Funções trigonométricas

Uma das principais propriedades das funções trigonométricas é a sua periodicidade, que as torna apropriadas para descrever certos fenómenos naturais, tão diversos como a variação das marés, a pressão sanguínea no coração ou a corrente alternada.

Recorde as definições das funções seno e cosseno como funções reais de variável real (lembre que a variável independente se mede em radianos), a definição de radiano e a relação fundamental da trigonometria:

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 .$$

Consideremos uma função periódica como função do tempo, seja $y = f(t)$; definem-se as seguintes características:

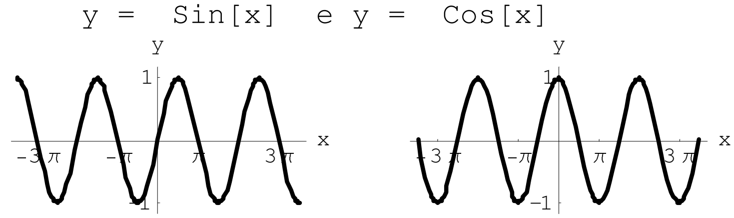
- amplitude é a metade da distância entre o valor máximo e o valor mínimo de f;

- período é o menor espaço de tempo T para que a função execute um ciclo completo, isto é $f(t) = f(t+T)$.

Uma vez que $\mathrm{sen}(x) = \cos(\pi/2 - x) = \cos(x - \pi/2)$, dizemos que as funções seno e cosseno têm uma diferença de fase de π/2, isto é, estão desfasadas de π/2, o que se reflecte numa translacção horizontal de π/2 entre os gráficos.

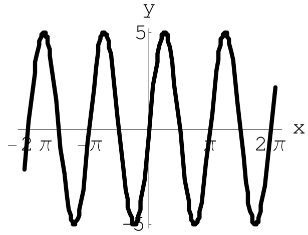
Os seus gráficos são:

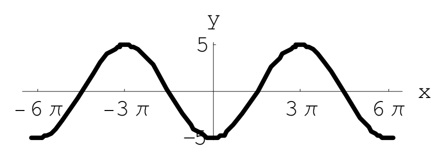
y = Sin[x] e y = Cos[x]



Será interessante recordar algumas propriedades destas funções trigonométricas, nomeadamente quais os seus domínio e contra-domínio, monotonia, concavidade e paridade.

EXEMPLO: Determine o domínio e o contra-domínio, a amplitude e o período das funções definidas por: $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(2x)$; $g(x) = -5\cos(x/3)$.





Usando estas funções, definem-se ainda a tangente e a cotangente, a secante e a

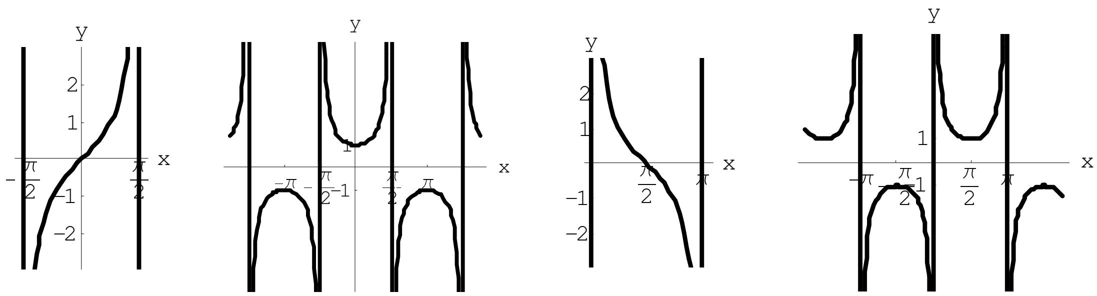
<u>cossecante</u>:

$$\mathrm{tg}(x) = \tan(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \mathrm{cotg}(x) = \mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\,.$$

SUGESTÃO: determine os domínios destas funções e esboce os seus gráficos, usando (ou não) uma calculadora ou consultando um dos livros recomendados.

y = Tan[x] , y = Sec[x] , y = Cot[x] , y = Csc[x]



Funções trigonométricas inversas

Devido à sua periodicidade é evidente que as funções trigonométricas não são bijectivas; no entanto, podemos querer resolver uma equação do tipo $\mathrm{sen}(x) = 0$, e obteremos as soluções $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi, \cdots$. Então para poder definir, por exemplo, a inversa do seno, precisamos de definir uma sua restrição a um subconjunto de IR; convencionou-se chamar <u>restrição principal</u> à função bijectiva:

$$\begin{array}{c} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto \mathrm{sen}(x) \end{array}.$$

Podemos agora definir a sua inversa, a função <u>arco-seno</u>, por: $\begin{array}{c} [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto \mathrm{arcsen}(x) = \mathrm{sen}^{-1}(x) \end{array}$.

NOTA: deve ter-se em atenção que, neste contexto, o expoente “-1” significa “função inversa”, e não número inverso.

Poderíamos ter usado outra restrição bijectiva do seno, e definiríamos a respectiva função inversa com o domínio apropriado.

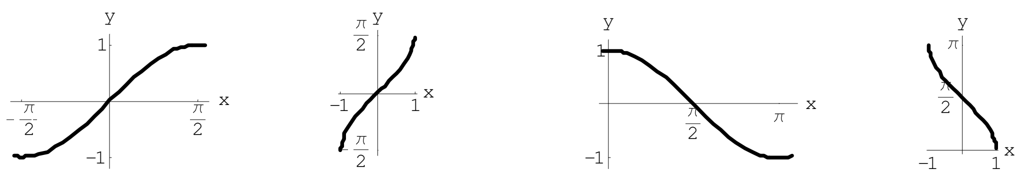
Do mesmo modo chamamos <u>restrição principal</u> da função cosseno à função bijectiva

$$\begin{aligned}[0,\pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos(x)\end{aligned}$$

e a sua inversa é a função arco-cosseno: $\begin{aligned}[-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x)=\cos^{-1}(x)\end{aligned}$.

Os seus gráficos são:

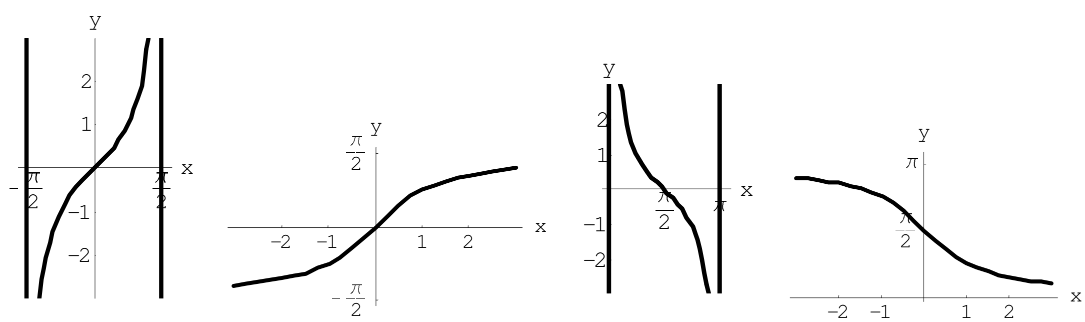
`y = Sin[x] e y = ArcSin[x]    y = Cos[x] e y = ArcCos[x]`



Definem-se ainda as restrições principais e as inversas das funções tangente e cotangente:

$$\begin{aligned}\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[&\to IR \\ x &\mapsto tg(x)\end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned}IR &\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto arctg(x)\end{aligned}\ , \quad \begin{aligned}]0,\pi[&\to IR \\ x &\mapsto cotg(x)\end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned}IR &\to]0,\pi[\\ x &\mapsto arccotg(x)\end{aligned}$$

`y = Tan[x] e y = ArcTan[x]  y = Cot[x]  e y = ArcCot[x]`



EXEMPLO: Calcule, se estiverem definidos, os valores das expressões:

a) $\text{arcsen}(\text{sen}(\pi/2))$ b) $\arccos(\cos(\pi/16))$ c) $\text{sen}(\text{arcsen}(1))$

d) $\text{sen}(\arccos(3))$ e) $\arccos(\cos(2\pi))$ f) $\text{arcsen}(\cos(\pi/16))$.

Limites de funções

A definição e o cálculo de limite de uma função num ponto foram já estudados no ensino secundário. Por esse motivo, não usaremos muito tempo com este assunto.

DEFINIÇÃO: Dada uma função *f*, diz-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ se e só se

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

Recorde ainda as definições de "limite à esquerda" e de "limite à direita".

EXEMPLOS: Calculemos os limites, quando existirem:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{sen}(2\pi x - \pi)$ 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x - 5|}{x - 5}$

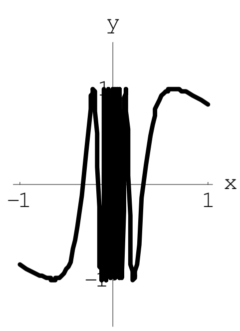
Por vezes, não podemos simplesmente fazer uma "extensão" das funções para obtermos os limites, como fizemos no exemplo 2. Será interessante analisar o gráfico da função deste exemplo obtida numa calculadora, e comparar com o respectivo domínio; o mesmo pode ser feito para os outros casos.

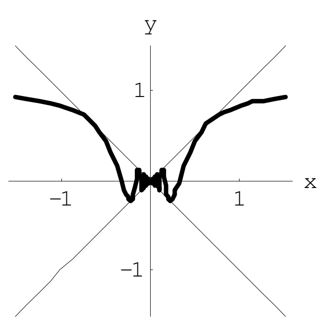
Mas vejamos um caso mais difícil:

EXEMPLO 4) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

É sabido que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe, o que torna complicado prevêr qual o limite pedido; uma análise dos gráficos dá-nos uma indicação:

$y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $y = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ y = x,\ y = -x$





O último gráfico sugere que o limite pretendido é zero, mas isso terá que ser provado usando a definição ou um teorema de "enquadramento".

Lembre alguns limites importantes: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Continuidade de funções

DEFINIÇÃO: Dada uma função *f*, diz-se que f é contínua num ponto a se e só se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

NOTA: Só faz sentido falar na continuidade de uma função num ponto do seu domínio.

Recorde propriedades das funções contínuas dadas no ensino secundário, ou consulte um dos livros recomendados.

É particularmente importante o seguinte

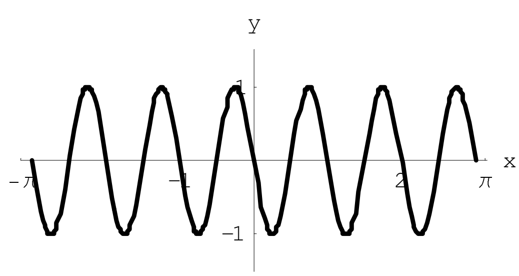
TEOREMA:

Se a função *g* é contínua num ponto *c* e a função *f* é contínua no ponto *g(c)*, então a composta $f \circ g$ é contínua em *c*.

É a aplicação deste teorema que nos permite estudar a continuidade de funções como as que vimos nos exemplos anteriores.

EXEMPLOS:

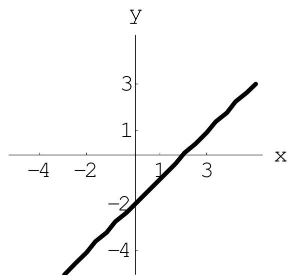
1) Repare que, ao calcularmos o limite $\lim\limits_{x \to 2} \text{sen}(2\pi x - \pi)$, admitimos "implicitamente" que a função $\text{sen}(2\pi x - \pi)$ é contínua no ponto $x = -2$.

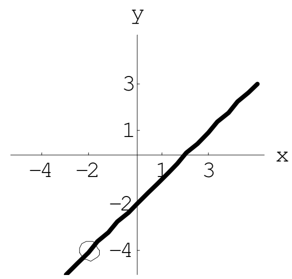


2) A função $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ não está definida em $x = 2$, e por isso não faz sentido questionar a sua continuidade nesse ponto; mas faz todo o sentido querer saber se a função é contínua nos pontos do seu domínio.

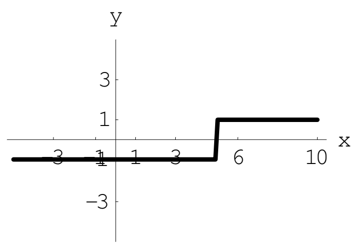
Por outro lado, sabendo que $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$, podemos pensar em fazer uma extensão contínua da função ao conjunto $\mathbb{R}$ do seguinte modo (repare que isso mesmo era sugerido pelo gráfico):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ -4 & \text{se } x = -2 \end{cases}$$





3) No caso da função $\dfrac{|x-5|}{x-5}$, verificou-se que os limites laterais eram diferentes, e por isso não havia $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$. Esse facto torna impossível fazer uma extensão contínua a $\mathbb{R}$.



NOTA: deve ler o gráfico com atenção.

EXEMPLO 4) Escreva uma extensão contínua da função $x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ao conjunto $\mathbb{R}$.

Seguem-se alguns importantes teoremas para funções contínuas:

TEOREMA DE BOLZANO:

Seja *f* uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a,b]$, e suponhamos que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f(c)=0$.

TEOREMA DE BOLZANO-CAUCHY ou DO VALOR INTERMÉDIO:

Seja *f* uma função contínua em todos os pontos de um intervalo aberto $]a,b[$. Se *c* e *d* são dois pontos deste intervalo e α é um valor tal que $f(c)<\alpha<f(d)$, então existe pelo menos um valor $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0)=\alpha$.

Note que o teorema anterior é um caso particular deste.

TEOREMA DE WEIERSTRASS:

Seja *f* uma função contínua definida num intervalo fechado $[a,b]$. Então *f* atinge um máximo e um mínimo nesse intervalo.

As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas nos livros recomendados, ou em "Cálculo", vol 1, de Tom Apostol.

EXEMPLOS:

1) Use o teorema de Bolzano para verificar que a função de domínio $\left[0,3\pi\right]$, definida por $g(x)=5^{\operatorname{sen}x}-20\log_{3\pi}(x+1)$, tem um pelo menos um zero.

2) Repare que, no teorema de Weierstrass, a condição de o intervalo ser fechado é fundamental; com efeito, se considerarmos a função definida por $f(x)=1/x$, contínua no intervalo $\left]0,+\infty\right[$, rapidamente verificamos que *f* não tem, neste intervalo, nem máximo nem mínimo.

Derivadas de funções

A definição e o cálculo de derivadas também foram já estudados no ensino secundário. Recordemos algumas definições e teoremas, antes de estudarmos novas situações.

DEFINIÇÃO: Dada uma função *f* definida num intervalo aberto $\left]a,b\right[$, e um ponto $x_0\in\left]a,b\right[$, define-se a <u>derivada de f no ponto x_0</u> como sendo o limite

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

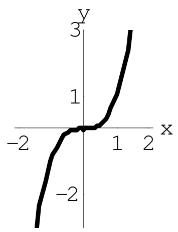
Ao cociente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ chama-se <u>razão incremental</u>. Do ponto de vista algébrico, esta definição não é óbvia, uma vez que uma substituição imediata tem sempre como resultado uma indeterminação do tipo 0/0. Por esse motivo, é interessante ver qual a interpretação geométrica deste limite.

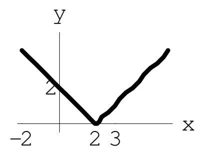
Se considerarmos o gráfico de equação $y=f(x)$, e sobre ele os pontos de coordenadas $\left(x,f(x)\right)$ e $\left(x_0,f(x_0)\right)$, podemos interpretar a razão incremental como sendo o declive da recta secante que passa por esses pontos; quando x se aproxima de x_0, a recta secante vai ficando cada vez mais próxima da recta tangente ao gráfico em $\left(x_0,f(x_0)\right)$; concluimos então que, se o limite anterior existir, $f'(x_0)$ representa o declive da recta tangente referida.

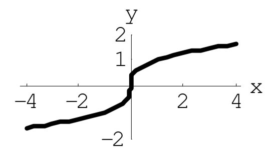
EXEMPLOS E CONTRA- EXEMPLOS:

Calculemos as derivadas indicadas, quando existirem:

1) $f'(0)$ para $f(x) = x^3$ 2) $g'(2)$ para $g(x) = |x-2|$ 3) $h'(0)$ para $h(x) = x^{1/3}$.







Alguns teoremas já conhecidos:

TEOREMA

Se uma função *f* é derivável num intervalo $]a,b[$, então é contínua em $]a,b[$.

TEOREMA DA DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e $g:]c,d[\to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(]a,b[) \subset]c,d[$. Sejam x_0 um ponto do intervalo $]a,b[$ e $y_0 = f(x_0)$. Se $f'(x_0)$ e $g'(y_0)$ existirem, então existe $(g \circ f)'(x_0)$ e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

TEOREMA DA DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

Seja $f:]a,b[\to Y$ uma função invertível e $g: Y \to X$ a sua inversa. Se *f* é derivável no ponto x_0 do intervalo $]a,b[$, e *g* é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então *g* é derivável no ponto se e só se $f'(x_0) \neq 0$. Nesse caso, a derivada de *g* no ponto y_0 é dada por $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Estes teoremas vão-nos permitir tirar conclusões acerca da derivabilidade de certas funções, e determinar as derivadas de algumas que foram já definidas neste curso:

EXEMPLOS:

1) Que pode dizer sobre a derivabilidade das funções definidas por: $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^3))$

e $g(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}(\cos x)}$?

2) Usando o teorema da derivada da função composta, calcule as derivadas das funções $f(x)=\operatorname{sh} x$, $g(x)=\operatorname{ch}\ x$, $h(x)=\operatorname{th}\ x$ e $j(x)=\operatorname{coth}\ x$.

3) Usando o teorema da derivada da função inversa, calcule as derivadas das funções $f(x)=\operatorname{arcsen} x$, $g(x)=\arccos\ x$, $h(x)=\operatorname{arg\,sh}\ x$ e $j(x)=\operatorname{arg\,ch}\ x$.

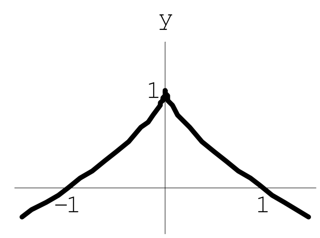
Recorde as propriedades das funções deriváveis que relacionam a monotonia de uma função e o cálculo dos seus extremos com a respectiva função derivada. (veja, por exemplo, o livro "Princípios de Análise Matemática Aplicada", pags 267 a 272).

Vejamos ainda três teoremas importantes, cuja demonstração pode ser encontrada no livro acima referido ou em qualquer um dos recomendados.

TEOREMA DE ROLLE:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo $]a,b[$. Suponhamos que $f(a)=f(b)$. Então existe pelo menos um ponto c no intervalo $]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

EXEMPLO: Verifique que o teorema não se aplica à função $f(x)=1-x^{2/3}$, definida no domínio $[-1,1]$, apesar de $f(-1)=f(1)=0$.



TEOREMA DE LAGRANGE

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo $]a,b[$. Então existe pelo menos um ponto c no intervalo $]a,b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

EXEMPLO:

Vejamos como se pode controlar a velocidade dos automobilistas na auto-estrada, com ajuda do teorema de Lagrange: se um carro passar numa portagem às 12 horas, e sair por outra às 12h30, tendo percorrido 80 km, será que excedeu o limite de velocidade?

Se designarmos por $f(t)$ a distância percorrida, podemos afirmar que existe pelo menos um instante t_0 tal que $f'(t_0) = \frac{f(12.5) - f(12)}{12.5 - 12} = \frac{80}{0.5} = 160$; logo, o condutor andou em excesso de velocidade, o que dará direito a multa.

TEOREMA (REGRA DE L'HÔPITAL)

Sejam *f* e *g* duas funções deriváveis num intervalo aberto contendo o ponto x_0, excepto eventualmente no ponto x_0. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, e além disso $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então podemos concluir que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Notemos que esta relação não é óbvia; a demonstração pode ser encontrada no livro já referido, pag. 279.

Esta regra será muito útil no cálculo de limites onde surgem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

A derivada pode ser interpreteda, do ponto de vista físico, como uma <u>taxa de variação</u>. Consideremos a seguinte situação: toda a gente já encheu balões de festa, e verificou que, no início eles parecem aumentar de volume rapidamente, mas a certa altura "crescem" cada vez mais devagar. Será apenas impressão nossa, ou esse fenómeno tem uma explicação física?

Lembremos que o volume V e o comprimento do raio r de uma esfera estão relacionados pela fórmula: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Resolvendo em ordem a r vem $r = f(V) = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$.

Se calcularmos a taxa de variação instantânea para V=0.5, V=1 e V=1.5 , podemos compreender este fenómeno físico.

III. Cálculo integral em $\mathbb{R}$

Integrais definidos

No capítulo anterior, usámos as derivadas para calcular a velocidade de um objecto a partir do espaço percorrido; neste capítulo, vamos começar pelo problema inverso.

Se a velocidade de um objecto é constante, podemos determinar a distância percorrida usando a fórmula:

distância = velocidade $\times$ tempo.

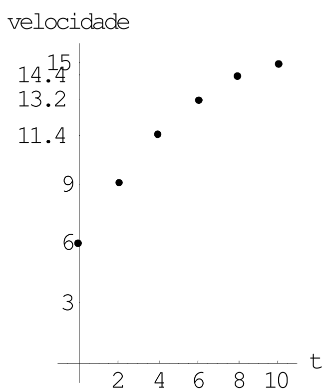
Mas como devemos proceder quando a velocidade não é constante?

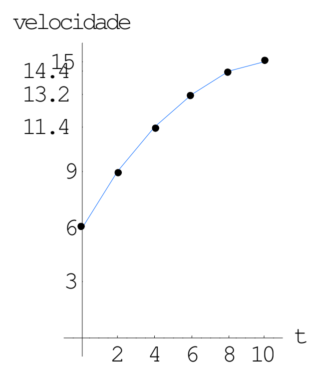
PROBLEMA:

Um carro move-se com velocidade crescente; mediu-se a sua velocidade a cada 2 segundos, tendo-se obtido a seguinte tabela:

tempo (em segundos)	0	2	4	6	8	10
velocidade (em metros por seg.)	6	9	11.4	13.2	14.4	15

Os gráficos que se seguem dão uma ideia do andamento do veículo:





Que distância percorreu o carro durante aqueles 10 segundos? Uma vez que não sabemos qual a velocidade em cada instante, teremos que fazer um cálculo aproximado para cada 2 segundos. Obtemos então:

- nos primeiros 2 segundos, o carro percorreu 6×2 metros;

- nos 2 segundos seguintes, o carro percorreu 9×2 metros;

... e assim sucessivamente, o que nos dá um total de

$$6\times 2+9\times 2+11.4\times 2+13.2\times 2+14.4\times 2=108$$

Dizemos então que o carro percorreu um total de 108 metros, aproximadamente. Mas deve ter-se em atenção que, em todos os casos, suposemos que, em cada 2 segundos, a velocidade do carro era constante, e a menor indicada, isto é, entre 0 e 2 segundos usámos o valor 6, embora saibamos que a verdadeira velocidade do carro foi em geral superior, pois ao segundo 2 ela era de 9 m/seg.

Podemos então pôr a hipótese de calcular a distância percorrida usando os valores superiores em cada intervalo, o que nos dá:

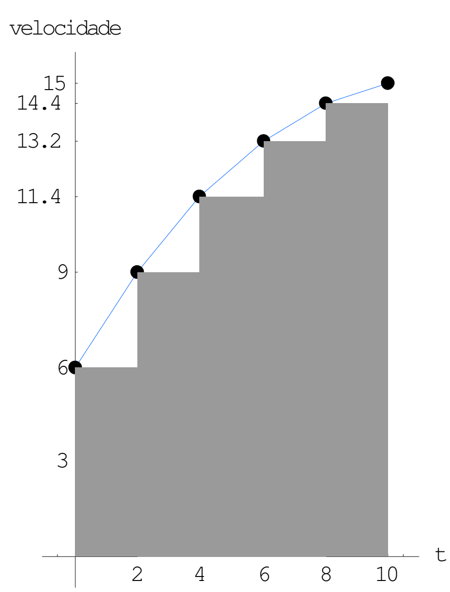
$9 \times 2 + 11.4 \times 2 + 13.2 \times 2 + 14.4 \times 2 + 15 \times 2 = 126$.

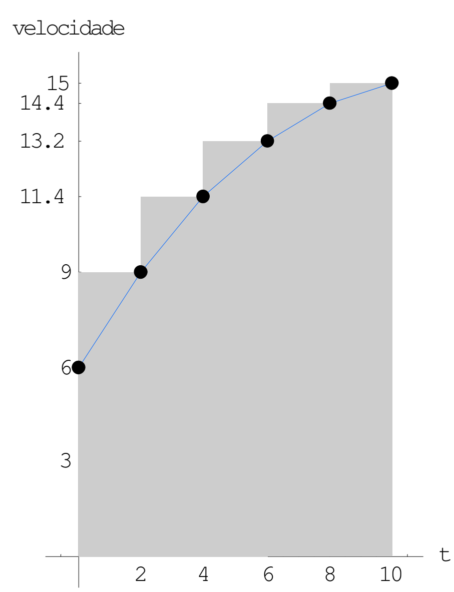
Em conclusão, podemos afirmar que:

108 metros $\leq$ distância total percorrida $\leq$ 126 metros.

Uma melhor aproximação poderia ser obtida medindo velocidades a cada segundo, a cada meio segundo, etc.

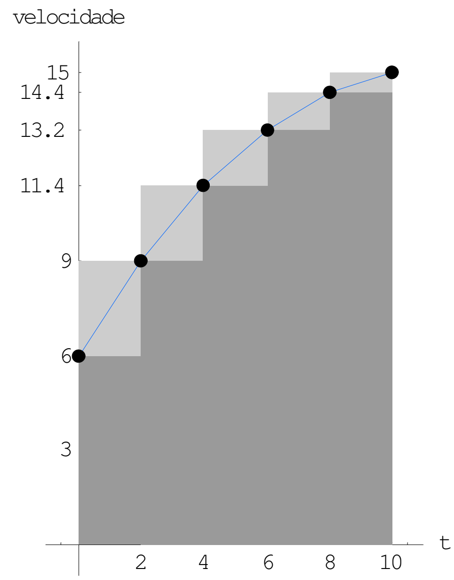
Se analisarmos as somas acima indicadas, rapidamente chegamos à conclusão de que a primeira corresponde à soma das áreas dos rectângulos escuros, que estão "abaixo" da curva que une os pontos, e a segunda soma corresponde à soma das áreas dos rectângulos mais claros, que estão "acima" da curva. Temos claramente uma estimativa por defeito e uma estimativa por excesso.





A diferença é dada pelas áreas dos pequenos rectângulos da figura seguinte:

É de notar que, neste caso, os cálculos ficaram simplificados, uma vez que as diferenças entre os tempos são sempre iguais (2 segundos), donde resulta que todos os rectângulos têm bases iguais.



Devemos no entanto ter em mente que o nosso objectivo inicial era ter um valor <u>exacto</u> para a distância percorrida; esse valor será obtido calculando a área limitada pelos eixos Ox e Oy, pela recta de equação $t = 10$ e pela curva que une os pontos.

O processo que acabámos de usar chama-se <u>integração</u>; ao conjunto de pontos que considerámos no intervalo $[0,10]$ chamamos uma <u>partição</u> do intervalo.

DEFINIÇÃO:

Consideremos um intervalo fechado $[a,b]$ e um conjunto finito $P = \{ x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \}$ de pontos desse intervalo tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Ao conjunto P chamamos uma <u>partição</u> do intervalo.

P divide $[a,b]$ em *n* pequenos sub-intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, sem pontos comuns além dos limites dos intervalos, e cujos comprimentos são, respectivamente $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$. Em geral, não é de esperar que os Δx tenham todos o mesmo valor, isto é, os sub-intervalos não terão todos o mesmo comprimento.

Suponhamos que temos uma função *f* contínua (que é o caso do nosso exemplo) num intervalo $[a,b]$; o teorema de Weierstrass (apontamentos, capítulo 2) garante-nos que, em cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, a função atinge um máximo M_i e um mínimo m_i.

DEFINIÇÃO:

Chama-se soma integral superior de Riemann de *f* para a partição P ao número

$$\mathcal{U}_f(P) = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \cdots + M_n\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\ ;$$

chama-se soma integral inferior de Riemann de *f* para a partição P ao número

$$\mathcal{L}_f(P) = m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + \cdots + m_n\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i\ .$$

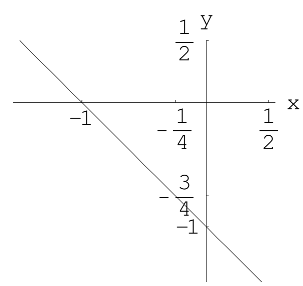
No exemplo inicial, quais os valores de $\mathcal{U}_v(P)$ e $\mathcal{L}_v(P)$, onde v(t) é a função velocidade?

Dado que a função do exemplo é crescente, repare-se que a soma integral inferior é calculada usado os pontos à esquerda de cada sub-intervalo, e a soma integral superior é calculada usado os pontos à direita de cada sub-intervalo. Isso não aconteceria se a função fosse decrescente ou não fosse monótona no intervalo considerado.

EXEMPLO:

Calculemos as somas integrais da função $f(x) = -x - 1$ no intervalo $[-1, 0]$ para a partição $P = \{-1, -1/4, 0\}$.

Verifique que a área limitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico de *f* está compreendida entre os valores das somas.



DEFINIÇÃO:

O único número *I* que satisfaz as desigualdades $\mathcal{L}_f(P) \le I \le \mathcal{U}_f(P)$ para todas as partições P do intervalo $[a, b]$ é chamado integral definido (ou apenas integral) de *f* entre *a* e *b* e denota-se $\int_a^b f(x)\,dx$.

O sinal $\int$, chamado sinal de integral, vem dos tempos de Leibniz e representa um S alongado; os valores a e b são os limites de integração e f é a função integranda.

Uma vez que o integral de uma função está associado a uma certa área, o nome da variável independente não é importante, logo $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$, etc; por este motivo, alguns autores usam apenas $\int_a^b f$, mas nós vamos manter a indicação da variável, por motivos que serão evidentes mais adiante.

TEOREMA:

Sejam P e Q duas partições do intervalo $[a,b]$. Se $P \subseteq Q$, então $\mathcal{L}_f(P) \leq \mathcal{L}_f(Q)$ e $\mathcal{U}_f(Q) \leq \mathcal{U}_f(P)$.

Basta verificar que, quanto mais "fina" é a partição, melhor é a aproximação das somas ao valor do integral.

Por outro lado, podemos definir uma soma de Riemann de *f* para uma dada partição do intervalo $[a,b]$ considerando um ponto qualquer de cada sub-intervalo, e não necessariamente os pontos onde a função toma uma valor máximo ou um valor mínimo.

Nesse sentido, podemos redefinir o integral do seguinte modo:

DEFINIÇÃO:

Nas condições necessárias, define-se $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$, para $i = 1,2,\ldots,n$.

EXEMPLO:

É capaz de encontrar uma função para a qual o número de pontos da partição não é relevante?

Vejamos algumas propriedades dos integrais:

TEOREMAS:

Seja *f* uma função contínua num intervalo $[a,b]$;

1- Se $a < c < b$, então $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

2- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$;

3- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Notemos que todas estas definições e propriedades não nos dão um método eficaz de calcular um integral; esse método vai surgir da relação entre derivação e integração.

Repare-se que, se f é uma função contínua em $[a,b]$ então, para cada *x* pertencente a $[a,b]$, o integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número real, e portanto podemos definir uma certa função *G* do seguinte modo:

$$\begin{aligned} G: [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

TEOREMA:

Se *f* é contínua em $[a,b]$, a função G definida em $[a,b]$ por $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e a sua derivada é $G'(x)=f(x)$, $\forall x \in]a,b[$.

EXEMPLO:

Seja G uma função definida em $\mathbb{R}^+$ por $G(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Calculemos $G(1)$, $G'(x)$ e $G'(1)$.

DEFINIÇÃO:

Uma função F diz-se uma <u>primitiva</u> (ou antiderivada) de *f* em $[a,b]$ se e só se F é contínua em $[a,b]$ e $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in]a,b[$.

EXEMPLO:

Consideremos a função G do exemplo anterior, $G(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Calculemos $G(x)$ e $G(e^3)$.

O teorema que acabámos de enunciar diz-nos que a função G, definida por um integral, é uma primitiva de *f*. O teorema que se segue dá-nos uma forma de calcularmos os integrais:

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$. Se F é uma primitiva de *f* em $[a,b]$, então $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$.

A demonstração destes teoremas pode ser encontrada em “Calculus” de Salas, Hille, pg 257 a 262.

NOTAÇÃO:

Se F é uma primitiva de *f* em $\left[a,b\right]$, então escrevemos $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b$ ou $\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b$.

DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função limitada e definida num intervalo $\left[a,b\right]$. Se existir o número real *I* de acordo com a definição de *integral definido* dos Apontamentos, então diz-se que <u>*f* é integrável</u> em $\left[a,b\right]$.

EXEMPLOS:

1- Seja f uma função constante definida por $f(x)=C$; determinemos $\int_a^b f(t)\,dt$ para $a,b \in \mathbb{R}$.

2- Consideremos a <u>função de Dirichlet</u> definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=\begin{cases}1 \text{ se } x \text{ é racional}\\ 0 \text{ se } x \text{ é irracional}\end{cases}$.

Tentemos determinar $\int_0^4 f(x)\,dx$.

Podemos agora colocar a seguinte questão: se a função *f* não for contínua, ainda podemos definir o seu integral? O teorema que se segue dá-nos a resposta:

TEOREMA:

Seja *f* uma função limitada e com um número <u>finito de descontinuidades</u> no intervalo $\left[a,b\right]$. Se as descontinuidades forem todas de primeira espécie, então existe e é único o número real $I=\int_a^b f(t)\,dt$, tal como foi definido antes.

NOTA: uma descontinuidade diz-se de primeira espécie se existem (são finitos) os limites laterais em cada ponto de descontinuidade.

Propriedades do integral definido:

TEOREMA (LINEARIDADE):

Sejam *f* e *g* duas funções integráveis no intervalo $\left[a,b\right]$. Seja, k_1 e k_2 duas constantes reais. Então podemos dizer que a função $k_1 f + k_2 g$ é integrável em $\left[a,b\right]$ e que $\int_a^b (k_1 f + k_2 g)(t)\,dt = k_1 \int_a^b f(t)\,dt + k_2 \int_a^b g(t)\,dt$.

TEOREMA:

Seja *f* uma função integrável e positiva ou nula no intervalo $\left[a,b\right]$. Então podemos dizer que $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.

TEOREMA:

Sejam *f* e *g* duas funções integráveis no intervalo $\left[a,b\right]$ e tais que $\forall x \in \left[a,b\right]$, $f(x) \leq g(x)$. Então podemos dizer que $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

TEOREMA:

Seja *f* uma função integrável no intervalo $\left[a,b\right]$. Sejam $\underline{m}$ e $\underline{M}$ um minorante e um majorante de função *f* em $\left[a,b\right]$, respectivamente. Então podemos dizer que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

EXEMPLO:

Calculemos alguns integrais, usando os teoremas já enunciados:

1- $\int_{-3}^{3} 3x^2\,dx$ 2- $\int_{-3}^{3} 2t\,dt$ 3- $\int_{0}^{\pi} \cos u\,du$ 4- $\int_{-3}^{3} e^t\,dx$

5- $\int_{-3}^{3} (3x^2 - 2x)\,dx$ 6- $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{t} + \frac{3}{t+1} \right) dt$

EXEMPLO:

Sem calcular o integral $\int_0^3 \sqrt{1+t^2}\,dt$, determinemos um enquadramento para o seu valor.

CONTRA-EXEMPLO:

Consideremos a função f definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$. Esta função é claramente positiva no intervalo $\left[0, 3\pi/4\right]$, logo o seu integral definido neste intervalo deve ser maior ou igual a zero.

Mas sendo $F(x)=\operatorname{arctg}(\sec x)$ uma primitiva de f (verifique!), podemos escrever:

$\int_0^{3\pi/4} f(x)\,dx=\left[\operatorname{arctg}(\sec x)\right]_0^{3\pi/4}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})-\operatorname{arctg}(1)=-\operatorname{arctg}(\sqrt{2})-\dfrac{\pi}{4}$ e obtemos um valor estritamente negativo. Alguma coisa está errada? Qual?

DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função integrável no intervalo $\left[a, b\right]$. O valor médio de *f* nesse intervalo é dado por $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

EXEMPLO

Suponhamos que $C(t)$ representa o custo diário para aquecer uma casa, medido em euros por dia, onde *t* é o tempo medido em dias, e $t=0$ corresponde ao dia 1 de Outubro de 2003. Neste contexto, qual o significado de $\int_0^{92} C(t)\,dt$ e de $\dfrac{1}{92}\int_0^{92} C(t)\,dt$?

Integrais definidos – cálculo de áreas

A forma como definimos o integral definido de uma função integrável, assim como todos os teoremas que vimos até agora, permitem-nos calcular áreas limitadas pelos gráficos de funções não muito complicadas.

EXEMPLOS:

1- Calculemos a área limitada pelo eixo Ox e pela curva de equação $y=3-3x^2$.

2- Calculemos a área limitada pelas curvas de equações $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, entre $x=0$ e $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Primitivas (integrais indefinidos)

Qual será a primitiva da função *f* definida num intervalo $\left[a,b\right]$ por $f(x)=0$? Se a função que procuramos deve ter em todos os pontos do intervalo $\left[a,b\right]$ uma tangente horizontal, então deve tratar-se de uma função constante. E que podemos dizer sobre a primitiva de uma função integrável *f* qualquer?

Sabemos já que, se F é uma primitiva de f, então todos os elementos da família de funções da forma $F+C$, onde C é uma constante real, são primitivas de f. A questão que se pode colocar é: "será que há outras primitivas de f além das já citadas?"

Suponhamos que F e G são duas primitivas de uma função f, isto é, $F'=f$ e $G'=f$; então, podemos escrever $F'=G' \Leftrightarrow (F-G)'=0$, o que significa que $F-G=C$, ou seja, $F(x)-G(x)=C$ onde C é uma constante real.

TEOREMA:

Se F e G são ambas primitivas de uma função *f*, então $F(x)-G(x)=C$ onde C é uma constante real.

Se apenas nos interessa saber qual a primitiva de uma dada função em qualquer intervalo onde ela seja integrável, então podemos abandonar a notação de integral definido e substitui-lo por um <u>integral indefinido</u>. Nesse caso escrevemos

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \text{ onde C é a constante de integração.}$$

NOTA:

É fundamental ter em atenção a diferença entre integral definido e integral indefinido: um integral definido $\int_a^b f(t)\,dt$ representa um número real, enquanto um integral indefinido $\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções.

EXEMPLOS

Calculemos os seguintes integrais indefinidos:

1- $\int k\,dx$ ($k \in \mathbb{R}$); 2- $\int x\,dx$; 3- $\int x^n\,dx$ ($n \neq -1$);

4- $\int e^x\,dx$; 5- $\int \frac{1}{x}dx$; 6- $\int \cos x\,dx$.

O teorema fundamental do cálculo integral dá-nos uma fórmula que nos permite usar primitivas (integrais indefinidos) para calcular integrais definidos.

Segue-se um teorema que nos permite calcular integrais indefinidos, usando as suas propriedades.

TEOREMA:

Sejam *f* e *g* duas funções primitiváveis. Seja, k_1 e k_2 duas constantes reais. Então

$$\int (k_1 f + k_2 g)(x)\,dx = k_1 \int f(x)\,dx + k_2 \int g(x)\,dx .$$

NOTA: anexa-se uma folha com um formulário onde está uma lista das chamadas primitivas imediatas. Estas servirão, juntamente com as técnicas de integração que veremos a seguir, para calcular integrais de funções compostas.

Uma noção importante a reter quando se calculam integrais indefinidos é que a expressão dx nos dá a informação de que x é a variável de integração e portanto é a variável da função primitiva.

EXEMPLO:

Calculemos os seguintes integrais:

1- $\int a \operatorname{sen} x\,dx$; 2- $\int a \operatorname{sen} x\,da$; 3- $\int a \operatorname{sen} x\,dt$.

É muito importante reter esta informação pois seria absurdo, por exemplo, chegar à conclusão que $\int \cos t\,dt = \operatorname{sen} x$, o que equivale a escrever $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos t$.

Até agora apenas vimos integrais cujas primitivas podem ser calculadas recorrendo à "lembrança" das derivadas, e por isso lhes chamamos primitivas imediatas; mas a maior parte dos integrais apresenta funções muito mais complexas, para as quais é necessário recorrer a técnicas de integração. As duas principais técnicas, integração por substituição e integração por partes, são as correspondentes das regras de derivação da função composta e do produto de funções.

Integração por substituição (ou mudança de variável)

Lembremos que, dadas duas funções *F* e *g* deriváveis e para as quais se pode definir $F \circ g$, sendo $F' = f$, temos $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$.

Então, se queremos calcular

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx\,,$$

e sendo F uma primitiva de *f*, sabemos que devemos obter $F(g(x)) + C$.

No entanto nem sempre é fácil fazer este tipo de manipulação algébrica, sendo usual recorrer a uma mudança de variável.

Suponhamos que temos um integral da forma

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx\ ;$$

fazendo $u = g(x)$ e $du = g'(x)\, dx$, obtemos $\int f(u)\, du$. Se F é uma primitiva de *f*, vem

$$\int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

EXEMPLO:

Calculemos $\int (x^2 + 1)\, 2x\, dx$ e $\int \frac{x^2}{4 + x^3}\, dx$.

No caso dos integrais definidos, devemos ter em conta os limites de integração:

TEOREMA:

Seja g' uma função contínua em $[a, b]$ e f contínua em $[g(a), g(b)]$; então

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em qualquer dos livros recomendados.

EXEMPLO:

Calculemos $\int_{-1}^{3} (x^2 + 1)\, 2x\, dx$ e $\int_0^2 \frac{x^2}{4 - x^3}\, dx$.

Nem sempre as funções integrandas têm o aspecto necessário à aplicação do teorema anterior (derivada de uma composta), mas pode ainda ser conveniente fazer uma substituição.

EXEMPLO:

Calculemos $\int_0^1 (x + 7)\, \sqrt[3]{3 - 2x}\, dx$, $\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 - e^t}\, dt$ e $\int u(u - 3)^5\, du$.

Integração por partes

Lembremos que, dadas duas funções *f* e *g* deriváveis e para as quais se pode definir o produto $f \times g$, temos $(f \times g)'(x) = f(x) \times g'(x) + f'(x) \times g'(x)$.

Então, integrando ambos os membros da igualdade, vem

$$\int (f \times g)'(x)\,dx = (f \times g)(x) + C = f(x) \times g(x) + C,$$

donde se pode deduzir a fórmula:

$$\int f(x) \times g'(x)\,dx = f(x) \times g(x) - \int f'(x) \times g(x)\,dx.$$

Este fórmula, chamada integração por partes, permite-nos calcular o primeiro integral à custa do último, que em princípio será mais simples.

Na prática, é muito comum considerar $u = f(x)$, $du = f'(x)\,dx$, $v = g(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$, e a fórmula anterior fica com um aspecto mais simples:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \;.$$

EXEMPLO:

Calculemos $\int x\,e^x\,dx$, $\int_1^{e^2} x \ln x\,dx$, $\int_1^{e^2} \ln t\,dt$ e $\int e^a \,\mathrm{sen}\, a\,da$.

Integração de fracções racionais

Designam-se por fracções racionais as funções que têm a forma de um cociente de dois polinómios, isto é, da forma: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Estas funções requerem uma técnica especial de integração, e aparecem muitas vezes depois de certas mudanças de variável.

Suponhamos então que temos uma função da forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em que o grau de $P(x)$ é superior ao grau de $Q(x)$; vamos começar por fazer a divisão dos polinómios e obtemos $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, em que o grau de $R(x)$ é inferior ao de $Q(x)$.

Como $D(x)$ é um polinómio, a sua integração não oferece qualquer problema; para integrarmos a fracção $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, vamos analisar o polinómio do denominador.

Qualquer que seja o grau de $Q(x)$, ele é factorizável em polinómios do tipo:

$x - \alpha$ ou $x^2 + \beta x + \gamma$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

que podem aparecer mais que uma vez, dependendo da sua multiplicidade.

Pode provar-se o seguinte resultado (ver livro do Professor Carvalho e Silva):

Dada uma fracção racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$, em que o grau de $R(x)$ é inferior ao de $Q(x)$, podemos encontrar coeficientes reais $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n, C_1, C_2, ..., C_p, D_1, D_2, ..., D_p, E_1, E_2, ..., E_q, F_1, F_2, ..., F_q$, com $n, m, p, q \in IN$, tais que:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_m}{(x-\alpha_1)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^1} + \\ &+ \frac{B_n}{(x-\alpha_2)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-\alpha_2)^{n-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(x-\alpha_2)^1} + \cdots + \\ &+ \frac{C_p x + D_p}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^p} + \frac{C_{p-1} x + D_{p-1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{p-1}} + \cdots + \frac{C_1 x + D_1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^1} + \\ &+ \frac{E_q x + F_q}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^q} + \frac{E_{q-1} x + F_{q-1}}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{q-1}} + \cdots + \frac{E_1 x + F_1}{(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^1}\end{aligned}$$

Desta forma, transformamos a integração de uma fracção complicada na integração da soma de fracções simples, em geral chamadas <u>fracções parciais</u> ou ou <u>elementos simples</u>. Os coeficientes podem ser calculados usando várias técnicas (ver livros recomendados); usaremos aqui a dos <u>coeficientes indeterminados</u>, exposta durante a resolução dos exemplos.

EXEMPLO:

Calculemos os seguintes integrais:

1- $\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}dx$ 2- $\int_0^{1/2} \frac{x^5-2x^4+6x^3+x^2+3x-1}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$

Integração por substituição envolvendo funções trigonométricas e hiperbólicas

Estas substituições são necessárias para calcular integrais envolvendo expressões do tipo $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ e $\sqrt{x^2-a^2}$. Usando a relação fundamental da trigonometria e a relação fundamental das funções hiperbólicas, podemos simplificar estes radicais.

EXEMPLOS:

1- Calculemos a área de um círculo de raio 2, usando um integral;

2- calculemos $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ e $\int \frac{1}{t^2+2t+5}dt$.

Outro caso que também aparece com frequência envolve fracções racionais de senos e cossenos; em princípio, a substituição que se segue trasforma-as em fracções racionais da nova variável.

TEOREMA

Se *f* é uma expressão racional em $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$, então a substituição $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ transforma o integral $\int f(x)\,dx$ num integral de uma função racional de *u*.

<u>Demonstração</u>

Basta ver que

$u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(u)$, o que dá $dx = \frac{2}{1+u^2}du$

e $\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$,

aparecendo então na nova função integranda apenas fracções racionais.

EXEMPLO:

Calculemos $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$.

Derivação de integrais indefinidos

Por definição, se *f* é uma função integrável em $[a,b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ com $x \in [a,b]$ é um integral indefinido, e se *f* for contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral temos $f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$.

Usando o teorema da derivada da função composta, podemos demonstrar o seguinte

TEOREMA:

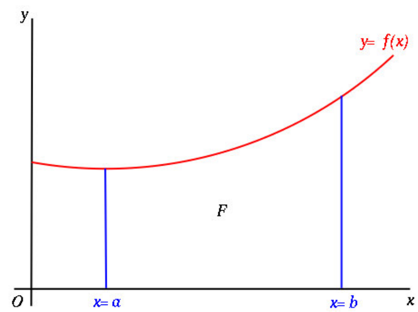
Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e sejam g e *h* duas funções deriváveis num intervalo $]c,d[$, cuja contradomínio está contido em $[a,b]$; então, para todo o $x \in]c,d[$,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f\big(g(x)\big)g'(x) - f\big(h(x)\big)h'(x).$$

A demonstração pode ser encontrada em "Princípios de Análise Matemática Aplicada", pg. 294/295.

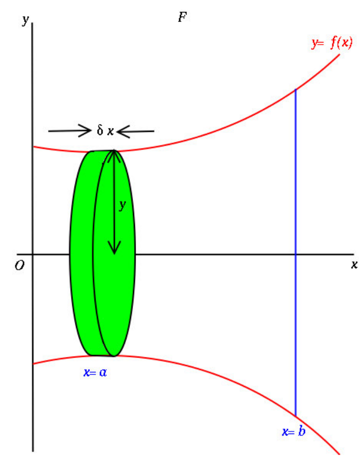
Sólidos de revolução – método do disco

Se fizermos rodar uma região plana em torno de um recta desse mesmo plano, obtemos um sólido "redondo" a que chamamos sólido de revolução; à recta atrás referida chamamos recta de revolução. A determinação do volume de um sólido deste tipo é um problema simples.



Consideremos então a região F limitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva *f,* pelo eixo dos XX e pelas rectas de equações $x = a$ e $x = b$. Fazendo rodar esta figura em torno do eixo Ox, obtemos um sólido de revolução; se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$



e em cada sub-intervalo tomarmos um valor c_k, podemos calcular um valor aproximado do volume através de uma soma de Riemann com os volumes de pequenos cilindros de "altura" δx, dados por

$$\pi[f(c_k)]^2(x_{k+1} - x_k) = \pi[f(c_k)]^2\,\delta x\,.$$

O volume do sólido de revolução é aproximado pela soma $\sum_{k=0}^{n-1} \pi[f(c_k)]^2(x_{k+1} - x_k)$; como suposemos que a função era contínua, então também o é a função $[f(x)]^2$, e portanto o seu integral definido existe, e podemos dar a seguinte

DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função contínua num intervalo $[a, b]$; o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos XX da figura limitada pelo gráfico de *f*, pelo eixo Ox e pelas rectas de equações $x = a$ e $x = b$ existe sempre e é dado por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx\,.$$

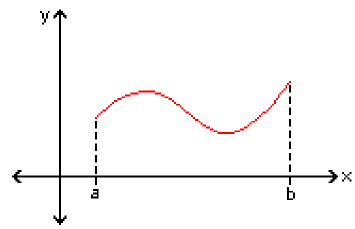
EXEMPLOS:

1- Verifiquemos que, se f for constante, se obtém a fórmula para o volume de um cilindro;

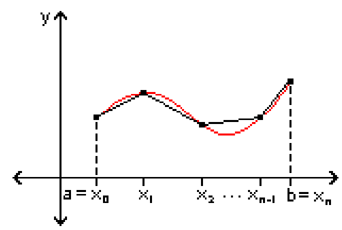
2- do mesmo modo, tentemos obter o volume de uma esfera de raio *r*.

Comprimento de curvas

Podemos querer calcular o comprimento de uma curva, isto é, do gráfico de uma função, para resolver um certo problema; começamos por aproximar a curva por pequenos segmentos de recta, dos quais calculamos os respectivos comprimentos.



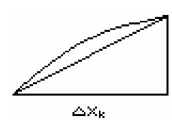
Suponhamos que a função f é <u>suave</u> num intervalo $[a,b]$, isto é, tem derivada contínua em $]a,b[$, derivada lateral direita em a e derivada lateral esquerda em b.



Para isso, dividimos o intervalo $[a,b]$ em sub--intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ tais que

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Seja P_k o ponto de coordenadas $(x_k, f(x_k))$; estes pontos formam uma linha poligonal, e vamos calcular o seu



$f(x_{k+1}) - f(x_k)$

comprimento usando o teorema de Pitágoras; através da figura podemos concluir que o comprimento do segmento de recta P_kP_{k+1} é dado por

$$\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}\ .$$

O comprimento da linha poligonal é dado pela soma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}\ .$$

Aplicando agora o Teorema do valor médio de Lagrange à função f em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ (verifique que f satisfaz as condições necessárias), sabemos que existe um ponto $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tal que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(c_k)(x_{k+1} - x_k)$.

Podemos agora escrever o comprimento da linha poligonal na forma $\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f'(c_k)(x_{k+1}-x_k))^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,(x_{k+1}-x_k)$.

Fazendo o número de pontos tender para infinito e o comprimento de cada segmento de recta P_kP_{k+1} tender para zero, podemos obter uma fórmula para o comprimento da curva:

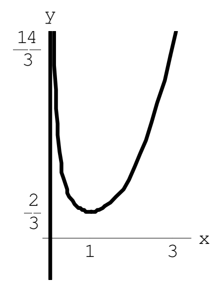
DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função suave no intervalo $[a,b]$. O comprimento da curva definida pelo gráfico de *f* desde o ponto $A(a,f(a))$ até ao ponto $B(b,f(b))$ existe e é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

EXEMPLO:

Calculemos o comprimento da curva de equação $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ entre $x=1$ e $x=3$.



Funções cuja primitiva não se pode obter como soma finita de funções elementares

Sabemos já que, se uma função *f* é contínua num intervalo fechado $[a,b]$, então tem primitiva nesse intervalo, nomeadamente:

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{com } x\in[a,b].$$

No entanto nem sempre é possível exprimir essa primitiva como soma finita de funções <u>elementares</u>, sendo estas funções do tipo das que aparecem na tabela de primitivas, como polinómios, exponenciais e logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas.

Seguem-se algumas daquelas funções:

$$e^{-x^2},\ \frac{e^x}{x^n}(n\in\mathbb{N}),\ \operatorname{sen}(x^2),\ \frac{\operatorname{sen}x}{x},\ \frac{1}{\ln x},\ \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2 x}\,.$$

Estas funções aparecem em diversas aplicações:

- e^{-x^2} é muito conhecida de quem trabalha com Probabilidades;

- $\operatorname{sen}(x^2)$ é muito usada em Óptica;

- $\dfrac{1}{\ln x}$ aparece em Teoria de Números;

- $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}$ surge em Geometria, no cálculo do comprimento de uma elipse.

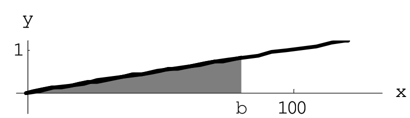
Note-se que é extremamente vantajoso este conhecimento, pois seria um desperdício de tempo investir na procura de uma primitiva simples em qualquer deses casos.

Integrais impróprios - definição

Lembremos que a definição de integral definido foi estabelecida para funções definidas num intervalo fechado $[a,b]$. Mas será que faz sentido considerar, por exemplo, o integral de uma função definida num intervalo $[a,+\infty[$?

Vejamos dois casos:

1- Consideremos a função $g(x)=\dfrac{x}{100}$, definida em $[0,+\infty[$. Para um determinado valor *b*, real positivo, vamos considerar o integral $\int_0^b \dfrac{x}{100}dx$, que pode ser interpretado como a área indicada no gráfico.



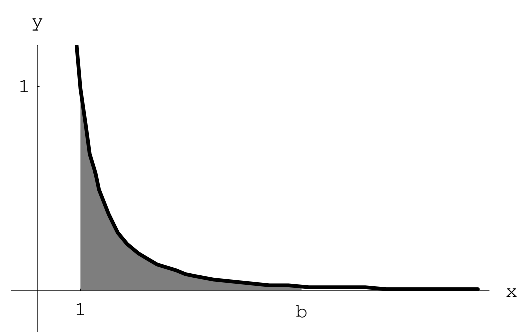
Cálculos simples dão-nos:

$$\int_0^b \frac{x}{100}dx = \frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{b^2}{200},$$

isto é, a área sublinhada vale $\dfrac{b^2}{200}$; se *b* tomar valores cada vez maiores, a área vai crescendo e temos $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^2}{200}=+\infty$; então não podemos fazer corresponder à área nenhum número real.

2- Vejamos agora o que acontece se considerarmos a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, definida em $[1,+\infty[$. A área sublinhada na figura é dada por

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = 1-\frac{1}{b}.$$



Se compararmos as figuras, verificamos que, quando *b* cresce, a área vai crescendo "muito devagar", e obtemos:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1.$$

Neste caso, podemos fazer corresponder à área o número real 1 (embora possa parecer estranho!!!).

DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função definida no intervalo $\left[a,+\infty\right[$ e integrável em qualquer intervalo do tipo $\left[a,X\right]$ com X arbitrário e superior a *a*. Se existir $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\,dx = L$, então dizemos que o <u>integral impróprio</u> $\underline{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}$ <u>é convergente</u> e que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = L$.

Nos casos em que o limite anterior não existe (mesmo sendo infinito) dizemos que <u>o integral é divergente</u>.

O integral impróprio $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ define-se de modo semelhante ao anterior:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{Y\to-\infty}\int_Y^b f(x)\,dx.$$

Temos ainda um caso diferente:

DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função definida integrável em qualquer intervalo fechado.Seja *a* um número real qualquer. Se existirem os limites

$$\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\,dx = A \quad \text{e} \quad \lim_{Y\to-\infty}\int_Y^a f(x)\,dx = B,$$

então dizemos que o <u>integral impróprio</u> $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}$ <u>é convergente</u> e que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = A + B$.

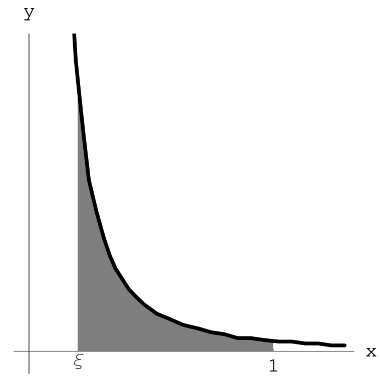
Nos casos em que algum dos limites anteriores não exista, dizemos que <u>o integral é divergente</u>.

Os integrais impróprios que acabamos de definir dizem-se <u>integrais impróprios de 1ª espécie</u>.

EXEMPLO:

Vejamos que o integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ é convergente quando $\alpha>1$ e divergente quando $\alpha\le1$.

Um outro tipo de integral impróprio surge com funções que não são limitadas; nesse caso, não faz sentido considerar somas de Riemann, uma vez que podem surgir valores de $f(x)$ arbitrariamente grandes, dependendo da partição, por *f* não ser limitada.



Consideremos a função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, definida em $]0,1]$.

A área sublinhada na figura é dada por

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_\varepsilon^1=1-\frac{1}{\varepsilon}$.

Quando ε se aproxima de zero, o valor da área da figura fica $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty$, e portanto não podemos atribuir-lhe um valor real.

DEFINIÇÃO:

Seja *f* uma função definida no intervalo $]a,b]$, não limitada nesse intervalo, mas integrável em qualquer intervalo do tipo $[a+\varepsilon,b]$ com $0<\varepsilon<b-a$. Se existir $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx=L$, então dizemos que o <u>integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente</u> e que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=L$.

Nos casos em que o limite anterior não existe (mesmo sendo infinito) dizemos que <u>o integral é divergente</u>.

Os integrais impróprios que acabamos de definir dizem-se <u>integrais impróprios de 2ª espécie</u>.

Um integral do tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$, que pode ser desdobrado, por exemplo, em $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{x}\,dx+\int_3^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$, diz-se um <u>integral impróprio de 3ª espécie</u>.

EXEMPLO:

Vejamos que o integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ é convergente quando $\alpha < 1$ e divergente quando $\alpha \geq 1$.

Integrais impróprios – critérios de convergência

Por vezes é difícil, se não impossível, calcular o valor de certos integrais impróprios, para decidir se são ou não convergentes. No entanto, por comparação com integrais conhecidos, pode ser possível ter esse conhecimento.

TEOREMA (1º CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA):

Se *f* e *g* são duas funções contínuas não negativas no intervalo $\left[a,+\infty\right[$, e se é possível encontrar um número real positivo M tal que, para todo o *x* em $\left[a,+\infty\right[$ se tem $f(x) \leq M\,g(x)$, então:

1- se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge;

2- se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ também diverge.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro "Princípios de Matemática Aplicada" recomendado.

TEOREMA (2º CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA):

Se *f* e *g* são duas funções contínuas não negativas no intervalo $\left[a,+\infty\right[$, e

1- se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in IR^+$, então os integrais $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são da mesma espécie, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes;

2- se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, então:

a) se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge;

b) se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ também diverge;

3- se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então:

a) se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ também converge;

b) se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também diverge.

TEOREMA (3º CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA):

Se *f* é uma função contínua no intervalo e se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ também converge.

EXEMPLOS:

1- Vejamos que o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ é convergente.

2- Vejamos que o integral $\int_1^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ é divergente.

IV. Polinómios de Taylor

Definição

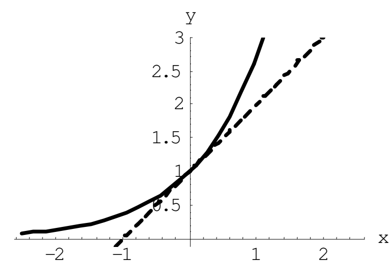
Sabemos já que, em muitos casos, a recta tangente ao gráfico de uma função num ponto é, numa vizinhança desse ponto, muito próxima do próprio gráfico.

Algebricamente, este facto está relacionado com o Teorema do Valor Médio, que pode ser reescrito do seguinte modo:

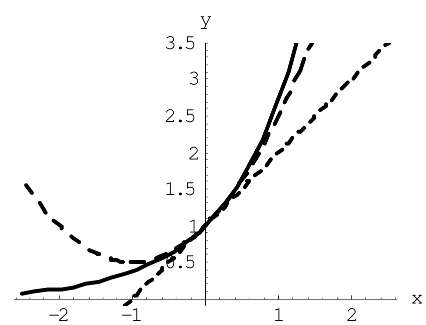
$$f(a+h) = f(a) + h f'(c)$$

para algum ponto c entre a e $a+h$ (com esta definição, a afirmação é válida para h positivo ou negativo).

EXEMPLO:



Consideremos a função $f(x) = e^x$ e o ponto $a = 0$. A recta tangente ao gráfico de f em $a = 0$ tem equação $y = x+1$; a figura ao lado mostra que, nesta escala, os dois gráficos estão praticamente sobrepostos na vizinhança de zero $]-0.2, 0.2[$, o que significa que o polinómio $p_1(x) = x+1$ é uma boa aproximação da exponencial; mas se considerarmos uma vizinhança mais alargada, já o mesmo não acontece.

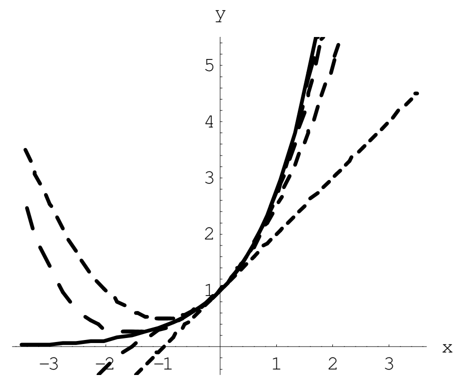


Podemos então perguntar se um polinómio de grau 2 poderia ser uma melhor aproximação, e que polinómio seria esse.

Reparemos que $f(0) = p_1(0)$ e $f'(0) = p_1{}'(0)$; se encontrarmos um polinómio p_2 que satisfaça ainda a condição $f''(0) = p_1{}''(0)$, talvez esse seja o que pretendemos; é fácil verificar que $p_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$ é efectivamente uma melhor aproximação.

Dado que a função f é infinitamente diferenciável, podemos tentar encontrar polinómios que aproximem cada vez melhor a função até qualquer grau. A figura ao lado mostra polinómios até ao grau 4 para a função exponencial (maior grau corresponde a maior tracejado).

A fórmula que nos permite obter estes polinómios chama-se fórmula de Taylor.



TEOREMA

Se *f* é uma função com derivadas contínuas até à ordem $n+1$ num intervalo aberto contendo o ponto a, então a fórmula de Taylor pode escrever-se como

$$f(x) = P_n(x;a) + R_n(x)$$

onde
$$P_n(x;a) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

é o <u>polinómio de Taylor de grau n para a função f no ponto a</u> e

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$ é o <u>resto</u>.

Podem colocar-se aqui duas questões fundamentais:

1- esta é a única forma de obter polinómios que aproximem qualquer função real de variável real?

2- qual o valor numérico do resto?

O controlo do resto é aqui fundamental, pois determina o grau de aproximação do polinómio; a resposta às perguntas é dada pelo seguinte

TEOREMA:

Se *f* é uma função com derivadas contínuas até à ordem $n+1$ num intervalo aberto contendo o ponto a, então o polinómio de Taylor $P_n(x;a)$ é o <u>único</u> polinómio de grau n tal

que
$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

onde
$$f(x) = P_n(x;a) + R_n(x)$$

A fórmula $\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ permite-nos controlar o grau de aproximação que o polinómio de Taylor fornece para a função f.

Operadores de Taylor

Neste parágrafo designaremos os polinómios de Taylor de uma função *f* por $P_n(f)(x;a)$ para evidenciar o facto de que o polinómio depende de *f*. A correspondência que a cada função f associa o seu polinómio de grau n é uma aplicação, e designa-se por <u>operador de Taylor</u> $P_n(f)$, para cada ponto fixo a.

As propriedades deste operador permitem-nos calcular certos polinómios de Taylor à custa de outros já conhecidos.

TEOREMA:

O operador de Taylor possui as seguintes propriedades:

1- *Linearidade*: Se a e b são constantes, então $P_n(a\,f + b\,g) = a\,P_n(f) + b\,P_n(g)$;

2- *Derivação*: $\left[\,P_n(f)\,\right]' = P_{n-1}(f')$;

3- *Integração*: Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $P_{n+1}\,g(x;a) = \int_a^x P_n f(t;a)\,dt$.

O teorema seguinte permite-nos comparar polinómios calculados em pontos diferentes:

TEOREMA:

Se $g(x) = f(k\,x)$, sendo k constante, então $P_n\,g(x;a) = P_n\,f(k\,x;k\,a)$.

EXEMPLOS:

1- Lembremos que a função $f(x) = e^{-x^2}$ não tem uma primitiva que possa ser expressa em termos de um número finito de funções simples; mas sendo uma função muito usada, nomeadamente em estatística, é necessário pelo menos ter valores muito aproximados da sua primitiva para certos valores da variável.

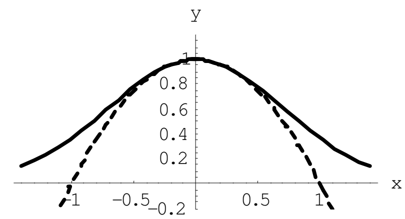
É fácil verificar que o polinómio de Taylor de $g(x) = e^x$ no ponto $a = 0$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Substituindo (de acordo com o segundo teorema), x por $-x^2$ na função e no polinómio, obtemos

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2\,n)!} + R_{2n}(x)$$

2- Vejamos como se calcula um valor aproximado do integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, usando um polinómio de Taylor de grau 3 da função $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$; vamos analisar ainda o tamanho do erro cometido.



Sendo $e^{-t^2}=1-t^2+R_2(t)$, vem

$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\int_0^x (1-t^2+R_2(x))\,dt=x-\dfrac{x^3}{3}+R_3(x)$, logo $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\approx\dfrac{2}{3}$.

A figura mostra os gráficos de e^{-x^2} e de $x-\dfrac{x^3}{3}$.

Como o polinómio é alternado, podemos dizer que $R_3(x)<\left|\dfrac{x^4}{4!}\right|=\dfrac{x^4}{24}$, logo o erro cometido é inferior a $\dfrac{1}{24}\approx 0.0417$.

EXERCÍCIOS:

1- Verifiquemos que os polinómios de Taylor das funções seno e cosseno no ponto zero dão:

$$\operatorname{sen}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+1}(x)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+R_{2n-2}(x)$$

2- Determinemos os polinómios de Taylor, no ponto zero, para as funções $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ e $\operatorname{arctg}(x)$.

3- Usando o polinómio da função exponencial, determinemos os polinómios das funções seno e cosseno hiperbólicos.

4- Use um polinómio de Taylor de grau dois para calcular valores aproximados das raízes da equação $e^x=1-x^2$. Use a calculadora para estimar o erro cometido.