introdução aos sistemas dinâmicos

resolução de exercícios da folha iteração de funções — parte um

4.

Tendo havido algumas dúvidas relativamente ao que é pretendido neste exercício, vou dar a solução da segunda das alíneas (onde por $\longrightarrow$ se entende quando n tende para infinito):

$$
\begin{array}{lll}
x_{\circ} < -1 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) \longrightarrow -\infty \\
x_{\circ} = -1 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) = x_{\circ} \quad \text{(ponto fixo)} \\
-1 < x_{\circ} < 0 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) \longrightarrow 0 \\
x_{\circ} = 0 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) = x_{\circ} \quad \text{(ponto fixo)} \\
0 < x_{\circ} < 1 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) \longrightarrow 0 \\
x_{\circ} = 1 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) = x_{\circ} \quad \text{(ponto fixo)} \\
x_{\circ} > 1 & \Longrightarrow & f^n(x_{\circ}) \longrightarrow \infty
\end{array}
$$

6.

Seja f o sistema dinâmico discreto definido por $f(x) = x^2 - 1$, para $x \in \mathbb{R}$. Pela definição, os pontos fixos de f são as soluções de $f(\bar{x}) = \bar{x}$ que pertencem ao domínio de f. Ora, da igualdade anterior, temos que

$$f(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 1 = \bar{x},$$

ou seja,

$$\bar{x}^2 - \bar{x} - 1 = 0.$$

Um pequeno cálculo permite-nos escrever as duas soluções como

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Deste modo, uma vez que ambas as soluções pertencem ao domínio de f, podemos concluir que f tem dois pontos fixos: $\bar{x} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ e $\bar{x} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Para encontrar os pontos periódicos de período 2 de f temos que procurar os elementos do domínio de f para os quais 2 é o menor inteiro tal que é válida a igualdade $f^2(\bar{x}) = \bar{x}$. Vejamos primeiro a que corresponde a igualdade $f^2(\bar{x}) = \bar{x}$ e depois quais as suas soluções:

$$f^2(\bar{x}) = f(\bar{x}^2 - 1) = (\bar{x}^2 - 1)^2 - 1 = \bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 + 1 - 1 = \bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 = \bar{x},$$

ou seja,

$$\bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 - \bar{x} = 0.$$

Como sabemos, duas das quatro soluções da eq uação acima correspondem aos dois pontos fixos encontrados anteriormente. Por outro lado, facilmente se reconhece que $\bar{x} = 0$ é uma terceira solução que, por pertencer ao domínio de f, podemos afirmar que se trata de um ponto periódico de período 2 de f. Ora, uma vez que, se $\bar{x}$ é um ponto periódico de período 2 de f, então $f(\bar{x})$ é também um ponto periódico de período 2 de f, podemos encontrar a quarta solução da equação calculando $f(\bar{x}) = f(0)$. Assim, podemos concluir que f tem dois pontos periódicos de período 2, dados por $\bar{x} = 0, -1$.

nota: em alternativa, poderíamos dividir $\bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 - \bar{x}$ pelo polinómio $\bar{x}^2 - \bar{x} - 1$, correspondente aos pontos fixos de f, e calcular os seus zeros.

7.

Seja $\mathcal{T}$ o sistema dinâmico discreto definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2 - 2x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Uma vez que $\mathcal{T}([0,1/2]) = [0,1]$ e $\mathcal{T}([1/2,1]) = [0,1]$, podemos concluir que existe necessariamente uma intersecção de $\mathcal{T}$ e a recta $y = x$ em cada um dos subintervalos $[0,1/2]$ e $[1/2,1]$. Deste modo, temos que os dois pontos fixos de $\mathcal{T}$ são dados por

$$\begin{aligned} \bar{x} \in [0,1/2] &\implies \mathcal{T}(\bar{x}) = 2\bar{x} = \bar{x} &&\implies \bar{x} = 0 \\ \bar{x} \in [1/2,1] &\implies \mathcal{T}(\bar{x}) = 2 - 2\bar{x} = \bar{x} &&\implies \bar{x} = 2/3 \end{aligned}$$

Para encontrar os pontos periódicos de período 2 de $\mathcal{T}$, vamos utilizar o mesmo tipo de argumento: uma vez que a imagem por $\mathcal{T}^2$ de certos subintervalos é todo o intervalo $[0,1]$, poderemos concluir que nesse subintervalo existirá uma intersecção de $\mathcal{T}^2$ com a recta $y = x$. Ora, como facilmente observa, desta vez temos

$$\mathcal{T}^2([0,1/4]) = [0,1]$$

$$\mathcal{T}^2([1/4,1/2]) = [0,1]$$

$$\mathcal{T}^2([1/2,3/4]) = [0,1]$$

$$\mathcal{T}^2([3/4,1]) = [0,1]$$

pelo que

$$\begin{aligned} \bar{x} \in [0,1/4] &\implies \mathcal{T}^2(\bar{x}) = \mathcal{T}(2\bar{x}) = 2 \times 2\bar{x} = \bar{x} &&\implies \bar{x} = 0 \\ \bar{x} \in [1/4,1/2] &\implies \mathcal{T}^2(\bar{x}) = \mathcal{T}(2\bar{x}) = 2 - 2 \times 2\bar{x} = \bar{x} &&\implies \bar{x} = 2/5 \\ \bar{x} \in [1/2,3/4] &\implies \mathcal{T}^2(\bar{x}) = \mathcal{T}(2 - 2\bar{x}) = 2 - 2(2 - 2\bar{x}) = \bar{x} &&\implies \bar{x} = 2/3 \\ \bar{x} \in [3/4,1] &\implies \mathcal{T}^2(\bar{x}) = \mathcal{T}(2 - 2\bar{x}) = 2(2 - 2\bar{x}) = \bar{x} &&\implies \bar{x} = 4/5 \end{aligned}$$

Sendo, como era de esperar, duas destas soluções pontos fixos de $\mathcal{T}$, podemos concluir imediatamente que $\mathcal{T}$ tem dois pontos periódicos de período 2, dados por $\bar{x} = 2/5$ e $\bar{x} = 4/5$.

10.

Apesar de ter sido resolvido na aula, vou dar a resposta a este exercício.

Seja $x_\circ = i + m$ um qualquer real, onde $i \in \mathbb{Z}$ denota a sua parte inteira e $0 < m < 1$ a sua mantissa. Então, a dinâmica de $x_\circ$ por $f(x) = |1 - x|$ é descrita por:

- se $x_\circ = 1/2$, então $x_\circ$ é um ponto fixo de f
- se $0 \leq x_\circ \leq 1$, mas $x_\circ \neq 1/2$, então $x_\circ$ é um ponto periódico de período 2 de f
- se $x_\circ > 1$, então $x_\circ$ é um ponto eventualmente periódico de período 2 de f (isto é, $f^i(x_\circ) = m$ é um ponto periódico de período 2 de f)
- se $x_\circ < 0$, então $x_\circ$ é um ponto eventualmente periódico de período 2 de f (isto é, $f^{i+1}(x_\circ) = m$ é um ponto periódico de período 2 de f)