Programação Linear - método simplex: situações particulares

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

11 de março de 2015

Prog. Linear - método simplex: situações particulares

antes

- O algoritmo Simplex foi aplicado para resolver um problema de programação linear.

Guião

- Há situações particulares em que é necessário detalhar as regras e estabelecer decisões e operações suplementares:
  - quando há várias bases diferentes que correspondem à mesma solução básica (degenerescência);
  - quando o domínio é ilimitado;
  - quando não existe um vértice inicial admissível.

depois

- Analisaremos a implementação do método simplex usando matrizes.

Situações particulares do método simplex:

- Selecção de um vértice admissível inicial
  - Se não existir, **problema é impossível**.
- Repetir
  - Selecção da coluna pivô:
    - Coeficiente mais negativo da linha da função objectivo
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.<0, solução óptima.
  - Selecção da linha pivô:
    - Menor razão (lado direito/coluna pivô) positiva (coef.col.>0)
    - (em caso de empate, há **degenerescência)**
    - Se não existir coef.col.>0, **solução óptima é ilimitada**.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

- O que é um algoritmo?
- O algoritmo simplex converge?

Conteúdo

- Degenerescência
- Solução óptima ilimitada
- Obtenção de um vértice inicial admissível
  - Método das 2 fases
- Método simplex dual
- Apêndice
  - Referência ao método do Grande M

Degenerescência: o que é?

Vértice degenerado

- Normalmente, há $(n - m)$ hiperplanos a suportar um vértice (ou seja, há $(n - m)$ restrições activas).
- Quando o número de hiperplanos é maior, o vértice é *degenerado*.

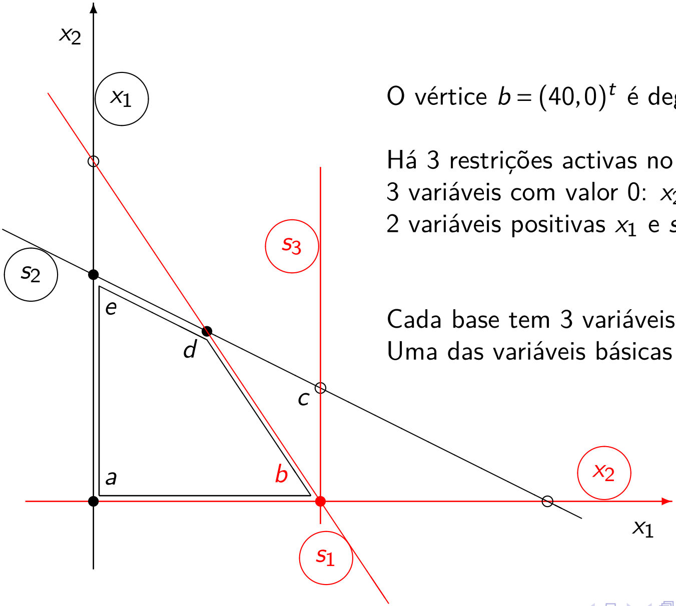
Quadro simplex degenerado

- No quadro simplex, haverá variáveis básicas com valor 0.
- Há vários quadros simplex *(bases)* a corresponder ao mesmo vértice (solução básica).

Bases e soluções básicas:

- Uma base é um conjunto de variáveis básicas (de vectores linearmente independentes).
- Uma solução básica é a solução que resulta de resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas de uma base.

Exemplo



O vértice $b = (40, 0)^t$ é degenerado.

Há 3 restrições activas no vértice b,
3 variáveis com valor 0: x_2, s_1 e s_3, e
2 variáveis positivas x_1 e s_2.

Cada base tem 3 variáveis básicas.
Uma das variáveis básicas é nula.

Três bases diferentes, o mesmo vértice *(solução básica)*

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	0
s_2	0	0	2	0	1	-1	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z	1	0	-10	0	0	12	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	0
s_2	0	0	0	-1	1	2	40
x_1	0	1	0	0	0	1	40
z	1	0	0	5	0	-3	480

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_2	0	0	4/3	-1/3	1	0	40
s_3	0	0	-2/3	-1/3	0	1	0
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	40
z	1	0	-2	4	0	0	480

Solução básica é sempre $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (40, 0, 0, 40, 0)^t$.

Degenerescência: como escolher a linha pivô?

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	0	$\boxed{3}$	2	1	0	0	120	$120/3 = 40$
s_2	0	1	2	0	1	0	80	$80/1 = 80$
s_3	0	1	0	0	0	1	40	$40/1 = 40$
z	1	-12	-10	0	0	0	0	

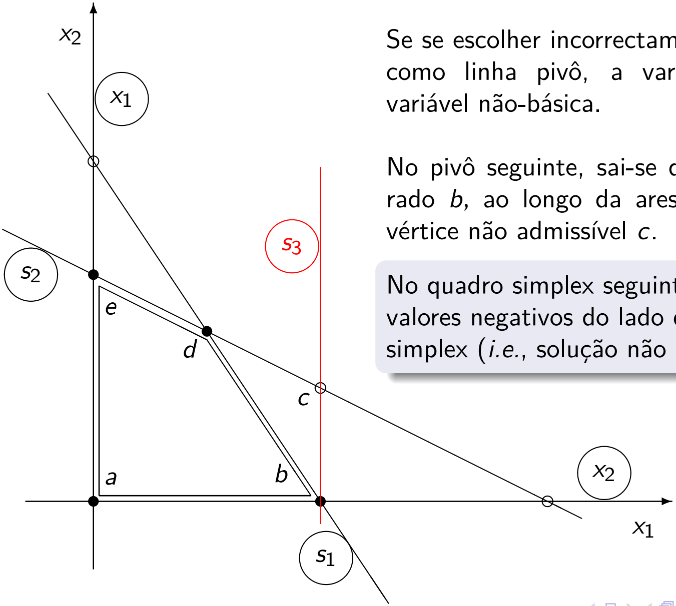
- Há empate na menor razão positiva $= 40$ (linhas de s_1 e de s_3).

Desempate:

perturbar o lado direito, adicionando ϵ, e calcular novamente a menor razão positiva.

- Exemplo:
  - Linha de $s_1 : (120+\epsilon)/3 = 40+\epsilon/3$
  - Linha de $s_3 :\ (40+\epsilon)/1 = 40+\epsilon$
- Linha pivô correcta: a de s_1 (menor razão positiva)

Exemplo: degenerescência, o que pode suceder?



Se se escolher incorrectamente a linha de s_3 como linha pivô, a variável s_3 passa a variável não-básica.

No pivô seguinte, sai-se do vértice degenerado b, ao longo da aresta $s_3 = 0$, para o vértice não admissível c.

No quadro simplex seguinte, aparecem valores negativos do lado direito do quadro simplex (*i.e.*, solução não admissível).

Domínio ilimitado (aberto)

- O domínio é ilimitado quando se pode caminhar ao longo de um raio permanecendo no domínio admissível.

- raio:= conjunto de pontos $\{x : x = v + \theta.d, \theta \in \mathbb{R}_+\}$, sendo $v \in \mathbb{R}^n$ um vértice e $d \in \mathbb{R}^n$ uma direcção (um vector não-nulo).

Quadro simplex: como identificar um raio?

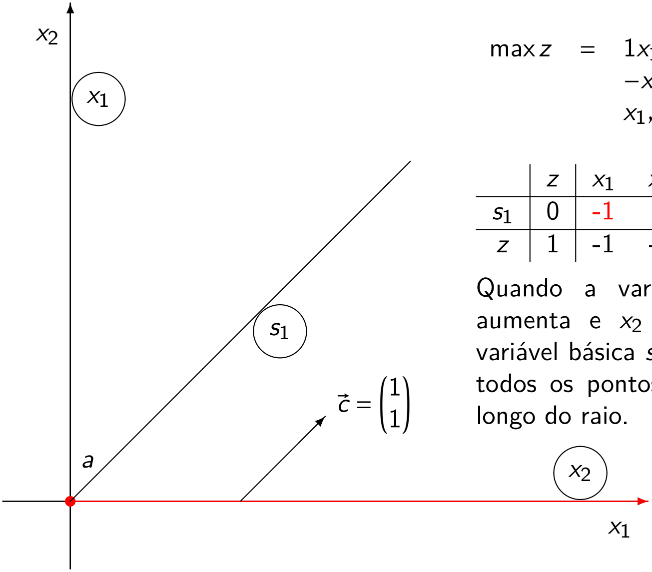
- Há uma variável não-básica com todos os coeficientes das linhas das restrições não-positivos (≤ 0);
- Exemplo:

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

Quando caminhamos ao longo de um raio,

- há uma **única** variável não-básica que aumenta de valor,
- todas as vars básicas aumentam (coef.<0) ou mantêm (coef.=0) o valor,
- pelo que todos os pontos do raio são pontos admissíveis.

Exemplo: raio $\{(0,0)^t + \theta(1,0)^t, \theta \geq 0\}$ (eixo de x_1)



$$\begin{aligned} \max z &= 1x_1 + 1x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

Quando a variável não-básica x_1 aumenta e x_2 se mantém $=0$, a variável básica s_1 aumenta, pelo que todos os pontos são admissíveis ao longo do raio.

Domínio ilimitado: solução óptima ilimitada

- O valor da solução óptima é ilimitado quando, ao caminhar ao longo de um raio, o valor da função objectivo aumenta.
- Para a solução óptima ser ilimitada, o domínio deve ser ilimitado (porquê?)

Quadro simplex: como identificar uma solução óptima ilimitada?

- há um raio e
- o respectivo coeficiente da linha da função objectivo é < 0.
- Exemplo:

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

- Quando o coeficiente da linha da função objectivo do raio for ≥ 0, o valor da solução óptima pode não ser ilimitado (porquê?).

Vértice admissível inicial

Há um vértice admissível inicial para o algoritmo simplex quando:

- as restrições são todas do tipo $\leq$ (há uma matriz identidade $I_{m \times m}$),
- os coeficientes do lado direito são todos ≥ 0.

- Isso não acontece se houver uma restrição do tipo $\geq$ com o lado direito positivo.

Método das 2 Fases:

- Quando não há um vértice admissível inicial,
- na Fase I, resolve-se um *problema auxiliar* para tentar encontrar um vértice admissível inicial;
- se se conseguir encontrar, na Fase II, aplica-se o algoritmo simplex;
- caso contrário, o problema é impossível.

Um problema de minimização

- Vamos usar um problema de minimização com restrições do tipo $\geq$ para ilustrar o Método das 2 Fases:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \min z &= cx \\ & Ax - u = b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $u \in \mathrm{IR}_{+}^{m \times 1}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $b \in \mathrm{IR}^{m \times 1}$.

e mostrar a forma de:

- transformar restrições do tipo $\geq$ em equações, e
- resolver um problema de minimização utilizando um algoritmo simplex de maximização.

Transformação Inequações → Equações

- Qualquer inequação do tipo ≥ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.
- Exemplo:

$$
\begin{array}{llll}
3x_1 + 2x_2 & \geq 120, & x_1, x_2 & \geq 0 \\
3x_1 + 2x_2 - 1u_1 & = 120, & x_1, x_2, u_1 & \geq 0
\end{array}
$$

- O número de unidades produzidas numa solução $(x_1, x_2)^t$ é igual ao valor da função linear: $3x_1 + 2x_2$.
- u_1 (variável de folga) é o número de unidades produzidas em excesso relativamente às necessárias (no exemplo, 120).
- há autores que designam estas variáveis por *variáveis de excesso*.

Exemplo

$$\begin{array}{rccccccc}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & y_3, y_4, y_5 \geq 0 & & & & & &
\end{array}$$

- Adicionando variáveis de excesso:

$$\begin{array}{rl}
\min z = & 120y_3 + 80y_4 + 30y_5 \\
-1y_1 \quad + & 3y_3 + 1y_4 + 1y_5 = 12 \\
-1y_2 + & 2y_3 + 2y_4 \quad = 10 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{array}$$

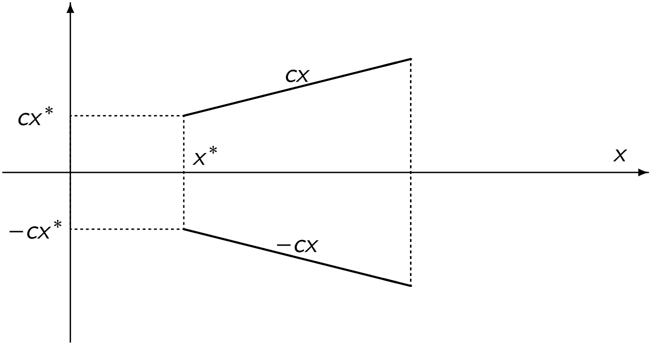
- Não há um vértice admissível inicial, porque o lado direito é positivo e não há uma matriz identidade no quadro :

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10

Outra questão: como resolver problemas de minimização?

- Em vez de recorrer a um algoritmo simplex de minimização, podemos usar o algoritmo simplex de maximização (apresentado antes) para maximizar $z^s = -cx$, a *função simétrica* da função objectivo $z = cx$:

$$\min z = cx \quad \equiv \quad \max z^s = -cx$$



- Solução óptima x^* é a mesma.
- Valor da solução óptima $cx^* = \min cx = -\max -cx$.

Método das 2 fases: estratégia

Fase I: adicionar variáveis artificiais e minimizar a sua soma

- resolver problema auxiliar ($\mathbf{1}a$ é a soma das variáveis artificiais):

$$
\begin{aligned}
\min z_a &= \mathbf{1}a \\
& Ax - u + a = b \\
& x, u, a \geq 0
\end{aligned}
$$

  sendo $a \in \mathbb{R}_+^{m \times 1}, \mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]$ um vector linha com m elementos.
- Se $(\min z_a = \mathbf{1}a = 0) \Rightarrow a = \tilde{0}$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow$ há um vértice admissível que obedece às restrições originais;
- caso contrário ($\min z_a > 0$), não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

Fase II: optimizar problema original

- Existe um vértice admissível inicial para o algoritmo simplex;
- optimiza-se a função objectivo (original) do problema.

- Função objectivo da Fase I:
- $\min z_a \;=\; 1a_1 + 1a_2$, que é equivalente a
- $\max z_a^s = -1a_1 - 1a_2$
- Equação da linha da função objectivo: $z_a^s + 1a_1 + 1a_2 = 0$

	z_a^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a^s	1	0	0	0	0	0	1	1	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos.

- Exprimir a função objectivo z_a^s em função das variáveis não-básicas y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 usando eliminação de Gauss: subtrair à linha de z_a^s as linhas de a_1 e a_2.

	z_a^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
(+1)*linha de z_a^s	1	0	0	0	0	0	1	1	0
(-1)*linha de a_1	0	1	0	-3	-1	-1	-1	0	-12
(-1)*linha de a_2	0	0	1	-2	-2	0	0	-1	-10
z_a^s	1	1	1	-5	-3	-1	0	0	-22

- Primeiro quadro válido: vamos optimizar a função auxiliar z_a^s:

	z_a^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a^s	1	1	1	-5	-3	-1	0	0	-22

	z_a^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a^s	1	1	1	-5	-3	-1	0	0	-22

	z_a^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/3	0	1	1/3	1/3	1/3	0	4
a_2	0	2/3	-1	0	$\boxed{4/3}$	-2/3	-2/3	1	2
z_a^s	1	-2/3	1	0	-4/3	2/3	5/3	0	-2

	z_a^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	1/2	-1/4	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	-1/2	3/4	3/2
z_a^s	1	0	0	0	0	0	1	1	0

- Solução óptima: $\min z_a = 0$.
- Foi encontrado um vértice admissível.

Fase I: conclusão

- O vértice admissível é $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^t = (0, 0, 7/2, 3/2, 0)^t$.
- Variáveis artificiais (a_1, a_2) e função objectivo auxiliar (z_a) não são necessárias na Fase II, e podem ser eliminadas.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3		-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4		1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2

- Na Fase II, iremos optimizar a função objectivo original (z), partindo do vértice admissível encontrado na Fase I.

Fase II: função objectivo original

- Função objectivo da Fase II:
- min $z = 120y_3 + 80y_4 + 30y_5$, que é equivalente a
- $\max z^s = -120y_3 - 80y_4 - 30y_5$
- Equação da linha da função objectivo: $z^s + 120y_3 + 80y_4 + 30y_5 = 0$

	z^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z^s	1	0	0	120	80	30	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos.

Fase II: construção do primeiro quadro

- Exprimir a função objectivo z^s em função das variáveis não-básicas y_1, y_2 e y_5 usando eliminação de Gauss: subtrair à linha de z^s as linhas de y_3 e y_4 multiplicadas por constantes adequadas.

	z^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
(+1)*linha de z^s	1	0	0	120	80	30	0
(-120)*linha de y_3	0	60	-30	-120	0	-60	420
(-80)*linha de y_4	0	-40	60	0	-80	40	120
z^s	1	20	30	0	0	10	540

- Primeiro quadro válido: vamos optimizar a função original z:

	z^s	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z^s	1	20	30	0	0	10	540

- Primeiro vértice admissível encontrado é a solução óptima. Nem sempre acontece.

Método simplex dual: estratégia

Para obter a matriz $I_{m \times m}$ no quadro simplex:

- dado um problema em que $c \geq \widetilde{0}$:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & Ax - u = b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

- resolver:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & -Ax + u = -b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

O quadro simplex irá apresentar:

- uma *solução (primal)* não-admissível, porque pode haver elementos do lado direito com valores < 0.
- uma *solução dual* admissível (vamos ver depois), porque todos os elementos da linha da função objectivo têm valor ≥ 0.

Exemplo

- Dado o quadro simplex sem uma matriz identidade ($I_{m\times m}$) e em que os elementos da linha da função objectivo são não-negativos:

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10
z_D	1	0	0	120	80	30	0

- obtém-se a $I_{m\times m}$ multiplicando as equações das restrições por (-1):

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_1	0	1	0	-3	-1	-1	-12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
z_D	1	0	0	120	80	30	0

A selecção do elemento pivô no método simplex dual destina-se a:

- Manter os elementos da linha da função objectivo com valor ≥ 0. (vamos ver depois que é manter a *solução dual* admissível).
- Procurar tornar os valores dos elementos do lado direito ≥ 0. Isto corresponde a obter uma *solução (primal)* admissível.

Algoritmo simplex dual:

- Vértice dual admissível inicial (todos os elementos da linha da função objectivo são não-negativos)
- Repetir
  - Selecção da linha pivô:
    - Coeficiente mais negativo do lado direito
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.$<$0, solução óptima.
  - Selecção da coluna pivô:
    - Menor valor absoluto de razão (f.objectivo/linha pivô) **negativa** (coef.linha$<$0)
    - Se não existir coef.linha $<$0, problema é impossível.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

- O elemento pivô tem sempre valor **negativo**.

Exemplo: primeira iteração do método simplex dual

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_1	0	1	0	-3	-1	$\boxed{-1}$	-12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
z_D	1	0	0	120	80	30	0

- Linha pivô: linha de y_1 (coeficiente mais negativo é -12).
- Coluna pivô: coluna de y_5 (menor valor absoluto das razões negativas é 30):
  - coluna de y_3 : $\mid 120/\text{-}3 \mid = 40$
  - coluna de y_4 : $\mid 80/\text{-}1 \mid = 80$
  - coluna de y_5 : $\mid 30/\text{-}1 \mid = 30$

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	0	-1	0	3	1	1	12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
z_D	1	30	0	30	50	0	-360

Exemplo: restantes iterações do método simplex dual

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	0	-1	0	3	1	1	12
y_2	0	0	1	$\boxed{-2}$	-2	0	-10
z_D	1	30	0	30	50	0	-360

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	0	-1	3/2	0	$\boxed{-2}$	1	-3
y_3	0	0	-1/2	1	1	0	5
z_D	1	30	15	0	20	0	-510

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
z_D	1	20	30	0	0	10	-540

- Solução óptima.

Identificação de um problema impossível

Um problema é impossível se existir:

- uma linha com coeficiente negativo do lado direito em que todos os coeficientes das variáveis não básicas sejam não-negativos (≥ 0).

- Exemplo:

	z_D	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_1	0	1	0	3	1	1	-12
y_2	0	0	1	-2	-2	0	-10
z_D	1	0	0	120	80	30	0

- Na linha de y_1, os coeficientes das variáveis y_3, y_4 e y_5 são ≥ 0 (não há um elemento pivô **negativo**).
- Argumento: o problema é impossível, porque nenhum conjunto $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ satisfaz a restrição: $y_1 + 3y_3 + y_4 + y_5 = -12$.

- O problema primal é impossível e o problema dual tem uma solução óptima ilimitada [veremos, em teoria da dualidade].

Conclusão

- Há outros algoritmos para resolver problemas de programação linear, como os métodos de pontos interiores.
- O algoritmo simplex permanece competitivo, embora tenham sido identificados problemas em que os métodos de pontos interiores têm melhor desempenho.

Resultados de aprendizagem

- Identificar e caracterizar soluções básicas degeneradas, e seleccionar a linha pivô numa vértice degenerado.
- Identificar e caracterizar domínios ilimitados no quadro simplex, e distinguir os problemas com soluções óptimas finitas e ilimitadas.
- Transformar um problema de minimização num problema de maximização, para utilizar o algoritmo simplex de maximização.
- Método das 2 fases
    - conhecer a estratégia do método;
    - aplicar o método para obter um vértice inicial admissível;
    - identificar problemas impossíveis.
- Método do simplex dual
    - conhecer a estratégia do método;
    - aplicar o método quando existe um vértice inicial admissível para o problema dual;
    - seleccionar a linha pivô e a coluna pivô;
    - identificar problemas impossíveis.

Apêndices

1. Método do Grande M: estratégia

associar uma penalidade muito grande às vars artificiais, para conduzi-las a um valor nulo

- resolver problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \min z_M &= cx + \mathbf{M}a \\ & Ax - u + a = b \\ & x, u, a \geq 0 \end{aligned}$$

  sendo $a \in \mathrm{IR}_+^{m\times 1}, \mathbf{M} = [M, M, \ldots, M]$ um vector linha com m elementos.

- Se M for suficientemente grande, qualquer ponto admissível é melhor do que um ponto em que uma variável artificial seja positiva.
- Se $(a = \tilde{0})$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow \min z_M = cx^*$ e x^* é o vértice admissível óptimo, que obedece às restrições originais.
- caso contrário $(\exists a_i > 0)$, não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

1. Método do Grande M: desvantagens

Se o valor de M for muito grande,

- pode haver perda de informação, resultante da representação dos números em computador.
- Os coeficientes de custo são representados por reais de dupla precisão com um número finito de casas decimais.
- Exemplo:

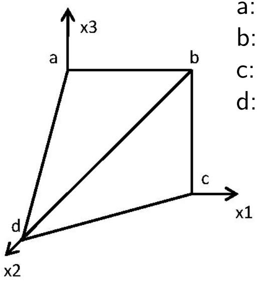
$$\begin{aligned} c_1 &= 3{,}141592653589793 2e+00 \\ M &= 1{,}0000000000000000e+40 \\ M + c_1 &= 1{,}0000000000000000e+40 \end{aligned}$$

Se o valor de M for muito pequeno,

- pode não ser suficientemente grande para conduzir todas as variáveis artificiais a 0.

2. Degenerescência e restrições redundantes

- No exemplo anterior de degenerescência, havia uma *restrição redundante* (pode ser eliminada sem alterar o domínio).
- Isso não acontece na generalidade.
- Exemplo: as restrições $x_1 + x_2 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0$ são todas necessárias:



a: $x_2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 + x_3 = 1$
b: $x_2 = 0$; $x_2 + x_3 = 1$; $x_1 + x_2 = 1$
c: $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_1 + x_2 = 1$
d: $x_3 = 0$; $x_1 = 0$; $x_1 + x_2 = 1$; $x_2 + x_3 = 1$(há 4 planos)

2. Degenerescência e finitude do algoritmo simplex

- Quando não há degenerescência, o algoritmo simplex termina num número finito de iterações:

  - em cada iteração, a função objectivo melhora, e, se o óptimo for finito, o número de iterações não pode ser infinito.

- Quando há degenerescência, o algoritmo simplex pode entrar em ciclo.
- Há exemplos especialmente construídos em que a regra de seleccionar a coluna pivô com o coeficiente mais negativo pode levar a que o algoritmo entre em ciclo, percorrendo ciclicamente as diferentes bases correspondentes ao mesmo vértice.

- Para informação adicional, ver: Bland, R. "New finite pivoting rules for the simplex method". Mathematics of Operations Research 2 (2): 103 - 107, 1977. doi:10.1287/moor.2.2.103

Fim