



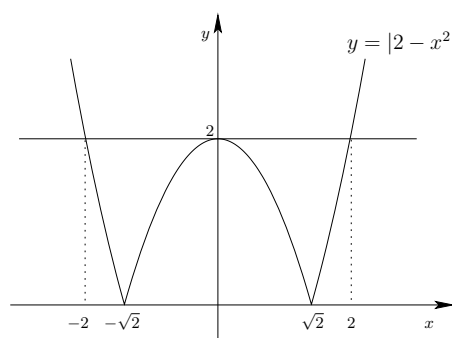
Nome

Número

As respostas aos exercícios 1 e 6 são dadas na folha do enunciado.

Exercício 1. [2,5 valores] Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |2 - x^2| < 2\}$.

- a) A figura anexa permite identificar os elementos do conjunto A ; descreva a forma como essa identificação é possível a partir da figura e assinale, sobre o eixo das abcissas, os elementos que pertencem ao conjunto A .



- b) Represente o conjunto A como um intervalo ou união de intervalos, resolvendo analiticamente a inequação $|2 - x^2| < 2$.

Exercício 2. [3 valores] Considere o conjunto $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup ([2, e] \cap \mathbb{Q})$.

- a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo de A .
b) Calcule \bar{A} , $\overset{\circ}{A}$, A' e ∂A .

Exercício 3. [1,5 valores] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{x+1}{x}$.

Exercício 4. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$.

- a) Calcule a derivada da função f .
b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.
c) Indique uma função derivável $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja um prolongamento de f .

Exercício 5. [4 valores] Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \operatorname{sh} \sqrt{x}$.

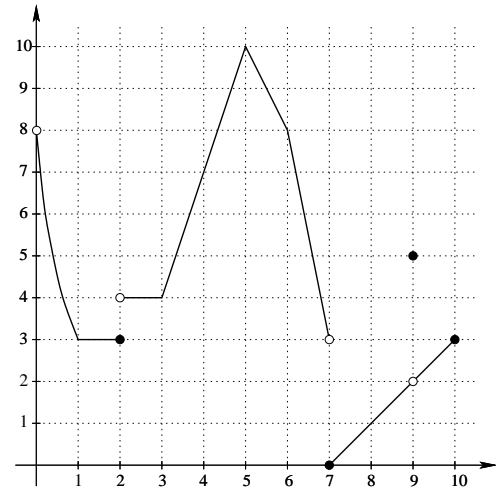
- Calcule a derivada de f .
- Mostre que $f^{-1}(x) = \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- Calcule a derivada da função inversa de f .

Exercício 6. [5 valores] Considere a função $f :]0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa.

a) Indique o contradomínio de f .

b) Determine $f^{-1}([1, 3])$.

c) Diga se a função f é injetiva.



d) Indique os pontos de mínimo local estrito de f , mencionando os respectivos mínimos locais.

e) Indique os pontos de máximo local de f .

f) Escolha um valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |f(x) - 10| < 1.$$

g) Indique os pontos onde f é descontínua.

h) Indique o valor de $f'(4)$.

i) Indique o conjunto dos pontos onde a função f é derivável.

j) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{x})$.