introdução aos sistemas dinâmicos

iteração de funções — parte dois

1.

Considere o sistema dinâmico discreto $\mathcal{S}$ definido no intervalo $[0, 1]$, dado por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2\,; \\ 2\,x - 1 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

1.1 Mostre que, para todo $x \in [0,\, 1)$, aplicar S a x corresponde a deslocar para a esquerda a representação binária de x (daí que este sistema dinâmico seja habitualmente designado por deslocamento).

1.2 Determine os pontos fixos e os pontos periódicos, de período 2, de $\mathcal{S}$.

1.3 Determine os pontos periódicos de período 6 de $\mathcal{S}$.

1.4 Dê um exemplo de um ponto $x_o \in [0,\, 1)$ que não seja nem ponto fixo, nem ponto periódico de f.

2.

Chama-se aplicação tenda ao sistema dinâmico discreto $\mathcal{T} : [0, 1] \to [0, 1]$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2\,; \\ 2 - 2\,x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

2.1 Determine os pontos fixos e os pontos periódicos, de período 2, de $\mathcal{T}$.

2.2 Seja $x = k/p$ pertencente ao intervalo $(0, 1)$, com p um número ímpar. Mostre que x é um ponto periódico de $\mathcal{T}$ se e somente se k é um número par.

2.3 Seja $x = k/p$ pertencente ao intervalo $(0, 1)$, com p um número par. Mostre que x não é um ponto periódico de $\mathcal{T}$.

2.4 Mostre que $x \in (0, 1)$ é um ponto fixo, eventualmente fixo, periódico ou eventualmente periódico de $\mathcal{T}$ se e somente se x é um número racional.

3.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definido por $f(x) = 2x(1 - x)$. Use o Teorema de Sharkovsky para mostrar que f tem apenas pontos fixos (isto é, que f não admite quaisquer pontos periódicos).

4.

Use o Teorema de Sharkovsky para mostrar que o sistema dinâmico discreto aplicação tenda $\mathcal{T} : [0, 1] \to [0, 1]$ admite pontos fixos e pontos periódicos de qualquer período.