Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Engenharia Informática

6º Trabalho de Grupo de Análise TP4 - 03 Jun

Nome: ______________________ Número: ________

Nome: Proposta de Resolução Número: ________

Justifique as respostas e apresente todos os cálculos que efectuar

1. Apresente em coordenadas cilíndricas o seguinte integral triplo:

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} x^2+y^2+x\,dzdydx.$$

2. Apresente, em coordenadas esféricas, um integral triplo que permita obter o volume do sólido S definido por

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\le x,\ 0\ge y,\ 0\ge z,\ x^2+(y+1)^2+z^2\ge 1,\ x^2+y^2+z^2\le 4\}.$$

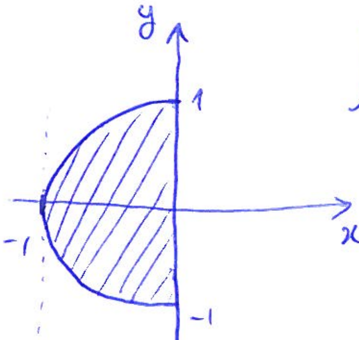
3. Considere os campos de forças $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ e $\vec{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\vec{F}(x,y)=\cos y\vec{e}_1+(3y^2-x\,\mathrm{sen}\,y)\vec{e}_2,\quad \vec{G}(x,y,z)=xy\vec{e}_1+y^3z\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

   (a) Identifique os campos conservativos. Justifique.

   (b) Obtenha uma função potencial no(s) caso(s) em que o campo é conservativo.

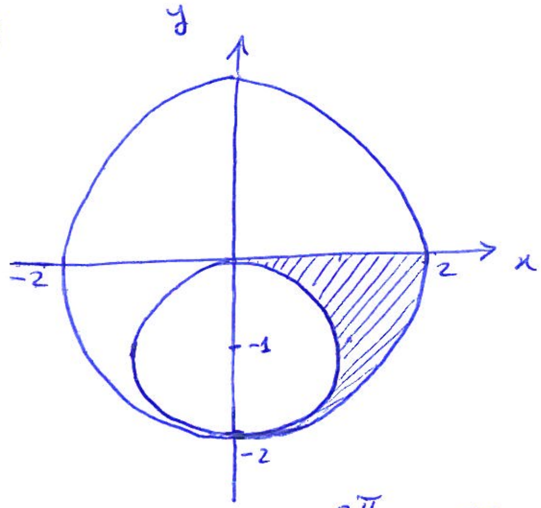
$\boxed{1}$

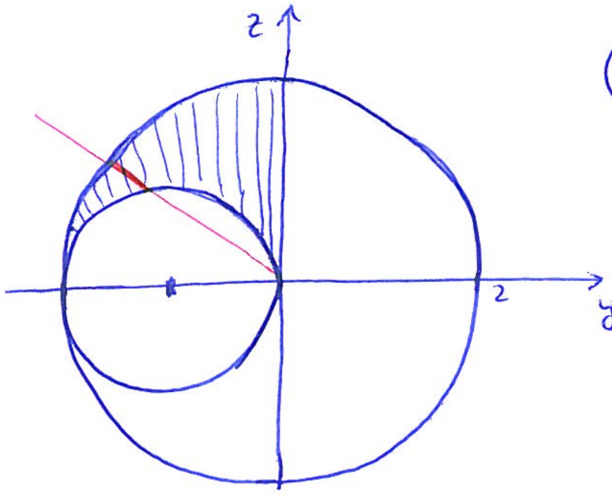


$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} x^2+y^2+x\,dz\,dy\,dx =$$

$$=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{r^2} r^2+r\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

$\boxed{2}$





$$\text{Volume}(S) = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/2} \int_{-2\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta}^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$x^2+(y+1)^2+z^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2y+\cancel{1}=\cancel{1} \Leftrightarrow \rho^2+2\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = 0 \text{ ou } \rho = -2\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$\boxed{3}$

a) $\vec{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & 6y - x\cos y \end{bmatrix}$ simétrica, logo $\vec{F}$ é campo de gradientes.

$\vec{G}'(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 3y^2 z & y^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica, logo $\vec{G}$ não é campo de gradientes.

b) $f(x,y) = ?$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \cos y \Leftrightarrow f(x,y) = \int \cos y \, dx \Leftrightarrow f(x,y) = x\cos y + C(y) \\ f_y(x,y) = 3y^2 - x\operatorname{sen} y \Leftrightarrow -x\cancel{\operatorname{sen}} y + C'(y) = 3y^2 - x\cancel{\operatorname{sen}} y \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow C'(y) = 3y^2 \Leftarrow C(y) = y^3$$

Função potencial de $\vec{F}$: $f(x,y) = x\cos y + y^3$