Universidade do Minho	Exame de **Lógica EI**	4 de Julho de 2013
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Considere o conjunto $\Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, definido indutivamente pelas seguintes regras:

    1. $\neg p_n \in \Delta$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.
    2. Se $\varphi \in \Delta$, então $\neg\neg\varphi \in \Delta$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
    3. Se $\varphi \in \Delta$ e $\psi \in \Delta$, então $\varphi \leftrightarrow \neg\psi \in \Delta$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

    (a) Justificando, diga se a fórmula $\neg\neg\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1$ pertence ao conjunto Δ.

    (b) Prove que o subconjunto de Δ dado por $\Gamma = \{\neg p_0, \neg\neg\neg p_1, \neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_2\}$ é consistente.

    (c) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para Δ.

    (d) Seja v a valoração tal que $v(p_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Prove por indução estrutural que, para toda a fórmula $\varphi \in \Delta$, $v(\varphi) = 0$.

    (e) Justificando, diga se existe alguma tautologia em Δ.

2. Apresente uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula do Cálculo Proposicional $(p_0 \vee \neg(p_1 \to p_0)) \wedge (p_1 \vee \bot)$. Justifique.

3. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

    (a) Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$, então $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ é consistente.

    (b) $p_0 \wedge \neg p_1 \not\models \neg(p_1 \to p_0)$.

4. Construa uma derivação em DNP mostrando que $p_1 \to (p_2 \to p_3) \vdash (p_1 \wedge p_2) \to p_3$.

5. Seja L o tipo de linguagem $(\{2, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(2) = 0$ e $\mathcal{N}(\times) = \mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(<) = 2$.

    (a) Considere a função $s : \mathcal{T}_L \to \mathcal{T}_L$ tal que $s(t) = t[2 \times x_1/x_0]$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$.

    i. Seja $t = (2 \times x_0) \times (2 \times x_1)$. Determine $s(t)$ e $\mathrm{VAR}(s(t))$.

    ii. Defina s por recursão estrutural.

    iii. Seja ψ a L-fórmula $\forall x_0(x_0 < x_1 \to \neg(x_0 = x_1))$. Para todo $t \in \mathcal{T}_L$, x_1 é substituível por $s(t)$ em ψ. Porquê?

    (b) Seja $E = (\mathbb{Q}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

    $$\overline{2} = 2 \qquad\qquad \overline{<} = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$$
    $$\overline{\times} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} \text{ tal que } \overline{\times}(x,y) = x \times y \qquad\qquad \overline{=} = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x = y\}$$

    Seja φ a L-fórmula $\neg\exists x_0\,(x_0 \times x_0 = 2)$.

    Quais das seguintes duas afirmações são verdadeiras? Justifique.

    (i) $E \models \varphi$. (ii) $\not\models \varphi$.

    (c) Indique, sem justificar, uma L-fórmula que represente a afirmação "O produto de qualquer número racional por si próprio é menor ou igual a 2".

6. Sejam L tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\forall x\varphi, \forall x(\varphi \to \psi) \models \exists x\psi$.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	1,5+1,5+1+1,5+1	1,5	1,5+1,5	1,5	3+2,5+1	1

2º TESTE LÓGICA EI

20 / junho / 2014

1

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1\wedge\neg p_2}^{(2)}}{p_1}\wedge_1 E \qquad \cancel{p_1\to p_2}^{(1)}}{p_2}\to E \qquad \dfrac{\cancel{p_1\wedge\neg p_2}^{(2)}}{\neg p_2}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg(p_1\wedge\neg p_2)}\neg I^{(2)}}{(p_1\to p_2)\to\neg(p_1\wedge\neg p_2)}\to I^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $(p_1\to p_2)\to\neg(p_1\wedge\neg p_2)$ sem hipóteses não canceladas. Logo, é uma derivação em DNP que prova que $(p_1\to p_2)\to\neg(p_1\wedge\neg p_2)$ é um teorema.

b) Pelo Teorema da Adequação, sabemos que $(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$ não é um teorema se e só se não é uma tautologia. Atendendo à tabela de verdade

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_1\wedge p_2$	$p_1\to p_2$	$(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0

podemos comprovar que $(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$ não assume sempre o valor lógico 1, pelo que não é uma tautologia. Portanto, $(p_1\to p_2)\to(\neg p_1\wedge p_2)$ não é um teorema.

c) Admitamos que $\Gamma, p_1 \vdash \neg p_1\wedge p_2$. Pelo Teorema da Adequação resulta que $\Gamma, p_1 \models \neg p_1\wedge p_2$. Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma\cup\{p_1\}$. Sabemos, então, que $v(\neg p_1\wedge p_2)=1$. Deste modo, $v(p_1)=1$ (porque $v\models\Gamma\cup\{p_1\}$) e $v(\neg p_1)=1$ (porque $v(\neg p_1\wedge p_2)=1$), o que é uma contradição. Assim, não existe nenhuma valoração que satisfaça $\Gamma\cup\{p_1\}$, pelo que $\Gamma\cup\{p_1\}$ é inconsistente. Logo, para qualquer $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma, p_1\vdash\varphi$.

2.

$$L = \left(\{c, f, g\}, \{Q, R\}, \mathcal{N} \right)$$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(Q) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a)

<u>OBS</u>: O conjunto T_L é definido indutivamente por:

1) $c \in T_L$;
2) $x_i \in T_L$ (para todo $i \in \mathbb{N}_0$);
3) se $t \in T_L$ então $f(t) \in T_L$;
4) se $t_1, t_2 \in T_L$ então $g(t_1, t_2) \in T_L$.

Consideremos $t = g(x_1, f(x_0))$. Os subtermos de t são x_0, x_1, $f(x_0)$ e $g(x_1, f(x_0))$. Logo, todas as sequências de formação de t têm, pelo menos, estes quatro elementos.

b) Consideremos a L-fórmula $\varphi = Q(c)$. φ é uma L-fórmula atómica, sem ocorrências de variáveis. Logo, $LIV(\varphi) = \emptyset$. Além disso, $subf(\varphi) = \{\varphi\}$.

<u>OBS</u>: Há um nº infinito de exemplos possíveis. Se, por exemplo, considerássemos $\varphi = \forall x_0\, Q(x_0)$, teríamos $LIV(\varphi) = \emptyset$ e $subf(\varphi) = \{\forall x_0 Q(x_0), Q(x_0)\}$.

c)

$$\psi = \left(\forall x_0\, Q(f(\underset{(1)}{x_0})) \wedge R(\underset{(2)}{x_1}, c)\right) \to \exists x_2\, \neg Q\left(g(\underset{(3)}{x_1}, \underset{(4)}{x_2})\right)$$

As ocorrências (1) e (4) são ligadas e as (2) e (3) são livres.

A ocorrência (2) de x_1 não está no alcance de nenhum quantificador, mas a ocorrência (3) de x_1 está no alcance de $\exists x_2$. Assim, se $x_2 \in VAR(t)$, x_1 não é substituível por t em ψ. Consideremos, por exemplo, $t = f(x_2)$ para $x = x_1$.

d) A função $u : T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural como:

1) $u(c) = 0$;
2) $u(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
3) $u(f(t)) = 1 + u(t)$, para todo $t \in T_L$;
4) $u(g(t_1,t_2)) = 1 + u(t_1) + u(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

3.

$$L = (\{c, f\}, \{R, =\}, \mathcal{N})$$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$

$E = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$ em que $\bar{c} = 0$, $\bar{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$; $\bar{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$, $\bar{=} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} : x = y\}$

a)

i) $f(f(x_2))[a] = \bar{f}(\bar{f}(a(x_2))) = \bar{f}(\bar{f}(1-2)) = \bar{f}(\bar{f}(-1)) =$

$= ||-1|| = 1$.

ii) Seja φ a L-fórmula $\exists x_1 (R(x_2,x_1) \land f(x_2) = x_1)$.

Temos que

$\varphi[a] = 1$ se e só se Existe $d \in \text{dom } E$ tal que $(R(x_2,x_1) \land f(x_2) = x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(R(x_2,x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1 \text{ e } f(x_2) = x_1\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ t.q. $\left((a(x_2), d) \in \bar{R} \text{ e } \bar{f}(a(x_2)) \mathrel{\bar{=}} d\right)$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ t.q. $(-1 < d \text{ e } 1 = d)$, o que é verdade.

Assim, $\varphi[a] = 1$

b)

(i) Seja a uma atribuição qualquer em E.

Temos que

$\varphi[a]_E = 1$ sse $\forall d \in \text{dom } E$, $R(x_1,c) \to (\neg(f(x_1) = x_1) \land f(f(x_1)) = f(x_1))\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \text{dom } E$, $R(x_1,c)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 0$ ou $(\neg(f(x_1) = x_1) \land f(f(x_1)) = f(x_1))\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \text{dom } E$, $(d, \bar{c}) \notin \bar{R}$ ou $\left(\neg(f(x_1) = x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1 \text{ e } f(f(x_1)) = f(x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$

sse $\forall d \in \text{dom } f \; (d \not< 0$ ou $(f(x_1) = x_1 \, [a\binom{x_1}{d}] = 0$ e $\bar{f}(\bar{f}(d)) \equiv \bar{f}(d)))$

sse $\forall d \in \text{dom } f \; (d \not< 0$ ou $(\bar{f}(d) \not\equiv d$ e $||d|| = |d|))$

sse $\forall d \in \text{dom } f \; (d \not< 0$ ou $(|d| \neq d$ e $|d| = |d|))$

$\text{dom } f = \mathbb{Z}$

Seja $d \in \text{dom } f$. Se $d \geqslant 0$, então a afirmação

$$d \not< 0 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)$$

é verdadeira. Se $d < 0$ então $|d| = -d$. Logo, $|d| \neq d$ e, obviamente, $|d| = |d|$. Assim,

$$d \not< 0 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)$$

é verdadeira.

Portanto, $\varphi[a]_E = 1$, para qualquer atribuição a em E, donde φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \sim)$ uma interpretação onde $\sim$ é como $-$ exceto na interpretação $\bar{c}$ de c que é o nº inteiro 6.

Dada uma qualquer atribuição a em E',

$$\varphi[a]_{E'} = 1 \text{ sse } \forall d \in \mathbb{Z} \; \underbrace{d \not< 3 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)}_{(*)}.$$

Para $d = 2$, temos que $d = 2 < 3$,
$|d| = |2| = 2 = d$,
e $|d| = 2 = |d|$.

Assim, para $d = 2$, a afirmação $(*)$ é falsa, pelo que $\varphi[a]_{E'} = 0$.

Assim, φ não é universalmente válida.

c)

$$\forall x_0 \left(R(0, x_0) \rightarrow \exists x_1 \, (R(x_1, 0) \wedge R(x_0, f(x_1))) \right).$$

4.

Seja (E, a) uma realização de $\{\forall_x (\varphi \vee \psi), \exists_x \neg \psi\}$.

Mostremos que $\exists_x \varphi\, [a]_E = 1$.

Temos que

$$\forall_x (\varphi \vee \psi)\, [a]_E = 1,$$

ou seja

$$(\varphi \vee \psi)\left[a \binom{x}{d}\right]_E = 1 \quad, \text{ para todo } d \in \operatorname{dom} E,$$

i.e.

$$\left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \right), \text{ para todo } d \in \operatorname{dom} E. \quad (*)$$

Além disso,

$$\exists_x \neg\psi\, [a]_E = 1,$$

donde

$$\text{Existe } d_1 \in \operatorname{dom} E \text{ tal que } (\neg\psi)\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 1,$$

pelo que

$$\text{Existe } d_1 \in \operatorname{dom} E \text{ tal que } \psi\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 0. \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, tomando em $(*)$ $d = d_1$, podemos concluir que $\varphi\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 1$ (uma vez que $\psi\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 0$).

Logo,

$$\text{Existe } d \in \operatorname{dom} E \ (d = d_1) \text{ tal que } \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1.$$

Assim,

$$\exists_x \varphi\, [a]_E = 1,$$ como queríamos mostrar.