

**Universidade do Minho**

# Exercícios de Investigação Operacional

Programação Linear

Formulação de modelos de PL e algoritmo *Simplex*

Modelo e algoritmo de transportes

Dualidade e análise de sensibilidade

Programação inteira

Programação Dinâmica

# Formulação e Simplex

## 1.

O Departamento de Marketing de uma empresa de mobiliário metálico para escritório sugeriu à administração o lançamento de novos modelos de secretária e de estante, em substituição dos modelos actuais.

O estudo de mercado realizado mostra que não existe qualquer problema em relação à venda de estantes enquanto que, em relação às secretárias, as vendas mensais não deverão ultrapassar as 160 unidades.

O Departamento de Produção, depois de analisar os novos modelos, concluiu que os seus tempos de produção unitários são:

	Estampagem (horas.máquina)	Montagem e Acabamento (horas.homem)
Secretárias	2	4
Estantes	4	4
Disponibilidade mensal	720	880

Foi ainda estimado que o lucro unitário será de 6000\$00 para as secretárias e 3000\$00 para as estantes.

a) Formule um modelo de programação linear que permita determinar o plano de produção mensal para os novos modelos que maximiza o lucro total.

b) Utilizando a representação gráfica do modelo matemático obtido em a, obtenha a solução para o problema.

## 2.

O Sr. A. Galo, director-técnico de um aviário, pretende determinar a composição da ração que deverá ser fornecida diariamente aos animais, de forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo.

Os dados relativos ao custo e às propriedades nutritivas de cada tipo de ração, constam da tabela abaixo.

	Ração Super-Galo	Ração Extra-Galo	Milho	Quantidade mínima requerida
Energia (calorias/Kg)	500	400	300	150
Vitaminas (u.i./Kg)	300	500	200	150
Proteínas (g/Kg)	60	70	30	20
Custo (U.M./Kg de ração)	250	300	100	

Ajude o Sr. Galo a resolver este problema.

---

**3.**

Numa cafetaria são necessários os seguintes empregados durante as 24 horas de funcionamento diário:

Período de funcionamento	Número mínimo de empregados
Das 02 às 06	4
Das 06 às 10	8
Das 10 às 14	10
Das 14 às 18	7
Das 18 às 22	12
Das 22 às 02	4

Cada empregado trabalha 8 horas consecutivas por dia, num dos seguintes turnos:

Turno	Horário
1	Das 02 às 10
2	Das 06 às 14
3	Das 10 às 18
4	Das 14 às 22
5	Das 18 às 02
6	Das 22 às 06

Pretende-se determinar o plano de trabalho que, assegurando o número mínimo de empregados que é necessário em cada período de funcionamento, minimiza o total de empregados contratados.

---

**4.**

Uma empresa produz rolos de papel com as dimensões padrão de 1.5m de largura e 70m de comprimento. Estes rolos são depois cortados de acordo com as dimensões especificadas por cada cliente.

A carteira de encomendas para o próximo mês é constituída por:

700 rolos com 80cm de largura;  
1000 rolos com 60cm de largura;  
1200 rolos com 50cm de largura.

Pretende-se programar o corte de rolos de modo a satisfazer totalmente a procura e minimizar o desperdício de papel.

---

**5.**

Uma empresa produz dois tipos de chapéus. Cada chapéu do primeiro tipo requer duas vezes o trabalho do chapéu do segundo tipo (em tempo). Se todos os chapéus fossem do segundo tipo, a companhia poderia produzir 500 chapéus por dia. O mercado limita diariamente as vendas do primeiro e segundo chapéus a 150 e 250 unidades, respectivamente.

Admita-se que os lucros unitários são de 8 U.M. e de 5 U.M. para os chapéus do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

- a) Formule um modelo de programação linear para este problema.
- b) Resolva o problema utilizando o método gráfico.
- c) Resolva o problema utilizando o algoritmo Simplex.

---

**6.**

A companhia de aviação VAIC AIR está a atravessar uma fase de profunda reestruturação tendo como um dos objectivos principais a atingir a renovação da sua frota, através da aquisição de aviões mais modernos e rentáveis.

Depois de uma análise cuidada das opções disponíveis a VAIC AIR seleccionou os seguintes modelos:

Modelo	Tipo de Operação	Nº de lugares	Custo*
BONG 777	Pequeno curso	200	2
BONG 888	Longo curso	250	5
DISCORD	Longo curso	300	6

Um estudo de mercado efectuado pela empresa, mostra que o lucro anual estimado para cada novo tipo de avião pode ser expresso por:

Aviões de pequeno curso :  $\text{Lucro} = 2 + 0,01 \times \text{NL}$  ;

Aviões de longo curso :  $\text{Lucro} = 3 + 0,02 \times \text{NL}$  ;

onde NL representa o número de lugares do avião.

Por razões estratégicas, e devido à enorme concorrência existente, a VAIC AIR não quer comprar mais do que três aviões de pequeno curso.

Limitações do departamento de manutenção fazem também com que não seja possível assegurar os serviços de manutenção a mais do que 10 novos aviões.

Finalmente, dada a actual situação financeira da empresa não é possível investir mais do que 31 milhões de dólares na aquisição de novos aviões.

A administração da VAIC AIR acaba de o contratar como consultor. Quantos aviões de cada modelo aconselha a empresa a comprar de forma a maximizar o lucro anual esperado?

\* Todos os valores financeiros estão expressos em milhões de dólares.

---

7.

Uma refinaria de petróleo produz gasolina Normal e Super com base na mistura de dois tipos de crude (A e B). O processo produtivo encontra-se em fase de reestruturação, o que leva a, no momento actual, existirem dois processos distintos de obtenção de gasolina.

De cada vez que o processo 1 é aplicado são consumidas 4 unidades de crude A e 4 unidades de crude B, tendo como resultado 3 unidades de Normal e 4 unidades de Super. Quanto ao processo 2, de cada vez que é aplicado, são consumidas 3 unidades de A, 5 unidades de B, dando origem a 4 unidades de Normal e 3 unidades de Super.

A disponibilidade de crude A é de 1000 unidades e de crude B é de 1200 unidades. O lucro esperado para cada unidade de Normal produzida é de 4 UM e para cada unidade de Super é de 5 UM.

Quantas vezes deverão ser aplicados cada um dos processos, de forma a maximizar o lucro esperado?

---

8.

Resolva, utilizando o algoritmo Simplex e interpretando graficamente todos os passos dados, o seguinte problema:

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

s.a:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

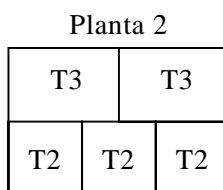
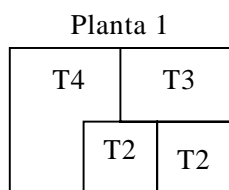
$$x_1, x_2 \geq 0$$

---

9.

Para o realojamento das famílias de VILLABAJO através do Programa de Habitação Social, é necessário construir 2 apartamentos T4, 6 apartamentos T3 e 16 apartamentos T2.

O programa de construção de habitação a custos controlados permite somente a existência de dois tipos de plantas para cada piso, conforme indicado na figura seguinte:



Custo dos Apartamentos:

T2 → 8 000 contos

T3 → 9 000 contos

T4 → 11 000 contos

Considerando que não há limitações quanto ao número de pisos a construir, determine a solução para este problema.

---

**10.**

Resolva, utilizando o algoritmo Simplex e interpretando graficamente (quando possível) o resultado obtido, cada um dos seguintes problemas:

a)

$$\begin{aligned}\text{Max } z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a:} \\ -4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Max } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Min } z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 120 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

---

**11.**

O quadro abaixo diz respeito a um problema de maximização. Os valores das seis constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \chi_1, \chi_2$ ) são desconhecidos. Assuma que não há qualquer variável artificial.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_3$	4	$\alpha_1$	1	0	$\alpha_2$	0	$\beta$
$x_4$	-1	-5	0	1	-1	0	2
$x_6$	$\alpha_3$	-3	0	0	-4	1	3
	$\chi_1$	$\chi_2$	0	0	3	0	?

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, 6$$

Estabeleça as convenientes condições para o valor das seis constantes ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \chi_1, \chi_2$ ) de modo a tornar verdadeira cada uma das seguintes afirmações (em separado):

- a) A solução corrente é ótima mas existem soluções ótimas alternativas.
- b) O problema não tem qualquer solução possível.
- c) A solução corrente é uma solução válida de base, mas degenerada.
- d) A solução corrente é válida mas o problema não tem solução ótima finita.
- e) A solução corrente é a única solução ótima.
- f) A solução corrente é válida mas o valor da função objectivo pode ser melhorado substituindo, na base,  $x_6$  por  $x_1$ . Qual o valor dessa melhoria?

---

**12.**

Um homem de negócios tem dois planos para investir as suas 10000 U.M..

O plano A garante-lhe, ao fim de um ano, um ganho de 0.7 por cada U.M. investida. O plano B garante-lhe, ao fim de dois anos, um ganho de 2 por cada U.M. investida.

Como deve o homem de negócios investir o seu dinheiro de modo a maximizar o seu ganho ao fim de três anos?

Formule o problema como um modelo de programação linear.

---

**13.**

Uma experiência social interessante na região do Mediterrâneo é o sistema *kibbutzim*, em Israel. É prática comum vários *kibbutzim* se associarem de modo a, essencialmente, coordenarem a sua produção para um determinado período. O “Southern Confederation of Kibbutzim” é uma associação de três *kibbutzim*.

O planeamento global desta associação é decidido no “Coordinating Technical Office”, empenhado, neste momento, em planear a produção agrícola para o próximo ano. A produção de cada *kibbutzim* é limitada quer pela área de terreno arável, quer pela quantidade de água disponível para irrigação, de acordo com os dados fornecidos pelo departamento governamental correspondente (ver tabela 1).

Sementeiras apropriadas para esta região incluem a cana do açúcar, o algodão e o sorgo, que diferem essencialmente no consumo de água para irrigação e ao lucro líquido obtido na colheita (por acre). Por outro lado o Ministério da Agricultura estabeleceu limites em termos da área que pode ser afectada a cada um destes produtos agrícolas (ver tabela 2).

Os três *kibbutzim* pertencentes à “Southern Confederation of Kibbutzim” acordaram na estratégia de todos utilizarem a mesma proporção de terra arável. No entanto, a área afectada a cada produto pode, indistintamente, pertencer a qualquer dos *kibbutzim*.

Apresente um modelo de programação linear que vá de encontro à resolução do “Coordinating Technical Office”.

Tabela 1

<i>Kibbutz</i>	Terra arável (acres)	Água para irrigação (acre.feet)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Tabela 2

Produto	Área máxima (acres)	Consumo de água (acre.feet / acre)	Lucro líquido (\$/acre)
Cana do açúcar	600	3	400
Algodão	500	2	300
Sorgo	325	1	100

---

**14.**

A *Catering SA*, empresa que fornece refeições em congressos, precisa de usar um determinado número de guardanapos de linho lavados, para cada um dos dias do período de vigência de um contrato. Alguns dos guardanapos poderão ser comprados em cada dia, mas os guardanapos usados em qualquer dia poderão ser enviados para um serviço de lavanderia e usados posteriormente.

Suponha que a empresa não possui guardanapos disponíveis, e que são necessários 1000, 700 e 1300 guardanapos para os próximos três dias.

O custo unitários de compra é de 6 U.M.. O *serviço rápido* de lavanderia, em que os guardanapos são entregues no fim de um dia e estão prontos a serem usados na manhã do dia seguinte, custa 3 U.M./unidade. O *serviço lento*, em que os guardanapos só ficam prontos dois dias depois, custa 2 U.M./unidade.

Formule um modelo de programação linear que permita a obtenção da estratégia óptima para o problema com que se debate a *Catering SA*.

---

**15.**

Amar Quetingue SA (AQ) é uma empresa de Marketing. Presentemente, a AQ está a planear uma nova campanha publicitária para um dos seus principais clientes, tendo desenvolvido um estudo de mercado sobre potenciais audiências em alguns órgãos de comunicação social. Os resultados desse estudo são apresentados na seguinte tabela:

	Televisão	Rádio	Jornais
Total de nº de clientes potenciais / U.P.	$12 \times 10^5$	$4 \times 10^5$	$2 \times 10^5$
Nº de clientes potenciais femininos/ U.P.	$7 \times 10^5$	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^5$
Custo (\$/ U.P.)	$5 \times 10^5$	$1 \times 10^5$	$2 \times 10^5$

As Unidades de Publicidade (U.P.) referidas na tabela correspondem a:

Televisão: um anúncio de 20 segundos passado no horário nobre da “CIS”;

Rádio: um anúncio de 40 segundos, a anteceder o noticiário das 20 horas da “TSS”;

Jornais: uma página no jornal “O Indiscreto”.

O objectivo da campanha é atingir o maior número possível de potenciais clientes, respeitando, no entanto, os seguintes compromissos:

O custo total da campanha publicitária não deverá ultrapassar  $80 \times 10^5$  \$;

O montante gasto em publicidade na televisão não deverá ultrapassar  $50 \times 10^5$  \$;

A percentagem de público feminino que tem acesso à campanha não deverá ser inferior a 50% da audiência total.

Formule um modelo de programação linear que permita definir a campanha publicitária que melhor se adequa aos objectivos da AQ.



---

**16.**

Um hipermercado pretende liquidar o seu stock de bebidas. Com base no último relatório de existências, o número de garrafas em armazém é:

1560 de Vinho tinto;  
960 de Vinho branco;  
360 de Porto;  
600 de Whisky;  
600 de Brandy.

As garrafas devem ser agrupadas em 3 selecções - Super, Popular e Extra - que serão postas à venda por 40 €, 30 € e 35 €, respectivamente.

A composição de cada selecção é dada na seguinte tabela:

	Vinho tinto	Vinho branco	Porto	Whisky	Brandy
Super	4	2	-	1	1
Popular	2	4	3	-	-
Extra	3	1	1	1	1

Considerando que a totalidade das selecções é vendida, determine qual o número de conjuntos de cada selecção que maximiza a receita total de venda.

### 17.

A empresa FazTudo, S.A., tem três unidades fabris, instaladas no Porto, em Coimbra e em Leiria. A FazTudo importa uma das matérias primas necessária ao seu processo produtivo de vários países da América do Sul, sendo o consumo mensal dessa matéria prima:

Fábrica do Porto: 250 ton;

Fábrica de Coimbra: 150 ton;

Fábrica de Leiria: 200 ton.

As entregas são feitas nos portos de Viana, Leixões e Lisboa, sendo necessário efectuar posteriormente o transporte para cada uma das fábricas. Actualmente, os custos de transporte (UM/tonelada) são os seguintes:

	Porto	Coimbra	Leiria
Viana	4	6	8
Leixões	1	4	5
Lisboa	5	4	3

O contrato estabelecido com os fornecedores da matéria-prima em causa contempla as seguintes entregas mensais:

Porto de Viana: 200 ton;

Porto Leixões: 100 ton;

Porto de Lisboa: 300 ton.

Determine a solução para este problema que minimiza os custos de transportes.

### 18.

Uma multinacional têxtil produtora de T-Shirts possui fábricas no Brasil, na Itália e em Portugal. A produção destina-se exclusivamente a quatro grandes mercados: Estados Unidos, Alemanha, Inglaterra e Japão.

A capacidade de produção actual da empresa é de 2 500 000 unidades no Brasil, 1 500 000 na Itália e 3 000 000 em Portugal.

As encomendas em carteira para a próxima colecção Primavera/Verão são 3 000 000 unidades para os Estados Unidos, 1 500 000 para a Alemanha, 1 200 000 para Inglaterra e 1 000 000 para o Japão.

Os custos de produção e transporte são os indicados nas tabelas 1 e 2.

a) Determine o plano de produção/distribuição que minimiza os custos globais.

b) Se o custo de produção em Portugal aumentasse para 10 UM/artigo como alteraria o seu plano de produção/distribuição.

Tabela 1: Custos de Produção (UM / artigo)

Portugal	8
Itália	11
Brasil	6

Tabela 2: Custos de Transporte (UM / artigo)

	E. Unidos	Alemanha	Inglaterra	Japão
Brasil	2	5	4	6
Itália	3	1	2	4
Portugal	3	2	2	6

---

**19.**

A MegaBuilder, SA, é uma grande empresa de construção civil, com várias obras em curso presentemente.

A MegaBuilder necessita, em determinado dia, das seguintes quantidades de betão em quatro das suas obras:

Obra A: 20 m<sup>3</sup>; Obra B: 25 m<sup>3</sup>; Obra C: 40 m<sup>3</sup>; Obra D: 15 m<sup>3</sup>.

Foram contactadas três empresas de distribuição de betão pronto que apresentaram os seguintes preços :

Preço do betão posto em cada obra (UM/m<sup>3</sup>)

	A	B	C	D
Sóbetão, SA	21	17	16	19
Betão β, SA	20	21	17	18
Betão Beltrão, SA	22	15	18	19

A Betão β, SA pode fornecer qualquer quantidade que seja encomendada, enquanto que a Sóbetão, SA só pode fornecer 50 m<sup>3</sup> e a Betão Beltrão, SA pode fornecer 30 m<sup>3</sup>.

Aconselhe a MegaBuilder sobre a forma mais económica de encomendar o betão necessário para esse dia.

---

**20.**

Uma companhia está a planear os seu esquema de produção para os meses de Junho, Julho e Agosto.

A procura para determinado produto é de 70 unidades em Junho, 90 em Julho e 120 em Agosto. A companhia tem capacidade para manufacturar até 100 unidades/mês.

O custo unitário de produção é de 15 UM em Junho e 16 UM em Julho e Agosto. O custo de armazenagem, por unidade, é nulo durante o mês de produção e é de 3 UM em cada um dos meses seguintes.

Determine o esquema de produção que a companhia deverá adoptar, de modo a minimizar o custo total.

---

**21.**

Uma companhia possui três fábricas, produzindo o mesmo produto, que deve ser transportado para quatro centros de distribuição.

As fábricas 1, 2 e 3 garantem o envio de 12, 17 e 11 carregamentos por mês, respectivamente. Cada centro de distribuição requer 10 carregamentos no mesmo período de tempo.

A distância de cada fábrica a cada um dos centros de distribuição (em milhas) é dada na tabela seguinte:

		Centro de distribuição			
		1	2	3	4
Fábrica	1	800	1300	400	700
	2	1100	1400	600	1000
	3	600	1200	800	900

A cada carregamento está associado um custo fixo de \$100 e um custo adicional de \$0.5 por milha percorrida.

Esta situação contempla a seguinte solução ótima:

		Centro de distribuição			
		1	2	3	4
Fábrica	1			2	10
	2		9	8	
	3	10	1		

Considere que o custo envolvido com o envio de um carregamento da fábrica 1 para o centro de distribuição 2 passou a ser variável.

Mostre como deve a companhia proceder, após tomar conhecimento desse valor.

---

**22.**

A empresa Preguicite Aguda S.A. dedica-se à produção de um único artigo, em três unidades de produção distintas, com capacidade para produzir 6, 8 e 4 unidades, respectivamente.

A empresa negociou com quatro clientes, tendo acordado em garantir a entrega de 4 unidades ao cliente 1, 6 unidades ao cliente 2 e, pelo menos, 2 unidades ao cliente 3. Por outro lado, os clientes 3 e 4 estão na disposição de adquirir a produção excedente, sem qualquer restrição. A tabela seguinte apresenta os benefícios associados à venda de um artigo, dependendo da unidade de produção (fábrica) e do cliente em causa.

		Cliente			
		1	2	3	4
Fábrica	1	6	3	1	3
	2	7	5	4	6
	3	7	4	6	3

Determine a solução que melhor satisfaz a Preguicite Aguda S.A..

---

**23.**

Há quatro estágios (A, B, C e D) disponíveis para três alunos de uma turma. Após se inteirarem da natureza e local dos estágios, os alunos não chegaram a acordo entre si na respectiva distribuição. Foi então pedido que cada um dos alunos mostrasse a sua preferência, indicando uma lista em que ao estágio de maior interesse atribuísse o valor 1, ao segundo 2 e assim sucessivamente. O aluno 3 está abrangido por uma disposição académica, a qual lhe permite rejeitar de imediato o estágio D. Os resultados foram os seguintes:

		Estágio			
		A	B	C	D
Aluno	1	1	3	2	4
	2	4	2	1	3
	3	1	2	3	*

Pretende-se encontrar uma solução para este problema, a qual forneça o conjunto de alocações aluno/estágio que mais satisfaça a maioria.

- a) Formule, sem resolver, este problema como um modelo de Programação Linear.
- b) Formule e resolva o mesmo problema usando um modelo de Transportes.

---

**24.**

Considere o problema de seleccionar quais as máquinas que devem executar um conjunto de tarefas. O parque de máquinas é constituído por um total de 15 máquinas, de 3 tipos diferentes. Há 5 máquinas de cada um dos 3 tipos.

As tarefas a realizar são de 4 tipos diferentes. É necessário realizar a tarefa 1, uma única vez. A tarefa 2 tem de ser realizada 2 vezes. As tarefas 3 e 4 têm de ser realizadas 6 vezes.

Os lucros associados à realização da tarefa de tipo  $j$  pela máquina de tipo  $i$  são os dados pelos valores de  $c_{ij}$ , indicados no quadro seguinte:

		Tipo de tarefa			
		1	2	3	4
Tipo de máquina	1	5	3	4	2
	2	9	8	8	4
	3	10	4	8	7

- a) Formalize o problema em termos de um problema de transportes.
- b) Obtenha a solução inicial pelo método do canto noroeste.
- c) Obtenha a solução óptima, e diga como deveria efectuar a afectação.
- d) Se, por uma razão qualquer de ordem tecnológica, a máquina 1 não pudesse realizar a tarefa 1, qual seria a solução óptima?

---

**25.**

Na cidade *AvecAlorsParIci* (Com que então por aqui) foram seleccionados 6 potenciais concorrentes para a próxima edição dos *Jeux Sans Frontières*. Nos testes já realizados foram determinadas as máximas pontuações que cada um dos concorrentes poderá atingir em duas provas previamente conhecidas (ver tabela).

Cada prova deverá ser realizada por três destes concorrentes, mas cada concorrente só poderá estar envolvido numa das provas.

Concorrente	Prova 1 Chute Fort	Prova 2 Saute Haut
1	88	79
2	94	83
3	92	85
4	75	87
5	87	81
6	91	86

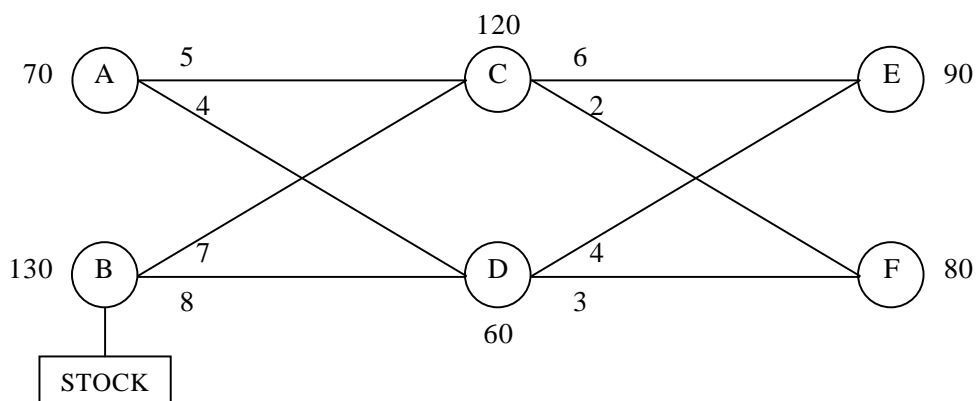
Recorrendo a um modelo de transportes, determine quais os concorrentes que devem realizar cada uma das provas.

---

**26.**

Considere o problema de distribuição em que dois fornecedores (A e B) de determinado produto abastecem dois clientes (E e F). As distâncias entre fornecedores e clientes são relativamente grandes (comparadas com a distância entre os dois clientes), e o transporte do produto deverá ser efectuado com passagem via um ou dois dos pontos intermédios (C e D).

A figura seguinte ilustra esquematicamente o tipo de rede em causa, incluindo informação sobre as quantidades, disponíveis nas origens, necessárias nos destinos e máximas permitidas na passagem pelos pontos intermédios, bem como os custos unitários de transporte entre os diversos pontos.



Determine qual o plano óptimo de transporte, nos casos em que:

- Não há qualquer possibilidade de transbordo entre E e F.
- Há possibilidade de transbordo entre E e F, sendo 2 e 1 UM/unidade o custo de transporte de E para F e de F para E, respectivamente.

---

**27.**

Um fabricante de móveis tem três fábricas que requerem, semanalmente, 500, 700 e 600 toneladas de madeira. O fabricante pode comprar a madeira a três companhias diferentes. As duas primeiras companhias podem fornecer, virtualmente, uma quantidade infinita de madeira. No entanto, a terceira companhia pode fornecer, no máximo, 500 toneladas por semana.

A primeira companhia usa os caminhos de ferro para fazer o transporte, não tendo qualquer limitação nas quantidades que pode fazer transportar por essa via para qualquer uma das fábricas. Por outro lado, as duas outras companhias utilizam camiões, o que limita a quantidade que pode ser transportada entre cada companhia e cada fábrica a 200 toneladas semanais.

Os custos unitários de transporte (UM/tonelada) são os seguintes:

		Fábrica		
		1	2	3
Companhia	1	20	30	50
	2	25	40	48
	3	30	36	32

Supondo que o custo unitário da madeira é igual nas três companhias fornecedoras, determine o melhor plano de abastecimento das fábricas.

---

**28.**

Considere o seguinte problema de transportes com limitação nas quantidades a transportar em cada ramo.

		D	E	F	G		
A		6	5	4	7	10	
		18	4	12	4		
B		12	9	7	2	6	
		5	18	4	16		
C		3	6	8	4	11	
		2	11	1	10		
		3	12	5	7		

Qual o plano ótimo de transporte? (Use a regra do Canto NW para obtenção da primeira solução.)

## Dualidade e Análise de Sensibilidade

**29.**

Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

s.a:

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- a) Escreva o dual associado a este problema.
- b) Resolva o problema dual formulado na alínea a).
- c) Indique a solução do primal.

**30.**

A empresa FazTudo, Lda. fabrica dois produtos, P1 e P2, não tendo problemas com a venda da totalidade da produção.

Os dados técnico-económicos relevantes são os seguintes:

	D1 (Horas)	D2 (Horas)	Matéria-prima	Lucro (U.M.)
P1	2	1	4	10
P2	2	2	2	15
Disponibilidade	160	120	280	

- a) Determine o plano óptimo de produção.
- b) Suponha que há possibilidade de recorrer a um turno extraordinário, com acréscimo de 40 horas no Departamento D1 e 30 horas em D2, a que corresponde um aumento nos custos de 120 UM. Acha que é aconselhável o recurso ao turno extraordinário ? Em caso afirmativo indique o novo plano de produção.
- c) O Departamento de I&D, após ter realizado os estudos respectivos, propôs alterações no produto P2. De acordo com essa proposta, P2 passará a necessitar de apenas 1 hora em D1 e 1.5 horas em D2, mantendo-se o consumo unitário de matéria-prima. Analise as implicações da proposta.
- d) O Departamento de Marketing sugere a introdução de um novo produto que necessita de 1 hora em D1, 3 horas em D2 e 3 unidades de matéria-prima, por unidade produzida, possibilitando uma margem unitária de 20. Analise igualmente as implicações desta sugestão. Caso seja recomendável e perante a imposição de aceitação de apenas uma das propostas ( do departamento de I&D ou do departamento de Marketing ) indique por qual delas optaria.
- e) Analise o comportamento da solução óptima perante a variação da margem de lucro de P2 entre 10 e 20 UM.



Os associados da Adega Cooperativa de Algueiros de Baixo (ACAB) dedicam-se à produção de vinho verde. O escoamento de toda a produção de vinho tem sido garantido todos os anos pela ACAB. As áreas de vinha actualmente dedicadas a cada tipo de vinho, a produção média anual de vinho por hectare e o valor de comercialização do vinho, encontram-se na seguinte tabela:

	Área (ha)	Produção (pipas/ha)	Valor de comercialização (contos/pipa)
Vinho Branco (normal)	450	20	100
Vinho Branco (loureiro)	250	20	125
Vinho Tinto	300	18	100

A Direcção Regional de Agricultura em colaboração com a ACAB pretende elaborar um estudo de reestruturação da vinha, tendo em conta directivas comunitárias, nomeadamente:

1 – a impossibilidade de aumentar em mais de 10% a área total de vinha actualmente disponível;

2 – a área de produção de vinho branco loureiro não poderá ultrapassar 350 ha.

a) No plano de reestruturação, que áreas deverão ser atribuídas a cada tipo de vinho, por forma a maximizar o rendimento global dos associados?

b) Negociações posteriores entre a ACAB e o Instituto da Vinha e do Vinho (IVV) resultaram na possibilidade de dedicar até um máximo de 450 ha à produção de vinho branco loureiro. Que modificações provocaria esta alteração no plano estabelecido na alínea anterior?

c) Uma directiva comunitária impõe que se produza pelo menos 1 ha de vinho tinto, por cada 2 ha de vinho branco loureiro. Que implicações traria para o rendimento dos agricultores esta nova directiva comunitária?

---

**32.**

Os agricultores do Ribatejo formaram uma associação agrícola com o objectivo de comercializar os seus produtos. Um dos produtos é o tomate, que é comercializado pela associação sob a forma de polpa de tomate (pdt) e é vendido em dois tipos de embalagens: frasco de vidro e pacote de papel.

A cota de produção de tomate atribuída pela CEE à região ribatejana permite a produção de 3000 toneladas/mês de pdt.

A associação possui uma máquina de embalar/rotular cuja capacidade é de 2000 ton./mês se o pdt só for embalado em vidro e de 3000 ton./mês se o pdt só for embalado em papel.

A embalagem de papel destina-se exclusivamente a uma cadeia de hipermercados num valor que não pode exceder 1200 ton./mês de pdt.

O preço de venda de cada tonelada de pdt depende do tipo de embalagem e é de 50 U.M. se a embalagem for de vidro e de 40 U.M. se a embalagem for de papel.

O modelo de programação linear e respectivo quadro óptimo são apresentados de seguida.

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 40x_2$$

s.a:

$$x_1 + x_2 \leq 3000$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6000$$

$$x_2 \leq 1200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$s_1$	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	600
$x_1$	1	0	0	$1/3$	$-2/3$	1200
$x_2$	0	1	0	0	1	1200
Z	0	0	0	$50/3$	$20/3$	108000

a) A CEE impõe uma redução de 25% na cota de produção de tomate. Qual o novo plano óptimo de produção de pdt?

b) Para a próxima campanha de promoção, o hipermercado pretende que a associação participe nos custos dessa campanha. Para o efeito, o hipermercado propôs que o preço de venda (por parte da associação) de pdt em embalagem de papel seja apenas de 30 U.M. por ton.. Deverá a associação, com esta nova condição, continuar a fornecer o hipermercado?

c) A associação está a planear a comercialização de pdt em embalagem de plástico. A máquina de embalar/rotular permite uma produção de 4000 ton./mês para este tipo de embalagem. Qual deverá ser o preço de venda deste produto para que a sua comercialização seja rentável?

**33.**

Uma empresa necessita de alugar veículos pesados adicionais para a distribuição diária de 120 toneladas de um determinado produto a um novo cliente.

A empresa de aluguer de veículos de transporte dispõe de:

- veículos articulados de 35 toneladas que requerem um condutor e dois ajudantes e custam 350 U.M. por dia;
- veículos de 20 toneladas, com um custo de 250 U.M., e requerendo um condutor e um ajudante;
- veículos de 10 toneladas, com um custo diário de 160 U.M., e requerendo apenas um condutor.

Sabendo que a companhia dispõe de 6 condutores e de 6 ajudantes, e que, dada a distância a que se encontra o cliente, cada veículo só pode efectuar uma viagem por dia, determine a política ótima de aluguer.

**34.**

Considere o seguinte problema de programação inteira e o quadro ótimo da respectiva relaxação linear:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

s.a:

$$-x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	
$x_1$	1	0	1/5	3/5	14/5
$x_2$	0	1	2/5	1/5	13/5
Z	0	0	3/5	4/5	27/5

Na prática, para a solução de problemas de programação inteira, é frequente recorrer a métodos que combinam o uso de planos de corte com “*branch and bound*”. Determine a solução ótima (ou uma das soluções ótimas) deste problema de programação inteira, utilizando o seguinte método:

- i. Introduza apenas um plano de corte;
- ii. Partindo da solução de i. prossiga utilizando o método “*branch & bound*”.

---

**35.**

Uma empresa decidiu abrir uma nova fábrica em um de dois locais possíveis: Braga ou Guimarães.

A empresa está também a considerar a hipótese de construir um armazém de venda directa ao público na mesma cidade em que instalar a fábrica.

Após ter efectuado um estudo económico do problema, a empresa estima que os valores presentes do investimento necessário e dos lucros associados a cada projecto serão os indicados na tabela seguinte:

	Braga		Guimarães	
	Lucro	Investimento	Lucro	Investimento
Fábrica	50430	32150	45720	29110
Armazém	19350	11030	22130	14370

A empresa dispõe de um máximo de 45000 U.M. para investir, e o seu objectivo é maximizar os lucros.

Apresente uma formulação adequada à resolução do problema.

---

**36.**

Uma empresa está a planear a possível introdução de quatro novos produtos. O Departamento de Gestão da Produção terá que decidir quais dos quatro produtos devem realmente ser produzidos, e a que níveis de produção.

Um custo substancial está associado à introdução de qualquer um dos produtos, como se pode ver na primeira linha da tabela seguinte. O lucro líquido esperado por cada unidade de um novo produto é dado na segunda linha da mesma tabela.

Produto:	1	2	3	4
Custo inicial (U.M.)	50000	40000	70000	60000
Lucro unitário (U.M.)	70	60	90	80

Se  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  representarem os níveis de produção para cada um dos produtos, e se o Departamento de Gestão considerar que:

- não poderão ser introduzidos mais do que dois novos produtos;
- o produtos 3 só poderá ser introduzido em conjunto com o produto 1 ou com o produto 2;
- só uma das restrições tecnológicas seguintes deverá ser efectiva:

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 6000$$

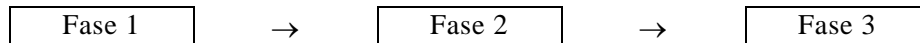
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 6000.$$

Formule o problema como um modelo de Programação Linear Inteira.

---

**37.**

O projecto EXPO-99 é constituído por três fases sequenciais e tem que estar concluído dentro de 18 meses.



O tempo necessário para completar cada uma das fases depende do método aplicado na sua execução. Presentemente, existem três métodos alternativos, designados por “Haldrabado”, “Halfacinha” e “Halentejano”, cujos tempos de execução constam da tabela seguinte:

Método	Tempo de execução (meses)
Haldrabado	5
Halfacinha	6
Halentejano	7

Os custos (UM) relativos à utilização de cada um destes métodos nas diversas fases do projecto constam da tabela seguinte:

Método	Fase 1	Fase 2	Fase 3
Haldrabado	18	11	23
Halfacinha	15	9	*
Halentejano	12	7	16

Há no entanto algumas restrições de carácter tecnológico a respeitar. Assim:

- O método escolhido para a execução das fases 1 e 2 deve ser o mesmo;
- A fase 3 não pode ser executada pelo método Halfacinha;
- O recurso ao método “Halfacinha” implica um custo fixo de 10 UM (qualquer que seja o número de fases executadas com este método).

Formule um modelo de programação inteira, que lhe permita determinar qual o método a ser usado em cada uma das fases, de modo a minimizar o custo do projecto, respeitando o prazo de conclusão.

---

**38.**

Uma companhia pretende estudar a implementação de  $n$  novos armazéns para fornecimento dos seus  $m$  clientes. A capacidade de fornecimento do armazém  $i$  é  $k_i$  e respectiva renda mensal que a companhia terá de pagar é  $R_i$ .

O cliente  $j$  tem uma necessidade mensal de  $P_j$  unidades. Finalmente, o custo de transporte unitário entre o armazém  $i$  e o cliente  $j$  é de  $C_{ij}$ .

Formule o problema enunciado.

## Programação Dinâmica

(Determinística)

**39.**

Um projecto constituído por três fases sequenciais tem que estar concluído em dez dias. O número de dias necessário para completar cada uma das fases depende dos recursos que são empregues na sua execução, de acordo com a seguinte tabela:

Tempo necessário (Dias)	Custo dos recursos empregues (U.M.)		
	Fase I	Fase II	Fase III
2	18	11	20
4	17	8	15
6	8	7	9
8	6	5	8

Determine qual a duração de cada uma das fases de modo a minimizar o custo total de execução do projecto.

**40.**

Uma empresa está a considerar a possível introdução de três novos produtos (A, B e C) no seu plano de produção. Os três produtos necessitam de dois tipos de matérias-primas, X e Y, para a sua manufacturação.

As quantidades de X e Y usadas na produção de 1, 2 ou 3 unidades dos produtos A, B e C são mostradas na tabela seguinte. A mesma tabela indica também a estimativa das margens de lucro (\$), em função das quantidades fabricadas (prevê-se que a empresa não terá qualquer dificuldade em vender os novos produtos fabricados).

Quantidade produzida (ton)	Produto								
	A			B			C		
	X	Y	\$	X	Y	\$	X	Y	\$
1	1	2	10	1	1	5	1	2	6
2	2	2	17	1	2	8	2	3	12
3	3	3	19	2	3	11	2	3	17

Por exemplo, a eventual produção de 3 ton de A, consumirá 3 ton de X e 3 ton de Y, e a sua venda permitirá obter um lucro total de 19 U.M..

Sabendo que a empresa terá disponíveis apenas 4 toneladas de cada tipo de matéria-prima, por semana, aconselhe o respectivo Departamento de Produção, relativamente às quantidades que deverão ser produzidas, de cada um dos novos produtos, de modo a maximizar o lucro esperado.

---

**41.**

Um grupo de homens de negócios está a planear a exploração de uma sala de jogo, com a colocação de mesas de jogo, com quatro variedades possíveis de jogo (“BlackJack, Poker, Craps e Roulette”), em 25 m<sup>2</sup> de área disponível para o efeito.

O lucro adicional por cada mesa com cada tipo de jogo é apresentado na tabela seguinte, bem como o espaço requerido (m<sup>2</sup>) por cada mesa.

Jogo	Espaço	Lucro Adicional por Mesa			
		1ª Mesa	2ª Mesa	3ª Mesa	4ª Mesa
BlackJack	12	10	7	4	1
Poker	6	9	9	8	8
Craps	12	11	10	9	8
Roulette	3	8	6	4	2

Exemplo: Uma mesa de BlackJack garante um lucro de 10 UM; Duas garantem um lucro de (10+7) UM; Três garantem um lucro de (10+7+4) UM e quatro garantem um lucro de (10+7+4+1) UM.

Quantas mesas com cada tipo de jogo devem ser instaladas na sala?

---

**42.**

O gestor do departamento de vendas de uma determinada empresa tem ao seu dispor 5 equipas de vendedores. Na fase inicial de uma nova campanha de vendas, foram definidas três áreas (A, B e C) de uma certa cidade às quais se pretende alocar as cinco equipas referidas.

O volume de vendas esperado (em U.M.), dependendo da área e do número de equipas a ela afectadas, é apresentado na seguinte tabela:

		Número de Equipas		
		1	2	3
Área	A	20	30	40
	B	25	40	50
	C	15	25	45

É pretendido que todas as áreas sejam visitadas pelo menos por uma equipa de vendas.

a) Recorrendo a um modelo de programação dinâmica, determina a afectação das equipas que maximiza o volume de vendas esperado.

b) A gestão do departamento de vendas tem a possibilidade de contratar uma equipa de vendedores altamente qualificados, exterior à empresa, por um preço de 30 U.M.. Para qualquer área que se desloque a nova equipa, espera-se que o volume de vendas duplique. Indique, sem resolver, como incorporaria no modelo que utilizou na alínea anterior este novo dado.

---

**43.**

Uma companhia planeia uma expansão em três fases. Durante o primeiro ano podem ser encomendadas uma, duas ou três fases; pelo menos duas fases devem estar completas no final do segundo ano e as três fases devem estar completas dentro de três anos. O trabalho de construção só pode ser encomendado no princípio de cada ano, e é completado e pago no final do ano, independentemente do número de fases envolvidas.

Determine a política de construção de custo mínimo, atendendo a que os custos são dados na tabela anexa e que os custos futuros devem ser descontados com  $b = 0.75$ .

		CUSTO (\$ milhões)		
		Ano 1	Ano 2	Ano 3
Número de fases iniciadas no ANO	1	7.5	7.5	7
	2	12	15	—
	3	18	—	—

---

**44.**

Uma companhia mineira ganhou um concurso para um contrato de 5 anos para a exploração de uma mina de carvão.

A companhia pretende adquirir uma escavadora no início do primeiro ano de contrato. No princípio de cada ano subsequente, a companhia pode decidir manter a máquina ou, em alternativa, substituir a mesma por uma nova. Um estudo estatístico relativo à depreciação anual e custos de reparação para máquinas para diferentes idades conduziu aos valores médios indicados na tabela seguinte:

Idade da máquina no princípio do ano	0	1	2	3	4
Custo durante o ano (U.M.)	31	25	28	32	35

Qual deverá ser a política de aquisições e/ou substituições da dita companhia, por forma a minimizar os respectivos custos totais no período do contrato? Considere os dois casos seguintes:

Os custos indicados não estão sujeitos a descontos.

Os custos futuros (a partir do 2º ano inclusive) devem ser descontados com uma taxa de juro anual de 25%.

---

**45.**

Um satélite de comunicações consiste em quatro sub-sistemas electrónicos ligados em série. A confiança de funcionamento para um período de 10 anos para qualquer estágio (isto é, a probabilidade de continuar a funcionar satisfatoriamente por pelo menos 10 anos) pode ser aumentada ligando um ou dois sub-sistemas redundantes em paralelo com o sub-sistema básico, por forma a que quando uma falha ocorre, um dos sub-sistemas é introduzido, substituindo a unidade que falhou. A confiança para 10 anos, para cada estágio, para um nível particular de redundância e o custo por unidade de cada subsistema são indicados na seguinte tabela:

		Número do subsistema			
		1	2	3	4
Número de redundâncias	0	0.4	0.3	0.6	0.5
	1	0.7	0.5	0.7	0.7
	2	0.9	0.6	0.8	0.8
Custo por unidade		6	6	3	2

Com a restrição do custo total do satélite não exceder 35 UM, que redundâncias devem ser incluídas para que a confiança (global) de 10 anos seja maximizada? (Considere que as probabilidades de falha dos vários estágios são independentes.)



---

**46.**

O gestor de operações de uma determinada companhia aérea debate-se com o seguinte problema: todos os dias, à mesma hora, em pistas diferentes, chegam ao aeroporto três aviões (A1, A2 e A3) que têm de ser inspeccionados antes de efectuarem novo voo. Para realizarem essa tarefa existem 3 equipas de manutenção (M1, M2 e M3), com diferentes características (diferente número de técnicos de mecânica, de telecomunicações, de electrónica, Tc...).

O tempo necessário a completar a inspecção de cada avião dependendo da equipa utilizada é o indicado na tabela (em minutos).

		Avião		
		A1	A2	A3
Equipa de Manutenção	M1	50	30	40
	M2	40	40	55
	M3	45	45	50

Utilizando um modelo de programação dinâmica, determine a solução para o problema com que se debate o gestor de operações, considerando que o seu objectivo é ter todos os aviões inspeccionados no menor período de tempo possível.

---

**47.**

Um avião deve voar de A para K através da rede a seguir apresentada. Os números ao longo dos arcos representam o consumo de combustível em cada etapa da viagem.

Usando uma formulação de programação dinâmica, determine qual o percurso que permitirá a maximização da capacidade de carga do avião entre A e K, sabendo que esta é uma função inversa da quantidade de combustível necessária para cada etapa do percurso.

