Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

fmiranda@math.uminho.pt
mif@math.uminho.pt

2015/2016

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

1. Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

fmiranda@math.uminho.pt

mif@math.uminho.pt

1.1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Relembre que:

- $$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}},$$

  é o conjunto dos n-uplos ordenados $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são números reais.

- O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido das operações $+$ (adição),

  $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,$$

  e $*$ (multiplicação por um escalar),[1]

  $$\alpha * \boldsymbol{x} = \alpha * (x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n), \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

  é um espaço vetorial real.

[1] Por simplificação, usaremos $\alpha \boldsymbol{x}$ para denotar $\alpha * \boldsymbol{x}$.

1.2 Produto interno, norma e distância

Definição Uma função $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se um **produto interno** se para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0$;
2. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$;
3. $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$;
4. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})$.

Exemplo: Produto interno canónico.

Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Definição Uma função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **norma** se para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$;
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
3. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \ \|\boldsymbol{x}\|$;
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Exemplo: Norma euclidiana.

Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Definição Uma função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **distância** se para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$;
2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \;\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
4. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$.

Exemplo:
Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, a função

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

é uma distância.

Se nada for dito em contrário, iremos considerar sempre em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana e a distância associada a esta norma.

1.3 Noções topológicas

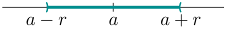
Definição Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Chama-se bola centrada em $\boldsymbol{a}$ de raio r ao conjunto

$$B(\boldsymbol{a}, r) = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\Big\}.$$

Exemplo:

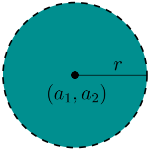
- Se $n = 1$, então

$$B(a, r) = \Big\{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\Big\}.$$



- Se $n = 2$ e $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, então

$$B(\boldsymbol{a}, r) = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\Big\}.$$



Definição Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que $\boldsymbol{a}$ é:

- ponto interior de U se $\quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \subseteq U$
- ponto aderente de U se $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$
- ponto de fronteira de U se for ponto aderente de U e de $\mathbb{R}^n \setminus U$, isto é, se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus U\big) \neq \emptyset$$

- ponto de acumulação de U se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \big(B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{a}\}\big) \cap U \neq \emptyset$$

- ponto isolado de U se pertencer a U e não for ponto de acumulação de U, isto é, se

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \cap U = \{\boldsymbol{a}\}$$

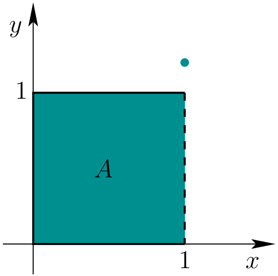
- Ao conjunto dos pontos interiores de U chama-se interior de U e representa-se por int U ou $\overset{\circ}{U}$.
- Ao conjunto dos pontos aderentes de U chama-se aderência de U e representa-se por ad U ou $\overline{U}$.
- Ao conjunto dos pontos de fronteira de U chama-se fronteira de U e representa-se por fr U ou ∂U.
- Ao conjunto dos pontos de acumulação de U chama-se derivado de U e representa-se por U'.

Definição Um subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ diz-se:

- aberto se for igual ao seu interior;
- fechado se for igual à sua aderência;
- limitado se estiver contido em alguma bola.

Exemplo: Determine o interior, a aderência, a fronteira e o derivado de

$$A = [0,1[\times[0,1] \cup \{(1,\tfrac{6}{5})\}.$$



$$\overset{\circ}{A} =]0,1[\times]0,1[;$$

$$\overline{A} = [0,1]\times[0,1] \cup \{(1,\tfrac{6}{5})\};$$

$$\partial A = [0,1]\times\{0,1\} \cup \{0,1\}\times[0,1] \cup \{(1,\tfrac{6}{5})\};$$

$$A' = [0,1]\times[0,1].$$