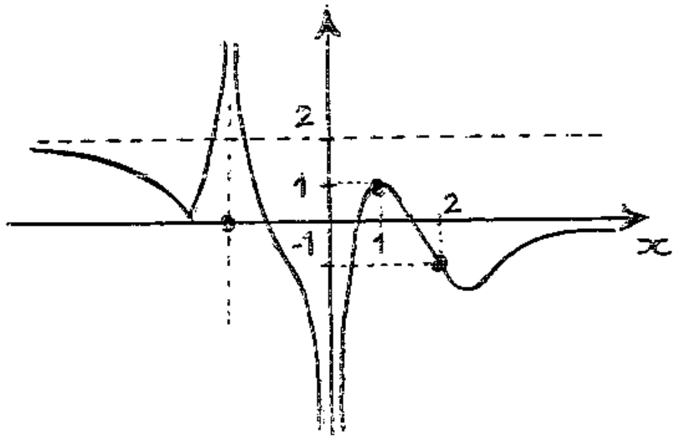
Exame de Cálculo I, LEI, 1ª chamada, 17 Jan 2007

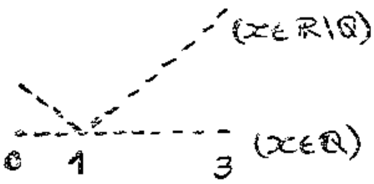
1. a) $-\frac{\pi}{2}$

b) $\left\{\frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é numerável porque $n \mapsto \frac{\pi}{n}$ é uma bijecção e é limitado porque todos os seus elementos estão em $[0, \pi]$.

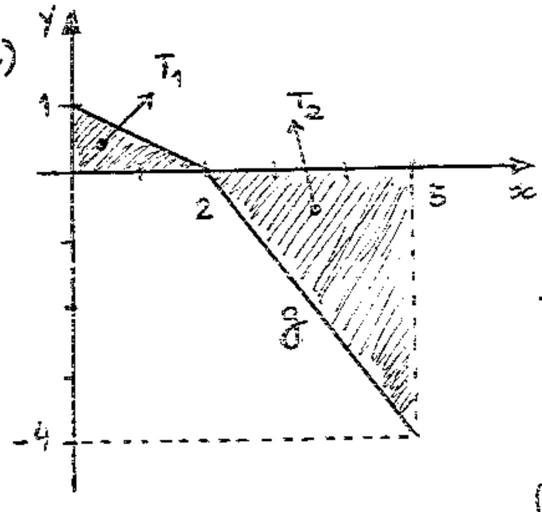
c)



d) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,3] \cap \mathbb{Q} \\ |x-1|, & x \in [0,3] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



e)



$$\int_0^5 g(t)\,dt = \int_0^2 g(t)\,dt + \int_2^5 g(t)\,dt$$
$$= \text{área}(T_1) - \text{área}(T_2)$$
$$= 1 - 6 = -5.$$

$$\int_0^5 |g(t)|\,dt = 1 + 6 = 7.$$

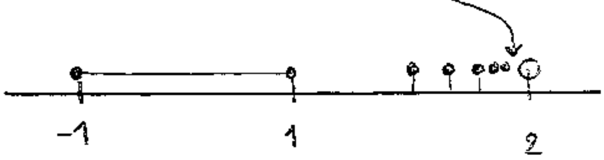
2. a) Notando que $|x-a|$ dá a distância de x a a, tem-se

$$|x-2| < |x+4| \quad \text{sse} \quad x > -1,$$

pelo que a afirmação é <u>Verdadeira</u>.

b) $\left\{2-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\right\}$

$$= \left\{1,\ 2-\tfrac{1}{2},\ 2-\tfrac{1}{3},\ 2-\tfrac{1}{4},\ \dots\right\} \cup [-1,1] \equiv A$$



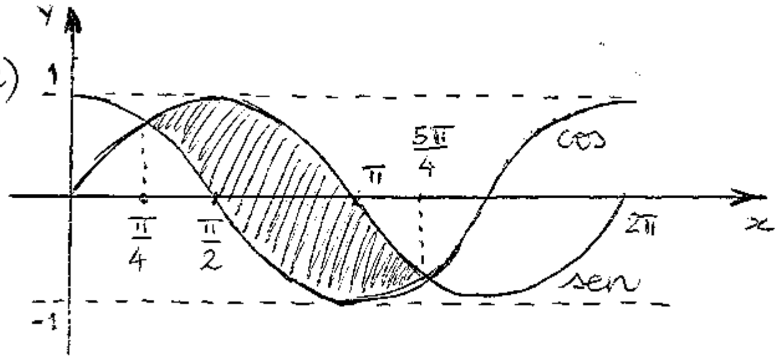
$\sup A = 2$ mas $2 \notin A$, logo A não possui máximo.
A afirmação é <u>falsa</u>.

c) Ponha-se $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{4}$, $x \in [\pi, 2\pi]$.
f é contínua, $f(\pi) = -1-\frac{\pi}{4} < 0$, $f(2\pi) = 1-\frac{\pi}{4} > 0$.
Pelo teorema de Bolzano, $\exists z \in]\pi, 2\pi[: f(z) = 0$,
ou seja, $\exists z \in]\pi, 2\pi[: \cos z = \operatorname{sen} z + \frac{\pi}{4}$.
A afirmação é <u>Verdadeira</u>.

d) A proposição é <u>Verdadeira</u> porque

$$f \text{ derivável em } [\pi,7] \Rightarrow f \text{ contínua em } [\pi,7]$$
$$\Rightarrow f \text{ integrável em } [\pi,7].$$

e)



$$\text{Área} = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$$

$$= \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

A afirmação é falsa.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^2}$ (indeterminação $\frac{0}{0}$)

Atendendo a que

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{\operatorname{sen} x} - e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{2x}$$

e a que

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x\, e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{2}$$

$$= 0,$$

pela Regra de L'Hospital conclui-se que o limite proposto é igual a 0.

4. a) $$P_{3,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$= P_{2,1}(x) + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$= 4x^2+2x+5 + 2(x-1)^3$$

$$= 4x^2+2x+5 + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 8x + 3$$

b) Para F, tem-se

$$P^F_{2,1}(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 .$$

Sendo F uma primitiva de f, resulta

$$F'(x) = f(x) \quad e \quad F''(x) = f'(x).$$

Então

$$F'(1) = f(1) = P_{2,1}(1) = 4x^2+2x+5\Big]_{x=1} = 11$$

$$F''(1) = f'(1) = P'_{2,1}(1) = \left(4x^2+2x+5\right)'\Big|_{x=1}$$

$$= 8x+2\Big|_{x=1} = 10,$$

donde

$$P^F_{2,1}(x) = 2 + 11(x-1) + 5(x-1)^2.$$

5. a) $\displaystyle\int \frac{e^x(1+\operatorname{arctg}^2 e^x)}{1+e^{2x}}\,dx$

$$= \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx + \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\operatorname{arctg}^2 e^x\,dx$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 e^x + C.$$

b) $\displaystyle\frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$

$$2x^2+x+1 = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1)$$
$$= (A+C)x^2 + (2A+B)x + A-B-C$$

Então $\begin{cases} A+C=2 \\ 2A+B=1 \\ A-B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$

Consequentemente,

$$\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \log|x-1| + \frac{1}{x+1} + \log|x+1| + C.$$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\log(\log x)\,dx$

$$= \Big[\log x \,\log(\log x)\Big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \cancel{\log x}\,\frac{\frac{1}{x}}{\cancel{\log x}}\,dx$$

$$= 2\log 2 - \Big[\log x\Big]_e^{e^2} = 2\log 2 - 1.$$

d) Faça-se a substituição de variável definida por

$$2x+5=t^2,\ t>0 \iff x=\frac{1}{2}(t^2-5),\ t>0.$$

Então

$$g(t)=\frac{1}{2}(t^2-5) \Rightarrow g'(t)=t.$$

Quanto aos limites de integração, temos

$$\begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2}(t^2-5) \end{cases} \Rightarrow 2=\frac{1}{2}(t^2-5) \Rightarrow t^2=9 \underset{t>0}{\Rightarrow} t=3$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ x=\frac{1}{2}(t^2-5) \end{cases} \Rightarrow -2=\frac{1}{2}(t^2-5) \Rightarrow t^2=1 \underset{t>0}{\Rightarrow} t=1$$

donde

$$\int_{-2}^{2} \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}\,dx = \int_1^3 \frac{\frac{3}{2}(t^2-5)}{t}\, t\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^3 (t^2-5)\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{t^3}{3}-5t\right]_1^3$$

$$= \frac{3}{2}\left(9-15-\frac{1}{3}+5\right) = \underline{\underline{-2}}$$

6. Sendo f contínua em $[a,b]$, o teorema de Weierstrass (cap II) garante que f é limitada e atinge os seus extremos, isto é,

$$\exists \alpha, \beta \in [a,b]: \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta), \ \forall x \in [a,b].$$

Então

$$f(\alpha) g(x) \leq f(x) g(x) \leq f(\beta) g(x), \ \forall x \in [a,b],$$

uma vez que $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, donde, pela monotonia do integral

$$f(\alpha) \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leq f(\beta) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Consequentemente,

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = k \int_a^b g(x)\,dx$$

para algum $k \in [f(\alpha), f(\beta)]$. Pelo teorema do valor intermédio, vem que

$$\exists c \in [a,b] : \quad f(c) = k$$

donde

$$\exists c \in [a,b]: \int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$