Matemática Discreta II

LESI e LMCC

Luís Pinto
Departamento de Matemática
Universidade do Minho
1998-1999

1 Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

1.1 Definições Indutivas e Sintaxe do Cálculo Proposicional

Exemplo: O Princípio de Indução para $\mathbb{N}_0$ (o conjunto dos números naturais incluindo o número zero) diz-nos que, para demonstrar a validade de uma proposição $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, basta demonstrar que

i) $P(0)$ é válida e que

ii) para cada $k \in \mathbb{N}_0$, se $P(k)$ é válida, então $P(k+1)$ também é válida.

Uma das razões em que assenta a justificação deste princípio é a de que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, n pode ser escrito como o número 0 ($n = 0$) ou como $m+1$ ($n = m+1$) para algum $m \in \mathbb{N}_0$. Assim os elementos de $\mathbb{N}_0$ podem ser vistos como os elementos obtidos a partir de 0, aplicando zero ou mais vezes a construção $+1$, ou seja, os elementos de $\mathbb{N}_0$ correspondem aos objectos que podem ser obtidos através do seguinte conjunto de regras:

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}_0}\ \textit{Regra Base} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}_0}{n+1 \in \mathbb{N}_0}\ \textit{Regra Indutiva}$$

Esta forma de definir o conjunto $\mathbb{N}_0$ é um caso particular das chamadas *definições indutivas de conjuntos*, um mecanismo para definir conjuntos de uso frequente em Ciências de Computação, que apresentaremos de seguida.

Definição (*conjuntos indutivos*): Sejam X um conjunto e B um subconjunto não vazio de X. Seja O um conjunto de *operações em* X (*i.e.*, funções do tipo $X^n \longrightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$). Um subconjunto I de X tal que

i) $B \subseteq I$ e

ii) I é *fechado* para as operações de O (*i.e.*, as operações de O quando aplicadas a elementos de I produzem elementos de I ou, por outras palavras, para cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O e para cada $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $f(x_1, ..., x_n) \in I$)

é chamado um *conjunto indutivo, sobre* X, *de base* B e *conjunto de operações* O.

Exemplo: Admitamos as suposições da definição anterior. Então:

i) X é um conjunto indutivo para qualquer O;

ii) B é um conjunto indutivo quando $O = \emptyset$.

Donde podemos concluir que, em geral, os subconjuntos indutivos de um conjunto, para uma dada base e um dado conjunto de operações, não são únicos, pois X e B são ambos conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações $\emptyset$.

Definição (*definições indutivas*): Sejam X um conjunto, B um subconjunto não vazio de X e O um conjunto de *operações* em X. O mais pequeno[1] conjunto indutivo, sobre X, de base B e conjunto de operações O é chamado o *conjunto definido indutivamente* (ou *conjunto gerado*) por O em B. Chamaremos ao par (B, O) uma *definição indutiva sobre* o conjunto suporte X.

Observação: Nas condições da definição anterior, demonstra-se que o conjunto G gerado por O em B é a intersecção de todos os conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações O.

[1] Dizemos que um conjunto A é mais pequeno que um conjunto B quando $A \subseteq B$

Alternativamente, demonstra-se que os elementos de G são exactamente os objectos que podem ser obtidos a partir de B, aplicando um número finito de operações de O.

Definição (*alfabetos e palavras sobre alfabetos*): Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos. Dado um alfabeto A, chamaremos *palavra* (ou *string*) *sobre* o alfabeto A a uma sequência finita de elementos de A. Dados n elementos e_1, e_2, ..., e_n de um conjunto X, onde $n \in \mathbb{N}$, utilizamos a notação

$$e_1e_2...e_n$$

para representar a *sequência* de elementos de X, de *comprimento* n, cujo *primeiro* elemento é e_1, cujo *segundo* elemento é e_2, ..., cujo n-*ésimo* e *último* elemento é e_n. Duas sequências de elementos de X dizem-se *iguais* quando coincidirem em cada um dos seus elementos. Dadas duas palavras x, y sobre um alfabeto, utilizamos a notação xy para representar a *concatenação* de x com y, *i.e.*, a sequência resultante da construção duma sequência onde primeiro aparecem os elementos de x e depois os elementos de y.

Exemplo: Seja A o alfabeto $\{0, s\}$ e seja A^* o conjunto das palavras sobre A. Consideremos que B é o subconjunto de A^*, não vazio, dado por $\{0\}$ e que O é o conjunto de operações em A^* cujo único elemento é a função $f : A^* \longrightarrow A^*$ que a cada palavra x faz corresponder a palavra sx. Chamaremos $Natz$ ao conjunto gerado por (B, O). Nestas condições, temos que:

i) $0 \in Natz$, por i) da definição de conjuntos indutivos;

ii) $s0 \in Natz$, pois, em **i)**, vimos já que $0 \in Natz$ e assim, uma vez que $Natz$ é fechado para a operação f, $f(0)$— que é igual a $s0$— é também um elemento de $Natz$;

iii) $0s \notin Natz$, pois não resulta de $\{0\}$ por um número finito n de aplicações de f, caso contrário: se n fosse zero, a palavra $0s$ teria que pertencer ao conjunto $\{0\}$, o que não é verdade, e se $n \geq 1$, $0s$ teria que ser uma palavra cuja primeiro elemento fosse s, o que também não é verdade.

De seguida estudaremos uma nova forma de apresentar definições indutivas, tendo em vista métodos mais simples para justificar que um dado objecto pertence a um conjunto definido indutivamente.

Notação: Um forma alternativa de apresentar uma definição indutiva (B, O), sobre um conjunto X, de um conjunto G é a de descrever o conjunto B e as operações de O como *regras*. A cada $b \in B$ corresponde uma *regra base* (ou *axioma*), que escreveremos como

$$\frac{}{b \in G}\ b$$

e a cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O corresponde uma *regra indutiva* que escreveremos como

$$\frac{x_1 \in G \quad ... \quad x_n \in G}{f(x_1, ..., x_n) \in G}\ f\ ,$$

onde $x_1, ..., x_n$ são variáveis cujo domínio de variação é X. Chamaremos às regras assim obtidas as *regras de* (B, O). Numa regra, designaremos por *premissas* as *asserções* acima do *traço de inferência* e por *conclusão* a asserção abaixo do traço de inferência. A designação após o traço de inferência duma regra é o *nome* da regra. Uma concretização de uma regra, *i.e.*, uma substituição de cada uma das suas variáveis por um elemento de X, é chamada uma *instância* da regra.

Exemplo: O conjunto $Natz$ pode agora ser descrito como o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, s\}$, pelas regras:

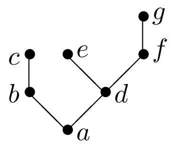
$$\frac{}{0 \in Natz}\ 0 \qquad\qquad \frac{x \in Natz}{sx \in Natz}\ s$$

A regra 0 tem zero premissas, enquanto que a regra s tem uma premissa. A regra 0 admite uma só instância, enquanto que a regra s admite uma infinidade de instâncias, uma por cada palavra sobre o alfabeto $\{0, s\}$, como por exemplo:

$$\frac{0 \in Natz}{s0 \in Natz}\ s \qquad\qquad \frac{0s \in Natz}{s0s \in Natz}\ s$$

Os conjuntos $\mathbb{N}_0$ e $Natz$ são bijectivos: a aplicação de $Natz$ em $\mathbb{N}_0$ que a cada palavra $x \in Natz$ faz corresponder o número de ocorrências do símbolo s em x é uma bijecção entre $Natz$ e $\mathbb{N}_0$.

Notação: Sejam a, b, c, d, e, f, g elementos de um conjunto X. A seguinte notação representa uma *árvore* cujos *nodos* estão anotados com elementos de X, *i.e.*, um elemento de $\acute{A}rvores(X)$.



Esta árvore tem o nodo[2] a como *raiz*. Os *descendentes directos* da raiz são os nodos b e d. As *folhas* desta árvore, *i.e.*, os nodos que não têm descendentes directos, são os nodos c, e e g. Esta árvore tem três *ramos*, *i.e.*, sequências de nodos a começarem na raiz e a acabarem numa folha: abc, ade e $adfg$. Frequentemente utilizaremos uma notação alternativa para árvores. Nesta notação alternativa a árvore acima apresentada terá a seguinte representação:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{c}}{b} \qquad \dfrac{\overline{e} \quad \dfrac{\overline{g}}{f}}{d}}{a}$$

Definição (*árvores de formação*): Seja (B, O) uma definição indutiva, sobre um conjunto X, de um conjunto G e seja $x \in X$. Uma *árvore de formação* de x é uma árvore A de asserções da forma $g \in G$, de raiz $x \in G$, construída a partir das regras de (B, O), *i.e.*, para cada nodo $g \in G$ de A com descendentes directos $g_1 \in G, ..., g_n \in G$, existe uma instância de uma regra de (B, O) da forma:

$$\frac{g_1 \in G \quad ... \quad g_n \in G}{g \in G}\ ,$$

sendo esta regra obrigatoriamente um axioma no caso em que o nodo é uma folha.

Exemplo:

a) A construção que se segue é uma árvore de formação [3] de $ss0$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0 \in Natz}\ 0}{s0 \in Natz}\ s}{ss0 \in Natz}\ s$$

[2]Muitas vezes, para simplificarmos terminologia, identificaremos um nodo com o elemento que anota esse nodo.
[3]Por razões de clareza, em árvores de formação anotaremos cada uma das regras utilizadas com o respectivo nome.

b) A palavra $s0s$ não admite qualquer árvore de formação. Note que a única forma de encontrarmos uma árvore de formação para uma palavra da forma sx é através da aplicação da regra s como última regra e, para tal, é ainda necessário encontrar uma árvore de formação de x, *i.e.*, no nosso caso, uma árvore de formação de $0s$. Mas nenhuma das regras tem por conclusão uma palavra da forma $0x$ onde x é uma palavra não vazia. Portanto, não existe qualquer árvore de formação de $0s$ e, por conseguinte, $s0s$ também não admite qualquer árvore de formação.

Proposição 1.1: Seja G um conjunto definido indutivamente, sobre um conjunto X, e seja $x \in X$. Então, x é um dos elementos de G se e somente se x admite uma árvore de formação.

Exemplo: Do exemplo anterior e da proposição anterior, podemos concluir que a palavra $ss0$ pertence ao conjunto $Natz$ e que a palavra $s0s$ não pertence ao conjunto $Natz$.

Definição (*definições indutivas deterministas*): Dizemos que uma definição indutiva (B, O) de um conjunto G é *determinista* quando, para quaisquer duas instâncias de regras de (B, O),

$$\frac{g_{11} \in G \quad ... \quad g_{1n} \in G}{g \in G}\, r_1 \qquad \frac{g_{21} \in G \quad ... \quad g_{2m} \in G}{g \in G}\, r_2 \ ,$$

com a mesma conclusão, em que $g_{11}, ..., g_{1n}, g_{21}, ..., g_{2m}$ são elementos de G, tivermos $r_1 = r_2$ (e, neste caso, $n = m$) e, caso $n \geq 1$, para todo $1 \leq i \leq n$, $g_{1i} = g_{2i}$.

Exemplo: A definição indutiva de $Natz$, apresentada anteriormente, é determinista, pois: i) uma instância da regra 0 nunca poderá ter a mesma conclusão que uma instância da regra s (observe que no primeiro caso a palavra que aparece na conclusão é 0, enquanto que as palavras que no segundo caso aparecem na conclusão iniciam-se por um s); ii) duas instâncias da regra s têm a mesma conclusão se e somente se tiverem as mesmas premissas. Contudo, se ao conjunto de regras que define $Natz$ acrescentarmos a regra

$$\frac{}{s0 \in Natz}\, r$$

a correspondente definição indutiva deixa de ser determinista, pois existem duas instâncias de regras diferentes (as regras r e s) que têm por conclusão a asserção $s0 \in Natz$.

Proposição 1.2: Uma definição indutiva de um conjunto G é determinista se e somente se os elementos de G admitem exactamente uma árvore de formação.

Definição (*árvores de formação simplificadas*): As *árvores de formação simplificadas* de um objecto g, num conjunto G definido indutivamente, são as árvores de formação de g em que: i) cada asserção da forma $e \in G$ é substituída por e; e ii) os nomes das regras são omitidos.

Exemplo: A árvore que se segue é uma árvore de formação simplificada de $ss0$.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{0}}{s0}}{ss0}$$

Definição (*sub-objectos*): Dados dois objectos o_1 e o_2 num conjunto G gerado por uma definição indutiva determinista, o_1 diz-se um *sub-objecto* de o_2 quando o_1 é um dos nodos da árvore de formação simplificada de o_2. O objecto o_1 diz-se um *sub-objecto directo* de o_2 quando o_1 é um descendente directo de o_2 na árvore de formação simplificada de o_2

Exemplo: As palavras 0, $s0$ e $ss0$ são sub-objectos de $ss0$. O objecto 0 é um sub-objecto directo de $s0$ e este, por sua vez, é um sub-objecto directo de $ss0$.

Definição (*sequências de formação*): Dado um conjunto G gerado por uma definição indutiva determinista, dizemos que uma sequência $g_1, ..., g_n$ de elementos de G é uma *sequência de formação de* um elemento g de G quando:

i) $g = g_n$; e

ii) para todo $1 \leq i \leq n$, para todo o sub-objecto directo g' de g_i, existe $j < i$ tal que $g_j = g'$ [4].

Exemplo: As sequências de elementos de $Natz$ que se seguem são sequências de formação de $ss0$.

a) 0, $s0$, $ss0$

b) 0, $s0$, 0, $ss0$

Observação: Do exemplo anterior, conclui-se de imediato que:

a) um elemento de $Natz$ pode admitir mais do que uma sequência de formação (na verdade, qualquer elemento de $Natz$ admite um número infinito de sequências de formação – note que 0 pode aparecer, tantas vezes quantas desejarmos, numa sequência de formação dum elemento de $Natz$);

b) duas sequências de formação de um elemento de $Natz$ podem ter comprimentos diferentes.

Esta observação é aplicável a qualquer definição indutiva. Para produzirmos o mesmo efeito que o produzido pelo elemento 0 do conjunto base da definição indutiva de $Natz$ nesta observação, basta utilizar um elemento qualquer do conjunto base da definição indutiva em causa.

Definição (*alfabeto do Cálculo Proposicional*): O conjunto $\mathcal{A}^{CP}$, chamado o *alfabeto do Cálculo Proposicional* (CP), é constituído pelos seguintes elementos:

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados *conectivos proposicionais* (respectivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Definição (*fórmulas*): O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$, de *fórmulas* (ou *proposições*) do CP, é o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$, pelas seguintes regras:

[4] Observe que a vírgula é utilizada como separador dos elementos da sequência de formação.

$$\frac{}{\bot \in \mathcal{F}^{CP}}\ \bot \qquad \frac{}{p_i \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_i\ (i \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\neg$$

$$\frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\wedge \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\vee$$

$$\frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\rightarrow \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\leftrightarrow$$

Proposição 1.3: A definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$de fórmulas é determinista.

Dem.: Pode demonstrar-se, utilizando um princípio de indução para fórmulas que será introduzido mais à frente, que cada fórmula admite exactamente um árvore de formação. Donde, pela Proposição 1.2, se conclui que a definição indutiva do conjunto de fórmulas é indutiva. □

Exemplo: A palavra $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \bot)$ é um elemento de $\mathcal{F}^{CP}$, pois a árvore que se segue é uma árvore de formação desta palavra.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{p_5 \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_5 \quad \dfrac{\dfrac{}{p_0 \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_0}{(\neg p_0) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\neg}{(p_5 \wedge (\neg p_0)) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\wedge \quad \dfrac{}{\bot \in \mathcal{F}^{CP}}\ \bot}{((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \bot) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\vee$$

Notação: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são geralmente omitidos. Por exemplo, a palavra $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \bot$ será utilizada como uma representação da fórmula $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \bot)$. Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Exemplo: A sequência de fórmulas que se segue é uma sequência de formação da fórmula $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \bot$.

$$p_5, p_0, \neg p_0, p_5 \wedge \neg p_0, \bot, (p_5 \wedge \neg p_0) \vee \bot$$

Definição (*subfórmulas*): Uma fórmula φ é uma *subfórmula* de uma fórmula ψ quando φ é um sub-objecto de ψ.

Exemplo: O conjunto dos sub-objectos de $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \bot$ é

$$\{p_5, p_0, \neg p_0, p_5 \wedge \neg p_0, \bot, (p_5 \wedge \neg p_0) \vee \bot\}.$$

Logo, cada uma das fórmulas deste conjunto é uma subfórmula de $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \bot$.

Teorema (*Recursão Estrutural para Definições Indutivas Deterministas*): Seja (B, O) uma definição indutiva determinista, sobre um conjunto X, de um conjunto G. Sejam Y um conjunto e $\overline{B} : B \longrightarrow Y$ uma função, e, para cada $f : X^n \longrightarrow X$ de O, seja $\overline{f} : Y^n \longrightarrow Y$ uma função. Então, existe uma e uma só função $F : G \longrightarrow Y$ tal que:

a) para cada $b \in B$, $F(b) = \overline{B}(b)$;

b) para cada $f : X^n \longrightarrow X$ de O, para cada $(g_1, ..., g_n) \in G^n$, $F(f(g_1, ..., g_n)) = \overline{f}(F(g_1), ..., F(g_n))$.

Dem.: Ver, por exemplo, a Secção 2.3 de *Logic for Computer Science* de Jean Gallier (ed. Willey). $\Box$

Corolário (*Recursão Estrutural para Fórmulas do* CP): Sejam Y um conjunto, e sejam $\overline{B} : \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow Y$, $\overline{f_\neg} : Y \longrightarrow Y$ e, para cada $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\overline{f_\Box} : Y \times Y \longrightarrow Y$ funções. Então, existe uma e uma só função $F : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow Y$ tal que:

a) $\forall_{\varphi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}} \ F(\varphi) = \overline{B}(\varphi)$;

c) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}} \ F(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(F(\varphi))$;

d) $\forall_{\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}} \forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ F(\varphi \Box \psi) = \overline{f_\Box}(F(\varphi), F(\psi))$.

Dem.: Basta concretizar o teorema anterior para o caso da definição indutiva determinista de $\mathcal{F}^{CP}$. $\Box$

Convenção: Uma aplicação do resultado anterior para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP.*

Definição (*variáveis proposicionais de fórmulas*): A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto de variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função tal que:

a) $var(\perp) = \emptyset$;

b) $\forall_{p \in \mathcal{V}^{CP}} \ var(p) = \{p\}$;

c) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}} \ var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;

d) $\forall_{\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}} \forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ var(\varphi \Box \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Exemplo:
$$\begin{aligned} & var(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee \perp)) = var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \perp) = \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\perp) \\ = \ & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset = \{p_1\} \cup \{p_2\} = \{p_1, p_2\}. \end{aligned}$$

Definição (*árvores de parsing*): A função T que a cada fórmula φ faz corresponder um elemento de $\acute{A}rvores(\mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$[5], ao qual chamamos a *árvore de parsing* de φ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função tal que:

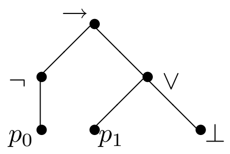
a) $\forall_{\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}} \ T(\varphi) = \ \bullet\, \varphi$

b) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}} \ T(\neg\varphi) = \begin{array}{c} \bullet\, \neg \\ | \\ T(\varphi) \end{array}$

c) $\forall_{\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}} \forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ T(\varphi \Box \psi) = \begin{array}{ccc} & \bullet\, \Box & \\ / & & \backslash \\ T(\varphi) & & T(\psi) \end{array}$

[5]Observe que, na representação de árvores de *parsing*, utilizamos uma orientação inversa àquela que é vulgarmente utilizada na representação da árvores.

Exemplo: A árvore de *parsing* da fórmula $\neg p_0 \rightarrow (p_1 \vee \perp)$ é:



Definição (*complexidade lógica de fórmulas*): A função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função tal que:

a) $\forall_{\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}}\ \ r(\varphi) = 0$;

b) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;

c) $\forall_{\Box \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}}\ \forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ r(\varphi \Box \psi) = 1 + \textit{máximo}(r(\varphi), r(\psi))$.

Para cada fórmula φ, $r(\varphi)$ é chamado a *complexidade lógica* de φ.

Exemplo:
$$\begin{array}{rl} & r(\neg p_0 \rightarrow (p_1 \vee \perp)) = 1 + \textit{máximo}(r(\neg p_0), r(p_1 \vee \perp)) \\ = & 1 + \textit{máximo}(1 + r(p_0), 1 + \textit{máximo}(r(p_1), r(\perp))) \\ = & 1 + \textit{máximo}(1 + 0, 1 + \textit{máximo}(0, 0)) = 2 \end{array}$$

Definição (*altura de fórmulas*): A função $\# : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, que a cada fórmula φ faz corresponder o número de nodos máximo em ramos da árvore de *parsing* de φ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função tal que:

a) $\forall_{\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}}\ \ \#(\varphi) = 1$;

b) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ \#(\neg\varphi) = 1 + \#(\varphi)$;

c) $\forall_{\Box \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}}\ \forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ \#(\varphi \Box \psi) = 1 + \textit{máximo}(\#(\varphi), \#(\psi))$.

Para cada fórmula φ, $\#(\varphi)$ é chamada a *altura* de φ.

Exemplo: Verifique que, para a fórmula φ do exemplo anterior, $\#(\varphi) - 1 = r(\varphi)$. Justificaremos, numa das proposições seguintes, que esta igualdade é estensível a qualquer fórmula.

Teorema (*Indução Estrutural para Definições Indutivas*): Seja (B, O) uma definição indutiva, sobre um conjunto X, de um conjunto G e seja, para cada $g \in G$, $P(g)$ uma propriedade. Se:

a) para cada $b \in B$, $P(b)$; e

b) para cada $f : X^n \longrightarrow X$ de O, para cada $(g_1, ..., g_n) \in G^n$,
$$P(g_1) \text{ e } ... \text{ e } P(g_n) \Longrightarrow P(f(g_1, ..., g_n));$$

então $\forall_{g \in G}\ \ P(g)$.

Dem.: Seja $Y = \{g \in G : P(g)\}$. Então, Y é um conjunto indutivo, sobre X, de base B e conjunto de operações O. (Porquê?) Assim, $G \subseteq Y$, uma vez que, por definição de G, G é o menor conjunto indutivo, sobre X, de base B e conjunto de operações O. Logo, $\forall_{g \in G}\ \ g \in Y$ e assim, por definição de Y, $\forall_{g \in G}\ \ P(g)$. $\Box$

Corolário (*Indução Estrutural para Fórmulas do* CP): Seja φ uma fórmula do CP e seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de φ. Se:

a) $P(\perp)$; e

b) $\forall_{p\in\mathcal{V}^{CP}}\ P(p)$; e

c) $\forall_{\psi\in\mathcal{F}^{CP}}\ P(\psi) \implies P(\neg\psi)$; e

d) $\forall_{\square\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}}\ \forall_{\psi_1,\psi_2\in\mathcal{F}^{CP}}\ P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1\square\psi_2)$;

então $\forall_{\varphi\in\mathcal{F}^{CP}}\ P(\varphi)$.

Dem.: Basta aplicar o teorema anterior à definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$de fórmulas do CP. $\square$

Convenção: Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP.*

Proposição 1.4: $\forall_{\varphi\in\mathcal{F}^{CP}}\ r(\varphi)=\#(\varphi)-1$

Dem.: Seja, para cada $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ a propriedade: $r(\varphi)=\#(\varphi)-1$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que $\forall_{\varphi\in\mathcal{F}^{CP}}\ P(\varphi)$.

a) Seja $\psi\in\{\perp\}\cup\mathcal{V}^{CP}$. Então, aplicando as definições de r e de $\#$, $r(\psi)=0$ e $\#(\psi)=1$. Donde, $r(\psi)=0=\#(\psi)-1$. Demonstramos, assim, que $\forall_{\psi\in\{\perp\}\cup\mathcal{V}^{CP}}\ P(\psi)$.

b) Seja $\psi\in\mathcal{F}^{CP}$. (Queremos demonstrar que $P(\psi)\implies P(\neg\psi)$.) Suponhamos que $P(\psi)$ é válida. (Chamaremos *hipótese de indução* (HI) a $P(\psi)$, *i.e.*, $r(\psi)=\#(\psi)-1$.) Aplicando as definições de r e $\#$, respectivamente, temos que i) $r(\neg\psi)=1+r(\psi)$ e ii) $\#(\neg\psi)=1+\#(\psi)$. Assim,

$$r(\neg\psi) \underset{\text{i)}}{=} 1+r(\psi) \underset{\text{HI}}{=} 1+\#(\psi)-1 \underset{\text{ii)}}{=} \#(\neg\psi)-1,$$

demonstrando que $P(\neg\psi)$ é válida.

c) Sejam $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{F}^{CP}$ e $\square\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$. (Queremos demonstrar que: $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)\implies P(\psi_1\square\psi_2)$. Neste caso as hipóteses de indução são $P(\psi_1)$, *i.e.*, $r(\psi_1)=\#(\psi_1)-1$, e $P(\psi_2)$, *i.e.*, $r(\psi_2)=\#(\psi_2)-1$.) Então, i) $r(\psi_1\square\psi_2)=1+\textit{máximo}(r(\psi_1),r(\psi_2))$ e ii) $\#(\psi_1\square\psi_2)=1+\textit{máximo}(\#(\psi_1),\#(\psi_2))$, aplicando as respectivas definições. Assim,

$$\begin{aligned} r(\psi_1\square\psi_2) &\overset{\text{i)}}{=} 1+\textit{máximo}(r(\psi_1),r(\psi_2)) \overset{\text{HI}}{=} 1+\textit{máximo}(\#(\psi_1)-1,\#(\psi_2)-1) \\ &= 1+\textit{máximo}(\#(\psi_1),\#(\psi_2))-1 \underset{\text{ii)}}{=} \#(\psi_1\square\psi_2)-1. \end{aligned}$$

demonstrando que $P(\psi_1\square\psi_2)$ é válida.

De **a)**, **b)** e **c)**, pelo Teorema de Indução Estrutural para Fórmulas do CP, $\forall_{\varphi\in\mathcal{F}^{CP}}\ P(\varphi)$, *i.e.*, $\forall_{\varphi\in\mathcal{F}^{CP}}\ r(\varphi)=\#(\varphi)-1$. $\square$

1.2 Semântica do Cálculo Proposicional

Definição (*valores lógicos*): Os *valores lógicos* do CP são 1 (ou **V**, ou *verdadeiro*) e 0 (ou **F**, ou *falso*).

Definição (*valoração*): Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $\forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ v(\varphi \wedge \psi) = \textit{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$;

c) $\forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ v(\varphi \vee \psi) = \textit{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$;

d) $\forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

e) $\forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$;

f) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}\ \ v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

Proposição 1.5: Sejam φ e ψ fórmulas e seja v uma valoração. Então, as seguintes proposições são válidas:

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi \wedge \psi)$	$v(\varphi \vee \psi)$	$v(\varphi \rightarrow \psi)$	$v(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$v(\neg\varphi)$	$v(\perp)$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0

Por exemplo, a última linha da tabela representa a proposição: Se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$ e $v(\varphi \vee \psi) = 0$ e $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 1$ e $v(\perp) = 0$.

Dem.: Imediata a partir da definição de valorações. □

Proposição 1.6: Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v tal que $\forall_{p \in \mathcal{V}^{CP}}\ \ v(p) = g(p)$.

Dem.: Seja $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ a única função que resulta da aplicação do Teorema de Recursão Estrutural para Fórmulas do CP, tomando para $\overline{B}$ a função

$$\begin{array}{rccl} \overline{B}: & \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & \varphi & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi = \perp \\ g(\varphi) & \text{se } \varphi \in \mathcal{V}^{CP} \end{cases} \end{array} ;$$

tomando para $\overline{f_\neg}$ a função

$$\begin{array}{rccl} \overline{f_\neg}: & \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & 1 - x \end{array} ;$$

tomando para $\overline{f_\wedge}$ e $\overline{f_\vee}$ as funções *mínimo* e *máximo* em $\{0,1\}$, respectivamente; tomando para $\overline{f_\rightarrow}$ a função

$$\begin{array}{rccl} \overline{f_\rightarrow}: & \{0,1\} \times \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \text{ e } y = 0 \end{cases} \end{array} ;$$

e tomando para $\overline{f_\leftrightarrow}$ a função

$$\begin{array}{rccl} \overline{f_\leftrightarrow}: & \{0,1\} \times \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array} .$$

Então: i) v é uma valoração, pois satisfaz as condições a)-f) da definição de valoração; ii) $\forall_{p\in\mathcal{V}^{CP}}\ \ v(p) = g(p)$; e, pelo Teorema de Recursão Estrutural para fórmulas do CP, v é a única função que satisfaz em simultâneo i) e ii). $\square$

Definição (*valor lógico de fórmulas para valorações*): O *valor lógico de* uma fórmula φ *para* uma valoração v é $v(\varphi)$.

Exemplo: Sejam v_1 a única valoração tal que $\forall_{p\in\mathcal{V}^{CP}}\ \ v_1(p) = 0$ e v_2 a única valoração tal que

$$\forall_{p\in\mathcal{V}^{CP}}\ \ v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow\perp)$. Então:

a) Por definição de valorações,

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 1 \text{ e } v_1(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 0 \text{ ou } v_1(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases} .$$

Assim, como $v_1(p_1 \vee p_2) = máximo(v_1(p_1), v_1(p_2)) = máximo(0, 0) = 0$, segue-se que $v_1(\varphi) = 1$.
(Exercício: Verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) Por definição de valorações,

$$v_1(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_1(\neg p_1) = v_1(p_1 \rightarrow\perp) \\ 0 & \text{se } v_1(\neg p_1) \neq v_1(p_1 \rightarrow\perp) \end{cases} .$$

Assim, como $v_1(\neg p_1) = 1 - v_1(p_1) = 1$ e $v_1(p_1 \rightarrow\perp) = 1$, segue-se que $v_1(\psi) = 1$.
(Exercício: Verifique que $v_2(\psi) = 1$.)

Definição (*tautologias*): Uma fórmula φ é uma *tautologia* (notação: $\models \varphi$) quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.

Exemplo: A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow\perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia.
Dem.: Seja v uma valoração. (Queremos demonstrar que $v(\psi) = 1$.) Então, $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$.
Caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \rightarrow\perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.
Caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \rightarrow\perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.
Assim, como em ambos os casos possíveis $v(\psi) = 1$, segue-se que $v(\psi) = 1$.

Proposição 1.7: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Então,

$$\forall_{p\in var(\varphi)}\ \ v_1(p) = v_2(p) \implies v_1(\varphi) = v_2(\varphi).$$

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

a) Caso $\varphi =\perp$. Então, $v_1(\varphi) = 0 = v_2(\varphi)$, por definição de valorações.

b) Caso $\varphi \in \mathcal{V}^{CP}$. Então, por definição de var, $\varphi \in var(\varphi)$ e, assim, por hipótese, $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

c) Caso $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$, com $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Então, para $i \in \{1, 2\}$, como $var(\varphi_i) \subseteq var(\varphi_1) \cup var(\varphi_2) = var(\varphi)$ e (por hipótese) $\forall_{p\in var(\varphi)}\ \ v_1(p) = v_2(p)$, segue-se que

$$\forall_{p\in var(\varphi_i)}\ \ v_1(p) = v_2(p).$$

Donde, das hipóteses de indução, obtemos que

$$v_1(\varphi_i) = v_2(\varphi_i)\ \ (i \in \{1, 2\}).$$

i) Caso $\square = \wedge$. Então,

$$v_1(\varphi) = mínimo(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = mínimo(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi).$$

ii) Caso $\square \in \{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Exercício.

d) Caso $\varphi = \neg\psi$. Exercício.

Assim, de a), b), c) e d), pelo Teorema de Indução Estrutural para Fórmulas do CP, o resultado é válido para toda a fórmula φ do CP. $\square$

Observação: Pela proposição anterior, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\#var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ), o que pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue. Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes *subfórmulas* de φ. Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$. Da tabela de verdade para φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1 para todas as atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \rightarrow \neg p_2$	$p_2 \rightarrow p_1$	$(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$.

Definição (*equivalência lógica*): Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo: Para toda a fórmula φ,$\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow\perp)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow\perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow\perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow\perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow\perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1. Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow\perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 1.8: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Exercício. $\square$

Proposição 1.9: Dadas as fórmulas φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$	*associatividade*
$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$	*comutatitvidade*
$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$	*idempotência*
$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$	$\varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$	*elemento neutro*
$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp$	$\varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$	*elemento absorvente*
$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$	$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$	*distributividade*
$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$	*leis de De Morgan*
$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$		*lei da dupla negação*
$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$	
$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$	$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	
$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$	$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$	

Dem.: Exercício. □

Notação: Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção é tambem uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Definição (*substituição*): Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula, representada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ substituindo todas as ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função tal que:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $\forall_{i \in \mathbb{N}_0}\ p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$;

c) $\forall_{\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}}\ (\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$;

d) $\forall_{\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}}\ \forall_{\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}}\ (\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \square \varphi_2[\psi/p]$.

Exemplo:

$$\begin{array}{rl} & (\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1/p_2]) \\ = & \neg p_1 \to ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp) \end{array}$$

Teorema (*Generalização*): Dadas uma variável proposicional p e duas fórmulas φ e ψ, se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v, como

$$\forall p' \in \mathcal{V}^{CP} \quad v'(p') = \begin{cases} v(\psi) \text{ se } p' = p \\ v(p') \text{ se } p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. □

Exemplo: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg\psi$ é ainda uma tautologia.

Teorema (*Substituição*): Sejam p uma variável proposicional e φ_1 e φ_2 fórmulas. Assim,

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \text{ se e só se } \forall_{\psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ \psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p].$$

Dem.:

i) Suponhamos que $\forall_{\psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ \psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, para a variável proposicional p teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$, *i.e.*, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que $\forall_{\psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ \psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Caso $\psi = \perp$. Então, por definição de substituição, $\psi[\varphi_1/p] = \psi = \psi[\varphi_2/p]$. Assim, como a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

b) Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $\psi = p$. Então, por definição de substituição, $\psi[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $\psi[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue-se que $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

b.2) Caso $\psi \neq p$. Então, por definição de substituição, $\psi[\varphi_1/p] = \psi$ e $\psi[\varphi_2/p] = \psi$. Assim, tal como no casos a), por $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

c) Caso $\psi = \neg\psi_1$, para alguma fórmula ψ_1. (H.I.:$\psi_1[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$.) Pretendemos agora demonstrar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração. Então:

$$v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) \overset{(1)}{=} v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) \overset{(2)}{=} 1 - v(\psi_1[\varphi_1/p])$$

$$\overset{(3)}{=} 1 - v(\psi_1[\varphi_2/p]) \overset{(2)}{=} v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) \overset{(1)}{=} v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]).$$

Logo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Definição de valoração.
(3)	Da HI, por definição de $\Leftrightarrow$, $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, para toda a valoração v, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

d) Caso $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$, para fórmulas ψ_1 e ψ_2, com $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Exercício. □

Exemplo: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula.

Justificações

(1) Lei de De Morgan.
(2) Dada uma variável proposicional $p \notin var(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi \vee \psi$ e $(p \vee \psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Definição (*satisfação de conjuntos de fórmulas*): Uma valoração v *satisfaz* um conjunto Γ de fórmulas (notação: $v \models \Gamma$) quando $\forall_{\varphi\in\Gamma} \ v(\varphi) = 1$. Uma valoração v *não satisfaz* um conjunto Γ de fórmulas (notação: $v \not\models \Gamma$) quando $\exists_{\varphi\in\Gamma} \ v(\varphi) = 0$.

Exemplo: Qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 0$, $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 0$ satisfaz o conjunto $\{p_0 \vee p_1, p_0 \to p_2, p_2 \to\perp\}$ e, porque $v(p_1 \to p_2) = 0$, não satisfaz o conjunto $\{p_0 \vee p_1, p_1 \to p_2\}$.

Definição (*consistência semântica*): Um conjunto Γ de fórmulas é (*semanticamente*) *consistente* quando existe alguma valoração que o satisfaça. Um conjunto Γ de fórmulas é (*semanticamente*) *inconsistente* quando, para toda a valoração v, v não satisfaz Γ.

Exemplo:

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_0 \vee p_1, p_0 \to p_2, p_2 \to\perp\}$ é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 0$, $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 0$. Logo, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_0 \vee p_1, p_1 \to p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$. Logo, Δ_2 é consistente.

c) O conjunto $\Delta_3 = \{p_0 \wedge p_1, p_1 \to \neg p_0\}$ é inconsistente.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3. Então, $v(p_0 \wedge p_1) = 1$, *i.e.*, $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 1$, e $v(p_1 \to \neg p_0) = 1$. Como $v(p_0) = 1$ e $v(p_1 \to \neg p_0) = 1$, teremos que ter $v(\neg p_0) = 1$, *i.e.*, $v(p_0) = 0$. Assim, temos, por um lado, $v(p_0) = 1$ e, por outro lado, $v(p_0) = 0$, uma contradição, pois v é uma função. Logo, não existem valorações que satisfaçam Δ_3 e assim Δ_3 é inconsistente.

Proposição 1.10: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição (*conjuntos completos de conectivos*): Um conjunto X de conectivos é *completo* quando, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conectivos de ψ estão em X.

Proposição 1.11: Os conjuntos de conectivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conectivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conectivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

a) $f(\perp) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;

b) $\forall_{p \in \mathcal{V}^{CP}} \ f(p) = p$;

c) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}} \ f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$;

d) $\forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$;

e) $\forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$;

f) $\forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$;

g) $\forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}} \ f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$.

Lema: Para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conectivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício.

Do lema anterior concluimos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conectivos, pois, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$— tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conectivos de ψ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$. $\square$

Exemplo: Da demonstração da proposição anterior, segue-se que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow\perp) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow\perp$ e os seus conectivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Definição (*literais*): As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição (*formas normais*): Fórmulas das formas

i) $(l_{11} \vee ... \vee l_{1m_1}) \wedge ... \wedge (l_{n1} \vee ... \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge ... \wedge l_{1m_1}) \vee ... \vee (l_{n1} \wedge ... \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, são naturais, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respectivamente.

Exemplo:

a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (basta fazer, seguindo a notação utilizada na definição de formas normais, $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

b) A fórmula $p_1 \wedge (\neg p_2 \wedge \neg p_0)$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.

d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 1.12: Para toda a fórmula φ, existem formas normais conjuntivas φ^c e formas normais disjuntivas φ^d tais que: $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ, formas normais conjuntivas e formas normais disjuntivas logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow ((\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1))$, $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1)$.

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.

3. Eliminar duplas negações.

4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

□

Exemplo: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0$. Então:

i)
$$\begin{array}{ll} & \varphi \Leftrightarrow ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0 \Leftrightarrow (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3)) \wedge p_0 \end{array}$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii) $$\varphi \underset{\text{por i)}}{\Leftrightarrow} ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg p_2) \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0),$$

sendo a última fórmula uma FND.

Definição (*cláusulas*): Uma *cláusula* (*proposicional*) é um conjunto finito de literais. Utilizaremos a notação □ para o conjunto vazio de literais, ao qual chamaremos *cláusula vazia*.

Definição (*formas clausais*): Uma *forma clausal* é um conjunto finito, não vazio, de cláusulas. A *forma clausal de* uma FNC $(l_{11} \vee ... \vee l_{1n_1}) \wedge ... \wedge (l_{k1} \vee ... \vee l_{kn_k})$ é o conjunto de cláusulas $\{\{l_{11}, ..., l_{1n_1}\}, ..., \{l_{k1}, ..., l_{kn_k}\}\}$.

Observação: As formas normais conjuntivas com a mesma forma clausal são logicamente equivalentes. As vírgulas que separam os elementos de uma cláusula correspondem a disjunções, enquanto que as vírgulas que separam os elementos de uma forma clausal correspondem a conjunções.

Definição (*satisfação de cláusulas*): Uma valoração v *satisfaz* uma cláusula C quando v satisfaz pelo menos um literal de C, *i.e.*, quando $\exists_{l \in C} v(l) = 1$.

Proposição 1.13: A cláusula vazia não é satisfeita por nenhuma valoração.

Dem.: Uma vez que a cláusula vazia não tem qualquer literal, nenhuma valoração pode satisfazer pelo menos um literal da cláusula vazia. □

Definição (*satisfação de formas clausais*): Uma valoração v *satisfaz* uma forma clausal Γ quando v satisfaz todas as cláusulas de Γ.

Proposição 1.14: Uma valoração v satisfaz a forma clausal de uma forma normal conjuntiva φ se e só se $v(\varphi) = 1$.

Dem.: Sendo φ uma FNC, φ é da forma $(l_{11} \vee ... \vee l_{1n_1}) \wedge ... \wedge (l_{k1} \vee ... \vee l_{kn_k})$, onde os l_{ij} são literais e os n_i são maiores ou iguais a 1, e a sua forma clausal pode escrever-se como $\{\{l_{11}, ..., l_{1n_1}\}, ..., \{l_{k1}, ..., l_{kn_k}\}\}$. Assim, dada uma valoração v,

$$\begin{array}{ll} & v \text{ satisfaz } \{\{l_{11}, ..., l_{1n_1}\}, ..., \{l_{k1}, ..., l_{kn_k}\}\} \\ \text{sse} & v \text{ satisfaz } \{l_{11}, ..., l_{1n_1}\} \text{ e ... e } v \text{ satisfaz } \{l_{k1}, ..., l_{kn_k}\} \\ \text{sse} & v(l_{11} \vee ... \vee l_{1n_1}) = 1 \text{ e ... e } v(l_{k1} \vee ... \vee l_{kn_k}) = 1 \\ \text{sse} & v((l_{11} \vee ... \vee l_{1n_1}) \wedge ... \wedge (l_{k1} \vee ... \vee l_{kn_k})) = 1. \end{array}$$

$\square$

Definição (*resolvente*): Dadas duas cláusulas C_1 e C_2 e uma variável proposicional p tais que $p \in C_1$ e $\neg p \in C_2$, a cláusula $(C_1 - \{p\}) \cup (C_2 - \{\neg p\})$ é *o resolvente de* C_1 e C_2 *por* p. Dizemos que uma cláusula C é *um resolvente de* C_1 e C_2 quando C é o resolvente de C_1 e C_2 ou de C_2 e C_1 por alguma variável proposicional.

Observação: A definição de resolvente de duas cláusulas $\{l_{11}, ..., l_{1n}, p\}$ e $\{l_{21}, ..., l_{2m}, \neg p\}$ por uma variável proposicional p, reflecte o princípio de que: se uma valoração v atribui o valor lógico um às fórmulas $l_{11} \vee ... \vee l_{1n} \vee p$ e $l_{21} \vee ... \vee l_{2m} \vee \neg p$, então v também atribui o valor lógico um à fórmula $l_{11} \vee ... \vee l_{1n} \vee l_{21} \vee ... \vee l_{2m}$.

Definição (*derivações por resolução*): Uma (*derivação por*) *resolução de* uma cláusula C *a partir de* uma forma clausal Γ é uma árvore A de cláusulas tal que:

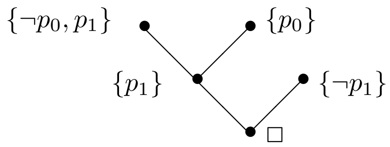
i) C é a raiz de A;

ii) todas as folhas de A pertencem a Γ;

iii) cada nodo de A que não é uma folha é um resolvente dos seus descendentes directos por algum literal.

Definição (*comprimento de resoluções*): O *comprimento* de uma resolução R é dado por $n - 1$, em que n é o número de nodos no ramo de R com mais nodos.

Exemplo: A árvore de cláusulas que se segue é uma resolução, com comprimento 2, de $\square$ a partir de $\{\{p_0\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{\neg p_1\}\}$.



Definição (*refutação*): Uma *refutação* de uma forma clausal Γ é uma resolução de $\Box$ a partir de Γ. Dizemos que Γ é *refutável* quando existem refutações de Γ.

Exemplo: A resolução do exemplo anterior é uma refutação de $\{\{p_0\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{\neg p_1\}\}$.

Teorema (*Resolução Proposicional*): Uma forma clausal Γ é refutável se e somente se não existem valorações que satisfaçam Γ.

Corolário (1.1): Sejam φ uma fórmula, ψ uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a $\neg\varphi$ e Γ a forma clausal de ψ. Então: Γ é refutável se e só se φ é uma tautologia.

Dem.:

	Γ é refutável	
sse	para toda a valoração v, v não satisfaz Γ	(teorema anterior)
sse	para toda a valoração v, $v(\psi) = 0$	(Proposição 1.14)
sse	para toda a valoração v, $v(\neg\varphi) = 0$	(ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$)
sse	para toda a valoração v, $v(\varphi) = 1$	(definição de valoração)
sse	φ é uma tautologia	(definição de tautologia).

$\Box$

Exemplo: A FNC $\psi = p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_1$ tem $\Gamma = \{\{p_0\}, \{\neg p_0, p_1\}, \{\neg p_1\}\}$ por forma clausal. Como vimos no exemplo anterior, Γ é refutável. Portanto, utilizando o corolário anterior (fazendo $\varphi = \neg\psi$), $\neg\psi$ é uma tautologia.

Observação: O corolário anterior fornece um método de decisão para tautologias. Dada uma fórmula φ, começamos por procurar uma FNC ψ logicamente equivalente a $\neg\varphi$. Se existir alguma refutação da forma clausal de ψ, φ é uma tautologia. De outro modo, φ não é uma tautologia.

Definição (*consequência semântica*): Uma fórmula φ é uma *consequência semântica* de um conjunto Γ de fórmulas (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando, para toda a valoração v, se v satisfaz Γ, então $v(\varphi) = 1$.

Exemplo: Dadas fórmulas φ e ψ, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$, pois, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

Proposição 1.15: Para toda a fórmula φ, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.
Dem.:

- $\Rightarrow$) Suponhamos que φ é uma tautologia. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz $\emptyset$. (Queremos demonstrar que $v(\varphi) = 1$.) Mas φ é uma tautologia, logo $v(\varphi) = 1$.

- $\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, para toda a valoração v que satisfaz o conjunto vazio, $v(\varphi) = 1$. Mas toda a valoração v satisfaz o conjunto vazio. Logo, para toda a valoração v, $v(\varphi) = 1$.

$\Box$

Notação: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$, e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Escrevemos:
a) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$; e
b) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$; e
c) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Proposição 1.16: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. Então, por definição de satisfação de conjuntos, para toda $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e assim, em particular, $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ. Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, da hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, se segue que $v(\varphi) = 1$.

c) Exercício.

d) $\Rightarrow$) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ $(*)$. Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue-se que $v(\varphi \to \psi) = 1$ $(**)$. Logo, de $(*)$ e $(**)$, pela definição de valorações, $v(\psi) = 1$.

$\Leftarrow$) Exercício.

e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ $(*)$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$ $(**)$. Logo, de $(*)$ e $(**)$, por definição de valorações, $v(\psi) = 1$. □

Proposição 1.17: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. □

Proposição 1.18(Redução ao Absurdo): Seja φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.
Dem.:

$\Rightarrow$) Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então,$v$ satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ $(*)$. Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, uma contradição com $(*)$. Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que v satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teriamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, se seguiria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ era semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. $\square$

1.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Definição (*regras de inferência*): As *regras de inferência* do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_2 E$$

$$\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\\ \hline \varphi \to \psi\end{array}\ \to I \qquad\qquad \frac{\psi \quad \psi \to \varphi}{\varphi}\ \to E$$

$$\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\\ \hline \neg\varphi\end{array}\ \neg I \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ \neg E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_2 I \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \cancel{\psi} & \cancel{\sigma}\\ & \vdots & \vdots\\ \psi \vee \sigma & \varphi & \varphi\\ \hline & \varphi & \end{array}\ \vee E$$

$$\begin{array}{cc}\cancel{\varphi} & \cancel{\psi}\\ \vdots & \vdots\\ \psi & \varphi\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\varphi \leftrightarrow \psi}\end{array}\ \leftrightarrow I \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot) \qquad\qquad \begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\\ \hline \varphi\end{array}\ (RAA)$$

onde notações das formas $\begin{array}{c}\rho\\ \vdots\\ \theta\end{array}$ e $\begin{array}{c}\cancel{\rho}\\ \vdots\\ \theta\end{array}$ representam *árvores de fórmulas anotadas* [6], construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ ocorre como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação (*i.e.*, com anotação vazia) ou anotada com um corte, respectivamente. Numa regra de inferência, as

[6] As anotações que poderão aparecer são de três tipos: o nome de uma regra de inferência — que só poderá aparecer a anotar ocorrências de fórmulas que não sejam folhas; cortes — que só podem aparecer como anotações de folhas; e anotações vazias — que também só poderão ser utilizadas em folhas.

fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* são chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Exemplo: Sejam φ, ψ e σ fórmulas. De seguida são apresentadas três árvores de fórmulas anotadas [7], construídas a partir das regras de inferência de DNP.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \quad \neg\neg\cancel{\varphi}^{(1)}}{\perp}\ \neg E}{\varphi}\ RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\ \to I^{(1)}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\ \wedge_2 E \quad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\ \to E}{\sigma}\ \to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\ \to I^{(1)}$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \to \varphi}\ \to I^{(2)}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\ \to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar *instâncias* de regras de inferência e fórmulas *cortadas* (*i.e.*, fórmulas anotadas com cortes) estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas cortadas e as regras que permitem efectuar esses cortes. Por exemplo, em **3)**, a instância de $\to I$ anotada com (1) é utilizada para cancelar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a instância de $\to I$ anotada com (2) não é utilizada para efectuar qualquer corte.

Definição (*derivações*): O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das *derivações* de DNP (também chamadas *deduções* ou *demonstrações*) é o conjunto de árvores de fórmulas anotadas gerado pelo conjunto de regras onde a única regra base é

$$\dfrac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ (não tendo φ qualquer anotação) e onde existe uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\to I$ e $\to E$ são, respectivamente,

$$\dfrac{\begin{matrix}\varphi\\ D\\ \psi\end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ \to I \quad \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\to I} \quad \text{e}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \varphi\end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{matrix}D_2\\ \varphi \to \psi\end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}D_2\\ \varphi \to \psi\end{matrix}}{\psi}\ \to E \quad \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\to E}\ ,$$

[7] A forma de ver estas construções como árvores de fórmulas anotadas passa por ver o nome de cada regra de inferência como a anotação da fórmula que ocorre como sua conclusão.

em que notações das formas $\begin{array}{c} D' \\ \theta \end{array}$, $\begin{array}{c} \sigma \\ D' \\ \theta \end{array}$ e $\begin{array}{c} \cancel{\sigma} \\ D' \\ \theta \end{array}$ representam derivações D' de raiz θ, sendo, nos dois últimos casos, também assumido que σ ocorre como folha de D', zero ou mais vezes, não anotada ou anotada com um corte, respectivamente.

Exemplo: As três árvores de fórmulas anotadas do exemplo anterior são derivações de DNP[8].

Observação: Sendo $\mathcal{D}^{DNP}$ um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado. A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$. Os sub-objectos de uma derivação D são chamados *subderivações* de D.

Exercício: Enuncie os teoremas de indução estrutural e de recursão estrutural para o conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ de derivações de DNP.

Definição (*hipóteses e conclusões*): Numa derivação D: a raiz de D é chamada a *conclusão* de D; as folhas de D são chamadas as *hipóteses* de D; as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as *hipóteses canceladas* (ou *cortadas*) de D, sendo as folhas de D sem qualquer anotação chamadas as *hipóteses não canceladas* (ou *não cortadas*) de D.

Definição (*fórmulas deriváveis*): Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto Γ de fórmulas ou uma *consequência sintáctica* de Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existe uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Neste caso, diremos que D é uma *derivação* de φ *a partir de* Γ.

Definição (*teoremas*): Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Neste caso, diremos que D é uma *derivação* de φ.

Notação: Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

a) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
b) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
c) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Exemplo:

a) Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \cancel{\psi \to \sigma}^{(1)}}{\sigma} \to E}{\varphi \to \sigma} \to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)} \to I^{(1)}$$

[8] Em bom rigor, estas construções são derivações apenas quando os naturais que anotam regras e cortes são ignorados

Então:

- o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;
- a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;
- D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$;
- $\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$.

b) Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_2 E}{\perp}\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\neg I^{(1)}$$

Então:

- o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;
- a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;
- D_2 é uma derivação de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;
- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema.

Proposição 1.19: Para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. □

Proposição 1.20: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, sendo esse nodo anotado por φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, *i.e.*, existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Então,

$$\dfrac{\varphi \qquad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois: i) ψ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois: i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de Γ), excepto φ, sendo portanto Δ um subconjunto de Γ.

□

Teorema (*Correcção*): Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ é válida, *i.e.*, existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Assim, aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Lema: Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação, de φ a partir de Γ, com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, pela Proposição 1.16, $\Gamma \models \varphi$.

b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\psi} \\ D_1 \\ \sigma \end{matrix}}{\psi \to \sigma} \to I,$$

então: $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, $\Gamma, \psi \models \sigma$. Donde, por aplicação da Proposição 1.16, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E,$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ; e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução às subderivações D_1 e D_2 de D, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respectivamente. Donde, por aplicação da Proposição 1.16, $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

□

Teorema (*Completude*): Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Ver a bibliografia recomendada. $\square$

Teorema (*Adequação*): Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se e só se } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Imediata, a partir dos teoremas da Correcção e da Completude. $\square$

Corolário (1.2): Para toda a fórmula φ, φ é um teorema se e só se φ é uma tautologia.
Dem.: Exercício. $\square$

2 Cálculo de Predicados de Primeira-Ordem da Lógica Clássica

2.1 Sintaxe

Definição (*linguagens*): Uma *linguagem* é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, em que:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos, numeráveis ou finitos, de símbolos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de domínio $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *símbolos de função*. Os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*. Para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, chamamos ao número natural $\mathcal{N}(s)$ a *aridade* de s. Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes*.

Exemplo: O terno $(\{0, s, +, *\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(*) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é uma linguagem. Chamaremos L_{Arit} a esta linguagem para a *Aritmética*.

Convenção: Durante este capítulo, e caso nada seja dito em contrário, L é utilizado para representar uma linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, cujo conjunto das constantes é $\mathcal{C}$.

Definição (*alfabetos induzidos por linguagens*): O *alfabeto* $\mathcal{A}_L$, do Cálculo de Predicados, *induzido por* uma linguagem L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) símbolos de função e símbolos de predicado de L;

b) $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados *conectivos proposicionais*;

c) $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, chamados *variáveis (de indivíduo)*, formando um conjunto numerável, notado por $\mathcal{V}$;

d) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal* respectivamente;

e) "(", ")" e "," chamados *símbolos auxiliares*.

Definição (*L-termos*): O conjunto de *L-termos*, que notamos por $\mathcal{T}_L$, é o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$, pelo conjunto de regras em que:

a) para cada variável x_i de $\mathcal{V}$, existe uma regra base $\dfrac{}{x_i \in \mathcal{T}_L}\ x_i$;

b) para cada constante c de L, existe uma regra base $\dfrac{}{c \in \mathcal{T}_L}\ c$;

c) para cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, existe uma regra indutiva

$$\frac{t_1 \in \mathcal{T}_L \quad ... \quad t_n \in \mathcal{T}_L}{f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L}\ f \quad .$$

Exemplo: A construção que se segue é uma árvore de formação da palavra $+(0, s(x_2))$ sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$. Portanto, esta palavra é um L_{Arit}-termo.

$$\dfrac{\dfrac{}{0 \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\ 0 \qquad \dfrac{\dfrac{}{x_2 \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\ x_2}{s(x_2) \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\ s}{+(0, s(x_2)) \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\ +$$

Convenção: Quando f é um símbolo de função *binário* (de aridade 2) e t_1 e t_2 são L-termos, utilizamos a notação $t_1 f t_2$ (possivelmente entre parênteses) para representar o L-termo $f(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $0 + s(x_2)$ representará o L_{Arit}-termo $+(0, s(x_2))$.

Definição (*subtermos*): Chamaremos *subtermos* aos sub-objectos de um L-termo

Exemplo: O conjunto dos subtermos de $0 + s(x_2)$ é $\{0 + s(x_2), 0, s(x_2), x_2\}$. A sequência de objectos $x_2, s(x_2), 0, 0 + s(x_2)$ é uma sequência de formação de $0 + s(x_2)$.

Observação: A definição indutiva do conjunto de L-termos é determinista, pois regras diferentes produzem conclusões diferentes e duas instâncias de uma mesma regra só produzem a mesma conclusão quando têm as mesmas premissas. Assim, existe um teorema de recursão estrutural para L-termos, que pode ser enunciado como se segue.

Teorema (*Recursão Estrutural para L-Termos*): Sejam X um conjunto, $g_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to X$ e $g_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow X$ funções e seja, para cada símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, $g_f : X^n \longrightarrow X$ uma função. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{T}_L \longrightarrow X$ tal que:

a) $\forall_{x \in \mathcal{V}} \; G(x) = g_{\mathcal{V}}(x)$;

b) $\forall_{c \in \mathcal{C}} \; G(c) = g_{\mathcal{C}}(c)$;

c) para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$G(f(t_1, ..., t_n)) = g_f(G(t_1), ..., G(t_n)).$$

Definição (*variáveis de termos*): O conjunto $\mathrm{VAR}(t)$, das *variáveis que ocorrem* num L-termo t, é definido, por recursão estrutural em t, como:

a) $\forall_{x \in \mathcal{V}} \quad \mathrm{VAR}(x) = \{x\}$;

b) $\forall_{c \in \mathcal{C}} \quad \mathrm{VAR}(c) = \emptyset$;

c) para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$\mathrm{VAR}(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(t_i).$$

Exemplo: O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é

$$\mathrm{VAR}(x_2 + s(x_1)) = \mathrm{VAR}(x_2) \cup \mathrm{VAR}(s(x_1)) = \{x_2\} \cup \mathrm{VAR}(x_1) = \{x_2, x_1\}.$$

Definição (*substituição de variáveis por termos em termos*): O L-termo que resulta da *substituição*, num L-termo t_0, de uma variável x por um L-termo t, que notaremos por $t_0[t/x]$, é definido, por recursão estrutural em t_0, como:

a) $\forall_{y \in \mathcal{V}} \ \ y[t/x] = \begin{cases} t \ \ se \ \ y = x \\ \\ y \ \ se \ \ y \neq x \end{cases}$;

b) $\forall_{c \in \mathcal{C}} \ \ c[t/x] = c$;

c) para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]).$$

Exemplo: O L_{Arit}-termo que resulta da substituição de x_1 por $s(0)$, em $x_2 + s(x_1)$, é

$$(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] = x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] = x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) = x_2 + s(s(0)).$$

Observação: Sendo o conjunto de L-termos um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural para este conjunto, que pode ser enunciado como se segue.

Teorema (*Indução Estrutural em L-Termos*): Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t. Se:

a) $\forall_{x \in \mathcal{V}} \ \ P(x)$ é válida;

b) $\forall_{c \in \mathcal{C}} \ \ P(c)$ é válida;

c) para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

se $P(t_1)$ e ... e $P(t_n)$ são válidas, então $P(f(t_1, ..., t_n))$ é válida;

então $\forall_{t \in \mathcal{T}_L} \ \ P(t)$ é válida.

Dem.: Exercício. □

Proposição 2.21: Dados L-termos t_1 e t_2 e dada uma variável x, se $x \notin \mathrm{VAR}(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. (Exercício.) □

Definição (*L-fórmulas atómicas*): Uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_L$, induzido pela linguagem L, da forma $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é um símbolo de relação de aridade n e $t_1, ..., t_n$ são L-termos, é chamada uma *L-fórmula atómica*. Notamos o conjunto das L-fórmulas atómicas por At_L.

Exemplo: As palavras $< (x_0, s(0))$ e $= (x_0, x_1)$, sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, são L_{Arit}-fórmulas atómicas.

Convenção: Quando R é um símbolo de relação *binário* (de aridade 2) e t_1 e t_2 são L-termos, utilizamos a notação $t_1 R t_2$ (possivelmente entre parênteses) para representar o L-fórmula atómica $R(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L_{Arit}-fórmula atómica $< (x_0, s(0))$.

Definição (*L-fórmulas*): O conjunto das *L-fórmulas*, que notamos por $\mathcal{F}_L$, é o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$, pelo conjunto de regras em que:

a) existe uma regra base $\dfrac{}{\bot \in \mathcal{F}_L}\ \bot$;

b) para cada L-fórmula atómica φ, existe uma regra base $\dfrac{}{\varphi \in \mathcal{F}_L}\ \mathrm{At}_L$;

c) existe uma regra indutiva $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L}\ \neg$;

d) para cada $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, existe uma regra indutiva $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L \quad \psi \in \mathcal{F}_L}{(\varphi\Box\psi) \in \mathcal{F}_L}\ \Box$;

e) para cada variável x de $\mathcal{V}$, existem regras indutivas $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L}{(\exists_x\varphi) \in \mathcal{F}_L}\ \exists_x \quad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L}{(\forall_x\varphi) \in \mathcal{F}_L}\ \forall_x$.

Exemplo: A palavra $(\forall_{x_0}(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1)))$, sobre o alfabeto induzido pela linguagem L_{Arit}, tem na construção que se segue uma sua árvore de formação, como tal, esta palavra é uma L_{Arit}-fórmula.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(x_0 < s(0)) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\ At_{L_{Arit}}}{(\neg(x_0 < s(0))) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\ \neg \qquad \dfrac{}{(x_0 = x_1) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\ At_{L_{Arit}}}{((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1)) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\ \rightarrow}{(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1))) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\ \exists_{x_1}}{(\forall_{x_0}(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1))) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\ \forall_{x_0}$$

Convenção: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula do exemplo anterior poderá ser notada por $\forall_{x_0}\exists_{x_1}(\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow (x_0 = x_1))$.

Observação: O conjunto de L-fórmulas encontra-se definido através de uma definição indutiva determinista. Como tal, existem teoremas de recursão e de indução estrutural para L-fórmulas, que se enunciam de seguida.

Teorema (*Recursão Estrutural em L-fórmulas*): Sejam X um conjunto e $x \in X$ e sejam $g : \mathrm{At}_L \longrightarrow X$, $g_\neg : X \longrightarrow X$, $g_\Box : X \times X \longrightarrow X$ (para cada $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$) e $g_Q : X \longrightarrow X$ (para cada $Q \in \{\exists, \forall\}$) funções. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{F}_L \longrightarrow X$ tal que:

a) $G(\bot) = x$;

b) $\forall_{\varphi \in At_L}\ G(\varphi) = g(\varphi)$;

c) $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}_L}\ G(\neg\varphi)) = g_\neg(G(\varphi))$;

d) $\forall_{\Box \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}}\ \forall_{\varphi,\psi \in \mathcal{F}_L}\ G(\varphi\Box\psi) = g_\Box(G(\varphi), G(\psi))$;

e) $\forall_{Q \in \{\exists,\forall\}}\ \forall_{y \in \mathcal{V}}\ \forall_{\varphi \in \mathcal{F}_L}\ G(Q_y\varphi) = g_Q(G(\varphi))$.

Teorema (*Indução Estrutural em L-Fórmulas*): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ. Se:

a) $P(\bot)$;

b) $\forall_{\psi \in At_L} \ P(\psi)$;

c) $\forall_{\psi \in \mathcal{F}_L} \ P(\psi) \implies P(\neg\psi)$;

d) $\forall_{\square \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}} \forall_{\psi,\sigma \in \mathcal{F}_L} \ P(\psi)$ e $P(\sigma) \implies P(\psi \square \sigma)$;

e) $\forall_{Q \in \{\exists,\forall\}} \forall_{x \in \mathcal{V}} \forall_{\psi \in \mathcal{F}_L} \ P(\psi) \implies P(Q_x \psi)$;

então $\forall_{\varphi \in \mathcal{F}_L} \ P(\varphi)$.

Dem.: Exercício □

Definição (*subfórmulas*): Aos sub-objectos de uma L-fórmula φ chamaremos *subfórmulas* de φ.

Definição (*alcance de quantificadores*): Dada uma subfórmula de uma L-fórmula φ da forma $Q_x\psi$, em que $Q \in \{\exists,\forall\}$ e $x \in \mathcal{V}$, o *alcance* desta ocorrência do quantificador[9] Q_x em φ é a L-fórmula ψ.

Exemplo: Na L_{Arit}-fórmula $\forall_{x_0}(\exists_{x_1}(x_0 = s(x_1)) \rightarrow (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists_{x_1}(x_1 < x_0)))$,

a) o alcance de $\forall_{x_0}$ é $\exists_{x_1}(x_0 = s(x_1)) \rightarrow (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists_{x_1}(x_1 < x_0))$,;

b) o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists_{x_1}$ é $x_0 = s(x_1)$;

c) o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists_{x_1}$ é $x_1 < x_0$.

Definição (*ocorrências livres e ocorrências ligadas de variáveis*): Numa L-fórmula φ, uma ocorrência numa subfórmula atómica de φ de uma variável x diz-se *livre* quando essa ocorrência não está no alcance de nenhum quantificador Q_x (com $Q \in \{\exists,\forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*. Notamos por LIV(φ) o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e notamos por LIG(φ) o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Exemplo: Seja φ a L_{Arit}-fórmula

$$\exists_{x_1}(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \rightarrow \forall_{x_0}(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0, por se encontrar no alcance do quantificador $\forall_{x_0}$, é ligada. A ocorrência (a) de x_1 é também ligada, pois encontra-se no alcance do quantificador $\exists_{x_1}$. Assim, LIV$(\varphi) = \{x_0\}$ e LIG$(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Definição (*substituição de variáveis por termos em fórmulas*): A L-fórmula resultante da *substituição*, numa L-fórmula φ, de todas as ocorrências livres de uma variável x por um L-termo t, que será notada por $\varphi[t/x]$, é definida, por recursão estrutural em φ, como:

a) $\perp [t/x] = \perp$;

b) para todo o símbolo de relação R, de aridade n, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]);$$

[9] A expressão quantificador, utilizada anteriormente para designar os símbolos $\exists$ e $\forall$, será também utilizada para designar uma sequência com dois símbolos, em que o primeiro símbolo é $\exists$ ou $\forall$ e o segundo símbolo é uma variável.

c) $\forall_{\psi \in \mathcal{F}_L}\ (\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$;

d) $\forall_{\square \in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}}\ \forall_{\psi_1,\psi_2 \in \mathcal{F}_L}\ (\psi_1 \square \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \square \psi_2[t/x]$;

e) $\forall_{Q \in \{\exists,\forall\}}\ \forall_{y \in \mathcal{V}}\ \forall_{\psi \in \mathcal{F}_L}\ (Q_y\psi)[t/x] = \begin{cases} Q_y\psi & \text{se } y = x \\ Q_y\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$.

Exemplo: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\exists_{x_1}(\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow \forall_{x_0}(x_0 = x_1))$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists_{x_1}(\neg(s(x_1) < s(0)) \rightarrow \forall_{x_0}(x_0 = x_1)).$$

Definição (*variáveis substituíveis por termos em fórmulas*): Uma variável x diz-se *substituível por* um L-termo t numa L-fórmula φ quando não existem ocorrências livres de x no alcance de quantificadores Q_y, em que $Q \in \{\exists,\forall\}$ e $y \in \mathrm{VAR}(t)$, ou, equivalentemente, quando, para toda a ocorrência livre de x em φ, se essa ocorrência está no alcance de um quantificador Q_y, com $Q \in \{\exists,\forall\}$, então $y \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Exemplo: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$.

a) x_0 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres em φ.

b) x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, uma vez que a única ocorrência livre de x_1 em φ não se encontra no alcance de qualquer quantificador.

c) x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$ e $x_1 \in \mathrm{VAR}(x_1 + s(x_2))$.

d) Em φ existem duas ocorrências livres de x_2. Uma dessas ocorrências está no alcance de um único quantificador, $\forall_{x_1}$. A outra ocorrência não está no alcance de nenhum quantificador. Logo, x_2 é substituível por um L-termo t em φ se e só se $x_1 \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Observação: Observe que mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida. Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2));$$

no entanto, a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1+s(x_2)$ em $\forall_{x_1}(x_1 < x_2)\vee\neg(x_1 < x_2))$ encontra-se definida e é igual a

$$\forall_{x_1}(x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))).$$

Contudo, note que a primeira ocorrência da variável x_2 em φ, que era livre, foi substituída pelo termo $x_1 + s(x_2)$, cuja ocorrência de x_1 passou a estar ligada ao quantificador $\forall_{x_1}$.

Convenção: Caso nada seja dito em contrário, sempre que escrevermos $\varphi[t/x]$, assumimos que a variável x é substituível pelo L-termo t na L-fórmula φ.

Proposição 2.22: Dadas uma L-fórmula φ e uma variável x e dado um L-termo t,

$$x \notin \mathrm{LIV}(\varphi) \implies \varphi[t/x] = \varphi.$$

Dem.: Por indução estrutural em φ.

a) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp [t/x] \overset{(1)}{=} \perp = \varphi$.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

b) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com R um símbolo de relação, n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Assim, temos que $\forall_{1 \le i \le n}\ \ x \notin \mathrm{VAR}(t_i)$, de outra forma teriamos $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, uma contradição. Portanto, aplicando a Proposição 2.21, $\forall_{1 \le i \le n}\ \ t_i[t/x] = t_i$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, ..., t_n)[t/x] \overset{(1)}{=} R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) \overset{(2)}{=} R(t_1, ..., t_n) = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	$\forall_{1 \le i \le n}\ \ t_i[t/x] = t_i$.

c) Caso $\varphi = Q_y \varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Q_y \varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Q_y \varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Q_y \varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Q_y \varphi_1[t/x] \overset{(2)}{=} Q_y \varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Por hipótese, $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$. Como $\mathrm{LIV}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{LIV}(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue-se que $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício. □

Definição (*sentenças*): Uma L-fórmula φ diz-se uma L-*sentença*, ou uma L-*fórmula fechada*, quando não tem ocorrências livres de variáveis, *i.e.*, $\mathrm{LIV}(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 2.23: Sejam φ uma L-sentença, x uma variável e t um L-termo. Então, $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. □

2.2 Semântica

Definição (*L-estruturas*): Uma *L-estrutura* E é um par $(D, \overline{})$ tal que:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio* de E e notado por $dom(E)$;

b) $\overline{}$ é uma função de domínio $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, chamada a *função interpretação* de E, tal que:

- para cada constante c de L, $\overline{}$ faz corresponder um elemento $\overline{c}$ de D;
- para cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, $\overline{}$ faz corresponder uma função $\overline{f} : D^n \longrightarrow D$, n-ária;
- para cada símbolo de relação R de L, de aridade n, $\overline{}$ faz corresponder uma relação $\overline{R} \subseteq D^n$, n-ária .

Para cada símbolo $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, $\overline{s}$ é chamada a *interpretação* de s em E.

Exemplo:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número natural *zero*;
- $\overline{s}$ é a função de *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função de *adição* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{*}$ é a função de *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{<}$ é a relação de *menor do que* em $\mathbb{N}_0$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura.

b) É também uma L_{Arit}-estrutura o par $(\{a, b\}, \overline{})$, onde:

- $\overline{0} = a$;
- $\overline{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} \times \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ (x, y) & \longmapsto & a \end{array}$;
- $\overline{*}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} \times \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ (x, y) & \longmapsto & b \end{array}$;
- $\overline{=} = \{(a, a), (b, b)\}$;
- $\overline{<} = \{(a, b)\}$.

Definição (*atribuições*): Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$, do conjunto das variáveis para o domínio de uma L-estrutura E, é chamada uma *atribuição em E*.

Exemplo: A função $\begin{array}{rcl} a^{ind} : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \longmapsto & i \end{array}$ é uma atribuição em E_{Arit}.

Definição (*valores de termos*): O *valor de* um L-termo t *para* uma atribuição a *numa* L-estrutura $E = (D, \overline{})$, que notamos por $t[a]_E$ ou, simplesmente, por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) é um elemento de D definido, por recursão estrutural em t, como:

a) $\forall_{x \in \mathcal{V}}\ x[a] = a(x)$;

b) $\forall_{c \in \mathcal{C}}\ c[a] = \overline{c}$;

c) para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$f(t_1, ..., t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., t_n[a]).$$

Exemplo: O valor do L_{Arit}-termo $s(x_0) * (x_0 + x_2)$ para a atribuição a^{ind}, na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}, é

$$(s(x_0) * (x_0 + x_2))[a^{ind}] = s(x_0)[a^{ind}] \times (x_0 + x_2)[a^{ind}]$$

$$= \quad (x_0[a^{ind}] + 1) \times (x_0[a^{ind}] + x_2[a^{ind}]) = (0+1) \times (0+2) = 2.$$

Proposição 2.24: Dado um L-termo t e dadas atribuições a_1 e a_2 numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$,

$$\forall_{x \in \mathrm{VAR}(t)}\ a_1(x) = a_2(x) \implies t[a_1] = t[a_2].$$

Dem.: Por indução estrutural em t.

a) Caso t seja uma variável. Então, $t \in \mathrm{VAR}(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(t) = a_2(t)$ **(*)**. Assim,

$$t[a_1] \overset{(1)}{=} a_1(t) \overset{(*)}{=} a_2(t) \overset{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

b) Caso t seja uma constante. Então,

$$t[a_1] \overset{(1)}{=} \overline{t} \overset{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

c) Caso t seja da forma $f(t_1, ..., t_n)$ (com f um símbolo de função de aridade $n \geq 1$). Então,

$$t[a_1] = f(t_1, ..., t_n)[a_1] \overset{(1)}{=} \overline{f}(t_1[a_1], ..., t_n[a_1])$$

$$\overset{(2)}{=} \quad \overline{f}(t_1[a_2], ..., t_n[a_2]) \overset{(1)}{=} f(t_1, ..., t_n)[a_2] = t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.
(2)	Para $1 \leq i \leq n$, como $\mathrm{VAR}(t_i) \subseteq \mathrm{VAR}(t)$, da hipótese segue-se que: $\forall_{x \in \mathrm{VAR}(t_i)}\ a_1(x) = a_2(x)$. Logo, por H.I.,$\forall_{1 \leq i \leq n}\ t_i[a_1] = t_i[a_2]$.

De a), b) e c), por indução estrutural em L-termos, pode agora concluir-se que:

$$\forall_{t \in \mathcal{T}_L} \quad (\forall_{x \in \mathrm{VAR}(t)}\ a_1(x) = a_2(x)) \implies t[a_1] = t[a_2].$$

□

Notação: Sejam a uma atribuição numa L-estrutura E, $d \in dom(E)$ e x uma variável. Escrevemos $a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ para a atribuição tal que:

$$\forall_{y \in \mathcal{V}} \quad a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}(y) = \begin{cases} d \text{ se } y = x \\ \\ a(y) \text{ se } y \neq x \end{cases} .$$

Proposição 2.25: Sejam t_0 e t_1 L-termos e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então, $t_0[t_1/x][a] = t_0[a\begin{pmatrix} x \\ t_1[a] \end{pmatrix}]$.

Dem.: Por indução estrutural em t_0. (Exercício.) $\square$

Definição (*valor lógico de L-fórmulas*): O *valor lógico de* uma L-fórmula φ *numa* L-estrutura $E = (D, \overline{})$ *para* uma atribuição a em E, que notamos por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) é um elemento do conjunto $\{0, 1\}$ definido, por recursão em φ, como:

a) $\perp [a] = 0$;

b) $R(t_1, ..., t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], ..., t_n[a]) \in \overline{R}$ para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

c) $(\neg\varphi_1)[a] = 1 - \varphi_1[a] \quad \forall_{\varphi_1 \in \mathcal{F}_L}$;

d) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a] = min(\varphi_1[a], \varphi_2[a]) \quad \forall_{\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L}$;

e) $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[a] = max(\varphi_1[a], \varphi_2[a]) \quad \forall_{\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L}$;

f) $(\varphi_1 \to \varphi_2)[a] = 0$ sse $\varphi_1[a] = 1$ e $\varphi_2[a] = 0 \quad \forall_{\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L}$;

g) $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[a] = 1$ sse $\varphi_1[a] = \varphi_2[a] \quad \forall_{\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L}$;

h) $(\exists_x \varphi_1)[a] = 1$ sse $\exists_{d \in D} \; \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] = 1$
sse $max\{\varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] : d \in D\} = 1 \quad \forall_{x \in \mathcal{V}} \forall_{\varphi_1 \in \mathcal{F}_L}$;

i) $(\forall_x \varphi_1)[a] = 1$ sse $\forall_{d \in D} \; \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] = 1$
sse $min\{\varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] : d \in D\} = 1 \quad \forall_{x \in \mathcal{V}} \forall_{\varphi_1 \in \mathcal{F}_L}$.

Exemplo: O valor lógico da L_{Arit}-fórmula $\exists x_1 \exists x_2 (x_3 + x_2 = s(s(0)) * x_1)$, em E_{Arit}, para a atribuição a^{ind}, é 1, pois é a seguinte proposição da Aritmética é verdadeira.

$$\exists_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0} 3 + n_2 = 2 \times n_1$$

Definição (*satisfação*): Dizemos que uma L-estrutura E *satisfaz* uma L-fórmula φ para uma atribuição a em E, e escrevemos $E \models \varphi[a]$, quando o valor lógico de φ em E para a é 1. Dizemos que a L-estrutura E *não satisfaz* φ para a atribuição a, e escrevemos $E \not\models \varphi[a]$, quando o valor lógico de φ em E para a é 0.

Proposição 2.26: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então:

a) $E \models \exists_x \varphi[a]$ sse $\exists_{d \in dom(E)}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$;

b) $E \models \forall_x \varphi[a]$ sse $\forall_{d \in dom(E)}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$;

c) $E \not\models \exists_x \varphi[a]$ sse $\forall_{d \in dom(E)}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$;

d) $E \not\models \forall_x \varphi[a]$ sse $\exists_{d \in dom(E)}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

Dem.: Imediata, a partir da definição de valor lógico de L-fórmulas. Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} & E \not\models \exists_x \varphi[a] & \\ \text{sse} & \exists_x \varphi[a]_E = 0 & \text{(por definição de } \not\models\text{)} \\ \text{sse} & \forall_{d \in dom(E)}\ \varphi[a\binom{x}{d}]_E = 0 & \text{(por definição de valor lógico)} \\ \text{sse} & \forall_{d \in dom(E)}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}] & \text{(por definição de } \not\models\text{).} \end{array}$$

□

Exemplo: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\forall_{x_1}(\neg(x_1 = x_0) \to \exists_{x_2}(s(x_2) = x_1))$.

$$\begin{array}{lll} & & E_{Arit} \models \forall_{x_1}(\neg(x_1 = x_0) \to \exists_{x_2}(s(x_2) = x_1))[a^{ind}] \\ \text{sse} & \forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} & E_{Arit} \models \neg(x_1 = x_0) \to \exists_{x_2}(s(x_2) = x_1)[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] \\ \text{sse} & \forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} & \qquad E_{Arit} \not\models \neg(x_1 = x_0)[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] \\ & & \text{ou} \quad E_{Arit} \models \exists_{x_2}(s(x_2) = x_1)[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] \\ \text{sse} & \forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} & \qquad E_{Arit} \models x_1 = x_0[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}] \\ & & \text{ou} \quad \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}\ E_{Arit} \models s(x_2) = x_1[a^{ind}\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] \\ \text{sse} & \forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} & n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}\ n_2 + 1 = n_1 \end{array}$$

Assim, uma vez que a última proposição é verdadeira, temos que E_{Arit} satisfaz φ para a^{ind} ou, por outras palavras, o valor lógico de φ em E_{Arit} para a^{ind} é 1.

Proposição 2.27: Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura E.

a) Se $\forall_{x \in \mathrm{LIV}(\varphi)}\ a_1(x) = a_2(x)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

b) Se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $\forall_{d \in dom(E)}\ E \models \varphi[a_1\binom{x}{d}]$.

c) Se φ é uma L-sentença, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Dem.:

a) Por indução estrutural em φ. (Exercício.)

b) e **c)** Exercício. (Sugestão: Aplique a alínea a).) □

Proposição 2.28: Sejam φ uma L-fórmula, $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível por um L-termo t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \text{ sse } E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}].$$

Dem.:

a) Caso $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, $E \models \varphi[t/x][a] \overset{(1)}{\text{sse}} E \models \varphi[a] \overset{(2)}{\text{sse}} E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$.

Justificações

(1) Da Proposição 2.22, por $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, $\varphi[t/x] = \varphi$.
(2) Como $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ e $t[a] \in dom(E)$, por (i) da proposição anterior, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$.

b) Caso $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, a demonstração segue por indução estrutural em φ.

1) $\varphi \neq \perp$, de outra forma $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$.

2) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com R símbolo de relação n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então:

$$\begin{aligned}
& E \models R(t_1, ..., t_n)[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] \\
\overset{(1)}{\text{sse}}\ & (t_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}], ..., t_n[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]) \in \overline{R} \\
\overset{(2)}{\text{sse}}\ & (t_1[t/x][a], ..., t_n[t/x][a]) \in \overline{R} \\
\overset{(1)}{\text{sse}}\ & E \models R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])[a] \\
\overset{(3)}{\text{sse}}\ & E \models R(t_1, ..., t_n)[t/x][a].
\end{aligned}$$

Justificações

(1) Definição de satisfação.
(2) Pela Proposição 2.25, $\forall_{1 \leq i \leq n} \quad t_i[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] = [t/x]t_i[a]$.
(3) Definição de substituição.

3) Caso $\varphi = \forall_y \varphi_1$. Então, $y \neq x$ (de outra forma $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$) e $y \notin \mathrm{VAR}(t)$ (de outra forma x não seria substituível por t em φ). Assim,

$$\begin{aligned}
& E \models (\forall_y \varphi_1)[t/x][a] \\
\overset{(1)}{\text{sse}}\ & E \models \forall_y \varphi_1[t/x][a] \\
\overset{(2)}{\text{sse}}\ & \forall_{d \in dom(E)} \ E \models \varphi_1[t/x][a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}] \\
\overset{(3)}{\text{sse}}\ & \forall_{d \in dom(E)} \ E \models \varphi_1[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}] \end{pmatrix}] \\
\overset{(4)}{\text{sse}}\ & \forall_{d \in dom(E)} \ E \models \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}] \\
\overset{(2)}{\text{sse}}\ & E \models \forall_y \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]
\end{aligned}$$

Justificações

(1) Definição de substituição.
(2) Definição de satisfação.
(3) Hipótese de indução.
(4) Como $y \neq x$, $a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}$. Da Proposição 2. 24, por $y \notin \mathrm{VAR}(t)$, $t[a] = t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}]$. Logo,

$$a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}] \end{pmatrix}.$$

4) Os restantes casos são deixados como exercício. $\square$

Definição (*fórmulas válidas em estruturas*): Dizemos que uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E, e escrevemos $E \models \varphi$, quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ *não é válida* em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Definição (*fórmulas universalmente válidas*): Dizemos que uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida*, e escrevemos $\models \varphi$, quando φ é válida em todas as L-estruturas. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Exemplo: A L_{Arit}-fórmula $\exists_{x_0}(x_0 = x_1)$ é válida na estrutura E_{Arit}, no entanto esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, uma L_{Arit}-estrutura que interprete o símbolo de relação $=$ como a relação vazia não valida esta fórmula.

Definição (*equivalência lógica*): Dizemos que uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ, escrevendo $\varphi \Leftrightarrow \psi$, quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Proposição 2.29: Dadas L-fórmulas φ e ψ e dadas variáveis x e y, são válidas as proposições que se seguem.

a) $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists_x\neg\varphi$ **b)** $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall_x\neg\varphi$

c) $\neg\forall_x\varphi \Leftrightarrow \exists_x\neg\varphi$ **d)** $\neg\exists_x\varphi \Leftrightarrow \forall_x\neg\varphi$

e) $\forall_x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall_x\varphi \wedge \forall_x\psi$ **f)** $\exists_x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists_x\varphi \vee \exists_x\psi$

g) $(\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi) \to \forall_x(\varphi \vee \psi)$ **h)** $\exists_x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$

i) $\not\models \forall_x(\varphi \vee \psi) \to (\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi)$ **j)** $\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)$

k) $\forall_x\forall_y\varphi \Leftrightarrow \forall_y\forall_x\varphi$ **l)** $\exists_x\exists_y\varphi \Leftrightarrow \exists_y\exists_x\varphi$

m) $\models \exists_x\forall_y\varphi \to \forall_y\exists_x\varphi$ **n)** $\not\models \forall_x\exists_y\varphi \to \exists_y\forall_x\varphi$

o) $Q_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ $(Q \in \{\exists, \forall\})$

p) $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \forall_y\varphi[y/x]$ se $y \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ e x é substituível por y em φ

q) $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \exists_y\varphi[y/x]$ se $y \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ e x é substituível por y em φ

Dem.:

a) Sejam L uma linguagem, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall_x\varphi[a]$ sse $E \models \neg\exists_x\neg\varphi[a]$.)

$$
\begin{array}{ll}
 & E \models \forall_x \varphi[a] \\
\overset{(1)}{\text{sse}} & \forall_{d \in dom(E)} \ E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] \\
\overset{(2)}{\text{sse}} & \forall_{d \in dom(E)} \ E \not\models \neg\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] \\
\overset{(3)}{\text{sse}} & E \not\models \exists_x \neg\varphi[a] \\
\overset{(2)}{\text{sse}} & E \models \neg\exists_x \neg\varphi[a]
\end{array}
$$

Justificações

(1) Por (b) da Proposição 2.29.
(2) $\forall_{\psi \in \mathcal{F}_L}$ $E \models \psi[a]$ sse $E \not\models \neg\psi[a]$ (Exercício).
(3) Por (c) da Proposição 2.29.
(4) $\forall_{\psi \in \mathcal{F}_L}$ $E \not\models \psi[a]$ sse $E \models \neg\psi[a]$ (Exercício).

n) Seja L uma linguagem contendo um símbolo R de relação, binário. Seja E uma L-estrutura de domínio $\{a, b\}$, onde a interpretação de R é o conjunto $\{(a, b), (b, a)\}$. Então, $E \models \forall_{x_0}\exists_{x_1} R(x_0, x_1)$, mas $E \not\models \exists_{x_1}\forall_{x_0} R(x_0, x_1)$ (Porquê?). Logo, $E \not\models \forall_{x_0}\exists_{x_1} R(x_0, x_1) \rightarrow \exists_{x_1}\forall_{x_0} R(x_0, x_1)$.

A demonstração das restantes proposições é deixada como exercício. □

Definição (*instâncias de fórmulas do Cálculo Proposicional*): Uma L-fórmula ψ é uma *instância* de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional quando existe uma enumeração $p'_1, ..., p'_n$ de $var(\varphi)$ e existem L-fórmulas $\psi_1, ..., \psi_n$ tais que $\psi = \varphi[\psi_1/p'_1; ...; \psi_n/p'_n]$, ou seja, ψ é a L-fórmula obtida de φ substituindo, em simultâneo, cada p'_i por ψ_i.

Exemplo: A L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \rightarrow (\forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 + x_1 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1))$ é uma instância da fórmula $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$ do Cálculo Proposicional, pois:

$$
\begin{array}{ll}
 & (x_0 = x_1) \rightarrow (\forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 + x_1 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1)) \\
= & (p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))[(x_0 = x_1)/p_0; \forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 + x_1 = 0)/p_1].
\end{array}
$$

Proposição 2.30: Se uma L-fórmula ψ é uma instância de uma tautologia do Cálculo Proposicional, então ψ é válida em qualquer L-estrutura.

Exemplo: A L_{Arit}-fórmula $\varphi = ((x_0 = x_1) \rightarrow (\forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 + x_1 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1)))$ é, como vimos no exemplo anterior, uma instância de $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$. Assim, sendo $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$ uma tautologia, podemos, pela proposicao anterior, concluir que φ é uma fórmula válida.

Observação: Nem todas as L-fórmulas válidas são instâncias de tautologias do Cálculo Proposicional. Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula $\forall_{x_0}((x_0 = 0) \vee \neg(x_0 = 0))$ é válida em todas as L_{Arit}-estruturas, no entanto, esta fórmula não é instância de nenhuma tautologia, pois as únicas fórmulas do Cálculo Proposicional das quais esta fórmula é uma instância são as variáveis proposicionais, que, como sabemos, não são tautologias.

Definição (*realização*): Dizemos que um par (E, a), em que E é uma L-estrutura e a é uma atribuição em E, é uma *realização* de um conjunto Γ de L-fórmula quando, para toda $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$.

Exemplo: O par (E_{Arit}, a^{ind}) é uma realização do conjunto $\{\forall_{x_0}(x_0 * x_1 = x_0), \forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 < x_1)\}$ de L_{Arit}-fórmulas, mas não é uma realização do conjunto $\{\forall_{x_0}(x_0 * x_1 = x_0), \forall_{x_0}(x_0 < x_1)\}$ de L_{Arit}-fórmulas.

Definição (*consistência semântica*): Um conjunto Γ de L-fórmulas diz-se *semanticamente consistente*, ou *realizável*, quando existe uma realização de Γ. Caso contrário, Γ diz-se *semanticamente inconsistente*.

Exemplo:

a) O conjunto $\Gamma = \{\forall_{x_0}(x_0 * x_1 = x_0), \forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 < x_1)\}$, de L_{Arit}-fórmulas, é semanticamente consistente. Por exemplo, (E_{Arit}, a^{ind}) é uma realização de Γ.

b) O conjunto $\{\forall_{x_0}(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$, de L_{Arit}-fórmulas, é semanticamente inconsistente. (Exercício.)

Definição (*modelo*): Uma L-estrutura E é um *modelo* de um conjunto Γ de L-fórmulas quando, para toda a atribuição a em E, (E, a) realiza Γ ou, por outras palavras, quando toda a L-fórmula de Γ é válida em E.

Exemplo: E_{Arit} é um modelo do conjunto formado pelas seguintes L-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall_{x_0}\neg(0 = s(x_0));\\
\forall_{x_0}\forall_{x_1}((s(x_0) = s(x_1)) \to (x_0 = x_1));\\
\forall_{x_0}\neg(s(x_0) < 0);\\
\forall_{x_0}\forall_{x_1}((x_0 < s(x_1)) \to ((x_0 < x_1) \lor (x_0 = x_1))));\\
\forall_{x_0}(x_0 + 0 = x_0);\\
\forall_{x_0}\forall_{x_1}(s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1));\\
\forall_{x_0}(x_0 * 0 = 0);\\
\forall_{x_0}\forall_{x_1}(s(x_0) * x_1 = (x_0 * x_1) + x_1).
\end{array}$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída pelas fórmulas acima descritas, juntamente com um princípio de indução nos naturais.

Proposição 2.31: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então, E é um modelo de Γ se e somente se (E, a) é uma realização de Γ.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição (*consequência semântica*): Dizemos que uma L-fórmula φ é uma *consequência semântica* de um conjunto Γ de L-fórmulas, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se (E, a) é uma realização de Γ, então $E \models \varphi[a]$.

Exemplo: A L_{Arit}-fórmula $0 = 0$ é uma consequência semântica do conjunto $\Gamma = \{\forall_{x_0}(x_0 = x_0)\}$ de L_{Arit}-fórmulas, pois se (E, a) é uma realização de Γ, então, e designando a função interpretação de E por $\overline{}$, $\forall_{n_0 \in dom(E)}(n_0, n_0) \in \overline{=}$ e assim, em particular, $(\overline{0}, \overline{0}) \in \overline{=}$, donde $E \models 0 = 0[a]$.

Proposição 2.32:

a) Se $\Gamma \models \forall_x \varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin \mathrm{LIV}(\Gamma)$ (*i.e.*, $\forall_{\psi \in \Gamma}\ x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$), então $\Gamma \models \forall_x \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \exists_x \varphi$.

d) Se $\Gamma \models \exists_x \varphi$, $\Gamma, \varphi[y/x] \models \psi$ e $y \notin \mathrm{LIV}(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que (E, a) uma realização de Γ. (Queremos demonstrar que: $E \models \varphi[t/x][a]$.) Então, pela hipótese, $E \models \forall_x \varphi[a]$. Assim, por definição de satisfação, $\forall_{d \in dom(E)}\ E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$. Donde, em particular, $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$, pois $t[a] \in dom(E)$. Logo, como por hipótese x é substituível por t em φ, aplicando a Proposição 2.28, $E \models \varphi[t/x][a]$.

b) Suponhamos que (E, a) uma realização de Γ. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall_x \varphi[a]$.) Por hipótese, $x \notin \mathrm{LIV}(\Gamma)$. Logo, de (ii) da Proposição 2.27, para toda a L-fórmula φ no conjunto Γ, $E \models \psi[a]$ sse $\forall_{d \in dom(E)}\ E \models \psi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$. Assim, uma vez que (E, a) é uma realização de Γ, para todo o elemento d do domínio de E, $(E, a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix})$ é uma realização de Γ. Logo, como por hipótese $\Gamma \models \varphi$, para todo o elemento d do domínio de E, $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$. Donde, por definição de satisfação, $E \models \forall_x \varphi[a]$.

c) e **d)** Exercício. $\square$

2.3 Sistema Formal de Dedução Natural (DNQ)

Definição (*regras de inferência*): As regras de inferência de DNQ são as regras obtidas a partir das regras de inferência de DNP, substituindo fórmulas do Cálculo Proposicional por L-fórmulas, juntamente com as seguintes regras para quantificadores.

Regras de **I***ntrodução* | *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix}}{\forall_x \varphi}\ \forall I\ (a) \qquad\qquad \dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi[t/x]}\ \forall E\ (b)$$

$$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists_x \varphi}\ \exists I\ (b) \qquad\qquad \dfrac{\exists_x \varphi \quad \begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\psi}\ \exists E\ (c)$$

(**a**) x não ocorre livre nas hipóteses não canceladas de D.

(**b**) x é substituível por t em φ.

(**c**) x não ocorre livre nem na conclusão de D, nem nas hipóteses de D não canceladas e diferentes de φ.

Definição (*derivações*): O conjunto $\mathcal{D}^{DNQ}$ das *derivações* de DNQ (também chamadas *deduções* ou *demonstrações*) é o conjunto, de árvores de L-fórmulas anotadas, gerado pelo conjunto de regras onde a única regra base é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNQ}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ (não tendo φ qualquer anotação) e onde existe uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNQ; por exemplo, a regra indutiva que corresponde à regra de inferência $\exists I$ é:

$$\frac{\begin{array}{c} D \\ \varphi[t/x] \end{array} \in \mathcal{D}^{DNQ}}{\begin{array}{c} D \\ \dfrac{\varphi[t/x]}{\exists_x \psi}\ \exists I \end{array} \in \mathcal{D}^{DNQ}}\ RI_{\exists I}\ \text{, sempre que } x \text{ é substituível por } t \text{ em } \varphi.$$

Observação: Sendo $\mathcal{D}^{DNQ}$ um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado. A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNQ}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNQ}$. Os sub-objectos de uma derivação D são chamados *subderivações* de D.

Exercício: Enuncie os teoremas de indução estrutural e de recursão estrutural para derivações em DNQ.

Definições: Em DNQ, as definições de *hipóteses* de derivações, *hipóteses canceladas* de derivações e *conclusões* de derivações, *derivações de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas*, *derivações de fórmulas*, *consequência sintáctica* e *teoremas* são obtidas das correspondentes definições de DNP, substituindo fórmulas do Cálculo Proposicional por L-fórmulas.

Exemplo: Sejam φ uma L-fórmula e x e y variáveis.

a) Seja D a seguinte árvore de L-fórmulas:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall_x \varphi}^{(1)}}{\varphi}\ \forall E}{\exists_x \varphi}\ \exists I}{\forall_x \varphi \to \exists_x \varphi}\ \to I^{(1)}$$

Então:

1) D é uma derivação de $\forall_x \varphi \to \exists_x \varphi$ (note que x é susbtituível por x em φ e que $\varphi[x/x] = \varphi$).

2) A L-fórmula $\forall_x \varphi \to \exists_x \varphi$ é um teorema.

b) Se $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, a seguinte árvore de L-fórmulas não é uma derivação em DNQ, uma vez que a instância da regra $\exists E$ não satisfaz a condição de x não ter ocorrências livres na premissa direita.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists_x \varphi}^{(1)} \qquad \cancel{\varphi}^{(2)}}{\varphi}\ \exists E^{(2)}}{\forall_x \varphi}\ \forall I}{\exists_x \varphi \to \forall_x \varphi}\ \to I^{(1)}$$

c) A seguinte árvore de L-fórmulas é uma derivação em DNQ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists_x\forall_y\varphi}^{\,(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\forall_y\varphi}^{\,(2)}}{\varphi}\,\forall E}{\exists_x\varphi}\,\exists I}{\exists_x\varphi}\,\exists E^{(2)}\ (a)}{\forall_y\exists_x\varphi}\,\forall I\ (b)}{\exists_x\forall_y\varphi\to\forall_y\exists_x\varphi}\,\to I^{(1)}$$

(a) x não ocorre livre na premissa direita (a fórmula $\exists_x\varphi$) e x não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada, diferente de $\forall_y\varphi$, da derivação da premissa direita (na derivação da premissa direita, a única hipótese não cancelada é $\forall_y\varphi$).

(b) y não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da premissa (a única hipótese não cancelada na derivação da premissa é $\exists_x\forall_y\varphi$, que não tem ocorrências livres de y).

d) A seguinte árvore de L_{Arit}-fórmulas não é uma derivação em DNQ. Note que x_0 não é substituível por x_1 em $\exists_{x_1}\neg(x_1=x_0)$. Assim, a primeira inferência não é uma correcta aplicação da regra $\forall E$.

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall_{x_0}\exists_{x_1}\neg(x_1=x_0)}^{\,(1)}}{\exists_{x_1}\neg(x_1=x_1)}\,\forall E}{\forall_{x_0}\exists_{x_1}\neg(x_1=x_0)\to\exists_{x_1}\neg(x_1=x_1)}\,\to I^{(1)}$$

Proposição 2.33:

a) Se $\Gamma\vdash\forall_x\varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma\vdash\varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma\vdash\varphi$ e $x\notin \mathrm{LIV}(\Gamma)$, então $\Gamma\vdash\forall_x\varphi$.

c) Se $\Gamma\vdash\varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma\vdash\exists_x\varphi$.

d) Se $\Gamma\vdash\exists_x\varphi$ e $\Gamma,\varphi\vdash\psi$ e $x\notin \mathrm{LIV}(\Gamma\cup\{\psi\})$, então $\Gamma\vdash\psi$.

e) A Proposição 1.7 mantem-se válida quando fórmulas do Cálculo Proposicional são substituidas por L-fórmulas.

Dem.:

a), **b)**, **c)** e **e)** Exercício.

d) Pela hipótese $\Gamma\vdash\exists_x\varphi$, existe uma derivação D_1 de $\exists_x\varphi$ a partir de Γ. Pela hipótese $\Gamma,\varphi\vdash\psi$, existe uma derivação D_2 de ψ a partir de $\Gamma\cup\{\varphi\}$. Ainda por hipótese, x não tem ocorrências livres nas fórmulas do conjunto $\Gamma\cup\{\psi\}$. Assim, x não tem ocorrências livres nem na conclusão de D_2, nem em nenhuma das hipóteses não canceladas de D_2 diferentes de φ. Logo,

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ D_1 \\ \exists_x\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D_2 \\ \psi\end{array}}{\psi}\,\exists E,$$

em que $\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D_2 \\ \psi\end{array}$ é a derivação obtida de D_2 cancelando todas as ocorrências de φ como folha, é uma derivação de ψ a partir de Γ. $\square$

Teorema (*Correcção*): Sejam φ uma L-fórmula e Γ um conjunto de L-fórmulas. Então,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Teorema (*Completude*): Sejam φ uma L-fórmula e Γ um conjunto de L-fórmulas. Então,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Teorema (*Adequação*): Sejam φ uma L-fórmula e Γ um conjunto de L-fórmulas. Então,

$$\Gamma \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma \vdash \varphi.$$

Corolário (2.3): Sejam φ uma L-fórmula e Γ um conjunto de L-fórmulas. Então:

a) φ é válida se e só se φ é um teorema;

b) Γ é semanticamente inconsistente se e só se $\Gamma \vdash \perp$;

c) $\Gamma \vdash \perp$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.: Exercício. $\square$