Análise I

MIEET, LEI

Viktor Kravchenko

Universidade do Algarve

Conteúdo

Capítulo 1

Limite e Continuidade de Funções Reais

1.1 Noção de função

1.1.1 Definição de função

Seja X um conjunto.

Se a cada x dum subconjunto de X corresponder um número real y, então a y chama-se **função de** x;

a x chama-se **argumento** ou **variável independente;**

à função y chama-se também **variável dependente.**

O facto de y ser função de x expressa-se abreviadamente pelas fórmulas:

$$y = f(x); y = g(x); \cdots$$

Domínio e imagem da função $y = f(x)$:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) \text{ está definida}\}$$

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \operatorname{dom} f \ \text{ tal que } \ y = f(x) \ \}$$

Se a cada $x \in \operatorname{dom} f$ corresponder um e só um número y, então a **função** $y = f(x)$ chama-se **unívoca.** Caso contrário a **função** $y = f(x)$ chama-se **plurívoca.**

1.1.2 Formas de representação de uma função

1. **Tabela**

Se X é um conjunto finito:

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} ,$$

então a função $y = f(x)$ pode ser representada na forma duma tabela:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

2. **Representação gráfica**

$$\operatorname{Gr} f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \operatorname{dom} f\right\}$$

3. **Representação analítica**

$$y = x^2; \quad y = \sin x; \cdots$$

1.1.3 Sucessão

Se $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$, então a função $y = f(n)$ chama-se **sucessão.**

Uma sucessão pode ser representada como um conjunto de números

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$$

que são os valores da função f nos pontos correspondentes:

$$y_n = f(n)$$

A sucessão $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ também se representa abreviadamente por $\{y_n\}$ ou (y_n).

Exemplos:

$$1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots; \quad \sin 1; \sin \frac{1}{2}, \cdots, \sin \frac{1}{n}, \cdots$$

ou

$$y_n = n^2; \quad y_n = \sin \frac{1}{n}; \quad \cdots; \quad \left(n^2\right); \quad \left\{\sin \frac{1}{n}\right\}; \cdots$$

1.1.4 Conjuntos limitados

Um conjunto $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ chama-se **limitado superiormente,** se existe um número C tal que

$$x \leq C, \forall x \in \mathcal{N}$$

A este número C chama-se **majorante ou limite superior do conjunto $\mathcal{N}$.**

Se existe um majorante do conjunto $\mathcal{N}$, então existe um conjunto infinito de majorantes do conjunto $\mathcal{N}$.

Um número C_0 diz-se **extremo superior** ou **supremo do conjunto $\mathcal{N}$** e denota-se por $\sup \mathcal{N}$, se possui as propriedades seguintes:

1. C_0 é majorante de $\mathcal{N}$;
2. nenhum número menor que C_0 é majorante de $\mathcal{N}$.

Tem lugar a propriedade importante dos conjuntos de números reais $\mathbb{R}$ (que às vezes se chama **Axioma de completude**):

Axioma 1 *Todo o conjunto de números reais $\mathcal{N}$ não vazio e limitado superiormente* ***tem supremo*** $\sup \mathcal{N}$.

Analogamente, um conjunto $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$ chama-se **limitado inferiormente,** se existe um número C tal que

$$x \geq C, \forall x \in \mathcal{N}$$

Este número C chama-se **minorante ou limite inferior do conjunto $\mathcal{N}$.**

Se existe um minorante do conjunto $\mathcal{N}$, então existe um conjunto infinito de minorantes do conjunto $\mathcal{N}$.

Um número C_0 diz-se **extremo inferior** ou **ínfimo do conjunto** $\mathcal{N}$ e denota-se por $\inf \mathcal{N}$, se possui as propriedades seguintes:

1. C_0 é minorante de $\mathcal{N}$;
2. nenhum número maior que C_0 é minorante de $\mathcal{N}$.

Do axioma de completude segue que para qualquer conjunto $\mathcal{N}$ não vazio e limitado inferiormente **existe** $\inf \mathcal{N}$.

Exemplo: $\mathcal{N} = \left\{ \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots \right\} \Rightarrow \sup \mathcal{N} = 1; \inf \mathcal{N} = 0$

1.1.5 Funções limitadas

Uma função $y = f(x)$ diz-se **limitada** no conjunto D, se

$$\exists\ M > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq M \quad \text{para todo o} \quad x \in D$$

Exemplos:

$$|\sin x| \leq 1 \quad \text{para todo o} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left|x^2\right| \leq 4 \quad \text{para todo o} \quad x \in [-2, +2]$$

Uma sucessão (y_n) está definida para todo o $n \in \mathbb{N}$, portanto é **limitada,** se

$$\boxed{\exists\ M > 0 \text{ tal que } |y_n| \leq M \quad \text{para todos} \quad n \in \mathbb{N}}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists M > 0 \ \text{ tal que todos os } y_n \\ \text{pertencem ao intervalo } \ [-M, M] \end{array}}$$

Uma sucessão (y_n) não é limitada, se

$$\boxed{\forall\ M > 0, \exists n_0 \ \text{ tal que } |y_{n_0}| > M}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall M > 0, \exists n_0 \ \text{ tal que} \\ y_{n_0} \ \text{ não pertence ao intervalo } \ [-M, M] \end{array}}$$

Exemplos: 1) Limitadas:

$$\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n+1}\right\}, \left\{(-1)^n\right\}, \left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}, \cdots$$

2) Não limitadas:

$$\left\{n^2\right\}, \left\{n \sin \frac{n\pi}{2}\right\}, \left\{\frac{n^2+1}{2n-1}\right\}, \cdots$$

Teorema 2 *A soma algébrica de um número finito de sucessões limitadas é uma sucessão limitada.*

1.2 Limites

1.2.1 Limite de uma sucessão

Sucessões infinitamente grandes

Uma sucessão (y_n) diz-se **infinitamente grande** se

$$\boxed{\forall M>0, \exists n_0 \ \text{ tal que } |y_n|>M \ \ \textbf{para todo o} \ \ n>n_0}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\ M>0, \exists n_0 \ \text{ tal que } \mathrm{y}_n, \ \textbf{para todo o} \ \ n>n_0, \\ \text{não pertence ao intervalo } \ [-M,M]\end{array}}$$

Uma sucessão (y_n) diz-se **infinitamente grande positiva** se

$$\boxed{\forall M>0, \exists n_0 \ \text{ tal que } y_n>M \ \ \textbf{para todo o} \ \ n>n_0}$$

Este facto denota-se

$$\lim y_n=+\infty$$

Uma sucessão (y_n) diz-se **infinitamente grande negativa** se

$$\boxed{\forall M>0, \exists n_0 \ \text{ tal que } y_n<-M \ \ \textbf{para todo o} \ \ n>n_0}$$

Este facto denota-se

$$\lim y_n=-\infty$$

Exemplos: 1) Infinitamente grandes:

$$\left\{n^2\right\}, \left\{\frac{n^2+1}{2n-1}\right\}, \left\{\frac{1-n^2}{n+2}\right\}, \ldots$$

$$\lim n^2=+\infty; \lim \frac{n^2+1}{n-1}=+\infty; \lim \frac{1-n^2}{n+2}=-\infty;$$

2) Não são infinitamente grandes:

$$\left\{n^2+(-1)^n n^2\right\}, \left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}, \{(-1)^n+10000000000\}$$

Sucessões infinitamente pequenas

Uma sucessão (α_n) diz-se **infinitamente pequena,** se

$$\boxed{\forall\ \delta>0, \exists n_0 \ \text{ tal que } |\alpha_n|<\delta \ \ \textbf{para todo o} \ \ n>n_0}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\ \delta>0, \exists n_0 \ \text{ tal que } \alpha_n, \ \textbf{para todo o} \ \ n>n_0, \\ \text{pertence ao intervalo } \ [-\delta,\delta]\end{array}}$$

O facto que a sucessão (α_n) ser infinitamente pequena denota-se por

$$\lim \alpha_n = 0$$

Exemplos: 1) Infinitamente pequenas:

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{n-1}{n^2+1}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}, \ldots$$

2) Não são infinitamente pequenas:

$$\{1+(-1)^n\}, \left\{\frac{1}{n^2} - 0,0000000001\right\}$$

Propriedades das sucessões infinitamente pequenas

Teorema 3 *Qualquer sucessão infinitamente pequena é limitada.*

Teorema 4 *A soma algébrica de um número finito de sucessões infinitamente pequenas é uma sucessão infinitamente pequena.*

Teorema 5 *O produto de uma sucessão infinitamente pequena por uma sucessão limitada é uma sucessão infinitamente pequena.*

Lema 6 *Se a sucessão (α_n) é infinitamente pequena e $\alpha_n \neq -1, \forall n$, então a sucessão $\left(\dfrac{1}{\alpha_n+1}\right)$ é limitada.*

Limite de uma sucessão

O número a denomina-se **limite** da sucessão $\{x_n\}$:

$$\lim x_n = a \quad \text{ou} \quad x_n \to a$$

se a **sucessão $\alpha_n = x_n - a$ é infinitamente pequena.**

$\lim x_n = a$, se $\forall\ \delta > 0$, $\exists n_0$ tal que $\lvert x_n - a\rvert < \delta$ **para todo o** $n > n_0$

ou

$\lim x_n = a$, se $\forall\ \delta > 0, \exists n_0$ tal que x_n, **para todo o** $n > n_0$, pertence ao intervalo $[a-\delta, a+\delta]$

A sucessão **converge,** se tem limite, e **diverge,** se não o tem.

Exemplos: 1) Convergentes:

$$\lim \frac{1}{n} = 0;\ \lim \frac{n-1}{n+1} = 1;$$
$$\lim \left(\frac{1}{n} - 0,0000000001\right) = -0,0000000001$$

2) Divergentes:

$$\{1+(-1)^n\}; \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}; \{\cos n\pi\}$$

Propriedades das sucessões convergentes

Teorema 7 *Qualquer sucessão convergente é limitada.*

Teorema 8 *Sejam* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucessões convergentes, então as sucessões* $\{x_n + y_n\}$ *e* $\{x_n y_n\}$ *também convergem e*

$$\boxed{\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n; \quad \lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n}$$

Além disso, se $y_n \neq 0$ *e* $\lim y_n \neq 0$, *então a sucessão* $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ *converge e*

$$\boxed{\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}}$$

Lema 9 *Seja* $\{x_n\}$ *uma sucessão convergente e tal que, a partir de certa ordem,* $0 \leq x_n$ $(\forall n \geq n_0)$, *então*

$$\boxed{0 \leq \lim x_n}$$

Teorema 10 *Sejam* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucessões convergentes e tais que, a partir de certa ordem,* $x_n \leq y_n$ $(\forall n \geq n_0)$, *então*

$$\boxed{\lim x_n \leq \lim y_n}$$

Teorema 11 ***(Sucessões enquadradas)*** *Se* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *são sucessões convergentes para o mesmo limite* a *e se, a partir de certa ordem, a sucessão* $\{z_n\}$ *é tal que*

$$\boxed{x_n \leq z_n \leq y_n, \ \forall n \geq n_0}$$

então

$$\boxed{\lim z_n = a}$$

Sucessões fundamentais

A sucessão $\{x_n\}$ chama-se fundamental ou de Cauchy, se

$$\boxed{\forall\ \delta > 0, \exists n_0 \ \text{ tal que } |x_n - x_m| < \delta \ \textbf{ para todos o } \ n, m > n_0}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\ \delta > 0, \exists n_0 \ \text{ tal que } x_n - x_m, \textbf{ para todos o } \ n, m > n_0, \\ \text{pertencem ao intervalo } [-\delta, \delta]\end{array}}$$

Teorema 12 ***(Critério de Cauchy)*** *Uma sucessão é convergete sse é fundamental.*

Sucessões monótonas

Uma sucessão $\{x_n\}$ diz-se

crescente, se $k < m \Rightarrow x_k < x_m$
decrescente, se $k < m \Rightarrow x_k > x_m$
não decrescente, se $k < m \Rightarrow x_k \leq x_m$
não crescente, se $k < m \Rightarrow x_k \geq x_m$

As sucessões crescentes, decrescentes, não decrescentes e não crescentes chamam-se **monótonas.**

As sucessões crescentes e decrescentes chamam-se **estritamente monótonas.**

Teorema 13 *Qualquer sucessão monótona e limitada converge.*

Exemplos. 1) $\{a^n\}, a > 0,$

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & \text{se } a < 1, \\ 1, & \text{se } a = 1, \\ +\infty, & \text{se } a > 1, \end{cases}$$

2) **Raiz aproximada.**

Sejam $a > 0$ e $\{x_n\}$ a sucessão definida através da fórmula de recorrência:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), n = 1, 2, \cdots$$

É possível mostrar que

$$\lim x_n = \sqrt{a}$$

Portanto, qualquer x_n é raiz aproximada do número positivo a.

2) **O número** e.

A sucessão

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é estritamente crescente e limitada

$$2 \leq x_n \leq 3$$

Portanto, a sucessão $\{x_n\}$ converge. O limite desta sucessão denota-se por e :

$$\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

O número e é irracional (transcendente)

$$e = 2.718\,2818284\ldots$$

1.2.2 Limite de uma função

Valor limite de uma função

Vamos considerar uma função $y = f(x)$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ tais que no domínio da função existem sucessões de números diferentes de a que convergem para a, i.e.

$$\exists \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f; x_n \neq a; \lim x_n = a$$

O próprio número a pode pertencer ou não ao domínio da função.

O número b chama-se **valor limite da função** $y = f(x)$ **no ponto** a, se

$$\boxed{\{\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f; x_n \neq a; \lim x_n = a\} \Rightarrow \lim f(x_n) = b}$$

Se o número b é o valor limite da função $y = f(x)$ no ponto a, escreve-se então

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

Exemplos: 1) A função $f(x) = c$ (constante) tem valor limite em qualquer ponto a da recta $\mathbb{R}$.

2) A função $f(x) = x$ tem valor limite em qualquer ponto a da recta $\mathbb{R}$.

3) A função

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

tem valor limite em qualquer ponto a da recta $\mathbb{R}$, excepto no ponto $a = 0$.

4) A função $y = [x]$ (parte inteira do número) tem valor limite em qualquer ponto a da recta $\mathbb{R}$ que não é um número inteiro e não tem valor limite em qualquer ponto a da recta $\mathbb{R}$ que é um número inteiro.

O número b chama-se **valor limite da função** $y = f(x)$ **quando** $x \to \infty$, se

$$\boxed{\{\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \text{ infinitamente grande } \} \Rightarrow \lim f(x_n) = b}$$

Se o número b é o valor limite da função $y = f(x)$ quando $x \to \infty$, escreve-se então

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = b}$$

Vamos também distinguir dois casos

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, se $\{\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ infinitamente grande e $x_n > 0$ $\} \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, se $\{\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ infinitamente grande e $x_n < 0$ $\} \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

Exemplos: 1) Se $f(x) = c$, então $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

2) Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

3) A função $y = \sin x$ não tem valor limite quando $x \to \infty$.

Funções infinitamente pequenas

A função $y = f(x)$ chama-se infinitamente pequena no ponto a (ou infinitamente pequena quando $x \to a$), se

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = 0}$$

Exemplos: 1) A função $f(x) = x$ é infinitamente pequena no ponto $a = 0$.

2) A função $y = \dfrac{1}{x}$ é infinitamente pequena quando $x \to \infty$.

Teorema 14 *A função $y = f(x)$ tem valor limite b no ponto a sse a função $\alpha(x) = f(x) - b$ é infinitamente pequena no ponto a.*

Operações algébricas com os valores limites

Vamos supor que existe um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a \in D$ e $D \cap \operatorname{dom} f = D \cap \operatorname{dom} g$.

Teorema 15 *Se as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ têm valor limite no ponto a, então as funções $f(x) \pm g(x)$ e $f(x)g(x)$ também têm valor limite no ponto a e*

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)}$$

Além disso, se $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, então a função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem valor limite no ponto a e

$$\boxed{\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}}$$

Exemplos: 1) $\lim_{x\to a} x^k = a^k, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall a \in \mathbb{R}$.

2) Se $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k$, então $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a), \forall a \in \mathbb{R}$.

3) Se $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_m x^m$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}, \forall a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$.

O teorema análogo tem lugar no caso de $x \to \infty$.

Exemplos: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

2) Se $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ e $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \beta_2 \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$.

Limites laterais

O número b chama-se **valor limite à direita da função** $y = f(x)$ **no ponto** a, se

$$\boxed{\{\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f; x_n > a; \lim x_n = a\} \Rightarrow \lim f(x_n) = b}$$

Se o número b é o valor limite direito da função $y = f(x)$ no ponto a, escreve-se então

$$\boxed{\lim_{x \to a+0} f(x) = b \text{ ou } f(a+0) = b}$$

Analogamente, o número b chama-se **valor limite à esquerda da função** $y = f(x)$ **no ponto** a, se

$$\boxed{\{\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f; x_n < a; \lim x_n = a\} \Rightarrow \lim f(x_n) = b}$$

Se o número b é o valor limite esquerdo da função $y = f(x)$ no ponto a, escreve-se então

$$\boxed{\lim_{x \to a-0} f(x) = b \text{ ou } f(a-0) = b}$$

Exemplos: 1) A função

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

no ponto $a = 0$ tem valor limite direito 1 e valor limite esquerdo -1.

2) A função $y = [x]$ (parte inteira do número x) em qualquer ponto $k \in \mathbb{N}$ tem valor limite direito k e valor limite esquerdo $k - 1$.

1.3 Funções contínuas

1.3.1 Definição de função contínua

Vamos considerar uma função $y = f(x)$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ tais que no domínio da função existem sucessões de números diferentes de a que convergem para a e, além disso, $a \in \operatorname{dom} a$.

A função $y = f(x)$ **é contínua no ponto** a, se

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} x = a$, podemos reescrever a última igualdade na forma:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)}$$

Exemplos: 1) $\lim\limits_{x \to a} x^k = \left(\lim\limits_{x \to a} x\right)^k, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall a \in \mathbb{R}$.

2) Qualquer polinómio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k$ é uma função contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

3) Se $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_m x^m$, então a fracção $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é uma função contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$.

1.3.2 Continuidade lateral

A função $y = f(x)$ **é contínua à direita no ponto** a, se

$$\boxed{\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad f(a+0) = f(a)}$$

Analogamente, a função $y = f(x)$ **é contínua à esquerda no ponto** a, se

$$\boxed{\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad f(a-0) = f(a)}$$

Exemplo: 1) A função $y = [x]$ é contínua à direita em qualquer ponto $k \in \mathbb{N}$.

1.3.3 Operações algébricas com funções contínuas

Teorema 16 *Se as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são contínuas no ponto a, então as funções $f(x) \pm g(x)$ e $f(x)g(x)$ também são contínuas no ponto a. Além disso, se $g(a) \neq 0$, então a função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ também é contínua no ponto a.*

Exemplos: 1) $y = x^k$ é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

2) Qualquer polinómio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k$ é função contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

3) Se $q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_m x^m$, então a fracção $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é função contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$.

1.3.4 Função composta

Seja $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções tais que

$$\operatorname{im} g \subseteq \operatorname{dom} f,$$

então podemos definir uma **função composta** $y = F(t)$, onde

$$F(t) = f\,[g(t)]$$

Teorema 17 *Se a função $x = g(t)$ é contínua no ponto t_0 e a função $y = f(x)$ é contínua no ponto $x_0 = g(t_0)$, então a função composta $y = F(t)$ é contínua no ponto t_0.*

1.3.5 Função monótona

Uma função $y = f(x)$ diz-se no segmento $[a, b]$

crescente, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
decrescente, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
não decrescente, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
não crescente, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

Notamos que em vez do segmento $[a, b]$ pode ser considerado qualquer subconjunto da recta $\mathbb{R}$.

As funções crescentes, decrescentes, não decrescentes e não crescentes chamam-se **monótonas.**

As funções crescentes e decrescentes chamam-se **estritamente monótonas.**

Teorema 18 *Seja* $y = f(x)$ *uma função estritamente monótona no segmento* $[a, b]$. *A função* $y = f(x)$ *é contínua no segmento* $[a, b]$ *sse para qualquer número* y_0 *que fica entre números* $f(a)$ *e* $f(b)$ *existe um ponto* $x_0 \in [a, b]$ *tal que*

$$y_0 = f(x_0)$$

Notamos que funções monótonas em qualquer ponto $x_0 \in [a, b]$ têm valores limite à direita e à esquerda.

1.3.6 Função inversa

Definição de função inversa

Seja $y = f(x)$ uma função que está definida no segmento $[a, b]$ e

$$\operatorname{im} f = [c, d]$$

Se a cada número $y_0 \in [c, d]$ corresponder apenas um número $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$, então no segmento $[c, d]$ podemos definir uma função $x = f^{-1}(y)$ tal que

$$x = f^{-1}(y) \ \text{ sse } \ y = f(x)$$

A função $x = f^{-1}(y)$ chama-se **função inversa da função** $y = f(x)$.

É claro que $y = f(x)$ é função inversa da função $x = f^{-1}(y)$.

Notamos que em vez do segmento $[a, b]$ pode ser considerado qualquer subconjunto da recta $\mathbb{R}$.

As funções $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ satisfazem as seguintes propriedades:

$$f\left[f^{-1}(y)\right] = y \ \text{ e } \ f^{-1}\left[f(x)\right] = x$$

Exemplos: 1) $f(x) = 2x \Rightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}y$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \forall x \neq -2, \Rightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} - 2, \forall y \neq 0.$

Função inversa monótona

Sejam $y = f(x)$ uma função que está definida no segmento $[a, b]$ e

$$\operatorname{im} f = [c, d]$$

Lema 19 *Se a função* $y = f(x)$ *é estritamente monótona, então existe a função inversa* $f^{-1}(y)$ *que também é estritamente monótona.*

Teorema 20 *Se a função* $y = f(x)$ *é estritamente monótona e contínua, então a função inversa* $f^{-1}(y)$ *também é estritamente monótona e contínua.*

1.4 Algumas funções elementares

1.4.1 Função exponencial

A potência $a^x, a > 0$, define-se passo a passo:

Passo 1: $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^1 &= a; \\ a^2 &= a \cdot a \\ &\dots \quad \dots \\ a^n &= a^{n-1} \cdot a \end{aligned}$$

Passo 2: Expoentes inteiros negativos e expoente nulo:

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

Passo 3: Raiz:

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} \text{ é um número tal que } \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a, m \in \mathbb{N}$$

Passo 4: Potência de expoente fraccionário:

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

Passo 5: Potência de expoente irracional:

$$a^x = \lim a^{r_n},$$

onde $\{r_n\}$ é qualquer sucessão de números racionais tal que

$$\lim r_n = x$$

A potência assim definida goza das propriedades seguintes:

1. $a^x \cdot a^t = a^{x+t}$;
2. $\dfrac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$;
3. $(a^x)^t = a^{tx}$;
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

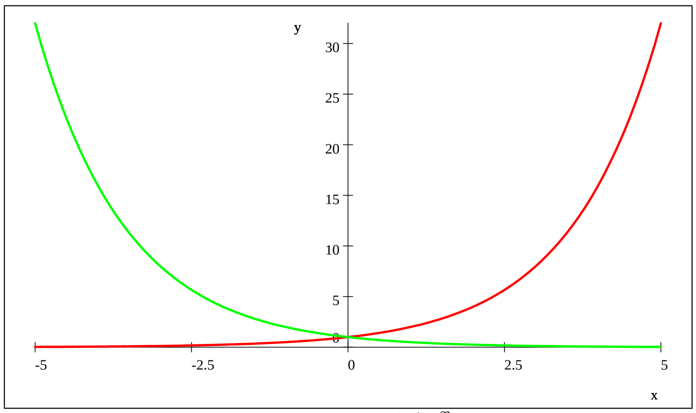
A função exponencial $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, tem as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{dom}\,(a^x) = \mathbb{R}$;
2. $\mathrm{im}\,(a^x) = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$;

3. a função $y = a^x$ é estritamente monótona;

4. a função $y = a^x$ é contínua;

5. $$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 0, & a < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$



$y = 2^x$ (vermelho), $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (verde)

1.4.2 Função logarítmica

A função potencial $y = a^x$ é estritamente monótona e contínua em qualquer segmento $[\alpha, \beta]$ da recta $\mathbb{R}$. Portanto, existe a função inversa, a que se chama função logarítmica e denota-se

$$x = \log_a y$$

Vamos na notação mudar os lugares de x e y, então

$$\boxed{y = \log_a x}$$

Como as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra temos as igualdades:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a a^y = y$$

A partir das propriedades da potência podemos obter as propriedades do logaritmo:

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

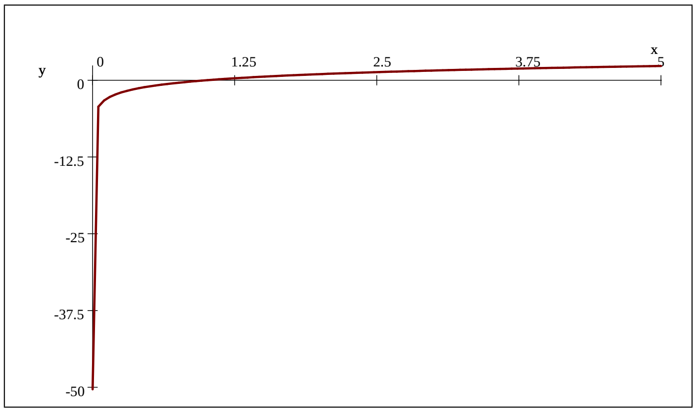
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

3. $\log_a x^p = p \log_a x, \forall p \in \mathbb{R}$;

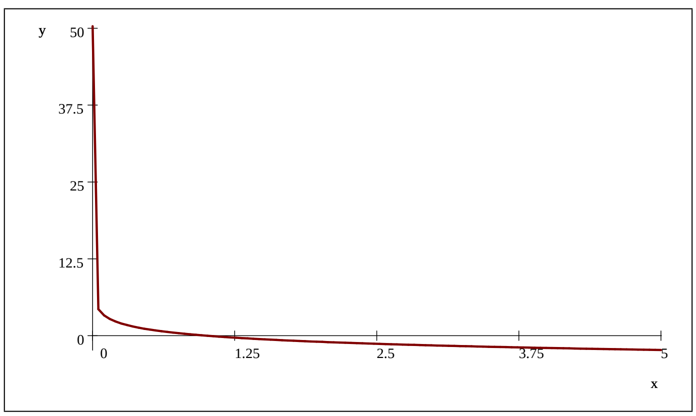
4. $\log_b x = (\log_b a \ ) \log_a x$

A função logarítmica $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, tem as seguintes propriedades:

1. $\operatorname{dom}(\log_a x) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$;
2. $\operatorname{im}(\log_a x) = \mathbb{R}$;
3. a função $y = \log_a x$ é estritamente monótona;
4. a função $y = \log_a x$ é contínua;
5. $$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & a < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1, \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$



$y = \log_2 x$

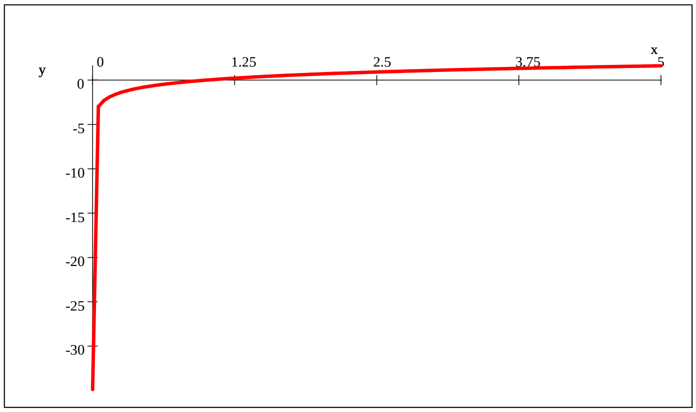


$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

A função logarítmica de base e tem um papel especial muito importante. Chama-se logaritmo natural ou neperiano e usa-se a notação especial

$$y = \ln x$$

$y = \ln x$



$y = \ln x$

1.4.3 Funções trigonométricas

Propriedades básicas das funções trigonométricas

As funções seno e co-seno têm as seguintes propriedades básicas:

1. Para quaisquer $x, t, \tau \in \mathbb{R}$ têm lugar as igualdades seguintes:
$$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$$
$$\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$$
$$\cos^2 \tau + \sin^2 \tau = 1$$

2. $$\begin{array}{ll} \sin 0 = 0; & \cos 0 = 1; \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1; & \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}$$

3. Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então
$$0 < \sin x < x$$

Através destas propriedades é possível obter todas as outras propriedades das funções seno e co-seno.

Exercício 21 *Usando as propriedades básicas 1-3 mostre que*

1. $\sin(-x) = -\sin x$ *e* $\cos(-x) = \cos x$;
2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ *e* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;
3. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ *e* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$;
4. $\sin k\pi = 0; \cos k\pi = (-1)^k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

5. as funções seno e co-seno são periódicas com periodo 2π, *i.e.,*

$$\sin(x+2\pi) = \sin x; \quad \cos(x+2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R};$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \qquad e \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \pm\sin x;$

7. $\sin(\pi \pm x) = \pm\sin x \quad e \quad \cos(\pi \pm x) = \pm\cos x;$

8. $\cos x \cos t = \frac{1}{2}\left[\cos(x-t) + \cos(x+t)\right];$

9. $\sin x \sin t = \frac{1}{2}\left[\cos(x-t) - \cos(x+t)\right];$

10. $\sin x \cos t = \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \sin(x+t)\right];$

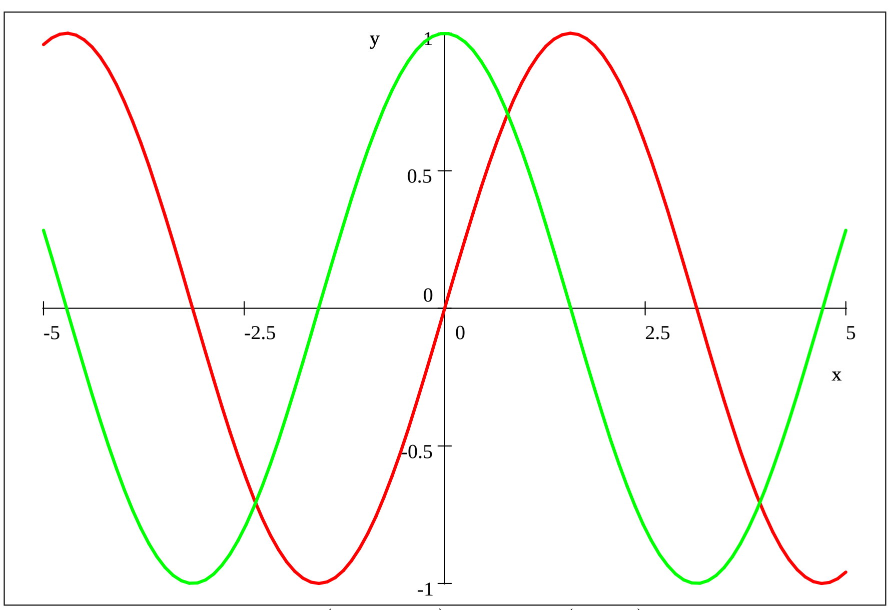
11. $\cos x + \cos t = 2\cos\frac{x-t}{2}\cos\frac{x+t}{2};$

12. $\cos x - \cos t = -2\sin\frac{x-t}{2}\sin\frac{x+t}{2};$

13. $\sin x - \sin t = 2\sin\frac{x-t}{2}\cos\frac{x+t}{2};$

14. $\sin x + \sin t = 2\cos\frac{x-t}{2}\sin\frac{x+t}{2};$

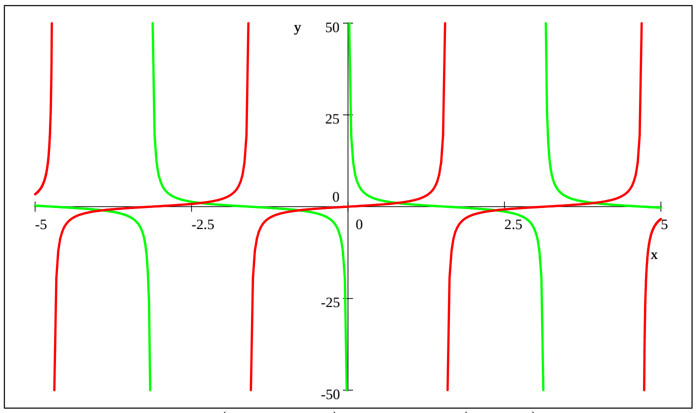
As funções seno e co-seno são contínuas em cada ponto da recta $\mathbb{R}$. $\sin x$



$\sin x$ (vermelno), $\cos x$ (verde)

As funções $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ são contínuas em cada ponto da recta $\mathbb{R}$, excepto nos zeros da função co-seno que são $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

As funções $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ e $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ são contínuas em cada ponto da recta $\mathbb{R}$, excepto nos zeros da função seno que são $k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$



$\operatorname{tg} x$ (vermelho), $\operatorname{ctg} x$ (verde)

Funções trigonométricas inversas

Arco seno A função seno é periódica. Portanto, a qualquer valor $y_0 \in \operatorname{im}(\sin x)$ corresponde um conjunto infinito dos pontos $\{x_0 + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ tais que

$$\sin(x_0 + 2k\pi) = y_0$$

Daqui segue que a função inversa unívoca da função seno não existe.

A função seno é estritamente monótona e contínua em qualquer segmento $\left[k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, da recta $\mathbb{R}$. Portanto, para cada **restrição da função seno** ao intervalo $\left[k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right], k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, **existe a função inversa desta restrição da função seno.**

A **função inversa da restrição da função seno ao segmento** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ chama-se **principal** e denota-se

$$x = \arcsin y$$

Vamos na notação mudar os lugares de x e y, então

$$\boxed{y = \arcsin x}$$

A função $y = \arcsin x$ está definida no segmento $[-1, 1]$, é contínua, crescente e

$$\operatorname{im}(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Como as funções seno e arco seno são inversas uma da outra temos as igualdades:

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{e} \quad \arcsin(\sin y) = y, \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Para as outras funções trigonométricas a situação é análoga. Por isso apenas vamos referir, para cada função, os intervalos das restrições invertíveis e aquela que é considerada a restrição principal.

Arco co-seno A função co-seno é estritamente monótona e contínua em qualquer segmento $[k\pi, k\pi+\pi]\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, da recta $\mathbb{R}$.

A **função inversa da restrição da função co-seno ao segmento** $[0, \pi]$ chama-se **principal** e denota-se

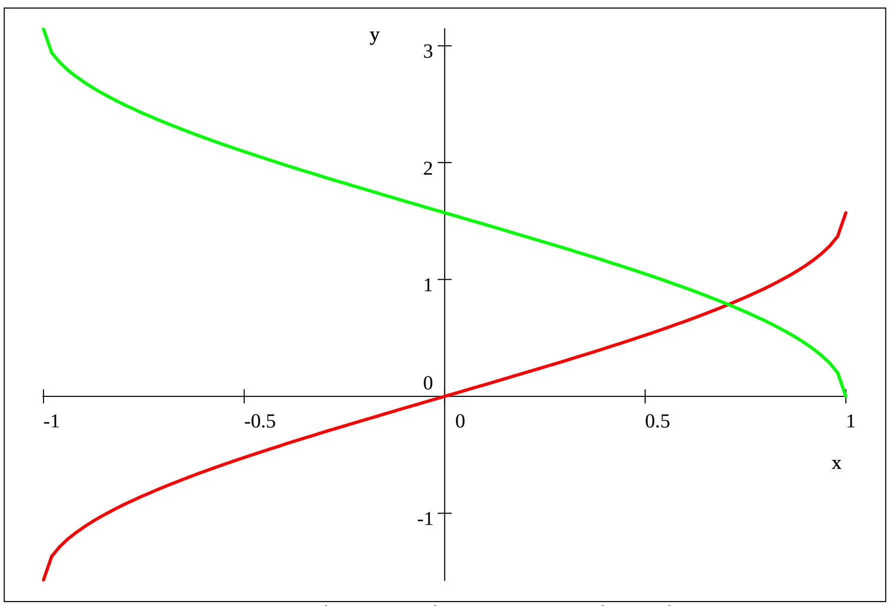
$$\boxed{y = \arccos x}$$

A função $y = \arccos x$ está definida no segmento $[-1, 1]$, é contínua, decrescente e

$$\mathrm{im}\,(\arccos x) = [0, \pi]$$

Como as funções co-seno e arco co-seno são inversas uma da outra temos as igualdades:

$$\cos(\arccos x\ ) = x \quad \text{e} \quad \arccos(\cos y) = y, \forall y \in [0, \pi]$$



$\arcsin x$ (vermelho), $\arccos x$ (verde)

Arco tangente A função tangente é estritamente monótona e contínua em qualquer intervalo aberto $\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, da recta $\mathbb{R}$.

A **função inversa da restrição da função tangente ao intervalo** $\left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$ chama-se **principal** e denota-se

$$\boxed{y = \mathrm{arctg}\, x}$$

A função $y = \mathrm{arctg}\, x$ está definida em toda a recta $\mathbb{R}$, é contínua, crescente e

$$\mathrm{im}\,(\mathrm{arctg}\, x) = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

Como as funções tangente e arco tangente são inversas uma da outra temos as igualdades:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{e} \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

Arco co-tangente A função co-tangente é estritamente monótona e contínua em qualquer intervalo aberto $(k\pi, k\pi + \pi)\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, da recta $\mathbb{R}$.

A **função inversa da restrição da função co-tangente ao intervalo** $(0, \pi)$ chama-se **principal** e denota-se

$$\boxed{y = \operatorname{arcctg} x}$$

A função $y = \operatorname{arcctg} x$ está definida em toda a recta $\mathbb{R}$, é contínua, crescente e

$$\operatorname{im}(\operatorname{arcctg} x) = (\ 0, \pi)$$

Como as funções co-tangente e arco co-tangente são inversas uma da outra temos as igualdades:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x\ ) = x \quad \text{e} \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) = y, \forall y \in (\ 0, \pi)$$

Capítulo 2

Derivada e Diferencial

2.1 Acréscimo

Consideremos uma função real de uma variável real $y = f(x)$,um ponto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ e um número real Δx tal que $x_0 + \Delta x \in \operatorname{dom} f$.

É usual chamar-se **acréscimo** ou **incremento** da função f, correspondente ao acréscimo Δx dado a partir do ponto x_0, à diferença $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Designá-la-emos por

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,, \qquad x_0, x_0 + \Delta x \in \operatorname{dom} f$$

É claro que $\Delta y = \Delta f(x_0)$ é uma função real de variável real Δx.

Exemplos: 1) $y = x^2, x_0 = 3 \Rightarrow \Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = (\Delta x)^2 + 6\Delta x$;

2) $y = \dfrac{1}{x}, x_0 = 1 \Rightarrow \Delta y = \dfrac{1}{1 + \Delta x} - 1 = -\dfrac{\Delta x}{1 + \Delta x}$

Teorema 22 *A função $y = f(x)$ é contínua no ponto x_0 sse o acréscimo $\Delta y = \Delta f(x_0)$ é uma função infinitamente pequena quando $\Delta x \to 0$.*

2.2 Comparação de infinitamente pequenos

Sejam

$$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \cdots$$

várias funções infinitamente pequenas quando $t \to 0$.

Se

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = a \neq 0,$$

então, as funções infinitamente pequenas $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ dizem-se **infinitamente pequenas da mesma ordem.**

Exemplos: 1) $\alpha(t) = 5t^2 + 3t^3$ e $\beta(t) = t^2 + t^4 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 5 \Rightarrow \alpha(t)$ e $\beta(t)$ são **i**nfinitamente pequenas da mesma ordem.

2) $\alpha(t) = t$ e $\beta(t) = \dfrac{t}{t^2+2} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 2 \Rightarrow \alpha(t)$ e $\beta(t)$ são **i**nfinitamente pequenas da mesma ordem.

No caso especial, em que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 1,$$

as funções infinitamente pequenas $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ dizem-se **equivalentes infinitamente pequenas.**

Exemplos: 1) $\alpha(t) = t^2 + 3t^3$ e $\beta(t) = t^2 + t^4 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 1 \Rightarrow \alpha(t)$ e $\beta(t)$ são equivalentes **i**nfinitamente pequenas.

2) $\alpha(t) = t$ e $\beta(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 1 \Rightarrow \alpha(t)$ e $\beta(t)$ são equivalentes **i**nfinitamente pequenas.

A função $\alpha(t)$ é **infinitamente pequena de ordem superior em relação a** $\beta(t)$, se

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 0$$

Exemplo: 1) $\alpha(t) = 3t^3 + t^4$ e $\beta(t) = t^2 + t^4 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 0 \Rightarrow \alpha(t)$ é infinitamente pequena de ordem superior em relação a $\beta(t)$.

2) $\alpha(t) = t^2$ e $\beta(t) = \dfrac{t}{t^2+2} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 0 \Rightarrow \alpha(t)$ é infinitamente pequena de ordem superior em relação a $\beta(t)$.

Notamos que quando

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \infty$$

temos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = 0$$

e, portanto, $\beta(t)$ é infinitamente pequena de ordem superior em relação a $\alpha(t)$.

Definições análogas existem e para os casos de funções infinitamente pequenas quando $t \to a$ (a também pode ser ∞).

2.3 Definição de derivada

Sejam $y = f(x)$ uma função real de variável real definida em (a, b) e $x_0 \in (a, b)$.

A função $f(x)$ diz-se **derivável em** x_0 **se existe**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a que se chama **derivada de** $f(x)$ **em** x_0 e se representa de um dos seguintes modos:

$$f'(x_0); \quad y'_{x=x_0}; \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Portanto

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{2.1}$$

Se denotamos

$$x - x_0 = \Delta x,$$

então

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} \tag{2.2}$$

Lembrando que

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

então podemos escrever a definição da derivada na forma:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{2.3}$$

Exemplos: 1) $y = C$ (onde C é uma constante), $\forall x_0$

$\Rightarrow \{f(x_0 + \Delta x) = C \wedge f(x_0) = C\} \Rightarrow \{\Delta y = C - C = 0, \ \forall x_0\} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow y' = 0$

$$\boxed{(C)' = 0, \ \ C = Const.}$$

2) $y = x, \forall x_0 \Rightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow y' = 1;$

$$\boxed{(x)' = 1}$$

3) $y = x^2, \forall x_0 \Rightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = (\Delta x)^2 + 2x_0 \Delta x \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0,$

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x_0) = 2x_0 \Rightarrow y'_{x = x_0} = 2x_0;$

Acabámos de obter a fórmula:

$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$

2.4 Derivadas laterais

A função $f(x)$ diz-se **derivável à esquerda em x_0 se existe o**

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a que se chama **derivada lateral à esquerda de $f(x)$ em x_0** e se representa por

$$f'(x_0 - 0)$$

Portanto

$$\boxed{f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{2.4}$$

A função $f(x)$ diz-se **derivável à direita em** x_0 **se existe o**

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a que se chama **derivada lateral à direita de** $f(x)$ **em** x_0 e se representa por

$$f'(x_0 + 0)$$

Portanto

$$\boxed{f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{2.5}$$

Teorema 23 *A função* $f(x)$ *é derivável num ponto* x_0 *sse existirem e forem iguais as derivadas laterais. Nesse caso*

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$$

Exemplo: 1) $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f'(x + 0) = f'(x - 0) = f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$f'(+0) = 1; \qquad f'(-0) = -1$$

2.5 Definição de diferencial

Uma função $y = f(x)$ diz-se **diferenciável** num ponto x_0, se nesse ponto tem **derivada finita.**

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável em qualquer ponto do segmento $[a, b]$.

De acordo com (2.3) o quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$ tende para um número determinado $f'(x)$. De acordo com o teorema 14 temos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

onde $\alpha(\Delta x)$ é infinitamente pequena quando $\Delta x \to 0$.

Desta igualdade segue que

$$\boxed{\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x} \tag{2.6}$$

Portanto, o acréscimo Δy da função derivável $y = f(x)$ é a soma de duas funções (de variável Δx) infinitamente pequenas quando $\Delta x \to 0$:

1) A **parte principal** é $f'(x)\Delta x$. A função $f'(x)\Delta x$ é *linear* (x é um ponto fixo, a variável independente é Δx).

2) A parte $\alpha(\Delta x)\Delta x$ é infinitamente pequena de ordem superior em relação a Δx.

Se a função $y = f(x)$ *é diferenciável no ponto* x*, então é contínua neste ponto.*

O recíproco não tem lugar.

À parte principal $f'(x)\Delta x$ chama-se diferencial da função $y = f(x)$ no ponto x e designa-se pela notação dy ou $df(x)$:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x)\Delta x} \tag{2.7}$$

Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$ e

$$df(x) = dx = \Delta x$$

Assim, o **diferencial** dx **da variável independente** x **identifica-se com o seu acréscimo** Δx.

Portanto a fórmula (2.7) pode ser reescrita na forma:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x)dx} \tag{2.8}$$

Da última igualdade segue que

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}} \tag{2.9}$$

Exemplos: 1) $y = C$ (onde C é uma constante)

$$\boxed{dC = 0, \ \ C = Const.}$$

2) $y = x^2$

$$\boxed{d\left(x^2\right) = 2xdx}$$

Podemos reescrever a igualdade (2.6) na forma:

$$\boxed{\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x}$$

Assim, a diferença entre o acréscimo e diferencial $\Delta y - dy$ é infinitamente pequena de ordem superior em relação a Δx. Por isso, em cálculos numéricos usa-se frequentamente a igualdade aproximada

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

ou

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x} \tag{2.10}$$

Exemplos: 1) Calcule $(2,001)^2$.
Resolução: Seja $f(x) = x^2, x_0 = 2$ e $\Delta x = 0,01$, então
$(2,001)^2 = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + 2x_0\Delta x = 4 + 0,04 = 4,004$
O erro cometido é $(2,001)^2 - 4,004 = 0,000001$
Notamos que o problema do cálculo do diferencial é equivalente ao cálculo da derivada.

2.6 Derivadas da soma, do produto e da divisão de duas funções

Teorema 24 *Se as funções* $u(x)$ *e* $v(x)$ *são deriváveis no ponto* x, *então a soma* $u(x)+v(x)$ *e o produto* $u(x)v(x)$ *também são deriváveis no ponto* x *e têm lugar as igualdades:*

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'} \tag{2.11}$$

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'} \tag{2.12}$$

Se, além disso, $v(x) \neq 0$, *então a fracção* $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *é função derivável e*

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

2.6.1 Derivadas das funções trigonométricas

$$\begin{array}{|c|}\hline (\sin x)' = \cos x \\ \hline (\cos x)' = -\sin x \\ \hline (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \hline (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \\ \hline \end{array} \tag{2.13}$$

2.6.2 Número e

A sucessão

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge:

$$\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Lema 25 *O valor limite da função* $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ *quando* $x \to \infty$ *existe e é igual* e :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \tag{2.14}$$

2.6.3 Derivada duma função logarítmica

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e}$$

Em particular,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

2.7 Derivada da função composta

Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ duas funções tais que

$$\operatorname{im} g \subseteq \operatorname{dom} f,$$

então podemos definir uma **função composta** $y = F(x)$, onde

$$F(x) = f(u) = f\left[g(x)\right]$$

Teorema 26 *Se a função* $u = g(x)$ *é derivável no ponto* x *e a função* $y = f(u)$ *é derivável no ponto* $u = g(x)$, *então a função composta* $y = F(x)$ *é derivável no ponto* x *e*

$$\boxed{F'_x = f'_u \cdot u'_x} \tag{2.15}$$

Exemplos: 1) $y = \sin^2 x \Rightarrow y = u^2, u = \sin x \Rightarrow y'_u = 2u, u'_x = \cos x \Rightarrow$
$y'_x = 2\sin x \cos x = \sin 2x$;
2) $y = \sin\{\cos[\text{ctg}(\text{tg}\, x)]\} \Rightarrow$
$y' = \cos(\cos[\text{ctg}(\text{tg}\, x)]) \cdot \{-\sin[\text{ctg}(\text{tg}\, x)]\} \cdot \left\{-\dfrac{1}{\sin^2(\text{tg}\, x)}\right\} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2.7.1 Derivada da função potência e derivada da função exponencial

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}, x > 0} \tag{2.16}$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a, a > 0} \tag{2.17}$$

Em particular,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

2.7.2 Função composta exponencial

Chama-se **função composta exponencial** a toda a função exponencial em que a base e expoente são funções de x, i.e.,

$$y = u^v,$$

onde u e v são funções.

Lema 27 *Se* $y = u^v$, *então*

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

Com efeito, temos que
$y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u \Rightarrow \dfrac{1}{y}y' = v' \ln u + v\dfrac{1}{u}u' \Rightarrow$
$y' = \left(v' \ln u + v\dfrac{1}{u}u'\right) y \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$
Exemplo: $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \dfrac{1}{y}y' = \ln x + x\dfrac{1}{x} \Rightarrow$
$y' = (\ln x + 1)\, y \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$

2.8 Invariância do diferencial

Para a função $y = f(u)$ com a variável independente u o diferencial está definido pela fórmula

$$\boxed{dy = df(u) = f'(u)du}$$

Se agora a variável u é uma função: $u = g(x)$, então o diferencial du também deve ser calculado pela fórmula anterior:

$$du = dg(x) = g'(x)dx$$

e a função $y = f(u)$ começa ser a função composta de x :

$$y = F(x) = f\left[g(x)\right]$$

e podemos calcular o diferencial desta função em relação a variável x :

$$dy = dF(x) = F'(x)dx$$

Usando a fórmula (2.15), obtemos

$$F'_x = f'_u \cdot g'_x$$

Daqui segue que o diferencial dy em relação a variável x é

$$dy = f'_u \cdot g'_x dx$$

ou

$$dy = f'_u du$$

Esta fórmula mostra que a **forma do diferencial é invariante,** i.e., não depende do facto: o argumento da função é uma variável independente ou não.

Em outras palavras, a propriedade da invariância do diferencial permite-nos considerar a **derivada $f'(x)$ como quociente dos diferenciais da função e do argumento:**

$$\boxed{f' = \frac{dy}{dx}} \tag{2.18}$$

Portanto, a regra de derivação da função composta é simplesmente uma identidade para fracções:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

2.9 Derivada da função dada em forma paramétrica

Vamos supor que a dependência entre a função y e o argumento x é dada através do parámetro t, i.e.,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

De acordo de definição do diferencial, temos que

$$dx = \varphi'(t)dt \quad \text{e} \quad dy = \psi'(t)dt$$

Daqui e da fórmula (2.18) segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}$$

ou

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

ou, ainda,

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

2.10 Derivada da função inversa

Teorema 28 *Se a função*

$$y = f(x)$$

é contínua numa vizinhança do ponto x_0, tem derivada $f'(x_0) \neq 0$ e admite uma função inversa

$$x = f^{-1}(y)$$

contínua numa vizinhança do ponto $y_0 = f(x_0)$, então a função inversa $x = f^{-1}(y)$ possui no ponto y_0 uma derivada $\dfrac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right]$ e tem lugar a seguinte igualdade:

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right]_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}} \tag{2.19}$$

ou

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}}$$

As funções $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ satisfazem a igualdade:

$$f^{-1}\left[f(x)\right] = x \quad \text{ou} \quad f^{-1}\left[y\right] = x$$

Por isso,

$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(y)\right] = (x)' \Rightarrow \frac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right] \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow (2.19)$$

2.10.1 Derivadas das funções trigonométricas inversas

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.11 Derivadas de ordem superior

Se a função $y = f(x)$ é derivável em cada ponto do intervalo (a, b), então a derivada $f'(x)$ desta função também é uma função que esta definida no intervalo (a, b). Pode acontecer que a função $f'(x)$ seja derivável. Neste caso à derivada da função $f'(x)$ chama-se **derivada de segunda ordem ou segunda derivada da função** $f(x)$ e denota-se

$$f''(x) \text{ ou } f^{(2)}(x)$$

Em geral, a derivada $f^{(n)}(x)$ de ordem n da função $y = f(x)$ é

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' \tag{2.20}$$

Exemplos: 1) $y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2} \Rightarrow$
$y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3} \Rightarrow \cdots \Rightarrow y^{(k)} = r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)x^{r-k}$
Em particular, se $r = n \in \mathbb{N}$, então

$$(x^n)^{(n)} = n! \quad \text{e} \quad (x^n)^{(m)} = 0, \forall m > n$$

2) $y = \ln x \Rightarrow y' = x^{-1} \Rightarrow y'' = -x^{-2} \Rightarrow$
$y''' = 2x^{-3} \Rightarrow \cdots \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)! \cdot x^{-n}$

2.11.1 Fórmula de Leibniz

$$\boxed{(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}} \tag{2.21}$$

2.12 Diferencial de ordem superior

Se a função $y = f(x)$ é diferenciável em cada ponto do intervalo (a, b), então o diferencial $dy = f'(x)dx$ desta função é uma função de duas variáveis x e dx. Vamos supor que a função $f'(x)$ também é diferenciável e a grandeza dx não depende da variável x. Neste caso existe o diferencial da função $dy = f'(x)dx$ a que se chama o **diferencial da segunda ordem ou o segundo diferencial da função** $f(x)$ e denota-se d^2y.

Temos que

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

Em geral, com as nossas condições que a grandeza dx não depende de variável x o diferencial d^ny de ordem n da função $y = f(x)$ é

$$d^ny = d\left[d^{(n-1)}y)\right] = f^{(n)}(x)(dx)^n \tag{2.22}$$

Para simplificar as notações, escreve-se também

$$(dx)^n = dx^n$$

e para a derivada de ordem n no caso em que a grandeza dx não depende da variável x temos a igualdade:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Capítulo 3

Integral indefinido

3.1 Primitiva

À função $F(x)$ chama-se **primitiva duma função** $f(x)$ **no intervalo** (a,b), se, em cada ponto deste intervalo, a função $F(x)$ **for derivável e for válida a igualdade:**

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \tag{3.1}$$

Na definição de primitiva o intervalo (a,b) pode ser substituído por qualquer conjunto da recta, onde tenha sentido considerar uma derivada.

Exemplo 29 $F(x) = x^n$ *é uma primitiva da função* $f(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$;

Exemplo 30 $F(x) = \operatorname{tg}^2 x$ *é uma primitiva da função* $f(x) = \operatorname{tg} x - x$;

Exemplo 31 $F(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$ *é uma primitiva da função* $f(x) = x + \ln|2x+1|$;

Teorema 32 *Se* $F_1(x)$ *e* $F_2(x)$ *forem duas primitivas de uma função* $f(x)$ *no intervalo* (a,b), *então em todo o intervalo*

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

onde C *é uma constante.*

3.2 Conceito de integral indefinido

3.2.1 Definição de integral indefinido

Ao conjunto de todas as primitivas de uma dada função $f(x)$ no intervalo (a,b) chama-se integral indefinido da função $f(x)$ (neste intervalo) e denota-se por

$$\int f(x)dx$$

Teorema 33 *Se* $F(x)$ *for uma primitiva da função* $f(x)$ *no intervalo* (a, b), *então*

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C,} \tag{3.2}$$

onde C *é uma constante.*

Exemplo 34 $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C;$

Exemplo 35 $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

Exemplo 36 $\int \dfrac{2x+3}{2x+1} dx = x + \ln|2x+1| + C;$

Propriedades principais do integral indefinido

Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$ no intervalo (a, b). Neste intervalo temos que

$$\underline{dF} = F'(x)dx = \underline{f(x)dx}$$

Desta igualdade deduzem-se as duas principais propriedades do integral indefinido:

$$\begin{array}{|l|} \hline 1) \quad d\int f(x)dx = f(x)dx \\ \hline 2) \quad \int dF(x) = F(x) + C \\ \hline \end{array} \tag{3.3}$$

Devido ao facto da operação de derivação ser linear, a operação de integração também será linear, i.e.,

$$\begin{array}{|l|} \hline 1) \quad \int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \\ \hline 2) \quad \int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A = Const. \\ \hline \end{array}$$

3.2.2 Tabela de integrais

1. $\int 0dx = C;$
2. $\int 1dx = x + C;$
3. $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, r \neq -1;$
4. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, x \neq 0;$
5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, a > 0, a \neq 1;$
6. $\int e^x dx = e^x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots;$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots;$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \quad x \in (-1, 1);$
12. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases} \quad ;$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C;$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, |x| > 1;$
15. $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, |x| \neq 1;$

3.2.3 Algumas funções que não são elementares

1. Logarítmo integral:
$$\int \frac{dx}{\ln x}, x > 0, x \neq 1;$$
2. Integral-seno:
$$\int \frac{\sin x}{x}dx;$$
3. Co-seno integral:
$$\int \frac{\cos x}{x}dx, x \neq 0;$$

3.3 Dois métodos principais de integração

3.3.1 Integração por partes

A derivada do produto de duas funções $u(x)$ e $v(x)$ é

$$[\ u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Portanto, o diferencial do produto de duas funções $u(x)$ e $v(x)$ é

$$d\,[uv] = [\ u(x)v(x)]'\,dx = v(x)u'(x)dx + u(x)v'(x)dx$$

ou

$$d\,[uv] = vdu + udv$$

Daqui segue que

$$\int d\,[uv] = \int vdu + \int udv$$

De acordo com as fórmulas (3.3) temos que

$$\int d\,[uv] = uv$$

Portanto,

$$uv = \int vdu + \int udv$$

Temos uma fórmula que permite cacular um dos integrais $\int udv$ ou $\int vdu$ através do outro:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \tag{3.4}$$

A este método de integração chama-se **método de integração por partes.**

A maioria dos integrais que podem ser calculados com o método de integração por partes pode ser dividida em três grupos:

I) A função subintegral contém como um dos factores uma das seguintes funções:

$$\ln x;\ \ \arcsin x;\ \ \arccos x;\ \ \operatorname{arctg} x;\ \ (\operatorname{arctg} x)^2;\ \ \ln \varphi(x);\ \ \cdots$$

Para usar a fórmula (3.4) é preciso escolher $u(x)$ como sendo uma destas funções que está presente no integral.

Exemplo 37 $\int x^2 \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx & v = \frac{1}{3}x^3 \end{bmatrix} =$
$\frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}x^3\left[\ln x - \frac{1}{3}\right] + C;$

II) Integrais do tipo:

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx; \quad \int (ax+b)^n \sin(cx)\,dx; \quad \int (ax+b)^n e^{cx} dx,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Para estes integrais a fórmula (3.4) usa-se n vezes. Para a função $u(x)$ é preciso escolher sempre $(ax+b)^k$. Neste caso, a potência de $(ax+b)$ com cada uso da fórmula (3.4) vai diminuir uma unidade e depois de n passos chegamos à potência 0.

Exemplo 38 $\int x\cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C;$

Exemplo 39 $\int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x + C;$

III) Integrais do tipo:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx; \quad \int e^{ax}\sin(bx)\,dx; \quad \int \sin(\ln x)\,dx; \quad \int \cos(\ln x)\,dx; \quad \cdots$$

Para estes integrais temos que usar a fórmula (3.4) 2 vezes e obtemos uma equação de primeira ordem, onde a incógnita é o integral.

É importante notar que para os integrais

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx; \quad \int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

as funções $u(x)$ e $v(x)$ podem ser escolhidos arbitrariamente, mas no segundo passo a natureza destas funções deve ser mantida. Caso contrário, em vez de uma equação, obtemos uma identidade que não permitirá encontrar o integral.

Exemplo 40 $\int e^x \sin x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin x, & du = \cos x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right] = e^x\sin x - \int e^x \cos x dx =$

$\left[\begin{array}{ll} u = \cos x, & du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right] = e^x \sin x - e^x\cos x - \int e^x \sin x dx \Rightarrow$

$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left[e^x\sin x - e^x\cos x\right] = \frac{1}{2}e^x\left[\sin x - \cos x\right] + C;$

Exemplo 41 $\int \sin[\ln x]\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin[\ln x], & du = \frac{1}{x}\cos[\ln x]\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right] =$

$x\sin[\ln x] - \int \cos[\ln x]\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \cos[\ln x], & du = -\frac{1}{x}\sin[\ln x]\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right] =$

$x\sin[\ln x] - x\cos[\ln x] - \int \sin[\ln x]\,dx \Rightarrow$

$\int \sin[\ln x]\,dx = \frac{1}{2}x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C;$

Existem ainda integrais que não pertencem a nenhum destes grupos, mas que podem ser calculados pelo método de integração por partes.

3.3.2 Método de substituição

Se $F(x)$ for uma primitiva da função $f(x)$ no intervalo (a,b), então $F'(x) = f(x)$ e

$$dF = f(x)dx$$

Se $x = \varphi(t)$ for uma função diferenciável, admitir função inversa e for tal que $\operatorname{im}\varphi \subseteq \operatorname{dom} f$, então podemos considerar as funções compostas $F[\varphi(t)]$ e $f[\varphi(t)]$. Para estas funções temos que

$$F'[\varphi(t)] = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t) \quad \text{e} \quad dF = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

Portanto,

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt,$$

onde

$$x = \varphi(t) \tag{3.5}$$

Daqui segue a primeira **fórmula de substituição:**

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \tag{3.6}$$

A primeira fórmula de substituição também pode ser escrita na forma:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi)d\varphi$$

Se denotamos por $\psi(x)$ a função inversa da função (3.5), i.e., $\varphi[\psi(x)] = x$, então

$$t = \psi(x) \quad \text{e} \quad dt = \psi'(x)dx \tag{3.7}$$

Se, além disso, a função $g(t)$ for tal que

$$f(x)dx = g[\psi(x)]\,\psi'(x)dx$$

ou, de modo equivalente,

$$f(x)dx = g(\psi)d\psi,$$

então vamos ter a igualdade:

$$\int f(x)dx = \int g[\psi(x)]\,\psi'(x)dx = \int g(\psi)\,d\psi, \tag{3.8}$$

que é a segunda **fórmula de substituição.**

É claro que a diferença entre as fórmulas de substituição (3.6) e (3.8) consiste apenas na notação. Às vezes é cómoda a substituição (3.5) e outras vezes é mais cómoda a substituição (3.7).

Exemplo 42 $\int \cos(ax)\,dx = \left[x = \frac{1}{a}t \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt\right] =$
$\int \cos(t)\,\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int \cos t dt = \frac{1}{a}\sin t = \frac{1}{a}\sin(ax) + C;$

Exemplo 43 $\int (ax+b)^{2007}\,dx = \left[t = ax+b \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t-b) \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt\right] =$
$\int t^{2007}\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int t^{2007}dt = \frac{1}{a}\frac{1}{2008}t^{2008} = \frac{1}{2008a}(ax+b)^{2008} + C;$

Exemplo 44 $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \left[t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt\right] =$
$\int \frac{1}{t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C;$

Exemplo 45 *O caso mais geral,* $\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \left[t = \psi(x) \Rightarrow dt = \psi'(x)dx\right] = \int \frac{1}{\psi}d\psi = \ln|\psi| = \ln|\psi(x)| + C;$

Por exemplo, $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln\left|x^2+px+q\right| + C;$

Exemplo 46 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \left[x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt\right] =$
$\int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| =$
$-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\right| = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C;$

É claro que, na prática, muitas vezes, é preciso usar ambos os métodos e, nalguns casos, mais do que uma vez.

Exemplo 47 $\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$
$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C;$

Exemplo 48 $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx & v = \operatorname{tg} x \end{bmatrix} =$
$x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x\operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = [t = \cos x \Rightarrow dt = \sin x dx] =$
$x\operatorname{tg} x - \int \frac{1}{t}dt = x\operatorname{tg} x - \ln|t| = x\operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C$

Notamos que este integral não pertence a nenhum grupo I)-III), mas pode ser calculado com a ajuda da fórmula (3.4).

Exemplo 49 $J_k = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^k}dx,\ \ k \in \mathbb{N},\ \ k \geq 1,\ a > 0.$

Seja $k > 1,$

$J_k = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^k}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^k}dx =$
$\frac{1}{a^2}J_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^k}dx;$
$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^k}dx = \left[t = x^2+a^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt\right] =$
$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^k}dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{k-1}\frac{1}{t^{k-1}} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+a^2)^{k-1}}$
$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^k}dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^k}dx & v = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+a^2)^{k-1}} \end{array}\right] =$
$-\frac{1}{2(k-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}J_{k-1}$
Portanto, $J_k = \frac{1}{a^2}J_{k-1} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{2}\frac{1}{k-1}\frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\frac{1}{2}\frac{1}{k-1}J_{k-1} \Rightarrow$

$$J_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} - \frac{2k-3}{a^2(2k-2)}J_{k-1} \tag{3.9}$$

Para calcular o integral temos a fórmula de recorrência:
$J_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \Rightarrow$
$J_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^2}J_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} - \frac{1}{2a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \Rightarrow \cdots$

3.4 Integrais elementares que contêm o trinómio quadrado

3.4.1 Trinómio quadrado

A equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

tem duas raizes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ou

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se soubermos as raízes, podemos[1] escrever o trinómio na forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

[1] Compare a separação do quadrado perfeito:
$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Denotamos

$$d^2 = \left|\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right|$$

e

$$t = x + \frac{b}{2a} \tag{3.10}$$

Vamos ter dois casos:

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} a\left(t^2 + d^2\right), & \text{se } \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0 \\ a\left(t^2 - d^2\right), & \text{se } \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0 \end{cases}$$

3.4.2 Integrais do tipo

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx, a \neq 0 \tag{3.11}$$

Passo 1: $\dfrac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \dfrac{\dfrac{m}{2a}(2ax + b) + \left(n - \dfrac{mb}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} \Rightarrow$

$\int \dfrac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx = \dfrac{m}{2a} \int \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(n - \dfrac{mb}{2a}\right) \int \dfrac{1}{ax^2 + bx + c} dx;$

Passo 2: O integral $\int \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx$ é do tipo $\int \dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx$. Por isso temos que

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \ln\left|ax^2 + bx + c\right|$$

Passo 3: Para calcular o integral $\int \dfrac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ pode-se empregar a substituição (3.10). Com esta substituição vamos chegar a um dos dois integrais

$$\int \frac{1}{1 - t^2} dt = \ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C, |t| \neq 1;$$

ou

$$\int \frac{1}{1 + t^2} dt = \begin{cases} \operatorname{arctg} t + C, \\ -\operatorname{arcctg} t + C, \end{cases}$$

Passo 4: Juntamos todos os cálculos feitos.

3.4.3 Integrais do tipo

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, a \neq 0 \tag{3.12}$$

O algoritmo é análogo ao anterior:

No passo 2 vamos ter o integral do tipo $\int \frac{\psi'(x)}{\sqrt{\psi(x)}}dx$:

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = 2\sqrt{ax^2+bx+c}$$

e no passo 3 chegamos aos integrais:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} \arcsin t + C, \\ -\arccos t + C, \end{cases} \qquad t \in (-1,1)\,;$$

ou

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C;$$

ou

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt = \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C, \qquad |t| > 1;$$

3.4.4 Integrais do tipo

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad a \neq 0 \tag{3.13}$$

Fazendo a substituição (3.10) chegamos a um dos seguintes integrais:

$$\int \sqrt{p^2-t^2}dt = \frac{t}{2}\sqrt{p^2-t^2} + \frac{p^2}{2}\arcsin\frac{t}{p} + C;$$

ou

$$\int \sqrt{t^2+q}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{t^2+q} + \frac{q}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+q}\right| + C;$$

3.5 Integração de funções racionais

3.5.1 Polinómio

De acordo com o Teorema fundamental da Álgebra, qualquer polinómio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

tem n raízes: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Por isso, qualquer polinómio pode ser escrito na forma:

$$P_n(x) = a_n\,(x-\lambda_1)\,(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n) \tag{3.14}$$

Se todos os coeficientes do polinómio forem reais e alguma das raízes for um número complexo

$$\lambda = \alpha + \beta i,$$

então entre as raízes do polinómio encontra-se também o número complexo conjugado:

$$\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$$

Neste caso, o produto $(x-\lambda)\left(x-\overline{\lambda}\right)$ é

$$(x-\lambda)\left(x-\overline{\lambda}\right) = x^2 + px + q,$$

onde p e q são números reais.

Juntando todas as raízes complexas com as raízes complexas conjugadas correspondentes e juntando todas as raízes iguais, podemos escrever a igualdade (3.14) na forma:

$$P_n(x) = a_n\,(x-\lambda_{j_1})^{k_{j_1}} \cdots (x-\lambda_{j_i})^{k_{j_i}} \left(x^2 + p_{l_1}x + q_{l_1}\right)^{s_{l_1}} \cdots \left(x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r}\right)^{s_{l_r}}, \qquad (3.15)$$

onde $k_{j_1}, \ldots, k_{j_i}, s_{l_1}, \ldots, s_{l_r}$ são os graus de multiplicidade das raízes.

3.5.2 Fracção racional própria

A função racional é uma função do tipo

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)},$$

onde $Q_m(x)$ e $P_n(x)$ são polinómios de grau m e n respectivamente. Se

$$n > m,$$

então a $f(x)$ chama-se **fracção racional própria.**

Notamos que no caso $n \leq m$ podemos dividir $Q_m(x)$ por $P_n(x)$, separar a parte inteira da fracção e obter a representação da função $f(x)$ como a soma dum polinómio e duma fracção racional própria.

Às fracções

$$\frac{1}{(x-\lambda)^k} \quad \text{e} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

onde $\lambda, p, q, M, N \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ e o polinómio $x^2 + px + q$ tem raízes complexas, vamos chamar **fracções simples.**

Lema 50 *Qualquer fracção racional própria decompõe-se em soma de fracções simples, i.e., se o denominador da fracção* $P_n(x)$ *estiver representado na forma* (3.15), *então*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{k_{j_1}}}{(x-\lambda_{j_1})^{k_{j_1}}} + \frac{A_{k_{j_1}-1}}{(x-\lambda_{j_1})^{k_{j_1}-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\lambda_{j_1}} + \cdots +$$

$$\frac{B_{k_{j_i}}}{(x-\lambda_{j_i})^{k_{j_i}}} + \frac{B_{k_{j_i}-1}}{(x-\lambda_{j_i})^{k_{j_i}-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-\lambda_{j_i}} + \cdots +$$

$$\frac{C_{s_{l_1}}x + D_{s_{l_1}}}{(x^2 + p_{l_1}x + q_{l_1})^{s_{l_1}}} + \frac{C_{s_{l_1}-1}x + D_{s_{l_1}-1}}{(x^2 + p_{l_1}x + q_{l_1})^{s_{l_1}-1}} + \cdots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_{l_1}x + q_{l_1}} + \cdots +$$

$$\frac{M_{s_{l_r}}x + N_{s_{l_r}}}{(x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r})^{s_{l_r}}} + \frac{M_{s_{l_r}-1}x + N_{s_{l_r}-1}}{(x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r})^{s_{l_r}-1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r}} \tag{3.16}$$

É preciso acrescentar que quando o denominador tem uma raiz real λ de multiplicidade k, então na expressão (3.16) devem entrar todas as fracções simples:

$$\frac{A_k}{(x-\lambda)^k}, \quad \frac{A_{k-1}}{(x-\lambda)^{k-1}}, \quad \cdots, \quad \frac{A_1}{x-\lambda}$$

e quando o denominador tem uma raiz complexa de multiplicidade k, então na expressão (3.16) devem entrar todas as fracções simples:

$$\frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k}, \quad \frac{M_{k-1}x + N_{k-1}}{(x^2+px+q)^{k-1}}, \quad \cdots, \quad \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q}$$

Método dos coeficientes indeterminados

Para calcular os coeficientes indeterminados $A_{k_{j_1}}, \cdots, A_1, \cdots, M_1, N_1$:

Passo 1: Ambos os membros da identidade (3.16) reduzem-se à forma inteira:

$$Q_m(x) = A_{k_{j_1}} (x-\lambda_{j_2})^{k_{j_2}} \cdots (x-\lambda_{j_i})^{k_{j_i}} + \cdots$$

$$(M_1 x + N_1)(x-\lambda_{j_1})^{k_{j_1}} \cdots \left(x^2 + p_{l_r}x + q_{l_r}\right)^{s_{l_r}-1} \tag{3.17}$$

Passo 2: Obter e resolver um sistema para as incógnitas $A_{k_{j_1}}, \cdots, A_1, \cdots, M_1, N_1$.

Para obter o sistema podemos usar métodos diferentes:

i) Igualam-se os coeficientes de cada uma das potências iguais da variável x em ambos os membros da identidade (3.17).

ii) Iguala-se a variável x em ambos os membros da identidade (3.17), a certos números devidamente escolhidos.

iii) Mistura-se i) e ii) para obter o sistema mais simples possível.

Exemplo 51 $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-2)(x^2+1)^2}$

De acordo com (3.16) *temos que procurar a decomposição da fracção na forma:*

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Passo 1:

$$3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1 = A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx+C)(x-2) + (Mx+N)(x-2)\left(x^2+1\right)$$

Passo 2: i)

$$3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1 = (A+M)x^4 + (N-2M)x^3 +$$

$$(2A+B+M-2N)\,x^2+(C-2B-2M+N)\,x+(A-2C-2N)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+M=3 \\ N-2M=2 \\ 2A+B+M-2N=3 \\ C-2B-2M+N=0 \\ A-2C-2N=-1 \end{cases}$$

A solução do sistema obtido é

$$A=3,\quad B=1,\quad C=0,\quad M=0,\quad N=2$$

Portanto

$$f(x)=\frac{3}{x-2}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2}{x^2+1} \tag{3.18}$$

Exemplo 52 $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)\,x\,(x-1)}$

De acordo com (3.16) *temos que procurar a decomposição da fracção na forma:*

$$f(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}$$

Passo 1:

$$x+1=A\,(x-1)\,x+B\,(x-1)\,(x-2)+Cx\,(x-2)$$

Passo 2: ii)

$$\begin{array}{lllll} x=2 & \Rightarrow & 3=2A & \Rightarrow & A=\dfrac{3}{2} \\ x=0 & \Rightarrow & 1=2B & \Rightarrow & B=\dfrac{1}{2} \\ x=1 & \Rightarrow & 2=-C & \Rightarrow & C=-2 \end{array}$$

Portanto

$$f(x)=\frac{3}{2\,(x-2)}+\frac{1}{2x}-\frac{2}{x-1} \tag{3.19}$$

Exemplo 53 $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+3)\,(x^2+1)}$

De acordo com (3.16) *temos que procurar a decomposição da fracção na forma:*

$$f(x)=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Passo 1:

$$x+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,(x+3)$$

Passo 2: iii)

$$\begin{array}{lllll} x=-3 & \Rightarrow & -2=10A & \Rightarrow & A=-\dfrac{1}{5} \\ x=0 & \Rightarrow & 1=A+3C & \Rightarrow & C=\dfrac{2}{5} \\ \textit{Coef. } x^2 & \Rightarrow & 0=A+B & \Rightarrow & B=\dfrac{1}{5} \end{array}$$

Portanto

$$f(x)=-\frac{1}{5\,(x+3)}+\frac{x+2}{5\,(x^2+1)} \tag{3.20}$$

3.5.3 Integração de fracções simples

1. $\int \dfrac{1}{x-\lambda}dx = \ln|x-\lambda| + C;$

2. $\int \dfrac{1}{(x-\lambda)^k}dx = -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x-\lambda)^{k-1}}, k > 1;$

3. $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \{\text{ver}\quad(3.11)\} = \dfrac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \dfrac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} + C$

4. $\int \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \dfrac{M}{2}\int \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(N - \dfrac{Mp}{2}\right)\int \dfrac{1}{(x^2+px+q)^k}dx;$

   $\int \dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}};$

   $\int \dfrac{1}{(x^2+px+q)^k}dx = \left[t = x + \dfrac{p}{2} \Rightarrow dt = dx\right] = \int \dfrac{1}{(t^2+a^2)^k}dx,$

   onde $a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}} \Rightarrow \{\text{ver}\quad(3.9)\}$

3.5.4 Algoritmo de integração de funções racionais

Passo 1: Separar a parte inteira da fracção e obter a representação da função racional como a soma dum polinómio e duma fracção racional própria.

Passo 2 Decompor a fracção racional própria em soma de fracções simples.

Passo 3 Calcular os integrais da parte inteira e de cada fracção simples que estão presentes na decomposição (3.16) da função racional dada.

Exemplo 54 $\int \dfrac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}dx = \{\mathit{ver}\quad(3.18)\} =$

$$\int \frac{3}{x-2}dx + \int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx + \int \frac{2}{x^2+1}dx = 3\ln|x-2| - \frac{1}{2\left(x^2+1\right)} + 2\operatorname{arctg} x + C;$$

Exemplo 55 $\int \dfrac{x+1}{(x-2)\,x\,(x-1)}dx = \{\mathit{ver}\quad(3.19)\} =$

$$\int \frac{3}{2(x-2)}dx + \int \frac{1}{2x}dx - \int \frac{2}{x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln|x-1| + C;$$

Exemplo 56 $\int \dfrac{x+1}{(x+3)\left(x^2+1\right)}dx = \{\mathit{ver}\quad(3.20)\} =$

$$-\int \frac{1}{5(x+3)}dx + \int \frac{x+2}{5\left(x^2+1\right)}dx = -\frac{1}{5}\ln|x+3| + \frac{1}{10}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x + C$$

3.6 Integração de funções trigonométricas

3.6.1 Integrais do tipo

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{3.21}$$

onde R **é uma função racional**

Substituição universal

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Com esta substituição obtemos

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Por isso,

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

O último integral é o integral duma função racional que já sabemos calcular.

Exemplo 57 $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$

Casos particulares

1) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ Substituição

$$t = \operatorname{tg} x$$

1. Neste caso

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Exemplo 58 $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + 3} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 4} \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

$\left[t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx\right] = \int \frac{1}{t^2+4} dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C;$

2) $R(\sin x, \cos x) = \widetilde{R}\left(\sin^2 x, \cos x\right) \sin x \Rightarrow$ Substituição

$$t = \cos x$$

3) $R(\sin x, \cos x) = \widehat{R}\left(\sin x, \cos^2 x\right) \cos x \Rightarrow$ Substituição

$$t = \sin x$$

Exemplo 59 $\int \frac{\sin x}{1+3\sin^2 x-\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{1+3\left(1-\cos^2 x\right)-\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{4-3\cos^2 x-\cos x}dx =$

$[t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x dx] = -\int \frac{1}{4-3t^2-t}dt = \cdots$

Exemplo 60 $\int \frac{\cos x}{1+3\cos^2 x-\sin x}dx = \int \frac{\cos x}{1+3\left(1-\sin^2 x\right)-\sin x}dx = \int \frac{\cos x}{4-3\sin^2 x-\sin x}dx =$

$[t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx] = -\int \frac{1}{4-3t^2-t}dt = \cdots$

3.6.2 Integrais do tipo

$$\int \sin ax \cos bx \ dx, \quad \int \sin ax \sin bx \ dx, \quad \int \cos ax \cos bx \ dx,$$

Para calcular estes integrais é preciso saber as fórmulas:

Exercício 61 **1)** $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \quad e \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);$

2) $\cos x \cos t = \frac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos(x+t)];$

3) $\sin x \sin t = \frac{1}{2}[\cos(x-t)-\cos(x+t)];$

4) $\sin x \cos t = \frac{1}{2}[\sin(x-t)+\sin(x+t)];$

Exemplo 62 $\int \sin ax \cos bx \ dx = \frac{1}{2}\int [\sin(ax-bx)+\sin(ax+bx)]\,dx = \cdots$

3.7 Integração de funções hiperbólicas

3.7.1 Funções hiperbólicas

$$\operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{ctgh} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Algumas propriedades:

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

Exercício 63 $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2x) \quad e \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1);$

2) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x-t)+\operatorname{ch}(x+t)];$

3) $\operatorname{sh} x \sin t = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+t) - \operatorname{ch}(x-t)\right];$

4) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} t = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x-t) + \operatorname{sh}(x+t)\right];$

3.7.2 Integração de funções hiperbólicas

A integração de funções hiperbólicas é completamente análoga à integração de funções trigonométricas.

3.8 Integração de algumas funções irracionais

3.8.1 Integrais do tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots\right] dx$$

onde R é uma função racional e $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ são números inteiros

Substituição

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

onde n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores $q_1, q_2, \ldots$

Exemplo 64 $\int \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} dx = \left[\dfrac{x-1}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \Rightarrow dx = \dfrac{4t}{(1-t^2)^2} dt\right] =$
$\int \dfrac{4t^2}{(1-t^2)^2} dt = \cdots$

3.8.2 Integrais do tipo

$$\int R\left[x, \sqrt{a^2 - x^2}\right] dx$$

onde R é uma função racional

Substituição

$$x = a \sin t$$

3.8.3 Integrais do tipo

$$\int R\left[x, \sqrt{a^2 + x^2}\right] dx$$

onde R é uma função racional

Substituição

$$x = a \operatorname{tg} t$$

3.8.4 Integrais do tipo
$$\int R\left[x, \sqrt{x^2-a^2}\right]dx$$
onde R é uma função racional

Substituição
$$x = a\cosh t$$

Exemplo 65 $\int \sqrt{p^2-x^2}dx = [x = p\sin t \Rightarrow dx = p\cos t dt] = p^2 \int \cos^2 t dt =$
$p^2 \frac{1}{2} \int [1+\cos 2t]\, dt = \frac{1}{2}p^2 \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] = \frac{1}{2}p^2 [t + \sin t \cos t] =$
$\frac{x}{2}\sqrt{p^2-x^2} + \frac{p^2}{2}\arcsin\frac{x}{p} + C;$
Nota: $t = \arcsin\frac{x}{p} \Rightarrow \sin\left[\arcsin\frac{x}{p}\right] = \frac{x}{p}; \ \cos\left[\arcsin\frac{x}{p}\right] = \sqrt{1-\left(\frac{x}{p}\right)^2}$

Exemplo 66 $\int \sqrt{x^2-p^2}dx = [x = p\cosh t \Rightarrow dx = p\sinh t dt] = p^2 \int \sinh^2 t dt =$
$p^2 \frac{1}{2} \int [\cosh 2t - 1]\, dt = \frac{1}{2}p^2 \left[-t + \frac{1}{2}\sinh 2t\right] = \frac{1}{2}p^2 [-t + \sinh t \cosh t] =$
$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+q} + \frac{q}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+q}\right| + C;$
Nota: $t = \operatorname{arccosh}\frac{x}{p} \Rightarrow \cosh\left[\operatorname{arccosh}\frac{x}{p}\right] = \frac{x}{p}; \ \sinh\left[\operatorname{arccosh}\frac{x}{p}\right] = \sqrt{\left(\frac{x}{p}\right)^2 - 1}$

Capítulo 4

Propriedades básicas das funções contínuas e das funções diferenciáveis

4.1 Propriedades das funções contínuas

4.1.1 Sobre limites e continuidade das funções

Teorema 67 ***(Definição*** $\varepsilon - \delta$ ***)*** *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida numa vizinhança do ponto* x_0*. A função* $y = f(x)$ *tende para o limite* y_0 *quando* $x \to x_0$ *sse*

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0, \qquad \exists\delta > 0 : \\ |x - x_0| &< \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ao intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vamos chamar $\delta-$**vizinhança do ponto** x_0.

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0, \qquad \exists\delta > 0 : \\ x_0 &\in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x_0) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Teorema 68 *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida numa vizinhança do ponto* x_0*. A função* $y = f(x)$ *é contínua no ponto* x_0 *sse*

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0, \qquad \exists\delta > 0 : \\ |x - x_0| &< \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Estabilidade do sinal

Teorema 69 *Se a função* $f(x)$ *é contínua no ponto* x_0 *e* $f(x_0) \neq 0$*, então existe uma* $\delta-$*vizinhança do ponto* x_0 *tal que*

$$f(x) \neq 0 \quad e \quad \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

4.1.2 Propriedades das funções contínuas sobre um segmento

Existência de zero da função

Teorema 70 *Se* $y = f(x)$ *é uma função contínua sobre o segmento* $[a, b]$, *então*

$$\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in [a, b] : \; f(x_0) = 0$$

Exercício 71 *Mostre que a equação:*

$$8x^7 - 7x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

tem pelo menos uma raiz no segmento $[0, 1]$.

Valores intermédios

Corolário 72 *Se* $y = f(x)$ *é uma função contínua sobre o segmento* $[a, b]$, *então*

$$f(a) \neq f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall y_0 \text{ que fica entre } f(a) \text{ e } f(b), \;\; \exists x_0 \in [a, b] : \; f(x_0) = y_0$$

Limitação

Teorema 73 *Se* $y = f(x)$ *é uma função contínua sobre o segmento* $[a, b]$, *então ela é limitada neste segmento.*

É importante notar, que uma função contínua sobre um intervalo aberto (a, b) pode ser não limitada neste intervalo.

Exemplo 74 $y = \dfrac{1}{x}$ *no intervalo* $(0, 1)$ *não é limitada.*

Supremo e ínfimo

Teorema 75 *Se* $y = f(x)$ *é uma função contínua sobre o segmento* $[a, b]$, *então*

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : \quad \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1) \quad e \quad \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$$

Corolário 76 *Se* $y = f(x)$ *é uma função contínua sobre o segmento* $[a, b]$, *então*

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \neq \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad \Rightarrow \quad \forall y_0 \text{ que fica entre } \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ e } \sup_{x \in [a,b]} f(x), \;\; \exists x_0 \in [a, b] : \; f(x_0) = y_0$$

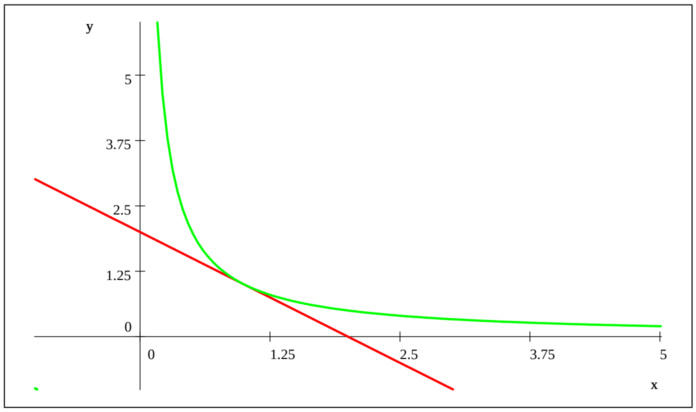
4.2 Propriedades locais das funções diferenciáveis

4.2.1 Interpretação geométrica da derivada

O **valor da derivada** $f'(x_0)$ **é** igual à **tangente do ângulo formado pelo eixo dos** x **positivos e a recta tangente à curva** representativa da função $y = f(x)$ **no ponto correspondente** $(x_0, f(x_0))$. (Ver [1], pag. 76-77).

A equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto correspondente (x_0, y_0), onde $y_0 = f(x_0)$, é

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{4.1}$$



4.2.2 Monotonia local

Teorema 77 ***(Condição suficiente de monotonia local)*** *Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável numa vizinhança do ponto x_0. Se $f'(x_0) \neq 0$, então existe uma $\delta-$vizinhança do ponto x_0 tal que*

$f'(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	$y = f(x)$	*é uma função crescente no intervalo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$f'(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	$y = f(x)$	*é uma função decrescente no intervalo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

4.2.3 Extremo local

Diz-se que a função $y = f(x)$ tem um **máximo local no ponto** x_0, se existe uma $\delta-$vizinhança do ponto x_0 tal que

$$f(x_0) > f(x) \ , \quad \forall x \in \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Diz-se que a função $y = f(x)$ tem um **mínimo local no ponto** x_0, se existe uma $\delta-$vizinhança do ponto x_0 tal que

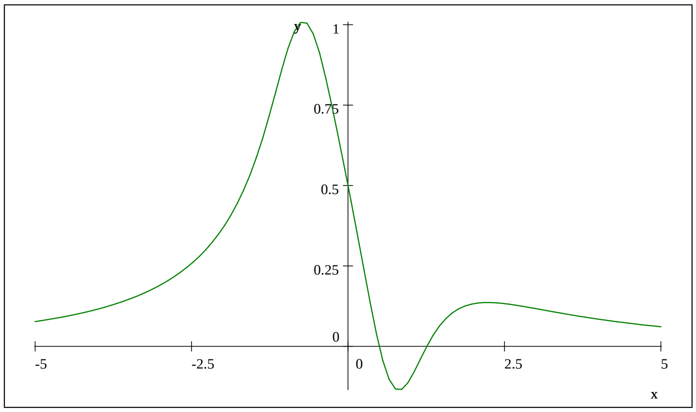
$$f(x_0) < f(x) \ , \quad \forall x \in \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Chama-se máximo e mínimo duma função aos **extremos** ou aos **valores extremais** desta função.

Teorema 78 ***(Condição necessária de extremo local)*** *Se a função $y = f(x)$ for diferenciável no ponto x_0 e tiver um extremo neste ponto, então*

$$f'(x_0) = 0$$

Aos pontos onde a derivada se anula chamam-se **pontos críticos.** $\frac{x+1}{x+2}$



4.3 Propriedades das funções diferenciáveis num intervalo

4.3.1 Maior e menor valor de uma função sobre um segmento

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no segmento fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b). Vamos supor ainda que a função $y = f(x)$ tem um conjunto finito de pontos críticos:

$$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$$

Exercício 79 *Calcule*

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) \quad e \quad \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

Algoritmo de resolução:

1. *Determinar* $M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.
2. *Calcular* $\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \cdots,\ f(x_m)\}$
3. $\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \cdots,\ f(x_m)\}$ *e*
   $\min f(x) = \min\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ f(x_2), \cdots,\ f(x_m)\}$

Exercício 80 *Calcule*

$$\max_{x\in[-3,+3]} f(x) \quad e \quad \min_{x\in[-3,+3]} f(x),$$

onde

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$$

4.3.2 Zero da derivada

Teorema 81 *(de Rolle) Se a função* $y = f(x)$ *é contínua no segmento fechado* $[a, b]$ *e diferenciável no intervalo aberto* (a, b)*, então*

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \{\ \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0\}$$

4.3.3 Teorema dos acréscimos finitos

Teorema 82 *(de Lagrange) Se a função* $y = f(x)$ *é contínua no segmento fechado* $[a, b]$ *e diferenciável no intervalo aberto* (a, b), *então*

$$\exists x_0 \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Vamos supor que a função $y = f(x)$ satisfaz as condições do teorema de Lagrange e $c \in [a, b]$. Se $\Delta x > 0$ é tal que $c + \Delta x \in [a, b]$, então a função $y = f(x)$ satisfaz as condições do teorema de Lagrange no segmento $[c, c + \Delta x]$ e, portanto,

$$\exists x_c \in (c, c + \Delta x) : f(c + \Delta x) - f(c) = f'(x_c)\Delta x$$

ou

$$\exists x_c \in (c, c + \Delta x) : \Delta f(c) = f'(x_c)\Delta x$$

Por isso ao teorema de Lagrange também se chama teorema dos acréscimos finitos.

Corolário 83 *Se a função* $y = f(x)$ *é diferenciável no intervalo* (a, b), *então*

$$f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = Const., \ \forall x \in (a, b)$$

Aplicação às desigualdades

Exercício 84 *Mostre que*

1. $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
2. $|\cos \alpha - \cos \beta| \leq |\alpha - \beta|, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
3. $|\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} B| \leq |A - B|, \forall A, B \in \mathbb{R};$
4. $|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta| \leq 2|\alpha - \beta|, \ \forall \alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

4.3.4 Monotonia num intervalo

Teorema 85 *Se a função* $y = f(x)$ *é diferenciável no intervalo* (a, b), *então*

$f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$	$\Leftrightarrow$	$f(x)$ *é uma função não decrescente*
$f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$	$\Leftrightarrow$	$f(x)$ *é uma função não crescente*
$f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ *é uma função crescente*
$f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$	$\Rightarrow$	$f(x)$ *é uma função decrescente*

(4.2)

4.3.5 Relação entre o crescimento de duas funções

Teorema 86 *(de Cauchy) Se as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são contínuas no segmento fechado* $[a, b]$, *diferenciáveis no intervalo aberto* (a, b) *e* $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, *então*

$$\exists x_0 \in (a, b) : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

4.4 Regra de L'Hospital

4.4.1 Comparação de infinitamente pequenos

Sejam $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funções diferenciáveis nos conjuntos onde estão consideradas.

Suponhamos que

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} \beta(x) = 0 \quad \text{e} \quad \beta'(x) \neq 0, \forall x$$

1. Então

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

2. Se as funções $\alpha'(x)$ e $\beta'(x)$ são contínuas no ponto a e $\beta'(a) \neq 0$, então

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha'(a)}{\beta'(a)}$$

3. Se as funções $\alpha'(x)$ e $\beta'(x)$ satisfazem as mesmas condições do que as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, então

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha''(x)}{\beta''(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha''(x)}{\beta''(x)}$$

   E assim por diante.

4. Resultados análogos têm lugar nos casos $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

   Por exemplo,

$$\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \implies \exists \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

   ou

$$\exists \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha''(x)}{\beta''(x)} \implies \exists \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} \implies \exists \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha''(x)}{\beta''(x)}$$

4.4.2 Comparação de infinitamente grandes

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis nos conjuntos onde estão consideradas.

Suponhamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \quad \text{e} \quad g'(x) \neq 0, \forall x$$

1. Então

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Se as funções $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfizerem as mesmas condições que as funções $f(x)$ e $g(x)$, então

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

   E assim por diante.

3. Resultados análogos têm lugar nos casos $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

   Por exemplo,

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   ou

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} \implies \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

4.4.3 Eliminação das indeterminações do tipo

$$0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^0, \quad \infty^0 \tag{4.3}$$

Todas as indeterminações deste tipo reduzem-se a indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

Por outras palavras, as indeterminações do tipo (4.3) reduzem-se à comparação de funções infinitamente pequenas ou infinitamente grandes.

1. $0 \cdot \infty \quad \mapsto \quad \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

   $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{[f(x)]^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\infty}{\infty}$$

2. $\infty - \infty \quad \mapsto \quad 0 \cdot \infty$

   $\lim_{x\to a} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} [\, f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] g(x) \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \infty$$

3. $1^{\infty} \quad \mapsto \quad 0 \cdot \infty$

   $\lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ e $y = [\, f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \left\{\lim_{x\to a} [\, f(x)]^{g(x)} \quad \sim \quad 1^{\infty}\right\}$

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x) \ln [\, f(x)] \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \infty$$

4. $0^0 \quad \mapsto \quad 0 \cdot \infty$

   $\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $y = [\, f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \left\{\lim_{x\to a} [\, f(x)]^{g(x)} \quad \sim \quad 0^0\right\}$

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x) \ln [\, f(x)] \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot \infty$$

5. $\infty^0 \quad \mapsto \quad 0\cdot\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ e $y=[\,f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \left\{\lim_{x\to a}[\,f(x)]^{g(x)} \quad \sim \quad \infty^0\right\}$

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a} g(x)\ln[\,f(x)] \qquad \Rightarrow \quad 0\cdot\infty$$

4.5 Assímptotas

Diz-se que a recta $x=a$ é uma **assímptota vertical** da curva $y=f(x)$, se pelo menos um dos limites

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \ \text{ ou } \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

é igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Diz-se que a recta $y=mx+b$ é uma **assímptota oblíqua** da curva $y=f(x)$ **quando** $x\to+\infty$, se a função $f(x)$ pode ser representada na forma:

$$f(x)=mx+b+\alpha(x),$$

onde $\alpha(x)$ é infinitamente pequena quando $x\to+\infty$.

Diz-se que a recta $y=mx+b$ é uma **assímptota oblíqua** da curva $y=f(x)$ **quando** $x\to-\infty$, se a função $f(x)$ pode ser representada na forma:

$$f(x)=mx+b+\alpha(x),$$

onde $\alpha(x)$ é infinitamente pequena quando $x\to-\infty$.

Teorema 87 *A curva $y=f(x)$ tem uma assímptota oblíqua $y=mx+b$ quando* $x\to+\infty$ *sse*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad e \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=b$$

Teorema 88 *A curva $y=f(x)$ tem uma assímptota oblíqua $y=mx+b$ quando* $x\to-\infty$ *sse*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=b$$

4.6 Fórmula de Taylor

Definições.

Seja $y=f(x)$ uma função que tem todas as derivadas até à ordem $n+1$ inclusivamente numa vizinhança do ponto a. À igualdade

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)} \tag{4.4}$$

chama-se **fórmula de Taylor.** À função $R_n(x)$ chama-se **resto.** O polinómio

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.5}$$

satisfaz as seguintes igualdades:

$$P_n(a) = f(a); \;\; P_n'(a) = f'(a); \; P_n''(a) = f''(a); \;\; \cdots \;\; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{4.6}$$

Para cada x fixo, é possível escrever o resto $R_n(x)$ na forma:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,f^{(n)}(c), \tag{4.7}$$

onde c é um número compreendido entre os números a e x. À igualdade (4.7) chama-se a **fórmula de Lagrange.**

Existem outras fórmulas para o resto $R_n(x)$.

É importante notar que o resto $R_n(x)$ é uma função **infinitamente pequena quando** $x \to a$ **de ordem superior em relação a** $(x-a)^n$. Este facto[1] traduz-se na forma:

$$R_n(x) = o\left[(x-a)^n\right]$$

(Fórmula de Peano).

No caso particular, quando $a = 0$ à fórmula (4.4) chama-se a **fórmula de Maclaurin:**

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + R_n(x)}$$

Desenvolvimento de algumas funções elementares pela fórmula de Maclaurin com o resto na forma de Lagrange

A fórmula de Maclaurin com o resto na forma de Lagrange é

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}f^{(n)}(\theta x),$$

onde θ está compreendido entre 0 e 1.

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$

2. $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \cdots + \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n!}x^n + \dfrac{\sin\left[\theta x + \dfrac{(n+1)\,\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1};$

3. $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \cdots + \dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n!}x^n + \dfrac{\cos\left[\theta x + \dfrac{(n+1)\,\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1};$

[1] O facto que α é infinitamente pequena de ordem superior em relação a β simbolicamente escreve-se na forma

$$\beta = o\,(\alpha)$$

O símbolo o lê-se: $o-$ pequeno.

4.7 Estudo da variação das funções

4.7.1 Pontos de extremo

Primeira condição suficiente do extremo

Vamos considerar uma função $y = f(x)$ que é diferenciável numa $\delta-$vizinhança do ponto x_0 e $f'(x_0) = 0$, i.e., o ponto x_0 é crítico. De acordo com (4.2) temos que

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) & \Longrightarrow & f(x) \text{ é crescente} \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) & \Longrightarrow & f(x) \text{ é decrescente} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_0) > f(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$$

Portanto,

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ admite } \textbf{máximo local} \text{ no ponto } x_0$$

Analogamente,

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) & \Longrightarrow & f(x) \text{ é decrescente} \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) & \Longrightarrow & f(x) \text{ é crescente} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_0) < f(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$$

Portanto,

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ admite } \textbf{mínimo local} \text{ no ponto } x_0$$

Notamos que neste raciocínio para concluir que a função tem extremo local no ponto x_0 usa-se só o facto da derivada mudar de sinal quando atravessa o ponto x_0. No próprio ponto x_0 a derivada pode simplesmente não existir.

No caso da função ser diferenciável numa $\delta-$vizinhança do ponto x_0 excepto o ponto x_0, ao ponto x_0 também se chama **ponto crítico** da função.

Teorema 89 *Se $y = f(x)$ é uma função diferenciável numa $\delta-$vizinhança do ponto x_0 e x_0 é ponto crítico da função, então x_0 é um ponto extremo local sse a derivada muda de sinal quando atravessa o ponto x_0.*

Segunda condição suficiente do extremo

Teorema 90 *Se a função $y = f(x)$ é diferenciável numa $\delta-$vizinhança do ponto x_0, $f'(x_0) = 0$ e existe segunda derivada finita $f''(x_0)$, então*

$$\begin{array}{lll} f''(x_0) < 0 & \Longrightarrow & f(x) \textit{ admite } \textbf{\textit{máximo local}} \textit{ no ponto } x_0 \\ f''(x_0) > 0 & \Longrightarrow & f(x) \textit{ admite } \textbf{\textit{mínimo local}} \textit{ no ponto } x_0 \end{array}$$

4.7.2 Convexidade e concavidade das curvas

Vamos considerar a função $y = f(x)$ diferenciável no intervalo (a, b).

O gráfico da função $y = f(x)$ tem tangente em qualquer ponto (x_0, y_0), onde $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in (a, b)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

E, além disso, cada uma destas tangentes não é vertical.

Diz-se que a curva tem a sua **convexidade orientada para cima** (ou **voltada no sentido dos y positivos**) no intervalo (a, b), se todos os pontos da curva se encontram abaixo do gráfico da tangente em qualquer um dos pontos desta curva nesse intervalo. Neste caso à **curva** chama-se **convexa no intervalo** (a, b).

Diz-se que a curva tem a sua **convexidade orientada para baixo** (ou **voltada no sentido dos y negativos**) no intervalo (a, b), se todos os pontos da curva se encontram acima do gráfico da tangente em qualquer um dos pontos desta curva nesse intervalo. Neste caso à **curva** chama-se **côncava no intervalo** (a, b).

Teorema 91 *Se a função $y = f(x)$ tem segunda derivada finita $f''(x)$ no intervalo (a, b), então*

$$\begin{array}{lcl} f''(x) \leq 0,\ \forall x \in (a, b) & \Longrightarrow & \textbf{\textit{curva convexa}} \\ f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b) & \Longrightarrow & \textbf{\textit{curva côncava}} \end{array}$$

4.7.3 Pontos de inflexão

Chama-se **ponto de inflexão** ao ponto que separa a parte convexa duma curva contínua da sua parte côncava.

Num ponto de inflexão a tangente atravessa a curva, visto que dum lado deste ponto a curva está disposta por baixo da tangente e no outro lado por cima.

Nos teoremas a seguir denotamos: $y_0 = f(x_0)$.

Teorema 92 *Se (x_0, y_0) é ponto de inflexão do gráfico da função $y = f(x)$ e a função tem segunda derivada finita $f''(x_0)$, então*

$$f''(x_0) = 0$$

Teorema 93 *Se a função $y = f(x)$ tem segunda derivada finita $f''(x)$ numa $\delta-$vizinhança do ponto x_0, $f''(x_0) = 0$ e a segunda derivada $f''(x)$ muda de sinal quando atravessa o ponto x_0, então (x_0, y_0) é um ponto de inflexão do gráfico da função $y = f(x)$.*

4.7.4 Esquema geral da construção dos gráficos

Seja $y = f(x)$ uma função real de uma variável real.

Para construir o grafico da função $y = f(x)$ temos que

1. Determinar o domínio natural da função.
2. Determinar (se existem) as assímptotas.
3. Determinar os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento e os pontos de extremo local.

4. Determinar os intervalos de convexidade e de concavidade e os pontos de inflexão do grafico.

Exemplo 94 $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

2. $\lim_{x\to -1+0} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to -1-0} f(x) = -\infty \Longrightarrow$ $x = -1$ *é uma assímptota vertical.*

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ *e* $\lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = -1 \Longrightarrow$ $y = x - 1$ *é uma assímptota oblíqua.*

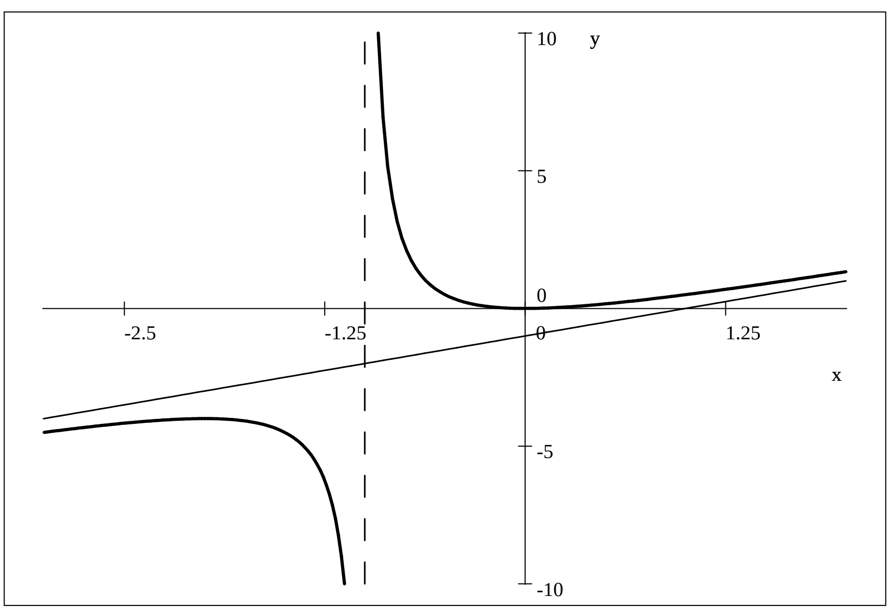
3. $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} \Longrightarrow$

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
Sinal da $f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
Comportamento da função	*cresce*	*decresce*	*decresce*	*cresce*

Pontos	-2	0
Extremo	*máximo*	*mínimo*

4. $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \Longrightarrow$

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Sinal da $f''(x)$	$-$	$+$
Comportamento do grafico	*curva convexa*	*curva côncava*



Bibliografia:

1. N. Piskounov, *Cálculo diferencial e integral,* volume 1.
2. *Problemas e exercícios de análise matemática*, Sob a redação de Demidovitch.