Correção do teste de Cálculo II

LEI - 8/06/2012

Exercício 1

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 1 & 2z & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{(1,0,1)} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(1,0,1) = (1,1)$ e $J_{(1,1)} g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ e & e \end{pmatrix}$

Então

$$J_{(1,0,1)} g\circ f = J_{f(1,0,1)} g \cdot J_{(1,0,1)} f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ e & 3e & 0 \end{pmatrix}$$

Como $J_{(1,0,1)} g\circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5y \\ ex+3ey \end{pmatrix}$ então

$$(g\circ f)'(1,0,1): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+5y,\ ex+3ey)$$

Exercício 2: a) Seja $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto x^3+xyz$. Então

$\nabla f(x,y,z) = (3x^2+yz,\ xz,\ xy)$ e $\nabla f(2,2,1) = (14, 2, 4)$

(nota: $f(2,2,1)=12$)

Reta normal a Σ em $(2,2,1)$

$(x,y,z) = (2,2,1) + \lambda(14,2,4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Plano tangente a Σ em $(2,2,1)$

$((x,y,z)-(2,2,1))\cdot(14,2,4) = 0 \iff 7x+y+2z = 18$

b) A reta normal a Σ em $(2,2,1)$ intersecta o eixo OZ se e só se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} 0 = 2+14\lambda \\ 0 = 2+2\lambda \end{cases}$. Como este sistema é impossível, a reta não intersecta o eixo Oz. (2)

Exercício 3

a) $\nabla f(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-6x=0 \\ 6xy-6y=0 \end{cases} \begin{cases} — \\ 6y(x-1)=0 \end{cases} \begin{cases} — \\ x=1 \vee y=0 \end{cases}$

Se $\boxed{y=0}$ então $\begin{cases} 3x^2-6x=0 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} 3x(x-2)=0 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \vee x=2 \\ y=0, \end{cases}$

temos os pontos críticos $A=(0,0)$ e $B=(2,0)$.

Se $\boxed{x=1}$ temos $\begin{cases} 3y^2-3=0 \\ x=1 \end{cases} \begin{cases} y^2=1 \\ x=1 \end{cases} \begin{cases} y=1 \vee y=-1 \\ x=1, \end{cases}$

temos os pontos críticos $C=(1,1)$ e $D=(1,-1)$.

b)

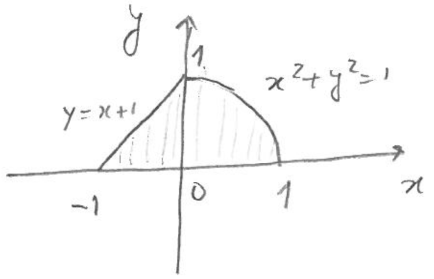
$$\mathrm{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Hess}_{(1,1)} f = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Como $\det \mathrm{Hess}_{(1,1)} f = -36 < 0$, o ponto $(1,1)$ não é maximizante local de f.

Exercício 4

a)



b) Variação de y: $0 \leq y \leq 1$

Variação de x: $y-1 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

Então

$$I=\int_0^1\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy$$

c) $$I=\int_0^1\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left.\frac{1}{2}x^2\right]_{x=y-1}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-y^2-(y-1)^2\right)dy = \frac{1}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}-\frac{(y-1)^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{(-1)^3}{3}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Exercício 5

Vejamos que

$$\forall (x,y)\in[-1,1]\times[-2,2] \qquad f(x,y)\leq g(x,y)$$

$$f(x,y)\leq g(x,y) \iff x^2+y^2\leq 16-x^2+y^2 \iff x^2+y^2\leq 8$$

$$(x,y)\in[-1,1]\times[-2,2] \iff |x|\leq 1 \wedge |y|\leq 2 \Rightarrow x^2+y^2\leq 5$$

Seja R o sólido limitado pelos gráficos destas duas funções. Então

$$\text{Volume}(R)=\int_{-1}^1\int_{-2}^2 \left(g(x,y)-f(x,y)\right)dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^1\int_{-2}^2 \left(16-2x^2-2y^2\right)dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 \left[16y-2x^2y-\frac{2y^3}{3}\right]_{y=-2}^{y=2} dx$$

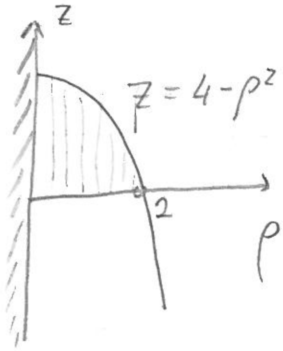
$$=\int_{-1}^1 \left[\frac{160}{3}-8x^2\right]dx = \left.\frac{160}{3}x-\frac{8x^3}{3}\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{304}{3}$$

Exercício 6

$$\begin{cases} z \leq 4-(x^2+y^2) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z \leq 4-\rho^2 \\ \left.\begin{array}{l}\rho\cos\theta \geq 0 \\ \rho\,\text{sen}\,\theta \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Corte pelo plano $\varphi=\varphi_0$:



$$\iiint_R (x+y)\,d(x,y,z) = \int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{4-\rho^2} \rho(\rho\cos\theta+\rho\,\text{sen}\,\theta)\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^2 z(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\Big]_{z=0}^{z=4-\rho^2} d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4\rho^2-\rho^4)(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right)(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\Big]_{\rho=0}^{\rho=2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{64}{15}(\cos\theta+\text{sen}\,\theta) = \frac{64}{15}(\text{sen}\,\theta-\cos\theta)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{64}{15}\left[1-(-1)\right] = \frac{128}{15}$$