Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2012/13 - Ficha nr.° 12 (última)

1. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u,

$$A \xrightarrow{u} \mathsf{T}\ A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A)$$

que satisfazem (para além das "grátis") as propriedades $\mu \cdot u = id = \mu \cdot (\mathsf{T}\ u)$ e $\mu \cdot \mu = \mu \cdot (\mathsf{T}\ \mu)$, com base nas quais se pode definir a *composição monádica* $f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{T}\ f \cdot g$. Demonstre as propriedades

$$\mu = id \bullet id \tag{1}$$
$$f \bullet u = f \quad \wedge \quad f = u \bullet f \tag{2}$$
$$f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h \tag{3}$$
$$\mathsf{T} f = (u \cdot f) \bullet id \tag{4}$$

2. O mais simples de todos os mónades é o da identidade, $\mathsf{T}\ \mathsf{X} = \mathsf{X}$, em que $\mu = u = id$. Mostre que se tem de imediato, neste mónade: $f \bullet g = f \cdot g$.

3. O tipo $\mathsf{T}\ A = 1 + A$ foi o primeiro exemplo de mónade apresentado nesta disciplina, em que $\mu = [i_1\ , id]$ e $u = i_2$. Mostre que μ e u satisfazem as duas propriedades que caracterizam um mónade, neste caso:

$$\mu \cdot u = \mu \cdot (id + u) = id \tag{5}$$
$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot (id + \mu) \tag{6}$$

4. No mónade das listas tem-se $\mu = \mathsf{concat} = (\![[id\ , conc]]\!)$ para $conc = \widehat{(+\!\!+)}$. Logo a composição monádica $f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{F}\ f \cdot g$ será, para o mónade das listas,

$$(f \bullet g)\ x = f'\ (g\ x)$$
$$\quad \mathbf{where}\ f' = \mathsf{concat} \cdot \mathsf{map}\ f$$

Com base na lei de absorção-cata, calcule a seguinte definição de f' com variáveis:

$$f'\ [\,] = [\,]$$
$$f'\ (h : t) = (f\ h) +\!\!+ f'\ t$$

5. O functor do tipo LTree forma um mónade cuja unidade u é o construtor Leaf e cuja multiplicação μ é a função

$$\mathsf{join} :: \mathsf{LTree}\ (\mathsf{LTree}\ a) \to \mathsf{LTree}\ a$$
$$\mathsf{join} = (\![[id\ , \mathsf{Fork}]]\!)$$

Recorra às leis de cálculo de catamorfismos que conhece para mostrar que join satisfaz as duas leis (**Multiplicação** e **Unidade** no formulário) que definem um mónade.

6. Assim como a composição de funções se pode definir, com variáveis, por

$$(f \cdot g)\ a = \mathbf{let}\ b = g\ a\ \mathbf{in}\ f\ b$$

existe uma notação ao mesmo nível para definir a composição monádica (a chamada "notação-**do**"):

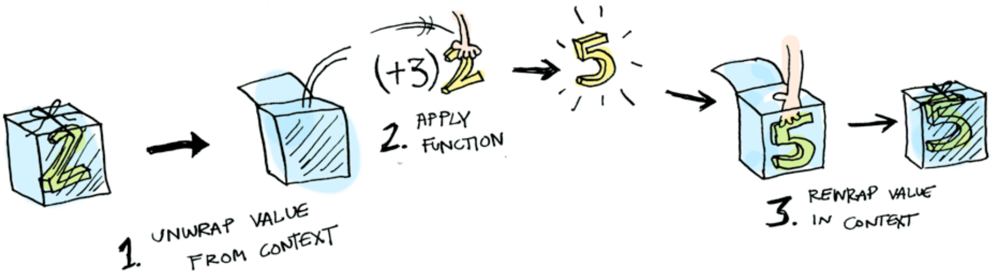
$$(f \bullet g)\ a = \mathbf{do}\ \{ b \leftarrow g\ a; f\ b \} \tag{7}$$

Nessa notação, que é muito vulgar em Haskell (ver a classe Monad), costuma usar-se return para a unidade u do mónade em causa.

Mostre, recorrendo a (4) e (7), que o functor $\mathsf{T}\ f$ se pode escrever

$$\mathsf{T}\ f\ x = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow x; \mathsf{return}\ (f\ a) \}$$

em notação-**do**, como o desenho



sugere[1] para o cálculo de $\mathsf{T}\ (+3)\ x$, onde $x = \mathsf{return}\ 2$ é o objecto monádico que contém o número 2 no mónade T.

7. Em Haskell, um mónade declara-se (ver a classe Monad) com base na operação $x \gg\!= f$ (conhecida como aplicação monádica, ou "binding" de f a x) que é tal que

$$x \gg\!= f = (f \bullet id)\ x \tag{8}$$

   (a) Mostre que $x \gg\!= f = (\mu \cdot \mathsf{T}\ f)\ x = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow x; f\ a \}$. Qual é o tipo de id na igualdade (8)? Faça um diagrama explicativo.

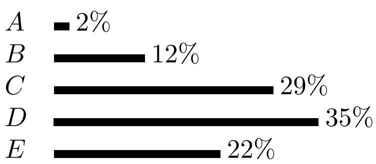
   (b) Com base na igualdade (8), mostre que $(x \gg\!= g) \gg\!= f$ é a mesma coisa que $(f \bullet g)\ x$.

8. No mónade das listas $\mathsf{T}\ f$ corresponde a $\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id)\ |\!)$, que também se pode definir por

$$\mathsf{map}\ f\ x = [\, f\ a \mid a \leftarrow x \,]$$

usando *listas por compreensão* (Haskell). Qual a relação que pode então estabelecer entre a notação-**do** e a de compreensão de listas?

9. **(Sugestão para trabalho em casa)** O conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo $\mathsf{Dist}\ A = [(A, \mathbb{R}_0)]$, sujeito à propriedade $\mathsf{sum} \cdot \mathsf{map}\ \pi_2 = \underline{1}$. em que cada par (a, p) indica que a probabilidade de a é p (a propriedade acima garante que todas as probabilidades somam 100%). Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



[1]Créditos: ver as ilustrações de http://adit.io/posts/2013-04-17-functors,_applicatives,_and_monads_in_pictures.html.

será representada pela lista de pares $[(A, 2\%), (B, 12\%), (C, 29\%), (D, 35\%), (E, 22\%)]$. É possível definir geradores de distribuições, por exemplo a distrinuição uniforme:

$$uniform\ s = [(a, \frac{1}{\mathsf{length}\ s}) \mid a \leftarrow s]$$

Pode mostrar-se que $\mathsf{Dist}\ A$ forma um **mónade** cuja unidade é $u\ a = [(a, 1)]$ e cuja multiplicação é dada por

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \to \mathsf{Dist}\ B$ e $f : B \to \mathsf{Dist}\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica. Está disponível, em Haskell [2], a biblioteca PFP ("Probabilistic Functional Programming") que implementa este mónade e pode ser usada para esse efeito.

Instale-a e faça testes como, por exemplo, o que se segue:

> *Problema: qual é a soma de faces mais provável quando lançamos dois dados num tabuleiro?*

Assumindo que os dados não estão viciados, cada um oferece uma distribuição uniforme das suas faces (1 a 6). Corra a expressão monádica

$$\mathbf{do}\ \{x \leftarrow uniform\ [1 \mathinner{..} 6]; y \leftarrow uniform\ [1 \mathinner{..} 6]; \mathsf{return}\ (x + y)\}$$

e obterá:

```
*Probability> do { x <- uniform [1..6] ;  y <- uniform [1..6] ; return(x+y) }
 7  16.7%
 6  13.9%
 8  13.9%
 5  11.1%
 9  11.1%
 4   8.3%
10   8.3%
 3   5.6%
11   5.6%
 2   2.8%
12   2.8%
```

A soma mais provável é 7.

[2]URL: `http://web.engr.oregonstate.edu/~erwig/pfp/`.