Engenharia Informática **Teste 4 – Modelo – Proposta de resolução** ISD(2010/2011)

NOME: **NÚMERO:**

1. *(0,5 valores)*

   Considere o sistema de EDOs com CI

$$\begin{cases} x' = txy \\ y' = \cos x \end{cases} \qquad (x(1), y(1)) = (0, 3)$$

   Seja $(x(t), y(t))$ a solução do problema anterior e (x_k, y_k) a aproximação de $(x(t_k), y(t_k))$ calculada usando o método de Euler com passo 0.5, isto é, tal que $t_k = 1 + 0.5k$.

   Indique a fórmula de recorrência que define, para este problema, as aproximações x_{k+1} e y_{k+1} em função de t_k, x_k e y_k:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + 0.5(1 + 0.5k)x_k y_k}$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + 0.5\cos x_k}$$

2. *(1,5 valores)*

   Determine os pontos de equilíbrio do sistema indicado de seguida, indicando o tipo de estabilidade.

$$\begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

   Res: Se $(x(t), y(t)) = (k_1, k_2)$ *é uma solução de equilí brio do sistema tem-se*

$$\begin{cases} 0 = k_1^2 + k_2 \\ 0 = -k_1 - k_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k_1^2 + k_2 \\ k_2 = -k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k_1^2 - k_1 \\ k_2 = -k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = k_1(k_1 - 1) \\ k_2 = -k_1 \end{cases}$$

   donde $(k_1, k_2) = (0, 0)$ *ou* $(k_1, k_2) = (1, -1)$.

   Note-se que o jacobiano do sistema num ponto (x, y) *é*

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Assim, linearização do sistema no primeiro ponto de equílibro $(0, 0)$ *é:*

$$\begin{cases} x' = 0 + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

Os valores próprios associados a este sistema são as raízes de

$$p(\alpha) = \mathsf{det}\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & -1-\alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 + \alpha + 1$$

Isto é,

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

O sistema linearizado é um sistema hiperbólico, com $(0,0)$ *ponto de equilíbrio assimptoticamente estável (foco estável em espiral) pelo que* $(0,0)$ *é um ponto equilíbrio assimptoticamente estável (foco estável em espiral) do sistema não linear original.*

A linearização do sistema no segundo ponto de equílibro $(1,-1)$ *é:*

$$\begin{cases} x' = 2 + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

(trata-se de facto da linearização de $(X(y), Y(t))$*, com* $x(t) = X(t) + 1$ *e* $y(t) = Y(t) - 1$*.)*

Os valores próprios associados a este sistema são as raízes de

$$p(\alpha) = \mathsf{det}\begin{pmatrix} 2-\alpha & 1 \\ -1 & -1-\alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \alpha - 1$$

Isto é,

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

O sistema linearizado é um sistema hiperbólico, com $(0,0)$ *ponto de equilíbrio instável (ponto de sela, os valores próprios reais tem sinal diferente) pelo que* $(1,-1)$ *é um ponto equilíbrio instável do sistema não linear original.*