Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios — 2011/2012

Indução nos naturais

1. Prove, por indução, as seguintes propriedades dos números naturais:

   (a) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, para todo $n \geq 1$.

   (b) $2+4+6+...+2n=n(n+1)$, para todo $n \geq 1$.

   (c) n^3-n é múltiplo de 3, para todo $n \geq 1$.

   (d) $1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, para todo $n \geq 1$.

   (e) $1+4+9+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.

   (f) $n^2>2n+1$, para todo $n \geq 3$.

   (g) $3^n>2^{n+1}$, para todo $n \geq 2$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: n^2+5n+1 é par.

   (a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.

   (b) Diga, justificando, para que naturais n a propriedade $P(n)$ é verdadeira.

3. Para $n \in \mathbb{N}$, define-se $n!$ por $1!=1$ e $(n+1)!=n! \cdot (n+1)$.

   (a) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $2^n<n!$.

   (b) Prove que, para todo o natural n tal que $n \geq 4$, $n! \geq n^2$.

4. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$n \in X \Rightarrow n+3 \in X.$$
   Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

5. O seguinte exemplo é bem conhecido como uma alegada "prova" por indução que claramente não pode ser válida. Indique onde se encontra o erro.

   Vamos provar que todos os gatos são da mesma cor. Mais precisamente, vamos provar que a afirmação "para qualquer colecção de n gatos, todos os gatos têm a mesma cor" é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que só há um número finito de gatos no mundo inteiro, segue que todos os gatos do mundo têm a mesma cor. Suponhamos que $n=1$. É certamente verdade que para qualquer colecção com um gato, todos os gatos têm a mesma cor. Supondo o resultado válido para n, vamos agora mostrar o resultado para $n+1$. Consideremos a colecção $\{G_1,\ldots,G_{n+1}\}$ de $n+1$ gatos. As colecções $\{G_1,\ldots,G_n\}$ e $\{G_2,\ldots,G_{n+1}\}$ têm ambas n gatos. Então, todos os gatos das duas colecções têm a mesma cor e, portanto, os gatos de $\{G_1,\ldots,G_{n+1}\}$ têm a mesma cor. Fica assim provado por indução que todos os gatos do mundo têm a mesma cor.