



Folha 2 - Limite de uma função

Exercício 1 Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Esboce o gráfico da função f .
b) Da observação do gráfico o que pode concluir quanto aos limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)?$$

Exercício 2 Considere a função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Esboce o gráfico da função f e calcule

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercício 3 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x < 1 \\ x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- a) Esboce o gráfico da função f .
b) Diga se existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Exercício 4 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 3 \\ 7 & \text{se } x = 3 \\ 2x + 3 & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

Diga se existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Exercício 5 Em cada uma das seguintes alíneas, esboce um gráfico possível para uma função $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique as condições indicadas:

- a) $D = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
e f sobrejetiva;
b) $D =] - 1, 4[$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$
e f não sobrejetiva;
c) $D = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
e f sobrejetiva;
d) $D = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$,
 f crescente em $] - \infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.

Exercício 6 Calcule, se existirem, os seguintes limites (recorde que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{7}{x+1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x+5|}{x+5}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\sin x|}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3 x}{x^3}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+2}{2x^3-1}$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{2x+7}$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+10}{x^4-2x+4}$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x-x}$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3}$;
- 27) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x^2-4}$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$;
- 31) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cos x)$;
- 32) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(2x) + x^2 \cos(5x))$;
- 33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x}$;
- 34) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}}$;
- 35) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}}$;
- 36) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}}$;
- 37) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^4}$.

Exercício 7 Considere a função u tal que

$$3 - x^2 \leq u(x) \leq 3 + x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determine $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$.

Exercício 8 Mostre que se $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.