UNIVERSIDADE DO MINHO		11 de janeiro de 2012
	Álgebra Linear	
	2º Teste - **A**	
LEI		Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. Seja A uma matriz real de ordem $n \in \mathbb{N}$, tal que, $det(A) = -1$.

a) O núcleo da matriz A é o conjunto $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. V F

b) $det(2A) = -2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. V F

c) Se B for uma matriz de ordem n semelhante a A então $det(B) = -1$. V F

d) Zero é valor próprio de A. V F

e) $det((A^{-1})^3) = det(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. V F

2. Seja A uma matriz de ordem 3 cujos valores próprios são, -1, 1 e 2. Os vectores $x = (1,1,1)$, $y = (2,1,-1)$ e $z = (0,1,0)$ são vectores próprios da matriz A associados aos valores próprios, -1, 1 e 2, respectivamente.

a) O vector $(6,3,-3)$ é vector próprio da matriz A. V F

b) Os valores próprios da matriz $(A + 2I_3)^{-1}$ são 1, 3 e 4. V F

c) x é vector próprio da matriz $(A + 2I_3)^{-1}$ associado ao valor próprio 1. V F

d) A dimensão do subespaço próprio associado ao valor próprio 2 é 1. V F

e) $det(A + I_3) = 0$. V F

3. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Se f é aplicação linear definida em $\mathbb{R}^4$ por $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_2 - 3e_3$, $f(e_3) = e_1$ e $f(e_4) = e_4$, então

a) $f(e_1 + 2e_2 - e_3 + 3e_4) = (0,0,0,0)$. V F

b) A matriz da aplicação linear é $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ V F

c) $f(x,y,z,t) = (x + z, x + y, -3y, t)$, para qualquer $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. V F

d) $dim(Im(f)) \leq 4$. V F

e) Não existe nenhum vector $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, tal que, $f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$. V F

II

Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3\alpha^3 & 9 & 3 \\ 2\alpha^2 & 4 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, onde α é um número real.

a) Calcule o determinante da matriz A em função do parâmetro real α.

b) Indique, justificando, para que valores de α a matriz A é invertível.

c) Considerando $\alpha = 1$, determine o núcleo de A, indicando uma sua base e respectiva dimensão.

2. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule a inversa da matriz P.

b) Verifique que a matriz $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são -1, 1 e 2.

c) Diga, justificando, quais os valores próprios da matriz A.

d) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio de maior módulo da matriz A e indique, justificando, a multiplicidade geométrica desse valor próprio.

3. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, x, x+y) \end{array}$$

a) Verifique que T é uma aplicação linear.

b) Escreva a matriz que representa a aplicação linear T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

c) Diga, justificando, se a aplicação linear T é injectiva.

d) Determine $car(T)$ e classifique, justificando, T quanto à sobrejectividade.

Cotação:

I	II - 1	II - 2	II - 3
3.75	2+1+2	1.5+1+1+2	1.5+1.5+1.5+1.25