2.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Observação 94: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Definição 98: As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida. Cada regra origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 100). As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Regras de **I***ntrodução*

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\to\psi}\to I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi}\wedge I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\neg I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\vee_2 I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\leftrightarrow I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}(RAA)$$

Regras de **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\to\psi\end{matrix}}{\psi}\to E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi}\wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \neg\varphi\end{matrix}}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\vee\psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}\quad\begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\vee E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}(\bot)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}}{\psi}\leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{matrix}}{\varphi}\leftrightarrow_2 E$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*. Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Exemplo 99: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\dfrac{p_1\wedge p_2}{p_1}\wedge_1 E \qquad \dfrac{(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)}{p_1\wedge p_2}\wedge_1 E$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\dfrac{\dfrac{(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)}{p_1\wedge p_2}\wedge_1 E}{p_1}\wedge_1 E \qquad (2.2)$$

Combinando esta construção com uma inferênica $\to I$ podemos obter:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3)]}{p_1\wedge p_2}\wedge_1 E}{p_1}\wedge_1 E}{((p_1\wedge p_2)\wedge(p_1\to\neg p_3))\to p_1}\to I \qquad (2.3)$$

As duas inferências em (2.1), assim como as combinações de inferências em (2.2) e (2.3), são exemplos de demonstrações no sistema formal DNP.

Definição 100: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de DNP* é o menor conjunto X de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente cortadas, tal que:

a) para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\to E$ e $\to I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{matrix}D\\ \psi\end{matrix}\in X \implies \dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\to\psi}\to I\in X$

(onde $\begin{matrix}D\\ \psi\end{matrix}$ denota uma derivação (árvore de fórmulas) cuja raiz é ψ e $\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{matrix}$ denota a árvore de fórmulas obtida de D cortando todas as eventuais ocorrências de φ como folha);

ii) $\begin{matrix}D_1\\ \varphi\end{matrix}\in X$ e $\begin{matrix}D_2\\ \varphi\to\psi\end{matrix}\in X \implies \dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}D_2\\ \varphi\to\psi\end{matrix}}{\psi}\to E\in X$.

As derivações de DNP são também chamadas *deduções*. No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação. A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 104).

Exemplo 102: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

1)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \quad \psi\to(\varphi\to\sigma)}{\varphi\to\sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi\wedge\psi)\to\sigma}\to I^{(1)}$$

2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)}\quad\cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\neg E}{\varphi}RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi\to\varphi}\to I^{(1)}$$

3)
$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi\to\varphi}\to I^{(2)}}{\varphi\to(\psi\to\varphi)}\to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas cortadas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas cortadas e as regras que permitem efetuar esses cortes. Por exemplo, em **3)**, a inferência $\to I$ anotada com (1) é utilizada para cortar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\to I$ anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer corte.

Exemplo 105: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1. Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)}\quad\varphi\to\psi}{\psi}\to E\quad\cancel{\psi\to\sigma}^{(1)}}{\sigma}\to E}{\varphi\to\sigma}\to I^{(2)}}{(\psi\to\sigma)\to(\varphi\to\sigma)}\to I^{(1)}$$

Então:

(a) o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi,\varphi\to\psi,\psi\to\sigma\}$;

(b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi\to\psi\}$;

(c) a conclusão de D_1 é $(\psi\to\sigma)\to(\varphi\to\sigma)$;

(d) D_1 é uma derivação de $(\psi\to\sigma)\to(\varphi\to\sigma)$ a partir de $\{\varphi\to\psi\}$.

2. Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E\quad\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)}\neg I^{(1)}$$

Então:

(a) o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi\wedge\neg\varphi\}$;

(b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;

(c) a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$;

(d) D_2 é uma derivação de $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$.

Definição 106: Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática* de Γ (notação: $\Gamma\vdash\varphi$) quando existe uma derivação de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Escreveremos $\Gamma\nvdash\varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Definição 107: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash\varphi$) quando existe uma demonstração de φ. Escreveremos $\nvdash\varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Definição 109: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma\vdash\bot$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma\nvdash\bot$, ou seja, quando não existem derivações de $\bot$ a partir de Γ).

Exemplo 110: O conjunto $\Gamma=\{p_0,p_0\to\neg p_0\}$ é sintaticamente inconsistente. Uma derivação de $\bot$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{p_0\quad\dfrac{p_0\quad p_0\to\neg p_0}{\neg p_0}\to E}{\bot}\neg E$$

Proposição 113: Para toda a fórmula φ, $\vdash\varphi$ se e só se $\emptyset\vdash\varphi$.

Proposição 114: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi\in\Gamma$, então $\Gamma\vdash\varphi$; **b)** se $\Gamma\vdash\varphi$ e $\Gamma\subseteq\Delta$, então $\Delta\vdash\varphi$;

c) se $\Gamma\vdash\varphi$ e $\Delta,\varphi\vdash\psi$, então $\Delta,\Gamma\vdash\psi$; **d)** $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ se e só se $\Gamma,\varphi\vdash\psi$;

e) se $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ e $\Gamma\vdash\varphi$, então $\Gamma\vdash\psi$.

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma\subseteq\mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma\vdash\varphi, \text{ então } \Gamma\models\varphi.$$

Proposição 117: Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Teorema 118 (Completude): Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma\subseteq\mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma\models\varphi, \text{ então } \Gamma\vdash\varphi.$$

Teorema 119 (Adequação): Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma\subset\mathcal{F}^{CP}$,

$$\Gamma\vdash\varphi \text{ se e só se } \Gamma\models\varphi.$$

Corolário 120: Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$, φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.

Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica

3.1 Sintaxe

Definição 122: Um *tipo de linguagem* é um terno $(\mathcal{F},\mathcal{R},\mathcal{N})$ t.q.:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F}\cup\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *símbolos de função* e os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*.

A função $\mathcal{N}$ é chamada *função aridade*, chamando-se ao número natural $n=\mathcal{N}(s)$ (para cada $s\in\mathcal{F}\cup\mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo *n-ário*. Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu *número de argumentos*.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes*. Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos *unários*, os de aridade 2 *binários*, etc.

Exemplo 123: O terno $L_{Arit}=(\{0,s,+,\times\},\{=,<\},\mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(s)=1$, $\mathcal{N}(+)=2$, $\mathcal{N}(\times)=2$, $\mathcal{N}(=)=2$ e $\mathcal{N}(<)=2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética*.

Definição 125: O *alfabeto $\mathcal{A}_L$ induzido pelo tipo de linguagem L* é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0,x_1,...,x_n,...$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 170: As funções $\begin{matrix}a_0:\mathcal{V}&\longrightarrow&\mathbb{N}_0\\ x&\mapsto&0\end{matrix}$ e $\begin{matrix}a^{ind}:\mathcal{V}&\longrightarrow&\mathbb{N}_0\\ x_i&\mapsto&i\end{matrix}$ são atribuições em E_{Arit}.

$$x_1,\ x_2,\ 0,\ s(0),\ \times(x_1,x_2),\ +(\times(x_1,x_2),s(0)).$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $+(\times(x_1,x_2),s(0))$.

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $=(0,x_1)$ e $<(0,x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são L_{Arit}-termos. Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit}-termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição *c)* da definição anterior. Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

L_{Arit}-termos:

a) para todo $x\in\mathcal{V}$, $x\in\mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c\in\mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n\geq 1$,

Teorema 131 (Indução Estrutural em L-Termos): Seja $P(t)$ uma propriedade qu depende de um L-termo t. Se:

a) para todo $x\in\mathcal{V}$, $P(x)$; **b)** para todo $c\in\mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f\in\mathcal{F}$, de aridade $n\geq 1$, e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$,
$$P(t_1) \text{ e ... e } P(t_n) \implies P(f(t_1,...,t_n));$$

então para todo $t\in\mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Observação 132: A definição indutiva do conjunto dos L-termos é determinista e te associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é conjunto dos L-termos. Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição 133: O conjunto $VAR(t)$, das *variáveis* que ocorrem num L-termo t, definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $VAR(x)=\{x\}$, para todo $x\in\mathcal{V}$; **b)** $VAR(c)=\emptyset$, para todo $c\in\mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1,...,t_n))=\bigcup_{i=1}^{n}VAR(t_i)$, para todo $f\in\mathcal{F}$ de aridade $n\geq 1$ e pa todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$.

Exemplo 134: O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2+s(x_1)$ é:
$$VAR(x_2+s(x_1))=VAR(x_2)\cup VAR(s(x_1))=\{x_2\}\cup VAR(x_1)=\{x_2,x_1\}.$$

Definição 135: O conjunto $subt(t)$, dos *subtermos* de um L-termo t, é definido, pc recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $subt(x)=\{x\}$, para todo $x\in\mathcal{V}$; **b)** $subt(c)=\{c\}$, para todo $c\in\mathcal{C}$;

c) $subt(f(t_1,...,t_n))=\{f(t_1,...,t_n)\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}subt(t_i)$, para todo $f\in\mathcal{F}$ de aridade $n\geq$ e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$.

Exemplo 136: O conjunto dos subtermos do L_{Arit}-termo $(x_2+s(x_1))\times 0$ é:
$$\{x_2,x_1,s(x_1),x_2+s(x_1),0,(x_2+s(x_1))\times 0\}$$

Definição 137: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t nur L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguint modo:

a) $y[t/x]=\begin{cases}t, & se\ \ y=x\\ y, & se\ \ y\neq x\end{cases}$, para todo $y\in\mathcal{V}$; **b)** $c[t/x]=c$, para todo $c\in\mathcal{C}$;

c) $f(t_1,...,t_n)[t/x]=f(t_1[t/x],...,t_n[t/x])$, para todo $f\in\mathcal{F}$ de aridade $n\geq 1$ e par todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$.

Exemplo 138:

1. O L_{Arit}-termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit}-termo $s(0)$ no L_{Arit}-termo $x_2+s(x_1)$ é:
$$\begin{aligned}&(x_2+s(x_1))[s(0)/x_1]\\ =\ &x_2[s(0)/x_1]+s(x_1)[s(0)/x_1]\\ =\ &x_2+s(x_1[s(0)/x_1])\\ =\ &x_2+s(s(0))\end{aligned}$$

2. $(x_2+s(x_1))[s(0)/x_0]=x_2+s(x_1)$ (observe que $x_0\notin VAR(x_2+s(x_1))$).

Exemplo 141:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são L_{Arit}-fórmulas atómicas:
$$=(0,x_1),\ <(0,x_1),\ =(+(0,x_1),\times(s(0),x_1)).$$

2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times(0,x_1)$ não é uma L_{Arit}-fórmula atómica (note-se que $\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit}-termo).

Definição 143: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi\in\mathcal{F}_L$, para todo $\varphi\in At_L$; **b)** $\bot\in\mathcal{F}_L$;

c) $\varphi\in\mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi)\in\mathcal{F}_L$, para todo $\varphi\in(\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi\in\mathcal{F}_L$ e $\psi\in\mathcal{F}_L \implies (\varphi\Box\psi)\in\mathcal{F}_L$, para todo $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi,\psi\in(\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi\in\mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi)\in\mathcal{F}_L$, para todo $Q\in\{\exists,\forall\}$, para todo $x\in\mathcal{V}$ e para todo $\varphi\in(\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou, abreviadamente, *L-fórmulas*.

Exemplo 145: Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 129: $L_0=(\{c,f_1,f_2\},\{R_1,R_2\},\mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c)=0$, $\mathcal{N}(f_1)=1$, $\mathcal{N}(f_2)=2$, $\mathcal{N}(R_1)=1$ e $\mathcal{N}(R_2)=2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-fórmulas (e constituem uma sequência de formação da última fórmula):
$$\begin{aligned}&R_1(x_1),\\ &R_2(x_1,f_2(c,x_1)),\\ &(R_1(x_1)\to R_2(x_1,f_2(c,x_1))),\\ &(\forall x_1(R_1(x_1)\to R_2(x_1,f_2(c,x_1)))).\end{aligned}$$

Definição 155: A operação de *substituição das ocorrências livres* de uma variável x por um L-termo t numa L-fórmula φ é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $R(t_1,...,t_n)[t/x]=R(t_1[t/x],...,t_n[t/x])$ para todo $R\in\mathcal{R}$ de aridade n e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$;

b) $\bot[t/x]=\bot$; **c)** $(\neg\psi)[t/x]=\neg\psi[t/x]$, para todo $\psi\in\mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1\Box\psi_2)[t/x]=\psi_1[t/x]\Box\psi_2[t/x]$, para todo $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$, $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x]=\begin{cases}Qy\,\psi & se\ \ y=x\\ Qy\,\psi[t/x] & se\ \ y\neq x\end{cases}$, para todo $Q\in\{\exists,\forall\}$, $y\in\mathcal{V}$, $\psi\in\mathcal{F}_L$.

Observação 159: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L-formula φ ou t é um L-termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ.

Exemplo 160: Seja $\varphi=\forall x_1(x_1<x_2)\vee\neg(x_1<x_2)$. Então:

a) x_0 é substituível por $x_1+s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

b) x_1 é substituível por $x_1+s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não é substituível por $x_1+s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1\in VAR(x_1+s(x_2))$;

d) x_2 é substituível por $x_0+s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1\notin VAR(x_0+s(x_2))$.

3.2 Semântica

Observação 165: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atómicas (símbolos de relação "aplicados" a termos) e, por esta razão, as fórmulas atómicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional. Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir "diretamente" um valor lógico a uma variável proposicional, a atribuição de valores lógicos às fórmulas atómicas é mais complexa.

Para atribuirmos valores lógicos a fórmulas atómicas, em particular, será necessário fixar previamente a *interpretação dos termos*. Tal requer que indiquemos qual o *universo de objetos* (*domínio de discurso*) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a interpretação pretendida quer para os símbolos de função do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que tomando $\mathbb{N}_0$ por universo, o símbolo de função binário + denotará a *operação* de adição) quer para as variáveis de primeira ordem. Para a interpretação das fórmulas atómicas, será ainda necessário fixar a interpretação dos símbolos de relação como *relações* entre objetos do domínio de discurso.

A indicação de qual o domínio de discurso pretendido e de quais as interpretações que deverão ser dadas aos diversos símbolos será efetuada através daquilo que designaremos por *estrutura para um tipo de linguagem*. A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto de um domínio de discurso, através daquilo a que chamaremos *atribuições numa estrutura*. Um par (*estrutura, atribuição*) permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma *valoração*, uma vez que estes pares desempenharão papel idêntico ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição 166: Seja L um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo L*, que abreviadamente designaremos por *L-estrutura*, é um par $(D,\overline{})$ t.q.:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;

b) $\overline{}$ é uma função, chamada a *função interpretação da estrutura*, e é t.q.:

- a cada constante c de L faz corresponder um elemento de D, que será notado por $\overline{c}$;
- a cada símbolo de função f de L, de aridade $n\geq 1$, faz corresponder uma função de tipo $D^n\longrightarrow D$, que será notada por $\overline{f}$;
- a cada símbolo de relação R de L, de aridade n, faz corresponder uma relação n-ária em D (i.e. um subconjunto de D^n), que será notada por $\overline{R}$.

Para cada símbolo de função ou relação s de L, $\overline{s}$ é chamada a *interpretação* de s na estrutura.

Exemplo 168:

a) Seja $E_{Arit}=(\mathbb{N}_0,\overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número *zero*;
- $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{s}:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$;
- $\overline{+}$ é a função *adição* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{matrix}\overline{+}:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0&\longrightarrow&\mathbb{N}_0\\ (m,n)&\mapsto&m+n\end{matrix}$;
- $\overline{\times}$ é a função *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{matrix}\overline{\times}:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0&\longrightarrow&\mathbb{N}_0\\ (m,n)&\mapsto&m\times n\end{matrix}$;
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{=}=\{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:m=n\}$;
- $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{<}=\{(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:m<n\}$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura. Designaremos, por vezes, esta estrutura por *estrutura standard* para o tipo de linguagem L_{Arit}.

b) O par $E_0=(\{a,b\},\overline{})$, onde:

- $\overline{0}=a$;
- $\overline{s}$ é a função $\begin{matrix}\{a,b\}&\longrightarrow&\{a,b\}\\ x&\mapsto&x\end{matrix}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{matrix}\{a,b\}\times\{a,b\}&\longrightarrow&\{a,b\}\\ (x,y)&\mapsto&b\end{matrix}$;
- $\overline{\times}$ é a função $\begin{matrix}\{a,b\}\times\{a,b\}&\longrightarrow&\{a,b\}\\ (x,y)&\mapsto&\begin{cases}a & \text{se } x=y\\ b & \text{se } x\neq y\end{cases}\end{matrix}$;
- $\overline{=}=\{(a,a),(b,b)\}$; • $\overline{<}=\{(a,b)\}$,

é também uma L_{Arit}-estrutura.

Exemplo 172: Seja t o L_{Arit}-termo $s(0)\times(x_0+x_2)$.

1. O valor de t para a atribuição a^{ind}, na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}, é
$$\begin{aligned}&(s(0)\times(x_0+x_2))[a^{ind}]\\ =\ &s(0)[a^{ind}]\times(x_0+x_2)[a^{ind}]\\ =\ &(0[a^{ind}]+1)\times(x_0[a^{ind}]+x_2[a^{ind}])\\ =\ &(0+1)\times(0+2)\\ =\ &2\end{aligned}$$

2. Já para a atribuição a_0 (do exemplo anterior), o valor de t é 0 (porquê?).

3. Considere-se agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 168 e considere-se a seguinte atribuição nesta estrutura: $\begin{matrix}a':\mathcal{V}&\longrightarrow&\{a,b\}\\ x&\mapsto&b\end{matrix}$

O valor de t em E_0 para a' é:
$$\begin{aligned}&(s(0)\times(x_0+x_2))[a']\\ =\ &\overline{\times}(s(0)[a'],(x_0+x_2)[a'])\\ =\ &\overline{\times}(\overline{s}(0[a']),\overline{+}(x_0[a'],x_2[a']))\\ =\ &\overline{\times}(\overline{s}(a),\overline{+}(b,b))\\ =\ &\overline{\times}(a,b)\\ =\ &b\end{aligned}$$

Exemplo 170: As funções $\begin{matrix}a_0:\mathcal{V}&\longrightarrow&\mathbb{N}_0\\ x&\mapsto&0\end{matrix}$ e $\begin{matrix}a^{ind}:\mathcal{V}&\longrightarrow&\mathbb{N}_0\\ x_i&\mapsto&i\end{matrix}$ são atribuições em E_{Arit}.

Notação 174: Sejam a uma atribuição numa L-estrutura E, $d\in dom(E)$ e x uma variável. Escrevemos $a\binom{x}{d}$ para a atribuição $a':\mathcal{V}\longrightarrow dom(E)$ em E definida por:
$$\text{para todo } y\in\mathcal{V},\quad a'(y)=\begin{cases}d & \text{se } y=x\\ a(y) & \text{se } y\neq x\end{cases}.$$

Exemplo 175: $a^{ind}\binom{x_0}{1}$ denota a atribuição em L_{Arit} definida por
$$\text{para todo } i\in\mathbb{N}_0,\quad a^{ind}\binom{x_0}{1}(x_i)=\begin{cases}1 & \text{se } i=0\\ i & \text{se } i\neq 0\end{cases}.$$

Definição 178: O *valor lógico de uma L-fórmula φ numa L-estrutura $E=(D,\overline{})$ para uma atribuição a* em E, é notado por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) e é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0,1\}$ definido, por recursão em φ, do seguinte modo:

a) $\bot[a]=0$; **c)** $(\neg\varphi_1)[a]=1-\varphi_1[a]$, para todo $\varphi_1\in\mathcal{F}_L$;

b) $R(t_1,...,t_n)[a]=1$ sse $(t_1[a],...,t_n[a])\in\overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$;

d) $(\varphi_1\wedge\varphi_2)[a]=min(\varphi_1[a],\varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

e) $(\varphi_1\vee\varphi_2)[a]=max(\varphi_1[a],\varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

f) $(\varphi_1\to\varphi_2)[a]=0$ sse $\varphi_1[a]=1$ e $\varphi_2[a]=0$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

g) $(\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2)[a]=1$ sse $\varphi_1[a]=\varphi_2[a]$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

h) $(\exists x\varphi_1)[a]=máximo\{\varphi_1[a\binom{x}{d}]:d\in D\}$, para todo $x\in\mathcal{V},\varphi_1\in\mathcal{F}_L$;

i) $(\forall x\varphi_1)[a]=mínimo\{\varphi_1[a\binom{x}{d}]:d\in D\}$, para todo $x\in\mathcal{V},\varphi_1\in\mathcal{F}_L$.

Proposição 179: Para quaisquer L-estrutura E, atribuição a em E, L-fórmula φ e variável x,

a) $(\exists x\varphi)[a]=1$ sse existe $d\in dom(E)$ t.q. $\varphi[a\binom{x}{d}]=1$;

b) $(\exists x\varphi)[a]=0$ sse para todo $d\in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}]=0$;

c) $(\forall x\varphi)[a]=1$ sse para todo $d\in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}]=1$;

d) $(\forall x\varphi)[a]=0$ sse existe $d\in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}]=0$.

Exemplo 180: Consideremos a estrutura L_{Arit} e as atribuições em E_{Arit} a^{ind} e a_0 definidas no Exemplo 170.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0=s(0)<x_2$, tem-se:
   i) $\varphi_0[a^{ind}]=1$, dado que $s(0)[a^{ind}]=1,x_2[a^{ind}]=2$ e $(1,2)\in\overline{<}$ (pois 1 é menor que 2);
   ii) $\varphi_0[a_0]=0$, dado que $s(0)[a_0]=1,x_2[a_0]=0$ e $(1,0)\notin\overline{<}$ (pois 1 não é menor que 0);
2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1=\exists x_2(s(0)<x_2)$ tem-se:
   i) $\varphi_1[a^{ind}]=1$, pois existe $n\in\mathbb{N}_0$ t.q. $s(0)<x_2[a^{ind}\binom{x_2}{n}]=1$ (como $s(0)[a^{ind}\binom{x_2}{n}]=1$, basta tomar $n>1$);
   ii) $\varphi_1[a_0]=1$, pois existe $n\in\mathbb{N}_0$ t.q. $s(0)<x_2[a_0\binom{x_2}{n}]=1$ (também neste caso se tem $s(0)[a_0\binom{x_2}{n}]=1$, pelo que, basta tomar $n>1$);
3. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_2=\exists x_2\neg(s(0)<x_2)$ tem-se também o valor lógico 1, quer para a^{ind} quer para a_0 (porquê?);
4. Já para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_3=\forall x_2(s(0)<x_2)$ tem-se valor lógico 0 para ambas as atribuições (de facto, a afirmação "para todo $n\in\mathbb{N}_0,1<n$" é falsa).

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema;
   (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$.

R: *(i) Um teorema é uma fórmula que admite derivações em DNP sem hipóteses por cancelar. Uma tal derivação de $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,E\wedge_1 \quad \cancel{p_0 \to \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\neg^{(2)}}{(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\to^{(1)}$$

(ii) É necessário construir uma derivação cuja conclusão seja $p_0 \to \neg p_1$ e cujo conjunto de hipóteses por cancelar seja um subconjunto de $\{\neg(p_0 \wedge p_1)\}$. Uma derivação nestas condições é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \neg(p_0 \wedge p_1)}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

(b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$, então $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

R: *Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, existe uma derivação $\mathcal{D}$ cuja conclusão é $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Assim,*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \neg(p_0 \wedge p_1)\end{array}}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $p_0 \to \neg p_1$ e conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ, o que prova $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

Uma resolução alternativa é a que se segue.

Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, pelo Teorema da Correcção, $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$. Para provar $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$, pelo Teorema da Completude, basta provar $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$. Seja v uma valoração arbitrária que satisfaça Γ. De $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$, segue que $v(\neg(p_0 \wedge p_1)) = 1$, o que implica que $v(p_0) = 0$ ou $v(p_1) = 0$ e, em ambos os casos, segue que $v(p_0 \to \neg p_1) = 1$. Provamos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ atribui valor 1 a $p_0 \to \neg p_1$, o que prova $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$, como pretendido.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{s}, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

(a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0))$ (ii) $(x_1 - 0) \vee \mathsf{P}(x_2)$
   (iii) $\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1))$ (iv) $\forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_0, 0) \vee (\mathsf{s}(x_0) < 0))$

R: *As palavras das alíneas (ii) e (iv) não pertencem nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$. A palavra da alínea (i) pertence a $\mathcal{T}_L$ e a da alínea (iii) pertence a $\mathcal{F}_L$. As árvores de formação que justificam esta afirmação são as seguintes:*

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 \in \mathcal{T}_L}\,x_1}{\mathsf{s}(x_1) \in \mathcal{T}_L}\,\mathsf{s} \qquad \dfrac{\overline{x_2 \in \mathcal{T}_L}\,x_2 \quad \dfrac{\overline{0 \in \mathcal{T}_L}\,0}{\mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\,\mathsf{s}}{x_2 - \mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\,-}{\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0)) \in \mathcal{T}_L}\,- \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\overline{\mathsf{P}(x_1) \in \mathcal{F}_L}\,At_L \quad \dfrac{\overline{(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\,At_L}{\forall_{x_1}(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\,\forall_{x_1}}{(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\,\wedge}{\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\,\exists_{x_2}$$

(b) Indique (justificando) o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_2 - \mathsf{s}(x_1)$ na L-fórmula $\forall_{x_1}(\mathsf{P}(x_4) \to \exists_{x_0}\neg(x_0 < x_2 - \mathsf{s}(x_1 - 0)))$.

R: *Sejam t e φ respectivamente o termo e a fórmula dados. O conjunto pedido é $\mathcal{V}\backslash\{x_2, x_4\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto de todas as variáveis. Por um lado, quer x_2, quer x_4, têm, em φ, uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$. Como $x_1 \in VAR(t)$, nem x_2, nem x_4 são substituíveis por t em φ. Por outro lado, nenhuma outra variável tem ocorrências livres em φ. Portanto, qualquer outra variável é substituível por t em φ.*

(c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências da variável x_{2011} em t.

R: *A função é definida por recursão estrutural do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rcll} f(x_i) & = & 1 & \textit{se } i = 2011 \\ f(x_i) & = & 0 & \textit{se } i \neq 2011 \\ f(0) & = & 0 & \\ f(\mathsf{s}(t) & = & f(t) & \textit{para todo } t \in \mathcal{T}_L \\ f(t - t') & = & f(t) + f(t') & \textit{para todo } t, t' \in \mathcal{T}_L \end{array}$$

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{s}}$ e $\overline{-}$ são as operações de *sucessor* e *subtração* em $\mathbb{Z}$, respectivamente, $\overline{\mathsf{P}} = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par"), e $\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Z}$.

(a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
   (i) $(0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a]$
   (ii) $(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a]$

R: *(i) O valor do L-termo $0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8)$ para a atribuição a é o elemento de $\mathbb{Z}$, o domínio de E, obtido pelos seguintes cálculos recursivos:*

$$\begin{aligned} (0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a] &= 0[a] \mathbin{\overline{-}} \mathsf{s}(x_1 - x_8)[a] \\ &= \overline{0} \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,((x_1 - x_8)[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(x_1[a] \mathbin{\overline{-}} x_8[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(a(x_1) \mathbin{\overline{-}} a(x_8)) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(1 \mathbin{\overline{-}} 8) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(-7) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} (-6) \\ &= 6. \end{aligned}$$

(ii) A L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$ é a conjunção das L-fórmulas $\mathsf{P}(x_2)$ e $\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$. Tem-se portanto que $(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\}$.

Ora, por um lado, $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$ se e só se $(x_2)[a] \in \overline{\mathsf{P}}$, se e só se $2 \in \overline{\mathsf{P}}$. Como, de facto, 2 é um elemento do conjunto $\overline{\mathsf{P}}$, deduz-se que $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$.
Por outro lado,

$$\begin{array}{rll} (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1 & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } (\mathsf{s}(x_1) < 0)[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \mathsf{s}(x_1)[a\binom{x_1}{n_1}] \mathrel{\overline{<}} 0[a\binom{x_1}{n_1}] \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(x_1[a\binom{x_1}{n_1}]) \mathrel{\overline{<}} \overline{0} \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n_1) \mathrel{\overline{<}} 0 \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } n_1 + 1 \mathrel{\overline{<}} 0. \end{array}$$

Dado que esta última afirmação é verdadeira (basta tomar, por exemplo, $n_1 = -2$), conclui-se que $(\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1$.
Pode-se finalmente deduzir que

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

(b) Seja $\varphi = \neg\mathsf{P}(x_0 - x_1) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$. Prove que:
(i) φ é válida em E; (ii) φ não é universalmente válida.

R: *(i) A L-fórmula φ é válida em E, ou seja $E \models \varphi$, se $\varphi[a]_E = 1$ para toda a atribuição a em E. Seja a uma atribuição qualquer em E. Tem-se*

$$\begin{array}{rll} \varphi[a]_E = 1 & \textit{sse} & (\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 0 \textit{ ou } ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 1 \\ & \textit{sse} & \mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_0 < x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_1 < x_0)[a] = 1 \\ & \textit{sse} & (x_0 - x_1)[a] \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } x_0[a] \mathrel{\overline{<}} x_1[a] \textit{ ou } x_1[a] \mathrel{\overline{<}} x_0[a] \\ & \textit{sse} & a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } a(x_0) \mathrel{\overline{<}} a(x_1) \textit{ ou } a(x_1) \mathrel{\overline{<}} a(x_0). \end{array}$$

Suponhamos que $a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \notin \overline{\mathsf{P}}$. Então $a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \neq 0$, donde $a(x_0) \neq a(x_1)$. Daqui resulta que $a(x_0) \mathrel{\overline{<}} a(x_1)$ ou $a(x_1) \mathrel{\overline{<}} a(x_0)$ e, portanto, $\varphi[a]_E = 1$. Como a é uma atribuição arbitrária em E conclui-se assim que φ é válida em E.
(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura em tudo idêntica a E salvo em $\overline{<}$ que é definida como sendo a relação de igualdade em $\mathbb{Z}$. Seja a a atribuição da alínea (a).
Tem-se $(\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 1$. De facto $(x_0 - x_1)[a] = -1 \notin \overline{\mathsf{P}}$, donde $\mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 0$.
Verifiquemos, por outro lado, que $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0$. De facto, tem-se

$$\begin{array}{rll} ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0 & \textit{sse} & (x_0 < x_1)[a] = 0 \textit{ e } (x_1 < x_0)[a] = 0 \\ & \textit{sse} & (x_0[a], x_1[a]) \notin \overline{<} \textit{ e } (x_1[a], x_0[a]) \notin \overline{<} \\ & \textit{sse} & (0, 1) \notin \overline{<} \textit{ e } (1, 0) \notin \overline{<} \\ & \textit{sse} & 0 \neq 1 \textit{ e } 1 \neq 0 \end{array}$$

afirmação esta que é, evidentemente, válida. Logo $\varphi[a]_{E'} = 0$ e, portanto, a L-fórmula φ não é válida na L-estrutura E', donde não é universalmente válida.

(c) Indique (justificando) uma L-fórmula universalmente válida.

R: *A fórmula $\psi = \mathsf{P}(x_1) \vee \neg\mathsf{P}(x_1)$ é uma L-fórmula universalmente válida. Para justificar esta afirmação basta notar que ψ é uma instância da fórmula $\varphi = p_0 \vee \neg p_0$ do cálculo proposicional (pois $\psi = \varphi[\mathsf{P}(x_1)/p_0]$) e φ é uma tautologia (como é já sabido).*

(d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
   (i) Todo o número é menor do que algum número par.
   (ii) A diferença de quaisquer dois números pares é par.

R: *(i) $\forall_{x_0}\exists_{x_1}(\mathsf{P}(x_1) \wedge (x_0 < x_1))$.*
(ii) $\forall_{x_0}\forall_{x_1}((\mathsf{P}(x_0) \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_0 - x_1))$.

4. (a) Sejam L, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\exists_x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$.

R: *Sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que*

$$E \models \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a] \qquad (*)$$

Queremos $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.
De $(*)$ segue que existe $d \in D$ tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$ e $E \models \psi[a\binom{x}{d}]$. Mas então podemos trivialmente afirmar
(i) existe $d_1 \in D$ (a saber: $d_1 = d$) tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d_1}a]$;
(ii) existe $d_2 \in D$ (a saber: $d_2 = d$) tal que $E \models \psi[a\binom{x}{d_2}]$.
De (i) segue $E \models \exists_x\varphi[a]$ e de (ii) segue $E \models \exists_x\psi[a]$. Logo $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.

(b) Indique (justificando) L tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x variável tais que $\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)$.

R: *Sejam L o tipo de linguagem da questão 2, $x = x_0$, $\varphi = \mathsf{P}(x_0)$ e $\psi = \neg\mathsf{P}(x_0)$. Vamos exibir uma L-estrutura E e uma atribuição a em E tais que $E \not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a]$. Tome-se E a estrutura da questão 3 e a atribuição arbitrária. Falta ver que:*
(i) $E \models \exists_{x_0}\varphi[a]$;
(ii) $E \models \exists_{x_0}\psi[a]$;
(iii) $E \not\models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$.
(i) Sejam $d' = 2$ e $a' = a\binom{x_0}{d'}$. Então $E \models \varphi[a']$ pois $x_0[a'] = d'$ e $d' \in \overline{\mathsf{P}}$.
(ii) Sejam $d'' = 1$ e $a'' = a\binom{x_0}{d''}$. Então $E \models \psi[a'']$ pois $x_0[a''] = d''$ e $d'' \notin \overline{\mathsf{P}}$.
(iii) $E \models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$ sse existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0[a\binom{x_0}{d}] \in \overline{\mathsf{P}}$ e $x_0[a\binom{x_0}{d}] \notin \overline{\mathsf{P}}$. Mas $x_0[a\binom{x_0}{d}] = d$ e não se pode ter simultaneamente $d \in \overline{\mathsf{P}}$ e $d \notin \overline{\mathsf{P}}$.

(c) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x tais que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que $(\forall_x\varphi) \to \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \to \psi)$. (Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.)

R:

$$\begin{array}{rcll} (\forall_x\varphi) \to \psi & \Leftrightarrow & \neg\forall_x\varphi \vee \psi & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x\neg\varphi \vee \psi & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x\neg\varphi \vee \exists x\psi & (x \notin LIV(\psi)) \\ & \Leftrightarrow & \exists_x(\neg\varphi \vee \psi) & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x(\varphi \to \psi) & \end{array}$$

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \wedge \neg p_1) \to \neg(p_0 \to p_1)$ é um teorema;
   (ii) $p_0 \to p_3, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$.

(b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \models p_0 \to p_3$, então $\Gamma, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$. [Sugestão: use (a)(ii)]

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{q}, +\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{q}) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$.

(a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $(\forall_{x_1}(\mathsf{q}(x_1) \to \mathsf{P}(x_1)))$ (ii) $+(\mathsf{q}(+(0, \mathsf{q}(x_0)), x_3))$
   (iii) $(\exists_{x_0}((\forall_{x_1}\mathsf{P}(x_1)) \vee = (x_0, \mathsf{q}(x_1))))$ (iv) $+(= (0, \mathsf{q}(x_0)), \mathsf{q}(x_1))$

(b) Indique, justificando, o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $(\mathsf{q}(x_1) + x_3) + 0$ na L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \leftrightarrow \exists_{x_1}((x_5 = x_1 + \mathsf{q}(x_2 + 0)) \wedge \forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_1 + x_0) = x_3))$.

(c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências do símbolo 0 em t.

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Q}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{q}}(n) = n^2$ para cada $n \in \mathbb{Q}$, $\overline{+}$ é a função de *adição* em $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathsf{P}} = \mathbb{Q}^+$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é positivo"), e $\overline{=}$ é a relação de igualdade em $\mathbb{Q}$.

(a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i - 3$. Calcule:
   (i) $(\mathsf{q}(0 + x_0) + x_3)\,[a]$ (ii) $(\mathsf{P}(x_5) \wedge \exists_{x_3}(\mathsf{q}(x_3) = 0 + x_5))\,[a]$

(b) Seja φ a L-fórmula $\mathsf{P}(\mathsf{q}(x_1)) \to \neg\forall_{x_2}(0 = \mathsf{q}(x_2))$. Prove que:
   (i) φ é válida em E;
   (ii) φ não é universalmente válida.

(c) Indique, justificando, uma L-fórmula ψ tal que $\psi[a']_{E'} = 0$ para toda a atribuição a' numa qualquer L-estrutura E'.

(d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
(i) Existe um número cujo quadrado é positivo;
(ii) O quadrado da soma de quaisquer dois números é não nulo.

4. (a) Sejam L um tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x uma variável. Mostre que:
   (i) $\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi \models \forall_x(\varphi \vee \psi)$;
   (ii) $\neg\forall_x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \wedge \neg\psi)$. [Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.]

(b) Indique, justificando, um tipo de linguagem L, uma L-fórmula φ e duas variáveis x e y tais que $\not\models \forall_x\exists_y\varphi \to \exists_y\forall_x\varphi$.

Definição 189: Uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L-estrutura. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação 190: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 191:
1. A L_{Arit}-fórmula $x_0 = x_1$ não é universalmente válida. Como vimos no exemplo anterior, esta fórmula não é válida na estrutura E_{Arit}.
2. No exemplo anterior, vimos que a fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit}. No entanto, esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, se considerarmos uma L_{Arit}-estrutura $E_1 = (\{a, b\}, \overline{})$ em que $\overline{=}$ seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não valida $x_0 = x_0$, pois considerando uma atribuição a' em E_1 t.q. $a'(x_0) = b$ teremos $E_1 \not\models x_0 = x_0[a']$, uma vez que o par $(x_0[a'], x_0[a'])$, que é igual ao par (b, b), não pertence à relação $\overline{=}$.
3. A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida. De facto, dadas uma qualquer L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{})$ e uma qualquer atribuição a em E, tem-se:

$$\begin{array}{rl} & E \models \forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a] \\ \text{sse} & E \models (x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a\binom{x_0}{d}], \text{ para todo } d \in D \\ \text{sse} & E \models x_0 = x_1[a\binom{x_0}{d}] \text{ ou } E \models \neg(x_0 = x_1)[a\binom{x_0}{d}], \text{ para todo } d \in D \\ \text{sse} & (d, a(x_1)) \in \overline{=} \text{ ou } E \not\models x_0 = x_1[a\binom{x_0}{d}], \text{ para todo } d \in D \\ \text{sse} & (d, a(x_1)) \in \overline{=} \text{ ou } (d, a(x_1)) \notin \overline{=}, \text{ para todo } d \in D \end{array}$$

e a última afirmação é verdadeira.

Exemplo 187: Consideremos a estrutura E_{Arit}.
1. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida em E_{Arit}; de facto, para qualquer atribuição a em E_{Arit}, tem-se $E_{Arit} \models x_0 = x_0[a]$, uma vez que $x_0[a] = a(x_0)$ e $(a(x_0), a(x_0)) \in \overline{=}$ ($a(x_0)$ e $a(x_0)$ são naturais iguais).
2. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a^{ind} tem-se $x_0[a^{ind}] = 0$, $x_1[a^{ind}] = 1$ e $(0, 1) \notin \overline{=}$, pelo que $E_{Arit} \not\models x_0 = x_1[a^{ind}]$.
3. A fórmula $\neg(x_0 = x_1)$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a_0 que atribui 0 a todas as variáveis tem-se $x_0[a_0] = 0$, $x_1[a_0] = 0$ e $(0, 0) \in \overline{=}$, pelo que $E_{Arit} \models x_0 = x_1[a_0]$ e, consequentemente, $E_{Arit} \not\models \neg(x_0 = x_1)[a_0]$.
4. A fórmula $x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para qualquer atribuição a em E_{Arit}, a afirmação "$(a(x_0), a(x_1)) \in \overline{=}$ ou $(a(x_0), a(x_1)) \notin \overline{=}$" é verdadeira).
5. A fórmula $\exists x_0\neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para toda a atribuição a em E_{Arit} a afirmação "existe $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq a(x_1)$" é verdadeira (tome-se, por exemplo, $n = a(x_1)+1$)) e a fórmula $\forall x_1\exists x_0\neg(x_0 = x_1)$ é também válida em E_{Arit} (porquê?).

Proposição 194: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$. As seguintes afirmações são verdadeiras.
a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ **b)** $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$ **c)** $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$ **d)** $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$
e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ **f)** $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$, mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$
h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$, mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$
i) $\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ **j)** $\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
k) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$
l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$
m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Teorema 198 (Teorema da Instanciação): Se φ é uma tautologia do Cálculo Proposicional, então toda a instância de φ é universalmente válida.

Exemplo 199: Como vimos no exemplo anterior, a L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \to (\exists x_0(x_0 = 0) \to (x_0 = x_1))$ é instância da tautologia $p_0 \to (p_1 \to p_0)$. Logo, pelo Teorema da Instanciação, podemos concluir que esta L_{Arit}-fórmula é universalmente válida.

Observação 200: Como seria de esperar, nem todas as fórmulas universalmente válidas são instâncias de tautologias. Por exemplo, vimos no Exemplo 191 que a fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida e esta fórmula não é instância de qualquer tautologia (esta fórmula é apenas instância de variáveis proposicionais, que não são tautologias).

Definição 201: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que o par (E, a) *realiza* Γ ou que (E, a) *satisfaz* Γ quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$. Diremos que (E, a) é uma *realização* de Γ quando (E, a) realiza Γ.