Noções elementares de lógica

1. Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:
   (a) "A Terra é redonda."
   (b) "Hoje está sol."
   (c) "$2 + x = 3$ e 2 é par."
   (d) "$(25 \times 2) + 7$"
   (e) "2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4."
   (f) "Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?"
   (g) "$4 < 3$."
   (h) "Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$."
   (i) "A U.M. é a melhor academia do país."

2. Sejam p : "Eu gosto de leite.", q : "Eu não gosto de cereais." e r : "Eu sei fazer crepes.". Traduza as seguintes proposições em palavras:

(a) $p \wedge q$	(c) $\neg r$	(e) $\neg p \vee \neg q$	(g) $(r \wedge p) \vee q$
(b) $q \vee r$	(d) $\neg(p \vee q)$	(f) $\neg p \vee q$	(h) $r \wedge (p \vee q)$

3. Considerando que p representa a proposição "O João caiu" e que q representa a proposição "O João magoou-se", escreva simbolicamente as seguintes proposições:
   (a) "O João caiu e magoou-se".
   (b) "O João caiu mas não se magoou".
   (c) "Não é verdade que o João caiu e se magoou".
   (d) "Sempre que o João cai, magoa-se".
   (e) "O João só se magoa se cair".

4. Sejam e = "A casa é azul.", f = "A casa tem 30 anos." e g = "A casa é feia.". Traduza as seguintes proposições em símbolos:
   (a) "Se a casa tem 30 anos então é feia."
   (b) "Se a casa é azul então a casa é feia ou tem 30 anos."
   (c) "Se a casa é azul então é feia ou a casa tem 30 anos."
   (d) "A casa só não é feia se não tem 30 anos."
   (e) "A casa tem 30 anos se for azul e a casa não é feia se tem 30 anos."
   (f) "Para a casa ser feia é necessário e suficiente que tenha 30 anos."

5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:
   (a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$.
   (b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.
   (c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.
   (d) $\sqrt{530} < 25 \Rightarrow 530 < 25^2$
   (e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas proposicionais:
   (a) $p \vee (\neg p)$.
   (b) $\neg(p \vee q)$.
   (c) $p \wedge \neg(p \vee q)$.
   (d) $p \wedge (\neg p \vee q)$.
   (e) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$.
   (f) $p \Leftrightarrow (q \vee p)$
   (g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
   (h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
   (i) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.
   (j) $p \wedge \neg(q \Rightarrow r)$
   (k) $(p \Leftrightarrow \neg r) \vee (q \wedge r)$
   (l) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

7. Suponha que p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição falsa, r é uma proposição falsa e s é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?
   (a) $p \vee r$
   (b) $(r \wedge s) \vee q$
   (c) $\neg(p \wedge q)$
   (d) $\neg s \vee \neg r$
   (e) $(s \wedge p) \vee (q \wedge r)$
   (f) $r \vee (s \vee (p \wedge q))$
   (g) $r \Rightarrow q$
   (h) $p \Leftrightarrow r$
   (i) $(q \Leftrightarrow s) \wedge p$
   (j) $s \Rightarrow (p \Rightarrow \neg s)$
   (k) $((q \Rightarrow s) \Leftrightarrow s) \wedge \neg p$
   (l) $(s \Rightarrow p) \Leftrightarrow \neg(r \vee q)$

8. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?
   (a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.
   (b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.
   (c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.
   (d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.
   (e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.
   (f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.
   (g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.
   (h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

9. De entre as seguintes fórmulas proposicionais, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:
   (a) $p \Rightarrow (p \vee q)$;
   (b) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$;
   (c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;
   (d) $(p \Rightarrow (p \vee q)) \wedge q$;
   (e) $(p \vee \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$;
   (f) $\neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$.

10. Indique quais dos pares de fórmulas proposicionais que se seguem são logicamente equivalentes:
    (a) $\neg(p \wedge q)$; $\neg p \wedge \neg q$.
    (b) $p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$.
    (c) $\neg(p \Rightarrow q)$; $p \wedge (q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$.
    (d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; $\neg(\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$.

11. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p \vee \neg q$ e que envolva apenas os conectivos $\wedge$ e $\neg$.

12. Numa cidade os habitantes são de dois tipos: os que mentem sempre (F) e os que dizem sempre a verdade (V). Consideremos 3 habitantes A, B e C dessa cidade. Em cada uma das alíneas, diga se é possível determinar o tipo (V ou F) de cada um desses habitantes, sabendo que eles disseram:

(a)	A: B e C são F's B: A é V C: A é F	(b)	A: B e C são do mesmo tipo B: eu e C somos V's C: B é F

13.] Mostre que a soma de dois números ímpares é um número par.

14. Mostre que o produto de números ímpares é um número ímpar.

15. Sejam a, b e c três números reais tais que $a > b$. Mostre que se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

16. Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

17. Encontre um contra-exemplo para cada das afirmações seguintes:

    (a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.
    (b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.
    (c) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.

18. Considere o seguinte predicado $p(n)$ sobre os números inteiros: "$n < 5 \Rightarrow n < 2$". Para cada valor de n, indique se a correspondente proposição é ou não verdadeira.

19. Suponha que os possíveis valores de x são coelhos e considere os predicados na variável x: $p(x)$: "x tem pêlo branco", $q(x)$: "x gosta de cenouras". Traduza as seguintes quantificações por palavras:

    (a) $\forall x \;\; p(x)$
    (b) $\exists x \;\; q(x)$
    (c) $\forall x \;\; (p(x) \wedge q(x))$
    (d) $\exists x \;\; (p(x) \vee q(x))$
    (e) $\forall x \;\; (p(x) \Rightarrow q(x))$
    (f) $\exists x \;\; (q(x) \Leftrightarrow \neg p(x))$

20. Suponha que os possíveis valores de x são cães e sejam $p(x)$: "x é preto", $q(x)$: "x tem quatro anos", $r(x)$: "x tem manchas brancas". Traduza as seguintes quantificações para linguagem simbólica.

    (a) Existe um cão preto.
    (b) Todos os cães têm quatro anos de idade.
    (c) Existe um cão preto com manchas brancas.
    (d) Todos os cães com quatro anos têm manchas brancas.
    (e) Existe um cão tal que se tem quatro anos então não tem manchas brancas.
    (f) Todos os cães são pretos se e só se não têm quatro anos.
    (g) Não existem cães pretos.

21. Exprima cada uma das seguintes proposições como quantificações:
    (a) A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais.
    (b) A equação $x^2 - 4 = 0$ tem uma solução positiva.
    (c) 1000000 não é o maior número natural.
    (d) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.
    (e) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

22. Construa provas para as proposições (b), (c) e (d) do exercício anterior.

23. Escreva afirmações que sejam a negação das proposições que se seguem:
    (a) Todos os peixes nadam.
    (b) Alguns jornais exageram a realidade.
    (c) Existe um gato sem cauda.
    (d) Todas as peças de Shakespeare são comédias.

24. Considere a seguinte proposição:

    "Todos os Hobbits são criaturas pacíficas".

    Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:
    (a) "Todos os Hobbits são criaturas conflituosas".
    (b) "Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas".
    (c) "Existem Hobbits que são criaturas conflituosas".
    (d) "Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas".

25. Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições sem aplicar a palavra "não" aos objectos quantificados.
    (a) "Todos os rapazes são simpáticos."
    (b) "Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas".
    (c) "A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x."
    (d) "Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito."
    (e) "Todo o OVNI tem o objectivo de conquistar alguma galáxia."
    (f) "Existe uma casa tal que qualquer pessoa que lá entre fica com sardas."
    (g) "Existe um número natural que é maior que todos os outros números naturais".

26. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.
    (a) $\forall x \exists y \;\; x + y = 0$
    (b) $\exists x \forall y \;\; x + y = 0$
    (c) $\exists x \forall y \;\; x + y = y$
    (d) $\forall x \;\; (x > 0 \Rightarrow \exists y \;\; xy = 1)$

    Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conectivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.