4 Funções

Definição 4.1. *Sejam A e B conjuntos. Uma* **função** *(ou* **aplicação***) de A em B é uma correspondência de A para B que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B.*

Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B. Para cada $a \in A$, o único elemento b de B que f faz corresponder ao elemento a representa-se por $f(a)$; a este elemento dá-se a designação de **imagem de a por f**. Pode, então, escrever-se

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Em $f : A \to B$, chamamos:

- **domínio** ou **conjunto de partida** de f ao conjunto A;
- **conjunto de chegada** de f ao conjunto B;

Definição 4.2. *Sejam A, B conjuntos.*

- *Uma função $f : A \to B$ diz-se uma* **função constante** *se existe $b \in B$ tal que, para todo $a \in A$, $f(a) = b$.*
- *Designa-se por* **função identidade de A**, *e representa-se por id_A, a função de A em A que a cada $a \in A$ faz corresponder a; i.e.,*

$$\begin{array}{rccl} id_A: & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a. \end{array}$$

Definição 4.3. *Dados conjuntos A, B, A', B' e funções $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, dizemos que as* **funções f e g são iguais** *se*

(i) $A = A'$, $B = B'$ *e*

(ii) para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Definição 4.4. *Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Designamos por*

- **imagem de f** *o conjunto das imagens por f de todos os elementos de A:*
$$\text{Im} f = \{f(x) : x \in A\}.$$
- **imagem de X por f** *o conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.*
- **imagem inversa** *(ou* **pré-imagem**) **de Y por f** *o conjunto*
$$f^{\leftarrow}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Proposição 4.5. *Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Então:*

1. $f(\emptyset) = \emptyset$;
2. $f(A) \subseteq B$;
3. *se* $A_1 \subseteq A_2$, *então* $f(A_1) \subseteq f(A_2)$;
4. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
5. $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$;
6. $f^{\leftarrow}(B) = A$;
7. *se* $B_1 \subseteq B_2$, *então* $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$;
8. $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$;
9. $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$;

Proposição 4.6. *Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$.*

1. $A' \subseteq f^{\leftarrow}(f(A'))$;
2. $f(f^{\leftarrow}(B')) = \text{Im} f \cap B'$;

Proposição 4.7. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então a correspondência de A para C que a cada elemento a de A faz corresponder o elemento $g(f(a))$ de C é uma função de A em C.*

Definição 4.8. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Designa-se por* **função composta de g com f**, *e representa-se por $g \circ f$, a função de A em C que a cada elemento a de A faz corresponder o elemento $g(f(a))$ de C, ou seja, $g \circ f$ é a função*

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & A & \to & C \\ & a & \mapsto & g(f(a)). \end{array}$$

Proposição 4.9. *Sejam A, B, C, D conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Proposição 4.10. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então $f \circ id_A = f$ e $id_B \circ f = f$.*

Definição 4.11. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que a função f é*

- **injetiva** *se*

$$\forall a, b, \in A \;\; (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$$

  ou equivalentemente, se

$$\forall a, b \in A \;\; (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b).$$

- **sobrejetiva** *se*

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \;\; f(a) = b$$

  ou equivalentemente se

$$f(A) = B.$$

- **bijetiva** *se f é injetiva e sobrejetiva, i.e., se*

$$\forall b \in B \; \exists^1 a \in A \;\; f(a) = b.$$

Proposição 4.12. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções.*

1. *Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.*
2. *Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.*
3. *Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.*

Teorema 4.13. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então f é bijetiva se e só se existe uma única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.*

Definição 4.14. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetiva. À única função $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$ chamamos* **função inversa de f**. *Escrevemos $g = f^{-1}$ e dizemos que f* **é invertível**.

Proposição 4.15. *Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções bijetivas. Então:*

1. $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.