Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

1º Teste :: 29 de março de 2017

Nome [ ] Número [ ]

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

Exercício 1. [3 valores] Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4 \text{ e } x^2 + 9y^2 < 9\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

a) Apresente esboços do conjunto A, do seu interior, da sua aderência e da sua fronteira;

b) Diga, justificando, se A é ou não um conjunto aberto;

c) Diga, justificando, se A é ou não um conjunto limitado.

Exercício 2. [2 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{2x^4 + 3y^4}$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exercício 3. [6 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que a função f é contínua;

b) Calcule $\nabla f(1,1)$;

c) Determine $Df((0,0);(u,v))$ para qualquer $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;

d) Diga, justificando, se f é derivável em $(0,0)$;

e) Obtenha uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,1)$.

Exercício 4. [3 valores] Seja $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (\operatorname{sen} x \cos y, 2\cos x \operatorname{sen} y)$$

e seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função derivável cuja matriz jacobiana é

$$J\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & 4xy \\ 4y & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{g}$;

b) Calcule $D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Exercício 5. [2 valores] Considere a superfície S de equação $ze^{x-y} + z^3 = 2$.

a) Determine uma equação da reta normal a S no ponto $P = (1,1,1)$.

b) Verifique se o ponto $(1,-1,1)$ pertence ao plano tangente a S em P.

As respostas ao exercício 6 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 6. [4 valores] Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

a) Se qualquer curva de nível não vazia de uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é composta por retas, então o gráfico de f é um plano.

b) Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Designando por f_1 e f_2 as funções componentes de $\boldsymbol{f}$, se $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 2$, então $\boldsymbol{f}$ admite prolongamento contínuo a $\mathbb{R}$.

c) Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + 2x_2 \cdots + nx_n$, então $Df(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

d) Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(x, y) = y^3 + 8xy$ e $f_y(x, y) = 3xy^2 - 4x^2$.