UNIVERSIDADE DO MINHO 5 De

Álgebra Linear

$1^{\underline{o}}$ Teste - **A**

Esboço da justificação da opção V ou F para cada questão

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se A é uma matriz que verifica $(2I_2 + A)^T = -2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então a $2^{\underline{a}}$ coluna da matriz A é igual a $\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}^T$. V F

Se $(2I_2 + A)^T = -2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então $A^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ e logo a $2^{\underline{a}}$ coluna da matriz A é $\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}^T$.

b) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, invertível. Existe uma matriz B, quadrada de ordem n, não nula, tal que AB é uma matriz nula. V F

Sendo A uma matriz invertível e considerando $AB = O$, vem que $AB = O \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}O \Leftrightarrow B = O$, o que contraria a hipótese.

c) Se A é uma matriz anti-simétrica ($A^T + A = O$) então A^2 é simétrica. V F

$A^2 = A.A = (-A^T)(-A^T) = +(A.A)^T = (A^2)^T$

d) Se A é uma matriz de ordem 4 que verifica $(A + I_4)^2 = 0$ então A é invertível. V F

$$
\begin{aligned}
|(A + I_4)^2| = |O| &\Leftrightarrow |A + I_4||A + I_4| = 0 \\
&\Leftrightarrow |A + I_4| = 0 \\
&\Leftrightarrow (A + I_4)x = 0 \quad \text{tem soluções alem da soluçao trivial} \\
&\Leftrightarrow Ax + I_4x = 0, \quad x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow Ax = -I_4x, \quad x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow A = -I \\
&\Leftrightarrow |A| = -1 \neq 0, \text{ e logo } A \text{ é invertível}
\end{aligned}
$$

2. **a)** Os vectores $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (1, 0, \alpha)$ são linearmente dependentes para $\alpha = -1$. V F

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

tendo-se $c(A) = 3$ e, assim os vectores dados, para $\alpha = -1$ são linearmente independentes.

b) Sejam u, v e w vectores linearmente dependentes de um espaço vectorial real V. Então v é combinação linear de u e w. V F

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o seguinte contra-exemplo. Sejam $u = (1,0,0), v = (0,1,0)$ e $w = (2,0,0)$. Tem-se que u, v e w são vectores linearmente dependentes uma vez que para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tem $c(A) = 2$. Todavia, não existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $v = \alpha u + \beta w$ já que $v = \alpha u + \beta w \Leftrightarrow (0,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(2,0,0) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 1 = 0 \\ 0 = \alpha 2\beta \end{cases}$, tendo-se um sistema impossível.

c) Se u, v e w são vectores linearmente dependentes de um espaço vectorial real V, então os vectores $u - v$, $v - w$ e $w - u$ são vectores linearmente independentes.

V F

Seja $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e considere-se $\alpha(u - v) + \beta(v - w) + \gamma(w - u) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \gamma)u + (-\alpha + \beta)v + (-\beta + \gamma)w = 0$ e, sendo por hipótese u, v, w vectores linearmente independentes, vem que $\alpha - \gamma = 0, -\alpha + \beta = 0$ e $-\beta + \gamma = 0$ e logo $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e os vectores $u - v$, $v - w$ e $w - u$ são vectores linearmente independentes.

d) Em $\mathbb{R}^2$ não existe nenhum subespaço de dimensão 2 gerado pelos vectores $u = e_1 - e_2$ e $v = -e_2$ (sendo $\{e_1, e_2\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$). V F

Tem-se que $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ e $v = -e_2 = (0, -1, 1)$.

Tendo-se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $c(A) = 2$, e os dois vectores geradores u e v, são linearmente independentes gerando um subespaço de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2.

3. a) Seja A uma matriz de ordem 9×10 tal que $car(A) = 5$, então o núcleo de A tem dimensão 4. V F

Uma vez que $dim\mathbb{R}^{10} = dimNuc_f + dimIm_f$ vem que $10 = dimNuc_f + 5 \Leftrightarrow dimNuc_f = 5$.

b) Existe uma matriz A, que define uma aplicação linear f, em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $dim\ \ Im(f) = dim\ \ Nuc(f)$, V F

Uma vez que $dim\mathbb{R}^2 = dimNuc_f + dimIm_f$ vem que $2 = dimNuc_f + dimIm_f$, ou seja, desde que esta condição se verifique, é possível definir uma aplicação linear. Por exemplo uma aplicação linear não injectiva, ou seja, tal que $dimNuc_f = 0$ e $dimIm_f = c(A) = 2$.

c) A aplicação linear f, definida em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $Nuc_f = \{(x, y) : x = 0\}$ é um isomorfismo. V F

A aplicação linear f é um isomorfismo se for uma aplicação linear bijectiva (injectiva e sobrejectiva). Ora f não é injectiva uma vez que $Nuc_f \neq 0$.

d) Se $H = \langle 1, 2 + x, 3 + 2x + x^3 \rangle$, é um subespaço de P_3, sendo P_3 o subespaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, então $x \notin H$. V F

$$x \in H \text{ se } \exists \alpha, \beta, \gamma : x = \alpha 1 + \beta(2 + x) + \gamma(3 + 2x + x^3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 1 = \beta + 2\gamma \\ 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 = \alpha \\ 1 = \beta \\ 0 = \gamma \end{cases} \quad \text{e logo } x \in H.$$

4. a) A matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} x_1 = 3 - x_4 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$ tem característica igual a 3.

V F

Sendo a matriz dos coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ temos $c(A) = 3$.

b) O espaço gerado pelos vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tem dimensão igual a 2. V F

Considerando-se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se $c(A) = 2$ e assim o espaço gerado pelos vectores iniciais tem dimensão igual a 2.

c) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tem-se $car(A) = 1$ ou $car(A) = 2$, para quaisquer valores reais de r e s.

V F

Se $r = 2$ tem-se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & s-1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tendo-se, se $s = 1$, $c(A) = 2$ e se $s \neq 1$, $c(A) = 3$. Note-se ainda que se $r \neq 2$ e $s \neq 1$, $c(A) = 3$.

d) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o espaço das colunas de A tem dimensão igual a 2.

V F

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se $c(A) = 2$ e assim o espaço das colunas tem dimensão igual a 2.