Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Exame :: 22 de junho de 2016

Nome $\square$ Número $\square$

As respostas aos Exercícios 1, 2, 10 e 11 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 1. [2,5 valores] Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ e } x \neq 0\}$. Complete os espaços identificados com $\square$ de modo a obter proposições verdadeiras:

a) $(0, 0)$ $\square$ $\bar{A}$; *c)* $(1, 1)$ $\square$ $\mathring{A}$;

b) $(0, \sqrt{2})$ $\square$ $A \cap \bar{A}$; *d)* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\} \cup$ $\square$ é a fronteira de A.

Exercício 2. [3,5 valores] Considere a função definida por $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

a) Identifique qual das superfícies representadas poderá corresponder à representação gráfica de f.

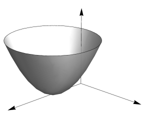


Figura 1

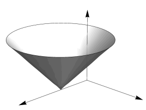


Figura 2

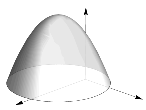


Figura 3

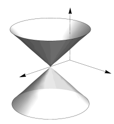
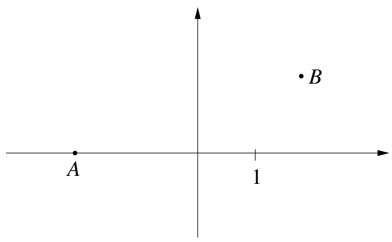


Figura 4

b) Esboce, na figura ao lado, possíveis representantes dos vetores gradiente de f nos pontos A e B.



Exercício 3. [4 valores] Calcule, ou justifique que não existe:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2-1)}{(x-1)^2 + y^2}$; *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y(x^2-1)}{(x-1)^2 + y^2}$.

Exercício 4. [6 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

b) Calcule, caso existam, $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

c) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.

d) Calcule, caso existam, $f_x(0, 1)$ e $f_y(0, 1)$.

e) Justifique que f é derivável em $(0, 1)$ e identifique $Df(0, 1)$.

Exercício 5. [4 valores] Considere a função definida por $\boldsymbol{f}(x, y) = \left(y \ln x, \sqrt{4 - y^2}, x^2 y\right)$.

a) Determine o domínio de $\boldsymbol{f}$.

b) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ no ponto $(1, 1)$.

Exercício 6. [3 valores] Considere o elipsóide $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + z^2 = 8\}$.

a) Determine a equação do plano tangente a $\mathcal{E}$ no ponto $(1, 1, 2)$;

b) Determine um ponto de $\mathcal{E}$, diferente de $(1, 1, 2)$, onde o plano tangente a $\mathcal{E}$ é paralelo ao plano obtido na alínea anterior.

Exercício 7. [4 valores] Determine os máximos e os mínimos locais da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

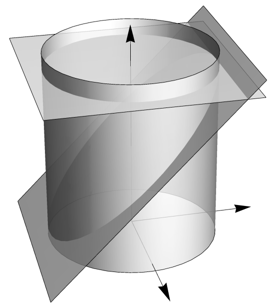
Exercício 8. [4 valores] Calcule o integral duplo

$$\iint_{\mathcal{D}} 2xy \, d(x, y),$$

onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2 \text{ e } x \leq 2y \leq 4x\}$.

Exercício 9. [4 valores] Calcule o integral $\displaystyle\iiint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) \, d(x, y, z)$, onde

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y + 1 \leq z \leq 2\}.$$



Exercício 10. [3 valores] Considere o conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x + 2y \leq 2 \text{ e } 1 - 2y \leq y \leq x + 2\}$.
Usando a mudança de variável

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = y - x \end{cases},$$

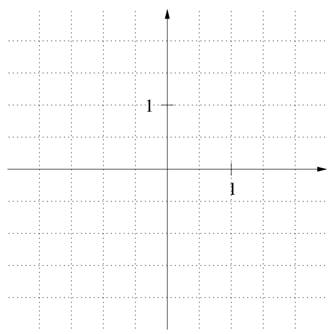
preencha os espaços identificados com $\square$ de modo a que

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \square \, dvdu.$$

Exercício 11. [2 valores] Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ e

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sendo $f(1, 0) = 4$ e $f(0, 1) = 2$, respetivamente o máximo e o mínimo de $f_{|\mathcal{S}}$, faça um possível esboço das curvas de nível 1, 2, 3, 4 e 5 de f. Justifique a sua resposta.



Assinale a modalidade de exame que está a realizar e identifique os exercícios a que deve responder:

☐ **Parte 1 – Exercícios 1, 2, 3, 4 e 5**
☐ **Parte 2 – Exercícios 6, 7, 8, 9, 10 e 11**
☐ **Exame global – Exercícios 3, 4, 7, 9, e 11**