Exercícios teórico-práticos

1 Otimização não linear sem restrições

1.1 Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ calcule os seus pontos estacionários e classifique-os.

1.2 Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula

$$P(t) = e^{0.4t - 0.01t^2}$$

onde $P(t)$ representa a percentagem de pessoas doentes e t é o tempo em dias.

Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com $t_1 = 30$ dias. Considere ainda $\delta = 2$, $M = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$ (duas iterações). Use 4 casas decimais nos cálculos.

1.3 Uma empresa precisa de usar x_1 horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e x_2 horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 4 u.m. para colocar no mercado um certo número fixo de produtos. As horas utilizadas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 2500.$$

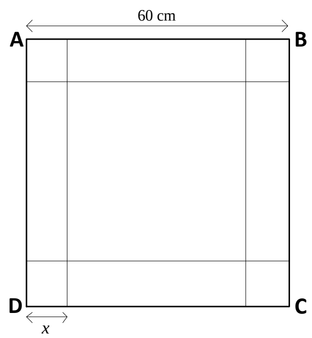
Calcule x_1 e x_2 de modo a minimizar os custos da empresa.

a) Comece por formular esta situação como um problema de otimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de x_1).

b) Resolva o problema resultante usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com a aproximação inicial $x_1 = 50$. Use $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.1$.

Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para as duas variáveis e o custo mínimo.

1.4 $[ABCD]$ representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm. Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado x, como mostra a figura.

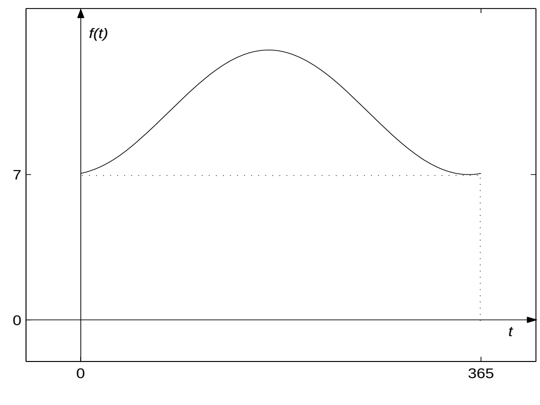


Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule x. Use duas casas decimais nos cálculos e inicie o processo iterativo com $x_1 = 5$. Considere ainda $\delta = 1$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$ (duas iterações).

1.5 A função

$$f(t) = 10 + 3\ \sin(\frac{2\pi}{365}(t - 80))$$

dá o número de horas com luz do dia numa certa região do país.



O dia 1 de Janeiro corresponde a $t = 0$. Determine o dia do ano (t) em que o número de horas com luz do dia é máximo, usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Use 2 casas decimais nos cálculos, $\pi = 3.14$ e inicie o processo iterativo com $t_1 = 200$. Considere ainda $\delta = 10$, $M = 0.1$ e $\varepsilon = 2$ (duas iterações). Use radianos nos cálculos.

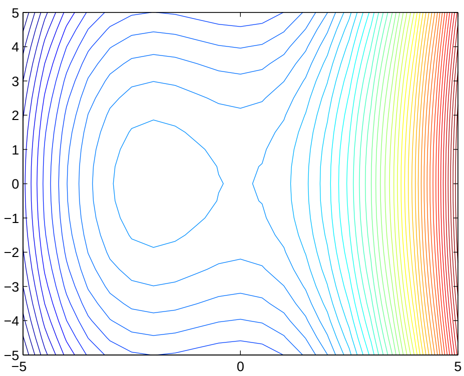
1.6 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1 x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos sela.

1.7 Considere a função

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$$



Mostre que a função dada tem um máximo local em $(-2, 0)$, tem um ponto sela em $(0, 0)$; e não tem mínimos.

1.8 Dada a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

1.9 Mostre que qualquer ponto da linha $x_2 - 2x_1 = 0$ é um mínimo de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = 4{x_1}^2 - 4x_1x_2 + x_2^2.$$

1.10 Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

1.11 A soma de três números (x_1, x_2 e x_3) positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

1.12 Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \qquad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 25 - 0.0015x_2.$$

a) Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

b) Resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

1.13 Três estações elétricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 0.1 + 0.25x \\
f_2 &= 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 \\
f_3 &= 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3
\end{aligned}
$$

em que x, y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de x, y e z que minimizam o custo total, se a energia a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.05$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$. Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $x = 100 - y - z$.

1.14 Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z. O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direção a uma assímtota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1 + z^2)$$

que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho.

Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto $(2, 1)$. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

1.15 Suponha que pretendia representar um número A positivo na forma de um produto de quatro fatores positivos x_1, x_2, x_3 e x_4. Para $A = 2401$, determine esses fatores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de otimização sem restrições em função das 3 variáveis x_1, x_2 e x_3.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses fatores. Na paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

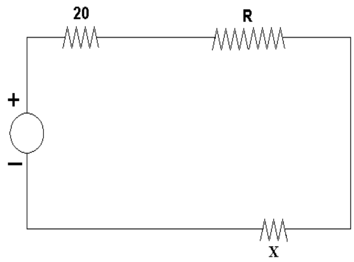
1.16 O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema elétrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que x_1 e x_2 designam, respectivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton baseado na fórmula DFP, considerando na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.0001$. Tome a seguinte aproximação inicial $(0, 0)$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

1.17 Considere um circuito elétrico em que existem duas resistências variáveis, R e X. O valor médio da energia do circuito é dado por

$$P = \frac{10^4 R}{(R+20)^2 + X^2}.$$



Determine os valores de R e X para os quais se obtém uma energia de saída máxima. Use o método quasi-Newton (fórmula DFP) e os valores iniciais $(R, X)^{(1)} = (10, 5)$. Considere $\mu = 0.001$ e $\varepsilon = 0.5$.

1.18 Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação P com duas componentes P_1 e P_2. Pretende-se determinar os deslocamentos x_1 e x_2 das molas que minimizam a energia potencial total EP, definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1\left(\sqrt{x_1^2 + (l_1 - x_2)^2} - l_1\right)^2 + \frac{1}{2}K_2\left(\sqrt{x_1^2 + (l_2 + x_2)^2} - l_2\right)^2 - P_1x_1 - P_2x_2.$$

Sabendo que as caraterísticas do sistema são: $l_1 = 10$, $l_2 = 10$, $K_1 = 8$, $K_2 = 1$, $P_1 = 5$ e $P_2 = 5$, resolva o problema através do método de Nelder-Mead com $\varepsilon = 0.5$ (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais: $(5, 2)$, $(3.25, 2.5)$ e $(0, 0)$.

1.19 Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max\left((x_1-1)^2, x_1^2 + 4(x_2-1)^2\right)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

1.20 Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max\left(|x_1|, |x_2 - 1|\right)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

1.21 Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$ ou $n_{\max} = 4$.

Soluções

1.1 $x^* = 1$ é maximizante; $x = 3$ é minimizante.

1.2 2 iterações; $P_{\max} = 51.5982\%$; $t_{\max} = 20$ dias.

1.3 a) min $6x_1 + 4\frac{2500-x_1^2}{x_1}$.

b) 3 iterações; $x_1 \approx 70.7107$; $x_2 \approx -35.3554$; custo mínimo≈ 282.8427.

1.4 2 iterações; $x_{\max} \approx 10.00$; $v_{\max} \approx 16000$.

1.5 2 iterações; $t_{\max} \approx 171.74$; $f_{\max} \approx 13.00$.

1.6 $x^* = (0, 0)$ é ponto sela.

1.7 $x^* = (-2, 0)$ é maximizante; $x = (0, 0)^*$ é ponto sela.

1.8 $x^* = (7.5, -12.5, 2)$ é minimizante.

1.9 Os pontos da linha são minimizantes ou pontos sela.

1.10 2 iterações; $x_{\max} \approx \begin{pmatrix} -1.3305 \\ -0.6667 \end{pmatrix}$; $f_{\max} = 0.5275$.

1.11 a) min $x_1^2 + x_2^2 + (40 - x_1 - x_2)^2$.

b) 1 iteração; $x_1 = 13.3333$; $x_2 = 13.3333$; $x_3 = 13.3333$; $f_{\min} = 533.3333$.

1.12 a) min $0.001x_1^2 + 0.0015x_2^2 - 10x_1 - 18x_2 + 4000$.

b) 1 iteração; $x_{\max} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix}$; $f_{\max} = 75000$.

c) Sim, o lucro é positivo.

1.13 a) min $25.23 - 0.13y + 0.00125y^2 - 0.16z + 0.001z^2 + 0.0001z^3$.

b) 2 iterações; $(x, y, z)_{\min} \approx \begin{pmatrix} 26.8794 \\ 52 \\ 21.1206 \end{pmatrix}$; $f_{\min} \approx 19.8589$.

1.14 2 iterações; $x_{\max} \approx \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix}$; $\pi_{\max} \approx 0.6003$.

1.15 3 iterações; $x_1 \approx 7.0417$; $x_2 \approx 7.4110$; $x_3 \approx 6.7836$; $x_4 \approx 6.7823$; soma máxima ≈ 28.0186.

1.16 $x_{\max} \approx \begin{pmatrix} 7.0001 \\ 9.0002 \end{pmatrix}$; $\mathcal{L} \approx 187$.

1.17 3 iterações; $R_{\max} \approx 19.0402$; $X_{\max} \approx 1.1263$; $P_{\max} \approx 124.8206$.

1.18 2 iterações; $x_{\min} \approx \begin{pmatrix} 8.25 \\ 4.5 \end{pmatrix}$; $f_{\min} \approx -41.3920$

1.19 4 iterações; $x_{\min} \approx \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $f_{\min} \approx 0.25$

1.20 4 iterações; $x_{\min} \approx \begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix}$; $f_{\min} \approx 0.1875$

1.21 4 iterações; $x_{\min} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $f_{\min} \approx 0$