Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo II

Lic. Eng. Informática

6 julho 2012

Duração: 2 horas

Exame de recurso

[3.0 valores] Exercício 1. Seja $f(x,y) = \left(\frac{xy^5}{x^2+y^4}, (x+y)\ln(1-x^2-y^2)\right)$.

a) Determine e esboce o domínio de f.

b) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

[5.0 valores] Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} + x & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

c) Determine $f'(-1,0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

d) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(-1,0)$ segundo a direção do vetor $(1,1)$.

[3.5 valores] Exercício 3. Considere a função $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & (x,y) & \mapsto & x^3 + xy^2 - x + 1 \end{array}$

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Calcule a matriz hessiana de f em (x,y).

c) Verifique se $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ é um maximizante local de f.

[2.5 valores] Exercício 4. Sejam $f(x,y) = 4 - x^2 - y$ e, dado $c \in \mathbb{R}$, $\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$.

a) Esboce Σ_4 e Σ_8.

b) Determine os pontos de Σ_8 para os quais a reta tangente a Σ_8 nesses pontos é paralela à reta $y = -x$.

[3.0 valores] Exercício 5. Mude a ordem de integração e calcule o seguinte integral

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} x \, dydx + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} x \, dydx.$$

[3.0 valores] Exercício 6. Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq z^2, \; x^2+y^2 \leq 9\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas