2 Polinómios

Consideremos o seguinte polinómio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais

$$P(r) = a_n r^n + ... + a_1 r + a_0$$

($a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais, $a_n \neq 0$).

Teorema. *Existem números complexos $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{C}$ e números naturais $n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}^*$ tais que*

$$P(r) = a_n (r - \lambda_1)^{n_1} (r - \lambda_2)^{n_2} ... (r - \lambda_p)^{n_p}$$

e $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$.

Cada número λ_i é portanto uma raiz de P e o número natural n_i é chamado *multiplicidade* da raiz λ_i. O teorema diz que o polinómio P (de grau n) admite em $\mathbb{C}$ n raízes contando a multiplicidade.

Nota. Pode-se mostrar que se $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) é raiz de multiplicidade k de P então o seu conjugado $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ também é raiz de multiplicidade k de P.

Exemplo: Raízes em $\mathbb{C}$ de um polinómio de grau 2 com coeficientes reais.
Seja $P(r) = ar^2 + br + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Temos:

$$\begin{aligned} P(r) &= ar^2 + br + c \\ &= a(r^2 + \frac{b}{a} r + \frac{c}{a}) \\ &= a\Big((r + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\Big) \\ &= a\Big((r + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})\Big) \end{aligned}$$

Logo

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow (r + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

e podemos concluir:
– Se $b^2 - 4ac > 0$, então P tem 2 raízes reais simples (= de multiplicidade 1)

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

– Se $b^2 - 4ac = 0$, então P tem 1 raiz real dupla (= de multiplicidade 2)

$$\lambda = \frac{-b}{2a}$$

– Se $b^2 - 4ac < 0$, então P tem 2 raízes complexas conjugadas (cada uma de multiplicidade 1)

$$\lambda = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

2.2.3 Equação linear homogénea com coeficientes constantes

Nesta secção consideramos a seguinte equação linear homogenéa de ordem n com coeficientes constantes:

$$(\mathcal{E}_0) \quad a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

($a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais, $a_n \neq 0$).

A essa equação associa-se o seguinte polinómio de grau n

$$P(r) = a_n r^n + ... + a_1 r + a_0$$

chamado *polinómio característico* da equação $(\mathcal{E}_0)$.

Proposição 1. *Se $\lambda \in \mathbb{R}$ for raiz de multiplicidade $k \geq 1$ do polinómio característico de $(\mathcal{E}_0)$ então o conjunto*

$$S_\lambda = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda x}\}$$

é um conjunto de k soluções de $(\mathcal{E}_0)$ linearmente independentes.

Proposição 2. *Se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ($\beta \neq 0$) for raiz de multiplicidade $k \geq 1$ do polinómio característico de $(\mathcal{E}_0)$ então $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ também é raiz de multiplicidade k deste polinómio e o conjunto*

$$\begin{aligned} S_{\lambda,\bar{\lambda}} &= \{e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)\} \\ &\cup \{e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\} \end{aligned}$$

é um conjunto de $2k$ soluções de $(\mathcal{E}_0)$ linearmente independentes.

Teorema. *Se a cada raiz real $\lambda \in \mathbb{R}$ do polinómio característico de $(\mathcal{E}_0)$ associarmos o conjunto S_λ da Prop. 1. e a cada par $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ de raízes complexas conjugadas deste polinómio associarmos o conjunto $S_{\lambda,\bar{\lambda}}$ da Prop. 2., a reunião de todos estes conjuntos é um conjunto fundamental de soluções da equação $(\mathcal{E}_0)$.*

2.3 Determinação de uma solução particular

Recordemos que as soluções da equação diferencial linear

$$(\mathcal{E}) \quad a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = s(x), \quad x \in I$$

são da forma

$$y = y_0 + y_p$$

onde

- $y_0 : I \to \mathbb{R}$ é uma solução qualquer da equação linear homogénea $(\mathcal{E}_0)$ associada à equação $(\mathcal{E})$;
- $y_p : I \to \mathbb{R}$ é uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$.

Resolvida a equação homogénea $(\mathcal{E}_0)$, chega portanto determinar uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$ para resolvê-la. Nesta secção apresentamos o método de variação das constantes que permite determinar uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$ conhecendo um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea $(\mathcal{E}_0)$.

Método de variação das constantes

Consideremos uma equação diferencial linear de ordem n:

$$(\mathcal{E}) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

($a_0, a_1, ..., a_n$ e s são funções contínuas no intervalo aberto I e, para todo o $x \in I$, $a_n(x) \neq 0$) e suponhamos que $f_1, f_2, ..., f_n : I \to \mathbb{R}$ são n soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

$$(\mathcal{E}_0) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

Portanto todas as soluções de $(\mathcal{E}_0)$ são as funções

$$y_0(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x), \quad x \in I$$

onde $C_1, C_2, ..., C_n$ são constantes reais arbitrárias.

O principio do Método de variação das constantes é procurar uma solução particular da equação $(\mathcal{E})$ sob a forma

$$y_p(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(X) f_2(x) + ... + C_n(x) f_n(x), \quad x \in I$$

onde $C_1, C_2, ..., C_n$ são **funções** de classe C^1 em I. A existência de uma tal solução é garantida pela seguinte proposição:

Proposição. *A equação $(\mathcal{E})$ admite uma solução da forma*

$$y_p(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(X) f_2(x) + ... + C_n(x) f_n(x), \quad x \in I$$

onde $C_1, C_2, ..., C_n$ são funções de classe C^1 em I que verificam o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & ... & f_n'(x) \\ .. & .. & .. & .. \\ f_1^{(n-2)}(x) & f_2^{(n-2)}(x) & ... & f_n^{(n-2)}(x) \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ .. \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ \dfrac{s(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

Nota. Tal sistema tem solução pois o Wronskiano das funções $f_1, f_2, ..., f_n$ nunca se anula. Observemos também que, pela regra de Cramer, temos para cada $i \in \{1, ..., n\}$:

$$C_i'(x) = \frac{W_i(f_1, ..., f_n)(x)}{W(f_1, ..., f_n)(x)}$$

onde $W_i(f_1, ..., f_n)(x)$ é o determinante que se obtém substituindo a i-ésima coluna do Wronskiano pela coluna $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ \frac{s(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$, isto é,

$$W_i(f_1, ..., f_p)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & ... & f_{i-1}(x) & 0 & f_{i+1}(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & ... & f_{i-1}'(x) & 0 & f_{i+1}'(x) & ... & f_n'(x) \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ f_1^{(n-1)}(x) & ... & f_{i-1}^{(n-1)}(x) & \frac{s(x)}{a_n(x)} & f_{i+1}^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

3 Transformada de Laplace

3.1 Integrais de funções seccionalmente contínuas

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita *seccionalmente contínua* se existir um número finito de números $a_0, a_1, ..., a_n$ tais que

- $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b$
- f é contínua em cada intervalo $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0, ..., n-1$.
- para cada $0 \leq i \leq n-1$ os limites laterais $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f(x)$ existem e são finitos.

O integral de f em $[a, b]$ é então definido por

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)dx$$

onde $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ é o prolongamento por continuidade de $f_{\big|]a_i,a_{i+1}[}$ (=restrição de f em $]a_i, a_{i+1}[$).

Uma função $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua se for seccionalmente contínua em cada intervalo $[a, b]$ com $b > a$. O *integral impróprio* de f em $[a, +\infty[$ é então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

quando existir este limite. Dizemos que o integral impróprio é *convergente* quando o limite $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe e é finito. Dizemos que o integral impróprio é *divergente* caso contrário.

3.2 Transformada de Laplace

3.2.1 Definição e exemplos básicos

Definição. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua. A *Transformada de Laplace* de f é a função real $\mathcal{L}\{f\}$ dada por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

O domínio de $\mathcal{L}\{f\}$ é o conjunto dos reais s tais que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ é convergente.

Exemplos.

1. A transformada de Laplace da função constante $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$ é a função $s \mapsto \dfrac{1}{s}$ de domínio $]0, +\infty[$. Escrevemos:

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

2. A transformada de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ é a função $s \mapsto \dfrac{1}{s^2}$ de domínio $]0, +\infty[$. Escrevemos:

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

3. (Generalisação de 1. e 2.) Para $n \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

4. Seja $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,(at)\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$$

5. Para $a \geq 0$, a função $u_a : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

é chamada *função de salto unitário em a*. A sua transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$$

3.2.2 Propriedades

Proposição. *Sejam $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas funções cuja transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}$ e $\mathcal{L}\{g\}$ existem para $s > \alpha$. Então, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a transformada de Laplace de $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ existe para $s > \alpha$ e temos:*

$$\mathcal{L}\{\lambda_1 f + \lambda_2 g\}(s) = \lambda_1 \mathcal{L}\{f\}(s) + \lambda_2 \mathcal{L}\{g\}(s), \quad s > \alpha.$$

Proposição. *Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função cuja transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ existe para $s > \alpha$. Temos:*

$$\begin{array}{lrl} (a) & \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a), & s > \alpha + a \\ (b) & \mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a} F(\dfrac{s}{a}), & a > 0,\ s > a\alpha \\ (c) & \mathcal{L}\{u_a(t) f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s), & a \geq 0,\ s > \alpha \end{array}$$

Nota. Através da identificação $g(t) = f(t-a)$ a propriedade (c) pode também escrever-se

$$\mathcal{L}\{u_a(t) g(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t+a)\}.$$

3.2.3 Existência da transformada de Laplace

Definição. Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função e $\alpha > 0$ um número. Diz-se que f é de *ordem exponencial* α se existirem $M > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\forall t \geq t_0 \quad |f(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Diremos que f é de ordem exponencial se existir $\alpha > 0$ tal que f é de ordem exponencial α.

Nota. 1) Se $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} = 0$ então f é de ordem exponencial α. Em particular toda a função da forma $f(t) = e^{at} \cos(\beta t) Q(t)$ ou $f(t) = e^{at} \operatorname{sen}(\beta t) Q(t)$, onde $a < \alpha$ e Q é um polinómio, são de ordem exponencial α.

2) Se f é de ordem exponencial α então, para qualquer $s > \alpha$, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)e^{-st} = 0$.

Teorema. *A transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}$ de uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e de ordem exponencial α existe para $s > \alpha$, isto é, o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ é convergente para $s > \alpha$.*

3.2.4 Transformada de Laplace e derivadas

Teorema. *Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial α e seja $F(s)$, $s > \alpha$, a sua transformada de Laplace. Então, F é derivável tantas vezes quanto se queira e*

$$\forall n \geq 0, \quad F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}(s).$$

Teorema. *Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n-1}. Suponhamos que $f, f', ..., f^{(n-1)}$ são de ordem exponencial α e que $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$. Então a transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe para $s > \alpha$ e temos*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

3.3 Transformada de Laplace inversa

Dadas duas funções $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que têm a mesma transformada de Laplace não se pode concluir, em geral, a igualdade das duas funções. Por exemplo a função $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = 1$ se $t \neq 1$ e $g(1) = 0$ é diferente da função constante $f(t) = 1$ mas temos

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s} = \mathcal{L}\{1\}(s).$$

O seguinte teorema diz o que se pode concluir quando duas funções têm mesma transformadas de Laplace:

Teorema. *Sejam $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas funções seccionalmente contínuas tais que $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$.*

- *Se f e g forem contínuas, então $f = g$ (isto é, $\forall t \geq 0,\ f(t) = g(t)$).*
- *Se f e g não são (ambas) contínuas, então $f = g$ excepto num conjunto enumerável de pontos (isto é um conjunto finito ou em bijecção com $\mathbb{N}$).*

Definição. Seja F uma função. Chamamos *transformada de Laplace inversa* de F a uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}\{f\} = F$.

Como vimos, uma função F pode admitir diferentes transformadas de Laplace inversa. No entanto, pelo teorema acima, F pode admitir no máximo uma transformada de Laplace inversa contínua. Se existir, esta transformada de Laplace inversa contínua será denotada

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

Esta notação será estendida mais adiante para certas funções que não admitem uma transformada inversa contínua.

Exemplos. Como as funções dadas por $f(t) = t^n$, $f(t) = e^{at}$, $f(t) = \text{sen}\,(at)$, $f(t) = \cos\,(at)$ ($a \in \mathbb{R}$) são contínuas temos, para todo o $t \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}(t) &= t^n \\
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}(t) &= e^{at} \\
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\}(t) &= \text{sen}\,(at) \\
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}(t) &= \cos\,(at)
\end{aligned}$$

As propriedades da transformada de Laplace induzem propriedades da transformada inversa. Em particular:

Proposição 1. *Sejam F e G duas funções tais que $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G\}$ existem. Então, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda_1 F + \lambda_2 G\} = \lambda_1 \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \lambda_2 \mathcal{L}^{-1}\{G\}.$$

Proposição 2. *Seja F uma função tal que $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ existe. Então:*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}(t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) \\
&(b) \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(at), \quad a > 0
\end{aligned}$$

Extensão da notação $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Existem funções F que não admitem nenhuma transformada de Laplace inversa contínua, é, por exemplo, o caso da função $F(s) = \dfrac{e^{-as}}{s}$ $(a > 0)$. Neste caso vamos denotar por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ a transformada inversa f que, se existir, tem o menor número de pontos de descontinuidade e tal que em cada ponto t_i de descontinuidade tem-se $\lim_{t \to t_i^+} f(t) = f(t_i)$.

Em particular, para $a > 0$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s}\}(t) = u_a(t), \quad t \geq 0$$

e se f for contínua e $\mathcal{L}\{f\} = F$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(t) = u_a(t)f(t-a), \quad t \geq 0$$

Nota. As proposições acima ficam validas sob esta extensão.

3.4 Convolução

Definição. Sejam $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas funç ões seccionalmente contínuas. O produto de convolução de f e g é a função $f * g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Ex. O produto de convolução de f dada por $f(t) = e^t$ e de g dada por $g(t) = e^{-t}$ é dado por

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^x e^{-(t-x)} dx \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{2x} dx \\ &= e^{-t} \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) \\ &= \operatorname{sh} t \end{aligned}$$

Proposição. *O produto de convolução é comutativo, isto é,*

$$f * g = g * f.$$

Teorema. *Sejam $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas funções seccionalmente contínuas tais que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s)$ existem para $s > \alpha$. Então*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s)$$

Por este teorema, o produto de convolução pode ser usado para determinar uma transformada inversa de um produto.

Ex. Seja $H(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)s}$. Como $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s)$ e $G(s) = \dfrac{1}{s} = \mathcal{L}\{1\}(s)$ uma transformada inversa de $H(s)$ é dada pelo produto de convolução

$$\operatorname{sen} * 1(t) = \int_0^t \operatorname{sen} x dx = 1 - \cos xt$$

Portanto $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{(s^2+1)s}\}(t) = 1 - \cos t,\ t \geq 0$.

3.5 Aplicação às equações diferenciais

Usando a transformada de Laplace podemos determinar a solução de um problema com condições iniciais do tipo

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = s(t), \quad t \in [0, +\infty[\\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

onde $a_0, ..., a_n$ e $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ são reais e $s : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua com, no máximo, um número finito de descontinuidade em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial.

Quando s for uma função contínua num intervalo aberto $I \supset [0, +\infty[$ sabemos, do Capítulo 2, que este problema admite uma solução única (trata-se de uma função $y : [0, +\infty \to \mathbb{R}$ de classe C^n). Se s não é contínua em $[0, +\infty[$ (digamos s tem descontinuidades em $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$) não pode existir uma função de classe C^n que verifica o sistema acima. Neste caso chamaremos solução do problema a uma função $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

- $y, y', ..., y^{(n-1)}$ são contínuas em $[0, +\infty[$,
- As condições iniciais estão satisfeitas,
- $y^{(n)}$ existe e é contínua em cada intervalo $[0, t_1[,]t_1, t_2[, ...,]t_{n-1}, t_n[,]t_n, +\infty[$, tem limites laterais finitos em cada t_i, e a equação está satisfeita em cada destes intervalos.

Pode-se mostrar que uma tal solução existe e é única.

Recorrendo à transformada de Laplace é possível resolver um tal problema seguindo os seguintes passos:

- Determinar a transformada de Laplace da solução y procurada usando a equação diferencial e as condições iniciais.
- Determinar a transformada inversa (contínua) da função obtida no passo anterior.

Ex. Resolução de
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = u_\pi(t), \quad t \in [0, +\infty[\\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$
Seja y a solução do problema. Aplicando a transformada de Laplace à equação (supondo que as transformadas de y e y'' existem), obtemos:
$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u_\pi(t)\} \tag{3}$$
Seja $Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Temos:
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) \qquad \text{pois } y(0) = y'(0) = 0 \end{aligned}$$
$$\mathcal{L}\{u_\pi(t)\}(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s}$$
Assim, (1) fica
$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s}$$
e, portanto,
$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}$$
Calculemos agora a transformada inversa (contínua) de $Y(s)$:
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}\}(t) \\ &= u_\pi(t)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}(t-\pi) \\ &= u_\pi(t)(1 - \cos(t-\pi)) \\ &= u_\pi(t)(1 + \cos(t)) \end{aligned}$$

Usámos aqui o cálculo de convolução efectuado anteriormente. Há outra possibilidade para calcular $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}$ (veja a Nota 2.).

Pode-se verificar que a função $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $y(t) = u_\pi(t)(1 + \cos(t))$ é uma solução do problema (no sentido desejado).

Nota 1. Como a existência da transformada da solução foi suposta para efectuar estes cálculos, não é evidente, a priori, que este processo determine uma solução. É portanto a verificação que permite confirmar que a função encontrada é a solução procurada.

Nota 2. Outra possibilidade para calcular $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\}$ passa pela decomposição da fracção racional $\frac{1}{s(s^2+1)}$ em fracções simples. Para este efeito, relembramos o teorema de decomposição das fracções racionais:

Teorema. *Sejam N e D polinómios tais que N tem grau estritamente menor do que D. Suponhamos que D admite a decomposição em factores irredutíveis (em $\mathbb{R}$)*

$$D(x) = a(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{m_1}\cdots\left((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right)^{m_s}.$$

Então existem números reais $A_{i1},\ldots,A_{in_i}$ $(i=1,\ldots,r)$, $B_{j1},\ldots,B_{jm_j}$, $C_{j1},\ldots,C_{jm_j}$ $(j=1,\ldots,r)$ tais que[2]

$$\begin{aligned}
\frac{N(x)}{D(x)} &= \frac{A_{11}}{x-\lambda_1}+\cdots+\frac{A_{1n_1}}{(x-\lambda_1)^{n_1}}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\frac{A_{r1}}{x-\lambda_r}+\cdots+\frac{A_{rn_r}}{(x-\lambda_r)^{n_r}}\\
&\quad+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{m_1}}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\cdots+\frac{B_{sm_s}x+C_{sm_s}}{\left((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right)^{m_s}}.
\end{aligned}$$

Assim $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ admite uma decomposição da forma seguinte:

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1},\quad A,B,C\in\mathbb{R}$$

[2] No objectivo de calcular a transformada inversa de uma fracção, também pode-se considerar a seguinte forma equivalente da decomposição em fracções racionais simples

$$\begin{aligned}
\frac{N(x)}{D(x)} &= \frac{A_{11}}{x-\lambda_1}+\cdots+\frac{A_{1n_1}}{(x-\lambda_1)^{n_1}}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\frac{A_{r1}}{x-\lambda_r}+\cdots+\frac{A_{rn_r}}{(x-\lambda_r)^{n_r}}\\
&\quad+\frac{B_{11}(x-\alpha_1)+C_{11}\beta_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+\frac{B_{1m_1}(x-\alpha_1)+C_{1m_1}\beta_1}{\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{m_1}}\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\frac{B_{s1}(x-\alpha_s)+C_{s1}\beta_s}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+\cdots+\frac{B_{sm_s}(x-\alpha_s)+C_{sm_s}\beta_s}{\left((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right)^{m_s}}.
\end{aligned}$$

O cálculo de A, B e C dá $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$. Portanto

$$\frac{1}{s(s^2+1)}(t) = \frac{1}{s}(t) - \frac{s}{s^2+1}(t)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s^2+1)}\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} \\
&= 1 - \cos t
\end{aligned}$$

4 Séries de Fourier

4.1 Série de Fourier de funções periódicas

Sela $L > 0$. Uma função $f : D \to E$ ($D, E \subset \mathbb{R}$) é dita $2L$-periódica se, para todo o $x \in D$, $x + 2L \in D$ e $f(x + 2L) = f(x)$.

Definição. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2L$-periódica seccionalmente contínua. A *série de Fourier* de f é a série dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x))$$

onde os coeficientes a_n e b_n, chamados *coeficientes de Fourier de* f, são dados por

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\cos(\frac{n\pi}{L}t)dt, & n \geq 0 \\ \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}t)dt, & n \geq 1. \end{cases}$$

Observe, em particular, que $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$ e que $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$ é portanto o valor médio da função f no intervalo $[-L, L]$.

4.2 Convergência da série de Fourier

Relembremos que, dada uma sucessão de números reais $(\alpha_n)_{n\geq i}$, a série numérica $\sum\limits_{n=i}^{+\infty} \alpha_n$ é dita *convergente* se existir um número finito $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=i}^{N} \alpha_n = l$. Neste caso, dizemos que a série converge para l e escrevemos $\sum\limits_{n=i}^{+\infty} \alpha_n = l$.

Em particular, se consideramos, para cada $x \in D$ ($D \subset \mathbb{R}$), uma sucessão $(\alpha_n(x))_{n\geq i}$ tal que a série $\sum\limits_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x)$ converge para $l(x)$, diremos que a série $\sum\limits_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x)$ é convergente para todo o $x \in D$, e escreveremos

$$\sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x) = l(x).$$

Isto significa que a função $x \mapsto \sum\limits_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x)$ definida pela série (é uma função, pois a série é convergente) é igual à função $x \mapsto l(x)$.

O seguinte teorema dá condições em que a série de Fourier de uma função é convergente e descreve a função para a qual a série converge.

Definição. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua é dita *seccionalmente de classe* C^1 em $[a,b]$ se a sua derivada f' existe em $[a,b]$, excepto eventualmente num número finito de números $a \leq a_0 < a_1 < ... < a_k \leq b$, é contínua em cada intervalo $]a_i, a_{i+1}[$ e os limites laterais $\lim\limits_{x\to a_i^+} f'(x)$ e $\lim\limits_{x\to a_{i+1}^-} f'(x)$ existem e são finitos.

Teorema. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2L$-periódica e seccionalmente de classe C^1 em $[-L, L]$. Então a série de Fourier de f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x))$$

é convergente para cada $x \in \mathbb{R}$. Além disso, a função $F(x)$ para a qual converge a série de Fourier verifica

- $F(x) = f(x)$ se f é contínua em x,
- $F(x) = \frac{1}{2}(\lim\limits_{t\to x^-} f(t) + \lim\limits_{t\to x^+} f(t))$ se f não é contínua em x.

Notação. Escrevemos $f(x_-)$ (resp. $f(x_+)$) para o limite lateral $\lim\limits_{t\to x^-} f(t)$ (resp. $\lim\limits_{t\to x^+} f(t)$). Estes limites laterais existem e são finitos pois f é seccionalmente contínua.

4.3 Coeficientes de Fourier e paridade

Proposição. *Seja* $g : [-L, L] \to \mathbb{R}$ *(*$L > 0$*) uma função seccionalemente contínua.*
a) Se g *for ímpar em* $]-L, 0[\cup]0, L[$, *então* $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0$.
b) Se g *for par em* $]-L, 0[\cup]0, L[$, *então* $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx$.

Em consequência temos o seguinte resultado sobre os coeficientes de Fourier de uma função $2L$-periódica par ou ímpar em $]-L, 0[\cup]0, L[$:

Proposição. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função* $2L$*-periódica e seccionalmente contínua.*
a) Se f *for ímpar em* $]-L, 0[\cup]0, L[$, *então os seus coeficientes de Fourier verificam*

$$a_n = 0 \quad e \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}t)dt.$$

b) Se f *for par em* $]-L, 0[\cup]0, L[$, *então os seus coeficientes de Fourier verificam*

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(\frac{n\pi}{L}t)dt \quad e \quad b_n = 0.$$

4.4 Série de Fourier de senos de uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$

Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua.

Definição. A *extensão impar 2L-periódica de f* é a função $f_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2L$-periódica dada em $]-L, L]$ por

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

Nota. Por construção, a função f_I é ímpar em $]-L, 0[\cup]0, L[$ mas observe que, em geral, f_I não é ímpar em todo $\mathbb{R}$. Ela será ímpar em todo $\mathbb{R}$ se e só se $f(0) = f(L) = 0$.

Como f_I é ímpar em $]-L, 0[\cup]0, L[$ e coincide com f em $[0, L]$, os seus coeficientes de Fourier verificam

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f_I(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt. \end{aligned}$$

Definição. Chamamos *série de Fourier de senos* da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ à série de Fourier da sua extensão ímpar $2L$-periódica f_I, isto é, à série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x) \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt.$$

Se f for contínua e tal que $f(0) = f(L) = 0$ então a função f_I é contínua e coincide (nas condições do teorema de convergência) com a sua série de Fourier. Por conseguinte temos o seguinte resultado:

Proposição. *Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente de classe C^1. Se f é contínua e se $f(0) = f(L) = 0$ então*

$$\forall x \in [0, L], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x) \quad \textit{onde} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt.$$

4.5 Série de Fourier de co-senos de uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$

Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua.

Definição. A *extensão par 2L-periódica de f* é a função $f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2L$-periódica dada em $]-L, L]$ por

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

Como f_P é par em $]-L,0[\cup]0,L[$ e coincide com f em $[0,L]$, os seus coeficientes de Fourier verificam

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f_P(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Definição. Chamamos *série de Fourier de co-senos* da função $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ à série de Fourier da sua extensão par $2L$-periódica f_P, isto é, à série

$$C(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt.$$

Se f for contínua então a função f_P é contínua e coincide (nas condições do teorema de convergência) com a sua série de Fourier. Por conseguinte temos o seguinte resultado:

Proposição. *Seja $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ uma função seccionalmente de classe C^1. Se f é contínua então*

$$\forall x\in[0,L],\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \textit{onde} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt.$$

5 Equações com derivadas parciais

Uma *equação diferencial com derivadas parciais (EDP)* é uma equação cuja incógnita é uma função real de várias variáveis e que se escreve em termos desta função e das suas derivadas parciais. Vamos estudar dois exemplos de tais equações : a equação do calor (ou equação da difusão) e a equação da corda vibrante (ou equação das ondas).

5.1 Equação do calor (ou da difusão)

Chamamos *Problema do calor* (num objecto uni-dimensional) ao problema

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \quad \text{(equação do calor)} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \quad \text{(condições de fronteira)} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \quad \text{(condição inicial).} \end{cases}$$

onde $L > 0$ e $c > 0$ são constantes e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é uma função que verifica $f(0) = f(L) = 0$. Uma solução deste problema é uma função $u : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 que verifica o sistema acima.

Este problema descreve a variação da temperatura numa barra de comprimento L ao longo do tempo. A barra é suposta feita de material homogéneo com constante de difusividade térmica $c > 0$ e suficientemente fina de modo a admitir que a posição na barra pode ser representada por uma variável x variando de 0 a L. Assim a temperatura u só depende da posição x e do tempo t. No instante $t = 0$ a distribuição da temperatura é dada por uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ (condição inicial) que verifica $f(0) = f(L) = 0$, isto é a temperatura inicial é 0 nas extremidades da barra (isto garante a compatibilidade das duas condições). A barra é então colocada num reservatório térmico mantido a temperatura 0 e é suposto que apenas há troca de calor entre o reservatório e a barra através das extremidades, a superfície lateral da barra sendo termicamente isolada. Deste modo, as extremidades ficam mantidas a temperatura 0 (condições de fronteira). Nestas condições, a função u deve satisfazer o sistema (P) dado.

Para determinar uma solução potencial do problema do calor procede-se em dois passos:

1) A determinação de soluções do problema com condições de fronteiras

$$(P')\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

2) A integração da condição inicial afim de determinar uma solução potencial do problema completo.

Passo 1: Determinação de soluções de (P') $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$

Estabelece-se as duas seguintes pproposições:

Proposição 1. *Se* $u : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *e* $v : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *são soluções de* (P') *então, para quaisquer* $A, B \in \mathbb{R}$, *a função* $Au + Bv$ *também é solução de* (P').

Proposição 2. *Para todo* $n \geq 1$, *a função* $u_n : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *dada por*

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

é solução de (P').

Nota. A expressão das funções u_n é encontrada através do método de separação das variáveis. Este método consiste em procurar soluções do problema (P') da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$ onde F e G são funções não identicamente nulas. Nestas condições, o problema (P') conduz a um sistema de equações diferenciais lineares ordinárias

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0, \quad F(0) = F(L) = 0 \\ G'(t) - c\lambda G(t) = 0 \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante a priori qualquer. No entanto, a resolução destas equações mostre que as únicas valores de λ que proporcionam soluções não triviais do problema são os valores $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ com $n \geq 1$. Dai vem então $F(x) = (\text{constante})\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ e $G(t) = (\text{constante})e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}$.

Em consequência das proposições 1 e 2, temos que toda a combinação linear finita das funções u_n é solução de (P'). Isto é, para todo o $N \geq 1$, a função u dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4}$$

onde c_n são constantes em $\mathbb{R}$, é solução de (P').

<u>Passo 2:</u> Integração da condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Observemos que em $t = 0$ a função dada em (4) dá

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Portanto, se f for dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L] \tag{5}$$

onde b_n são números reais, temos imediatamente (identificando c_n e b_n) que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

é solução do problema.

A função f não tem, em geral, a forma dada em (5). No entanto, sob boas condições f coincide com a sua série de Fourier de senos. Mais precisamente, vimos no capitulo anterior a seguinte proposição:

Proposição. *Se $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é seccionalmente de classe C^1, contínua, e verifica $f(0) = f(L) = 0$, então*

$$\forall x \in [0, L], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x) \quad \textit{onde} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt$$

Assim, sob estas condições, é razoável esperar que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde b_n são os coeficientes da série de Fourier de senos de f, fornece uma solução do problema. Esta série é chamada a *solução formal* do problema. Para afirmar que esta série dá uma verdadeira solução do problema seria preciso verificar que a série é convergente para todo o par (x, t) e, portanto, define uma função $u : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e que esta função u é de classe C^2 e satisfaz a equação diferencial, o que necessite um resultado sobre a derivação das séries. O seguinte teorema diz que estas verificações são possíveis e que esta série é de facto a única solução do problema.

Teorema. *Sejam $L > 0$, $c > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente de classe C^1, contínua, e que verifica $f(0) = f(L) = 0$. Então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde b_n são os coeficientes da série de Fourier de senos de f, é convergente e define uma função

$$u : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

que é a única solução do problema do calor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

5.2 Equação da corda vibrante (ou das ondas)

Chamamos *Problema da corda vibrante* ao problema

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 & \text{(equação da corda vibrante)} \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t \geq 0 & \text{(condições de fronteira)} \\ y(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(posição inicial)} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(velocidade inicial)} \end{cases}$$

onde $L > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes e $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ são funções que verificam $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$. Uma solução deste problema é uma função $y : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 que verifica o sistema acima.

Este problema descreve o movimento de uma corda de comprimento L fixadas nas suas extremidades e em vibrações verticais. A constante $\alpha > 0$ depende de características físicas da corda (densidade, tensão), $y(x, t)$ represente o deslocamento vertical da corda no ponto x $(0 \leq x \leq L)$ e no instante t.

Para determinar uma solução potencial do problema da corda vibrante procede-se, como para o problema do calor, nos dois seguintes passos:

Passo 1: Determinação de soluções de (P') $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$

Estabelece-se as duas seguintes ppropoposições:

Proposição 1. *Se $y_1 : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $y_2 : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ são soluções de (P') então, para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$, a função $Ay_1 + By_2$ também é solução de (P').*

Proposição 2. *Para todo $n \geq 1$, as funções $[0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dadas por*

$$(x, t) \mapsto \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$(x, t) \mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

são soluções de (P').

Nota. Como para a equação do calor, a expressão destas funções é encontrada através do método de separação das variáveis.

Em consequência, temos que, para todo o $N \geq 1$, a função y dada por:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6}$$

onde A_n e B_n são constantes em $\mathbb{R}$, é solução de (P').

Passo 2: Integração das condição iniciais $y(x, 0) = f(x)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$.

Observemos que em $t = 0$ a função dada em (6) dá

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Também temos

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \frac{n\pi}{L}\alpha\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\right) + B_n \frac{n\pi}{L}\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e logo

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{N} B_n \frac{n\pi}{L}\alpha \mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

Como $f(0)=f(L)=0$ e $g(0)=g(L)=0$, podemos, supondo que f e g são seccionalmente de classe C^1 e contínuas, identificar f e g com as suas séries de Fourier de senos. Isto é

$$\forall x\in[0,L],\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)\quad \text{onde}\quad d_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)\mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt$$

$$\forall x\in[0,L],\quad g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} e_n \mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)\quad \text{onde}\quad e_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(t)\mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt$$

Assim, através des identificações $A_n=d_n$ e $B_n\frac{n\pi}{L}\alpha=e_n$, é razoável esperar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n\cos\,(\frac{n\pi}{L}\alpha t)+e_n\frac{L}{n\pi\alpha}\mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}\alpha t))\mathrm{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde d_n e e_n são os coeficientes das séries de Fourier de senos de f e g respectivamente, fornece uma solução do problema. Esta série é chamada a *solução formal* do problema. O seguinte teorema diz que, sob boas condições, esta série é a única solução do problema.

Teorema. *Sejam* $L > 0$, $\alpha > 0$ *duas constantes e* $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que* f *é de classe* C^2 *e verifica* $f(0) = f(L) = 0$ *e* $f''(0) = f''(L) = 0$ *e* g *é de classe* C^1 *e verifica* $g(0) = g(L) = 0$. *Então a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n \cos(\frac{n\pi}{L}\alpha t) + e_n \frac{L}{n\pi\alpha} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}\alpha t)) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde d_n *e* e_n *são os coeficientes das séries de Fourier de senos de* f *e* g *respectivamente, é convergente e define uma função* $y : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *que é a única solução do problema da corda vibrante*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ y(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$