

6.

Exercício 6.1

a)

`PontoCritico[x^2 + y^4, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de mínimo.

b)

`PontoCritico[2 - x - y^2, {x, y}]`

Não tem pontos críticos.

c)

`PontoCritico[xy, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

d)

`PontoCritico[x^2 y^2, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, y\}$ é ponto de mínimo.

O ponto crítico $\{x, 0\}$ é ponto de mínimo.

Exercício 6.3

a)

`PontoCritico[x^2 - y^2 + xy, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

b)

`PontoCritico[xy - x^2 - y^2, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de máximo.

c)

`PontoCritico[x^2+y^2+2 x y, {x, y}]`

O ponto crítico $\{x, -x\}$ é ponto de mínimo.

d)

`PontoCritico[x^2+y^2+3 x y, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

e)

`PontoCritico[Exp[1+x^2-y^2], {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

f)

`PontoCritico[2 x^3+x y^2+5 x^2+y^2, {x, y}]`

O ponto crítico $\{-\frac{5}{3}, 0\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{-1, -2\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{-1, 2\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de mínimo.

g)

`PontoCritico[x^2-2 x y^2+y^4-y^5, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

h)

`PontoCritico[3 x^2+2 x y+2 x+y^2+y+4, {x, y}]`

O ponto crítico $\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}$ é ponto de mínimo.

i)

`f[x_, y_] = y + x Sin[y];`

O ponto crítico $\{-1, 2 k \pi\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{1, \pi+2 k \pi\}$ é ponto de sela.

j)

$$f[x_, y_] = \text{Cos}[x^2 + y^2];$$

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$ é ponto de mínimo.

O ponto crítico $\{0, \sqrt{\pi}\}$ é ponto de mínimo.

k)

$$\text{PontoCritico}[\text{Exp}[x] \text{Cos}[y], \{x, y\}]$$

Não tem pontos críticos.

l)

$$\text{PontoCritico}[xy(1-x-y), \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, 1\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{1, 0\}$ é ponto de sela.

m)

$$\text{PontoCritico}[(x-y)(xy-1), \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{-1, -1\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{1, 1\}$ é ponto de sela.

n)

$$\text{PontoCritico}[xy + 1/x + 1/y, \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{1, 1\}$ é ponto de mínimo.

o)

$$\text{PontoCritico}[(x+y)(xy+1), \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{-1, 1\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{1, -1\}$ é ponto de sela.

p)

`PontoCritico[(x^2 + 3 y^2) Exp[1 - x^2 - y^2], {x, y}]`

O ponto crítico $\{-1, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, -1\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de mínimo.

O ponto crítico $\{0, 1\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{1, 0\}$ é ponto de sela.

q)

`PontoCritico[x^2 + y^2 + z^2 + xy, {x, y, z}]`

O ponto crítico $\{0, 0, 0\}$ é ponto de mínimo.

r)

`PontoCritico[x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4, {x, y, z}]`

O ponto crítico $\{0, 0, 0\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{0, 0, \frac{2}{3}\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, \frac{2}{3}, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, 0, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ é ponto de mínimo.

s)

`PontoCritico[Exp[x^2 + y^2 + z^2], {x, y, z}]`

O ponto crítico $\{0, 0, 0\}$ é ponto de mínimo.

Exercício 6.5

a)

`MaxMin[Log[x y], 2 x + 3 y, 5, {x, y}]`

O máximo é $\text{Log}\left[\frac{25}{24}\right]$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right\}$. Não tem mínimo.

b)

`MaxMin[x^2 + y^2, x/2 + y/3, 1, {x, y}]`

O mínimo é $\frac{36}{13}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right\}$. Não tem máximo.

c)

`MaxMin[x y, x^2 + y^2, 4, {x, y}]`

O máximo é 2 e é atingido nos pontos do conjunto $\{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

O mínimo é -2 e é atingido nos pontos do conjunto $\{(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$.

d)

`MaxMin[x y, x + y, 1, {x, y}]`

O máximo é $\frac{1}{4}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Não tem mínimo.

e)

`MaxMin[x^3 + y^3, x^2 + y^2, 1, {x, y}]`

O máximo é 1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{(0, 1), (1, 0)\}$.

O mínimo é -1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{(-1, 0), (0, -1)\}$.

f)

`MaxMin[x^2 - y^2, x^2 + y^2, 1, {x, y}]`

O máximo é 1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{(-1, 0), (1, 0)\}$.

O mínimo é -1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{(0, -1), (0, 1)\}$.

g)

`MaxMin[2 x + y, x^2 + 4 y^2, 1, {x, y}]`

O máximo é $\frac{\sqrt{17}}{2}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{2\sqrt{17}}\right\}$.

O mínimo é $-\frac{\sqrt{17}}{2}$ e é atingido no ponto $\left\{-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{2\sqrt{17}}\right\}$.

h)

MaxMin[**x y**, **9 x^2 + y^2**, **4**, {**x**, **y**}]

O máximo é $\frac{2}{3}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right\}\right\}$.

O mínimo é $-\frac{2}{3}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right\}\right\}$.

i)

MaxMin[**4 x^2 + y^2 + 5 z^2**, **2 x + 3 y + 4 z**, **12**, {**x**, **y**, **z**}]

O mínimo é $\frac{120}{11}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{5}{11}, \frac{30}{11}, \frac{8}{11}\right\}$; não tem máximo.

j)

MaxMin[**z**, **x^2 + y^2 + z**, **5**, **x + y + z**, **1**, {**x**, **y**, **z**}]

O máximo é 3 e é atingido no ponto $\{-1, -1, 3\}$.

O mínimo é -3 e é atingido no ponto $\{2, 2, -3\}$.

k)

MaxMin[**x + 3 y + 5 z**, **x^2 + y^2 + z^2**, **1**, {**x**, **y**, **z**}]

O máximo é $\sqrt{35}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\right\}$.

O mínimo é $-\sqrt{35}$ e é atingido no ponto $\left\{-\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right\}$.

l)

MaxMin[**x + 2 y**, **x + y + z**, **1**, **y^2 + z^2**, **4**, {**x**, **y**, **z**}]

O máximo é $1 + 2\sqrt{2}$ e é atingido no ponto $\{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

O mínimo é $1 - 2\sqrt{2}$ e é atingido no ponto $\{1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

m)

MaxMin[$3x - y - 3z, x + y - z, 0, x^2 + 2z^2, 1, \{x, y, z\}$]

O máximo é $2\sqrt{6}$ e é atingido $\left\{\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}$

O mínimo é $-2\sqrt{6}$ e é atingido $\left\{\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}$

Exercício 6.6

O mínimo é 0 e é atingido em todos os pontos do

conjunto $\{(x, y) \in [0, 2\pi]^2: y = x + \frac{\pi}{2} \vee y = \frac{3\pi}{2} - x \vee y = x - \frac{3\pi}{2} \vee y = \frac{7\pi}{2} - x\}$.

O máximo é 2 e é atingido nos pontos $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 2\pi), (\frac{3\pi}{2}, \pi)$.

Exercício 6.7

a)

O mínimo é 0 e é atingido em $(0, 0)$.

O máximo é 1 e é atingido em todos os pontos da fronteira.

b)

O mínimo é 0 e é atingido em $(0, 0)$.

O máximo é $\frac{3}{2}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Exercício 6.8

MaxMin[$xyz, x + y + z, 100, \{x, y, z\}$]

O máximo é $\frac{1000000}{27}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right\}$.

Exercício 6.9

MaxMin[$x + y + z, xyz, 8, \{x, y, z\}$]

O mínimo é 6 e é atingido no ponto $\{2, 2, 2\}$.

Exercício 6.10

MaxMin[$x^2 + y^2 + z^2, x + y + z, 13, \{x, y, z\}$]

O mínimo é $\frac{169}{3}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right\}$.

Exercício 6.11

MaxMin[(**x** + 4) ^ 2 + (**y** - 1) ^ 2 + (**z** - 3) ^ 2, 2 **x** - **y** + **z**, 1, {**x**, **y**, **z**}]

O mínimo é $\frac{49}{6}$ e é atingido no ponto $\left\{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right\}$.

Exercício 6.12

MaxMin[**y**, 5 **x** ^ 2 + 5 **y** ^ 2 + 6 **x y** - 4 **x** + 4 **y**, 0, {**x**, **y**}]

O máximo é $\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{10}(10 - 3\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})\right\}$.

O mínimo é $\frac{1}{2}(-2 - \sqrt{5})$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{10}(10 + 3\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{5})\right\}$.

Exercício 6.13

MaxMin[(**x** - 1) ^ 2 + (**y** - 2) ^ 2 + **z** ^ 2, **x** ^ 2 + **y** ^ 2 - **z** ^ 2, 0, {**x**, **y**, **z**}]

O máximo é $\frac{5}{2}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\right\}$.

O mínimo é $\frac{5}{2}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\right\}$.

Exercício 6.14

MaxMin[**x** ^ 2 + **y** ^ 2 + **z** ^ 2, 2 **x** - **y** + 2 **z**, 20, {**x**, **y**, **z**}]

O mínimo é $\frac{400}{9}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right\}$.

Exercício 6.15

MaxMin[2 **x y** + 2 **y z** + 2 **x z**, **x y z**, 27, {**x**, **y**, **z**}]

O mínimo é 54 e é atingido no ponto {3, 3, 3}.

Exercício 6.16

MaxMin[**x y z**, 2 **x y** + 2 **y z** + 2 **x z**, 24, {**x**, **y**, **z**}]

O máximo é 8 e é atingido no ponto {2, 2, 2}.

O mínimo é -8 e é atingido no ponto {-2, -2, -2}.