Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios — 2008/2009

1. Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:
   (a) "A Terra é redonda."
   (b) "Hoje está sol."
   (c) "$2 + x = 3$ e 2 é par."
   (d) "$(25 \times 2) + 7$"
   (e) "2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4."
   (f) "Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?"
   (g) "$4 < 3$."
   (h) "Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$."
   (i) "A U.M. é a melhor academia do país."

2. Sejam p : "Eu gosto de leite.", q : "Eu não gosto de cereais." e r : "Eu sei fazer crepes.". Traduza as seguintes proposições em palavras:

(a) $p \wedge q$	(c) $\neg r$	(e) $\neg p \vee \neg q$	(g) $(r \wedge p) \vee q$
(b) $q \vee r$	(d) $\neg(p \vee q)$	(f) $\neg p \vee q$	(h) $r \wedge (p \vee q)$

3. Considerando que p representa a proposição "O João caiu" e que q representa a proposição "O João magoou-se", escreva simbolicamente as seguintes proposições:
   (a) "O João caiu e magoou-se".
   (b) "O João caiu mas não se magoou".
   (c) "Não é verdade que o João caiu e se magoou".
   (d) "Sempre que o João cai, magoa-se".
   (e) "O João só se magoa se cair".

4. Sejam e = "A casa é azul.", f = "A casa tem 30 anos." e g = "A casa é feia.". Traduza as seguintes proposições em símbolos:
   (a) "Se a casa tem 30 anos então é feia."
   (b) "Se a casa é azul então a casa é feia ou tem 30 anos."
   (c) "Se a casa é azul então é feia ou a casa tem 30 anos."
   (d) "A casa só não é feia se não tem 30 anos."
   (e) "A casa tem 30 anos se for azul e a casa não é feia se tem 30 anos."
   (f) "Para a casa ser feia é necessário e suficiente que tenha 30 anos."

5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:
   (a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$.
   (b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.
   (c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.

(d) $\sqrt{530} < 25 \Rightarrow 530 < 25^2$

(e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas proposicionais:

(a) $p \vee (\neg p)$.
(b) $\neg(p \vee q)$.
(c) $p \wedge \neg(p \vee q)$.
(d) $p \wedge (\neg p \vee q)$.
(e) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$.
(f) $p \Leftrightarrow (q \vee p)$
(g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
(h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
(i) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.
(j) $p \wedge \neg(q \Rightarrow r)$
(k) $(p \Leftrightarrow \neg r) \vee (q \wedge r)$
(l) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

7. Suponha que p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição falsa, r é uma proposição falsa e s é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p \vee r$
(b) $(r \wedge s) \vee q$
(c) $\neg(p \wedge q)$
(d) $\neg s \vee \neg r$
(e) $(s \wedge p) \vee (q \wedge r)$
(f) $r \vee (s \vee (p \wedge q))$
(g) $r \Rightarrow q$
(h) $p \Leftrightarrow r$
(i) $(q \Leftrightarrow s) \wedge p$
(j) $s \Rightarrow (p \Rightarrow \neg s)$
(k) $((q \Rightarrow s) \Leftrightarrow s) \wedge \neg p$
(l) $(s \Rightarrow p) \Leftrightarrow \neg(r \vee q)$

8. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

(b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

(f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

9. De entre as seguintes fórmulas proposicionais, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p \Rightarrow (p \vee q)$;
(b) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$;
(c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;
(d) $(p \Rightarrow (p \vee q)) \wedge q$;
(e) $(p \vee \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$;
(f) $\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$.

10. Indique quais dos pares de fórmulas proposicionais que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p \wedge q)$; $\neg p \wedge \neg q$.

(b) $p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$.

(c) $\neg(p \Rightarrow q)$; $p \wedge (q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$.

(d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; $\neg(\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$.

11. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p \vee \neg q$ e que envolva apenas os conectivos $\wedge$ e $\neg$.

12. Numa cidade os habitantes são de dois tipos: os que mentem sempre (F) e os que dizem sempre a verdade (V). Consideremos 3 habitantes A, B e C dessa cidade. Em cada uma das alíneas, diga se é possível determinar o tipo (V ou F) de cada um desses habitantes, sabendo que eles disseram:

    (a) A: B e C são F's
    B: A é V
    C: A é F

    (b) A: B e C são do mesmo tipo
    B: eu e C somos V's
    C: B é F

13. Mostre que a soma de dois números ímpares é um número par.

14. Mostre que o produto de números ímpares é um número ímpar.

15. Sejam a, b e c três números reais tais que $a > b$. Mostre, por contraposição, que se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

16. Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

17. Encontre um contra-exemplo para cada das afirmações seguintes:
    (a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.
    (b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.
    (c) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.

18. Considere o seguinte predicado $p(n)$ sobre os números inteiros: "$n < 5 \Rightarrow n < 2$". Para cada valor de n, indique se a correspondente proposição é ou não verdadeira.

19. Suponha que os possíveis valores de x são coelhos e considere os predicados na variável x: $p(x)$: "x tem pêlo branco", $q(x)$: "x gosta de cenouras". Traduza as seguintes quantificações por palavras:
    (a) $\forall x \ \ p(x)$
    (b) $\exists x \ \ q(x)$
    (c) $\forall x \ \ (p(x) \wedge q(x))$
    (d) $\exists x \ \ (p(x) \vee q(x))$
    (e) $\forall x \ \ (p(x) \Rightarrow q(x))$
    (f) $\exists x \ \ (q(x) \Leftrightarrow \neg p(x))$

20. Suponha que os possíveis valores de x são cães e sejam $p(x)$: "x é preto", $q(x)$: "x tem quatro anos", $r(x)$: "x tem manchas brancas". Traduza as seguintes quantificações para linguagem simbólica.
    (a) Existe um cão preto.
    (b) Todos os cães têm quatro anos de idade.
    (c) Existe um cão preto com manchas brancas.
    (d) Todos os cães com quatro anos têm manchas brancas.
    (e) Existe um cão tal que se tem quatro anos então não tem manchas brancas.
    (f) Todos os cães são pretos se e só se não têm quatro anos.
    (g) Não existem cães pretos.

21. Exprima cada uma das seguintes proposições como quantificações:
    (a) A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais.

(b) A equação $x^2 - 4 = 0$ tem uma solução positiva.

(c) 1000000 não é o maior número natural.

(d) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(e) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

22. Construa provas para as proposições (b), (c) e (d) do exercício anterior.

23. Escreva afirmações que sejam a negação das proposições que se seguem:

    (a) Todos os peixes nadam.

    (b) Alguns jornais exageram a realidade.

    (c) Existe um gato sem cauda.

    (d) Todas as peças de Shakespeare são comédias.

24. Considere a seguinte proposição:

    "Todos os Hobbits são criaturas pacíficas".

    Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

    (a) "Todos os Hobbits são criaturas conflituosas".

    (b) "Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas".

    (c) "Existem Hobbits que são criaturas conflituosas".

    (d) "Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas".

25. Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições sem aplicar a palavra "não" aos objectos quantificados.

    (a) "Todos os rapazes são simpáticos."

    (b) "Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas".

    (c) "A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x."

    (d) "Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito."

    (e) "Todo o OVNI tem o objectivo de conquistar alguma galáxia."

    (f) "Existe uma casa tal que qualquer pessoa que lá entre fica com sardas."

    (g) "Existe um número natural que é maior que todos os outros números naturais".

26. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

    (a) $\forall x \exists y \;\; x + y = 0$

    (b) $\exists x \forall y \;\; x + y = 0$

    (c) $\exists x \forall y \;\; x + y = y$

    (d) $\forall x \;\; (x > 0 \Rightarrow \exists y \;\; xy = 1)$

    Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conectivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

27. Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

(a) $\left\{a \in A \mid a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$
(b) $\{a \in A \mid \sqrt{a} \in A\}$
(c) $\left\{a^2 \mid a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$
(d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad a^2 \in A \wedge x = \sqrt{a}\right\}$
(e) $\left\{b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in A \;\; b = a^2\right\}$
(f) $\left\{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \;\; b^2 = a\right\}$

28. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

(a) $A = \{-1, 1\}$
(b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
(c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
(d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

29. Sejam A e B dois conjuntos. Simbolize convenientemente:

(a) A e B têm um elemento em comum.

(b) Nenhum elemento de A é elemento de B.

(c) A tem um único elemento.

(d) A tem exactamente dois elementos.

30. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 \leq 4\right\}$.

(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$.

(c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$.

31. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) $5 \in A$
(b) $\{5\} \in A$
(c) $\{5, 11\} \in A$
(d) $A \subseteq \mathbb{R}$
(e) $\{5, 11\} \subseteq A$
(f) $0 \in A$
(g) $\emptyset \in A$
(h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

32. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(c) $\emptyset \notin \emptyset$
(d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

33. Prove que se $A \subseteq \emptyset$ então $A = \emptyset$.

34. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

(a) $a \in C$
(b) $b \in A$
(c) $c \notin A$
(d) $d \in B$
(e) $e \notin A$
(f) $f \notin A$

35. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

(a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$
(b) $A \nsubseteq B$ e $A \in B$
(c) $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$
(d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

36. Considere conjuntos A, B e C. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem, é ou não verdadeira.

(a) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \in C$.

(b) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

(c) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \in C$.

(d) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \subseteq C$.

37. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x = 2y\}$ e $C = \left\{x^2 \mid x \in A\right\}$. Determine

(a) $A \cup C$
(b) $A \cup A$
(c) $A \cup B$
(d) $C \cup B$
(e) $B \cup C \cup A$
(f) $A \cap B$
(g) $B \cap B$
(h) $A \backslash B$
(i) $C \backslash A$
(j) $B \backslash B$

38. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup A = A$
(b) $A \cup B = B \cup A$
(c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
(d) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$
(e) $A \backslash B \subseteq A$
(f) $A \backslash \emptyset = A$
(g) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$
(h) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$
(i) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$
(j) se $A \subseteq B$ então $A \cup (B \backslash A) = B$
(k) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
(l) $X \setminus (X \setminus A) = A$

39. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

40. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.
(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$.
(c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$.
(d) Se $A \cup B \subseteq C$ então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
(e) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$.
(f) Se $C \subseteq A \cap B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.
(g) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$.
(h) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$.
(i) Se $A \cap B \subseteq C$ então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.
(j) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$.

41. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respectivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$
(b) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

42. Sejam $A = \{1, 5, 7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1, 5, 7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

43. Determine todos os elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

44. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

45. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$.

(a) Determine
  i) $A \times C$ e $C \times A$
  ii) $(A \times C) \setminus (C \times A)$
  iii) $A \times B \times C$
  iv) $A \times \emptyset \times C$
  v) C^3
  vi) $C^3 \times B$

(b) Verifique que os conjuntos $C^3 \times B$ e $B \times C^3$ não são iguais.

(c) Qual o número de elementos dos conjuntos $A^4 \times B \times C^2$ e $C^3 \times B \times A$?

46. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que

(a) se $A \subseteq B$ então $A \times C \subseteq B \times C$
(b) se $A \subseteq B$ então $C \times A \subseteq C \times B$
(c) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$
(d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

47. Sejam A e B conjuntos. Prove que $(A \times A) \backslash (B \times B) = ((A \backslash B) \times A) \cup (A \times (A \backslash B))$.

48. Sejam A e B conjuntos tais que $A \neq B$. Suponha que C é um conjunto tal que $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

49. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

50. Prove, por indução, as seguintes propriedades dos números naturais:

(a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geq 1$.

(b) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, para todo $n \geq 1$.

(c) $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo $n \geq 1$.

51. Mostre que, para todo número natural $n \geq 3$, $n^2 > 2n + 1$

52. Para $n \in \mathbb{N}$, define-se $n!$ por $0! = 1$ e $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$. Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $2^n < n!$.

53. O seguinte exemplo é bem conhecido como uma alegada "prova" por indução que claramente não pode ser válida. Indique onde se encontra o erro.

Vamos provar que todos os gatos são da mesma cor. Mais precisamente, vamos provar que a afirmação "para qualquer colecção de n gatos, todos os gatos têm a mesma cor" é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que só há um número finito de gatos no mundo inteiro, segue que todos os gatos do mundo têm a mesma cor. Suponhamos que $n = 1$. É certamente verdade que para qualquer colecção com um gato, todos os gatos têm a mesma cor. Supondo o resultado válido para n, vamos agora mostrar o resultado para $n+1$. Consideremos a colecção $\{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ de $n + 1$ gatos. As colecções $\{G_1, \ldots, G_n\}$ e $\{G_2, \ldots, G_{n+1}\}$ têm ambas n gatos. Então, todos os gatos das duas colecções têm a mesma cor e, portanto, os gatos de $\{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ têm a mesma cor. Fica assim provado por indução que todos os gatos do mundo têm a mesma cor.

54. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

(a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.

(b) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A?

55. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 1$. Determine:

(a) $g(\{-1, 0, 1\})$ (b) $g(]-\infty, 0])$ (c) $g(\mathbb{R})$ (d) $g^{-1}(\{0\})$ (e) $g^{-1}(]-\infty, 0])$

56. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Determine:

(a) $f \circ f$ (b) $f \circ g$ (c) $g \circ f$ (d) $g \circ h$ (e) $f \circ g \circ h$

57. Dê exemplos de:

(a) Duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.

(b) Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

58. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja:

i) não injectiva; ii) injectiva; iii) sobrejectiva; iv) não sobrejectiva.

59. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injectivas, sobrejectivas ou bijectivas:

$f_1 : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_1(x) = 2x - 1$;
$f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_2(x) = x + 1$;
$f_3 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$;
$f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f_4(x) = x + 1$;
$f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, $f_5(x) = x^2$;
$f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_6(x) = |x| + 2$.

60. Considere as seguintes funções

$$f: \begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & x^3\end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3\end{array} \qquad h: \begin{array}{rcl}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{se } x < 0\end{cases}\end{array}$$

Verifique que f, g e h são funções bijectivas e determine as respectivas funções inversas.

61. Seja $f : D \to E$ uma função. Suponha que $D \neq \emptyset$. Mostre que

(a) f é injectiva se e só se existe uma função $g : E \to D$ tal que $g \circ f = id_D$;

(b) f é sobrejectiva se e só se existe uma função $g : E \to D$ tal que $f \circ g = id_E$.

62. Sejam A e B dois conjuntos equipotentes. Mostre que $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ são equipotentes.

63. Sejam A um conjunto e $b \in A$.

(a) Mostre que $\mathcal{P}(A \setminus \{b\})$ e $\{X \subset A \,|\, b \notin X\}$ são equipotentes.

(b) Suponha que A é finito. Mostre que $\mathcal{P}(A)$ é finito e que $card(\mathcal{P}(A)) = 2^{card(A)}$.

64. Para cada uma das relações seguintes indique o respectivo domínio e imagem.

(a) S é a relação $S = \{(0,1),(1,1),(2,2),(3,2),(4,3)\}$ de $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ para $B = \{1,2,3\}$.

(b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$.

(c) $|$ é a relação "divide" em $\{2,3,4,6,9,10,12,20\}$ definida por

$$a \mid b \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N} \quad b = na.$$

(d) Dado um conjunto A, T é a relação de A para $\mathcal{P}(A)$ dada por $\{(x,X) \,|\, x \in X\}$.

(e) $<$ é a relação "menor" usual em $\mathbb{N}$.

65. Seja $A = \{2,4,6,8,10\}$. Considere as seguintes relações em A: $R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(10,8)\}$, $S = \{(10,2),(10,8)\}$ e $T = \{(6,2),(6,4),(8,10)\}$. Determine

(a) R^{-1} (b) $R^{-1} \cup S^{-1}$ (c) $T \setminus S^{-1}$ (d) $T^{-1} \cap S$

(e) $S \circ T$ (f) $R \circ T$ (g) $S^{-1} \circ T^{-1}$ (h) $S^{-1} \circ S$

66. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{x,y,w,z\}$. Considere as relações binárias de A para B e de B para A, respectivamente:

$$\begin{array}{rcl} R & = & \{(1,x),(1,z),(2,y),(2,z)\} \\ S & = & \{(x,1),(x,3),(y,2),(w,2),(z,3)\}. \end{array}$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

(a) Determine:
i) R^{-1} ii) S^{-1} iii) T iv) $T \circ T$ v) U vi) $U \circ U$.

(b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(c) Indique o domínio e a imagem de R.

(d) Indique todas as relações binárias de A para B cujo domínio é $\{2,3\}$ e cuja imagem é $\{x,z\}$.

(e) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R' de A para B e S' de B para A, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

67. Investigue se as igualdades que se seguem são verdadeiras, para quaisquer relações R_1, R_2 e R_3 definidas em conjuntos apropriados.

(a) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \circ R_2^{-1})$ (b) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

(c) $(R_1 \cap R_2) \cup R_3 = R_1 \cap (R_2 \cup R_3)$ (d) $(R_1 \cup R_2) \cup R_3 = R_1 \cup (R_2 \cup R_3)$

68. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

$R_1 = \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}$, $R_2 = \{(2,3)\}$,
$R_3 = \{(1,2), (2,3), (3,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$, $R_4 = \{(a,a) \mid a \in A\} = \mathrm{id}_A$.

Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

(a) reflexiva; (b) simétrica; (c) anti-simétrica; (d) transitiva.

69. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (3, 1)\}$ uma relação binária em A. Determine a menor relação binária em A que inclua R e que seja reflexiva (respectivamente, simétrica, transitiva e de equivalência).

70. Sejam A um conjunto e R uma relação simétrica e transitiva em A. Mostre que

(a) R não é necessariamente reflexiva.

(b) Se o domínio de R é A, então R é reflexiva.

71. Considere as relações R_1, R_2 e R_3 apresentadas a seguir:

R_1 é a relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ definida por $x \; R_1 \; y$ se e só se x e y têm o mesmo resto na divisão inteira por 3;
R_2 é a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \; R_2 \; (z, w)$ se e só se $y = w$;
R_3 é a relação em $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por $(a, b) \; R_3 \; (c, d)$ se e só se $ad = bc$.

(a) Verifique que R_1, R_2 e R_3 são relações de equivalência.

(b) Para as relações R_1 e R_2 descreva cada classe de equivalência e indique o conjunto quociente.

(c) Mostre que a correspondência $[(a, b)] \mapsto \frac{a}{b}$ define uma bijecção $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/R_3 \to \mathbb{Q}$.

72. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere a relação $\sim$ em $\mathcal{P}(A)$ definida por $X \sim Y$ se e só se $X \cup \{1, 2\} = Y \cup \{1, 2\}$.

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

(b) Indique todos os elementos da classe $[\{1\}]_\sim$.

(c) Determine o conjunto quociente $\mathcal{P}(A) / \sim$.

73. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e sejam

$\Pi_1 = \{\{2,4\}, \{3\}, \{4,6\}, \{3,6,7\}\}$, $\Pi_2 = \{\{2,4,6\}, \{3,7\}\}$,
$\Pi_3 = \{\{2\}, \{3,4,7\}\}$, $\Pi_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\}$,
$\Pi_5 = \{\{2\}, \emptyset, \{3,4\}, \{6,7\}\}$, $\Pi_6 = \{\{2,6\}, \{3,7\}, \{4\}\}$.

(a) Diga, justificando, quais dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ são partições de A.

(b) Para os conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ que são partições, determine a relação de equivalência em A associada a Π_j.

74. Sejam $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 26\}$ e $\sim$ a relação de equivalência em A definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais}$$

Determine a partição de A associada a $\sim$, isto é, o conjunto quociente $A/\sim$.

75. Considere a relação $\sim$ em $\mathbb{Z}$ definida por $x \sim y$ se e só se $|x| = |y|$.

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

(b) Determine a partição de $\mathbb{Z}$ associada a $\sim$, isto é, o conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim$.

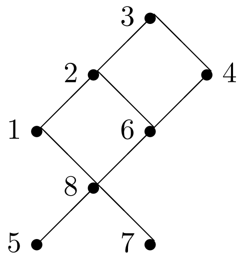
76. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A:

$\rho_1 = \{(1,1), (4,1), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4)\}$
$\rho_2 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4), (2,4)\}$
$\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
$\rho_4 = \{(1,1), (2,3), (2,2), (2,1), (3,3), (4,4), (3,1)\}$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

77. Determine todas as ordens parcias possíveis num conjunto com três elementos e construa os diagramas de Hasse correspondentes.

78. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \preceq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



Para cada um dos conjuntos X e Y determine, caso existam, os majorantes e minorantes, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.

79. Indique, ou justifique que não existe, um grafo cujos vértices têm graus

(a) $2, 2$ e 2

(b) $3, 3, 3, 3$ e 3

(c) $1, 2, 2$ e 3

(d) $2, 5$ e 5

80. Mostre que não existe nenhum grafo simples cujos vértices têm graus

(a) $7, 6, 5, 4, 3, 3$ e 2

(b) $6, 6, 5, 4, 3, 3$ e 1

81. Considere o grafo $G = (V, A, \varepsilon)$ definido por $V = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{ab, ac, bc, bd, ca, cd, ce, de, ee\}$ e $\varepsilon(ab) = \{a, b\}$, $\varepsilon(ac) = \{a, c\}$, $\varepsilon(bc) = \{b, c\}$, $\varepsilon(bd) = \{b, d\}$, $\varepsilon(ca) = \{c, a\}$, $\varepsilon(cd) = \{c, d\}$, $\varepsilon(ce) = \{c, e\}$, $\varepsilon(de) = \{d, e\}$, $\varepsilon(ee) = \{e\}$.

(a) Represente G graficamente.

(b) Determine um caminho em G com 10 arestas.

(c) Determine um trilho em G com 6 arestas.

(d) Determine um trilho simples em G com 4 arestas.

(e) Qual o número de caminhos diferentes de a para e?

(f) Determine um ciclo em G com 1 (respectivamente $2, 3, 4, 5$) arestas.

82. Verdadeiro ou falso? Cada grafo com n vértices e $n - 1$ arestas é uma árvore. Justifique a sua resposta.