UNIVERSIDADE DO MINHO — 26 Jan. 2010

Álgebra Linear

$2^{\underline{0}}$ Teste - **A**

Esboço de uma Resoluçao

LEI — Duração: 2 horas

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Existem valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc \end{pmatrix}$ é invertível. V F

b) Se $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ então $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$ V F

c) Se B é uma matriz de ordem n tal que $B = (A^T A^{-1})^2$ então $|B| = 1$. V F

d) A matriz A (ordem n) é invertível se e só se $A^T A$ for uma matriz invertível. V F

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) O polinómio característico da matriz A é $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$.
V F

b) A matriz A tem $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ como vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$. V F

c) $|A| = 1$ V F

d) As matrizes diagonais $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ são semelhantes. V F

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) A matriz A é diagonalizável. V F

b) O conjunto $U_\lambda = \{(0,0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$ de A. V F

c) Relativamente à matriz A, a multiplicidade aritmética do valor próprio $\lambda = 3$ é igual a sua multiplicidade geométrica. V F

d) Seja A uma matriz de ordem n e $U_{\lambda 1}$ $U_{\lambda 2}$, dois subespaços próprios associados a dois valores próprios distintos $\lambda 1$ e $\lambda 2$, e tendo-se $v \in U_{\lambda 1}$ e $u \in U_{\lambda 2}$. Os vectores $v, \alpha u$ são vectores linearmente independentes, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. V F

II

*Para cada questão deste grupo, complete, **justificando**, as respectivas afirmações.*

1. Considere a seguinte matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}, \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

a) Os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $|A| = 0$ são:

Resolução:

O determinante da matriz A não se altera se adicionarmos à $1^{\underline{a}}$ coluna a $2^{\underline{a}}$ e a $3^{\underline{a}}$ colunas, obtendo-se:

$$A = \begin{vmatrix} 3+x & 1 & 1 \\ 3+x & 1+x & 1 \\ 3+x & 1 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (3+x)x^2.$$

Assim $|A| = 0 \Leftrightarrow (3+x)x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 0.$

b) Considerando $x = 1$ tem-se que:

Resolução:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$|A|$=4

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

2. Considere a seguinte matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa são:

Resolução: Os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa são os valores para os quais $|A - \lambda I_4| \neq 0$.

Sendo a matriz $(A - \lambda I_4)$ uma matriz triangular (inferior) o seu determinante é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

Assim $|A - \lambda I_4| \neq 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 2$.

b) Os valores próprios da matriz A e respectivas multiplicidade algébrica são:

Resolução: Os valores próprios da matriz A são os valores para os quais $|A - \lambda I_4| = 0$. Da alinea anterior, a), tem-se que $(2-\lambda)\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$.

Os valores próprios de A são então:

* $\lambda = 2$ de multiplicidade algébrica 2,
* $\lambda = 1$ de multiplicidade algébrica 1,
* $\lambda = 0$ de multiplicidade algébrica 1.

c) O subespaço próprio associado ao valor próprio de A, de maior módulo é

Resolução: O subespaço próprio pretendido é o conjunto soluçao do sistema homogéneo $(A - 2I)X = 0$.

$(A - 2I) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tendo-se então:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -6y + 2z = 0 \\ 2/3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0, \forall w \end{cases}$$

e então: $U_{\lambda=2} = \{(0,0,0,w) : w \in \mathbb{R}\}$

d) Averigue se a matriz A é diagonalizável (*justifique a sua resposta*).

Resolução:

$U_{\lambda=0} =?$

$$(A - 0I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tendo-se então:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -2y-z=0 \\ -z+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1/2z, \\ z=w \end{cases} \quad U_{\lambda=0}=\{(0,-1/2z,z,z):z\in\mathbb{R}\}, \ dimU_{\lambda=0}=1$$

$U_{\lambda=1}=?$

$$(A-1I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tendo-se então:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ -z+w=0 \end{cases} \quad U_{\lambda=1}=\{(0,0,z,z):z\in\mathbb{R}\}, \ dimU_{\lambda=1}=1$$

Da aliena anterior, c), tem-se que $dimU_{\lambda=2}=1$, verificando-se $dimU_{\lambda=2}+dimU_{\lambda=1}+dimU_{\lambda=0}=1+1+1=3\neq 4$, onde n=4 é $dim\mathbb{R}^4$. Logo a matriz A não é diagonalizável.

III

Responda à questão deste grupo ***justificando*** *a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.*

1. Seja A uma matriz de ordem n invertível. Prove que

$$det(adj(A))=(det(A))^{n-1}.$$

Resolução:

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)\Leftrightarrow adj(A)=|A|A^{-1}$ tendo-se então $|adj(A)|=|\ |A|\ A^{-1}\ |$

e, sendo válida a seguinte propriedade dos determinantes, $|\alpha A|=\alpha^n|A|$, sendo n a ordem da matriz A, tem-se

$|adj(A)|=|A|^n\ |A^{-1}\ |=|A|^n\frac{1}{|A|}=|A|^{n-1}.$

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

   Determine os possíveis valores próprios de A, considerando:

   (a) A uma matriz *idempotente,* ou seja $A^2=A$,

   Resolução:

   Se λ é valor próprio de A associado ao vector próprio x tem-se que $Ax=\lambda x$. Sabemos também que $A^2x=\lambda^2x$.

Neste caso tem-se ainda que $A^2 = A$.

Assim podemos escrever $\lambda^2 x = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda)x$ com x vector próprio associado a λ e por isso $x \neq 0$. Assim vem $(\lambda^2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$.

Os valores próprios de uma matriz A *idempotente* são iguais a 0 ou a 1.

(b) A uma matriz *nilpotente*, ou seja $A^2 = O$, sendo O a matriz nula.

Resolução:

De $A^2 x = \lambda^2 x$ vem que $Ox = \lambda^2 x \Leftrightarrow 0 = \lambda^2 x$, com x um vector próprio associado a λ e por isso $x \neq 0$. Logo $\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Os valores próprios de uma matriz A *nilpotente* são iguais a 0.

Cotações:

Parte I	Parte II	Parte III
6	1.5+1.5+1 ; 1.5+1+1+1.5	2 ; 1.5+1.5