Universidade do Minho | Engenharia Informática

Departamento de Matemática

Tópicos de Matemática Discreta

Exame – Época Normal [1^a chamada] —— 10.jan'07 [resolução]

1. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

   (a) Se o valor lógico da fórmula proposicional $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big(\neg(p \wedge r) \Rightarrow q\big)$ é o de falsidade então a proposição p é verdadeira.

   Falsa: No caso em que p é F, q é F e r é V, temos que a fórmula dada é, também, falsa. Portanto, o facto da fórmula proposicional $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big(\neg(p \wedge r) \Rightarrow q\big)$ ser falsa não implica que a proposição p seja verdadeira.

   (b) Existe um conjunto A tal que $\mathcal{P}(A) \cup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Verdadeira: Consideremos $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Como $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, segue-se que $\mathcal{P}(A) \cup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   (c) Dada a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x^2 - x + 6$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $g(\{-2, 2, 4\}) = \{-14, 0, 4\}$ e $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) =]-3, 2[$.

   Falsa: Facilmente se verifica que as raízes de $g(x) = -x^2 - x + 6$ são -3 e 2. Sendo o coeficiente de x^2 negativo, sabemos que $g(x) < 0$ se e só se $x < -3$ ou $x > 2$. Portanto, $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) \in \mathbb{R}^-\} =]-\infty, 3[\cup]2, +\infty[$.

   (d) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2|x|$, para todo o real x, é injectiva ou é sobrejectiva.

   Falsa: f não é injectiva porque, por exemplo, $f(1) = f(-1)$ e tão pouco é sobrejectiva pois -2 é um elemento do conjunto de chegada mas não é imagem, por f, de nenhum elemento do domínio.

2. Construa uma prova para cada uma das seguintes afirmações:

   (a) Se A, B e C são conjuntos tais que $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$.

   Temos dois casos possíveis: 1^o : $A \subseteq C$; 2^o : $B \subseteq C$. No 1^o caso, temos então que $A \cap B \subseteq A \subseteq C$ e no 2^o temos que $A \cap B \subseteq B \subseteq C$. Em qualquer um dos casos podemos concluir que $A \cap B \subseteq C$.

   (b) Para todo o natural $n \geq 4$, $n^2 > 3n + 3$.

   Seja $p(n)$ o predicado $n^2 > 3n + 3$ sobre os naturais. Mostremos que $p(n)$ é uma proposição verdadeira para cada $n \geq 4$.

   [i] Para $n = 4$, temos que $n^2 = 16 > 15 = 3n + 3$. Logo, $p(4)$ é uma proposição verdadeira.

   [ii] Seja $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, tal que $p(k)$ é verdadeira. Então, $k^2 > 3k + 3$. Mostremos que $p(k + 1)$ também é verdadeira, ou seja, que $(k + 1)^2 > 3k + 6$:

   $$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 3k + 3 + 2k + 1,$$

   pela hipótese de indução; como $2k + 1 > 3$, segue-se que

   $$(k + 1)^2 > 3k + 3 + 2k + 1 > 3k + 3 + 3 = 3k + 6.$$

   Por [i] e [ii], pelo Princípio de Indução em $\mathbb{N}$ de base 4, podemos concluir que $n^2 > 3n+3$, para todo o natural $n \geq 4$.

(c) $\exists_{k\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \big(n \geq k \Rightarrow n^2 > 3n+3\big)$.

Basta considerar $k=4$. De facto, atendendo à alínea anterior, sabemos que $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \big(n \geq 4 \Rightarrow n^2 > 3n+3\big)$ é verdadeira.

3. Considere o conjunto $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, as relações binárias $S=\{(1,1),(2,3),(4,6),(6,4)\}$ e $T=\{(1,5),(2,3),(3,5),(5,4)\}$ em A e a partição $\Pi=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6\}\}$ de A.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de $T\circ S$.

$T\circ S=\{(1,5),(2,5)\}$. Logo, $dom(T\circ S)=\{1,2\}$ e $contradom(T\circ S)=\{5\}$.

(b) Diga, justificando, se a relação S é reflexiva, se é simétrica, se é anti-simétrica e se é transitiva.

S não é reflexiva pois $(2,2)\notin S$. S não é simétrica uma vez que $(2,3)\in S$, mas $(3,2)\notin S$. S não é anti-simétrica porque $(4,6),(6,4)\in S$ e $4\neq 6$. S não é transitiva pois $(4,6),(6,4)\in S$, mas $(4,4)\notin S$.

(c) Determine a menor relação de ordem parcial em A que contém T.

Tal relação U tem de ser a menor relação que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva que contenha T. Logo,

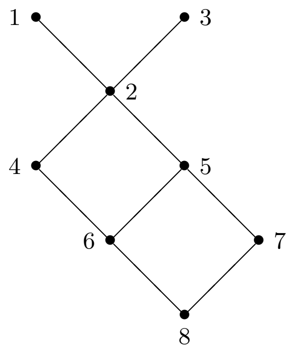
$$U=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,5),(2,3),(3,5),(5,4),(1,4),(2,5),(3,4),(2,4)\}.$$

(d) Seja R a relação de equivalência associada a Π, definida em A. Indique três elementos x, y e z de A cujas classes de equivalência $[x]_R$, $[y]_R$ e $[z]_R$ sejam distintas.

Por exemplo, $x=1$, $y=3$ e $z=5$.

4. Sejam $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{4,5,6,7\}$ e $B=\{1,2,4,7\}$.

(a) Considere o c.p.o. $(X,\leq)$ definido pelo diagrama de Hasse ao lado.



i. Indique, referindo a definição, os elementos minimais e maximais de X.

Os elementos minimais são os elementos a de X tais que não existe $x\in X$ tal que $x<a$ [não existem elementos menores que a]. Os elementos maximais são os elementos b de X tais que não existe $x\in X$ tal que $x>b$ [não existem elementos maiores que b]. Assim, os elementos maximais de X são o 1 e o 3. O 8 é o único elemento minimal de X.

ii. Indique, referindo a definição, os majorantes e os minorantes de A e de B. Determine o supremo e ínfimo de A e de B.

Dado um subconjunto C de X, $x\in X$ é um majorante de C se $x\geq c$ para todo o elemento c de C, e $y\in X$ é um minorante de C se $y\leq c$ para todo o elemento c de C. Assim, os majorantes de A são $1,2,3$ e o único minorante de A é o 8. Relativamente a B, o seu único majorante é o 1 e o único minorante é o 8. O supremo de A é o 2, o ínfimo de A é o 8, o supremo de B é o 1 e o ínfimo de B é o 8.

(b) O diagrama em cima representa um grafo G com X como conjunto dos vértices (i.e., $\mathcal{V}(G)=X$).

i. Indique um caminho simples que não seja caminho elementar de 1 para 3.

Tal caminho deve ter vértices repetidos [para não ser elementar], mas não pode ter arestas repetidas [para ser simples]. Temos, por exemplo, o caminho 1256423

ii. O grafo G é uma árvore? Justifique a sua resposta.
Para ser uma árvore teríamos de ter o número de vértices (v) igual ao número de arestas (a) adicionado de uma unidade, ou seja, $v = a + 1$. Como $v = 8$ e $a = 9$, é óbvio que $v \neq a + 1$ e o grafo não é uma árvore.

Cotação:
1. $\sim (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5)$; 2. $\sim (1,5 + 2 + 1)$; 3. $\sim (1,5 + 2 + 1 + 1)$; 4. $\sim (1 + 1,5 + 1 + 0,5)$