introdução aos sistemas dinâmicos

iteração de funções — parte dois

1.

1.1

Seja $\mathcal{S}$ o sistema dinâmico discreto definido por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2\,; \\ 2\,x - 1 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Dado $x \in [0,1]$, consideremos a sua representação binária, isto é,

$$x = (0.d_1 d_2 d_3 \ldots)_2 = d_1 \times \frac{1}{2} + d_2 \times \frac{1}{2^2} + d_3 \times \frac{1}{2^3} + \ldots$$

Sendo $\mathcal{S}$ uma função definida por ramos, para determinar a imagem de x por $\mathcal{S}$, torna-se necessário perceber a que subintervalo pertence x. Suponhamos então que $x \in [0, 1/2)$. Assim sendo, temos que

$$\mathcal{S}(x) = 2x = d_1 \times 1 + d_2 \times \frac{1}{2} + d_3 \times \frac{1}{2^2} + \ldots$$

Contudo, uma vez que $x \in [0, 1/2)$, sabemos de antemão que o seu primeiro dígito é nulo, ou seja, que $d_1 = 0$. Deste modo, a igualdade anterior permite-nos escrever

$$\mathcal{S}(x) = d_2 \times \frac{1}{2} + d_3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots = (0.d_2 d_3 \ldots)_2,$$

isto é, a representação binária de $\mathcal{S}(x)$ corresponde ao deslocamento para a esquerda da representação binária de x. Em alternativa, caso x pertença ao subintervalo $[1/2, 1]$, temos que é sempre possível escrever a sua representação binária como

$$x = (0.d_1 d_2 d_3 \ldots)_2 = d_1 \times \frac{1}{2} + d_2 \times \frac{1}{2^2} + d_3 \times \frac{1}{2^3} + \ldots$$

onde o primeiro dos dígitos será sempre igual a 1, ou seja, $d_1 = 1$. Assim sendo, a representação binária de $\mathcal{S}(x)$ vem

$$\mathcal{S}(x) = 2x - 1 = -1 + d_1 \times 1 + d_2 \times \frac{1}{2} + d_3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots = d_2 \times \frac{1}{2} + d_3 \times \frac{1}{2^2} + \ldots$$

isto é, a representação binária de $\mathcal{S}(x)$ corresponde ao deslocamento para a esquerda da representação binária de x, desprezando o dígito correspondente à parte inteira,

$$\mathcal{S}(x) = (0.d_2 d_3 \ldots)_2.$$

1.2

Se a representação binária da imagem de $\bar{x}$ por $\mathcal{S}$ corresponde ao deslocamento para a esquerda dos dígitos da sua representação binária, então as soluções de $\mathcal{S}(\bar{x}) = \bar{x}$ são os elementos do intervalo $[0, 1]$, tais que

$$\mathcal{S}(\bar{x}) = (0.d_2 d_3 \ldots)_2 = \bar{x} = (0.d_1 d_2 d_3 \ldots)_2,$$

isto é, para os quais

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 \\ d_3 &= d_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ora, os únicos pontos do intervalo que satisfazem $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots$ são $0 = (0.\bar{0})_2$ e $1 = (0.\bar{1})_2$, onde, como é habitual, por $\bar{d}$ se denota a repetição do dígito d. Assim sendo, os pontos fixos de $\mathcal{S}$ são $\bar{x} = 0, 1$. O mesmo tipo de argumentos permite-nos concluir que a representação binária dos elementos $\bar{x} \in [0, 1]$ tais que $\mathcal{S}^2(\bar{x}) = \bar{x}$ tem necessariamente que satisfazer

$$\begin{aligned} d_3 &= d_1 \\ d_4 &= d_2 \\ d_5 &= d_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou seja, são todos os elementos $\bar{x}$ do intervalo $[0, 1]$ cujas representações binárias são dadas por

$$\bar{x} = (0.\overline{d_1 d_2})_2, \qquad d_1, d_2 \in \{0, 1\}.$$

A anterior identificação dos pontos fixos de $\mathcal{S}$ permite-nos concluir que os pontos periódicos de período 2 de $\mathcal{S}$ são $\bar{x} = (0.\overline{01})_2$ e $\bar{x} = (0.\overline{10})_2$.

1.3

Os argumentos apresentados acima permite afirmar que os 54 pontos periódicos de período 6 de $\mathcal{S}$ (correspondentes a nove ciclos periódicos de período 6) são:

$(0.\overline{000001})_2$	$(0.\overline{000010})_2$	$(0.\overline{000011})_2$	$(0.\overline{000100})_2$
$(0.\overline{000101})_2$	$(0.\overline{000110})_2$	$(0.\overline{000111})_2$	$(0.\overline{001000})_2$
$(0.\overline{001010})_2$	$(0.\overline{001011})_2$	$(0.\overline{001100})_2$	$(0.\overline{001101})_2$
$(0.\overline{001110})_2$	$(0.\overline{001111})_2$	$(0.\overline{010000})_2$	$(0.\overline{010001})_2$
$(0.\overline{010011})_2$	$(0.\overline{010100})_2$	$(0.\overline{010110})_2$	$(0.\overline{010111})_2$
$(0.\overline{011000})_2$	$(0.\overline{011001})_2$	$(0.\overline{011010})_2$	$(0.\overline{011100})_2$
$(0.\overline{011101})_2$	$(0.\overline{011110})_2$	$(0.\overline{011111})_2$	$(0.\overline{100000})_2$
$(0.\overline{100001})_2$	$(0.\overline{100010})_2$	$(0.\overline{100011})_2$	$(0.\overline{100101})_2$
$(0.\overline{100110})_2$	$(0.\overline{100111})_2$	$(0.\overline{101000})_2$	$(0.\overline{101001})_2$
$(0.\overline{101011})_2$	$(0.\overline{101100})_2$	$(0.\overline{101110})_2$	$(0.\overline{101111})_2$
$(0.\overline{110000})_2$	$(0.\overline{110001})_2$	$(0.\overline{110010})_2$	$(0.\overline{110011})_2$
$(0.\overline{110100})_2$	$(0.\overline{110101})_2$	$(0.\overline{110111})_2$	$(0.\overline{111000})_2$
$(0.\overline{111001})_2$	$(0.\overline{111010})_2$	$(0.\overline{111011})_2$	$(0.\overline{111100})_2$
$(0.\overline{111101})_2$	$(0.\overline{111110})_2$		

1.4

Escrever a representação binária um ponto pertencente ao intervalo [0, 1] que não seja nem ponto fixo, nem ponto periódico de $\mathcal{S}$, significa apresentar uma sequência (infinita) de dígitos relativamente à qual seja reconhecível que não é a repetição (infinita) de um bloco (finito) de dígitos. Ora, isso é possível escrevendo o início de uma sequência de dígitos com uma regularidade que não passe pela repetição. Eis um exemplo: consideremos a seguinte sequência de dígitos:

$$(0.0100011011\ldots)_2$$

onde a ideia é concatenar, por ordem crescente, todas as possíveis combinações de n dígitos, para $n \in \mathbb{N}$ (como facilmente se identifica, na construção da sequência acima foram consideradas todas as possíveis combinações de n dígitos, para $n = 1$ e $n = 2$). Com esta construção temos a certeza que o ponto do intervalo com esta representação binária não é nem um ponto fixo, nem um ponto periódico de $\mathcal{S}$.

2.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $\mathcal{T}$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \le x < 1/2\,; \\ 2 - 2\,x & \text{se } 1/2 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

2.1

Esta questão já foi respondida anteriormente, mas deixamos aqui os resultados: os dois pontos fixos de $\mathcal{T}$ são $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = 2/3$; os dois pontos periódicos de período 2 de $\mathcal{T}$ são $\bar{x} = 2/5$ e $\bar{x} = 4/5$.

2.2

Seja $\bar{x} = k/p$ um número racional pertencente ao intervalo $(0, 1)$, com p um número ímpar. Vamos começar por mostrar que, se $\bar{x}$ é um ponto periódico de $\mathcal{T}$, então k é um número par.
Pela definição de $\mathcal{T}$, podemos afirmar que, para todo $x \in [0, 1]$,

$$\mathcal{T}^n(x) = \pm m \mp 2^n x,$$

com m um número par menor ou igual a 2^n. Assim sendo, temos que

$$\mathcal{T}^n(\bar{x}) = \mathcal{T}^n\big(k/p\big) = m \pm 2^n \frac{k}{p},$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$. Deste modo, podemos concluir que

$$\mathcal{T}^n(\bar{x}) = \mathcal{T}^n\big(k/p\big) = \frac{\pm m\, p \mp 2^n k}{p}, \tag{1}$$

ou seja, $\mathcal{T}^n(\bar{x})$ é um número racional cujo numerador é um número par, como queríamos mostrar.
Atentemos agora na implicação contrária, isto é, que se k é um número par, então k/p é um ponto periódico de $\mathcal{T}$. Ora, da igualdade 1, uma vez que $\mathcal{T}^n(\bar{x}) \in [0, 1]$, podemos concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$ o numerador é um número par inferior a p. Havendo um número finito de números com essas características e podendo n ser escolhido tão grande quanto queiramos, podemos afirmar que existem inteiros a e n tais que

$$\mathcal{T}^n(k/p) = \mathcal{T}^a(k/p),$$

ou seja, que existem inteiros i e j tais que

$$\mathcal{T}^{i+j}(k/p) = \mathcal{T}^i(k/p).$$

Suponhamos que esses inteiros, i, j são os menores tais que a igualdade é válida. Então, se $i = 0$, temos que k/p é um ponto periódico de $\mathcal{T}$, mas, caso $i > 0$, então temos que k/p é apenas um ponto eventualmente periódico de $\mathcal{T}$. Por outras palavras, temos que mostrar que a primeira repetição das iteradas de k/p por $\mathcal{T}$ ocorre para $\mathcal{T}^j(k/p) = k/p$.
Partindo da igualdade $\mathcal{T}^{i+j}(k/p) = \mathcal{T}^i(k/p)$, supondo que $i > 0$, vamos mostrar que então se tem $\mathcal{T}^{i+j-1}(k/p) = \mathcal{T}^{i-1}(k/p)$. Para tal, recordemos o resultado anterior, que nos permitia afirmar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a iterada $\mathcal{T}^n(k/p)$ é sempre o quociente de um número par por um número ímpar.

Escrevendo $\mathcal{T}^n(k/p) = 2a/p$, com a um número inteiro, temos que, por definição,

$$\mathcal{T}^{n+1}(k/p) = \begin{cases} 4\,a/p & \text{se } 0 \leq \mathcal{T}^n(k/p) < 1/2\,; \\ 2 - 4\,a/p = (2+4b)/p & \text{se } 1/2 \leq \mathcal{T}^n(k/p) \leq 1 \end{cases}$$

onde $b = (2a - p - 1)/2$ é um número inteiro (atente-se que, sendo p um número ímpar, então $p+1$ é um número par, pelo que $2a - p - 1$ é um número par). Por outras palavras, se $\mathcal{T}^{n+1}(k/p)$ é o quociente de um inteiro múltiplo de 4 por um número ímpar, então podemos concluir que este é imagem de um ponto pertencente ao subintervalo $[0, 1/2]$. Caso contrário, pertence ao subintervalo $[1/2, 1]$. (Provámos assim que, apesar de $\mathcal{T}$ não ser invertível, é possível determinar univocamente x, se $\mathcal{T}(x)$ é o quociente de um número par por um número ímpar.) Resumindo, para k um número par, se $\mathcal{T}^{i+j}(k/p) = \mathcal{T}^i(k/p)$, então podemos concluir que $\mathcal{T}^{i+j-1}(k/p) = \mathcal{T}^{i-1}(k/p)$. Usando os mesmos argumentos, caso $i > 1$, vai ser possível concluir que $\mathcal{T}^j(k/p) = k/p$, isto é, que k/p é um ponto periódico de $\mathcal{T}$.

2.3

Seja $x = k/p$ pertencente ao intervalo $(0,1)$, com p um número par. Supondo que k e p são os menores inteiros que verificam $x = k/p$, podemos concluir que k é um número ímpar. Mas vejamos que forma vai ter a imagem de x por $\mathcal{T}$: por definição, temos que $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(k/p) = 2k/p = k/(p/2)$ ou $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(k/p) = 2 - 2k/p = (p-k)/(p/2)$, isto é, em ambas as situações, a imagem de x por $\mathcal{T}$ vai ser o quociente de um número ímpar por $p/2$. Então, se $p/2$ é um número ímpar, podemos concluir imediatamente que $\mathcal{T}^2(x)$ é o quociente de um número par por um número ímpar, logo, pela alínea anterior, um ponto periódico de $\mathcal{T}$. Deste modo, podemos afirmar que a igualdade $\mathcal{T}^n(x) = x$, nunca será possível. Se $p/2$ é ainda um número par, podemos repetir os mesmos argumentos. Resumindo, qualquer que seja o número par p, podemos afirmar que k/p é um ponto eventualmente fixo ou um ponto eventualmente periódico de $\mathcal{T}$, não sendo portanto um ponto periódico de $\mathcal{T}$.

2.4

Basta usar as alíneas anteriores.

3.

Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ o sistema dinâmico discreto definido por $f(x) = 2x(1-x)$. Vamos começar por mostrar que f tem pontos fixos.

Consideremos a equação $f(\bar{x}) = 2\bar{x}(1-\bar{x}) = \bar{x}$. Como vemos, as suas soluções são $\bar{x} = 0, 1/2$. Assim sendo, uma vez que ambos os pontos pertencem ao domínio de f, podemos concluir que f tem dois pontos fixos. Coloquemos agora a mesma questão relativamente aos pontos periódicos, de período 2, de f.

Consideremos a equação

$$f^2(\bar{x}) = f\big(2\bar{x}(1-\bar{x})\big) = 2 \times 2\bar{x}(1-\bar{x})\big(1 - 2\bar{x}(1-\bar{x})\big) = -8\bar{x}^4 + 16\bar{x}^3 - 12\bar{x}^2 + 4\bar{x} = \bar{x},$$

ou seja,

$$-8\bar{x}^4 + 16\bar{x}^3 - 12\bar{x}^2 + 3\bar{x} = 0.$$

Uma vez que os pontos fixos, encontrados anteriormente, satisfazem esta igualdade, podemos dividir este polinómio por $x(x - 1/2)$, sabendo que as soluções da equação então encontrada corresponderão a pontos periódicos, de período 2, de f. Um pequeno cálculo permite-nos escrever

$$-8\bar{x}^4 + 16\bar{x}^3 - 12\bar{x}^2 + 3\bar{x} = \bar{x}(\bar{x} - 1/2)(-8\bar{x}^2 + 12\bar{x} - 6),$$

donde se retira que os pontos periódicos de período 2 de f serão as soluções, pertencentes ao domínio de f, de

$$-8\bar{x}^2 + 12\bar{x} - 6 = 0.$$

Como facilmente se constata, essas soluções não são reais, pelo que podemos concluir que f não admite quaisquer pontos periódicos de período 2. Então, uma vez que f é uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, o teorema de Sharkovsky permite-nos concluir que f não admite quaisquer pontos periódicos de período p, para $2 \prec_S p$, onde por $\prec_S$ se denota a ordem de Sharkovsky dos números naturais, ou seja, podemos concluir que f não admite admite quaisquer pontos periódicos.

4.

Uma vez que o Teorema de Sharkovsky permite concluir que qualquer função contínua num intervalo com pontos periódicos de período 3 admite pontos periódicos de qualquer outro período, temos apenas que mostrar que o sistema dinâmico discreto $\mathcal{T}$ admite pontos periódicos de período 3.

A expressão da aplicação tenda $\mathcal{T}$ permite-nos concluir que $\mathcal{T}([0, 1/2]) = \mathcal{T}([1/2, 1]) = [0, 1]$. Sendo assim, em cada um desses subintervalos existe $\bar{x}$ tal que $\mathcal{T}(\bar{x}) = \bar{x}$, donde $\mathcal{T}$ tem dois pontos fixos. Do resultado anterior, podemos também concluir que existem quatro subintervalos cuja imagem por $\mathcal{T}^2$ é exactamente igual a $[0, 1]$, isto é, que

$$\mathcal{T}^2([0, 1/4]) = \mathcal{T}^2([1/4, 1/2]) = \mathcal{T}^2([1/2, 3/4]) = \mathcal{T}^2([3/4, 1]) = [0, 1].$$

Prosseguindo com o mesmo tipo de argumento, podemos dizer que existem oito subintervalos cuja imagem por $\mathcal{T}^3$ é exactamente igual ao intervalo $[0, 1]$, isto é, que

$$\mathcal{T}^3\big([\frac{k}{8}, \frac{k+1}{8}]\big) \ = \ [0, 1], \qquad k = 0, 1, \ldots, 7.$$

Deste modo, podemos concluir que existem oito soluções da equação $\mathcal{T}^3(\bar{x}) = \bar{x}$. Ora, como $\mathcal{T}$ tem dois pontos fixos, ficamos a saber que a aplicação tenda $\mathcal{T}$ admite pontos periódicos de período 3. Assim sendo, o Teorema de Sharkovsky permite-nos concluir que $\mathcal{T}$ admite pontos periódicos de qualquer outro período.

nota: como alternativa, poderíamos calcular um ponto periódico de período 3 de $\mathcal{T}$ e usar o teorema de Sharkovsky para concluir a existência de pontos periódicos de qualquer outro período.