Transportes - redes gerais

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

24 de outubro de 2014

Transportes - redes gerais

antes

- O algoritmo de transportes em grafos bipartidos (todos os arcos ligam uma origem a um destino)

Guião

- Generalização do algoritmo de transportes a redes gerais: cada vértice pode funcionar como origem e destino, simultaneamente.
- Algoritmo de transportes em redes gerais com arcos com capacidade, porque ...

depois

- o software de optimização de redes (*e.g.*, relax4) aceita como *input* uma qualquer rede geral com capacidades nos arcos.

Conteúdo

Modelo do Problema de Transportes em Redes

- Cada vértice tem uma oferta ou procura, e há um único tipo de entidades:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{suj. a} \quad & -\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_j, \ \forall j \in V & (1) \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A & (2)
\end{aligned}
$$

- V : conjunto de vértices; A : conjunto de arcos;
- x_{ij}: fluxo no arco orientado (i,j);
- c_{ij}: custo unitário de transporte no arco orientado (i,j);
- u_{ij}: capacidade do arco orientado (i,j);
- b_j: oferta (valor positivo) ou procura (valor negativo) no vértice j.

- Restrições (1) designam-se por *restrições de conservação de fluxo.*
- Restrições (2) designam-se por *restrições de capacidade.*

Caracterização das soluções básicas

- O grafo associado às variáveis básicas é sempre uma *árvore* com $|V|-1$ arcos.

- Há variáveis não-básicas x_{ij}:
  - no limite inferior ($x_{ij} = 0$)
  - no limite superior ($x_{ij} = u_{ij}$)
- Quando se altera uma variável não-básica (uma no limite inferior ou uma no limite superior) forma-se um (e um só) ciclo com as variáveis básicas.

Método dos multiplicadores

Multiplicadores associados aos vértices:

- há um multiplicador u_j associado a cada vértice j, $\forall j \in V$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para os arcos (i,j) básicos, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j \quad (*)$$

2. Para os arcos (i,j) não-básicos, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j) \quad (*)$$

Output do método dos multiplicadores:

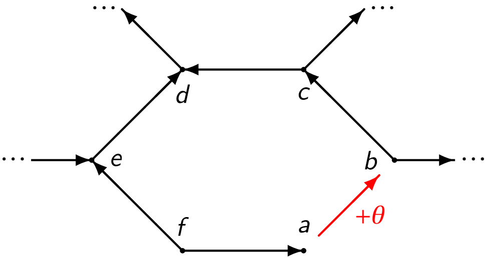
- os δ_{ij} de todos os arcos não-básicos.

(*) Estas são as fórmulas gerais. Poderíamos tê-las usado no algoritmo de grafos bipartidos (só não o fizemos, para ser semelhante ao apresentado em livros clássicos). É fácil de verificar que os valores finais dos δ_{ij} seriam os mesmos.

Pivô: *stepping stone* da variável não-básica x_{ab}

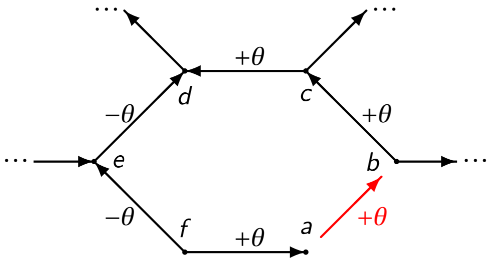
- Figura apresenta alguns arcos da árvore das variáveis básicas. Outros arcos foram omitidos.

- Arco (a, b) forma um ciclo com os arcos $(b, c), (c, d), (e, d), (f, e)$ e (f, a) (da árvore das variáveis básicas).



- Pivô:
  - Variável não-básica x_{ab} aumenta.
  - Outras variáveis não-básicas mantêm-se iguais a zero.
  - Variáveis básicas no ciclo alteram o seu valor (ver próximo *slide*).
  - Variáveis básicas fora do ciclo mantêm-se.

Stepping stone: variável não-básica x_{ab}

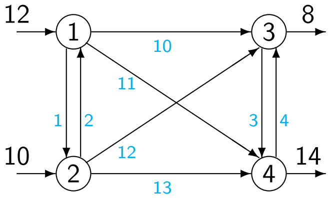


Pivô:

- A soma das variações de fluxo de entrada e de saída deve ser nula,
- ou seja, a soma dos fluxos que entram e saem em cada vértice permanece igual (ao valor de b_j do vértice).

- Quando a variável não-básica x_{ab} aumenta θ unidades,
- x_{bc} aumenta θ; x_{cd} aumenta θ;
- x_{ed} decrementa θ; x_{fe} decrementa θ;
- x_{fa} aumenta θ.

Transporte em Redes (ainda sem limites superiores)

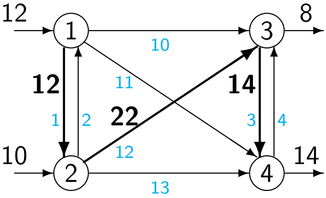


- valor associado ao arco: c_{ij} - custo unitário de transporte.
- valor associado ao vértice: b_j - oferta ou procura no vértice

Exemplo: uma solução inicial básica e admissível

Solução é básica (variáveis básicas formam uma árvore):

- variáveis básicas: $x_{12} = 12, x_{23} = 22, x_{34} = 14$.
- variável não-básicas: $x_{21} = x_{13} = x_{14} = x_{24} = x_{43} = 0$.

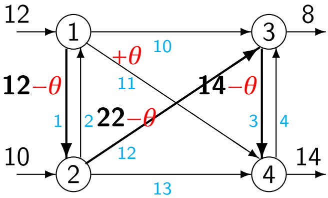


- Solução é admissível: todas as restrições de conservação de fluxo (1) são obedecidas.

- Custo da solução $= 12\ (1) + 22\ (12) + 14\ (3) = 318$

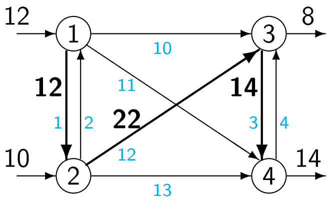
Stepping stone: variável não-básica x_{14}

- Arco (1,4) forma um ciclo com os arcos (1,2),(2,3) e (3,4) (das variáveis básicas).



- Quando a variável não-básica x_{14} aumenta θ unidades, **todas** as variáveis básicas x_{34}, x_{23} e x_{12} decrementam θ unidades, porque:
  1. quando x_{14} aumenta, x_{34} decrementa, para o fluxo que entra no vértice 4 permanecer igual.
  2. quando x_{34} decrementa, x_{23} decrementa, para a variação do fluxo no vértice 3 ser nula.
  3. quando x_{23} decrementa, x_{12} decrementa, para a variação do fluxo no vértice 2 ser nula.
  4. o decremento de x_{12} e o aumento de x_{14} mantêm o fluxo que sai do vértice 1 igual.

Teste de optimalidade: análise do ciclo da variável x_{14}



- Dadas as variações (aumento e decremento) de fluxo ao longo do ciclo $(1,2),(2,3),(3,4),(1,4)$, o valor de $\delta_{14} = 11 - 3 - 12 - 1 = -5$.
- Para as restantes variáveis não-básicas:

$$\delta_{13} = 10 - 12 - 1 = -3; \quad \delta_{14} = 11 - 3 - 12 - 1 = -5; \quad \delta_{21} = 2 + 1 = 3$$
$$\delta_{24} = 13 - 3 - 12 = -2; \quad \delta_{43} = 4 + 3 = 7;$$

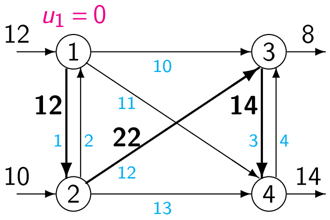
- A variável não-básica mais atractiva é x_{14}.

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



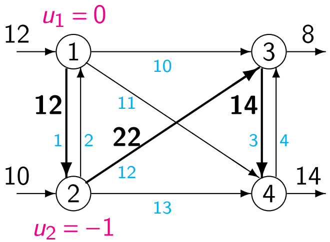
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2$
-
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



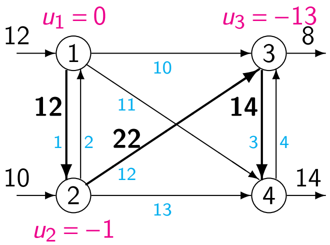
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2 \qquad \Rightarrow 1 = 0 - u_2 \qquad \Rightarrow u_2 = -1$
- $c_{23} = u_2 - u_3$
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



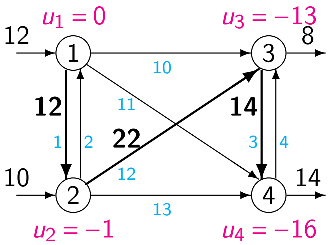
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2 \quad \Rightarrow 1 = 0 - u_2 \quad \Rightarrow u_2 = -1$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = -1 - u_3 \quad \Rightarrow u_3 = -13$
- $c_{34} = u_3 - u_4$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

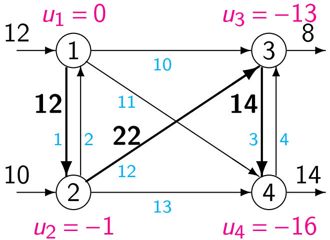


- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{12} = u_1 - u_2 \quad \Rightarrow 1 = 0 - u_2 \quad \Rightarrow u_2 = -1$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = -1 - u_3 \quad \Rightarrow u_3 = -13$
- $c_{34} = u_3 - u_4 \quad \Rightarrow 3 = -13 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -16$

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



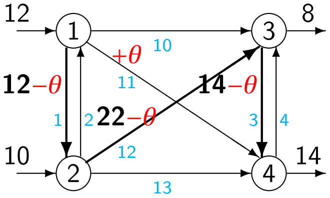
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{13} = 10 - (0 - (-13)) = -3; \quad \delta_{14} = 11 - (0 - (-16)) = -5;$$
$$\delta_{21} = 2 - (-1 - 0) = 3; \quad \delta_{24} = 13 - (-1 - (-16)) = -2;$$
$$\delta_{43} = 4 - (-16 - (-13)) = 7;$$

- x_{14} é a variável mais atractiva.

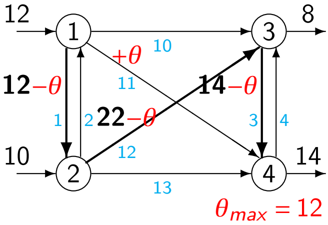
Valor máximo do aumento de x_{14}

- Arco (1,4) forma um ciclo com os arcos (1,2),(2,3) e (3,4) (das variáveis básicas).

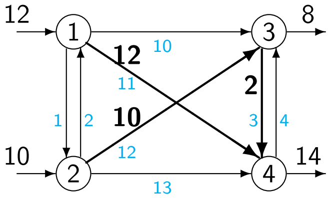


- Quando a variável não-básica x_{14} aumenta, as variáveis básicas x_{34}, x_{23} e x_{12} diminuem.
- Qual o aumento máximo de x_{14} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{14, 22, 12\} = 12$.

Pivô



- A variável x_{14} entra na base e x_{12} sai da base.



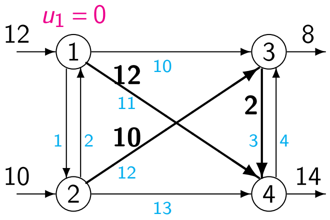
- Custo $= 12\ (11) + 10\ (12) + 2\ (3) = 258$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



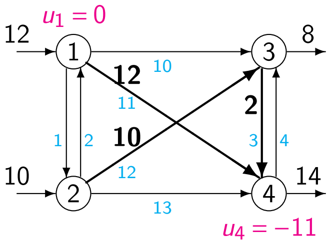
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4$
-
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



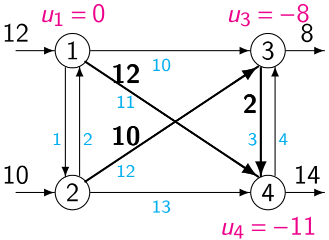
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4 \qquad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \qquad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{34} = u_3 - u_4$
-

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



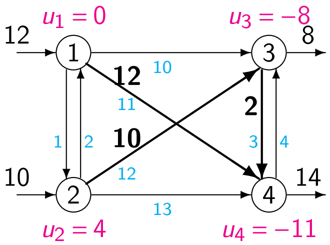
- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{34} = u_3 - u_4 \quad \Rightarrow 3 = u_3 - (-11) \quad \Rightarrow u_3 = -8$
- $c_{23} = u_2 - u_3$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

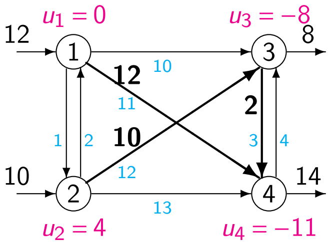


- fixar um multiplicador: $u_1 = 0$.
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{34} = u_3 - u_4 \quad \Rightarrow 3 = u_3 - (-11) \quad \Rightarrow u_3 = -8$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = u_2 - (-8) \quad \Rightarrow u_2 = 4$

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



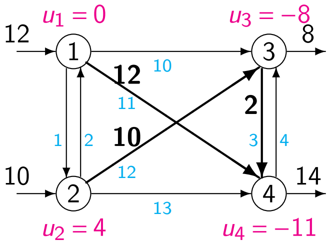
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{12} = 1 - (0 - 4) = 5; \qquad \delta_{13} = 10 - (0 - (-8)) = 2;$$
$$\delta_{21} = 2 - (4 - 0) = -2; \qquad \delta_{24} = 13 - (4 - (-11)) = -2;$$
$$\delta_{43} = 4 - (-11 - (-8)) = 7;$$

- x_{21} e x_{24} são as variáveis não-básicas mais atractivas.
- Desempate: x_{24} é seleccionada (escolha é arbitrária).

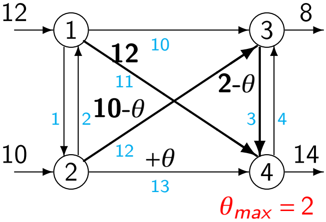
Valor máximo do aumento de x_{24}

- Arco (2,4) forma um ciclo com os arcos (2,3) e (3,4) (das variáveis básicas).

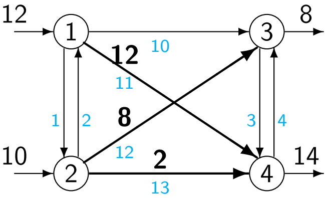


- Quando a variável não-básica x_{24} aumenta, as variáveis básicas x_{23} e x_{34} diminuem.
- Qual o aumento máximo de x_{24} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min = \{10, 2\} = 2$.

Pivô



- A variável x_{24} entra na base e x_{34} sai da base.



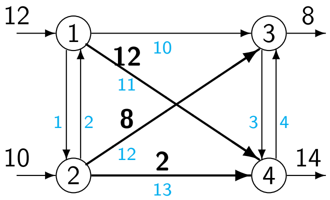
- Custo $= 12\ (11) + 8\ (12) + 2\ (13) = 254$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$



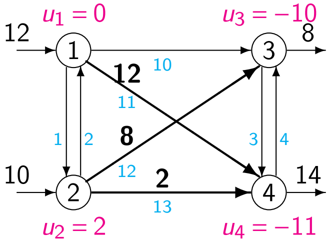
- $u_1 = 0.$
- $c_{14} = u_1 - u_4 \quad \Rightarrow 11 = 0 - u_4 \quad \Rightarrow u_4 = -11$
- $c_{24} = u_2 - u_4 \quad \Rightarrow 13 = u_2 - (-11) \quad \Rightarrow u_2 = 2$
- $c_{23} = u_2 - u_3 \quad \Rightarrow 12 = 2 - u_3 \quad \Rightarrow u_3 = -10$

Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{12} = 1 - (0 - 2) = 3; \qquad \delta_{13} = 10 - (0 - (-10)) = 0;$$
$$\delta_{21} = 2 - (2 - 0) = 0; \qquad \delta_{34} = 3 - (-10 - (-11)) = 2;$$
$$\delta_{43} = 4 - (-11 - (-10)) = 5;$$

- Solução é óptima. Há soluções óptimas alternativas. Porquê?

Transportes com transbordo

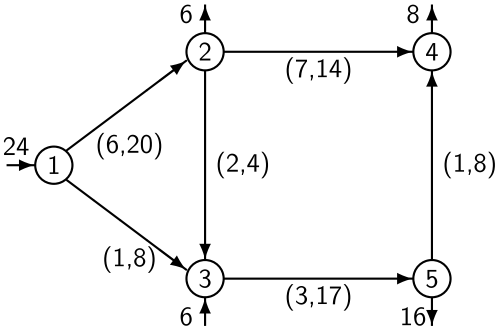
- O problema anteriormente apresentado é muitas vezes designado por problema com transbordo ou de transexpedição.

O que é o transbordo?

- Expedição de todas / algumas unidades produzidas numa origem para outra origem, tendo em vista o seu transporte para os destinos.
- No exemplo, também há transbordo de unidades nos destinos.

Rede com capacidades associadas aos arcos:

- valores associados aos arcos, (c_{ij}, u_{ij}), representam o custo unitário de transporte e a capacidade do arco, respectivamente,
- valores associados aos vértices representam ofertas e procuras.



- Problema balanceado (soma das ofertas = soma dos procuras)

Caracterização das soluções básicas

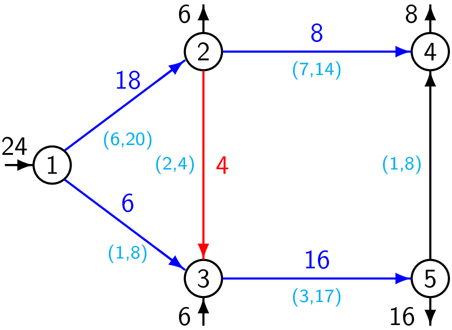
- O grafo associado às variáveis básicas é sempre uma *árvore*, *i.e.*, um grafo :
  - ligado,
  - sem ciclos, e
  - com $|V|-1$ arcos.

- As restantes variáveis x_{ij} são não-básicas:
  - no limite inferior ($x_{ij}=0$), ou
  - no limite superior ($x_{ij}=u_{ij}$)
- O arco de cada variável não-básica (seja uma no limite inferior ou uma no limite superior) forma um (e um só) ciclo com arcos (todos ou alguns) da árvore associada às variáveis básicas.

Exemplo: uma solução inicial básica e admissível

Solução é básica (variáveis básicas formam uma árvore):

- variáveis básicas: $x_{12} = 18, x_{24} = 8, x_{13} = 6, x_{35} = 16.$
- variável não-básica no limite inferior: $x_{54} = 0.$
- variável não-básica no limite superior: $x_{23} = 4.$



- Solução é admissível: todas as restrições de conservação de fluxo (1) e de capacidade (2) são obedecidas.

Teste de optimalidade

- A definição do δ_{ij} não varia: o δ_{ij} indica a variação de custo total quando a variável não-básica ij aumenta.

- Por isso, quando se considera uma variável não-básica ij no limite superior, e a operação a efectuar é **decrementar o valor do seu fluxo**, se o seu $\delta_{ij} > 0$, há uma redução do custo total.

Uma variável não-básica é atractiva quando:

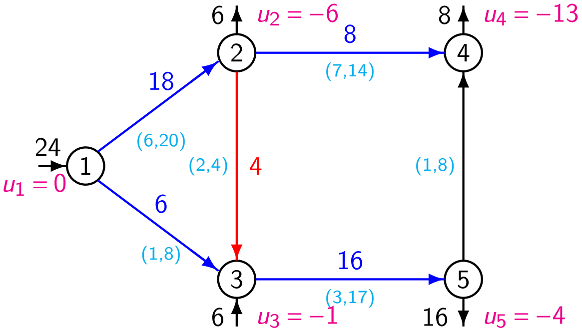
- $x_{ij} = 0$ (variável aumenta de valor) e $\delta_{ij} < 0$.
- $x_{ij} = u_{ij}$ (variável decrementa de valor) e $\delta_{ij} > 0$

Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

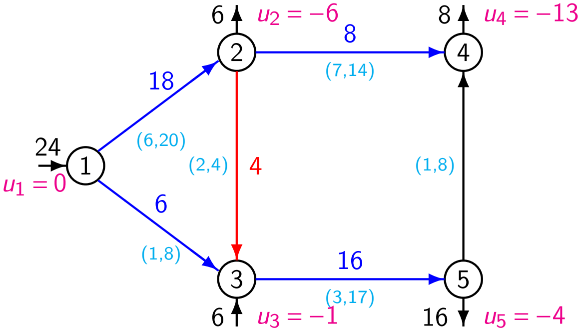
$$c_{ij} = u_i - u_j$$



Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:
$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



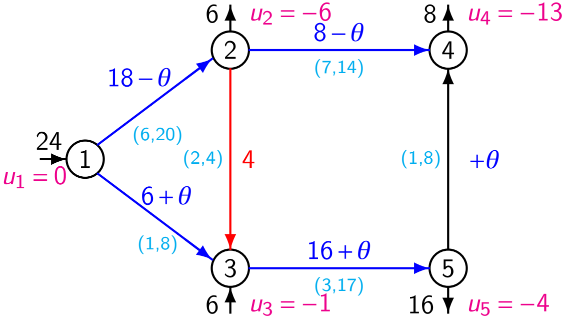
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{23} = 2 - (-6 - (-1)) = +7; \quad \delta_{54} = 1 - (-4 - (-13)) = -8;$$

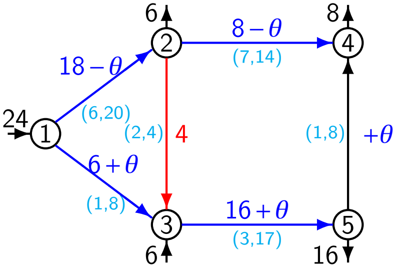
- Ambas são atractivas; x_{54} é a variável mais atractiva.

Valor máximo do aumento de x_{54}

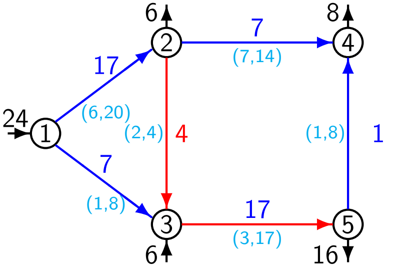
- Arco (5,4) forma um ciclo com os arcos (2,4),(1,2),(1,3) e (3,5) (das variáveis básicas).



- Quando a variável não-básica x_{54} aumenta, a variável básica x_{24} decrementa, a x_{12} decrementa, a x_{13} aumenta e a x_{35} aumenta.
- Qual o aumento máximo de x_{54} sem ela própria ultrapassar o limite superior, nem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa ou ultrapassar o limite superior?
- $\theta_{max} = \min\{8, 8, 18, 2, 1\} = 1.$



- A variável x_{54} entra na base e x_{35} sai da base, tornando-se não-básica no limite superior. Qual é nova árvore?

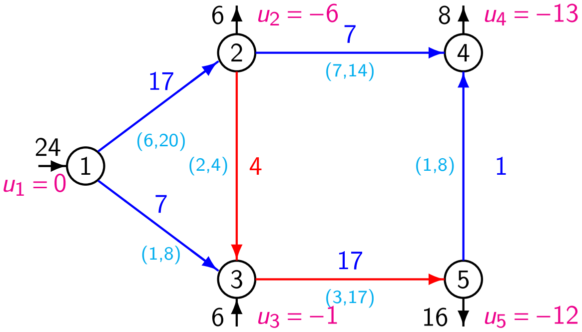


Exemplo: passos 0 e 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i - u_j$$

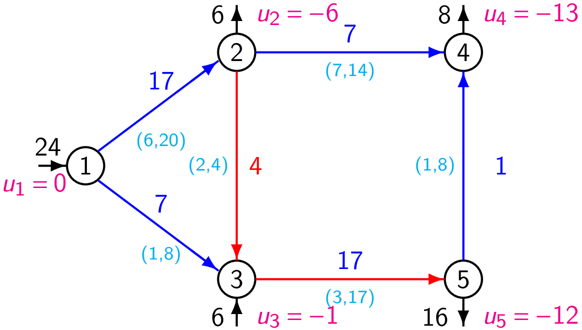


Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



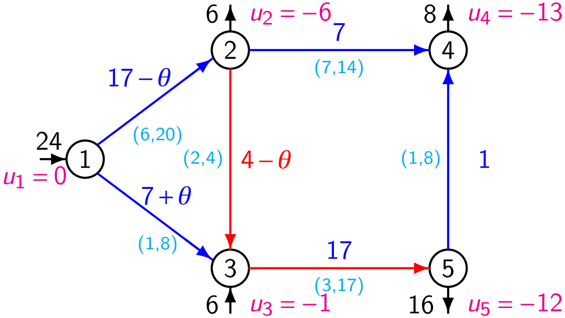
- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{23} = 2 - (-6 - (-1)) = +7; \quad \delta_{35} = 3 - (-1 - (-12)) = -8;$$

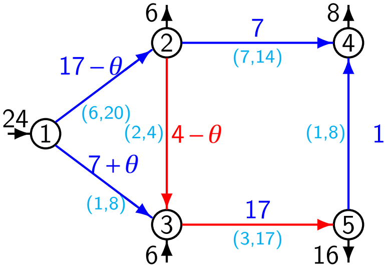
- Só a variável x_{23} é atractiva.

Valor máximo do decremento de x_{23}

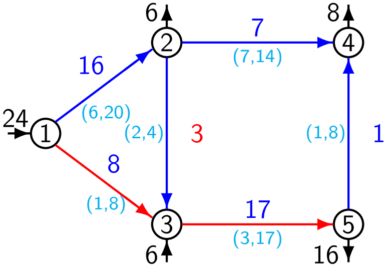
- Arco (2,3) forma um ciclo com os arcos (1,2) e (1,3) (das variáveis básicas).



- Quando a variável não-básica no limite superior x_{23} decrementa, a variável básica x_{13} aumenta e a x_{12} decrementa.
- Qual o decremento máximo de x_{23} sem ela própria se tornar negativa, nem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa ou ultrapassar o limite superior?
- $\theta_{max} = \min\{4, 17, 1\} = 1$.



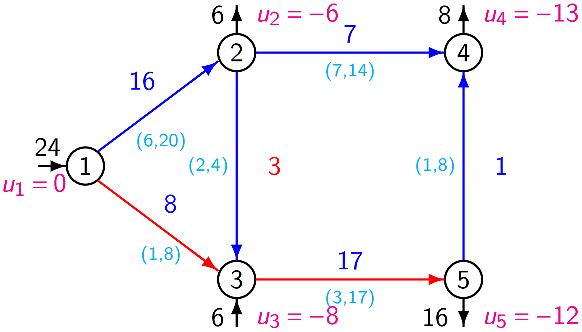
- A variável x_{23} entra na base e x_{13} sai da base, tornando-se não-básica no limite superior. Qual é nova árvore?



Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas, fazer:

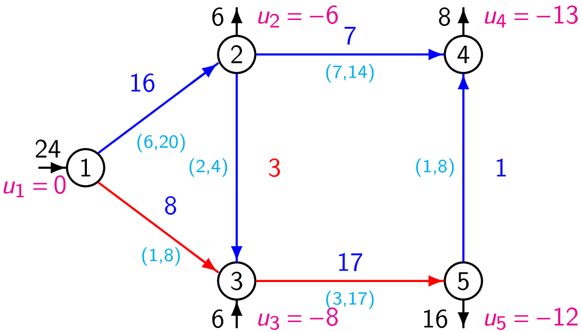
$$c_{ij} = u_i - u_j$$



Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:
$$\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i - u_j)$$



- atractividade das variáveis não-básicas:

$$\delta_{13} = 1 - (0 - (-8)) = -7; \quad \delta_{35} = 3 - (-8 - (-12)) = -1;$$

- Nenhuma variável é atractiva. Solução é óptima.

Construção da solução inicial

- Ao atribuir valores aos fluxos, para construir a solução inicial, devemos respeitar os limites superiores dos arcos, sempre que possível, para obter uma solução válida.
- Se não for possível respeitar o limite superior de um (ou mais) arcos, num segundo passo, devemos tentar obter uma solução válida, alterando o fluxo ao longo de ciclos.
- Se tal não for possível, o problema é impossível.

Transformações

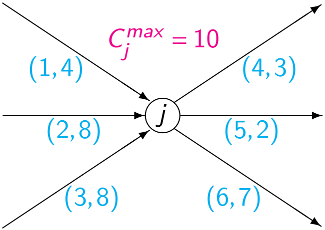
Podemos determinar a solução óptima de uma instância com:

- um vértice com capacidade, ou
- um arco com um limite inferior,

- criando uma nova instância, definida numa rede $G = (V, A)$ apenas com arcos com limites superiores.
- A nova rede é definida por uma lista de arcos $(i, j, c_{ij}, u_{ij}), \forall (i, j) \in A$, sendo:
  - i : origem do arco
  - j : destino do arco
  - c_{ij} : custo unitário de transporte no arco, e
  - u_{ij} : limite superior de fluxo no arco.
- Este é o formato normalmente usado em *software* de optimização de redes (*e.g.*, *relax4*).

- As transformações apresentadas de seguida são aplicadas sucessivamente a cada caso acima descrito.

Como transformar uma instância com capacidade num vértice numa instância apenas com capacidade nos arcos?

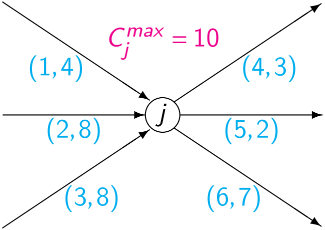


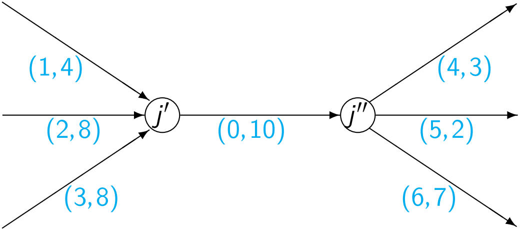
- valores associados aos arcos: (c_{ij}, u_{ij}), sendo:
- c_{ij} : custo unitário de transporte.
- u_{ij} : limite superior de fluxo no arco.

- C_j^{max} : fluxo máximo no vértice j :

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{(j,k)\in A} x_{jk} \leq C_j^{max}.$$

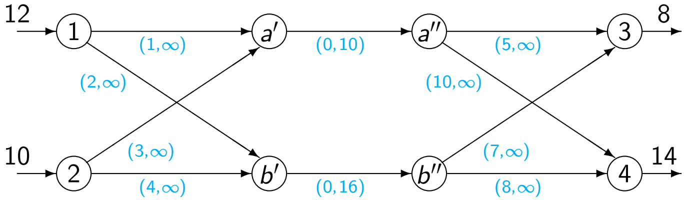
Transformação de uma instância com capacidade num vértice numa instância apenas com capacidade nos arcos





Exemplo: Transportes com Armazéns Intermédios

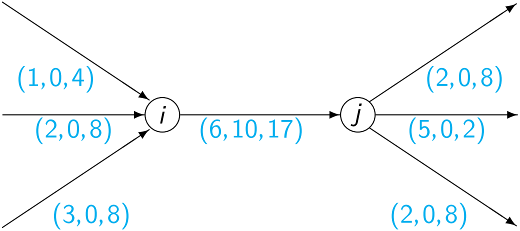
- Existem armazéns a e b entre as origens e os destinos com capacidades de 10 e de 16, respectivamente.
- Cada vértice representando um armazém é desdobrado num vértice de entrada e num vértice de saída, e é criado um arco com a capacidade do armazém.



- O fluxo pelo armazém é limitado pela sua capacidade.
- O custo do novo arco tipicamente é nulo; no entanto, pode ser igual ao custo unitário de armazenagem.

Como transformar uma instância com um limite inferior num arco numa instância apenas com limites superiores?

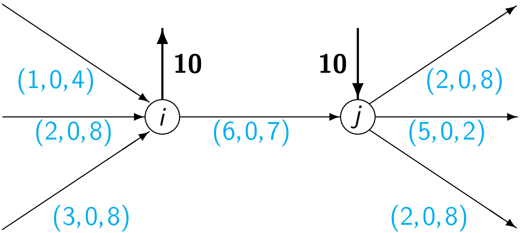
- Deve haver um fluxo mínimo no arco $(i,j) : x_{ij} \geq l_{ij}$



- Valores associados aos arcos: (c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}), sendo:

- c_{ij} : custo unitário de transporte.
- l_{ij} : limite inferior de fluxo no arco.
- u_{ij} : limite superior de fluxo no arco.

Transformação de uma instância com um limite inferior num arco numa instância apenas com limites superiores



- Os valores da oferta (ou procura) nos vértices i e j devem ser reajustados: a procura do vértice i é aumentada de l_{ij} unidades e a oferta do vértice j é aumentada de l_{ij} unidades.
- Esta transformação é equivalente a efectuar uma mudança de variável $x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$ no modelo de programação linear apresentado.

Após calcular a solução óptima do problema transformado,

- os valores finais do fluxo no arco devem ser recalculados, bem como os custos.

Conclusão

- O algoritmo de transporte em redes com capacidades é uma especialização do algoritmo simplex com limites superiores (que não foi apresentado).
- A sua implementação usando estruturas de dados adequadas permite resolver instâncias de muito grande dimensão em tempo razoável.
- Há uma regra (que não iremos ver) para evitar que situações de degenerescência (duas ou mais variáveis atingem simultaneamente os seus limites inferior ou superior) originem que o algoritmo entre em ciclo.

Resultados de aprendizagem

- Saber caracterizar a estrutura das soluções básicas de um problema de transporte em rede
  - identificar o número correcto de variáveis básicas
  - construir uma solução básica com o número correcto de variáveis básicas, e saber identificar as variáveis não-básicas no limite inferior e no limite superior
- Resolver problemas de transporte em redes.
  - saber usar o método dos multiplicadores para identificar a variável a entrar na base;
  - saber identificar a variável a sair da base, e se ele se torna não-básica no limite inferior ou no limite superior;
  - utilizar o método do *stepping-stone* para mudar para uma base adjacente;
  - reconhecer quando uma solução é óptima;
  - reconhecer quando há soluções óptimas alternativas.

Fim