Universidade do Minho
Dep. de Matemática

# Cálculo II
Prova Escrita 2

**Eng. Informática**
19/06/2009
[1h 30min]

---

Nome

Número

**Justifique as respostas.**

Exercício 1. Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq x^2\}$.

*a)* [5 valores] Faça um esboço da região $R$.

*b)* [5 valores] Monte um integral duplo que represente a área de $R$.

*c)* [10 valores] Troque a ordem de integração ao integral duplo que representa a área de $R$ e que registou na alínea anterior.

*d)* [5 valores] Calcule a área de $R$.

Exercício 2. As regiões planares $T$ e $L$ são definidas respectivamente por:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1 \ \wedge \ 0 < y < 3\right\};$$
$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 0 \ \wedge \ -3 < y < -2\right\}.$$

Indique, sem calcular, o sinal de cada um dos seguintes integrais:

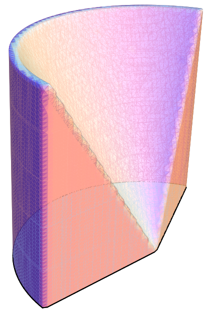
*a)* [5 valores] $\displaystyle\iint_T -e^{x^2}\, d(x,y);$ *b)* [5 valores] $\displaystyle\iint_L \frac{1}{x+y^2}\, d(x,y).$

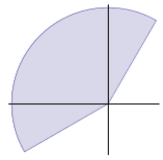
Exercício 3. [10 valores] Calcule o integral triplo $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} x(y+z)\, dz\, dy\, dx.$

**Exercício 4.** [15 valores] Usando um sistema de coordenadas conveniente, calcule o volume da região $R \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq 4 \;\wedge\; y \geq \frac{\sqrt{3}}{3} x \;\wedge\; y \geq \sqrt{3}\, x \;\wedge\; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

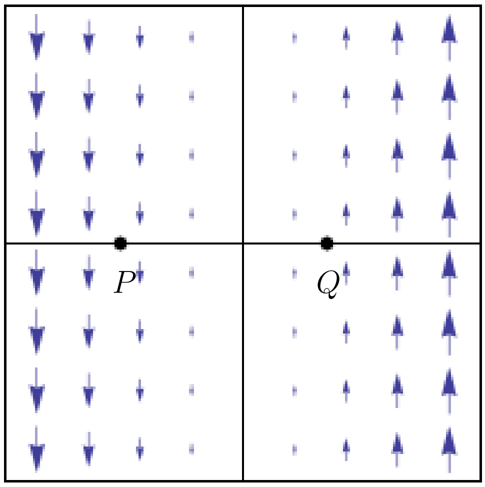
Obs. Nas figuras anexas encontram-se representadas a região $R$ e a sua projecção no plano $z = 0$.





| | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| sen | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

Exercício 5. A figura apresentada representa o campo vectorial definido por $\boldsymbol{F}(x, y) = (0, x)$ com os pontos $P$ e $Q$ assinalados.




*a)* [10 valores] Verifique se $\boldsymbol{F}$ é um campo de gradientes.

*b)* Defina trajectórias $C_1$, $C_2$ e $C_3$ de $P$ para $Q$ tais que:

$b_1$) [5 valores] $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$;

$b_2$) [5 valores] $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} > 0$;

$b_3$) [5 valores] $\displaystyle\int_{C_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} < 0$.

Exercício 6. [15 valores] Considere o campo vectorial definido por $\boldsymbol{F}(x, y) = \big(e^y, -\text{sen}(\pi x)\big)$ e $C$ o segmento de recta que liga o ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, 0)$. Calcule $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.