Cálculo I
Licenciatura em Engenharia Informática

Época Especial
2011 / 2012

1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : |x-2| \leq \pi\} \cup \,]2+\pi, 6[$

C.A. $|x-2| \leq \pi$

$-\pi \leq x-2 \leq \pi$

$2-\pi \leq x \leq 2+\pi$

$\text{aderência}(A) = [2-\pi, 6]$

$\text{interior}(A) = \,]2+\pi, 6[$

2. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{(\pi/2 - x)^2}{\cos^2 x}$ indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$

Usando a regra de L'Hôpital temos

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{(\pi/2 - x)^2}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cancel{2}(\pi/2 - x)}{-\cancel{2}\,\mathrm{sen}\,x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{-1}{\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x} = \frac{-1}{-1} = 1$$

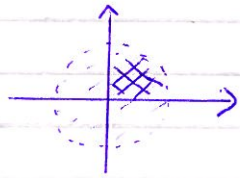
3. $f : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2\,\mathrm{sen}^2 x + 3\cos^2 x$

Observe:

$$f(x) = 2(\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 2 + \cos^2 x$$

a. $f'(x) = -2\cos x\,\mathrm{sen}\,x$

Para $x \in [0, \pi/2]$ ou seja x no 1º quadrante temos



$\cos x \geq 0$ e $\mathrm{sen}\,x \geq 0$

logo $f'(x) \leq 0$

Como f' não muda de sinal (e $f'(x) = 0$ apenas em $x = 0$ e $x = \pi/2$, ie, nos extremos do intervalo) podemos concluir que f é estritamente decrescente

b. Como f é estritamente decrescente (e está definida num intervalo fechado e limitado) o seu maximizante é $x=0$ e o seu minimizante é $x=\pi/2$.

Logo $\max f = f(0) = 2+1=3$

$\min f = f(\pi/2) = 2+0=2$

c. Como $\underset{\min f}{\underset{\shortparallel}{2}} < \frac{15}{7} < \underset{\max f}{\underset{\shortparallel}{3}}$, o teorema de Bolzano-Cauchy (note que f é contínua) garante que existe $c \in]0,\pi/2[$ tal que $f(c) = 15/7$. O facto de f ser estritamente decrescente garante que c é único.

d. Procuramos $x \in [0,\pi/2]$ tal que $f'(x) = -1$.

$f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$

$-2\cos x \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = \pi/2$

$\Leftrightarrow x \in \pi/4$.

4

$$\int \frac{4x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx = \int 4x\,(x^2+1)^{-3/2}\,dx = 2\int 2x\,(x^2+1)^{-3/2}\,dx$$

$$= 2\,\frac{(x^2+1)^{-3/2+1}}{-3/2+1} + c = 2\,\frac{(x^2+1)^{-1/2}}{-1/2} + c = \frac{-4}{\sqrt{x^2+1}} + c,\ c\in\mathbb{R}$$

5

$$\int_1^e \underset{f'}{x^3}\,\underset{g}{\ln x}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{x^4}{4}\,\frac{1}{x}\,dx =$$

Integração por partes

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right)_{x=1}^{x=e} =$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$$

6

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx \qquad x = \ln t$$

$x = \ln t \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt$

$e^x = t$

$$\int \frac{t}{t^2+4}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(t/2\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Como $t = e^x$ temos então

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

7.

$$\int \frac{-2}{x(x-1)^2}\,dx = -2\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx.$$

Método da primitivação de funções racionais

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$x=0$	$1 = A$	$A=1$
$x=1$	$1 = C$	$C=1$
$x=2$	$1 = A+2B+2C$	$B=-1$

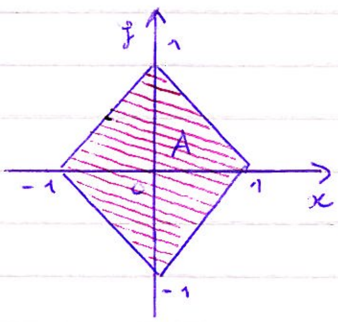
$$\int \frac{-2}{x(x-1)^2}\,dx = -2\int \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= -2\left(\ln|x| - \ln|x-1| + 2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

$$= -2\left(\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}\right) + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

8.

$$y = |x|-1 = \begin{cases} -x-1, & x<0 \\ x-1, & x\geq 0 \end{cases} \qquad y = 1-|x| = \begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 1-x, & x\geq 0 \end{cases}$$



Primeira resolução

A região do plano dada é um quadrado de lado $\sqrt{2}$ (pelo teorema de Pitágoras) logo

$$\text{área}(A) = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Segunda resolução

A região A é a união de quatro triângulos rectângulos de base 1 e altura 1, logo, $\text{área}(A) = 4 \times \left(\frac{1\times 1}{2}\right) = 2.$

Terceira resolução (usando integrais)

$$\text{área}(A) = \int_{-1}^{0} (1+x) - (-x-1)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x) - (x-1)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 2+2x\,dx + \int_{0}^{1} 2-2x\,dx =$$

$$= 2x+x^2 \Big|_{x=-1}^{x=0} + 2x-x^2 \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= -(-2+1) + 2-1 = 2.$$