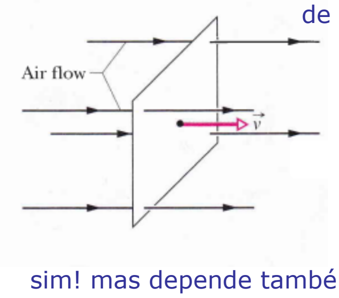
Electrostática e Campo eléctrico

- Noção de fluxo
- Fluxo do campo eléctrico.
- Lei de Gauss.
- Aplicações da lei de Gauss.

fluxo de um vector

Vamos imaginar uma janela e uma corrente de ar;
Vamos admitir que a velocidade do ar é $\vec{v}$.



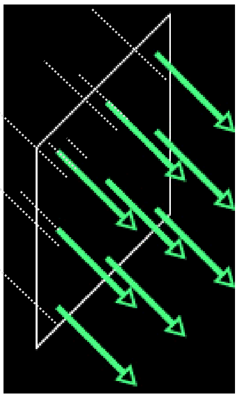
de que depende o efeito da corrente de ar?

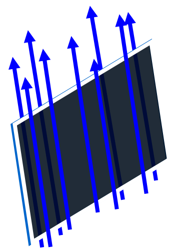
da velocidade do ar?

do tamanho (área) da janela?

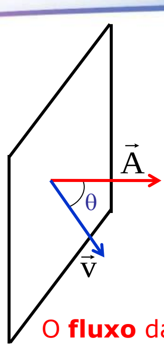
sim! mas depende também da......

..... orientação da velocidade do ar em relação à orientação da janela a velocidade do ar pode não ser perpendicular à janela...





é para quantificar o “efeito” de correntes através de superfícies que se define o “fluxo” - neste caso o “fluxo do **vector velocidade** através da **área da janela**”.



Primeiro, é necessário definir a orientação da corrente de ar em relação à janela. Para isso usa-se o ângulo entre dois vectores:

- o vector velocidade do ar – $\vec{v}$
- o vector perpendicular à superfície da janela - $\vec{A}$

(com módulo igual à área da janela)

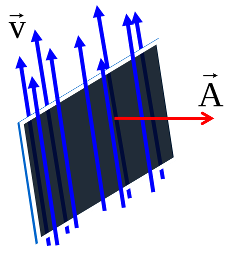
O **fluxo** da velocidade do ar através da janela depende:

do vector $\vec{v}$ e do vector $\vec{A}$

$$\boxed{\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}}$$

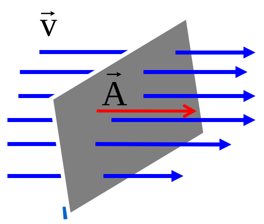
$$\Phi = vA\cos\theta$$

$$\Phi = vA\cos\theta$$



se

$$\theta = 90^{o} \Rightarrow \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ é nulo}$$

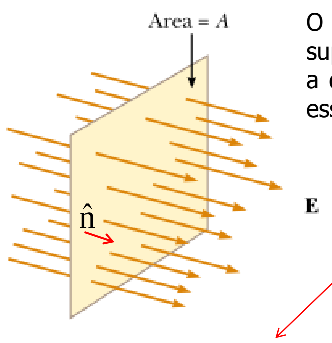


se

$$\theta = 0^{o} \Rightarrow \cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ é máximo}$$

e se o vector não for a velocidade do ar,

mas sim o campo eléctrico?



O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície, pode ser determinado se conhecermos a densidade de linhas de campo que atravessam essa superfície.

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

(vector com módulo igual à área da superfície)

$$\vec{A} = A\hat{n}$$

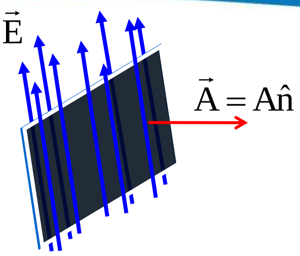
Fluxo do campo eléctrico

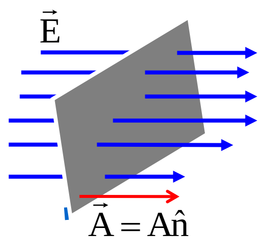
(unidade SI: $N.m^2/C$)

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot A\hat{n}$$

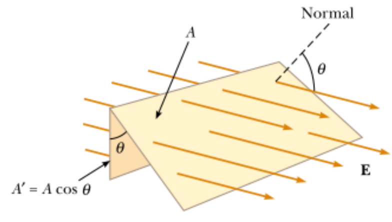
$$\Phi = E\,A\cos\theta$$

$$\Phi = E\,A\cos 90^{o} \Rightarrow \Phi = 0$$



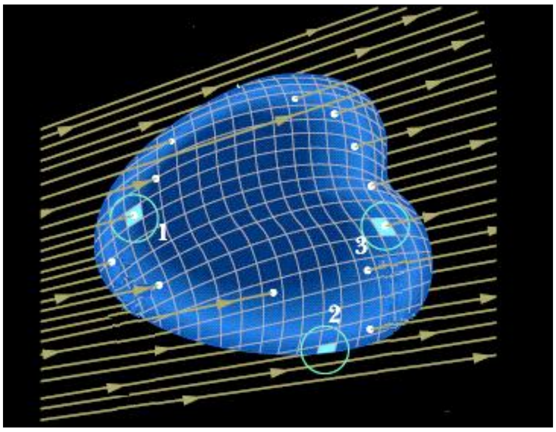


$$\Phi = E A\cos 0^{o} \Rightarrow \Phi = E\,A$$

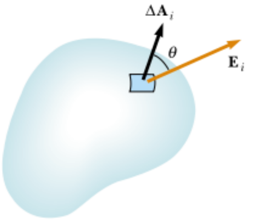


$$\Phi = E A' \Rightarrow \Phi = E\,A\cos\theta$$

mas nem sempre é assim tão fácil....

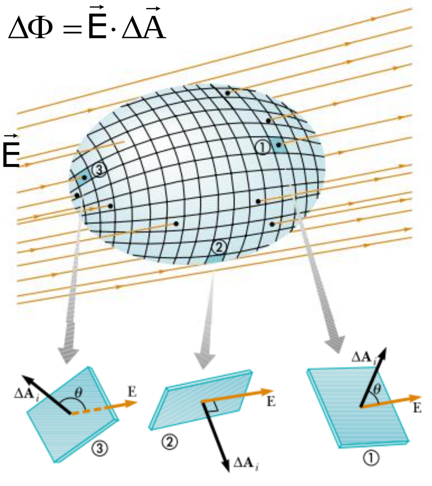


Qual a melhor forma de calcular o fluxo?



$$\Delta\Phi = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

$$\Delta\Phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$



Elemento 1

$$\Delta\Phi_1 = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_1 \qquad 0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$$

$$\Delta\Phi_1 > 0$$

Elemento 2

$$\Delta\Phi_2 = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_2 \qquad \theta=90^{\circ}$$

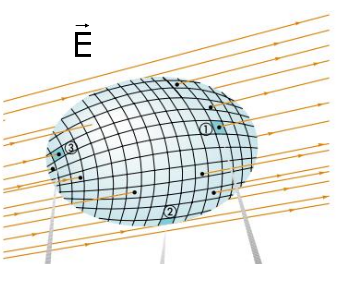
$$\Delta\Phi_2 = 0$$

Elemento 3

$$\Delta\Phi_3 = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_3 \qquad 180>\theta>90^{\circ}$$

$$\Delta\Phi_3 < 0$$

Resumindo….

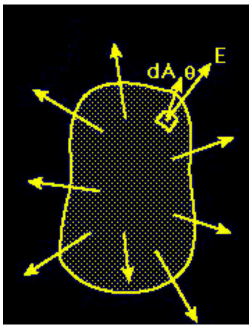


Considera-se uma a superfície e assumimos que na região o campo eléctrico , $\vec{E}$, é conhecido.

Se o campo (módulo ou direcção) não são uniformes ao longo de toda a superfície considerada, divide-se a superfície em pequenas áreas e faz-se o cálculo do fluxo através de cada das áreas, separadamente

O fluxo do campo eléctrico através da superfície obtém-se somando os fluxos parciais.

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$



1. Dividir a superfície em pequenas áreas
2. Calcular o fluxo do campo eléctrico através de cada uma das pequenas áreas :

$$\Delta\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

3. Calcula-se a soma dos fluxos calculados para cada umas das áreas:

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$

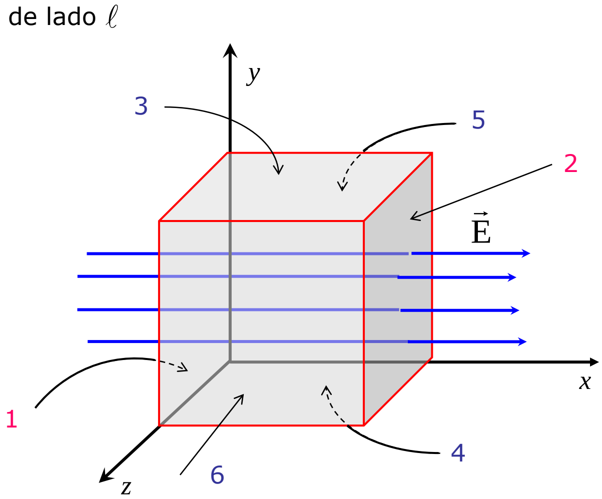
4. Fazendo com que cada área seja tão pequena quanto possível ($\Delta A \to 0$), o fluxo vem:

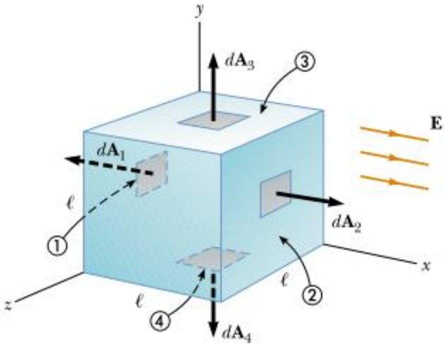
$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}} \Longrightarrow \Phi = \oint E_n dA$$

Componente do campo eléctrico na direcção normal à superfície

Exemplo 1

Considere um campo eléctrico uniforme, orientado segundo a direcção positiva do eixo dos x. Calcular o fluxo resultante através das faces do cubo de lado ℓ





$$\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0$$

$$\Phi_{total} = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

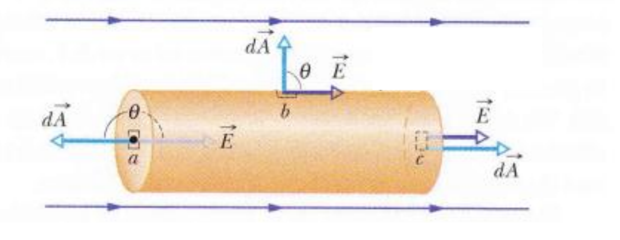
$$\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_1 E(\cos 180^o)dA = -E\int_1 dA = -E\ell^2$$

$$\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_2 E(\cos 0^o)dA = +E\int_2 dA = E\ell^2$$

$$\Phi_{total} = -E\ell + E\ell = 0$$

Exemplo 2

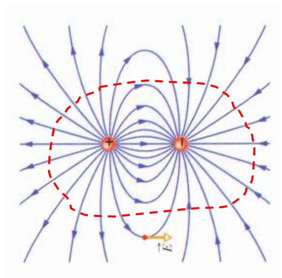
Considere um cilindro de raio R, imerso num campo eléctrico. Qual o fluxo do campo eléctrico através da superfície cilíndrica?

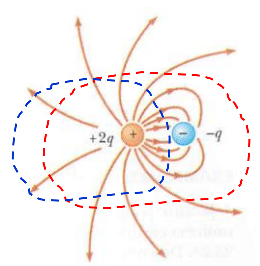


Qual a relação entre o fluxo do campo e a carga eléctrica geradora desse campo?

A densidade de linhas de campo (nº de linhas por unidade de superfície perpendicular às linhas de campo) em qualquer ponto é proporcional à intensidade do campo eléctrico nesse ponto.

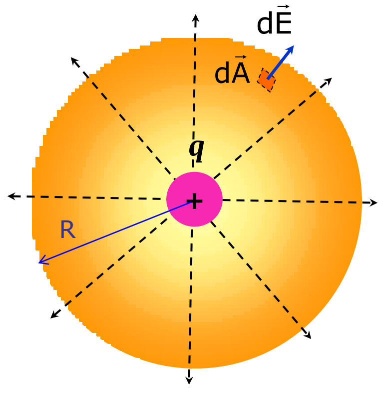
O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície é proporcional ao balanço entre o número de linhas de campo que saem de uma superfície, comparado com o nº de linhas de campo que entram.





O fluxo do campo eléctrico que atravessam uma superfície fechada é proporcional à carga contida na região limitada pela superfície.

Qual a relação entre o fluxo do campo e a carga eléctrica geradora desse campo?



Imaginemos uma carga pontual *q.*

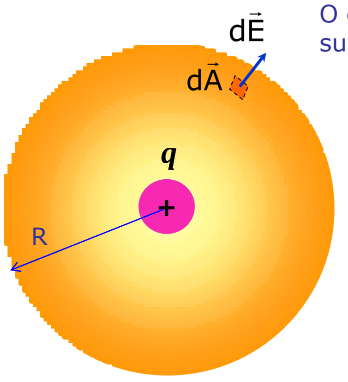
O campo eléctrico criado por uma carga pontual é radial e aponta para fora.

Podemos imaginar uma superfície esférica, de raio *R,* centrada na carga.

Consideramos uma pequena área $d\vec{A}$, na superfície e o campo $d\vec{E}$ criado pela carga q

Calculamos o fluxo do campo através da superfície esférica.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



O campo eléctrico em qualquer ponto da superfície esférica é:

$$E = k\frac{q}{R^2}$$

Então o fluxo é:

$$\Phi = \oint k\frac{q}{R^2}(\cos 0^o)\, dA$$

$$\Phi = k\frac{q}{R^2}\oint dA \longrightarrow \text{Área da esfera } 4\pi R^2$$

$$\Phi = k\frac{q}{R^2}4\pi R^2$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}}$$

lei de Gauss

Quando uma superfície fechada (superfície gaussiana) envolve certa carga eléctrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície

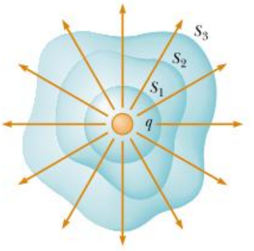
O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga

O fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, é proporcional à carga total no interior da superfície.

Karl Friedrich Gauss
matemático e astrónomo alemão
(1777 – 1855)

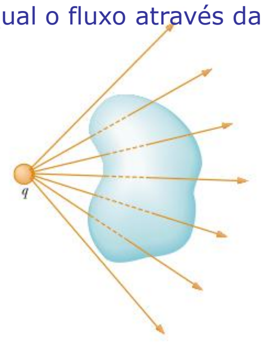
$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}}$$

Qual o fluxo através da superfície S_1, S_2, S_3?



O fluxo não depende da forma da superfície.
O fluxo não depende da distância a q

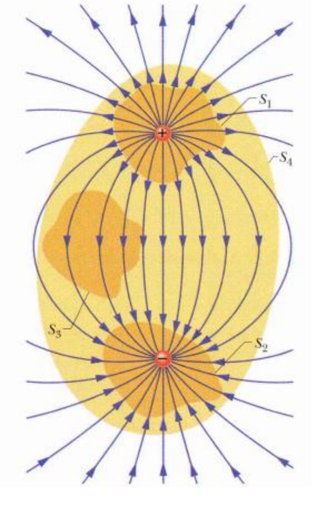
Qual o fluxo através da superfície S ?



O fluxo líquido através duma superfície Gaussiana e proporcional à carga, q**, <u>no interior da superfície</u>.**

$$\boxed{\Phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}}$$

Qual o fluxo através da superfície S_1, S_2, S_3, S_4, ?



S_1: $\Phi > 0$

S_2: $\Phi < 0$

S_3: $\Phi = 0$

S_4: $\Phi = 0$

Na prática, a Lei de Gauss só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana).

A superfície Gaussiana é uma superfície matemática - não tem "existência física".

Se a superfície Gaussiana for cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral do fluxo será fácil de calcular.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cos\theta \, dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

A escolha da **"Superfície Gaussiana"** deve ser feita de forma inteligente:

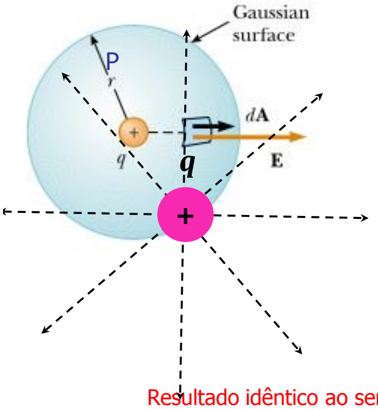
Primeiro desenha-se o condutor (carga pontual, filamento, plano...) e o ponto onde se quer conhecer o campo.

Traçam-se, esquematicamente, as linhas de campo.

Escolhe-se uma superfície, de forma a ser fácil calcular o fluxo através da superfície. É importante ter em atenção o ângulo entre a direcção da superfície e a direcção do campo eléctrico e o valor do campo. O ideal é que o campo seja constante ao longo da superfície e o ângulo também.

1º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma carga pontual positiva.

Calcular o campo eléctrico a uma distância *r* de uma carga eléctrica *q*, usando a Lei de Gauss



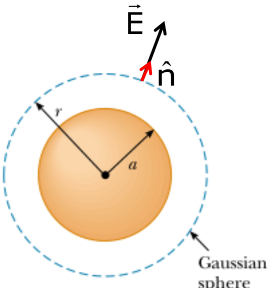
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2}$$

Resultado idêntico ao seria obtido usando a Lei de Coulomb

2º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma esfera isoladora com densidade volúmica de carga ρ, uniformemente distribuída.

1 - Calcular o campo eléctrico a uma distância *r >a,* usando a Lei de Gauss. A carga total da esfera é +Q



(a)

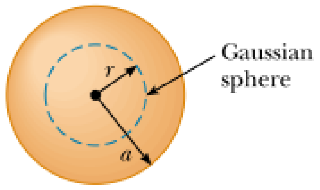
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2}$$

Resultado idêntico ao que foi obtido para uma carga pontual $\Rightarrow$ equivalente!!!

2 - Calcular o campo eléctrico para uma distância $r < a$, usando a Lei de Gauss. A carga total da esfera é +Q

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$



(b)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{a^3} \Leftrightarrow E = k\frac{Q}{a^3}r$$

$$r \to 0 \Rightarrow E \to 0$$

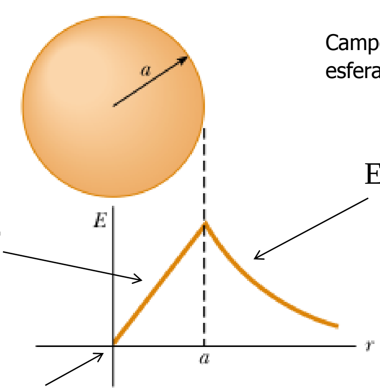
Campo eléctrico de uma esfera isoladora carregada

Campo **no exterior** de uma esfera isoladora carregada:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

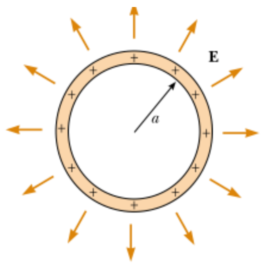
Campo **no interior** de uma esfera isoladora carregada:

$$E = k\frac{Q}{a^3}r$$



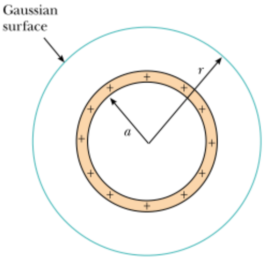
$$r \to 0 \Rightarrow E \to 0$$

3º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma casca isoladora com carga +Q uniformemente distribuída.



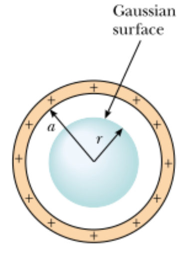
para uma distância $r > a$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

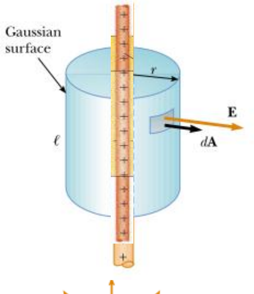


para uma distância $r < a$

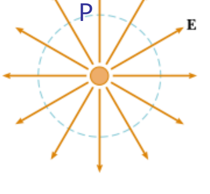
$$E = 0$$



4º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma linha carregada, com carga uniformemente distribuída, λ.

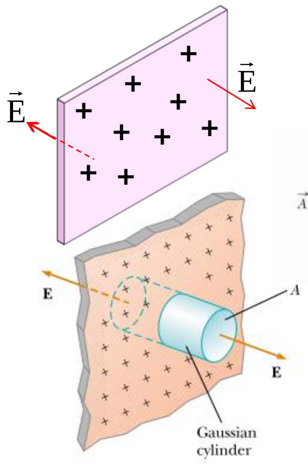


1. Desenhar a linha e o campo eléctrico
2. Desenhar o ponto P
3. Escolher a superfície gaussiana, que passe no ponto P

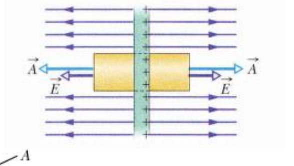


$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

5º Exemplo: Cálculo do campo eléctrico na vizinhança de uma placa isoladora carregada, com densidade superficial de carga uniformemente distribuída, σ



1. Desenhar a linha e o campo eléctrico
2. Escolher a superfície gaussiana, que passe no ponto P



$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{q_{in}}{2A\varepsilon_o}$$

$$q_{in} = \sigma A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Campo eléctrico é uniforme

TABLE 24.1 Typical Electric Field Calculations Using Gauss's Law

Charge Distribution	Electric Field	Location
Insulating sphere of radius R, uniform charge density, and total charge Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	$k_e \frac{Q}{R^3} r$	$r < R$
Thin spherical shell of radius R and total charge Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$	$r > R$
	0	$r < R$
Line charge of infinite length and charge per unit length λ	$2k_e \frac{\lambda}{r}$	Outside the line
Nonconducting, infinite charged plane having surface charge density σ	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	Everywhere outside the plane

- Quando uma superfície fechada (superfície gaussiana) envolve certa carga eléctrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície
- O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga
- O fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, é proporcional à carga total no interior da superfície.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cos\theta \, dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o}$$