PROBABILIDADES

Definição clássica

Se uma experiência aleatória tiver N resultados mutuamente exclusivos e igualmente prováveis, e se um acontecimento A contiver N_A desses resultados ($N_A \leq N$), então a probabilidade do acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

A probabilidade de um acontecimento A é a razão entre o número de resultados (ou casos) favoráveis (à ocorrência de A, naturalmente) e o número de resultados possíveis.

- **Exemplo:** Qual a probabilidade de tirar um ás dum baralho de cartas?

  $N_A = 4 N = 52$ $P(A) = 4/52$

Existem muitas situações onde as diferentes possibilidades não são igualmente prováveis.

A probabilidade de um acontecimento (evento ou resultado) é a proporção de vezes que eventos da mesma espécie ocorrerão a longo prazo.

Definição Axiomática

As probabilidades são definidas como "objetos matemáticos", que se comportam segundo regras bem definidas.

ESPAÇOS AMOSTRAIS

Experiência: qualquer processo de observação ou medida.

Resultados: resultados de uma experiência, contagens, respostas sim/não, valores.

Espaço Amostral (S): é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência.

Elemento ou Ponto Amostral: cada resultado do espaço amostral.

Exemplo 1: Lançamento de um dado

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $S_2 = \{\text{ par, ímpar}\}$

Exemplo 2: Espaço amostral constituído pelo lançamento de dois dados de cores diferentes.

$S_1 = \{(x, y): x = 1, 2, 3, 4, 5, 6; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $S_2 = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$

ESPAÇOS AMOSTRAIS

Espaço Amostral $\begin{cases} \text{Discreto} \\ \text{Contínuo} \end{cases}$

Espaço Amostral Discreto: contém um número finito de elementos aos quais é possível fazer corresponder números inteiros.

Espaço Amostral Contínuo: contém um número infinito de elementos constituindo um espaço contínuo.

Acontecimento ou Evento: subconjunto do espaço amostral.

DEFINIÇÕES

- A união dos acontecimentos A e B, $A \cup B$, é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos.
- A intersecção dos acontecimentos A e B, $A \cap B$, é o acontecimento em S que contém todos os elementos que estão em A e B.
- O complemento do acontecimento A, $\bar{A}$, é o acontecimento em S que contém todos os elementos de S que não estão em A.

POSTULADOS DA ÁLGEBRA DE BOOLE

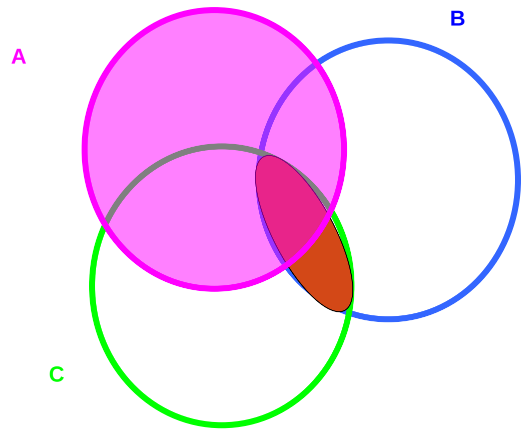
1. Para cada par de acontecimentos A e B no espaço amostral S, há um único acontecimento $A \cup B$ e um único acontecimento $A \cap B$ em S.
2. $A \cup B = B \cup A$.

   $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

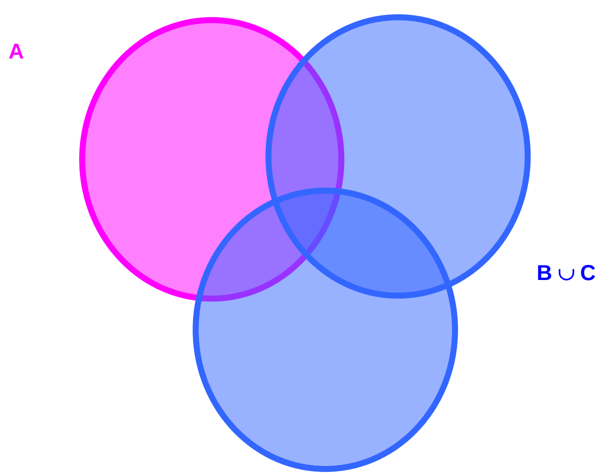
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \cap S = A$, para cada acontecimento A no espaço amostral S; existe um único acontecimento $\varnothing$ tal que $A \cup \varnothing = A$ para cada acontecimento A em S.
6. Para cada acontecimento A em S existe um único acontecimento $\bar{A}$ em S que $A \cap \bar{A} = \varnothing$ e $A \cup \bar{A} = S$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$



PROBABILIDADE DE UM ACONTECIMENTO

Axioma 1

Para qualquer acontecimento A (isto é, qualquer subconjunto de um espaço amostral S), a probabilidade desse acontecimento satisfaz a relação:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axioma 2

A probabilidade associada ao acontecimento certo (S) é $P(S) = 1$

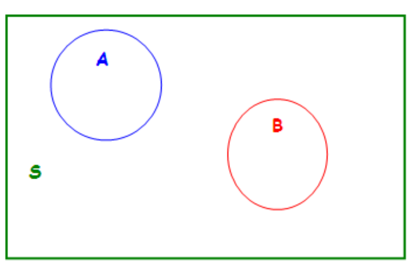
Axioma 3

Se $A_1, A_2, A_3, \ldots$, é uma sequência finita ou infinita de acontecimentos *mutuamente exclusivos* de S, então:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

11

Acontecimentos mutuamente exclusivos



$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ A e B são mutuamente exclusivos

12

Exemplo 1

Se uma moeda equilibrada é lançada duas vezes, qual a probabilidade de obter pelo menos uma cara?

Resolução:

S = {FF, FC, CF, CC}   F - cara, C – coroa

A = {FF, FC, CF}

P(A) = P(FF) + P(FC) + P(CF)

= ¼ + ¼ + ¼ = ¾

13

Exemplo 2

Um dado está viciado de forma que números ímpares são duplamente mais prováveis que os números pares. Se o acontecimento E é definido como um número maior que 3 ocorre num simples lançamento, encontre P(E).

Resolução:

S = {1, 2,3, 4, 5, 6}
w – probabilidade de um número par
2.w – probabilidade de um número ímpar

P(S) = 1 ⇔ 2.w + w + 2.w + w + 2.w + w = 1 ⇔ 9.w = 1 ⇔ w = 1/9

E = {sair um número > 3} = {4, 5, 6}

P(E) = 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9

14

Algumas regras de probabilidade

1. Se A e $\bar{A}$ são acontecimentos complementares num espaço amostral S, então:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. $P(\emptyset) = 0$, para qualquer espaço amostral.

3. Se A e B são acontecimentos num espaço amostral S e $A \subseteq B$, então:

$$P(A) \leq P(B).$$

4. Para qualquer acontecimento A: $0 \leq P(A) \leq 1$.

5. Se A e B são dois quaisquer acontecimentos num espaço amostral S, então:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

6. Se A, B e C são três quaisquer acontecimentos num espaço amostral S, então:

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

15

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Podem surgir dificuldades quando as probabilidades são referidas sem especificação do espaço amostral.

Uma vez que a escolha do espaço amostral (nomeadamente o conjunto de todas as possibilidades em análise) não é sempre evidente, usa-se P(A|S) para referir a probabilidade condicional do acontecimento A em relação ao espaço amostral S; lê-se a probabilidade de A dado S.

Se A e B são dois acontecimentos quaisquer no espaço amostral S e $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional de B dado A é:

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

16

Exemplo

Qual é a probabilidade de que um número de pontos do dado viciado seja um quadrado perfeito? E qual a probabilidade de ser um quadrado perfeito dado que é maior que 3?

Resolução: A = {sair > 3} = {4, 5, 6} B={sair quadrado perfeito} = {1, 4}

$A \cap B = \{4\}$

$P(A) = 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9$ $P(B) = 2/9 + 1/9 = 3/9$ $P(A \cap B) = 1/9$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

17

Se A e B são dois acontecimentos quaisquer no espaço amostral S e $P(A) \neq 0$, então:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)}$$

Se A, B e C são três acontecimentos quaisquer no espaço amostral S tal que $P(A) \neq 0$ e $P(A \cap B) \neq 0$, então:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B|A) \,.\, P(C|A \cap B)$

Demonstração:

$P(A \cap B \cap C) = P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \,.\, P(C|A \cap B) = P(A) \,.\, P(B|A) \,.\, P(C|A \cap B)$

18

Exemplo

Três lâmpadas defeituosas foram inadvertidamente misturadas com seis lâmpadas boas. Escolhidas duas lâmpadas ao acaso, calcule-se a probabilidade de serem ambas boas.

Resolução: Imagine-se que as lâmpadas são retiradas, uma após a outra, e considerem-se os acontecimentos seguintes:

A_1: a primeira lâmpada é boa A_2: a segunda lâmpada é boa

A probabilidade de as duas lâmpadas serem boas é dada por:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1) = 6/9 \ . \ 5/8 = 5/12$$

19

Exemplo

Uma caixa contém 20 fusíveis, dos quais 5 são defeituosos. Se três fusíveis são seleccionados e removidos sucessivamente sem reposição, qual a probabilidade que os três fusíveis sejam defeituosos?

Resolução:

A - 1º fusível defeituoso B - 2º fusível defeituoso C - 3º fusível defeituoso

$P(A) = 5/20$ $P(B|A) = 4/19$ $P(C|A \cap B) = 3/18$

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \ . \ P(B|A) \ . \ P(C|A \cap B) = 5/20 \ . \ 4/19 \ . \ 3/18 = 60/6840$

$= 0.0088$

20

ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES

Dois acontecimentos são independentes se a ocorrência ou não ocorrência de qualquer um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Isto é:

- **$P(B|A) = P(B)$**
- **$P(A|B) = P(A)$**
- **$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$**

Dois acontecimentos são independentes se e só se:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Exemplo

Uma moeda é lançada três vezes, e os oito resultados possíveis

FFF FFC FCF CFF FCC CFC CCF CCC

são igualmente prováveis. Considere os seguintes acontecimentos:

A – Uma cara (F) ocorre em cada um dos dois primeiros lançamentos

B – Uma coroa (C) ocorre no 3º lançamento

C – Exactamente duas coroas ocorrem nos três lançamentos

Mostre que A e B são independentes, enquanto B e C são dependentes.

Resolução:

A = {FFF, FFC} $P(A) = 2/8 = 1/4$

B = {FFC, FCC, CFC, CCC} $P(B) = 4/8 = 1/2$

C = {FCC, CFC, CCF} $P(C) = 3/8$

$A \cap B$ = {FFC} $P(A \cap B) = 1/8 = P(A) \cdot P(B)$

$B \cap C$ = {FCC, CFC} $P(B \cap C) = 2/8 \neq P(B) \cdot P(C)$

Se dois acontecimentos A e B são independentes, então os dois acontecimentos A e $\overline{B}$ são também independentes.

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ $\qquad$ $A = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap S = A$

$(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ são acontecimentos mutuamente exclusivos

$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})]$

$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$= P(A) \,.\, P(B) + P(A \cap \overline{B})$ com $P(A \cap \overline{B}) = P(A).\, P(\overline{B}) = P(A).\, [1 - P(B)]$

$P(A) = P(A) \,.\, P(B) + P(A).\, [1 - P(B)]$

$= P(A) \,.\, [P(B) + 1 - P(B)] \Rightarrow P(A) = P(A)$ c.q.d.

23

Os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são independentes se e só se a probabilidade da intersecção de quaisquer 2, 3 ou k destes acontecimentos igualar o produto das respectivas probabilidades

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i)$$

Se os acontecimentos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituem uma partição do espaço amostral S e $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, então para qualquer acontecimento A em S

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A \mid B_i)$$

24

$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$

$B_i \cap B_j = \varnothing \qquad i \neq j$

Partição do espaço amostral

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$

$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$ e $A \cap S = A$

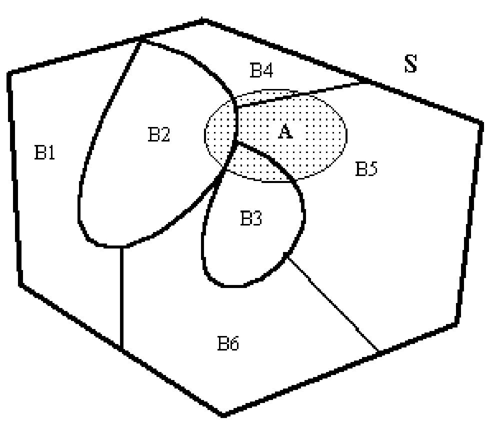
$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B \mid A)$

$P(A) = P(B_1) \, . \, P(A \mid B_1) + P(B_2) \, . \, P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_k) \, . \, P(A \mid B_k)$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A \mid B_i)$$

25

Partição do Espaço



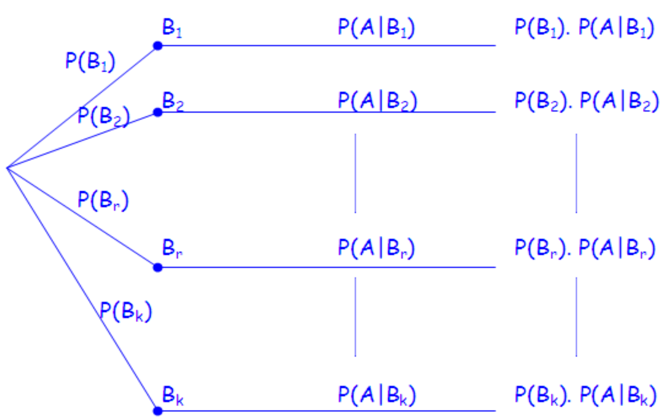
26

TEOREMA DE BAYES

Se os acontecimentos $B_1, B_2, \dots, B_k$ constituem uma partição do espaço amostral S e $P(B_i) \neq 0$ para i = 1, 2, …, k, então para qualquer acontecimento A em S tal que $P(A) \neq 0$:

$$\boxed{P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r).P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A \mid B_i)}}$$

para r = 1, 2, …, k.



$$P(B_r \mid A) = \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)} = \frac{P(B_r).P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A \mid B_i)}$$

Exemplo 1: A urna I contém 3 fichas vermelhas e 2 fichas azuis, e a urna II contém 2 fichas vermelhas e oito fichas azuis. Joga-se uma moeda. Se sair “cara” (F), extrai-se uma ficha da urna I, se sair “coroa” (C), extrai-se uma ficha da urna II. Determine a probabilidade de escolha de uma ficha vermelha.

Resolução:

A – escolha de ficha vermelha

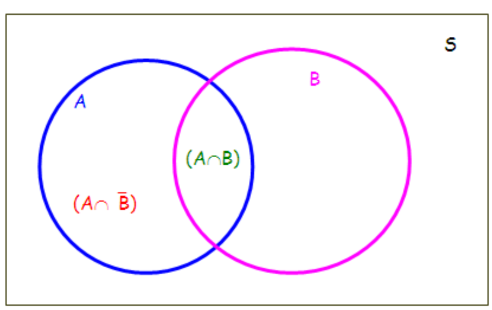
B –urna I $\quad P(B) = ½ \quad P(A|B) = 3/5$

$\bar{B}$ – urna II $\quad P(\bar{B}) = ½ \quad P(A|\bar{B}) = 2/10 = 1/5$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ A é a união de dois acontecimentos mutuamente exclusivos

$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$

$P(A) = ½ .3/5 + ½ . 1/5 = 4/10 =2/5$

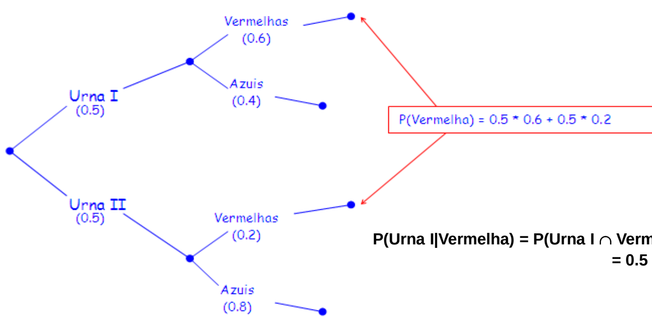


$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

Exemplo 2 (teorema de Bayes): Considere-se o exemplo anterior. Suponha-se que não se sabe o resultado da jogada da moeda, mas que a ficha extraída é vermelha. Qual a probabilidade de ter sido extraída da urna I?

Resolução:

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(B).P(A\,|\,B)}{P(B).P(A\,|\,B) + P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$



P(Urna I|Vermelha) = P(Urna I ∩ Vermelha)/P(Vermelha)
= 0.5 * 0.6/(0.5 * 0.6 + 0.5 * 0.2)

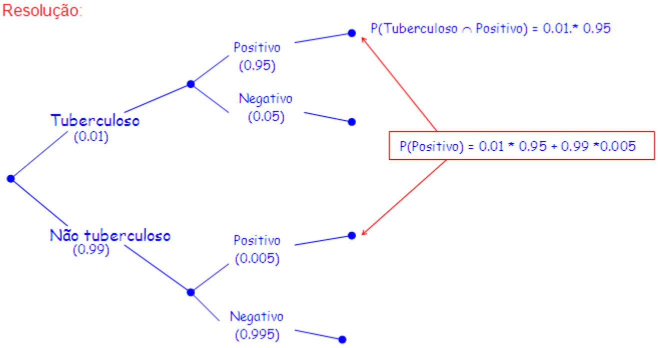
31

Exemplo 3: Admita-se que num determinado país, 1% da população tem tuberculose e, ainda, que:

- para uma pessoa que tenha de facto contraído a doença, uma microrradiografia tem um resultado positivo (isto é, detecta a tuberculose) em 95% dos casos e
- para uma pessoa não tuberculosa, esta percentagem é apenas de 0.5%.

Pretende-se saber qual a probabilidade de uma pessoa a quem a microrradiografia tenha dado resultado positivo estar tuberculosa.

Resolução:



32