



Exercício 1.1 Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

a) $x^2 < y^2$;

c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ ($x, y \neq 0$);

b) $x^3 < y^3$;

d) $\frac{1}{x^3} > \frac{1}{y^3}$ ($x, y \neq 0$).

Exercício 1.2 Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$;

l) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$;

m) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x - 2|\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$;

n) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\right\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$;

o) $\{x \in \mathbb{R} : |x| |x + 3| = 4\}$;

e) $\left\{x \in \mathbb{R} : \left|5 - \frac{1}{x}\right| < 1\right\}$;

p) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| + |x - 2| < 10\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$;

q) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \leq 1\}$;

r) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x + 1} = 2x\}$;

s) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$;

i) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$;

t) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\right\}$;

j) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$;

u) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2|x|\}$;

k) $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| \leq 1\}$;

v) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| > |x - 3|\}$.

Exercício 1.3 Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

- a) $[-\sqrt{5}, 3] \cap \mathbb{Q}$;
- b) $[0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 11\}$;
- d) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 5| < 3\}$;
- e) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 25/16\}$;
- f) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 0 \wedge |x^2 - 1| < x + 5\}$;
- g) $\{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 < 1\}$;
- h) $\{2 + 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$.

Exercício 1.4 Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + |x|$ e considere os conjuntos

$$A = f([-4, 1[) \quad \text{e} \quad B = f(]-\infty, -2]) .$$

- a) Especifique os conjuntos A e B e determine os correspondentes conjuntos de majorantes e de minorantes.
- b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos considerados.

Exercício 1.5 Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 7 \implies |x| > 7$;
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : |1 + 4x| < 1 \implies x \geq -\frac{1}{2}$;
- c) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \implies x \geq 1$;
- d) $\forall x \in \mathbb{R} : |x - 5| \leq 2 \implies 3 < x < 7$.

Exercício 1.6 Indique, justificando, o que está errado no texto seguinte.

Sejam a e b números reais tais que $a = b$. Então

$$\begin{aligned} a^2 = ab &\implies a^2 - b^2 = ab - b^2 \\ &\implies (a - b)(a + b) = b(a - b) \\ &\implies a + b = b \\ &\implies 2b = b \\ &\implies 2 = 1 . \end{aligned}$$

Exercício 1.7 Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contra-exemplo para as relações que forem falsas.

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}; \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}; \quad (x+y)^n = x^n + y^n; \quad (xy)^n = x^n y^n.$$