Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

2014/2015

Licenciatura em Engenharia Informática

Folha 7

Exercício 7.1 Considere o cilindro vertical cuja base é o quadrado $[0,1]\times[0,1]$ e o topo é definido pelo paraboloide de equação $z = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$. Aproxime o volume do sólido referido considerando uma partição formada por quadrados cujos lados medem $\frac{1}{4}$.

Exercício 7.2 Seja $\mathcal{R}$ o retângulo $[0,1]\times[1,2]$. Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (x^3+y^2)\ d(x,y)$;

b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} ye^{xy}\ dA$;

c) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (xy)^2\cos x^3\ d(x,y)$;

d) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \ln\left((x+1)y\right)\ dA$.

Exercício 7.3 Calcule os seguintes integrais, esboçando as regiões de integração:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx$;

b) $\displaystyle\int_1^2\int_{2x}^{3x+1} dy\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{e^y} (x+y)\ dx\,dy$;

d) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\ dy\,dx$.

Exercício 7.4 Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\ d(x,y)$, usando as duas possíveis ordens de integração, quando f e $\mathcal{D}$ são:

a) $f(x,y)=xy,\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$;

b) $f(x,y)=x\ \operatorname{sen}(x+y),\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \pi,\ 0\le x\le 1\}$;

c) $f(x,y)=e^{x+y},\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$;

d) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \operatorname{sen} x,\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\}$.

Exercício 7.5 Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração em cada um dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2} f(x,y)\ dy\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{4-x^2} f(x,y)\ dy\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} f(x,y)\ dx\,dy$;

d) $\displaystyle\int_{-3}^2\int_{-4+y^2}^{2-y} f(x,y)\ dx\,dy$;

e) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-4+y^2}^{2-y} f(x,y)\ dx\,dy$;

f) $\displaystyle\int_1^{e^2}\int_{\ln x}^{x} f(x,y)\ dy\,dx$;

g) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{-|y|+2} f(x,y)\ dx\,dy$;

h) $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dx\,dy$;

i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dy\,dx + \int_1^2\int_0^{-x+2} f(x,y)\ dy\,dx$;

j) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_0^{y+2} f(x,y)\ dx\,dy + \int_0^2\int_0^{-y+2} f(x,y)\ dx\,dy$.

Exercício 7.6 Representa graficamente o conjunto $\mathcal{D}$ e calcule, recorrendo a integrais duplos, a sua área:

a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq x^2\}$;

b) $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 \leq x \leq y^2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercício 7.7 Determine a área limitada pelas curvas definidas por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ e $y = 0$.

Exercício 7.8 Usando integrais duplos obtenha as expressões das áreas da circunferência de raio r e da elipse de semieixos a e b.

Exercício 7.9 Calcule o volume dos sólidos limitados

a) pelos planos definidos por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$ e pela superfície definida por $z = x^2 + y^4$;

b) pela superfície definida por $z = \operatorname{sen} y$ e pelos planos definidos por $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $z = 0$;

c) pelo parabolóide definido por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano definido por $z = 0$.

Exercício 7.10 Seja $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1\}$.

a) Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x + y)\ d(x, y)$.

b) Calcule o integral da alínea anterior, fazendo a mudança de variáveis $x = u + v$, $y = u - v$.

Exercício 7.11 Calcule os seguintes integrais, usando uma mudança de variáveis adequada:

a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\ d(x, y)$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x - y \leq 0,\ -1 \leq x + y \leq 0\}$;

b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x - y)\ d(x, y)$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq 3 - x,\ 2x - 2 \leq y \leq 2x\}$.

Exercício 7.12 Calcule os seguintes integrais, usando coordenadas polares.

a) $\displaystyle\int_0^{2R} \int_0^{\sqrt{2Rx - x^2}} (x^2 + y^2)\ dy\, dx$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$.

Exercício 7.13 Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2}\ d(x, y),$$

sendo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Exercício 7.14 Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} xy^3\ d(x, y),$$

sendo $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Exercício 7.15 Calcule, usando coordenadas polares, o volume dos sólidos limitados por:

a) $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$;

b) $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.