Cap 4– Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

M.Isabel Caiado (icaiado@math.uminho.pt)

Abril/Maio 2017

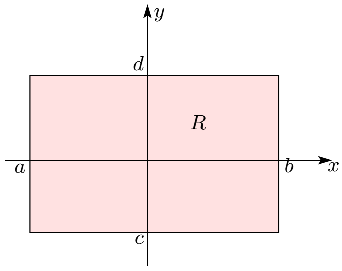
Nesta secção a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada:

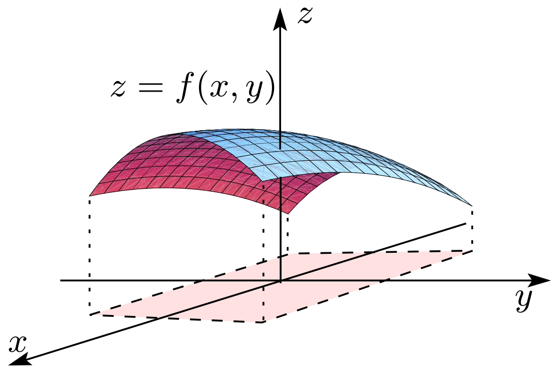
$$|f(x, y)| < M, \qquad \text{para algum } M \in \mathbb{R}.$$

Integral duplo

- [Motivação]

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$





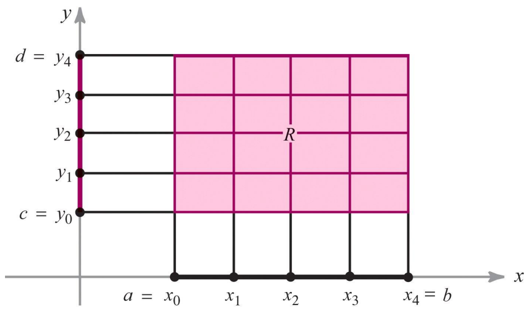
A superfície definida por $z = f(x, y)$ e os planos
$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$
formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$,

- [Problema] Determinar o volume da região do espaço compreendida entre o retângulo R e o gráfico da função f.

Definição de integral duplo

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Considere-se uma subdivisão $[c, d]$ em k subintervalos $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$;
- Às divisões anteriores corresponde uma subdivisão do retângulo R em $n \times k$ retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$;



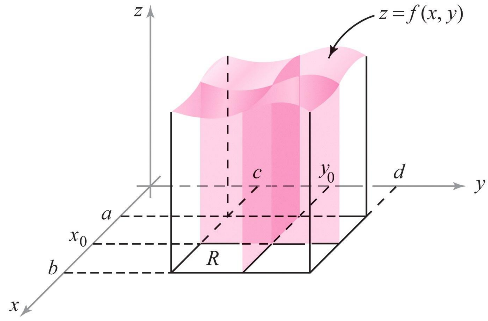
- Denote-se $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$;
- A área do retângulo R_{ij} é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$.
- Para cada retângulo R_{ij} escolha-se um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$;

- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é

$$f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}.$$



- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R é o número

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}$$

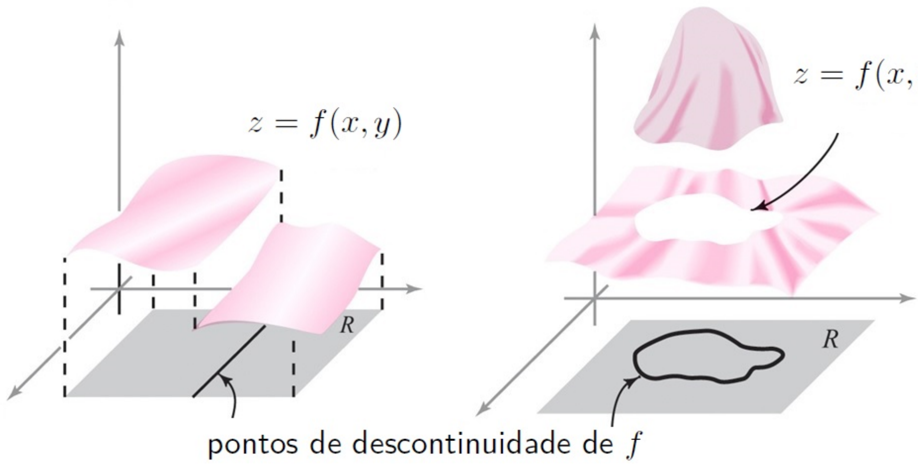
- Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral duplo de f em R e denota-se

$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, d(x,\, y).$$

- Se existir o integral duplo de f em R, diz-se que f é integrável em R.

Funções integráveis

1. Toda a função contínua definida num retângulo fechado é integrável.
2. Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em R e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então f é integrável.



Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis no retângulo R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA;$
2. $\displaystyle\iint_R \lambda\, f(x,y)\, dA = \lambda \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA;$
   - $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0;$
4. $\displaystyle\left|\iint_R f(x,y)\, dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\, dA.$

- [Teorema de Fubini 1]

  Seja f uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
  Então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Exemplo

- Calcular o integral, onde R é o retângulo $[0, 1] \times [1, 2]$,

$$\iint_R (x^3 + y^2)\, d(x, y).$$

- [Teorema de Fubini 2]

  Seja f uma função limitada no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas.

  Se $\int_c^d f(x,y)\,dy$ existe para cada $x \in [a,b]$ então o integral duplo

  $$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \quad \text{existe e} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

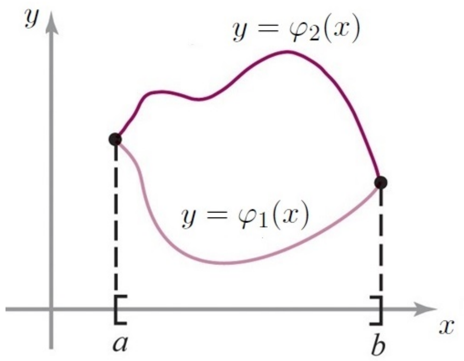
  De modo análogo, se $\int_a^b f(x,y)\,dx$ existe para cada $y \in [c,d]$ então o integral duplo

  $$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \quad \text{existe e} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

  Se todas as condições se verificam em simultâneo

  $$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Integração em regiões gerais

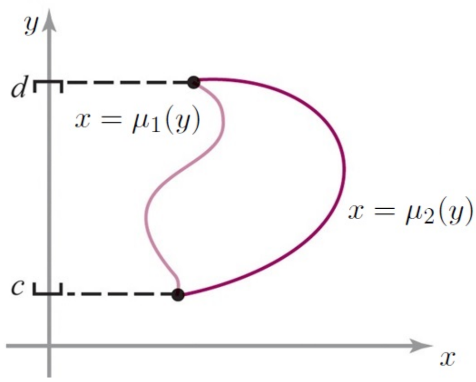


Região do tipo I

$$a \le x \le b$$
$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$

Região do tipo II

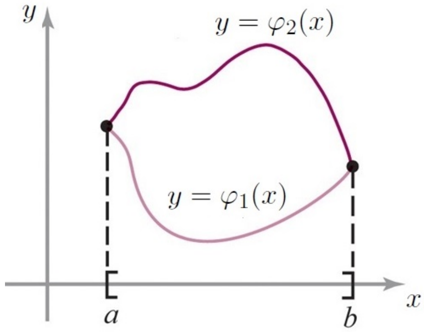
$$c \le y \le d$$
$$\mu_1(y) \le x \le \mu_2(y)$$



Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]

$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}^1(]a, b[)$ tais que

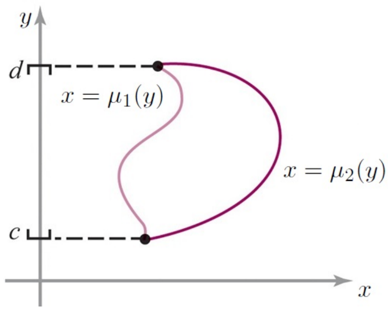
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

- [Região do tipo II]

$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{C}^1(]c, d[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

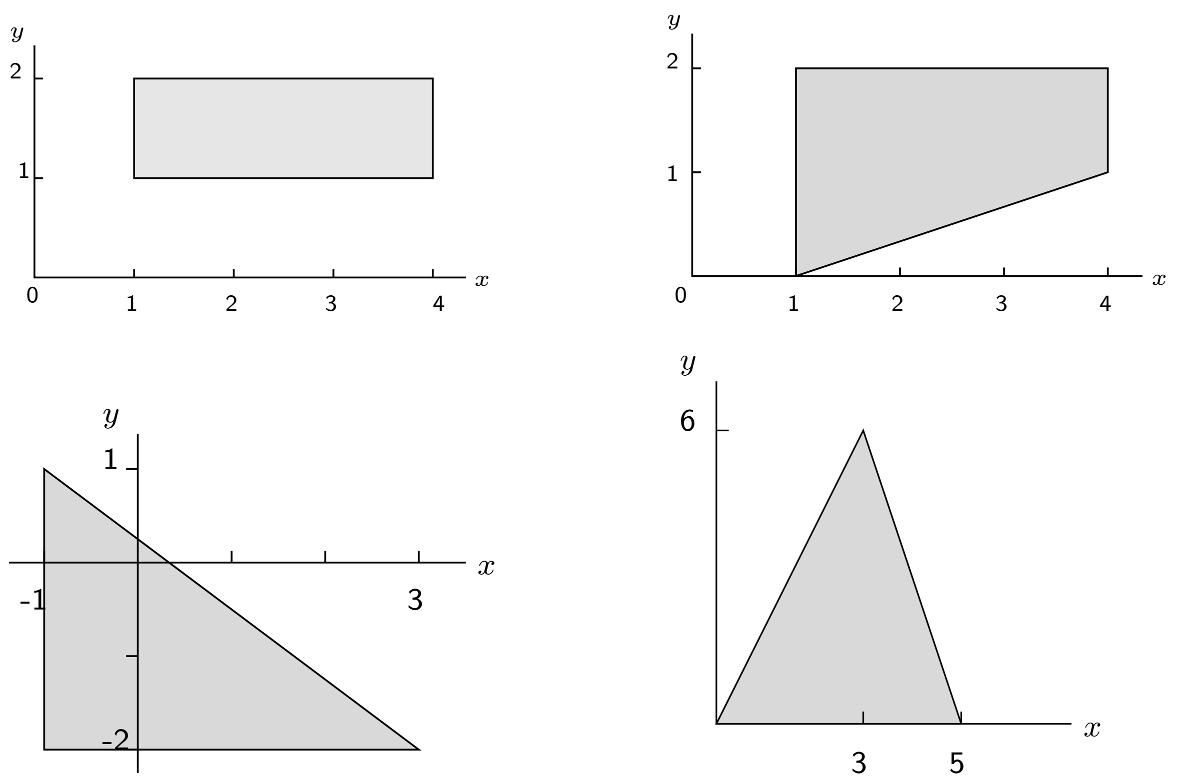
- [Região do tipo III] $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo III.

Exemplo

- [7.3a)] Calcular
$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$$
quando $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le x^2\}$.
  1. Usando uma região verticalmente simples.
  2. Usando uma região horizontalmente simples.

Exemplo

1. Para cada uma das seguintes regiões D escreva $\iint_D f\,dA$ na forma de dois integrais iterados



Observação

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.

- A alteração da ordem de integração pode permitir calcular um integral que de outra forma não era possível:
  - $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy.$

Volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x, y) \in B,\; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

  define-se o volume de S por

$$\text{vol}(S) = \iint_B f(x, y)\,dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x, y) = 1$ a área de B é dada por

$$\text{área}(S) = \iint_B 1\,dA$$

Exemplo

1. Calcular a área do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq x^2\}$$

2. Sejam
   - D o círculo unitário de centro na origem;
   - R a região de D em que $x \geq 0$;
   - B a região de D na qual $y \leq 0$

   Em cada uma das alíneas indique, justificando sem efetuar cálculos, se o valor do integral é positivo, negativo ou nulo.

   (a) $\displaystyle\iint_R dA$;

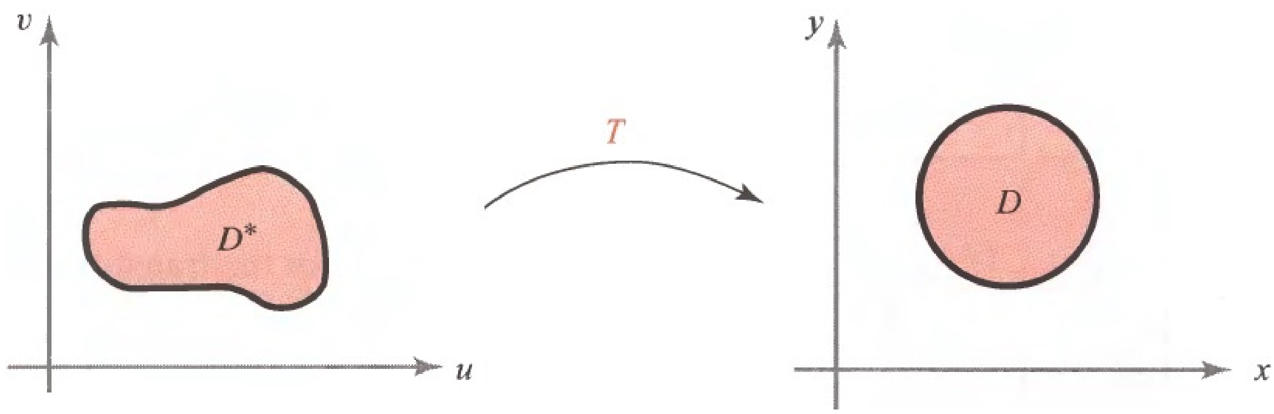
   (b) $\displaystyle\iint_B 5x\,dA$;

   (c) $\displaystyle\iint_D 5x\,dA$;

   (d) $\displaystyle\iint_D \operatorname{sen} y\,dA$.

Mudança de variáveis num integral duplo

- [Transformações de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$]



- D^* um subconjunto $\mathbb{R}^2$;
- $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação bijectiva e derivável;
- $T(D^*) = D$, isto é, para cada $(u, v) \in D^*$ existe um único $(x, y) \in D$ tal que $T(u, v) = (x, y)$.
- Como é que T "deforma" D^*?

- [Mudança de coordenadas]

  Seja $D^* \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que uma função (vetorial)

$$T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

  é uma mudança de coordenadas em D^* se verificar as seguintes condições:

  - T é de classe $\mathscr{C}^1$;
  - T é injetiva (exceto eventualmente na fronteira de D^*);
  - $\det JT(t) \neq 0, \; t \in D^*$.

Propriedades

1. Se $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe $\mathscr{C}^1$, injetiva e $\det JT \neq 0$ então T transforma a fronteira de D^* na fronteira de D.

2. Se $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear

$$T(x) = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

   onde A é uma matriz real tal que[1] $\det A \neq 0$ então T transforma paralelogramos em paralelogramos e vértices em vértices.

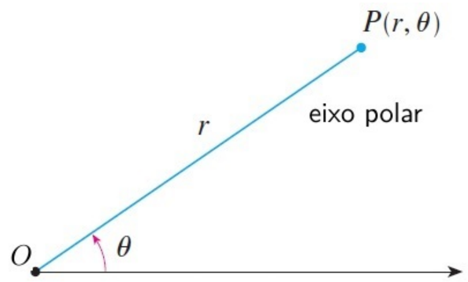
[1] A transformação T é bijectiva se e só se $\det A \neq 0$

Exemplo

1. Seja $D^* = [0,1] \times [0,1]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando
$$T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

2. Seja $D^* = [-1,1] \times [-1,1]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando
$$T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}).$$

- [Sistema de coordenadas polares:: Definição]



- origem do referencial O, um eixo e um ângulo;
- r é a distância a O;
- θ ângulo entre o eixo polar e a horizontal.

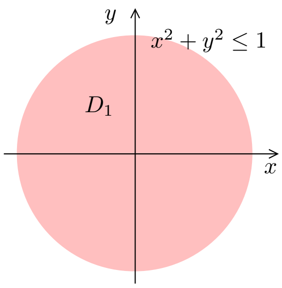
[Exemplo] Marcar os pontos de coordenadas polares $(1,\pi)$ e $(2,\pi/2)$

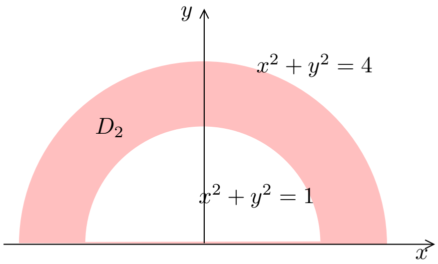
Observação

1. A descrição de um ponto em coordenadas polares não é única. Por isso toma-se $\theta \in [\,0, 2\pi\,[$.
2. Assim, no sistema de coordenadas polares

$$r \in [0, +\infty[\quad \text{e} \quad \theta \in [\,0, 2\pi\,[\,.$$

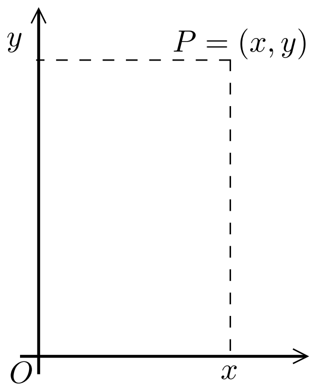
3. As coordenadas polares são indicadas para descrever regiões circulares (no plano)





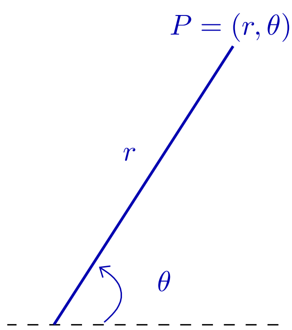
- Coordenadas cartesianas vs coordenadas polares

Coordenadas cartesianas



- origem do referencial O e dois eixos;
- x distância na horizontal a O;
- y distância na vertical a O.

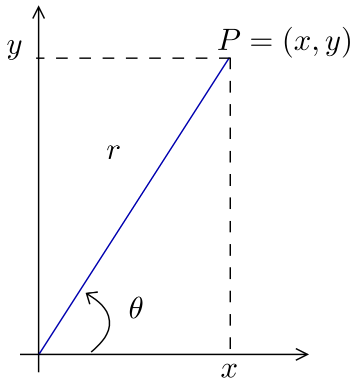
Coordenadas polares



- origem do referencial O, um eixo e um ângulo;
- r é a distância a O;
- θ ângulo entre o eixo polar e a horizontal.

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y)$



Coordenadas polares

$P = (r, \theta)$

- Da trigonometria do retângulo vem

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta & \quad r \in [0 + \infty[\\ y = r\,\text{sen}\,\theta & \quad \theta \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

- Logo

$$x^2 + y^2 = (r\,\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2 = r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e para $x \neq 0$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

- Assim, para passar de coordenadas polares a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0 + \infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\,. \end{array}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a polares

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

- [Mudança de coordenadas polares para cartesianas]

  Seja $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função vetorial definida por

  $$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

  onde $D^* = [0,+\infty[\times[0,2\pi[$, isto é,

  $$\begin{array}{rccl} T: & [0,+\infty[\times[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

  A função T é de classe $\mathscr{C}^1$ e a sua matriz Jacobiana é

  $$JT(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

  e $\det JT(r,\theta) = r$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas de coordenadas no plano $rO\theta$.
  - A função T^{-1} define uma mudança de coordenadas de coordenadas no plano xOy.

Exemplo

1. As coordenadas cartesianas de $(7, \frac{\pi}{3})$ são $(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2})$, isto é

$$T(7, \frac{\pi}{3}) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right);$$

2. As coordenadas cartesianas de $(5,\pi)$ são $(-5,0)$, ou seja

$$T(5,\pi) = (-5,0);$$

3. As coordenadas polares de $(3,3)$ são $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, isto é

$$T^{-1}(3,3) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right);$$

4. As coordenadas polares de $(2, \frac{\pi}{2})$ são $(0,2)$: $T^{-1}\left(2, \frac{\pi}{2}\right) = (0,2)$.

Exemplo

- Seja $D^* = [0,1] \times [0,2\pi]$. Determine a imagem de D^* por $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Mudança de variáveis num integral duplo

Sejam

- D^* e D regiões do tipo I ou II do plano uv e do plano xy, respetivamente;
- T uma transformação injectiva e de classe $\mathscr{C}^1$ tal que
  - $\det JT(u,v) \neq 0$ para todo $(u,v) \in int(D^*)$;
  - transforma[2] a região D^* na região D:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v));$$

- f uma função contínua em D.

Então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} (f \circ T)(u,v)\,|\det JT(u,v)|\,du\,dv.$$

[2] Isto é, $T(D^*) = D$

Observação

- O Jacobiano, $\det JT$, mede como a transformação T deforma a área do seu domínio.

Exemplo

- Seja P o paralelogramo definido por $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Fazendo a mudança de variáveis definida $x = u - v, y = 2u - v$ calcule o integral
$$\iint_P xy\, dx\, dy.$$

- [Caso particular: coordenadas polares]

  Seja D^* uma região do plano $rO\theta$ e D uma região do plano xOy.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

  Se $T(D^*) = D$, então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta\,.$$

Exemplo

1. Calcular
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA$$
   onde
$$D = \{(x,y)\,:\,1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

Integral triplo

- [Definição de integral triplo]

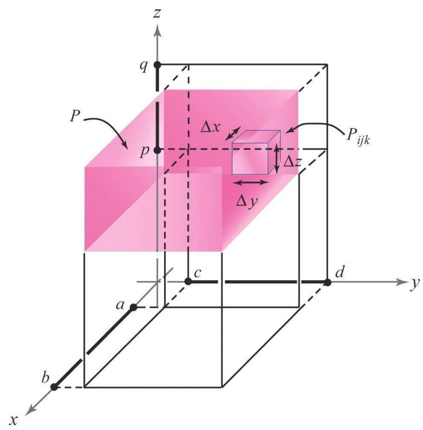
Seja $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ e $f : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de P em $n \times m \times l$ paralelepípedos

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}].$$

- O volume de P_{ijk} é

$$\Delta V_{ijk} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$



- Para cada P_{ijk} escolhe-se um $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)$;

- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de P é

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_k)\, \Delta V_{ijk}.$$

- Quando $n, m, l \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral triplo de f em P e denota-se

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dV \quad \text{ou} \quad \iiint_P f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{ou} \quad \iiint_P f(x,y,z)\, d(x,y,$$

- Se existir o integral triplo de f em P, diz-se que f é integrável em P.

Funções integráveis

1. Toda a função contínua definida num paralelepípedo fechado é integrável.

2. Seja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada no paralelepípedo P e suponha-se que os pontos de descontinuidade de f pertencem à união finita de gráficos de funções contínuas. Então f é integrável.

Propriedades dos integrais triplos

Sejam $f,\, g : P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:

1. $\displaystyle\iiint_P f(x,y,z)+g(x,y,z)\,dV = \iiint_P f(x,y,z)\,dV + \iiint_P g(x,y,z)\,dV$

2. $\displaystyle\iiint_P \lambda\, f(x,y,z)\,dV = \lambda \iiint_P f(x,y,z)\,dV, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$

3. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iiint_P f(x,y,z)\,dV \geq \iiint_P g(x,y,z)\,dV.$

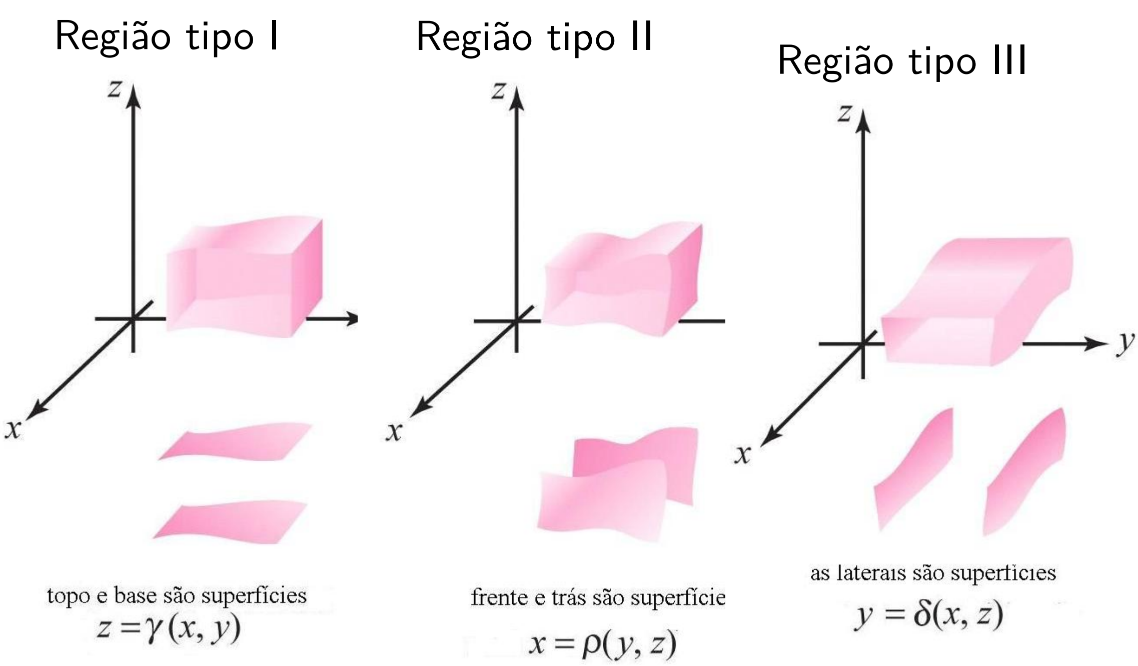
4. [Teorema de Fubini] Sendo P o paralelipípedo $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ então
$$\iiint_P f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx$$
e é igual aos outros 5 integrais iterados que se obtêm invertendo a ordem de integração.

Exemplo

- [8.1 a)] Seja $P = [0,2]^3$. Calcule

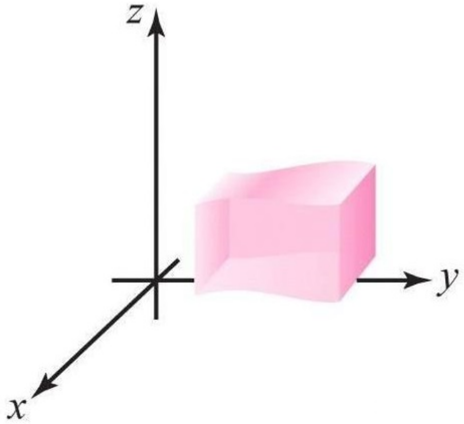
$$\iiint_P (x+y+z)\, d(x,y,z).$$

Integração em regiões gerais



Regiões elementares de $\mathbb{R}^3$

- [Região do tipo I]



- $D \subset \mathbb{R}^2$ região elementar do plano XOY
- topo de base de S são superfícies $z = \gamma(x, y)$
- $(x, y) \in D$
- $\gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)$

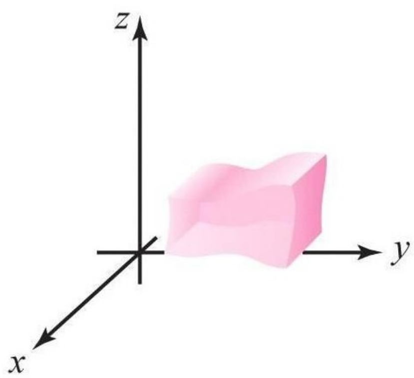
- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região D do plano XOY e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in D,\, \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy$$

- [Região do tipo II]



- D é uma região elementar do plano YOZ
- frente e trás são superfícies $x = \rho(y, z)$
- $(y, z) \in D$
- $\rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)$

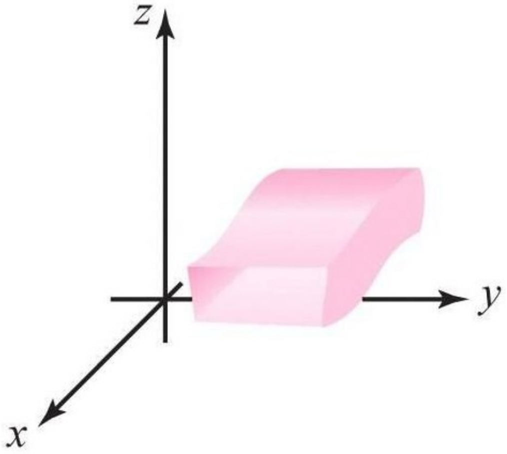
- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região D do plano YOZ e duas funções tais que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (y, z) \in D,\, \rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dy\, dz$$

- [Região do tipo III]



- D é uma região elementar do plano XOZ
- as laterais são superfícies $y = \delta(x,z)$
- $(x,z) \in D$
- $\delta_1(x,z) \leq y \leq \delta_2(x,z)$

- $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^3$ se existe uma região D do plano XOZ e duas funções tais que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,z) \in D,\, \delta_1(x,z) \leq y \leq \delta_2(x,z)\}$$

- Neste caso

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{\delta_1(x,z)}^{\delta_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dx\,dz$$

- [Região do tipo IV] $S \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo IV de $\mathbb{R}^3$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I, do tipo II e do tipo III.

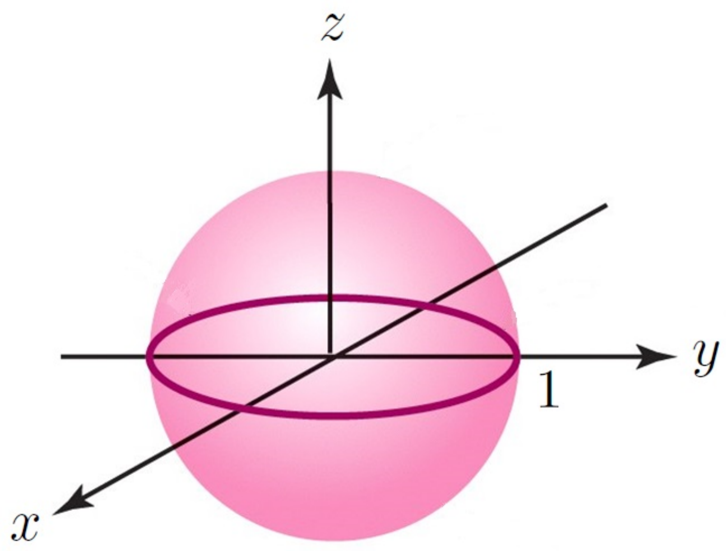
Exemplo

1. [A esfera como região elementar de $\mathbb{R}^3$]

   Descrever a esfera unitária

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

   em termos de regiões elementares de $\mathbb{R}^3$.



- A intersecção $\mathcal{E}$ com o plano XoY é disco unitário

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad \text{pois} \qquad z = 0.$$

- Nesta região, tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e, então,

$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

- Seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

- A esfera $\mathcal{E}$, pode, então ser descrita, como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $(x, y) \in D$ e

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Há diversos processos para o fazer, basta trocar os papéis de x, y, z...

Integração tripla e volume

- Se S é uma região limitada de $\mathbb{R}^3$, o volume de S é dado por

$$\text{vol}(S) = \iiint_S 1\, dV.$$

- Para uma função arbitrária $f : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV$$

não tem nenhuma interpretação geométrica relevante, mas tem diversas interpretações, por exemplo, na física.

- [Integração tripla:: aplicações à física]

  - Se $\rho(x, y, z)$ é a função densidade em qualquer ponto (x, y, z), em massa por unidade de volume, de um objeto sólido que ocupa a região $S \subset \mathbb{R}^3$ então a massa do sólido é

$$m = \iiint_S \rho(x, y, z)\; dV.$$

  - Se a carga elétrica está distribuída sobre uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ e a densidade de carga, em unidades de carga por área, é dada por $\sigma(x, y, z)$ em qualquer ponto (x, y, z), então a carga total Q é

$$Q = \iiint_S \sigma(x, y, z)\; dV.$$

Exemplo

- [Volume de uma esfera]

  Um integral que expressa o volume da esfera unitária

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

é

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} dV = \iint_D \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right] dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right] dy \right] dx$$

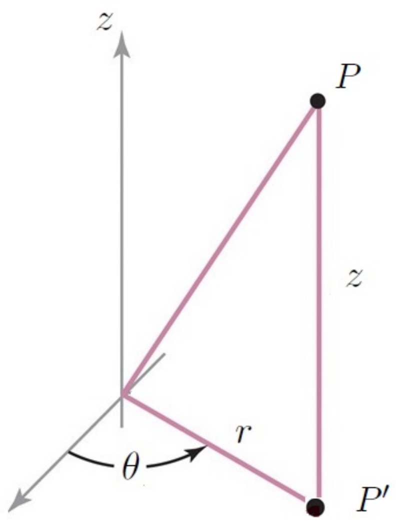
Sugestão: Calcule o integral anterior!

Transformações de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$

- [Sistema de coordenadas cilíndricas:: Definição]

  Coordenadas cilíndricas de $P = (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$:

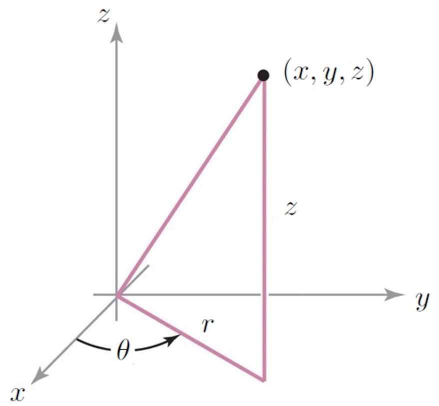
  - r e θ coordenadas polares de P', a projeção de P no plano horizontal;
  - z igual à coordenada vertical das coordenadas cartesianas



- [Coordenadas cartesianas vs coordenadas cilíndricas]

Coordenadas cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas cilíndricas

$P = (r, \theta, z)$

- Para passar de coordenadas cilíndricas a cartesianas

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta & r \in [0, +\infty[\\ y = r\ \operatorname{sen}\theta & \theta \in [0, 2\pi[\\ z = z & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

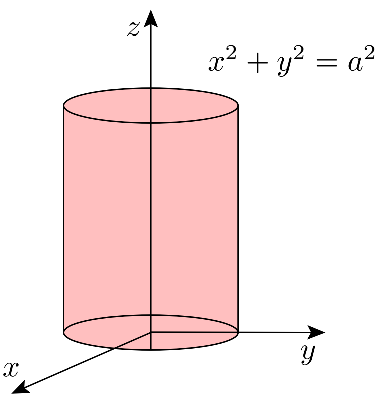
- Para passar de coordenadas cartesianas a cilíndricas

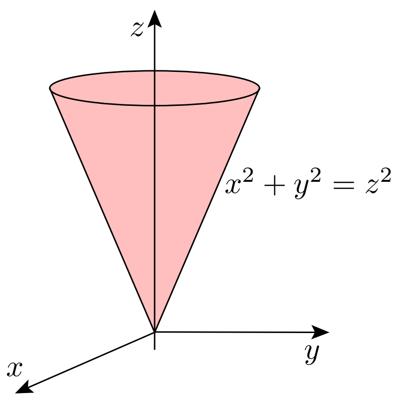
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z. \end{cases}$$

Observação

- Tal como no caso das coordenadas polares, a descrição de um ponto em coordenadas cilíndricas não seria única sem a restrição de θ ao intervalo $[0, 2\pi[$.

- As coordenadas cilíndricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente ao eixo dos zz.





- [Mudança de coordenadas cilíndricas para cartesianas]
  Considere-se a função vetorial $T : D^* \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z)$$

onde $D^* = [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}$.

A função T é de classe $\mathscr{C}^1$, a sua matriz Jacobiana é

$$J\,T(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det J\,T(r,\theta,z) = r$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas em $r\theta\,z$.
  - A função T^{-1} define uma mudança de coordenadas em xyz.

Exemplo

- As coordenadas cartesianas de $(7,\frac{\pi}{3},5)$ são $(\frac{7}{2},\frac{7\sqrt{3}}{2},5)$, isto é

$$T(7,\frac{\pi}{3},5) = (\frac{7}{2},\frac{7\sqrt{3}}{2},5);$$

- As coordenadas cilíndricas de $(3,3,1)$ são $(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1)$, isto é

$$T^{-1}(3,3,1) = (3\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1);$$

- O cilindro de equações $x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações

$$r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

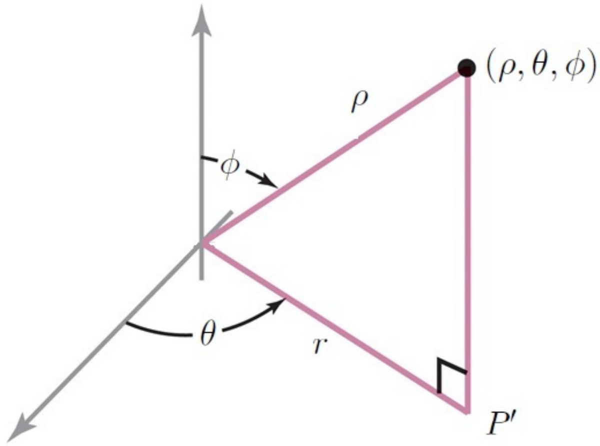
- O cone de equações $x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 3$ é descrito em coordenadas cilíndricas pelas equações

$$r \leq z, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

- [Sistema de coordenadas esféricas:: Definição]

  Coordenadas esféricas de $P = (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$:

  - ρ distância de P à origem do referencial;
  - ϕ ângulo entre $\overline{OP}$ e a parte positiva do eixo vertical;
  - θ ângulo entre $\overline{OP}$ e a parte positiva do eixo dos xx.



Observação

- A designação dos ângulos θ e ϕ bem como a sua definição não é consensual

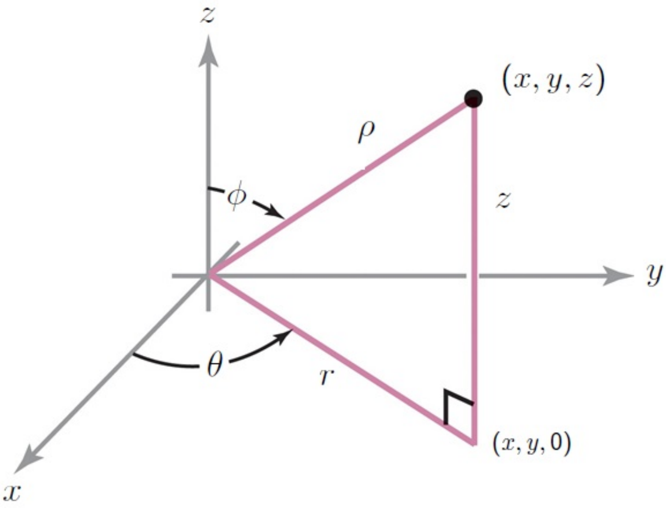
  - Neste curso define-se θ como o ângulo entre $\overline{OP'}$ e a parte positiva do eixo dos x e ϕ como o ângulo entre $\overline{OP}$ e a parte positiva do eixo dos z;
  - Em geografia, por exemplo, a latitude, isto é, o ângulo ϕ é o ângulo entre $\overline{OP}$ e o plano horizontal.

- As coordenadas esféricas são indicadas para descrever regiões do espaço simétricas relativamente a um ponto.

▶ [Coordenadas cartesianas vs coordenadas esféricas]

Coordenada cartesianas

$P = (x, y, z)$



Coordenadas esféricas

$P = (\rho, \theta, \phi)$

$\rho = |OP|$

- Da trigonometria do triângulo retângulo vem $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ e

$$\begin{cases} x = r\, \cos\theta = \rho \operatorname{sen} \phi \cos\theta \\ y = r\, \operatorname{sen} \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{array}$$

- Para passar de coordenadas esféricas a cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, 2\pi[\\ \phi \in [0, \pi]. \end{array}$$

- Para passar de coordenadas cartesianas a esféricas

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \\ \phi = \arccos \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

desde que $x \neq 0$ e $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

- [Mudança de coordenadas esféricas para cartesianas]

  Considere-se a função vetorial $T : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

  $$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)$$

  onde $S = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$. A função T é de classe $\mathscr{C}^1$, a sua matriz Jacobiana é

  $$JT(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{pmatrix}$$

  e $\det JT(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$.

  - A função T define uma mudança de coordenadas no espaço $\rho\,\theta\,\phi$.
  - A função T^{-1} define uma mudança de coordenadas no espaço xyz.

Exemplo

1. As coordenadas cartesianas do ponto $(2, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2})$ são $(0, -2, 0)$, isto é

   $$T(2, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}) = (0, -2, 0)$$

2. As coordenadas esféricas do ponto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ são $(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$, isto é

   $$T^{-1}(0, 2\sqrt{3}, -2) = (4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$$

3. As equações de uma esfera de raio a em coordenadas esféricas são

   $$\rho \leq a, \qquad \theta \in [0, 2\pi[\,, \qquad \phi \in [0, \pi].$$

Mudança de coordenadas num integral triplo

Sejam

- S^* e S regiões elementares do espaço uvw e do espaço xyz respetivamente;
- T uma transformação injetiva de classe $\mathscr{C}^1$ tal que
  - $\det JT(u,v,w) \neq 0$ para todo $(u,v,w) \in int(S^*)$;
  - transforma[3] a região S^* na região S:

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w));$$

- f uma função contínua em S.

  Então

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{S^*} (f \circ T)(u,v,w)\,|\det JT(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$

[3]Isto é, $T(S^*) = S$

Observação

- Recorde que, sendo $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ o Jacobiano de T é

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

- De forma análoga ao caso no plano, o Jacobiano de T, $\det JT$, mede como a transformação T deforma o volume do seu domínio.

- [Caso particular: coordenadas cilíndricas]

  Seja S^* uma região do espaço $r\,\theta\,z$ e S uma região do espaço xyz.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por

  $$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z).$$

  Se $T(S^*) = T(S)$ então

  $$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S^*} (f\circ T)(r,\theta,z)\,r\;dr\,d\theta\,dz.$$

  uma vez que

  $$\det JT(r,\theta,z) = r.$$

Exemplo

1. [8.8] Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\left(x^2+y^2\right)\;dx\,dy\,dz.$$

- [Caso particular: coordenadas esféricas]

  Seja S^* uma região do espaço $\rho\theta\phi$ e S uma região do espaço xyz.
  Considere-se a mudança de coordenadas definida por

  $$T(\rho,\theta,\phi)=(\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\cos\phi)$$

  Se $T(S^*)=S$, então

  $$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{S^*}(f\circ T)(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\ \mathrm{sen}\,\phi\ \ d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

  uma vez que

  $$\det JT(\rho,\theta,\phi)=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Exemplo

- [8.12] Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2=x^2+y^2$ e à esfera de equação $x^2+y^2+z^2=4$.