UNIVERSIDADE DO MINHO		2006/07/21
	MATEMÁTICA DISCRETA II Correcção do Exame da Época de Recurso	
CURSO: Engenharia de Sistemas e Informática		Duração: 2h

1. Considere o conjunto X de fórmulas do Cálculo Proposicional definido indutivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{p_0 \vee \neg p_0 \in X}\ 1 \qquad \frac{\varphi \in X}{(\neg\varphi \to \varphi) \in X}\ 2 \qquad \frac{\varphi \in X \quad \psi \in X}{\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \in X}\ 3$$

(a) Seja $\varphi_0 = \neg(\neg(p_0 \vee \neg p_0) \wedge p_0)$.

i. Diga, justificando, se $\varphi_0 \in X$.

A fórmula φ_0 não admite qualquer árvore de formação, logo não é um elemento de X. De facto, a única forma de obtermos uma árvore de formação para φ_0 seria através da aplicação da regra 3 como última regra e, para além disso, seria também necessário encontrar árvores de formação para $\neg(p_0 \vee \neg p_0)$ e para p_0. Ora, tendo em conta as regras que definem X, verifica-se não ser possível encontrar uma árvore de formação para p_0. Logo $\varphi_0 \notin X$.

ii. Dê exemplo de uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ_0. Justifique.

Com base nas regras de equivalência lógica verifica-se que

$$\neg(\neg(p_0 \vee \neg p_0) \wedge p_0) \Leftrightarrow \neg\neg(p_0 \vee \neg p_0) \vee \neg p_0 \Leftrightarrow (p_0 \vee \neg p_0) \vee \neg p_0$$

onde $(p_0 \vee \neg p_0) \vee p_0$ é uma forma normal disjuntiva pois trata-se de uma fórmula do tipo $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_n} l_{ij}$ onde cada l_{ij} é um literal (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$, $l_{11} = p_0$, $l_{21} = \neg p_0$ e $l_{31} = \neg p_0$).

(b) Seja v uma valoração qualquer. Mostre que, para todo o $\varphi \in X$, $v(\varphi) = 1$.

Sejam $\varphi \in X$ e $P(\varphi)$ a propriedade "$v(\varphi) = 1$".
A prova de que $P(\varphi)$ é válida para todo $\varphi \in X$ é feita recorrendo ao Teorema de Indução Estrutural para o conjunto X.

1) $P(p_0 \vee \neg p_0)$:
Uma vez que $v(p_0 \vee \neg p_0) = maximo(v(p_0), 1 - v(p_0))$, então $v(p_0 \vee \neg p_0) = 1$ (quer se tenha $v(p_0) = 1$ ou $v(p_0) = 0$). Logo $P(p_0 \vee \neg p_0)$.

2) Para todo $\psi \in X$, $P(\psi) \Rightarrow P(\neg\psi \to \psi)$:
Seja $\psi \in X$. Como Hipótese de Indução suponha-se $P(\psi)$. Pretendemos mostrar $P(\neg\psi \to \psi)$.
Por definição de valor lógico sabemos que, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, $v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 0$ se e só se $v(\varphi_1) = 1$ e $v(\varphi_2)$=0. Logo, como por Hipótese de Indução temos $v(\psi) = 1$, é imediato que $v(\neg\psi \to \psi) = 1$.
Assim, para todo $\psi \in X$, $P(\psi) \Rightarrow P(\neg\psi \to \psi)$.

3) Para todo $\psi_1, \psi_2 \in X$, $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \Rightarrow P(\neg(\neg\psi_1 \wedge \psi_2))$:
Sejam $\psi_1, \psi_2 \in X$. Suponha-se, como Hipótese de Indução, $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$. Pretendemos mostrar $P(\neg(\neg\psi_1 \wedge \psi_2))$.
Por definição de valor lógico tem-se

$$v(\neg(\neg\psi_1 \wedge \psi_2)) = 1 - v(\neg\psi_1 \wedge \psi_2) = 1 - minimo(v(\neg\psi_1), v(\psi_2)) = 1 - minimo(1 - v(\psi_1), v(\psi_2))$$

e da Hipótese de Indução resulta que

$$1 - minimo(1 - v(\psi_1), v(\psi_2)) = 1 - minimo(1 - 1, 1) = 1 - 0 = 1.$$

Logo, para todo $\psi_1, \psi_2 \in X$, $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \Rightarrow P(\neg(\neg\psi_1 \wedge \psi_2))$.

Então de 1), 2) e 3) concluímos pelo Teorema de Indução Estrutural para o conjunto X que, para todo $\varphi \in X$, $v(\varphi) = 1$.

(c) Diga, justificando, se para qualquer conjunto de fórmulas Γ que seja consistente e para qualquer $\Delta \subseteq X$, $\Gamma \cup \Delta$ é ainda consistente.

Se Γ é consistente e $\Delta \subseteq X$, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente. De facto, se Γ é consistente, então existe uma valoração v_1 tal que $v_1(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Gamma$. Por outro lado, da alínea anterior sabe-se que, para todo $\varphi \in X$, $v_1(\varphi) = 1$; em particular, como $\Delta \subseteq X$ temos que, para todo $\varphi \in \Delta$, $v_1(\varphi) = 1$.
Sendo assim, para todo $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, $v_1(\varphi) = 1$. Logo, como existe uma valoração (neste caso a valoração v_1) que satisfaz $\Delta \subseteq X$, concluímos que este conjunto é consistente.

2. Considere as seguintes afirmações:

- A_1: Se a arma do crime é um revólver, então: o Sherlock Holmes desvenda o crime ou o mordomo é culpado.
- A_2: Não é verdade que: a arma do crime é um revolver ou o mordomo não é culpado.
- A_3: O mordomo não é culpado se e somente se: o Sherlock Holmes desvenda o crime e a arma do crime não é um revólver.

(a) Considerando que p_1, p_2 e p_3 representam, respectivamente, "A arma do crime é um revólver", "O Sherlock Holmes desvenda o crime" e "O mordomo é culpado", represente as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional.

Sendo φ_1, φ_2 e φ_3 as fórmulas do Cálculo Proposicional que representam as afirmações A_1, A_2 e A_3, respectivamente, temos

$$\varphi_1 = p_1 \to (p_2 \vee p_3)\,;$$
$$\varphi_2 = \neg(p_1 \vee \neg p_3)\ ;$$
$$\varphi_3 = \neg p_3 \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_1)\,.$$

(b) Diga, justificando, se é suficiente que a terceira afirmação seja verdadeira para que a primeira também o seja.

Consideremos a tabela de verdade de φ_1, φ_2 e φ_3.

p_1	p_2	p_3	φ_1	φ_2	φ_3
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Por observação da tabela, concluímos que, sendo v uma valoração, sempre que $v(\varphi_3) = 1$ então $v(\varphi_1) = 1$. Logo, é suficiente que a terceira afirmação seja verdadeira para que a primeira também o seja.

(c) Admitindo que todas as afirmações são verdadeiras, podemos concluir que o Sherlock Holmes desvenda o crime? Justifique.

Observando a tabela de verdade da alínea anterior, verifica-se que as únicas valorações v para as quais $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = v(\varphi_3) = 1$ são aquelas em que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ e $v(p_3) = 1$. Assim, não podemos concluir que o Sherlock Holmes desvenda o crime mas sim que o Sherlock Holmes não desvenda o crime.

3. (a) Construa uma derivação em DNP de $(p_0 \vee \neg p_1) \to p_2$ a partir de $\{p_1, p_0 \to p_2\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \vee \neg p_1}^{(1)} \qquad \dfrac{\cancel{p_0}^{(2)} \quad p_0 \to p_2}{p_2}\to E \qquad \dfrac{\dfrac{p_1 \quad \cancel{\neg p_1}^{(2)}}{\perp}\neg E}{p_2}\perp}{p_2}\vee E^{(2)}}{(p_0 \vee \neg p_1) \to p_2}\to I^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $(p_0 \vee \neg p_1) \to p_2$ e cujas hipóteses por cancelar são p_1 e $p_0 \to p_2$, sendo assim uma derivação nas condições pretendidas.

(b) Sejam $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Prove que se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $\Gamma', \psi \vdash \varphi$ então $\Gamma \cup \Gamma' \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $\Gamma', \psi \vdash \varphi$. Então, existe uma derivação D_1 de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e existe uma derivação D_2 de φ a partir de $\Gamma' \cup \{\psi\}$. Assim, a construção

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \Gamma', \cancel{\psi}^{(1)} & \Gamma, \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D_1 & D_2 \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I^{(1)}$$

é uma derivação de $\varphi \leftrightarrow \psi$ a partir de $\Gamma \cup \Gamma'$ e, portanto, $\Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Daqui, pelo Teorema da Correcção, segue que $\Gamma \cup \Gamma' \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

4. Seja $L = (\{c, f\}, \{R\}, N)$ a linguagem onde $N(c) = 0$, $N(f) = 1$ e $N(R) = 1$.

(a) Dê exemplo de uma L-fórmula atómica φ tal que $\text{LIV}(\varphi) = \emptyset$. Justifique.

Uma L-fórmula atómica é uma fórmula do tipo $R(t)$ onde t é um L-termo. Dado que pretendemos $\text{LIV}(\varphi) = \emptyset$, então temos de considerar um L-termo onde não ocorram variáveis (como, por exemplo, o termo c). Assim $R(c)$ é exemplo de uma L-fórmula atómica nas condições indicadas

(b) Seja $E = (\{0, 1, 2\}, -)$ uma L-estrutura onde $\overline{c} = 2$ e $\overline{f} : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ é tal que $\overline{f}(0) = 1$, $\overline{f}(1) = 2$ e $\overline{f}(2) = 0$. Dada uma qualquer atribuição a em E, calcule $f(f(c))[a]_E$. Justifique.

Seja a uma atribuição em E. Por definição de valor de um termo tem-se:

$$f(f(c))[a]_E = \overline{f}(f(c)[a]_E) = \overline{f}(\overline{f}(c[a]_E)) = \overline{f}(\overline{f}(\overline{c}) = 1.$$

Logo, para qualquer atribuição a em E, $f(f(c))[a]_E = 1$.

(c) Considere a L-fórmula $\varphi = (\forall x_0\, R(x_0)) \rightarrow (\forall x_0\, R(f(x_0)))$.

i. Indique uma L-estrutura que valide φ. Justifique

Uma L-estrutura $E = (D, -)$ valida φ se, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Por definição de valor lógico para uma implicação tem-se que: $E \models \varphi[a]$ se e só se $E \models (\forall x_0\, R(f(x_0)))[a]$ sempre que $E \models (\forall x_0\, R(x_0))[a]$. Por sua vez,

1) $E \models (\forall x_0\, R(x_0))[a]$ se e só se para qualquer $d_1 \in D$, $d_1 \in \overline{R}$;
2) $E \models (\forall x_0\, R(f(x_0)))[a]$ se e só se para qualquer $d_2 \in D, \overline{f}(d_2) \in \overline{R}$.

Se considerarmos a L-estrutura $E_1 = (\{0, 1, 2\}, -)$ onde $\overline{c} = 2$, $\overline{f} : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ é tal que $\overline{f}(0) = 1$, $\overline{f}(1) = 2$, $\overline{f}(2) = 0$ e $\overline{R} = \{0, 1, 2\}$, é fácil verificar que:

- para qualquer $d_1 \in \{0, 1, 2\}$, $d_1 \in \overline{R}$ e
- para qualquer $d_2 \in \{0, 1, 2\}, \overline{f}(d_2) \in \overline{R}$.

Logo, para toda a atribuição a, $E_1 \models (\forall x_0\, R(f(x_0)))[a]$ sempre que $E_1 \models (\forall x_0\, R(x_0))[a]$, i.e., $E_1 \models \varphi[a]$, qualquer que seja a atribuição. Logo E_1 valida φ.

ii. A L-fórmula φ é universalmente válida? Justifique.

A fórmula φ é universalmente válida se, para toda a L-estrutura $E = (D, -)$ e toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Da alínea anterior sabe-se que $E \models \varphi[a]$ se e só se sempre que

1) para qualquer $d_1 \in D$, $d_1 \in \overline{R}$;

também se verifica

2) para qualquer $d_2 \in D, \overline{f}(d_2) \in \overline{R}$.

Ora, se assumirmos 1), temos que $\overline{R} = D$. Assim, como $\overline{f}$ é uma aplicação de D em D, 2) verifica-se. Logo $E \models \varphi[a]$, para toda a L-estrutura $E = (D, -)$ e para toda a atribuição a em E, i.e., φ é universalmente válida.

FIM