Dep. Matem., Univ. Minho	15 de Junho de 2009
Resolução do 2º Teste de **Lógica EI**	
Lic. Eng. Informática	Duração: 2 horas

Este teste é constituído por 5 questões. ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Sejam φ e ψ fórmulas, Γ e Δ conjuntos de fórmulas do Cálculo Proposicional. Mostre que:

(a) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;

R: *Pelo Teorema da Completude, para provar que a fórmula $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ é um teorema basta provar que é uma tautologia, ou seja, para provar $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ basta mostrar*

$$\models \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Ora esta afirmação, de que a fórmula $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ é uma tautologia, pode ser deduzida: ou como uma consequência imediata da lei de De Morgan $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; ou por construção da tabela de verdade de $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ e verificação de que toda a valoração atribui o valor de verdade 1 a esta fórmula.

Alternativamente, *poder-se-ia provar que a fórmula $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ é um teorema construindo uma derivação em DNP dela. A árvore seguinte é uma tal derivação.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)}}{\varphi\vee\psi}\,\vee_1 I \qquad \cancel{\neg(\varphi\vee\psi)}^{(1)}}{\bot}\,\neg E}{\neg\varphi}\,\neg I^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\psi}^{(3)}}{\varphi\vee\psi}\,\vee_2 I \qquad \cancel{\neg(\varphi\vee\psi)}^{(1)}}{\bot}\,\neg E}{\neg\psi}\,\neg I^{(3)}}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}\,\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\vee\psi}^{(4)} \qquad \dfrac{\cancel{\varphi}^{(5)} \qquad \dfrac{\cancel{\neg\varphi\wedge\neg\psi}^{(1)}}{\neg\varphi}\,\wedge_1 E}{\bot}\,\neg E \qquad \dfrac{\cancel{\psi}^{(5)} \qquad \dfrac{\cancel{\neg\varphi\wedge\neg\psi}^{(1)}}{\neg\psi}\,\wedge_2 E}{\bot}\,\neg E}{\dfrac{\bot}{\neg(\varphi\vee\psi)}\,\neg I^{(4)}}\,\vee E^{(5)}}{}}{\neg(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow(\neg\varphi\wedge\neg\psi)}\,\leftrightarrow I^{(1)}$$

Conclui-se assim que $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

(b) se $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \psi$.

R: *Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$. De $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, deduzimos a existência de derivações D_1 e D_2 de $\varphi \vee \psi$ e $\neg\varphi$, respectivamente, a partir de Γ. Então*

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi\vee\psi \end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \neg\varphi \end{matrix}}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,(\bot) \qquad \cancel{\psi}^{(1)}}{\psi}\,\vee E^{(1)}$$

é uma derivação de ψ em que as hipóteses não canceladas pertencem a Γ, e portanto a Δ pois $\Gamma \subseteq \Delta$. Mostrou-se assim que $\Delta \vdash \psi$.

Alternativamente, *apresentamos uma outra resolução que utiliza os teoremas da Correcção e da Completude. De $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, deduzimos pelo Teorema da Correcção que $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \models \neg\varphi$. Com o objectivo de mostrar que $\Delta \models \psi$, consideremos uma valoração v que satisfaz Δ. Dado que $\Gamma \subseteq \Delta$, tem-se então que $v \models \Gamma$. Agora, de $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \models \neg\varphi$ resulta que $v(\varphi \vee \psi) = v(\neg\varphi) = 1$. Logo $v(\varphi) = 0$ e portanto $v(\psi) = 1$, o que prova que $\Delta \models \psi$. Então, usando o Teorema da Completude, conclui-se que $\Delta \vdash \psi$.*

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \cup, \cap, \setminus\}, \{=, \subseteq\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\cup) = \mathcal{N}(\cap) = \mathcal{N}(\setminus) = 2$ e $\mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\subseteq) = 2$.

(a) Das seguintes palavras de $\mathcal{A}_L^+$ verifique se algumas são L-termos ou L-fórmulas e, nesses casos, construa as respectivas árvores de formação.

(i) $((x_1 \cap x_2) \cup 0) \setminus x_3$;
(ii) $x_1 \cap (0 \cup x_3 \subseteq x_1)$;
(iii) $(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = (x_1 \cap x_3) \cup (x_2 \cap x_3)$;
(iv) $\forall_{x_1}((x_1 = x_3) \subseteq (x_1 \cap x_2))$.

R: (i) *A palavra $((x_1 \cap x_2) \cup 0) \setminus x_3$ é um L-termo. A sua árvore de formação é a seguinte*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 \in \mathcal{T}_L}\,x_1 \qquad \dfrac{}{x_2 \in \mathcal{T}_L}\,x_2}{(x_1 \cap x_2) \in \mathcal{T}_L}\,\cap \qquad \dfrac{}{0 \in \mathcal{T}_L}\,0}{((x_1 \cap x_2) \cup 0) \in \mathcal{T}_L}\,\cup \qquad \dfrac{}{x_3 \in \mathcal{T}_L}\,x_3}{((x_1 \cap x_2) \cup 0) \setminus x_3 \in \mathcal{T}_L}\,\setminus$$

(iii) *A palavra $(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = (x_1 \cap x_3) \cup (x_2 \cap x_3)$ é uma L-fórmula atómica. A sua árvore de formação é portanto*

$$\dfrac{}{(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = (x_1 \cap x_3) \cup (x_2 \cap x_3) \in \mathcal{F}_L}\,\mathrm{At}_L$$

(ii) *e* (iv) *As palavras $x_1 \cap (0 \cup x_3 \subseteq x_1)$ e $\forall_{x_1}((x_1 = x_3) \subseteq (x_1 \cap x_2))$ não são L-termos nem L-fórmulas.*

(b) Considere a L-estrutura $E = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \overline{})$ onde:

- $\overline{0} = \emptyset$ é o conjunto vazio;
- $\overline{\cup} = \cup$ é a união de conjuntos;
- $\overline{\cap} = \cap$ é a intersecção de conjuntos;
- $\overline{\setminus} = \setminus$ é a complementação de conjuntos ($A \setminus B$ é o complementar de B em A);
- $\overline{=}$ é a igualdade de conjuntos;
- $\overline{\subseteq} = \subseteq$ é a inclusão de conjuntos.

Seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > i\}$. Calcule:

(i) $((x_1 \cup x_2) \setminus x_{20})[a]$;

R: *O valor do L-termo $((x_1 \cup x_2) \setminus x_{20})$ para a atribuição a é o elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, domínio de E, obtido pelos seguintes cálculos recursivos:*

$$\begin{aligned} ((x_1 \cup x_2) \setminus x_{20})[a] &= (x_1 \cup x_2)[a] \,\overline{\setminus}\, x_{20}[a] \\ &= \Big(x_1[a] \overline{\cup} x_2[a]\Big) \,\overline{\setminus}\, a(x_{20}) \\ &= \Big(a(x_1) \overline{\cup} a(x_2)\Big) \,\overline{\setminus}\, a(x_{20}) \\ &= \Big(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}\Big) \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n > 20\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n > 20\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 20\} \\ &= \{2, 3, 4, \ldots, 19, 20\}. \end{aligned}$$

(ii) $((x_1 \setminus (x_2 \cup x_4)) = ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4)))[a]$.

R: *De forma análoga à apresentada na alínea anterior, obtém-se*

$$\begin{aligned} (x_1 \setminus (x_2 \cup x_4))[a] &= a(x_1) \,\overline{\setminus}\, \Big(a(x_2) \overline{\cup} a(x_4)\Big) \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \setminus \Big(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}\Big) \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4))[a] &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 2\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 4\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 4\} \\ &= \{2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Logo, por definição de valor lógico de uma L-fórmula, tem-se

$$\begin{aligned} & ((x_1 \setminus (x_2 \cup x_4)) = ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4)))[a] = 1 \\ \textit{se e só se} \quad & (x_1 \setminus (x_2 \cup x_4))[a] \equiv ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4))[a] \\ \textit{se e só se} \quad & \{2\} = \{2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Como esta última condição não é válida conclui-se que

$$((x_1 \setminus (x_2 \cup x_4)) = ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4)))[a] = 0.$$

(c) Sejam E a L-estrutura e a a atribuição da alínea (b), e considere o seguinte conjunto de L-fórmulas

$$\Gamma = \{\neg(x_2 \cap x_5 \subseteq x_9),\ \forall_{x_1}(x_1 \cup 0 = x_1)\}.$$

Verifique se (E, a) é uma realização de Γ.

R: *Denotemos os elementos de Γ por γ_1 e γ_2 respectivamente. Isto é,*

$$\gamma_1 = \neg(x_2 \cap x_5 \subseteq x_9) \quad e \quad \gamma_2 = \forall_{x_1}(x_1 \cup 0 = x_1).$$

O par (E, a) é uma realização de Γ pois $E \models \gamma_1[a]$ e $E \models \gamma_2[a]$, ou seja, $\gamma_1[a]_E = \gamma_2[a]_E = 1$, como mostramos de seguida. De facto, tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_1[a]_E = 1 \quad sse \quad & (x_2 \cap x_5 \subseteq x_9)[a]_E = 0 \\ sse \quad & \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\} \not\subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > 9\} \\ sse \quad & \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\} \not\subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > 9\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_2[a]_E = 1 \quad sse \quad & \forall_{N_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ (x_1 \cup 0 = x_1)[a\tbinom{x_1}{N_1}]_E = 1 \\ sse \quad & \forall_{N_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ N_1 \cup \emptyset = N_1. \end{aligned}$$

Como as afirmações $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\} \not\subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > 9\}$ e $\forall_{N_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ N_1 \cup \emptyset = N_1$ são verdadeiras, deduz-se que $\gamma_1[a]_E = \gamma_2[a]_E = 1$, o que prova que (E, a) é uma realização de Γ.

(d) Determine uma L-fórmula logicamente equivalente à L-fórmula

$$\forall_{x_2}(\neg(x_2 = 0) \wedge (x_1 \subseteq x_2))$$

que não use o conectivo $\wedge$ nem o quantificador universal.

R: *Tem-se*

$$\begin{aligned} & \forall_{x_2}(\neg(x_2 = 0) \wedge (x_1 \subseteq x_2)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall_{x_2}\neg((x_2 = 0) \vee \neg(x_1 \subseteq x_2)) \quad \textit{pelas leis de De Morgan} \\ \Leftrightarrow\ & \neg\exists_{x_2}((x_2 = 0) \vee \neg(x_1 \subseteq x_2)) \quad \textit{por uma propriedade da equivalência lógica.} \end{aligned}$$

Portanto, a L-fórmula

$$\neg\exists_{x_2}((x_2 = 0) \vee \neg(x_1 \subseteq x_2))$$

está nas condições pedidas já que não tem ocorrências do conectivo $\wedge$ nem do quantificador universal.

3. Sejam L um tipo de linguagem do Cálculo de Predicados, φ e ψ L-fórmulas e x uma variável. Verifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $\models (\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;

R: *Mostremos que esta afirmação é verdadeira. Seja σ a fórmula do Cálculo Proposicional*

$$\sigma = (p_0 \to \neg p_1) \to (\neg p_0 \vee \neg p_1).$$

Note-se que σ é uma tautologia. Para provar este facto poder-se-ia construir a tabela de verdade de σ, ou recordar que a equivalência lógica $\theta_1 \to \theta_2 \Leftrightarrow \neg\theta_1 \vee \theta_2$ é válida para quaisquer fórmulas θ_1 e θ_2 do Cálculo Proposicional, daqui resultando que $(p_0 \to \neg p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1)$ é uma tautologia e portanto que σ também o é.

Por outro lado, a L-fórmula $\gamma = (\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ é uma instância de σ pois

$$\gamma = \sigma[\varphi/p_0; \psi/p_1],$$

ou seja, γ é obtida de σ pela substituição simultânea de p_0 por φ e de p_1 por ψ. Pode-se agora concluir que γ é uma L-fórmula válida pois é uma instância da tautologia σ, o que prova a afirmação.

(b) $\models \big(\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)\big) \to \big(\neg(\forall_x \psi)\big)$.

R: *Esta afirmação é verdadeira. De facto, sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E, arbitrárias. Queremos provar que*

$$E \models (\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi))[a],$$

ou seja, que

$$((\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi)))[a] = 1.$$

Ora, tem-se

$$\begin{aligned} & ((\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi)))[a] = 1 \\ \textit{se e só se} \quad & (\exists_x \neg(\varphi \vee \psi))[a] = 0 \quad ou \quad (\neg(\forall_x \psi))[a] = 1 \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de uma L-fórmula } \sigma_1 \to \sigma_2\textit{)} \\ \textit{se e só se} \quad & \forall_{d \in D}\ (\neg(\varphi \vee \psi))[a\tbinom{x}{d}] = 0 \quad ou \quad (\forall_x \psi)[a] = 0 \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de L-fórmulas } \exists_x \sigma_1 \textit{ e } \neg\sigma_2\textit{)} \\ \textit{se e só se} \quad & \forall_{d \in D}\ (\varphi \vee \psi)[a\tbinom{x}{d}] = 1 \quad ou \quad \exists_{d' \in D}\ \psi[a\tbinom{x}{d'}] = 0 \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de L-fórmulas } \neg\sigma_1 \textit{ e } \forall_x \sigma_2\textit{)} \\ \textit{se e só se} \quad & \forall_{d \in D}\ (\varphi[a\tbinom{x}{d}] = 1 \ ou\ \psi[a\tbinom{x}{d}] = 1) \quad ou \quad \exists_{d' \in D}\ \psi[a\tbinom{x}{d'}] = 0 \qquad (*) \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de L-fórmulas } \sigma_1 \vee \sigma_2\textit{).} \end{aligned}$$

Analisando a validade da afirmação (*), dir-se-ia que:

- *se $\forall_{d \in D}\ \varphi[a\tbinom{x}{d}] = 1$ ou $\psi[a\tbinom{x}{d}] = 1$ é verdadeira, então a afirmação (*) é verdadeira;*
- *senão, $\exists_{d \in D}\ \varphi[a\tbinom{x}{d}] = 0$ e $\psi[a\tbinom{x}{d}] = 0$, pelo que, em particular $\exists_{d' = d \in D}\ \psi[a\tbinom{x}{d'}] = 0$, e então a afirmação (*) é verdadeira;*

Assim, em qualquer caso a afirmação (*) é verdadeira pelo que a prova está concluída.

4. Considere uma estrutura E cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e onde estão definidas a constante 1, as funções

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x(y - 2) + 2 \end{array} \qquad e \qquad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2, \end{array}$$

e as relações usuais de igualdade e de menor ou igual em $\mathbb{R}$.

(a) Determine o tipo de linguagem L_0 adequado para esta estrutura.

R: *Consideremos o tipo de linguagem $L_0 = (\{1, g, h\}, \{=, \leq\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(1) = 0$, $\mathcal{N}(g) = 1$, $\mathcal{N}(h) = \mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\leq) = 2$.*

Então a estrutura E pode ser considerada uma L_0-estrutura $E = (\mathbb{R}, \overline{})$ em que $\overline{s} = s$ para cada símbolo $s \in \{1, g, h, =, \leq\}$.

(b) Escreva uma L_0-fórmula que represente a afirmação: "a função g tem um ponto de mínimo absoluto".

R: *A afirmação "a função g tem um ponto de mínimo absoluto" significa que existe um elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo o elemento $b \in \mathbb{R}$ se verifica $g(a) \leq g(b)$. Logo a firmação pode ser representada pela seguinte L_0-fórmula:*

$$\exists_{x_0} \forall_{x_1}\ (g(x_0) \leq g(x_1)).$$

(c) Verifique se E é modelo da fórmula que determinou na alínea anterior.

R: *Sim, E é um modelo da L_0-fórmula $\varphi = \exists_{x_0} \forall_{x_1}(g(x_0) \leq g(x_1))$. Para demonstrar esta proposição, temos de provar que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a em E. Ora, sendo a uma atribuição em E, tem-se*

$$E \models \varphi[a] \quad \textit{se e só se} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{R}} \forall_{n_1 \in \mathbb{R}}\ (g(n_0) \leq g(n_1)).$$

Como é evidente tem-se $2 \leq n_1^2 + 2$, ou seja, $g(0) \leq g(n_1)$, para todo o $n_1 \in \mathbb{R}$. Logo, basta tomar $n_0 = 0$, para concluir que a afirmação

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{R}} \forall_{n_1 \in \mathbb{R}}\ (g(n_0) \leq g(n_1))$$

é verdadeira e, portanto, que E é um modelo de φ.

5. Seja L um tipo de linguagem do Cálculo de Predicados.

(a) Defina por recursão estrutural a função $\mathrm{LIV} : \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, que a cada L-fórmula φ associa o conjunto $\mathrm{LIV}(\varphi)$ das variáveis que têm ocorrências livres em φ.

R: *O conjunto $\mathrm{LIV}(\varphi)$ das variáveis que têm ocorrências livres em φ é definido, por recursão estrutural em φ, como:*

i) $\mathrm{LIV}(\bot) = \emptyset$;

ii) Para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$\mathrm{LIV}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{VAR}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{VAR}(t_n);$$

iii) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, $\mathrm{LIV}(\neg\psi) = \mathrm{LIV}(\psi)$;

iv) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$ e $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\mathrm{LIV}(\psi \square \sigma) = \mathrm{LIV}(\psi) \cup \mathrm{LIV}(\sigma)$.

v) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,

$$\mathrm{LIV}(\exists_x \psi) = \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{x\} \quad e \quad \mathrm{LIV}(\forall_x \psi) = \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{x\}.$$

(b) Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Prove por indução estrutural sobre φ que, se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, então

$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2].$$

R: *Mostremos então por indução estrutural em φ que, se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, então*

$$E \models \varphi[a_1] \quad \textit{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2]. \tag{1}$$

Suponhamos que a_1 e a_2 são atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ tais que $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$.

i) Caso $\varphi = \bot$. Então, $E \not\models \varphi[a_1]$ e $E \not\models \varphi[a_2]$, donde a condição (1) é imediata.

ii) Caso $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, onde R é um símbolo de relação de aridade n e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Por hipótese, $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{VAR}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{VAR}(t_n)$. Logo, por um resultado provado nas aulas, tem-se $t_1[a_1] = t_1[a_2], \ldots, t_n[a_1] = t_n[a_2]$. Agora,

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & (t_1[a_1], \ldots, t_n[a_1]) \in \overline{R} \\ sse \quad & (t_1[a_2], \ldots, t_n[a_2]) \in \overline{R} \\ sse \quad & E \models \varphi[a_2], \end{aligned}$$

o que prova a condição (1).

iii) Caso $\varphi = \neg\psi$. Então, $\mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{LIV}(\psi)$. Suponhamos por hipótese de indução que o resultado é válido para ψ, pelo que $E \models \psi[a_1]$ sse $E \models \psi[a_2]$. Tem-se

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & E \not\models \psi[a_1] \\ sse \quad & E \not\models \psi[a_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ sse \quad & E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

iv) Caso $\varphi = \psi \square \sigma$, onde $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Então, $\mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{LIV}(\psi) \cup \mathrm{LIV}(\sigma)$, donde $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\psi) \cup \mathrm{LIV}(\sigma)$. Suponhamos por hipótese de indução que o resultado é válido para ψ e para σ, pelo que $E \models \psi[a_1]$ sse $E \models \psi[a_2]$ e $E \models \sigma[a_1]$ sse $E \models \sigma[a_2]$. Vamos verificar que $E \models (\psi \square \sigma)[a_1]$ sse $E \models (\psi \square \sigma)[a_2]$.

- *Caso $\square = \wedge$. Neste caso tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & E \models \psi[a_1] \ e\ E \models \sigma[a_1] \\ sse \quad & E \models \psi[a_2] \ e\ E \models \sigma[a_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ sse \quad & E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

- *Caso $\square = \vee$. Neste caso tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & E \models \psi[a_1] \ ou\ E \models \sigma[a_1] \\ sse \quad & E \models \psi[a_2] \ ou\ E \models \sigma[a_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ sse \quad & E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

- *Caso $\square = \to$, tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & E \not\models \psi[a_1] \ ou\ E \models \sigma[a_1] \\ sse \quad & E \not\models \psi[a_2] \ ou\ E \models \sigma[a_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ sse \quad & E \not\models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

- *Caso $\square = \leftrightarrow$, tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & \psi[a_1]_E = \sigma[a_1]_E \\ sse \quad & \psi[a_2]_E = \sigma[a_2]_E \quad \textit{por hipótese de indução} \\ sse \quad & E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

v) Caso $\varphi = Q_y \psi$, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$. Então, $\mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{y\}$, donde $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{y\}$. Logo, sendo a'_1 e a'_2 as atribuições $a_1\binom{y}{d}$ e $a_2\binom{y}{d}$, respectivamente, tem-se $a'_1(x) = a'_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\psi)$. Suponhamos por hipótese de indução que o resultado é válido para ψ, pelo que $E \models \psi[a'_1]$ sse $E \models \psi[a'_2]$. Então

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad sse \quad & Q_{d \in D}\ E \models \psi[a'_1] \\ sse \quad & Q_{d \in D}\ E \models \psi[a'_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ sse \quad & E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

Das condições i)-v) e do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}_L$ conclui-se o resultado pretendido.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1.5+1.5	1.5+1.5+1.5+1.5	1.5+1.5	1.5+1.5+1.5	1.5+2

(Fim)

Universidade do Minho — 17 de Junho de 2011

Resolução do 2º Teste de

Lógica EI

Lic. Eng. Informática — Duração: 2 horas

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema;
   (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$.

R: *(i) Um teorema é uma fórmula que admite derivações em DNP sem hipóteses por cancelar. Uma tal derivação de $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,E\wedge_1 \quad \cancel{p_0 \to \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\neg^{(2)}}{(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\to^{(1)}$$

(ii) É necessário construir uma derivação cuja conclusão seja $p_0 \to \neg p_1$ e cujo conjunto de hipóteses por cancelar seja um subconjunto de $\{\neg(p_0 \wedge p_1)\}$. Uma derivação nestas condições é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \neg(p_0 \wedge p_1)}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

(b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$, então $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

R: *Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, existe uma derivação $\mathcal{D}$ cuja conclusão é $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Assim,*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg(p_0 \wedge p_1)\end{matrix}}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $p_0 \to \neg p_1$ e conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ, o que prova $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

Uma resolução alternativa é a que se segue.

Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, pelo Teorema da Correcção, $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$. Para provar $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$, pelo Teorema da Completude, basta provar $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$. Seja v uma valoração arbitrária que satisfaça Γ. De $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$, segue que $v(\neg(p_0 \wedge p_1)) = 1$, o que implica que $v(p_0) = 0$ ou $v(p_1) = 0$ e, em ambos os casos, segue que $v(p_0 \to \neg p_1) = 1$. Provamos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ atribui valor 1 a $p_0 \to \neg p_1$, o que prova $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$, como pretendido.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{s}, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

(a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0))$ (ii) $(x_1 - 0) \vee \mathsf{P}(x_2)$
   (iii) $\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1))$ (iv) $\forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_0, 0) \vee (\mathsf{s}(x_0) < 0))$

R: *As palavras das alíneas (ii) e (iv) não pertencem nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$. A palavra da alínea (i) pertence a $\mathcal{T}_L$ e a da alínea (iii) pertence a $\mathcal{F}_L$. As árvores de formação que justificam esta afirmação são as seguintes:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 \in \mathcal{T}_L}\,x_1}{\mathsf{s}(x_1) \in \mathcal{T}_L}\,\mathsf{s} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x_2 \in \mathcal{T}_L}\,x_2 \quad \dfrac{\dfrac{}{0 \in \mathcal{T}_L}\,0}{\mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\,\mathsf{s}}{x_2 - \mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\,-}{\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0)) \in \mathcal{T}_L}\,-$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{P}(x_1) \in \mathcal{F}_L}\,At_L \qquad \dfrac{\dfrac{}{(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\,At_L}{\forall_{x_1}(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\,\forall_{x_1}}{(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\,\wedge}{\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\,\exists_{x_2}$$

(b) Indique (justificando) o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_2 - \mathsf{s}(x_1)$ na L-fórmula $\forall_{x_1}(\mathsf{P}(x_4) \to \exists_{x_0}\neg(x_0 < x_2 - \mathsf{s}(x_1 - 0)))$.

R: *Sejam t e φ respectivamente o termo e a fórmula dados. O conjunto pedido é $\mathcal{V}\backslash\{x_2, x_4\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto de todas as variáveis. Por um lado, quer x_2, quer x_4, têm, em φ, uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$. Como $x_1 \in VAR(t)$, nem x_2, nem x_4 são substituíveis por t em φ. Por outro lado, nenhuma outra variável tem ocorrências livres em φ. Portanto, qualquer outra variável é substituível por t em φ.*

(c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências da variável x_{2011} em t.

R: *A função é definida por recursão estrutural do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rcll} f(x_i) & = & 1 & \textit{se } i = 2011 \\ f(x_i) & = & 0 & \textit{se } i \neq 2011 \\ f(0) & = & 0 & \\ f(\mathsf{s}(t)) & = & f(t) & \textit{para todo } t \in \mathcal{T}_L \\ f(t - t') & = & f(t) + f(t') & \textit{para todo } t, t' \in \mathcal{T}_L \end{array}$$

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{s}}$ e $\overline{-}$ são as operações de *sucessor* e *subtração* em $\mathbb{Z}$, respectivamente, $\overline{\mathsf{P}} = 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par"), e $\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Z}$.

(a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
   (i) $(0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a]$
   (ii) $(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a]$

R: *(i) O valor do L-termo $0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8)$ para a atribuição a é o elemento de $\mathbb{Z}$, o domínio de E, obtido pelos seguintes cálculos recursivos:*

$$\begin{aligned} (0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a] &= 0[a] \mathbin{\overline{-}} \mathsf{s}(x_1 - x_8)[a] \\ &= \overline{0} \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,((x_1 - x_8)[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(x_1[a] \mathbin{\overline{-}} x_8[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(a(x_1) \mathbin{\overline{-}} a(x_8)) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(1 \mathbin{\overline{-}} 8) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(-7) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} (-6) \\ &= 6. \end{aligned}$$

(ii) A L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$ é a conjunção das L-fórmulas $\mathsf{P}(x_2)$ e $\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$. Tem-se portanto que

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\}.$$

Ora, por um lado, $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$ se e só se $(x_2)[a] \in \overline{\mathsf{P}}$, se e só se $2 \in \overline{\mathsf{P}}$. Como, de facto, 2 é um elemento do conjunto $\overline{\mathsf{P}}$, deduz-se que $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$.
Por outro lado,

$$\begin{array}{rll} (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1 & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } (\mathsf{s}(x_1) < 0)[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \mathsf{s}(x_1)[a\binom{x_1}{n_1}] \mathbin{\overline{<}} 0[a\binom{x_1}{n_1}] \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(x_1[a\binom{x_1}{n_1}]) \mathbin{\overline{<}} \overline{0} \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n_1) \mathbin{\overline{<}} 0 \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } n_1 + 1 \mathbin{\overline{<}} 0. \end{array}$$

Dado que esta última afirmação é verdadeira (basta tomar, por exemplo, $n_1 = -2$), conclui-se que $(\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1$.
Pode-se finalmente deduzir que

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

(b) Seja $\varphi = \neg\mathsf{P}(x_0 - x_1) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$. Prove que:
   (i) φ é válida em E;
   (ii) φ não é universalmente válida.

R: *(i) A L-fórmula φ é válida em E, ou seja $E \models \varphi$, se $\varphi[a]_E = 1$ para toda a atribuição a em E. Seja a uma atribuição qualquer em E. Tem-se*

$$\begin{array}{rll} \varphi[a]_E = 1 & \textit{sse} & (\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 0 \textit{ ou } ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 1 \\ & \textit{sse} & \mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_0 < x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_1 < x_0)[a] = 1 \\ & \textit{sse} & (x_0 - x_1)[a] \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } x_0[a] \mathbin{\overline{<}} x_1[a] \textit{ ou } x_1[a] \mathbin{\overline{<}} x_0[a] \\ & \textit{sse} & a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } a(x_0) \mathbin{\overline{<}} a(x_1) \textit{ ou } a(x_1) \mathbin{\overline{<}} a(x_0). \end{array}$$

Suponhamos que $a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \notin \overline{\mathsf{P}}$. Então $a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \neq 0$, donde $a(x_0) \neq a(x_1)$. Daqui resulta que $a(x_0) \mathbin{\overline{<}} a(x_1)$ ou $a(x_1) \mathbin{\overline{<}} a(x_0)$ e, portanto, $\varphi[a]_E = 1$. Como a é uma atribuição arbitrária em E conclui-se assim que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura em tudo idêntica a E salvo em $\overline{<}$ que é definida como sendo a relação de igualdade em $\mathbb{Z}$. Seja a a atribuição da alínea (a).
Tem-se $(\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 1$. De facto $(x_0 - x_1)[a] = -1 \notin \overline{\mathsf{P}}$, donde $\mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 0$.
Verifiquemos, por outro lado, que $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0$. De facto, tem-se

$$\begin{array}{rll} ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0 & \textit{sse} & (x_0 < x_1)[a] = 0 \textit{ e } (x_1 < x_0)[a] = 0 \\ & \textit{sse} & (x_0[a], x_1[a]) \notin \overline{<} \textit{ e } (x_1[a], x_0[a]) \notin \overline{<} \\ & \textit{sse} & (0, 1) \notin \overline{<} \textit{ e } (1, 0) \notin \overline{<} \\ & \textit{sse} & 0 \neq 1 \textit{ e } 1 \neq 0 \end{array}$$

afirmação esta que é, evidentemente, válida. Logo $\varphi[a]_{E'} = 0$ e, portanto, a L-fórmula φ não é válida na L-estrutura E', donde não é universalmente válida.

(c) Indique (justificando) uma L-fórmula universalmente válida.

R: *A fórmula $\psi = \mathsf{P}(x_1) \vee \neg\mathsf{P}(x_1)$ é uma L-fórmula universalmente válida. Para justificar esta afirmação basta notar que ψ é uma instância da fórmula $\varphi = p_0 \vee \neg p_0$ do cálculo proposicional (pois $\psi = \varphi[\mathsf{P}(x_1)/p_0]$) e φ é uma tautologia (como é já sabido).*

(d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
   (i) Todo o número é menor do que algum número par.
   (ii) A diferença de quaisquer dois números pares é par.

R: *(i) $\forall_{x_0}\exists_{x_1}(\mathsf{P}(x_1) \wedge (x_0 < x_1))$.*

(ii) $\forall_{x_0}\forall_{x_1}((\mathsf{P}(x_0) \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_0 - x_1))$.

4. (a) Sejam L, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\exists_x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$.

R: *Sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que*

$$E \models \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a] \qquad (*)$$

Queremos $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.
De $(*)$ segue que existe $d \in D$ tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$ e $E \models \psi[a\binom{x}{d}]$. Mas então podemos trivialmente afirmar
(i) existe $d_1 \in D$ (a saber: $d_1 = d$) tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d_1}a]$;
(ii) existe $d_2 \in D$ (a saber: $d_2 = d$) tal que $E \models \psi[a\binom{x}{d_2}]$.
De (i) segue $E \models \exists_x\varphi[a]$ e de (ii) segue $E \models \exists_x\psi[a]$. Logo $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.

(b) Indique (justificando) L tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x variável tais que $\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)$.

R: *Sejam L o tipo de linguagem da questão 2, $x = x_0$, $\varphi = \mathsf{P}(x_0)$ e $\psi = \neg\mathsf{P}(x_0)$. Vamos exibir uma L-estrutura E e uma atribuição a em E tais que $E \not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a]$. Tome-se E a estrutura da questão 3 e a atribuição arbitrária. Falta ver que:*
(i) $E \models \exists_{x_0}\varphi[a]$;
(ii) $E \models \exists_{x_0}\psi[a]$;
(iii) $E \not\models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$.
(i) Sejam $d' = 2$ e $a' = a\binom{x_0}{d'}$. Então $E \models \varphi[a']$ pois $x_0[a'] = d'$ e $d' \in \overline{\mathsf{P}}$.
(ii) Sejam $d'' = 1$ e $a'' = a\binom{x_0}{d''}$. Então $E \models \psi[a'']$ pois $x_0[a''] = d''$ e $d'' \notin \overline{\mathsf{P}}$.
(iii) $E \models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$ sse existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0[a\binom{x_0}{d}] \in \overline{\mathsf{P}}$ e $x_0[a\binom{x_0}{d}] \notin \overline{\mathsf{P}}$. Mas $x_0[a\binom{x_0}{d}] = d$ e não se pode ter simultaneamente $d \in \overline{\mathsf{P}}$ e $d \notin \overline{\mathsf{P}}$.

(c) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x tais que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que $(\forall_x\varphi) \to \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \to \psi)$. (Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.)

R:

$$\begin{array}{rcll} (\forall_x\varphi) \to \psi & \Leftrightarrow & \neg\forall_x\varphi \vee \psi & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x\neg\varphi \vee \psi & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x\neg\varphi \vee \exists x\psi & (x \notin LIV(\psi)) \\ & \Leftrightarrow & \exists_x(\neg\varphi \vee \psi) & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x(\varphi \to \psi) & \end{array}$$

Cotações	1.	2.	3.	4.
	3+1	1,5+1+1,5	2,5+2+1,5+1,5	1,5+1,5+1,5