Licenciatura em Engenharia Infomática — Universidade do Minho

2011/12

Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Equações Diferencias do tipo $y' = f(x, y)$

1. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem, indicando o intervalo de definição da solução maximal:

   (a) $y' = -2y + 50\, e^{-10x}$ (b) $y' = \dfrac{y}{x} - xe^{x}$

   (c) $y' + \dfrac{3y}{x} + 3x = 2$ (d) $y' - \dfrac{4}{x}y = -\dfrac{2}{x^3}$

   (e) $y' - \dfrac{1}{x}y = -x$ (f) $y' - \dfrac{4}{x}y = x^5 e^{x}$

2. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

   (a) $x^2y' + xy = 1, \quad P = (1, 2)$

   (b) $y' = \cos(x + 1)y, \quad P = (-1, 2)$

   (c) $y' + (1 - 2x)y = x\, e^{-x}, \quad P = (0, 2)$

   (d) $y' + 3t^2y = e^{-t^3+t}, \quad P = (0, 2)$

   (e) $y' - \cos(t)y = t\, e^{t^2+\mathrm{sen}(t)}, \quad P = (0, 2)$

3. Determine as soluções maximais das seguintes equações separáveis:

   (a) $y' = -y^2$

   (b) $y' = y(1 - y)$

   (c) $x - yy' = 0$

   (d) $y' = \sqrt{x}y$

   (e) $y' = 2x^2\mathrm{sen}(x)y$

4. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

   (a) $y' = 6xy, \quad P = (0, -2)$

   (b) $x' = 2\,t\,(1 + x), \quad P = (0, 0)$

   (c) $y' = -4\,e^{y}\cos(t), \quad P = (0, 1)$

   (d) $y' = \cos(x + 1)\,y, \quad P = (-1, 2)$

5. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações separáveis:

   (a) $y' = \cos x\, e^{-y}$

   (b) $y' = \dfrac{x\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}^2 y}$

   (c) $y' = 2\operatorname{sen}(4x)e^{-x}\dfrac{1 + y^2}{4y}$

   (d) $y' = \dfrac{4x}{1 + y^2}$

   (e) $y' = \dfrac{x\cos(2x)}{1 + y}$

6. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações homogéneas:

   (a) $y' = \dfrac{y + t}{t}$ (b) $y' = \dfrac{2y^4 + t^4}{ty^3}$

   (c) $y' = \dfrac{t^2 + y^2}{2ty}$ (d) $y' = \dfrac{3y^2 - t^2}{2ty}$

7. Determine a solução maximal da equação $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ que pasa no ponto $(2, -\sqrt{2})$.

8. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações de Bernouilli:

   (a) $y' + y = y^{-1}$

   (b) $y' + \dfrac{1}{x}y = \log(x)y^2$

   (c) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^3}$

9. Para cada uma das equações, determine a solução maximal da equação que passa no ponto referido:

   (a) $y' + \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x)y^{-2}, \quad P = (\pi/2, 1)$

   (b) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}x^2y^3, \quad P = (1, \frac{1}{2})$

10. Mostre que a mudança de variável dependente $z = y^2 + t$ transforma a equação diferencial

$$y' = \frac{ty^2 + t^2 - 1}{2y}$$

numa equação separável.

11. Considere a equação diferencial $y' = \cos(x + y)$.

   (a) Mostre que a mudança de variável $y = z - x$ transforma a equação dada numa equação separável.
   (Sugestão: recorde que $\cos(x) + 1 = 2\cos^2(\frac{x}{2})$).

   (b) Determine a solução maximal da equação que passa no ponto $(0, \pi/2)$.

12. Considere a equação diferencial $y' - ty = -ty^3$. Determine a solução maximal da equação que passa no ponto $(0, -2)$.
(Sugestão: multiplique a equação por y^{-3} e efetue a mudança de variável $z = y^{-2}$)

13. Encontre expressões gerais para as soluções das seguintes equações:

   (a) $y' - y = e^{3x}$

   (b) $y' = \dfrac{1}{xy^3}$

   (c) $y \operatorname{sen}(x) e^{\cos(x)} + y^{-1}y' = 0$

   (d) $(xy + y^2) - x^2y' = 0$

   (e) $y \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) + x \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) - x \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) y' = 0$