LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Exame A - 13/02/09**

Nome: ____ **Número:** _________ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por nove exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VIII e IX devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,6 valores e cada resposta errada desconta 0,2 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
☐	☐	$\neg((p \wedge q) \Rightarrow p)$
☐	☐	$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$
☐	☐	$(q \vee p) \Rightarrow q$
☐	☐	$\neg(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
☐	☐	$(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$

II. Considere o conjunto $A = \{-2, 1, \{1,3\}, 3\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$A \setminus \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$
☐	☐	$A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
☐	☐	$\{1,3\} \in A \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
☐	☐	$\{1,3\} \subseteq A \cap \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
☐	☐	$A \cap \mathcal{P}(A) = \emptyset$

III. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2x, 2x+1) & \text{se } x \geq 0 \\ (-2x, -2x+1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	A função f é injectiva.
☐	☐	A função f não é sobrejectiva.
☐	☐	Existe uma função $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f \circ g$ é sobrejectiva.
☐	☐	Existe $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que a imagem inversa de A por f é $\{1\}$.

IV. Considere a relação R em $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definida por

$$X \, R \, Y \Leftrightarrow X \setminus Y = \emptyset.$$

Indique quais das afirmações seguintes são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	R é reflexiva.
☐	☐	R é simétrica.
☐	☐	R é anti-simétrica.
☐	☐	R é transitiva.

V. Indique quais das afirmações seguintes são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	Para toda a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$, $(\exists k \in \mathbb{Z} \quad [2] \cap [k] \neq \emptyset \text{ e } [3] \cap [k] \neq \emptyset) \Rightarrow [2] = [3]$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\{1,2\}, \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}, \{3\}\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \mathbb{N}$.

VI. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\{1,2,3,4,5,6\}, \preceq)$ em que

$$\begin{aligned}\preceq \;=\; &\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),\\ &(3,5),(4,5),(5,6),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,6),(4,6)\}.\end{aligned}$$

(a) (0,6 valores) Indique o diagrama de Hasse de $(\{1,2,3,4,5,6\}, \preceq)$

(b) (0,6 valores) Indique o conjunto de minorantes de $\{3,4,5\}$: ____________________

VII. Indique se a seguinte afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F):

V	F	
☐	☐	Não existe uma árvore com pelo menos dois vértices e que admita um trilho euleriano.

VIII. (2,5 valores) Mostre que para todo o número natural n, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

IX. (2,5 valores) Verdadeiro ou falso? Para qualquer função f de um conjunto A num conjunto B e para qualquer subconjunto B_1 de B, $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$. Justifique a sua resposta.
[Nota: Dado $B_1 \subseteq B$, representa-se por $f^{-1}(B_1)$ a imagem inversa de B_1 por f.]