Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise
2.º Teste

Lic.: **Eng. Informática**
12/junho/2014
[2h]

Proposta Resolução

Nome Completo e em Letras Maiúsculas

Número

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

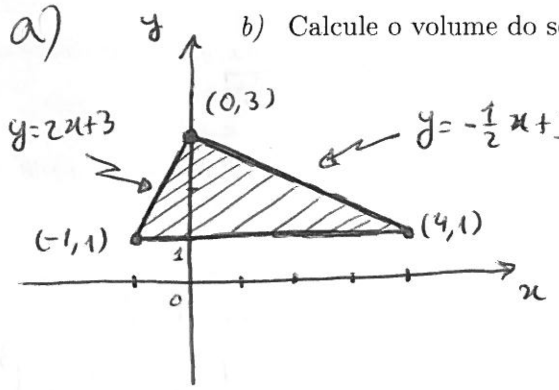
Exercício 1. [2+2 valores] Sejam A, B e C pontos, no plano XOY de coordenadas $(-1,1)$, $(0,3)$ e $(4,1)$, respetivamente. Considere a região triangular $[ABC]$.

a) Construa um **único** integral duplo que represente a área do triângulo.

Obs: Atente na escolha apropriada da ordem de integração.

b) Calcule o volume do sólido de base triangular $[ABC]$ e "altura" definida por $f(x,y) = 8y^2$.

a)



$$\text{Área} = \int_1^3 \int_{\frac{y-3}{2}}^{-2y+6} 1 \, dx \, dy$$

$$y = 2x+3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = -2y+6$$

b)

$$\int_1^3 \int_{\frac{y-3}{2}}^{-2y+6} 8y^2 \, dx \, dy = \int_1^3 \left[8y^2 x \right]_{x=\frac{y-3}{2}}^{x=-2y+6} dy = \int_1^3 8y^2(-2y+6) - 8y^2 \cdot \frac{y-3}{2} \, dy$$

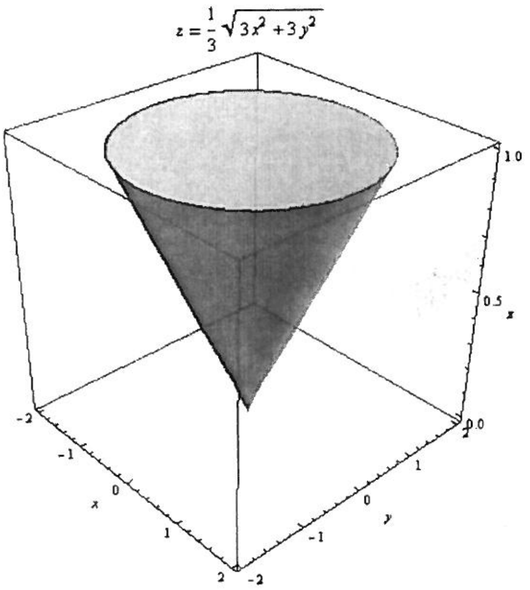
$$= \int_1^3 -16y^3 + 48y^2 - 4y^3 + 12y^2 \, dy = \int_1^3 -20y^3 + 60y^2 \, dy = \left[-5y^4 + 20y^3 \right]_1^3$$

$$= -5 \times 3^4 + 20 \times 3^3 + 5 - 20 = 120$$

Exercício 2. [1.5+1.5 valores] Seja $\mathcal{L}$ uma região limitada no plano XOY tal que $\mathcal{L} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

Nestas condições, cada um dos integrais duplos $\int\int_{\mathcal{L}} y^3 dA$ e $\int\int_{\mathcal{L}} (x-y^2) dA$ é positivo, negativo ou não é possível saber-se?

Exercício 3. [1.5+1.5+1.5 valores] Considere S um sólido cónico representado na figura. Complete, concordantemente, os limites de integração para cada um integrais triplos definidos em S:



a) $\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{1} f(r,\theta,z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$

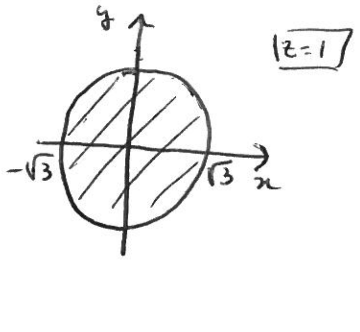
b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{\frac{\sqrt{3x^2+3y^2}}{3}}^{1} h(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$

c) $\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{0}^{\frac{1}{\cos\phi}} g(\rho,\phi,\theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$

$\boxed{2}$ Como não é conhecido o sinal das ordenadas dos pontos de $\mathcal{L}$, conclui-se que não é possível saber o sinal da função integranda, y^3, e consequentemente não se pode concluir o sinal de $\iint_{\mathcal{L}} y^3 dA$.

Como em $\mathcal{L}$, $x<0$, conclui-se que $x-y^2<0, \forall (x,y) \in \mathcal{L}$, donde $\iint_{\mathcal{L}} (x-y^2)\, dA < 0$.

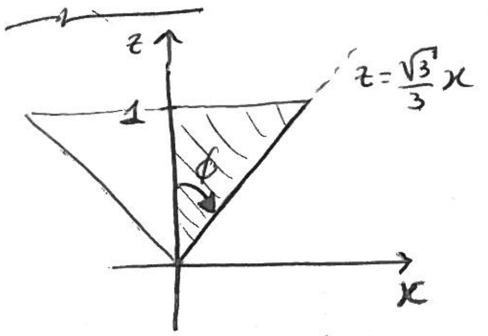
$\boxed{3}$ Em $z=1$, tem-se $9 = 3x^2+3y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=3$



$z = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+3y^2} \longrightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3} r$

$x^2+y^2=3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3-x^2}$

$z=1 \longrightarrow \rho\cos\phi = 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\cos\phi}$



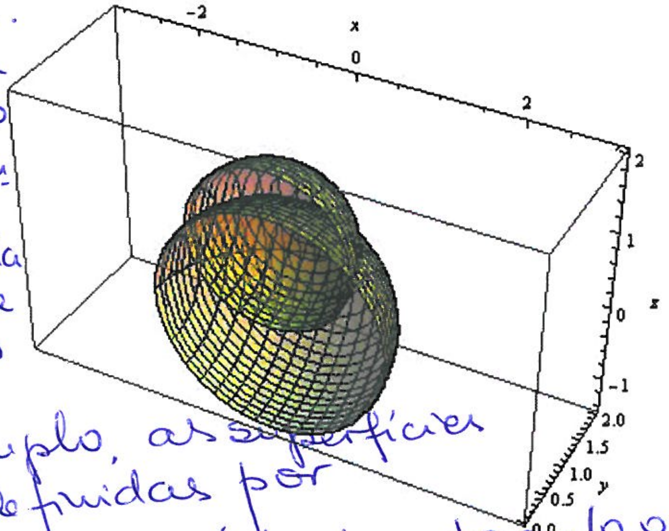
$\phi = \pi/2 - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$

Exercício 4. [2+2 valores] Duas esferas, de raios iguais a 1 e $\sqrt{2}$, respetivamente, têm centros que distam, entre si, de 1 unidade.

a) Construa um integral triplo (ou uma soma de integrais triplos), incluindo os respetivos limites de integração, que permita calcular o volume da região sólida comum às duas esferas.

b) Usando um sistema de coordenadas apropriado, calcule o volume do sólido definido na alínea anterior.

Obs: Atente-se na figura. A região comum às 2 esferas terá sempre o mesmo volume, independentemente da definição que se entenda fazer para cada uma dessas esferas (de raios 1 e $\sqrt{2}$ e com centros afastados de 1).

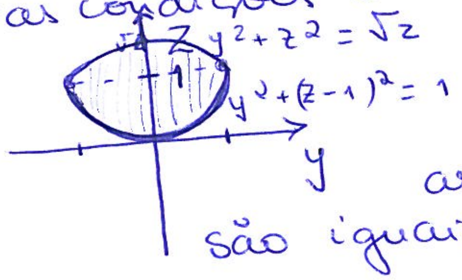


Sejam pois, por exemplo, as superfícies esféricas $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_{\sqrt{2}}$ definidas por

$\mathcal{E}_1: \ x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ (isto é, centro em $(0,0,1)$ e raio 1)

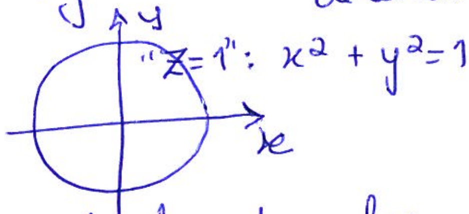
$\mathcal{E}_2: \ x^2+y^2+z^2 = 2$ (isto é, centro em $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{2}$)

Nestas condições o traço em yOz será representado por



, secção correspondente à região comum.

Além disso, na cota 1 (para $z=1$) as secções das superfícies esféricas são iguais e definidas por $x^2+y^2=1$ (curva de nível)



a) Assim, em coordenadas retangulares, o volume do sólido pretendido será:

$$V_{\ominus} = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 1 \, dz\, dy\, dx$$

b) Em coordenadas esféricas será, por exemplo:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\phi\right]_{\rho=0}^{\sqrt{2}} d\phi\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\phi\right]_{\rho=0}^{2\cos\phi} d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\pi/4} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left[-\cos^4\phi\right]_{\phi=\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right) +$$

$$+ \pi/3$$

C.A. $x^2+y^2+(z-1)^2=1$
$\Leftrightarrow \rho=0 \vee \underline{\underline{\rho = 2\cos\phi}}$

Exercício 5. [3+1.5 valores] Uma partícula desloca-se sobre uma hélice, $\mathcal{H}$, definida pela parametrização $\vec{r}(t) = \cos t\vec{e_1} + \sin t\vec{e_2} + 2t\vec{e_3}$, com $t \in [0, 3\pi]$.

Sabendo que essa partícula está sujeita a um campo vetorial definido por $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{e_1} + z\vec{e_2} - xy\vec{e_3}$,

a) calcule o integral de linha $\int_{\mathcal{H}} \vec{F}.d\vec{r}$

b) verifique se $\vec{F}$ é um campo conservativo e, no caso afirmativo, encontre uma função potencial.

a) $$\int_{\mathcal{H}} \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{3\pi} \underbrace{(\cos t, 2t, -\cos t \operatorname{sen} t)}_{\vec{F}(\vec{r}(t))} \circ \underbrace{(-\operatorname{sen} t, \cos t, 2)}_{\vec{r}\,'(t)} dt =$$

$$= \int_0^{3\pi} -\cos t \operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\cos t \operatorname{sen} t \, dt = \int_0^{3\pi} -3\cos t \operatorname{sen} t + 2t\cos t \, dt =$$

- $\int -3\cos t \operatorname{sen} t \, dt = \frac{3}{2} \cdot \cos^2 t$

- $\int 2t\cos t \, dt = 2t \operatorname{sen} t - \int 2\operatorname{sen} t =$

$u = 2t \quad u' = 2$
$v = \operatorname{sen} t \quad v' = \cos t$
$= 2t\operatorname{sen} t + 2\cos t$

$$= \left[\frac{3}{2}\cos^2 t + 2t\operatorname{sen} t + 2\cos t\right]_0^{3\pi} =$$

$$= +\frac{3}{2} + 0 - 2 - \frac{3}{2} - 0 - 2 = -4$$

---

b) $$\vec{F}\,'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz jacobiana não é simétrica, logo $\vec{F}$ não é um campo conservativo. Consequentemente não existe função potencial de $\vec{F}$.

Recorde que: $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ $\quad (u.v)' = u'.v + u.v'$
$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$ $\quad (\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$