Universidade do Minho
Escola de Engenharia
Licenciatura em Engenharia Informática

Exercícios de Optimização de Sistemas em Rede

Filipe Pereira e Alvelos
falvelos@dps.uminho.pt
Departamento de Produção e Sistemas
Versão 02, Novembro de 2009

ÍNDICE

1 Política de vacinação

Os responsáveis pela política de vacinas por uma determinada região deparam-se com o problema de minimizar o valor monetário dispendido com a aquisição e transporte das vacinas para os Centros de Saúde onde serão administradas. O número de vacinas necessário em cada um dos 4 Centros de Saúde da referida região é de 20 000, 50 000, 30 000 e 40 000.

Existem três empresas farmacêuticas capazes de fornecer vacinas no prazo estipulado, tendo cada uma feito uma proposta.

A empresa A coloca em cada Centro de Saúde as vacinas que forem precisas a um preço de 0.5€ por vacina.

A empresa B vende cada vacina por 0.2€ mas não se responsabiliza pelo seu transporte para os Centros de Saúde. Esta empresa não assegura mais de 100 000 vacinas. Estima-se o custo de transporte por vacina das instalações da empresa B para cada um dos Centros de Saúde em 0.15€, 0.2€, 0.35€ e 0.4€ (pela ordem em que foram inicialmente referenciados).

A empresa C garante a entrega de, no máximo, 80 000 vacinas apenas Centros de Saúde 1, 2 e 3 e pelos preços de 0.2€, 0.4€ e 0.3€.

Qual a forma mais económica de resolver o problema em causa?

2 Realocação de alunos

Foi decidido que, no próximo ano lectivo, uma determinada escola deveria ser encerrada. Dessa forma, os alunos actualmente a estudar nessa escola, terão de passar a estudar em uma de três outras escolas.

Dado o transtorno provocado, foi decidido que, para os alunos em questão, seria providenciado o transporte entre a sua área de residência e a sua nova escola. Consideraram-se seis áreas de residência.

Na seguinte Tabela apresentam-se alguns dados referentes a esta situação.

Área	Número de alunos	Custo de transporte por estudante (€)		
		Escola 1	Escola 2	Escola 3
1	450	300	0	700
2	600	–	400	500
3	550	600	300	200
4	350	200	500	–
5	500	0	–	400
6	450	500	300	0
Capacidade da escola		900	1100	1000

Qual a forma mais económica de resolver o problema em causa?

3 Algoritmo de transportes

Considere um seguinte problema de transportes com três origens (O1, O2 e O3) e três destinos (D1, D2 e D3). A oferta de cada uma das origens é de 15 unidades e as procuras de cada um dos destinos é de 10 unidades.

Nas duas tabelas seguintes apresentam-se os custos unitários de transporte entre cada origem e cada destino e uma solução admissível para o problema em causa.

Custos unitários	D1	D2	D3
O1	7	4	3
O2	3	1	7
O3	1	6	1

Solução	D1	D2	D3
O1	0	0	5
O2	0	10	0
O3	10	0	5

a) Através do cálculo dos custos reduzidos, mostre que a solução apresentada é óptima.

b) Existem soluções óptimas alternativas? Justifique e, em caso afirmativo, indique uma.

c) Obtenha uma solução óptima, considerando agora que o transporte entre O1 e D3 não é permitido.

4 Tratamento de resíduos sólidos

Uma empresa de valorização e tratamento de resíduos sólidos pretende proceder à recolha de resíduos de três locais (A, B e C) e transportá-los para três estações de tratamento (E1, E2 e E3). As quantidades existentes nos locais são 3, 12 e 20 toneladas, pretendendo-se que a estação E1 receba 13 toneladas, a estação E2 receba 8 toneladas e a estação E3 receba 14 toneladas. Os custos (em Unidades Monetárias por tonelada) de transporte entre cada local e cada estação são dados na tabela seguinte.

	E1	E2	E3
A	1	2	3
B	4	5	6
C	7	10	10

Qual a melhor forma de transportar os resíduos para as estações de tratamento e qual o custo que lhe está associado?

5 Tarefas e máquinas

Considere o problema de seleccionar quais as máquinas que devem executar um conjunto de tarefas. O parque de máquinas é constituído por um total de 15 máquinas, de 3 tipos diferentes. Há 5 máquinas de cada um dos 3 tipos. As tarefas a realizar são de 4 tipos diferentes. É necessário realizar a tarefa 1, uma única vez. A tarefa 2 tem de ser realizada 2 vezes. As tarefas 3 e 4 têm de ser realizadas 6 vezes. Os lucros associados à realização de cada tarefa por cada tipo de máquina são os dados no quadro seguinte.

		Tipo de tarefa			
		1	2	3	4
Tipo de máquina	1	5	3	4	2
	2	9	8	8	4
	3	10	4	8	7

Determine em que máquinas devem ser feitas as tarefas.

6 Produção em fábricas

Uma empresa adquiriu três fábricas (F1, F2 e F3) aptas a iniciar a produção de três novos produtos (P1, P2 e P3). A tabela seguinte indica a capacidade de produção mensal disponível em cada fábrica, a procura mensal de cada produto e os custos unitários (em €) de fabrico de cada produto em cada fábrica.

	P1	P2	P3	Capacidade disponível
F1	6	4	2	10
F2	6	3	4	20
F3	7	10	4	15
Procura a satisfazer	5	18	22	

Uma proposta de distribuição da produção pelas fábricas é a seguinte: 3 unidades do produto 1 são fabricadas em F1 e 2 unidades do mesmo produto são fabricadas em F2; as 18 unidades do produto 2 são fabricadas em F2; 7 unidades do produto 3 são fabricadas em F1 e 15 unidades do mesmo produto são fabricadas em F3.

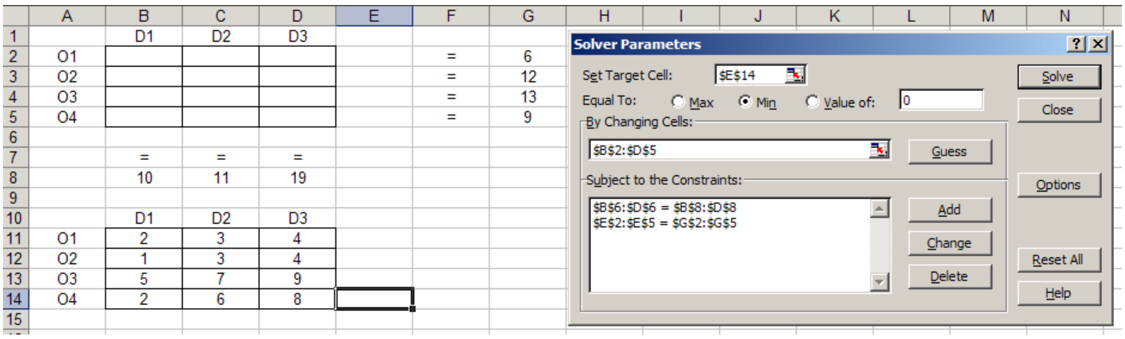
a) Indique o custo dessa proposta.

b) Através de um método adequado, obtenha uma proposta com menor custo.

7 *Solver* do *Excel* + algoritmo de transportes

a)

Na resolução de um modelo de transportes foi utilizado o *Solver* do *Excel*, tal como mostrado na figura. Indique quais as fórmulas que deverão constar nas células referenciadas na caixa de diálogo "*Solver Parameters*".



b)

Obtenha a solução óptima e o seu valor utilizando o algoritmo de transportes. Utilize a seguinte solução inicial: as 6 unidades de O1 são transportadas para D2; as 12 unidades de O2 são transportadas para D3; 1 unidade de O3 é transportada para D1; 5 unidades de O3 são transportadas para D2; 7 unidades de O3 são transportadas para D3 e as 9 unidades de O4 são transportadas para D1.

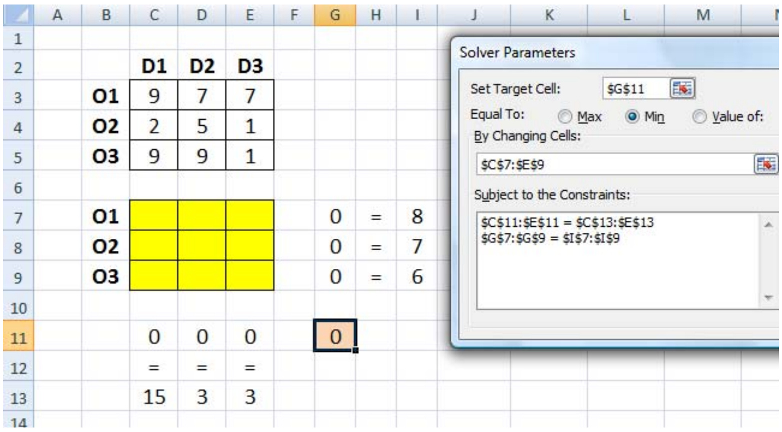
8 *Solver* do *Excel* + programação linear + algoritmo de transportes

Na resolução de um problema de transportes com o *Solver* de uma folha de cálculo, introduziu-se o modelo apresentado na figura seguinte.

a) Qual a fórmula da célula G11?

b) Apresente o modelo de programação linear para este problema.

c) Partindo da solução em que 5 unidades de O1, 4 unidades de O2 e 6 unidades de O3 são enviadas para o destino D1, 3 unidades de O1 são enviadas para D2 e 3 unidades de O2 são enviadas para D3, obtenha uma solução óptima.



9 Operadores e máquinas

Numa determinada fábrica é necessário alocar um e só um operador a cada uma de seis máquinas. Para proceder a essa alocação, foi medida a produtividade (em número de peças por hora) de cada um de seis operadores em cada uma das seis máquinas. Esses valores são dados na Tabela seguinte.

		Operador					
		A	B	C	D	E	F
Máquina	1	20	40	51	21	51	33
	2	65	95	21	88	63	68
	3	66	44	34	75	10	75
	4	31	97	90	48	98	27
	5	64	21	93	96	13	33
	6	89	5	24	9	41	63

Dado que as máquinas funcionam em paralelo, a produtividade total é a soma das produtividades em cada máquina. Determine de que forma devem ser alocados os operadores de forma a que a produtividade seja máxima.

10 Algoritmo húngaro

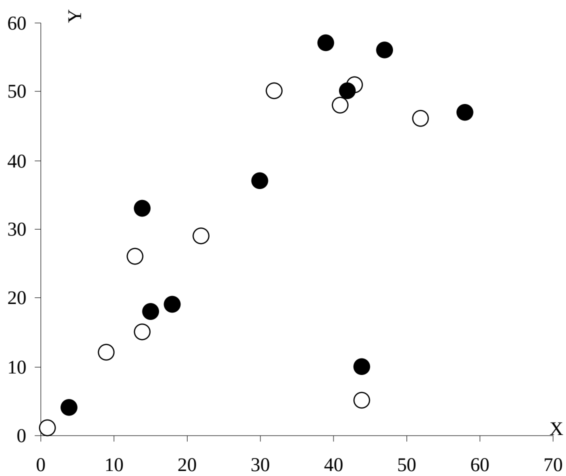
Obtenha a solução óptima do problema de afectação representado no quadro seguinte.

	1	2	3	4
A	8	11	4	3
B	9	3	9	8
C	8	7	3	5
D	8	3	9	2

11 Objectos em movimento

Em vários contextos, pode ser desejável estimar a velocidade e/ou a direcção de um grupo de objectos em movimento (por exemplo, aviões, mísseis, manchas de crude no mar) com base em duas fotografias tiradas em dois momentos consecutivos.

Considere o exemplo com 10 objectos representado na Figura. A posição dos 10 objectos no primeiro momento é representada por um círculo branco e posição dos 10 objectos no segundo momento é representada por um círculo negro.



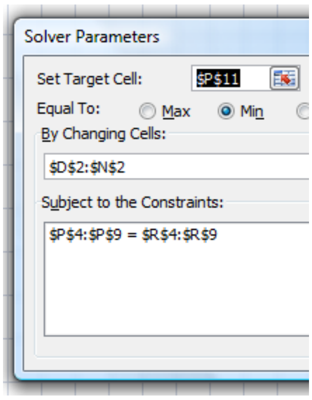
Uma forma de caracterizar o movimento do conjunto de objectos, é estabelecer uma associação entre cada círculo branco e cada círculo negro, de forma a que a distância global seja mínima. Sabendo que as duas fotografias foram tiradas com um segundo de intervalo e que as coordenadas dos objectos, dadas na tabela seguinte, são expressas em metros, estime a velocidade média do conjunto de objectos.

Primeiro momento		Segundo momento	
X	Y	X	Y
1	1	4	4
9	12	14	33
13	26	15	18
14	15	18	19
22	29	30	37
32	50	39	57
41	48	42	50
43	51	44	10
44	5	47	56
52	46	58	47

12 *Solver* do *Excel* + representação em rede

Na obtenção de uma solução óptima para um modelo de optimização foi utilizado o solver do Excel, conforme representado na figura seguinte.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
2				1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0				
4		1		1	1											1	=	1
5		2		-1		1	1	-1								0	=	0
6		3			-1	-1		1	1	1						0	=	0
7		4					-1		-1		1	1	-1			0	=	0
8		5								-1	-1		1	1		0	=	0
9		6										-1		-1		-1	=	-1
11				1	5	3	9	4	6	1	8	4	3	9		12		



a) Represente a rede associada ao problema.

b) Represente, na rede da alínea anterior, a solução óptima.

13 Representação em rede com base em restrições lineares

Represente o modelo de rede associado às restrições de um modelo de Programação Linear apresentadas de seguida.

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2$$
$$-x_{12} + x_{24} = 1$$
$$-x_{13} + x_{35} = 0$$
$$-x_{14} - x_{24} + x_{45} + x_{46} = 0$$
$$-x_{35} - x_{45} + x_{56} = 0$$
$$-x_{46} - x_{56} = -3$$
$$x_{ij} \geq 0, \ \forall ij \in A.$$

14 Fluxo de custo mínimo no *Excel*

Na Figura é apresentado um modelo de Fluxo de Custo Mínimo que foi resolvido no *Solver* do *Excel*.

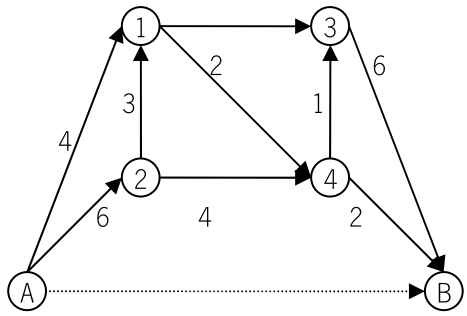
a) Represente o mesmo modelo numa rede.

b) Indique o significado dos valores das células C2:J2 e da célula L11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2			20	0	0	30	0	30	0	25				
4			x12	x13	x14	x23	x25	x34	x35	x45				
5		1	1	1	1							20	=	20
6		2	-1			1	1					10	=	10
7		3		-1		-1		1	1			0	=	0
8		4			-1			-1		1		-5	=	-5
9		5					-1		-1	-1		-25	=	-25
11			4	5	6	7	2	4	6	7		585		

15 Percurso alternativo

Considere a representação de um conjunto de estradas de sentido único da Figura e que, por motivo de obras, se pretende cortar o tráfego na estrada AB, desviando-o para as restantes estradas. Junto a cada arco indica-se o número de veículos que podem atravessar a estrada a ele associada (em centenas de veículos por hora).



Qual o número máximo de veículos que poderão ser desviados por hora?

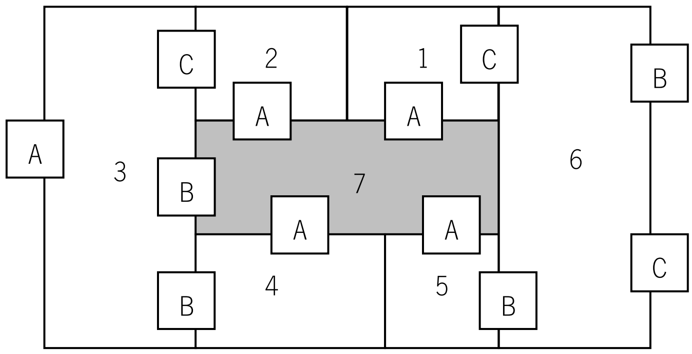
16 Evacuação de edifício

a)

Considere o problema de determinar a taxa de evacuação de uma sala de espectáculos com a configuração representada na Figura, onde a área a evacuar está assinalada a cinzento e com o número 7.

As diferentes portas estão representadas por letras associadas a diferentes capacidades (A – 80 pessoas por minuto; B – 90 pessoas por minuto; C – 100 pessoas por minuto).

Apresente um modelo de fluxo máximo para este problema.

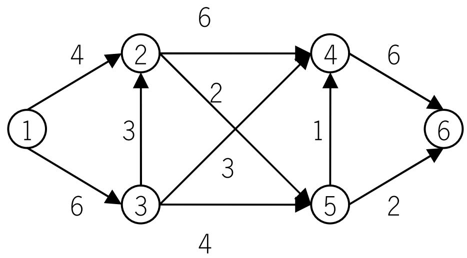


b)

Apresente o modelo geral de Programação Linear para o problema de fluxo de custo mínimo utilizando a seguinte notação: A e N conjunto de arcos e conjunto de nodos, respectivamente; u_{ij} capacidade do arco ij, $\forall ij \in A$; c_{ij} custo unitário do arco ij, $\forall ij \in A$; b_i oferta/procura do nodo i, $\forall i \in N$.

17 Modelo de rede geral

Considere a rede representada de seguida.



a) Determine o caminho mais curto entre 1 e 6, considerando que os valores juntos aos arcos correspondem a distâncias.

b) Determine o fluxo máximo entre 1 e 6, considerando que os valores juntos aos arcos correspondem a capacidades.

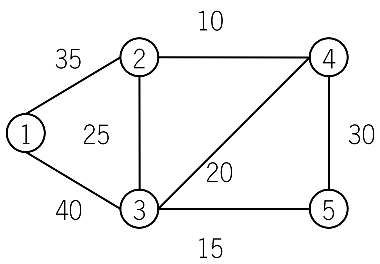
c) Determine o fluxo de custo mínimo, considerando que os valores juntos aos arcos correspondem a custos unitários, que as ofertas dos nodos 1 e 2 são de 10 e 15 unidades, respectivamente e que as procuras dos nodos 4 e 6 são de 12 e 13 unidades, respectivamente.

d) Determine o fluxo de custo mínimo nas circunstâncias da alínea anterior, considerando também que o limite superior de cada arco é de 10 unidades.

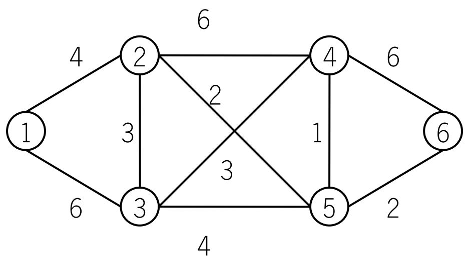
18 Árvore de suporte de custo mínimo

Utilizando o algoritmo de Kruskal, determine uma árvore de suporte de custo mínimo das seguintes redes.

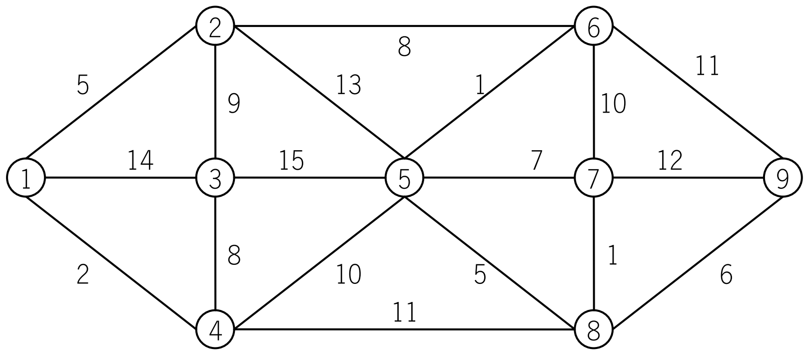
a)



b)



c)



19 Sequenciamento

a)

Considere o problema de determinar a ordem pela qual um conjunto de seis tarefas (A, B, C, D, E e F) deve ser executado numa máquina. O tempo de execução de cada tarefa na máquina é independente da ordem pela qual as tarefas são realizadas. No entanto, o tempo de preparação da máquina para a realização de cada tarefa depende da tarefa que foi realizada imediatamente antes.

Na tabela seguinte são dados os tempos de execução e os tempos de preparação (em minutos) de cada tarefa. Por exemplo, a tarefa A demora 3 minutos a ser preparada se a tarefa anterior foi a B, a tarefa A demora 2 minutos a ser preparada se a tarefa anterior foi a C, e assim sucessivamente. Ainda por exemplo, a tarefa A demora 14 minutos a ser executada.

		Tarefa seguinte					
		A	B	C	D	E	F
Tarefa anterior	A	–	7	5	6	4	8
	B	3	–	4	6	7	8
	C	2	7	–	3	7	1
	D	3	2	8	–	2	9
	E	4	4	3	1	–	3
	F	7	4	2	2	4	–
	Tempo de execução	14	25	19	18	13	21

Dado que o processo produtivo é contínuo, no final da execução da última tarefa é de novo executada a primeira tarefa e a sequência repete-se.

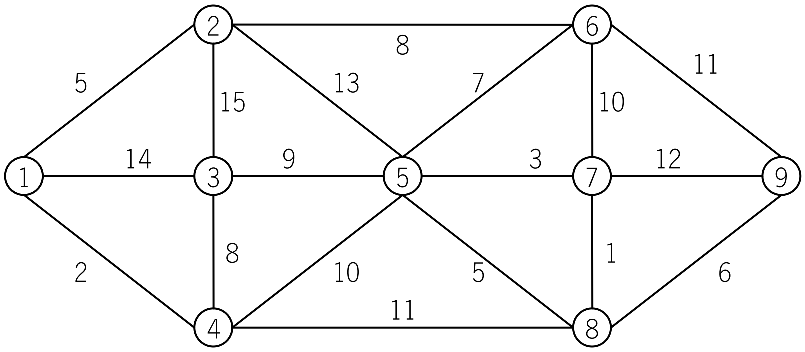
Apresente um modelo de rede que tenha como objectivo minimizar o tempo em que a máquina está a ser preparada.

b)

Considere agora o mesmo problema mas de forma geral. Pretende-se determinar a ordem pela qual um determinado conjunto de n tarefas deve ser realizado numa determinada máquina. O tempo de processamento de cada tarefa é independente da ordem pela qual as tarefas são realizadas. No entanto, o tempo de preparação da máquina (*setup*) para a realização de cada tarefa j, depende de qual a tarefa i que foi realizada anteriormente, representando-se esse valor por t_{ij}, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n$, $i \neq j$. Dado o processo produtivo ser contínuo no final do processamento da última tarefa, é de novo iniciado o processamento da primeira. Apresente um modelo de rede para este problema.

20 Caixeiro viajante 1

Obtenha uma solução para o problema do caixeiro viajante representado na Figura seguinte, utilizando o algoritmo do vizinho mais próximo com início no nodo 1.



21 Caixeiro viajante 2

Considere o problema do caixeiro viajante com os custos dados na tabela que se segue. Por exemplo, o custo de viajar entre 3 e 4 é de 19 e o custo de viajar entre 4 e 3 é de 14. Determine as soluções que se obtêm iniciando o algoritmo do vizinho mais próximo em cada uma das 6 cidades.

	1	2	3	4	5	6
1	–	14	17	12	11	19
2	10	–	20	21	15	13
3	13	17	–	19	12	11
4	12	13	14	–	10	18
5	18	12	17	26	–	19
6	16	21	22	21	15	–

22 Fibra óptica

Uma empresa de telecomunicações pretende instalar uma rede de cabos de fibra óptica numa região. Na tabela são dados os custos de instalação de um cabo entre cada par de nodos. Pretende-se que todos os nodos possam comunicar entre si (eventualmente utilizando nodos intermédios) com o menor custo possível.

Refira um método adequado para a resolução deste problema. Aplique-o na obtenção de uma solução.

	A	B	C	D	E	F	G
A	–	50	80	40	100	90	20
B		–	120	120	110	90	100
C			–	90	30	90	150
D				–	120	20	100
E					–	100	130
F						–	10
G							–

23 *Campus* Universitário

Um determinado *Campus* Universitário é constituído por sete edifícios entre os quais existem diversos caminhos pedonais. Tendo em vista ser possível ir de um qualquer edifício para qualquer outro sempre por caminhos cobertos, foi tomada a decisão de construir coberturas em alguns desses caminhos.

Dados os elevados custos de construção, foi estipulado que o comprimento total de caminho coberto deveria ser o menor possível.

Na tabela seguinte são dados os comprimentos (em metros) dos diversos caminhos existentes entre os vários edifícios. O sinal "–" indica que não há um caminho directo entre os dois edifícios em causa. Por exemplo, o comprimento do caminho entre o edifício A e o edifício B é de 100 metros.

	A	B	C	D	E	F	G
A	–	100	200	300	–	–	–
B	100	–	160	–	210	–	–
C	200	160	–	90	150	120	–
D	300	–	90	–	–	130	–
E	–	210	150	–	–	–	350
F	–	–	120	130	–	–	100
G	–	–	–	–	350	100	–

a) Quais os caminhos que devem ser cobertos e qual o comprimento total?

b) Considere agora que uma pessoa pretende visitar cada um dos sete edifícios uma e uma só vez e regressar ao edifício de onde partiu.

i) Aplique a heurística do vizinho mais próximo tendo como edifício inicial o edifício A.

ii) Repita a mesma heurística mas iniciando-a em C. Tem a garantia de que a solução que obteve é a melhor solução possível? Justifique sucintamente.

24 Rede de computadores

Na instalação de uma rede com sete computadores pretende-se gastar o menor comprimento de cabo que seja possível, assegurando que todos os computadores podem comunicar entre eles. As distâncias (em metros) entre os locais onde estão os computadores são as dadas na tabela. O sinal "–" indica que não é possível a ligação directa entre os dois computadores em causa. Por exemplo, o comprimento do cabo entre o computador A e o computador B é de 60 metros.

	A	B	C	D	E	F	G
A	–	60	160	260	–	–	–
B	60	–	120	–	170	–	–
C	160	120	–	50	110	80	–
D	260	–	50	–	–	90	–
E	–	170	110	–	–	–	310
F	–	–	80	90	–	–	60
G	–	–	–	–	310	60	–

Como devem ser efectuadas as ligações entre os computadores?