7. Circuitos de Corrente Alternada (AC)

Universidade do Minho

7.1. Fontes de AC e Fasores

7.2. Resistências num Circuito AC

7.3. Indutores num Circuito AC

7.4. Condensadores num Circuito AC

7.5. O Circuito RLC em Série

7.6. Ressonância num Circuito RLC em Série

- Descrevemos os princípios básicos dos circuitos AC simples.

- Análise de circuitos em série simples com resistências (R), condensadores (C), e indutores (L), isoladamente ou em combinação, alimentados por uma fonte de voltagem sinusoidal.
- Vamos usar o facto de R, C e L terem respostas lineares: a corrente alternada instantânea (AC) em cada um deles é proporcional à voltagem alternada instantânea no componente.
- Quando a voltagem (V) alternada aplicada for sinusoidal, a corrente em cada componente também será sinusoidal, mas não necessariamente em fase com a voltagem aplicada.
- Quando a corrente numa bobina (indutor) se altera com o tempo, há uma fem (força electro-motriz) induzida na bobina, conforme a Lei de Faraday.

A fem auto-induzida numa bobina define-se pela expressão:

$$\boxed{\varepsilon = -L\frac{di}{dt}}$$

Onde ***L*** é a **indutância** da bobina

- A **Indutância** é uma medida de oposição dum componente do circuito (neste caso a bobina) à variação da corrente.

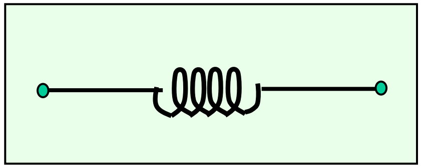
SI $\rightarrow$ henry (H) $\qquad 1H = 1\,\dfrac{V \cdot s}{A}$

- A indutância de qualquer bobina (solenóide, bobina toroidal) é dada pela expressão

$$\boxed{L = \frac{N\phi_m}{I}}$$

- Onde **I** é a corrente, ϕ_m é o fluxo magnético através da bobina, e N o número total de espiras.

- A indutância de um componente de um circuito depende da geometria do componente.



Indutor (bobina)

7.1. Fontes de AC e Fasores

•Circuito de corrente alternada (AC): uma combinação de componentes (R,L,C) e um gerador que proporciona AC.

•Pela rotação duma espira num campo magnético com velocidade angular (ω) constante, induz-se uma voltagem alternada (fem) sinusoidal na espira.

•Esta voltagem instantânea é dada por: $$\boxed{\upsilon = V_m sen\,\omega t}$$

V_m: voltagem de pico do gerador de AC ou amplitude da voltagem.

•A frequência angular é: $$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

f: frequência linear da fonte, ***T***: período ($f \rightarrow$ Hz (ciclos por segundo); $\omega \rightarrow$ rad/s)

Em Portugal, na rede eléctrica f=50 Hz

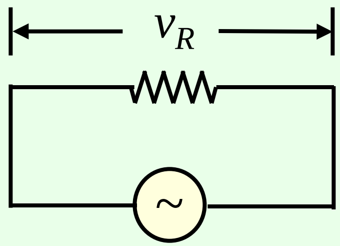
Objectivo primordial do capítulo - exemplo: Suponha que tem um gerador de AC ligado a um circuito com componentes R, L e C em série; se a V_m e a f do gerador forem dadas, e os valores de R, L e C também, achar a corrente resultante, caracterizada pela amplitude e pela fase.

A fim de simplificar esta análise temos que construir graficamente um diagrama de fasores: as grandezas oscilatórias (corrente, voltagem) são representadas por vectores giratórios (no sentido anti-horário) no plano complexo, os fasores.

•O comprimento do fasor representa a amplitude (valor máximo) da grandeza;

•A projecção do fasor no eixo real representa o valor instantâneo da grandeza.

7.2. Resistências num Circuito AC



$\upsilon = V_m.\text{sen}(\omega.t)$

- A soma algébrica instantânea da elevação do potencial, e do abaixamento do potencial, na malha do circuito deve ser nula (Lei das malhas de Kirchhoff) $\Rightarrow$

$$\Sigma\upsilon_i=0 \Leftrightarrow \upsilon-\upsilon_R = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\upsilon = \upsilon_R = V_m.\text{sen}\,\omega\, t} \quad (1)$$

υ_R: queda instantânea de voltagem na resiatência (R).

A corrente instantânea:

$$i_R = \frac{\upsilon}{R} = \frac{V_m}{R}\,\text{sen}\,\omega t = I_m\,\text{sen}\,\omega t \quad (2)$$

$$I_m = \frac{V_m}{R}$$ $\rightarrow$ corrente de pico

(1) e (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\upsilon_R = I_m\, R\, \text{sen}\,\omega\, t}}$

i_R e υ_R variam, ambos de uma forma sinusoidal (com *sen* ωt) e atingem os valores máximos (picos) num mesmo instante ⇒ as duas grandezas estão em fase.

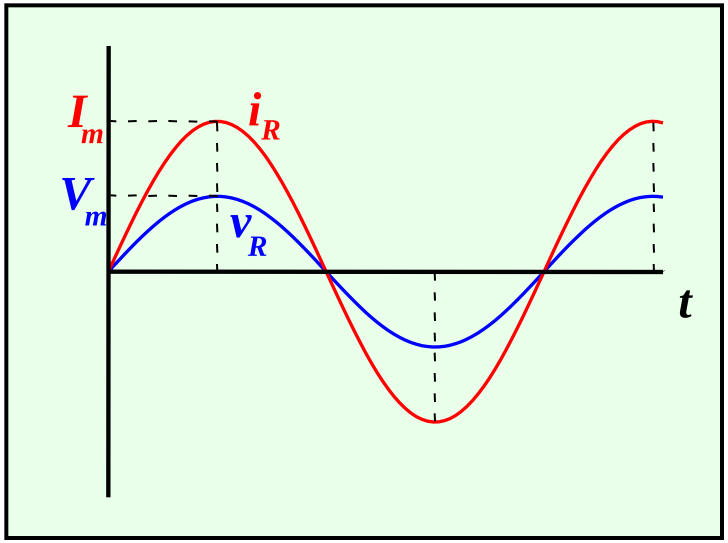


Gráfico da voltagem e da corrente em função do tempo

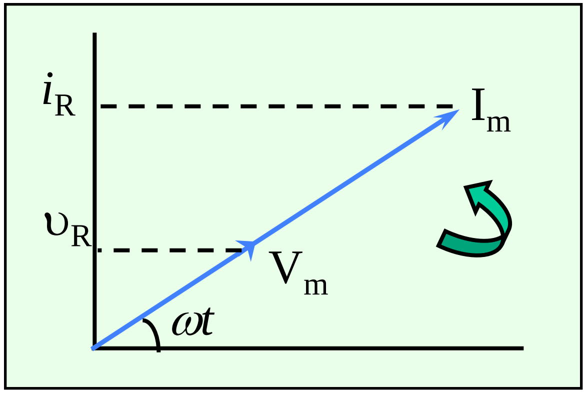


Diagrama de fasores. As projecções de I_m e V_m ***(fasores)*** no eixo vertical representam os valores instantâneos de i_R e υ_R.

- ! O valor médio da corrente sobre um ciclo é nulo: a corrente mantém-se num sentido (+) durante o mesmo intervalo de tempo que se mantém no sentido oposto (-) ⇒ O sentido da corrente não tem efeito sobre o comportamento do R no circuito.

Efeito térmico

Universidade do Minho

- Qualitativamente: as colisões entre os electrões de condução de corrente e os átomos fixos da resistência (R) provocam um aumento da sua temperatura, que depende do valor da corrente, mas é independente da direcção da corrente.
- Quantitativamente: taxa de conversão da energia eléctrica em calor numa R é a sua **potência instantânea** $\boxed{\mathbf{P = \mathit{i}^2 \cdot R}}$; $\boldsymbol{i}$: corrente instantânea na R.
- $\mathbf{P} \propto \boldsymbol{i}^2 \Rightarrow$ não faz diferença se a corrente for contínua (DC) ou alternada (AC), ou seja se o sinal (+) ou (-) for associado a $\boldsymbol{i}$.

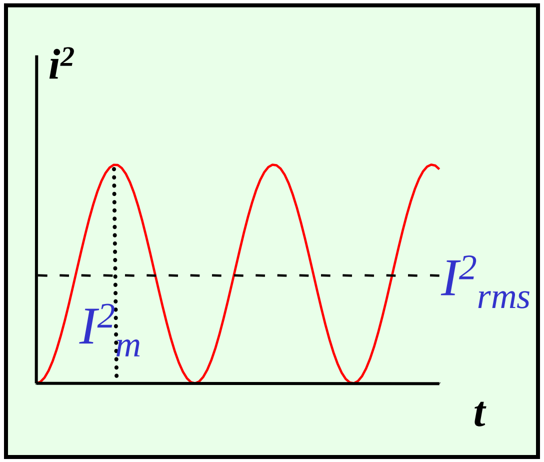
! O efeito térmico provocada por uma corrente alternada com $\mathbf{I_m}$ não é o mesmo que o provocado por uma corrente contínua com o mesmo valor, dado que a corrente alternada somente tem o I_{max} durante um pequeno instante de tempo durante um ciclo.

Importante num circuito AC é o **valor médio da corrente** ou **corrente média quadrática (*rms*)**.

A corrente média quadrática (ou eficaz) é a raiz quadrada da média dos quadrados da corrente.

O quadrado da corrente varia com $sen^2\ \omega t$, e pode-se mostrar que o valor médio de i^2 é $I^2_m/2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} I_{rms} &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707\, I_m \\ I^2_{rms} &= \frac{I^2_m}{2} \end{aligned}}$$



Exemplo: Uma corrente AC com I_m = 2 A libertará o mesmo calor numa R do que uma corrente DC de 0,707·2 = 1,414 A

A potência média dissipada num R com uma corrente AC é:

$$\boxed{P_{med} = I_{rms}^{2} R}$$

$$R = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}$$

A voltagem média quadrática (ou eficaz): $\boxed{V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0,707\, V_m}$

! Quando se fala em medir a voltagem alternada de 220V duma tomada eléctrica, fala-se na realidade duma V_{rms} de 220V $\Rightarrow$ $V_m = 311,1$ V

! Usaremos valores *rms* ao discutir as correntes e voltagens alternadas.

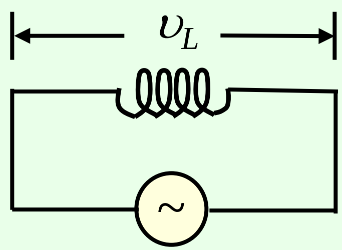
! Os amperímetros e voltímetros de AC são projectados para ler os valores *rms*

Se forem usados os valores *rms*, muitas equações terão a mesma forma que as equações nos circuitos DC

	Voltagem	Corrente
Valor instantâneo	υ	i
Valor máximo (pico)	V_m	I_m
Valor médio quadrático (ou eficaz)	$V_{rms}(V_{ef})$	$I_{rms}(I_{ef})$

$\Rightarrow$ Exercício 7.1

7.3. Indutores num Circuito AC



$\upsilon = V_m \cdot \text{sen}(\omega . t)$

υ_L: queda instantânea de voltagem no indutor (bobina).

$\Rightarrow$ Lei das malhas: $\Sigma \upsilon_i = 0 \Leftrightarrow \upsilon + \upsilon_L = 0$,

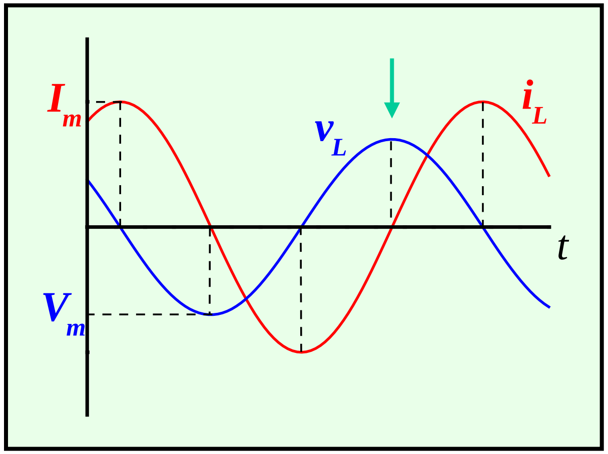
$$\boxed{-L\frac{di}{dt} + V_m \, sen\,\omega t = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} = V_m \, sen\,\omega t} \quad (1)$$

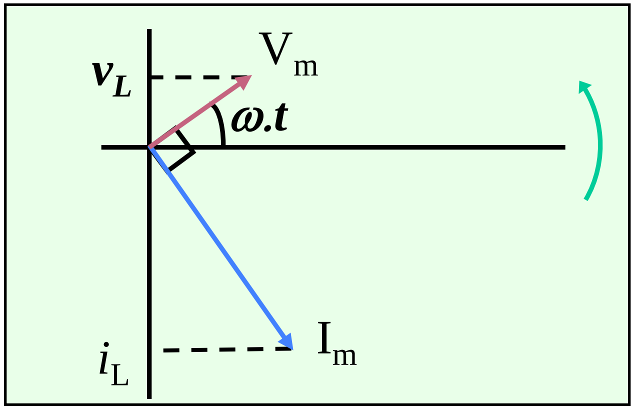
A integração dá a corrente em função do tempo:

$$\boxed{i_L = \frac{V_m}{L}\int sen\,\omega t\, dt = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t}$$

dado que: $\quad -\cos\omega t = sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L = \frac{V_m}{\omega L} sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2)$

Comparando com 1 $\Rightarrow$ a corrente está *fora de fase* com a voltagem, com um atraso de $\pi/2$ rad, ou 90°





υ_L atinge V_m (pico) num instante que está um quarto do período de oscilação antes de i_L atingir I_m

Quando a υ aplicada for sinusoidal, i_L segue a υ_L com um atraso de 90°

! $\upsilon_L \propto di/dt \Rightarrow \upsilon_L$ é maior quando i estiver a variar com maior rapidez. $i(t)$ é uma curva sinusoidal $\Rightarrow$ di/dt (declive) é máximo quando a curva $i(t)$ passar pelo zero $\Rightarrow$ υ_L atinge V_m quando $i_L = 0$

$$i_L = \frac{V_m}{\omega L} sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

Da Eq. (2) $\Rightarrow$

$$I_m = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{V_m}{X_L} \quad (3)$$

- $X_L = \omega L$ é a **impedância indutiva** (ou reactância indutiva)

I_{rms} é dada por uma expressão semelhante à (3) com V_m substituída por V_{rms}

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{X_L}$$

! O conceito de **impedância** é usado a fim de não ser confundido com o de resistência.

A impedância distingue-se da resistência porque introduz uma diferença de fase entre υ e *i*.

•Circuito puramente resistivo $\Rightarrow$ *i* e υ em fase

•Circuito puramente indutivo $\Rightarrow$ *i* segue υ com uma diferença de fase de 90°

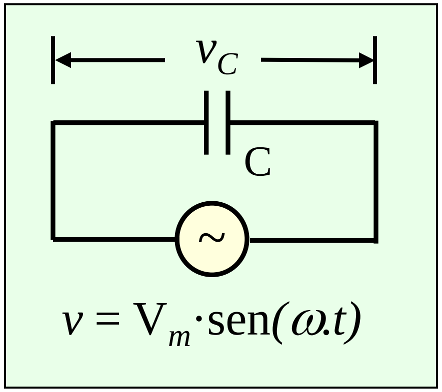
Com 1 e 3 $\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon_L = V_m \cdot sen\,\omega t = I_m \cdot X_L \cdot sen\,\omega t}$

Pode ser visto como a Lei de Ohm dum circuito indutivo. X_L tem a unidade SI de resistência (impedância) $\Rightarrow$ o Ohm (Ω).

A impedância dum indutor aumenta com a frequência. Nas frequências mais elevadas ***i*** varia mais rapidamente, o que provoca um aumento da **fem** induzida associada a uma certa $\mathbf{I_m}$.

$\Rightarrow$ Exercício 7.2

7.4. Condensadores num Circuito AC



- Lei das malhas: $\Sigma\upsilon_i=0 \Leftrightarrow \upsilon - \upsilon_c = 0$

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_c = V_m\ sen\ \omega\ t}$$

- υ_c: queda instantânea de voltagem no condensador.

$$v_c = \frac{Q(t)}{C} \rightarrow Q(t) = CV_m sen\,\omega t \qquad 1$$

Uma vez que ***i = dQ/dt*** $\Rightarrow$ a derivação de 1 dá a corrente instantânea

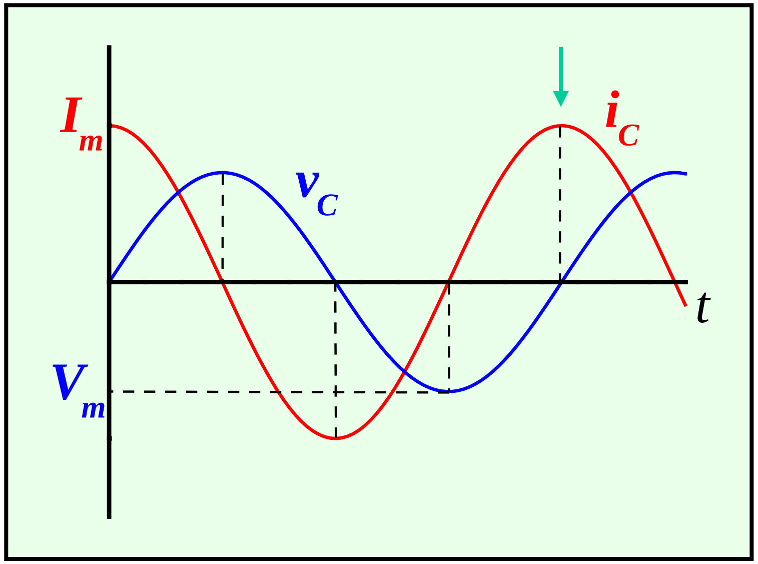
$$\boxed{i_C = \frac{dQ}{dt} = \omega CV_m \cos\omega t = \omega CV_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

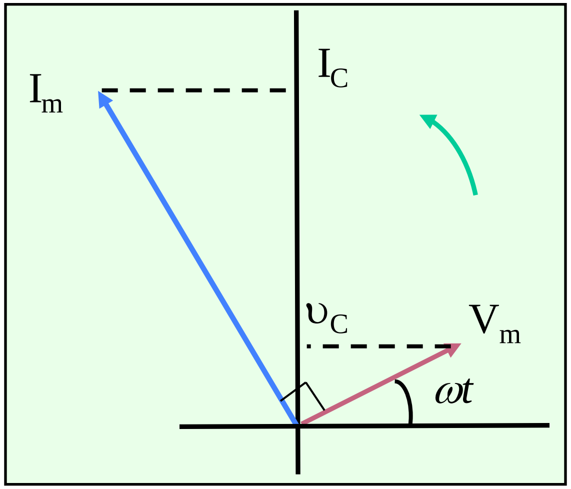
dado que: $\cos\omega t = sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

- Vemos que a corrente não está em fase com a voltagem aos terminais do condensador.

$$i_C = \omega C V_m sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{X_C} V_m sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

i_C está com uma diferença de fase de 90° em antecipação à υ_C.





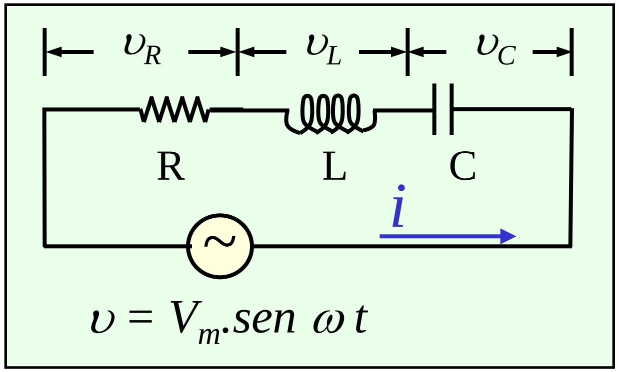
i_C atinge I_m (pico) um quarto de ciclo mais cedo que o instante em que a υ_C atinge V_m

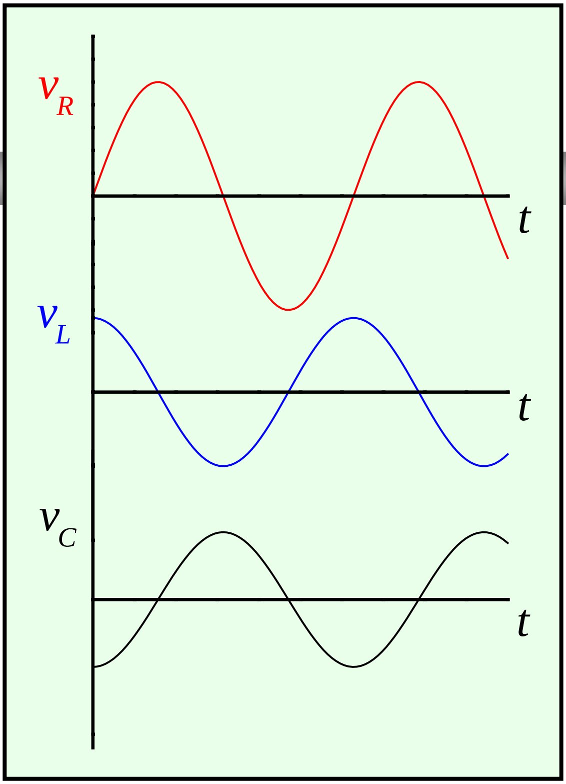
Quando a fem aplicada for sinusoidal, a corrente num condensador está avançada de 90° relativamente à voltagem no C.

Impedância capacitiva ⇒ $$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

⇒ Exercício 7.3

7.5. Circuitos RLC em Série

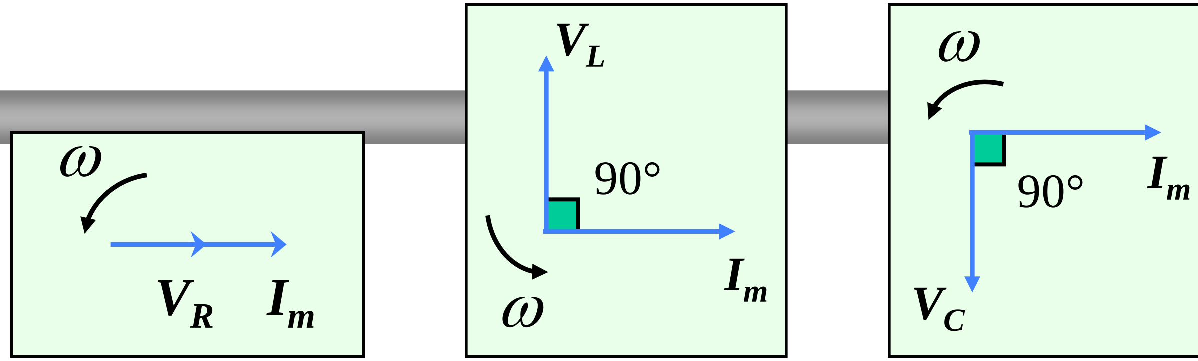




$i = I_m.sen(\omega t - \phi)$; ϕ é o ângulo de fase entre a corrente e a voltagem aplicada.

- Objectivo: determinar ϕ e I_m. Teremos que construir e analisar o diagrama de fasores do circuito.

! Todos os componentes estão em **série** no circuito $\Rightarrow$ **a corrente alternada (*i*) é sempre a mesma (mesma amplitude e mesma fase) em todos os pontos do circuito.** $\Rightarrow$ **a voltagem em cada componente terá amplitude e fase diferente.**



Resistência   Indutor   Condensador

1

Voltagem → em fase / avanço de 90° / atraso de 90° com a corrente

As quedas instantâneas de voltagem:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_R &= I_m R \,\mathit{sen}\,(\omega t-\phi) = V_R \,\mathit{sen}\,(\omega t-\phi) \\ \upsilon_L &= I_m X_L \,\mathit{sen}\,(\omega t+\pi/2-\phi) = V_L \cos(\omega t-\phi) \\ \upsilon_C &= I_m X_C \,\mathit{sen}\,(\omega t-\pi/2-\phi) = -V_C \cos(\omega t-\phi) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{i = I_m \,\mathit{sen}\left(\omega t-\phi\right)}$$

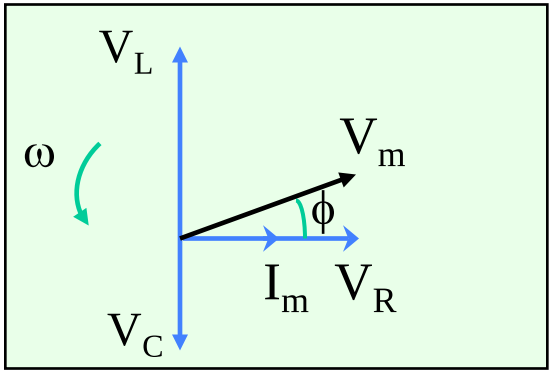
$\mathbf{V_R = I_m R}$; $\mathbf{V_L = I_m X_L}$; $\mathbf{V_C = I_m X_C}$ são as voltagens de pico (máximos) aos terminais de cada componente.

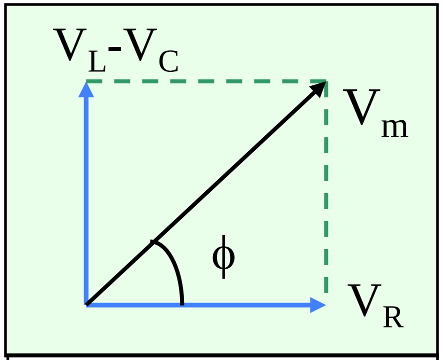
! A voltagem instantânea υ nos três componentes obedece a:

$$\upsilon = \upsilon_R + \upsilon_L + \upsilon_C$$

É mais simples efectuar a soma usando o diagrama de fasores 2

A corrente em cada componente é a mesma, I (t) $\Rightarrow$ pela combinação dos três fasores 1 :





Soma vectorial das voltagens

2

! A soma vectorial das amplitudes das voltagens $\mathbf{V_R}$, $\mathbf{V_L}$, $\mathbf{V_C}$ é igual a um fasor cujo comprimento é o pico da voltagem aplicada, $\mathbf{V_m}$, e que faz um ângulo ϕ com o fasor da corrente $\mathbf{I_m}$.

Pelo triângulo na Figura:

$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2}$$

(A) $$\boxed{V_m = I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$; $\mathbf{X_L = \omega L;\ X_C = 1/\ \omega C}$

$$\longrightarrow \boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

A impedância (Z) do circuito RLC é: $$\boxed{Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$ SI: Ohm

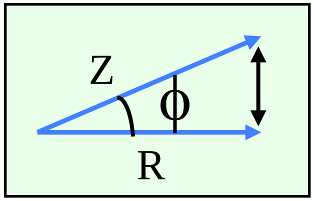
$\Rightarrow$ (A) $\longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{V_m = I_m Z}}$ $\Rightarrow$ ***Generalização da Lei de Ohm para AC***

$$Z = \frac{V_m}{I_m}; Z = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}$$

- ! **A corrente no circuito depende da R, L, C e ω**

Se eliminamos o factor comum I_m de cada fasor da Figura 2

⇒ **triângulo de impedância.**

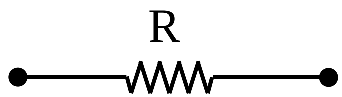
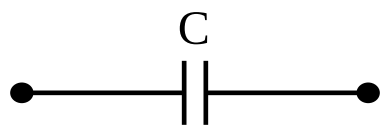
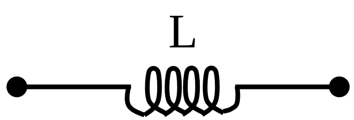
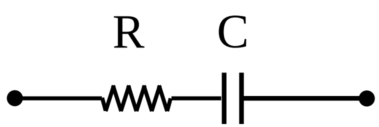
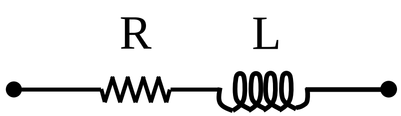
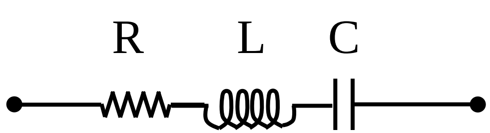


$X_L - X_C$ ⇒ $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$i = I_m \, sen(\omega t - \phi)$$

- Quando $X_L > X_C$ (frequências altas) ⇒ $\phi > 0$, a ***i*** segue a υ aplicada.
- Se $X_L < X_C$ ⇒ $\phi < 0$, ***i*** precede a υ aplicada.
- Quando $X_L = X_C$ ⇒ $\phi = 0$, $Z = R$ e $I_m = V_m/R$

A frequência a que se verifica esta condição é a frequência de ressonância.

Componentes do Circuito	Impedância, Z	Ângulo de Fase, ϕ
	R	0^{o}
	X_C	-90^{o}
	X_L	$+90^{o}$
	$\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{X}_C^2}$	Negativo, entre –90° e 0°
	$\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{X}_L^2}$	Positivo, entre 0° e 90°
	$\sqrt{\boldsymbol{R}^2 + \left(\boldsymbol{X}_L - \boldsymbol{X}_C\right)^2}$	Negativo se $X_C > X_L$ Positivo se $X_C < X_L$

$\Rightarrow$ Exercício 7.5

7.6. Potência num Circuito AC

No circuito RLC podemos exprimir a potência instantânea, P, como:

$$\mathbf{P = \mathit{i}\cdot \upsilon = I_m sen(\omega t - \phi)\cdot V_m sen\,(\omega t)}$$

$$\mathbf{= I_m V_m sen(\omega t)\cdot sen(\omega t - \phi)} \quad (1)$$

! Função complicada do tempo sem muita utilidade prática.

Interessa, em geral: a **potência média** em um ou mais ciclos ⇒

$$sen(\omega t - \phi) = sen(\omega t)cos(\phi) - sen(\phi)cos(\omega t) \rightarrow \quad (1)$$

$$\mathbf{P = I_m V_m sen^2(\omega t)\cdot cos(\phi) - I_m V_m sen(\omega t)\cdot cos(\omega t)\cdot sen(\phi)}$$

Toma-se a média de P sobre o tempo durante um ou mais ciclos (I_m, V_m, ϕ e ω constantes).

- Média de $sen^2(\omega t).cos(\phi)$ $\rightarrow$ ½ $cos(\phi)$
- Média de $\underbrace{sen(\omega t).cos(\omega t)}_{½.sen(2\omega t)}.sen(\phi)$ $\rightarrow 0$

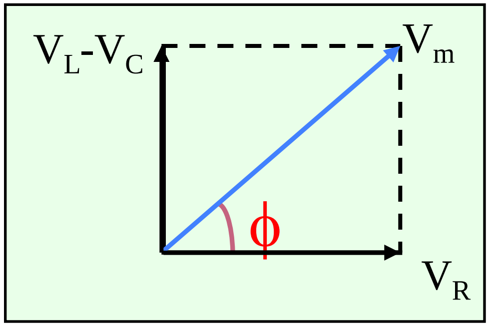
$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}; I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

⇒ **A potência média ou potência activa eficaz:**

$$P_{med} = ½\, I_m.V_m.\cos\phi$$

$$= I_{rms}.V_{rms}.\cos\phi$$

factor de potência



⇒ A queda máxima de voltagem na resistência é: $V_R = V_m \cos\phi = I_m.R$ →

$$\boxed{\cos\phi = I_m R/V_m}$$

$$P_{méd} = I_{rms} V_{rms} \cos\phi = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)\frac{I_m R}{V_m} = \tfrac{1}{2} I_m^2 R$$

$$\boxed{P_{méd} = I_{rms}^2 R}$$

! A potência média proporcionada pelo gerador é dissipada como calor na R. (como em DC)

! Não há perda de potência num indutor ideal ou num condensador ideal.

- (Ex.: o C é carregado e descarregado duas vezes durante cada ciclo ⇒ há fornecimento de carga ao C durante dois quartos do ciclo, e há o retorno da carga à fonte de voltagem, durante os outros dois quartos. ⇒ A potência média proporcionada pela fonte é nula. Logo um C num circuito de AC não dissipa energia.)
- (Analogamente para o indutor)

A potência que se transmite entre a fonte e o circuito que não é dissipada:

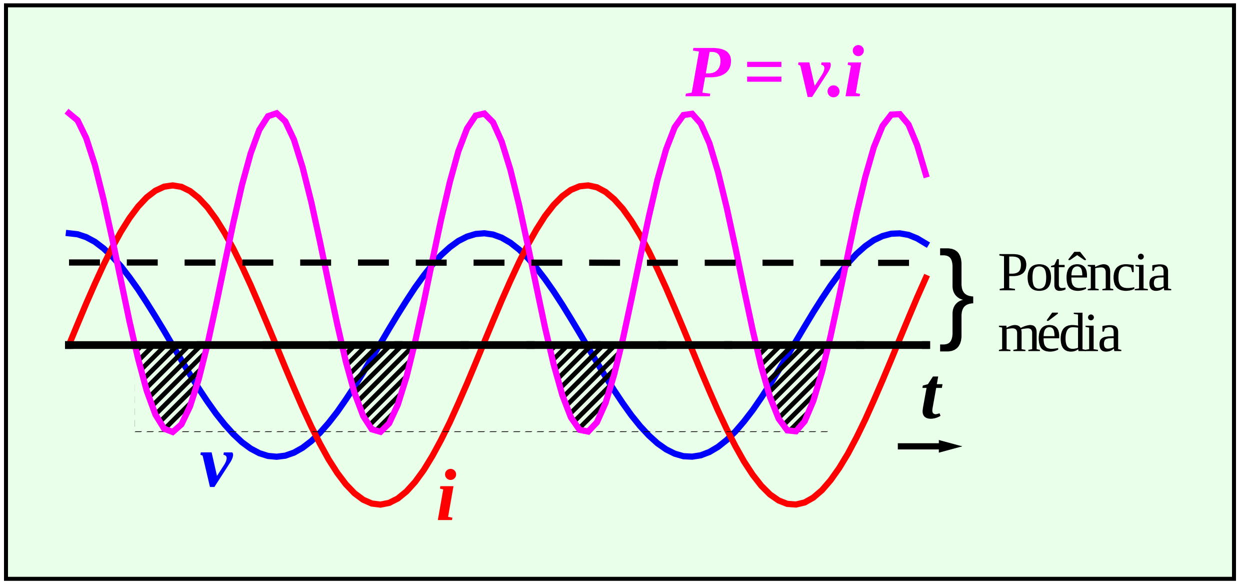
Potência reactiva:

$$\boxed{P_{react} = I_{rms}.V_{rms}.\mathrm{sen}(\phi)}$$

$P_{méd} = P_{act} = I_{rms}.V_{rms}.\cos\phi$

Puramente resistivo $\Rightarrow \phi = 0, \cos\phi = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{P_{max} = I_{rms}.V_{rms}}$ Potência máxima (máx. amplitude)



$\Rightarrow$ Exercício 7.8

7.7. Ressonância num Circuito RLC em Série.

- Um circuito RLC está em **ressonância** quando a corrente tem o seu valor de pico (ver pag. 22).

- Em geral
$$\boxed{I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

! $Z = Z(\omega) \Rightarrow I_{rms} = I_{rms}(\omega)$

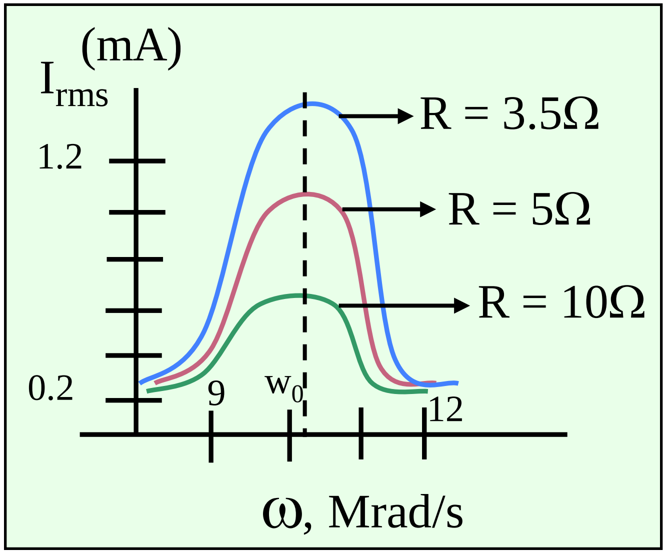
A corrente atinge o seu valor máximo quando $\mathbf{X_L = X_C \Rightarrow Z = R}$

A frequência ω_0 a que isso ocorre é a **frequência de ressonância do circuito**:

$$X_L = X_C \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad\qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

ω_0 também corresponde à frequência natural de oscilação do circuito LC.

- Nesta frequência a corrente está em fase com a voltagem instantânea aplicada.



L = 5 μH

C = 2 nF

V_{mq} = 5 mV

$\boxed{\omega_0 = 10^7 \text{ rad/s}}$ $\forall R$

Curvas mais estreitas e altas quando R diminui.

$I_{rms} \to \infty$, R $\to$ 0 (teoria!!)

Os circuitos reais têm sempre uma certa resistência que limita o valor da corrente.

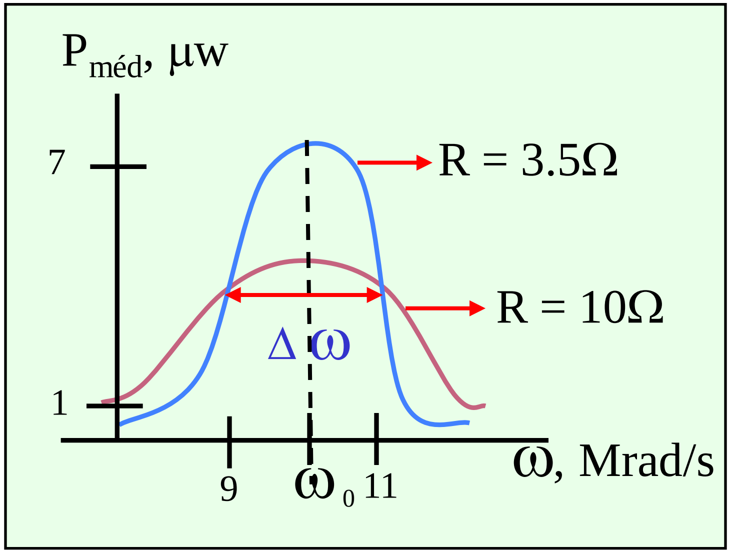
- Os sistemas mecânicos também exibem ressonâncias: sistema massa-mola.
- Actuando na ω_0, a amplitude das oscilações aumenta com o tempo.

- A potência média em função da frequência:

$$P_{méd} = I_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{Z^2} R = \frac{V_{rms}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} X_L &= \omega L \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{P_{méd} = \frac{V_{rms}^2 R \omega^2}{R^2\omega^2 + L^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}}$$



Quando **ω = ω₀** a $P_{méd}$ é máxima, $\boxed{P_{méd} = \frac{V_{rms}^2}{R}}$

A largura da curva é descrita por um factor de qualidade: $\mathbf{Q_0}$

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

$\Delta\ \omega$ é a largura da curva medida entre dois valores de ω para os quais $P_{méd}$ tem metade do valor máximo da P

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}}$$

$X_L(\omega_0)$

$\rightarrow$ Grandeza adimensional

! $\boldsymbol{Q_0}$ elevado, $\Delta\omega$ estreito; $\boldsymbol{Q_0}$ baixo, corresponde a uma faixa de frequências mais ampla.

! $10 < \boldsymbol{Q_0} < 100$ (aprox.) nos circuitos electrónicos.

Aplicações: Aparelho de rádio

- $\Delta C \Rightarrow \Delta\omega_0$ (sintonização)
- ω_0 do circuito = onda de rádio recebida $\Rightarrow$ aumenta I no circuito.
- Sinal amplificado alimenta o alto-falante
- $\boldsymbol{Q_0}$ elevado a fim de serem eliminados os sinais indesejáveis.

Anexo1: Representação Complexa das grandezas AC

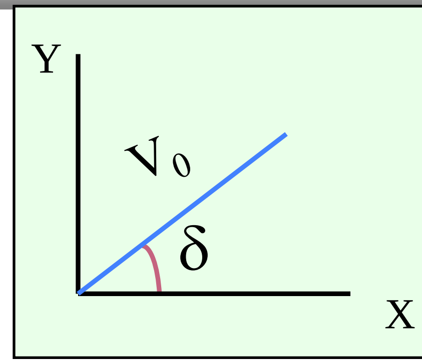
- Uma corrente ou tensão alternadas podem ser representadas por um número complexo.
- Aproveitando a identidade

$$e^{i\theta} = \mathit{cos}\ \theta + i \text{ sen } \theta \text{ ; com } i^2 = -1$$

- Regra para a representação:

Uma voltagem alternada $V_0.\cos(\omega t+\delta)$ deve ser representada pelo número complexo $V_0.e^{i\delta}.e^{i\omega t}$, isto é, o número cuja parte real é $V_0.\cos(\delta)$ e cuja parte imaginária é $V_0.\text{sen}(\delta)$ que roda no plano complexo com a velocidade angular ω. Portanto, a voltagem em função do tempo é dada pela parte real do produto $V_0.e^{i(\omega t+\delta)}$.

Voltagem em função do tempo.



Representação complexa

$V_0.\cos(\omega t+\delta)$

$V_0.e^{i\delta} = x + iy$

Multiplique por $e^{i\omega t}$ e tome a parte real

$$V = \mathrm{Re}[V_0.e^{i\delta}(e^{i\omega t})] = V_0.\cos(\omega t+\delta)$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad , \; I_m = \frac{V_m}{Z}$$

$$\left.\begin{array}{l} |Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \delta = \arctan \dfrac{X_L - X_C}{R} \end{array}\right\} \quad \boxed{\overline{Z} = \left|\overline{Z}\right| e^{i\delta}} \; ; \; \boxed{Z = R + iX}$$

$$\overline{Z}_R = R$$

$$\overline{Z}_L = \omega L e^{i\pi/2} = i\omega L$$

$$\overline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{i\pi/2} = \frac{-i}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C}$$

$$\overline{Z} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L + \overline{Z}_C$$

$$\left|\overline{Z}\right| = \sqrt{\overline{Z}_R^2 + \left(\overline{Z}_L + \overline{Z}_C\right)^2}$$

$$\arctan\left[\frac{I_m \overline{Z}}{\operatorname{Re} \overline{Z}}\right] = \delta$$

Anexo 2: Circuito em Paralelo

Universidade do Minho

$$\boldsymbol{I = I_C + I_R + I_L = V.(Y_C + Y_R + Y_L)}$$

$$\boldsymbol{I = V.Y_T}$$

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = VY_C \;\; ; \;\; Z_C = \frac{1}{i\,\omega C} \;\; ; \;\; Y_C = i\,\omega C$$

$$I_R = \frac{V}{R} = VY_R \;\; ; \;\; Z_R = R \;\; ; \;\; Y_R = \frac{1}{R}$$

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = VY_L \;\; ; \;\; Z_L = i\,\omega C \;\; ; \;\; Y_L = \frac{1}{i\,\omega C}$$

$$Y_T = Y_C + Y_R + Y_L = i\,\omega C + \frac{1}{i\,\omega L} + \frac{1}{R} = i\,\omega C - \frac{i}{\omega L} + \frac{1}{R}$$

ressonância: $\omega_R = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \;\; ; \;\; Y_T = \dfrac{1}{R}$

Impedância, Z = 1/Y ; Y, admitância !