maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

LEI
Álgebra Linear

Folha 2 - Sistemas de Equações Lineares

1. Considere o seguinte sistema de quatro equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x4 = 0 \\ x1 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $(-1, 1, 0, 0)$ é solução do sistema,

b) $(-1, 1, 0, 0)$ é a única solução do sistema,

c) $(-3, 2, 1, 0)$ é solução do sistema,

d) o sistema admite um conjunto infinito de soluções.

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

(a) Escreva a equação matricial do sistema.

(b) Resolva o sistema anterior.

3. Utilizando o método de eliminação Gaussiana resolva os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -x + 4y - z = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 8 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y + 2z + t = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x - 2y - z - 2t = 1 \\ -2x - y - 2z = 1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 2z + t = 1 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$

4. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a característica da A.

(b) Qual a característica da matriz A^T?

(c) Qual a característica da matriz $B = 2A$?

5. Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \lambda & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda & 8 \end{pmatrix}, \text{com} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostre que, se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 2$ então a característica de A é 4.

Qual a característica de A se $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$?

7. Classifique e resolva o seguinte sistema ($\beta \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + z = 2 \\ x - y + 2z = \beta \end{cases}$$

8. Verifique que o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 6y + 3z = 4 \\ 3x + 8y + 2z = 10 \end{cases}$$

não tem solução.

9. Determine os valores do parâmetro real α para o qual o seguinte sistema tem solução.

$$\begin{cases} x - 3y - z - 10t = \alpha \\ x + y + z = 5 \\ 2x - 4t = 4 \\ x + y + t = 4 \end{cases}$$

10. Discuta em função dos parâmetros reais os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2, \\ 4x + y + (\alpha^2 - 1)z = \alpha + 1 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) $\begin{cases} x - y + 2z = b \\ 2x + az = 2, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ $a, b \in \mathbb{R}$

11. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & \alpha \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Prove que a equação matricial $AX = B$ tem solução.

12. Para $t, k \in \mathbb{R}$, sejam $A = \begin{pmatrix} k & t & 1 \\ 1 & kt & 1 \\ 1 & t & k \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determine, justificando, os valores de t e k para os quais o sistema $A_{k,t}X = B$ é:

   i. possível e determinado,

   ii. impossível.

(b) Resolva os sistemas $A_{0,2}X = B_2$ e $A_{1,1}X = B_1$.

13. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 cuja matriz ampliada é:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & | & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 3 & | & -1 \end{array} \right).$$

(a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = 0$.

(b) Verifique que $(\frac{3}{2}, 0, -1, 1)$ é solução do sistema dado.

14. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Resolva o sistema $AX = 0$ e verifique se $(-1, 3/2, -1/2, -1/2)$ é solução de $AX = B$.

(b) Determine o conjunto solução de $AX = B$.

15. Considere um sistema cuja matriz ampliada tem a forma

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 \\ -1 & 1 & \beta & | & 0 \end{array} \right).$$

(a) Diga, justificando, se o sistema pode ser impossível.

(b) Indique os valores de β para os quais o sistema tem uma infinidade de soluções.

16. Construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a três incógnitas que seja:

(a) possível e determinado,

(b) possível e indeterminado,

(c) impossível.

17. Calcule a inversa das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

18. Considere as matrizes do exercício anterior, e determine, se possível:

(a) a inversa da matriz $A.B$,

(b) a inversa da matriz $A - B$,

(c) a inversa da matriz D^T,

(d) a inversa da matriz C.

19. Se A e B são matrizes quadradas, sendo A invertível, prove que

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$