Estatística aplicada

Lino Costa

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia
lac@dps.uminho.pt

Ano letivo 2012/2013

Sumário

1. Testes de hipóteses
    - erros tipo I e tipo II
    - potência de teste
    - região de rejeição (crítica)
2. Testes de hipóteses para a média
3. Testes de hipóteses para a diferença de médias
4. Teste de hipóteses para a proporção binomial (grandes amostras)
5. Teste de hipóteses para a diferença de proporções binomiais
6. Teste de hipóteses para a variância
7. Teste de hipóteses para a razão de variâncias

Formulação de hipóteses

Hipóteses

Uma hipótese é uma afirmação sobre parâmetros de uma ou mais populações em estudo. Há dois tipos de hipóteses:

- **Hipótese Nula** - H_0 estabelece um valor presumido para o parâmetro θ que deve ser considerado a menos que exista evidência contra. H_0 deve especificar um valor exato para θ. (exemplo: $H_0 : \mu = 15$)
- **Hipótese Alternativa** - H_1 estabelece uma condição do parâmetro θ que deve ser concluída se H_0 for rejeitada. Diferentes tipos de H_1 podem ser definidos (de forma análoga aos intervalos de confiança):
  - H_1 bilateral (exemplo: $H_1 : \mu \neq 15$)
  - H_1 unilateral à esquerda (exemplo: $H_1 : \mu < 15$)
  - H_1 unilateral à direita(exemplo: $H_1 : \mu > 15$)

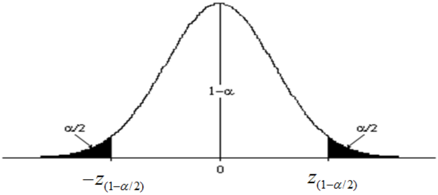
Estatística de teste

Estatística de teste (ET)

Se a distribuição da média uma amostra de tamanho n é normal,$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ i.e., com σ^2 conhecido, então

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

A estatística de teste Z permite testar o parâmetro μ.



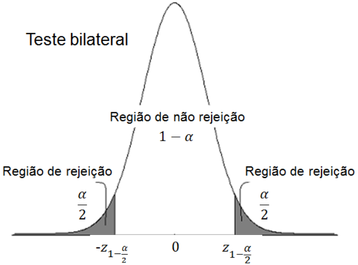
Decisão (bilateral)

Região de rejeição (RR) ou região crítica

São definidas duas regiões para um testar H_0 contra H_1:

- **Região de não rejeição**: região de um teste estatístico que conduz à não rejeição de H_0.
- **Região de rejeição ou região crítica**: região de um teste estatístico que conduz à rejeição de H_0. Os limites da região de rejeição são chamados de valores críticos.

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad ET : Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad RR : |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$



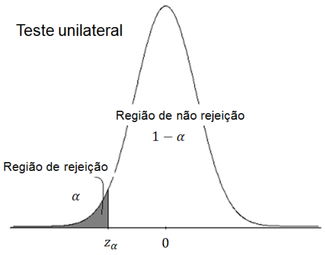
Decisão (unilateral à esquerda)

Região de rejeição (crítica)

São definidas duas regiões para um testar H_0 contra H_1:

- **Região de não rejeição**: região de um teste estatístico que conduz à não rejeição de H_0.
- **Região de rejeição (RR) ou região crítica**: região de um teste estatístico que conduz à rejeição de H_0. O limite da região de rejeição é chamado de valor crítico.

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \qquad ET : Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad RR : Z < z_{(\alpha)}$



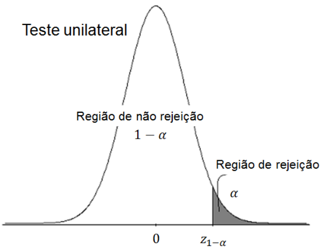
Decisão (unilateral à direita)

Região de rejeição (crítica)

São definidas duas regiões para um testar H_0 contra H_1:

- **Região de não rejeição**: região de um teste estatístico que conduz à não rejeição de H_0.
- **Região de rejeição (RR) ou região crítica**: região de um teste estatístico que conduz à rejeição de H_0. O limite da região de rejeição é chamado de valor crítico.

$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad ET : Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad RR : Z > z_{(1-\alpha)}$



Erros

Erros de decisão

A veracidade ou falsidade de uma hipótese não pode nunca ser conhecida (a não ser que se examinasse toda a população). Logo,um teste de hipóteses, baseado numa amostra aleatória da população, pode conduzir a um dos seguintes erros:

- **Erro tipo I**: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira, i.e., $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 | H_0 \text{verdadeiro})$
- **Erro tipo II**: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa, i.e., $\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar} H_0 | H_0 \text{falso})$

Decisão	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro tipo I (α)	decisão correta
Não rejeitar H_0	decisão correta	Erro tipo II (β)

Nível de significância

A probabilidade de cometer erro tipo I (α) é também chamada de **nível de significância** do teste. Tipicamente, considera-se $\alpha = 5\%$ que torna pouco provável a rejeição de H_0 quando esta é verdadeira.

Potência do teste

Função potência

A função potência de um teste estatístico indica qual a probabilidade de rejeitar H_0 para os diversos valores do parâmetro θ testado:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta) & \text{se } H_0 \text{ verdadeiro} \\ 1 - \beta(\theta) & \text{se } H_1 \text{ verdadeiro} \end{cases}$$

onde $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 | H_0 \text{verdadeiro})$ e
$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar} H_0 | H_0 \text{falso})$.
De notar que quando α aumenta, β diminui (e vice-versa); por outro lado, quando n aumenta, α e β diminuem.

Conclusão forte e fraca

Nos testes de hipótese, fixa-se o nível de significância α e não β, logo

- a rejeição de H_0 é uma conclusão forte pois é realizada para um determinado valor de α
- a não rejeição de H_0 é uma conclusão fraca pois não se pode conhecer o valor de β (pelo que em vez de se dizer "Aceitar H_0", deve dizer-se "Não rejeitar H_0")

Procedimento do teste

Procedimento

1. Definir as hipóteses H_0 e H_1
2. Identificar e determinar o valor da estatística de teste (ET)
3. Definir a região de rejeição (RR) para α
4. Decidir por "Rejeitar H_0" ou "Não rejeitar H_0" para α e concluir

Valor de prova (valor-p)

O valor de prova (valor-p) de um teste estatístico refere-se ao menor valor de significância para o qual resulta a rejeição de H_0. Logo, quanto menor o valor-p, maior a significância estatística do teste. Para tomar a decisão considera-se que se o valor calculado para a estatística de teste (ET)

- pertencer à região de rejeição (RR) então rejeita-se H_0 e, neste caso, o valor-$p \leq \alpha$
- não pertencer à região de rejeição (RR) então não se rejeita H_0 e, neste caso, o valor-$p > \alpha$

Note-se que o valor-p é mais informativo do que apenas dizer se se rejeita ou não H_0 para um determinado valor de α.

Testes de hipóteses

Exemplo 1

Suponha que retirou uma amostra aleatória de 36 sacos de batatas de um supermercado. Os sacos especificam um peso de $15kg$. Estabeleça um intervalo de confiança de 95% supondo que:
(1) A média dos pesos dos sacos foi de $14.96kg$ e o desvio padrão de $0.64kg$.
(2) A média dos pesos dos sacos foi de $14.66kg$ e o desvio padrão de $0.71kg$.
Para cada uma das situações anteriores, poderá afirmar que os sacos estão cheios de acordo com o peso especificado de $15kg$?

- IC para μ com σ desconhecido e $n \geq 30$:
  $\bar{X} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\frac{s}{\sqrt{n}}$
- Como $1-\alpha = 0.95$ então $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$ e $z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = z_{0.975} = 1.96$ (tabela 5)
- **(1)** amostra: $n = 36 \geq 30$, $\bar{X} = 14.96$ e $s = 0.64$
- $14.96 - 1.96\frac{0.64}{\sqrt{36}} < \mu < 14.96 + 1.96\frac{0.64}{\sqrt{36}}$, i.e., $14.96 - 0.21 < \mu < 14.96 + 0.21$
- Como o IC $14.75 < \mu < 15.17$ contém o valor 15, não existe evidência para concluir que os sacos não estejam cheios de acordo com o peso especificado.

- **(2)** amostra: $n = 36 \geq 30$, $\bar{X} = 14.66$ e $s = 0.71$
- $14.66 - 1.96\frac{0.71}{\sqrt{36}} < \mu < 14.66 + 1.96\frac{0.71}{\sqrt{36}}$, i.e., $14.66 - 0.23 < \mu < 14.66 + 0.23$
- Como o IC $14.43 < \mu < 14.89$ não contém o valor 15, existe evidência para concluir que os sacos não estão cheios de acordo com o peso especificado.

Testes de hipóteses

Exemplo 1

Suponha que retirou uma amostra aleatória de 36 sacos de batatas de um supermercado. Para cada uma das situações anteriores (**(1)** e **(2)**), teste se os sacos estão a ser enchidos de acordo com o peso especificado de $15kg$ ($\alpha = 0.05$).

- $H_0 : \mu = 15 \quad H_1 : \mu \neq 15$ (teste bilateral)
- Como σ é desconhecido e $n \geq 30$ então $ET : Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ e $RR : |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ e $z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = z_{0.975} = 1.96$ (tabela 5)
- **(1)** amostra: $n = 36 \geq 30$, $\bar{X} = 14.96$ e $s = 0.64$
- $ET : Z = \frac{14.96-15}{\frac{0.64}{\sqrt{36}}} = -0.38$ e $RR : |Z| > 1.96$
- Como $|-0.38| \leq 1.96$, não se rejeita H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo não existe evidência para concluir que os sacos não estejam cheios de acordo com o peso especificado. (valor-p=$P(|Z| > 0.38) = P(Z < -0.38) + P(Z > 0.38) = 0.7040 > 0.05$)

- **(2)** amostra: $n = 36 \geq 30$, $\bar{X} = 14.66$ e $s = 0.71$
- $ET : Z = \frac{14.66-15}{\frac{0.71}{\sqrt{36}}} = -2.87$ e $RR : |Z| > 1.96$
- Como $|-2.87| > 1.96$, rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo existe evidência para concluir que os sacos não estão cheios de acordo com o peso especificado. (valor-p=$P(|Z| > 2.87) = P(Z < -2.87) + P(Z > 2.87) = 0.0042 \leq 0.05$)

Testes à média

σ^2 conhecido

Teste a μ com base numa amostra de qualquer dimensão n retirada de uma população normal.

Hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Região de rejeição

$$Z < z_{(\alpha)} \qquad |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \qquad Z > z_{(1-\alpha)}$$

Testes à média

σ^2 desconhecido, com $n \geq 30$

Teste a μ com base numa amostra de grande dimensão ($n \geq 30$) retirada de uma população com uma qualquer distribuição (a aproximação $\sigma \approx s$ é válida).

Hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Região de rejeição

$$Z < z_{(\alpha)} \qquad |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \qquad Z > z_{(1-\alpha)}$$

Exemplo 2

Suponha que a Inspecção das Actividades Económicas quer verificar se os sacos de cimento de uma determinada fábrica têm um peso médio de $15kg$. Para tal recolheu uma amostra aleatória de 50 sacos, tendo encontrado uma média de $14.81kg$ com um desvio padrão de $0.62kg$. Permitem os dados concluir que a fábrica está a fornecer sacos com um peso inferior ao especificado? Assuma $\alpha = 0.05$.

- $H_0 : \mu = 15 \quad H_1 : \mu < 15$ (teste unilateral)
- Como σ é desconhecido e $n \geq 30$ então $ET : Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ e $RR : Z < z_{(\alpha)}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $z_{0.05} = -1.65$ (tabela 5)
- amostra: $n = 50 \geq 30$, $\bar{X} = 14.81$ e $s = 0.62$
- $ET : Z = \frac{14.81-15}{\frac{0.62}{\sqrt{50}}} = -2.17$ e $RR : Z < -1.65$
- Como $-2.17 < -1.65$, rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que existe evidência para concluir que os sacos têm, em média, um peso inferior a $15kg$.

Testes à média

σ^2 desconhecido, $n < 30$

Teste a μ com base numa amostra de pequena dimensão $n < 30$ retirada de uma população normal.

Hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Estatística de teste

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Região de rejeição

$$T < -t_{\alpha,n-1} \qquad |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \qquad T > t_{\alpha,n-1}$$

Testes à média

Exemplo 3

Uma máquina produz parafusos com $2.5cm$ de comprimento. No entanto, se os parafusos forem demasiado curtos ou longos, serão rejeitados. Neste caso a máquina necessita de ser ajustada. Para tal, uma amostra de parafusos é recolhida, a intervalos regulares, para verificar se os parafusos estão a ser produzidos com o comprimento médio de $2.5cm$. Suponha que foi recolhida uma amostra de 16 parafusos, com uma média de $2.52cm$ e um desvio padrão de $0.04cm$. Há evidência suficiente para assumir que a máquina não está a produzir segundo a especificação, isto é, que a máquina está fora de controlo? Use $\alpha = 0.01$.

- $H_0 : \mu = 2.5 \quad H_1 : \mu \neq 2.5$ (teste bilateral)
- Como σ é desconhecido e $n = 16 < 30$ então $ET : T = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ e $RR : |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$
- Como $\alpha = 0.01$ então $t_{0.005,15} = 2.947$ (tabela 6)
- amostra: $n = 16 < 30$, $\bar{X} = 2.52$ e $s = 0.04$
- $ET : T = \frac{2.52-2.5}{\frac{0.04}{\sqrt{16}}} = 2.00$ e $RR : |T| > 2.947$
- Como $|2.00| < 2.947$, não se rejeita H_0 para $\alpha = 0.01$ pelo não existe evidência para concluir que os parafusos tenham um comprimento médio diferente de $2.5cm$.

Testes à diferença das médias

Duas amostras independentes, σ_1^2 e σ_2^2 conhecidos

Teste a $\mu_1 - \mu_2$ com base em duas amostras independentes de quaisquer dimensões n_1 e n_2 retiradas de duas populações normais.

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região de rejeição

$$Z < z_{(\alpha)} \qquad |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \qquad Z > z_{(1-\alpha)}$$

Testes à diferença das médias

Duas amostras independentes, σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidos, com $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$

Teste a $\mu_1 - \mu_2$ com base em duas amostras independentes de grande dimensão ($n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$) retiradas de duas populações com quaisquer distribuições (as aproximações $\sigma_1 \approx s_1$ e $\sigma_2 \approx s_2$ são válidas).

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$ $\quad$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$

Estatística de teste

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região de rejeição

$Z < z_{(\alpha)}$ $\quad$ $|Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ $\quad$ $Z > z_{(1-\alpha)}$

Testes à diferença das médias

Exemplo 4

Uma fábrica de calçado possui duas linhas de montagem. O engenheiro de produção pretende testar uma nova organização da sequência das operações de montagem. Para tal, reorganizou a linha 2 e, ao fim de um mês, registou o tempo médio de montagem de um determinado modelo em cada uma das linhas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Linha	n	$\bar{X}$	s
1	36	$10.9min$	$0.5min$
2	40	$10.6min$	$0.4min$

Permitem os dados concluir que a nova organização é mais eficiente? Use $\alpha = 0.01$.

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral)
- Como σ_1 e σ_2 são desconhecidos, $n_1 \geq 30$ $n_2 \geq 30$ então $ET : Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$ e $RR : Z > z_{(1-\alpha)}$
- Como $\alpha = 0.01$ então $Z > z_{0.99} = 2.33$ (tabela 5)
- amostras independentes: $n_1 = 36 \geq 30$, $\bar{X}_1 = 10.9$, $s_1 = 0.5$, $n_2 = 40 \geq 30$, $\bar{X}_2 = 10.6$ e $s_2 = 0.4$
- $ET : Z = \frac{(10.9 - 10.6) - 0}{\sqrt{\frac{0.5^2}{40} + \frac{0.4^2}{36}}} = 2.89$ e $RR : Z > 2.33$
- Como $2.89 > 2.33$, rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.01$ pelo existe evidência para concluir que a nova organização da linha 2 é mais eficiente.

Testes à diferença das médias

Duas amostras independentes, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ desconhecida, $n_1 < 30$ e/ou $n_2 < 30$

Teste a $\mu_1 - \mu_2$ com base em duas amostras independentes de dimensões n_1 e n_2 retiradas de duas populações normais com variância comum.

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$ | $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$ | $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$

Estatística de teste

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Região de rejeição

$T < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ | $|T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ | $T > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$

sendo $s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

Testes à diferença das médias

Exemplo 5

O desgaste da cabeça do fémur conduz à implantação de uma cabeça de substituição numa liga metálica leve e resistente. Para comparar o efeito do uso do tampão na resistência à flexão, foram efetuados vários implantes em animais de laboratório, tendo sido obtidos os seguintes resultados de resistência (Nm):

Com tampão	7.0	6.2	7.1	8.1	5.1	5.6
Sem tampão	8.9	7.7	5.3	8.6	7.1	4.6

O que pode concluir acerca do efeito do tampão na resistência à flexão? ($\alpha = 0.05$).

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral)
- Como σ_1 e σ_2 são desconhecidos, $n_1 < 30$ e $n_2 < 30$ então $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$ e $RR : |T| > t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $|T| > t_{0.025,10} = 2.228$ (tabela 6)
- amostras independentes: $n_1 = 6 < 30$, $\bar{X}_1 = 6.517$, $s_1 = 1.098$, $n_2 = 6 < 30$, $\bar{X}_2 = 7.033$, $s_2 = 1.750$ e $s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(6-1)1.098^2 + (6-1)1.750^2}{6+6-2} = 2.134$
- $ET : T = \frac{(6.157 - 7.033) - 0}{\sqrt{2.134}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}} = -0.612$ e $RR : |T| > 2.228$
- Como $|-0.612| \leq 2.228$, não se rejeita H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que não existe evidência para concluir que exista uma diferença significativa entre as médias da resistência à flexão entre os implantes com e sem tampão.

Testes à diferença das médias

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ desconhecidas, $n_1 < 30$ e/ou $n_2 < 30$

Teste a $\mu_1 - \mu_2$ com base duas amostras independentes de dimensões n_1 e n_2 retiradas de duas populações normais com variâncias diferentes.

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$$

Estatística de teste

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_{gl}$$

Região de rejeição

$$T < -t_{\alpha,gl} \qquad |T| > t_{\frac{\alpha}{2},gl} \qquad T > t_{\alpha,gl}$$

sendo $gl = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}} - 2$

Testes à diferença das médias

Duas amostras emparelhadas, σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas, $n_1 = n_2 = n < 30$

Teste a $\mu_1 - \mu_2$ com base em duas amostras emparelhadas (relacionadas) de dimensões $n_1 = n_2 = n$ retiradas de duas populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2.

Hipóteses

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$$

Estatística de teste

$$T = \frac{\bar{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Região de rejeição

$$T < -t_{\alpha,n-1} \qquad |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \qquad T > t_{\alpha,n-1}$$

sendo $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ para $i = 1, \ldots, n$ e

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \quad \text{e} \quad s_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}$$

Testes à diferença das médias

Exemplo 6

As normas sanitárias para a água de consumo doméstico impõem uma determinada concentração de cloro que é ajustada na central de bombagem. Contudo, é necessário verificar se a concentração se mantém ao longo da rede de distribuição. Em geral, são recolhidas amostras na central de bombagem e na rede em intervalos regulares. Estas amostras não são independentes, na medida em que uma alta concentração na central deverá originar também maiores concentrações na rede. A tabela apresenta as concentrações de cloro na central e num ponto da rede, ao longo de 10 semanas.

Central	2.3	1.9	2.0	1.8	1.8	2.2	2.2	2.1	2.1	1.9
Rede	1.9	2.0	2.0	1.9	1.7	1.7	2.0	2.2	2.0	2.0

Verifique se existem diferenças significativas nas concentrações de cloro nos dois pontos de amostragem ($\alpha = 0.05$). Admita a normalidade.

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral)
- Como σ_1 e σ_2 são desconhecidos, amostras dependentes com $n_1 = n_2 = 10 < 30$ então $T = \frac{\bar{D}-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$ e $RR : |T| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $|T| > t_{0.025,9} = 2.262$ (tabela 6)
- $D_i : 0.4, -0.1, 0.0, -0.1, 0.1, 0.5, 0.2, -0.1, 0.1, -0.1$ e $\bar{D} = 0.09$, $s_D = 0.218$
- $ET : T = T = \frac{0.09-0}{\frac{0.218}{\sqrt{10}}} = 1.306$ e $RR : |T| > 2.262$
- Como $|1.306| \leq 2.262$, não se rejeita H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que não existe evidência para concluir que exista uma diferença significativa entre as concentrações médias de cloro na central e na rede.

Teste à proporção

Teste a p com base numa amostra de grande dimensão ($n \geq 30$) retirada de uma população com uma qualquer distribuição.

Hipóteses

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p < p_0 \qquad H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Região de rejeição

$$Z < z_{(\alpha)} \qquad |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \qquad Z > z_{(1-\alpha)}$$

Teste à proporção

Exemplo 7

Uma empresa de detergentes sabe que aproximadamente 2 em cada 10 clientes potenciais usam o seu produto. Após uma campanha publicitária, 200 consumidores selecionados aleatoriamente foram entrevistados, tendo 53 expresso a sua preferência pela marca. Permitem os dados concluir que houve um aumento da aceitação do produto? Assuma $\alpha = 0.05$.

- $H_0 : p = 0.2 \quad H_1 : p > 0.2$ (teste unilateral)
- $ET : Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ e $RR : Z > z_{(1-\alpha)}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $z_{0.95} = 1.65$ (tabela 5)
- amostra: $\hat{p} = \frac{53}{200} = 0.265$
- $ET : Z = \frac{0.265-0.2}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}}} = 2.30$ e $RR : Z > 1.65$
- Como $2.30 > 1.65$, rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que existe evidência para concluir que a campanha publicitária teve um efeito no aumento dos potenciais consumidores.

Teste à diferença de proporções

Teste a $p_1 - p_2$ com base duas amostras de grande dimensão $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$ retirada de populações com uma qualquer distribuição.

Hipóteses

$$H_0 : p_1 - p_2 = D_0$$

$$H_1 : p_1 - p_2 < D_0 \qquad H_1 : p_1 - p_2 \neq D_0 \qquad H_1 : p_1 - p_2 > D_0$$

Estatística de teste

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Região de rejeição

$$Z < z_{(\alpha)} \qquad |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \qquad Z > z_{(1-\alpha)}$$

onde $\hat{p} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$.

Teste à diferença de proporções

Exemplo 8

As estatísticas sobre a população portuguesa, relativas ao ano 1998, mostram que, na região de Lisboa e Vale do Tejo, o número de nascimentos e o número de óbitos com menos de um ano de idade foram, respetivamente, 37695 e 221; enquanto que, na região Norte, foram 43469 e 279. Verifique se existem diferenças nas taxas de mortalidade infantil (número de óbitos/número de nascimentos) das duas regiões. Assuma $\alpha = 0.05$.

- $H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$ (teste bilateral)
- $ET : Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_2}}}$ e $RR : |Z| > z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $z_{0.975} = 1.96$ (tabela 5)
- amostras: $\hat{p}_1 = \frac{221}{37695} = 0.0059$, $\hat{p}_2 = \frac{279}{43469} = 0.0064$ e $\hat{p} = \frac{221+279}{37695+43469} = 0.0062$
- $ET : Z = \frac{(0.0059 - 0.0064) - 0}{\sqrt{\frac{0.0062(1-0.0062)}{37695} + \frac{0.0062(1-0.0062)}{43469}}} = -0.8333$ e $RR : |Z| > 1.96$
- Como $|-0.8333| \leq 1.96$, não se rejeita H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que existe evidência para concluir que as taxas de mortalidade sejam diferentes.

Teste à variância

Teste a σ^2 com base numa amostra aleatória de tamanho n retirada de uma população normal.

Hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Estatística de teste

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Região de rejeição

$$X^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1} \qquad X^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \text{ ou } X^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \qquad X^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$$

Teste à variância

Exemplo 9

As garrafas de refrigerantes contêm um volume aproximado de 33 cl. O produtor perderá dinheiro se as garrafas contiverem muito mais do que o volume especificado, e correrá o risco de ser multado, se o volume for bastante inferior. Assim, é necessário controlar a variação do volume de enchimento das garrafas. Se a variância for superior a 0.25 o processo está fora de controlo, e a máquina de enchimento deve ser ajustada Para tal, um controlador de qualidade recolhe uma amostra de 15 garrafas, com um enchimento médio de $33.15cl$ e um desvio padrão de $0.71cl$. Face a estes resultados pode-se concluir que o processo está controlado? Assuma $\alpha = 0.05$.

- $H_0 : \sigma^2 = 0.25 \quad H_1 : \sigma^2 > 0.25$ (teste unilateral)
- $ET : X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ e $RR : X^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $\chi^2_{0.05,14} = 23.685$ (tabela 7)
- amostra: $n = 15$ e $s = 0.71$
- $ET : X^2 = \frac{(15-1)0.71^2}{0.25^2} = 28.230$ e $RR : X^2 > 23.685$
- Como $28.630 > 23.685$, rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que existe evidência para afirmar que o processo de enchimento está fora de controlo.

Teste à razão de variâncias

Teste a $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ com base em duas amostras independentes de quaisquer dimensões retiradas de populações normais.

Hipóteses

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \qquad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \qquad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

Estatística de teste

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

Região de rejeição

$F < F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$ $\quad$ $F < F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$ ou $F > F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$ $\quad$ $F > F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$

Teste à razão de variâncias

Exemplo 10

Numa fábrica de cimento, de duas máquinas de enchimento de sacos de 15 kg, foram recolhidas duas amostras de 13 e 9 sacos. Estas amostras apresentaram, respectivamente, os seguintes desvios padrões $0.071kg$ e $0.075kg$. Permitem os dados concluir que a variabilidade da primeira máquina de enchimento é menor? ($\alpha = 0.05$).

- $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ (teste unilateral)
- $ET : F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ e $RR : F < F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$
- Como $\alpha = 0.05$ então $F_{1-0.05,12,8} = \frac{1}{F_{0.05,8,12}} = \frac{1}{2.85} = 0.351$ (tabela 8)
- amostras: $n_1 = 13$ e $s_1 = 0.071$, $n_2 = 9$ e $s_2 = 0.075$
- $ET : F = \dfrac{0.071^2}{0.075^2} = 0.896$ e $RR : F < 0.351$
- Como $0.896 \geq 0.351$, não se rejeita H_0 para $\alpha = 0.05$ pelo que não existe evidência para afirmar que a variabilidade da primeira máquina é menor do que a da segunda.