

Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios

2011/2012

Funções

1. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.
 - (a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.
 - (b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A ?
2. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 1$. Determine:
 - (a) $g(\{-1, 0, 1\})$
 - (b) $g([-\infty, 0])$
 - (c) $g(\mathbb{R})$
 - (d) $g^{\leftarrow}(\{0\})$
 - (e) $g^{\leftarrow}([-\infty, 0])$
3. Sejam f, g e h as funções de \mathbb{N} para \mathbb{N} definidas por:
$$f(n) = n + 1; \quad g(n) = 2n; \quad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$
Determine:
 - (a) $f \circ f$
 - (b) $f \circ g$
 - (c) $g \circ f$
 - (d) $g \circ h$
 - (e) $f \circ g \circ h$
4. Dê exemplos de:
 - (a) Duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.
 - (b) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.
5. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja:
 - i) não injectiva;
 - ii) injectiva;
 - iii) sobrejectiva;
 - iv) não sobrejectiva.
6. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injectivas, sobrejectivas ou bijectivas:
$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(x) = 2x - 1; & f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(x) = x + 1; \\ f_3 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, f_3(x) = \frac{1}{x}; & f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_4(x) = x + 1; \\ f_5 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, f_5(x) = x^2; & f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f_6(x) = |x| + 2. \end{array}$$
7. Considere as seguintes funções
$$\begin{array}{lll} f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x^3 & x \mapsto 2x - 3 & x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$$
Verifique que f, g e h são funções bijectivas e determine as respectivas funções inversas.
8. Seja $f : D \rightarrow E$ uma função. Suponha que $D \neq \emptyset$. Mostre que
 - (a) f é injectiva se e só se existe uma função $g : E \rightarrow D$ tal que $g \circ f = id_D$;
 - (b) f é sobrejectiva se e só se existe uma função $g : E \rightarrow D$ tal que $f \circ g = id_E$.