



### Folha 9 - Séries de potências

Exercício 1 Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências seguintes.

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^n;$

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!};$

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n;$

d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1};$

e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2};$

f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! x^n}{2^n};$

g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!};$

h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (x-1)^n;$

i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (x-1)^n;$

j)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3} (x-2)^n.$

Exercício 2 Determine o polinómio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  apresentada a seguir, em torno do ponto  $a$  indicado:

a)  $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}, n = 50, a = 0;$

b)  $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}, n = 7, a = 0;$

c)  $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}, n = 8, a = 0;$

d)  $f(x) = \ln x, x \in \mathbb{R}^+, n = 5, a = 1.$

Exercício 3 Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 6 em torno de 0 (polinómio de MacLaurin) é

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6.$$

Determine  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$ ,  $f^{(4)}(0)$ ,  $f^{(5)}(0)$  e  $f^{(6)}(0)$ .

Exercício 4 Sejam  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Sabendo que  $P(x) = 2x + 1$  coincide simultaneamente com o polinómio de Taylor de primeira ordem de  $f$  em torno do ponto 0 (polinómio de MacLaurin) e com o polinómio de Taylor de segunda ordem de  $g$  em torno do ponto 1, determine  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g'(1)$  e  $g''(1)$ .

Exercício 5 Seja  $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$  o polinómio de Taylor de terceira ordem em torno do ponto 1 de  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Determine o correspondente polinómio de Taylor de segunda ordem.

Exercício 6 Seja  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $f(3) = 1$ ,  $f'(3) = -2$ ,  $f''(3) = 3$  e  $f'''(3) = -5$ . Determine os polinómios de Taylor de ordens 2 e 3 da função  $f$  em torno do ponto 3. Use os dois polinómios para aproximar o valor de  $f(2.9)$ .

Exercício 7 Escreva o polinómio  $x^3 - 15x^2 + 75x - 120$  em potências de  $x - 5$ .

Exercício 8 Determine o polinómio do terceiro grau cujas derivadas de ordens 0, 1, 2 e 3 no ponto 3 são todas iguais a 3.

Exercício 9 Apresente uma estimativa para o erro cometido ao usar o polinómio  $P_{7,0}(x)$  para aproximar o valor de  $\sin x$  no intervalo  $]0, \frac{\pi}{4}[$ .

Exercício 10 Determine a série de Taylor da função  $f$  apresentada a seguir, em torno do ponto  $a$  indicado:

a)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a = 0$ ;

b)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $a = 0$ ;

c)  $f(x) = xe^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a = 0$ ;

d)  $f(x) = \cosh x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a = 0$ ;

e)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $a = 3$ ;

f)  $f(x) = \ln x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $a = 1$ ;

g)  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ .

Exercício 11 Verifique que para  $x \in \mathbb{R}$  se tem

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercício 12 Verifique que para  $-1 < x < 1$  se tem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$