Comunicação de Dados (2011/2012)

Ficha 1 - Teoria da Informação

1.

a)

Probabilidade de sair uma espada = 13/52 = 0.25
Informação Própria (página 199 da sebenta):

$$\boxed{I_i = \log_2 \frac{1}{P_i} \quad bits}$$

$$\boxed{I = \log_2 \left(\frac{1}{0.25}\right) = 2 \quad bits}$$

b)

Probabilidade de sair um ás = 4/52

$$\boxed{I = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{4}{52}}\right) = 3.7 \quad bits}$$

c)

Probabilidade de sair um ás de espadas = 1/52

$$\boxed{I = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{52}}\right) = 5.7 \quad bits}$$

Relação existente:

$$\boxed{I(c) = I(a) + I(b)}$$

2.

Definição de Débito de Informação (página 201 da sebenta)
Definição de Entropia (página 200 da sebenta)

Cálculo da entropia da fonte:

$$\boxed{H(X) = \frac{2}{3} \, . \, log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3} \, . \, log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) = 0.92 \quad bits/simbolo}$$

Cálculo do débito de informação da fonte:

$$\boxed{R = 3.75 \cdot 0.92 = 3.45 \quad bits/segundo}$$

3.

Se todas as mensagens ocorrem com a mesma probabilidade então a entropia será máxima. Na página 200 da sebenta podemos ver que a entropia pode variar entre:

$$\boxed{0 \leq H(X) \leq \log_2 m}$$

Logo neste caso $H(X) = \log_2 m$

4.

a)

$$\boxed{H(X) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{12}}\right) + 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{16}}\right) = 2.4 \quad bits/simbolo}$$

b)

Definição da codificação (página 206 da sebenta)
Comprimento mínimo $= log_2 8 = 3$

$$\boxed{\rho = \frac{2.4}{3} = 0.8 = 80\%}$$

c) Codificação utilizando *Shannon-Fano* (página 208 da sebenta - Códigos de Huffman):

x_i	P_i	Código
A	$\frac{1}{2}$	0
B	$\frac{1}{12}$	100
C	$\frac{1}{12}$	1010
D	$\frac{1}{12}$	1011
E	$\frac{1}{16}$	1100
F	$\frac{1}{16}$	1101
G	$\frac{1}{16}$	1110
H	$\frac{1}{16}$	1111

Cálculo do comprimento médio do código (página 204 da sebenta):

$$\boxed{\overline{N} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2.42}$$

Cálculo do rendimento (página 206 da sebenta):

$$\boxed{\rho = \frac{2.4}{2.42} = 99\%}$$

Cálculo da compressão (página 206 da sebenta):

8 símbolos -▷ código de comprimento fixo mínimo = 3

$$\boxed{c = \frac{3 - 2.42}{3} \cdot 100 = 19.3\%}$$

d) Fazendo codificação por blocos.

5.

- A1 - Falso, a entropia máxima é igual a $\log_2 8 = 3$
- B2 - Verdadeiro, calculado em 4. a)
- C3 - Falso, por exemplo no caso em que é transmitida uma mensagem com $Z = 2$ símbolos H são necessários 8 bits e $Z \cdot 3 = 6$
- D4 - Falso, o comprimento médio do código não pode ser inferior à entropia.

6.

- A1 - Verdadeiro, se os 16 símbolos fossem equiprováveis a entropia seria igual a $\log_2 16 = 4$, com os dados apresentados posemos ver que $H(X) = \frac{240}{\frac{4800}{30}} = 1.5$
- B2 - Verdadeiro, se tivermos um comprimento médio de código igual à entropia temos $c = \frac{4-1.5}{4} \cdot 100 = 62.5\%$
- C3 - Verdadeiro, se $k = 3$ teríamos $16^3 = 4096$ entradas na tabela, logo $N_f = \log_2 4096 = 12$

- D4 - Verdadeiro, pelo teorema de Shannon da codificação da fonte sabemos que $\overline{N} < H(X) + \frac{1}{k}$, neste caso $\overline{N} < 1.75$ dígitos binários por símbolo, uma vez que temos blocos de 4 símbolos então temos $\overline{N} < 1.75 \cdot 4 \equiv \overline{N} < 7$

6.

a)

Cálculo das probabilidades:

$$\boxed{P_1 = \frac{5}{8}} \qquad \boxed{P_0 = \frac{5}{8}} \qquad \boxed{P_{0|1} = \frac{1}{16}}$$

$$\boxed{P_{1|0} = \frac{3}{4}} \qquad \boxed{P_{1|1} = 1 - P_{0|1} = \frac{15}{16}} \qquad \boxed{P_{0|0} = 1 - P_{1|0} = \frac{1}{4}}$$

Cálculo da entropia condicional relativamente ao símbolo 0 (página 212 da sebenta):

$$\boxed{H(X|0) = \frac{3}{4} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = 0.81 \;\; bits/simbolo}$$

Cálculo da entropia condicional relativamente ao símbolo 1 (página 212 da sebenta):

$$\boxed{H(X|1) = \frac{15}{16} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{15}{16}}\right) + \frac{1}{16} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{16}}\right) = 0.337 \;\; bits/simbolo}$$

Cálculo da entropia real da fonte com memória 1 (página 212 da sebenta):

$$\boxed{H(X) = 0.81 \cdot \frac{3}{8} + 0.337 \cdot \frac{5}{8} = 0.51 \;\; bits/simbolo}$$

b)

Cálculo da entropia da fonte sem memória:

$$\boxed{H(X) = \frac{3}{8} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{3}{8}}\right) + \frac{5}{8} \cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{5}{8}}\right) = 0.95 \;\; bits/simbolo}$$

Entropia da fonte com memória:

$$\boxed{H(X) = 0.51 \;\; bits/simbolo}$$

Entropia da fonte sem memória:

$$\boxed{H(X) = 0.95 \ \ bits/simbolo}$$

A entropia da fonte com memória é sensivelmente metade da entropia da fonte sem memória.

c)

Cálculo das probabilidades associadas aos blocos (parte-se do princípio que o primeiro símbolo a ser transmitido é o da direita):

$$P_{11} = \frac{5}{8} \cdot \frac{15}{16} = 0.59$$

$$P_{01} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} = 0.04$$

$$P_{10} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = 0.28$$

$$P_{00} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = 0.09$$

Codificação utilizando *Shannon-Fano* (página 208 da sebenta - Códigos de Huffman):

x_i	P_i	Código
11	0.59	0
10	0.28	10
00	0.09	110
01	0.04	111

Cálculo do $\overline{N}$ para blocos de 2 símbolos:

$$\boxed{\overline{N}_2 = 1 \cdot 0.59 + 2 \cdot 0.28 + 3 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.04 = 1.54 \ \ digitos/2simbolos}$$

Cálculo do rendimento:

$$\boxed{\rho = \frac{0.51}{\frac{1.54}{2}} \cdot 100 = 66\%}$$

Cálculo da compressão (não é pedido no enunciado):

$$\boxed{c = \frac{2 - 1.54}{2} \cdot 100 = 23\%}$$