Nome: ____ **Número:** _______ **TP:** ___

****

IMPORTANTE: *A duração do exame é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O exame é composto por nove exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VIII e IX devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios de escolha múltipla, cada resposta certa conta 0,6 valores e cada resposta errada desconta 0,2 valores. A cotação de cada um dos exercícios VIII e IX é 2,5 valores. Nos restantes exercícios a cotação de cada alínea é 0,6 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
☐	☐	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
☐	☐	$((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (r \vee q)$
☐	☐	$(p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (p \wedge q)$
☐	☐	$(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$
☐	☐	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$

II. Considere o conjunto $A = \{\emptyset, 1, \{2\}, \{1,2\}\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$A \subseteq \mathcal{P}(\{1,2\})$
☐	☐	$1 \in A \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N})$
☐	☐	$\{1,2\} \subseteq A$
☐	☐	$\{1,2\} \in A \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$
☐	☐	$A \cap \mathcal{P}(\{1\}) = \emptyset$

III. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{se} \quad n \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad n = 1 \\ n-2 & \text{se} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

(a) Tem-se $f(\{-2,1,2,3\}) =$ ____________________ e $f(\mathbb{Z})=$ __________________________

(b) Tem-se $f^{\leftarrow}(\{-1,0,1\}) =$ ____

(c) Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	A função f é sobrejetiva.
☐	☐	A função f é injetiva.
☐	☐	A função f admite função inversa.

IV. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(a,b) \in A \times A : a - b = 1\}$.

(a) Escreva o conjunto R em extensão: ____

(b) A menor relação reflexiva que contém R é ____

(c) A menor relação simétrica que contém R é _______________________________________

V. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N},\, x^n = y^m.$$

[Note que $0 \notin \mathbb{N}$.]

(a) Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(i) $[1] \quad =$ ________________________________

(ii) $[2] \quad =$ ________________________________

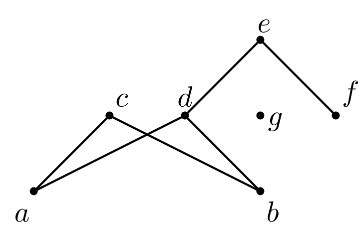
(b) Quantos elementos tem o conjunto quociente $A/\sim$.

____

VI. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Indique quais das afirmações seguintes são verdadeiras (V) e quais são falsas (F).

V	F	
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $A/\sim = \mathcal{P}(A)$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $A/\sim = \{[2], [3]\}$
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $[2] = [3]$.

VII. Seja $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $\preceq$ uma relação de ordem em A tal que o c.p.o. $(A, \preceq)$ tem o diagrama de Hasse a seguir representado:



(a) Indique em extensão a relação $\preceq$.

____

(b) Indique os elementos maximais de A.

____

(c) Indique os majorantes de $X = \{a, b\}$ e, caso exista, o supremo de X.

____

VIII. Mostre por indução que, para todo o inteiro $n \geq 1$,

$$2 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + \ldots + 2 \times 4^n = \frac{2 \times (4^{n+1} - 1)}{3}.$$

IX. Verdadeiro ou falso? Para qualquer função $f : X \to Y$ e quaisquer dois subconjuntos $A, B \subseteq X$ tem-se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Justifique a sua resposta.

Nome: ______________________________ **Número:** ________ **TP:** ___

****

IMPORTANTE: *A duração do exame é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O exame é composto por nove exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VIII e IX devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios de escolha múltipla, cada resposta certa conta 0,6 valores e cada resposta errada desconta 0,2 valores. A cotação de cada um dos exercícios VIII e IX é 2,5 valores. Nos restantes exercícios a cotação de cada alínea é 0,6 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
☐	☐	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
☐	☐	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$
☐	☐	$(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$
☐	☐	$((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (r \vee q)$
☐	☐	$(p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (p \wedge q)$

II. Considere o conjunto $A = \{\emptyset, \{1\}, 2, \{1,2\}\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$2 \in A \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N})$
☐	☐	$A \subseteq \mathcal{P}(\{1,2\})$
☐	☐	$A \cap \mathcal{P}(\{2\}) = \emptyset$
☐	☐	$\{1,2\} \subseteq A$
☐	☐	$\{1,2\} \in A \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$

III. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se} \quad n < 0 \\ 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ n-1 & \text{se} \quad n > 0 \end{cases}$$

(a) Tem-se $f(\{-2,-1,0,2\}) =$ ____________________ e $f(\mathbb{Z})=$ ____________________

(b) Tem-se $f^{\leftarrow}(\{-3,0,3\}) =$ ____

(c) Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	A função f é injetiva.
☐	☐	A função f é sobrejetiva.
☐	☐	A função f admite função inversa.

IV. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(a,b) \in A \times A : b - a = 1\}$.

(a) Escreva o conjunto R em extensão: ________________________________

(b) A menor relação simétrica que contém R é ________________________________

(c) A menor relação reflexiva que contém R é ________________________________

V. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N},\ x^n = y^m.$$

[Note que $0 \notin \mathbb{N}$.]

(a) Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(i) $[3] \quad =$ ____________________________________

(ii) $[1] \quad =$ ____________________________________

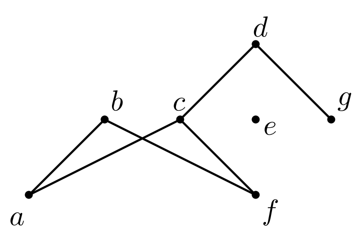
(b) Quantos elementos tem o conjunto quociente $A/\sim$.

____

VI. Considere o conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Indique quais das afirmações seguintes são verdadeiras (V) e quais são falsas (F).

V	F	
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $A/\sim\, = \{[0],[1]\}$
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $[0] = [1]$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $A/\sim\, = \mathcal{P}(A)$.

VII. Seja $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $\preceq$ uma relação de ordem em A tal que o c.p.o. $(A, \preceq)$ tem o diagrama de Hasse a seguir representado:



(a) Indique em extensão a relação $\preceq$.

____

(b) Indique os elementos maximais de A.

____

(c) Indique os majorantes de $X = \{a, f\}$ e, caso exista, o supremo de X.

____

VIII. Mostre por indução que, para todo o inteiro $n \geq 1$,

$$2 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + \ldots + 2 \times 4^n = \frac{2 \times (4^{n+1} - 1)}{3}.$$

IX. Verdadeiro ou falso? Para qualquer função $f : X \to Y$ e quaisquer dois subconjuntos $A, B \subseteq X$ tem-se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Justifique a sua resposta.