



Universidade do Minho  
Dep. de Matemática

Cálculo II  
Exame de Recurso

Eng. Informática

10/07/2009

[2h]

Nome

Número

☐

Pretendo utilizar as classificações CTG e CTOL no cálculo da classificação da nota do exame de recurso, passando esta prova a ser cotada para 12 valores.

**Justifique as respostas.**

Exercício 1. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2$  e o ponto  $P$  de coordenadas  $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ .

- a) [5 valores] Identifique as curvas de nível da função  $f$  associadas aos níveis  $c = -2, 0, 4$ .
- b) [5 valores] Determine e elabore um esboço gráfico da curva de nível de  $f$  que contém  $P$ .
- c) [5 valores] Escreva uma equação da recta perpendicular à curva de nível de  $f$  determinada na alínea anterior, no ponto  $P$ .

Exercício 2. [10 valores] Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (1, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

Estude a continuidade de  $f$  em todo o seu domínio.

Nome

Número

---

Exercício 3. Considere a função  $f(x, y) = x^4 - y^2(x^2 + 1)$ .

- a) [3 valores] Calcule a função gradiente de  $f$ .
- b) [3 valores] Verifique que  $f$  possui apenas um ponto crítico.
- c) [3 valores] Calcule a matriz hessiana no ponto crítico de  $f$ .
- d) [5 valores] Verifique que o ponto crítico de  $f$  corresponde a um ponto de sela.
- e) [3 valores] Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ . Justifique que  $f|_D$  possui máximo e mínimo absolutos.
- f) [3 valores] Indique um sistema de equações que permita identificar os extremos de  $f|_D$  através da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange.
- g) [5 valores] Sabendo que do conjunto solução do sistema referido na alínea anterior, os únicos pontos cuja imagem por  $f$  é positiva são os elementos de  $D$  que pertencem ao eixo das abcissas, que conclusão pode retirar quanto aos extremos de  $f|_D$ ?

Exercício 4. Seja  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 2x \leq y \leq x^2 + 1\}$ .

- a) [5 valores] Faça um esboço da região  $R$ .
- b) [5 valores] Apresente um integral duplo que represente a área de  $R$ .
- c) [5 valores] Troque a ordem de integração ao integral duplo que representa a área de  $R$  e que registou na alínea anterior.

Exercício 5. Seja  $\mathcal{E}$  a região esférica cuja fronteira se define por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Sem calcular o valor indique, caso seja possível, o sinal de cada um dos seguintes integrais

- a) [5 valores]  $\iiint_{\mathcal{E}} xy \, d(x, y, z)$
- b) [5 valores]  $\iiint_{\mathcal{E}} (z^2 - 1) \, d(x, y, z)$

Exercício 6. [10 valores] Usando um sistema de coordenadas apropriado, calcule o volume no interior do cilindro definido por  $x^2 + y^2 = 4$  e entre os planos definidos por  $y + z = 9$  e por  $z = 0$ .

Exercício 7. Num campo vectorial definido por  $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, 2xy - e^y)$  há uma partícula que descreve um arco  $C$  definido por  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, -\sin t)$ , com  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- [5 valores] A figura anexa representa o campo vectorial  $\mathbf{F}$ . Esboce a trajetória percorrida pela partícula.
- [5 valores] Será  $\mathbf{F}$  um campo de gradientes?
- [5 valores] Qual o trabalho realizado pela força  $\mathbf{F}$ , sobre esta partícula, ao longo de  $C$ ?

