Funções reais de variável real

Definição

Chamamos **função real de variável real** *a uma função* $f : X \longrightarrow Y$, *em que* X *e* Y *são subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$.

Definição

Dado um subconjunto X, *não vazio, de* $\mathbb{R}$, *diz-se que* $\boldsymbol{X}$ **é simétrico relativamente a** $\mathbf{0}$ *se* $X = -X$.

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ *uma função. Diz-se que:*

- $\boldsymbol{f}$ **é uma função par** *se* X *é simétrico relativamente a* 0 *e* $\forall\, x \in X \;\; f(-x) = f(x)$;
- $\boldsymbol{f}$ **é uma função ímpar** *se* X *é simétrico relativamente a* 0 *e* $\forall\, x \in X \;\; f(-x) = -f(x)$.

Definição

Dadas duas funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *define-se*

- **soma de** $\boldsymbol{f}$ **e** $\boldsymbol{g}$**:**

$$\begin{array}{rccl} f+g: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

- **produto de** $\boldsymbol{f}$ **e** $\boldsymbol{g}$**:**

$$\begin{array}{rccl} fg: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

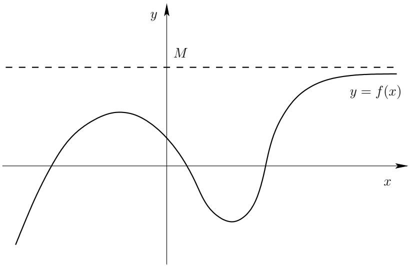
- **quociente de** $\boldsymbol{f}$ **e** $\boldsymbol{g}$ *(supondo que* $g(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in X$*)***:**

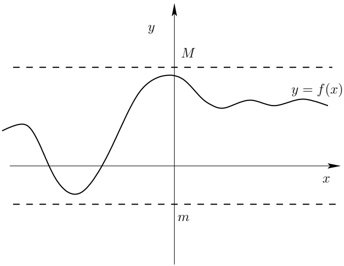
$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, diz-se que

- $\boldsymbol{f}$ *é* **majorada** *se* $\quad \exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \qquad f(x) \leq M$*;*
- $\boldsymbol{f}$ *é* **minorada** *se* $\quad \exists\, m \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X \qquad m \leq f(x)$*;*
- $\boldsymbol{f}$ *é* **limitada** *se f é majorada e minorada.*





Definição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ *diz-se*

- **estritamente crescente** *se*
  $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$*;*
- **crescente** *se* $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$*;*
- **estritamente decrescente** *se*
  $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$*;*
- **decrescente** *se*
  $\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$*;*
- **monótona** *se for crescente ou decrescente;*
- **estritamente monótona** *se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ *uma função. Um ponto* $x_0 \in X$ *diz-se*

- *um* **ponto de máximo local** *ou* **maximizante local** *de* f *se*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap X \qquad f(x) \leq f(x_0)$$

e $f(x_0)$ *diz-se* **máximo local** *de* f*;*

- *um* **ponto de mínimo local** *ou* **minimizante local** *de* f *se*

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap X \qquad f(x_0) \leq f(x)$$

e $f(x_0)$ *diz-se* **mínimo local** *de* f*;*

- um **ponto de máximo local estrito** de f se

$$\exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$$

e $f(x_0)$ diz-se **máximo local estrito** de f;

- um **ponto de mínimo local estrito** de f se

$$\exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x_0) < f(x)$$

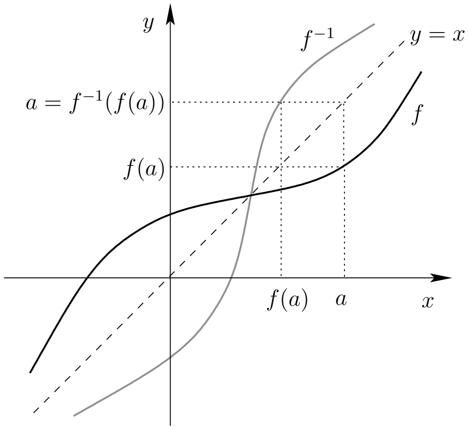
e $f(x_0)$ diz-se **mínimo local estrito** de f;

- um **ponto de máximo absoluto** ou **maximizante absoluto** de f se
$$\forall\, x \in X \qquad f(x) \leq f(x_0),$$
e $f(x_0)$ diz-se **máximo absoluto** de f ;

- um **ponto de mínimo absoluto** ou **minimizante absoluto** de f) se
$$\forall\, x \in X \qquad f(x_0) \leq f(x),$$
e $f(x_0)$ diz-se **mínimo absoluto** de f;

- um **ponto de extremo (local ou absoluto)** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou absoluto) de f.

A partir de uma representação gráfica da função f podemos obter uma representação gráfica de f^{-1}, procedendo como se indica na figura seguinte:



Nota

Se uma função $f : X \longrightarrow Y$ real de variável real é injectiva mas não sobrejectiva, é usual falar da inversa de f. Na realidade, cometemos um abuso de notação, chamando ainda f à função bijectiva que se obtém substituindo Y pelo contradomínio de f.

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : A \longrightarrow Y$, funções tais que $A \subseteq X$ e $g(x) = f(x), \forall\, x \in A$. A função g diz-se uma **restrição** *de f e denota-se $g = f_{|_A}$. A função f diz-se um* **prolongamento** *de g.*