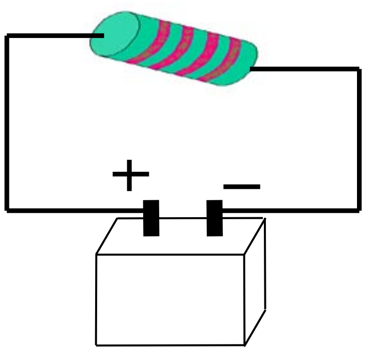
6. CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

- Análise de circuitos simples que incluem baterias, R e C, diversamente combinados.
- A análise é simplificada pelo uso das duas *Leis de Kirchhoff*.
- As regras são consequência das *leis da conservação da energia e da conservação da carga*.

6.1. Força Electromotriz

Uma ***fonte de força electromotriz*** (fem) é um dispositivo qualquer (uma bateria ou um gerador) que aumenta a energia potencial das cargas que circulam num circuito.

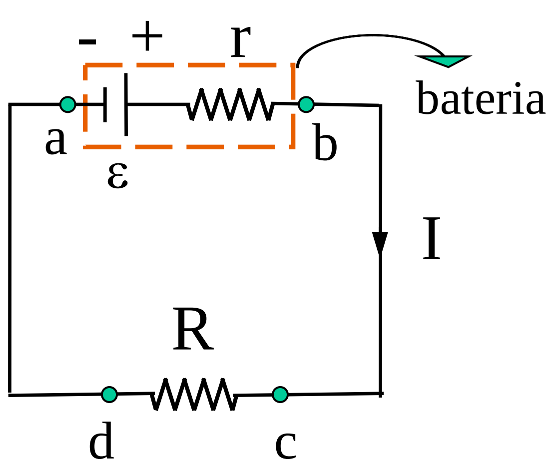
A fem, **ε**, duma fonte é medida pelo trabalho feito sobre uma carga unitária. A unidade SI de fem é o volt.



- Vamos admitir que os fios de ligação têm resistência desprezável.
- Se desprezarmos a resistência interna (r) da bateria $\Rightarrow$ ΔV na bateria (o potencial entre os terminais) será igual à fem da bateria.

- Uma *bateria real* tem sempre uma certa *resistência interna*, por isso o potencial (V) entre os terminais é diferente da fem da bateria.

- Para uma carga (+) deslocando-se entre "a" e "b" ⇒ quando passa do terminal (–) para o terminal (+) da bateria, o seu potencial aumenta de ε; ao deslocar-se através de r, o seu potencial diminui de $I \cdot r$ (I = corrente no circuito)

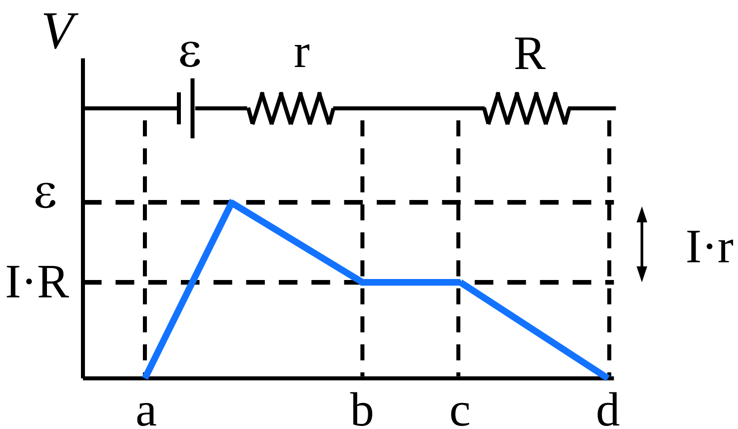


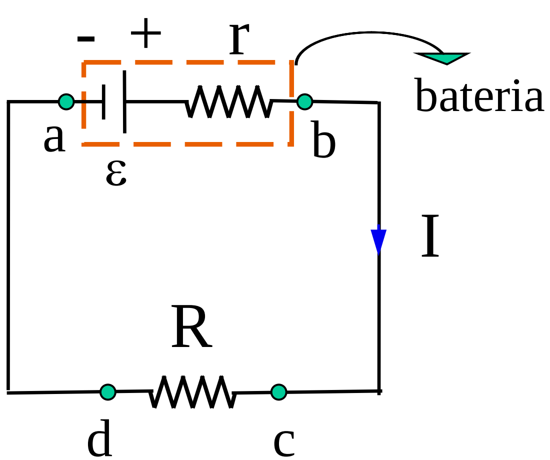
$$\Rightarrow \quad \boxed{V = V_b - V_a = \varepsilon - I \cdot r}$$

entre os terminais

da bateria

- ε é a voltagem (potencial) em circuito aberto; i.e., a voltagem entre os terminais quando a corrente é nula.
- Variações de potencial (V) quando o circuito for percorrido no sentido a, b, c, d:





- A voltagem, V, entre os terminais da bateria é igual à diferença de potencial na resistência (muitas vezes denominada de resistência de carga): $V = I \cdot R$

$$\left.\begin{aligned} V &= \varepsilon - Ir \\ V &= IR \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon = IR + Ir\,, \qquad \boxed{I = \frac{\varepsilon}{R + r}}$$

I depende de *r* e da *R*

Quando $R \gg r \Rightarrow$ podemos desprezar *r* na análise.

$$\boxed{I\varepsilon = I^2 \cdot R + I^2 \cdot r}$$

(multiplicando ambos os membros por I)

$$\boxed{P = I \cdot V}$$

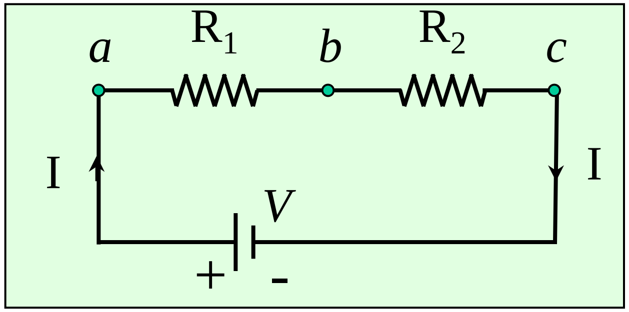
A potência total debitada pela fonte de fem, $I\varepsilon$, converte-se em potência dissipada pelo efeito Joule na resistência de carga, I^2R, mais a potência dissipada na resistência interna da fonte, I^2r.

Se $R \gg r \Rightarrow$ a maior parte da potência da bateria transfere-se para a resistência de carga.

$\Rightarrow$ Exercício 1

Universidade do Minho

a) Resistências em Série



A corrente é a mesma através de ambas as resistência, pois qualquer carga que passa por R_1 também passa por R_2

Queda de potencial entre *a* e *b* = IR_1

Queda de potencial entre *b* e *c* = IR_2

A queda de potencial de *a* para *c*:

$$\boxed{V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)}$$

- Podemos substituir os dois R em série por uma única resistência equivalente (R_{eq}),

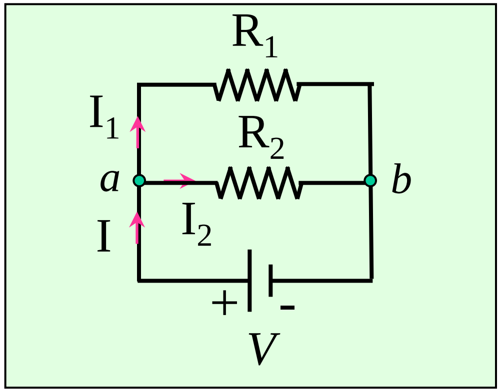
$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

- R_{eq} é equivalente à combinação em série $R_1 + R_2$ porque a intensidade de corrente (I) no circuito será a mesma se R_{eq} substituir $R_1 + R_2$
- Três ou mais resistências ligadas em série:

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots}$$

- A R_{eq} de resistências em série é sempre maior do que qualquer das resistências individuais.

b) Resistências em Paralelo



- A diferença de potencial é a mesma em ambas as resistências.
- A corrente não é, em geral, a mesma em todas as resistências.
- Quando I atinge "a" (um nó), divide-se em duas partes, I_1 pelo ramo R_1, e I_2 pelo ramo R_2. Se $R_1 > R_2 \Rightarrow I_1 < I_2$. A carga tende a seguir a via de menor resistência.
- A carga dever ser conservada $\Rightarrow$ $I = I_1 + I_2$ (a corrente I que entra no nó "a" deve ser igual à corrente que sai deste nó, $I_1 + I_2$)

- Uma vez que a queda de potencial em cada R é a mesma, a lei de Ohm dá:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \rightarrow \qquad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Para três ou mais resistências

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

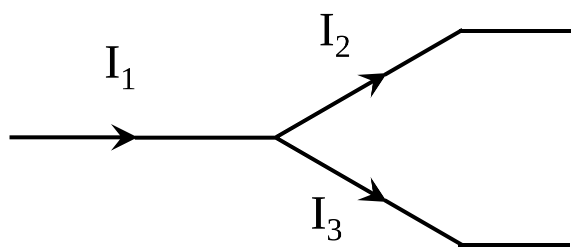
- Cada nova resistência ligada em paralelo com uma ou mais resistências diminui a R_{eq} do conjunto.

$\Rightarrow$ Exercícios 2/3

6.3. As Regras de Kirchhoff

- Muitas vezes não é possível reduzir um circuito a uma simples malha que possa ser analisada pela Lei de Ohm e as regras das ligações das resistências em série ou em paralelo.
- A análise de circuitos mais complicados pode simplificar-se pelo uso de duas regras simples, as ***Leis de Kirchhoff***:
    1. A *soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó* (um nó é qualquer ponto do circuito onde é possível a divisão da corrente) $\Rightarrow$ **Lei dos Nós**
    2. A *soma algébrica das variações de potencial em todos os elementos duma malha fechada do circuito é nula* $\Rightarrow$ **Lei das Malhas**

- A primeira regra, Lei dos Nós, é um enunciado da *conservação da carga*: qualquer carga que chega a um dado ponto do circuito, deve abandonar esse ponto, pois não pode haver acumulação de carga em nenhum ponto.



$$\boxed{I_1 = I_2 + I_3}$$

- A segunda regra, Lei das Malhas, é consequência da *conservação da energia*: qualquer *carga* que se desloque ao longo de qualquer malha fechada num circuito (começa e termina o deslocamento no mesmo ponto) deve ganhar tanta energia como aquela que perder.

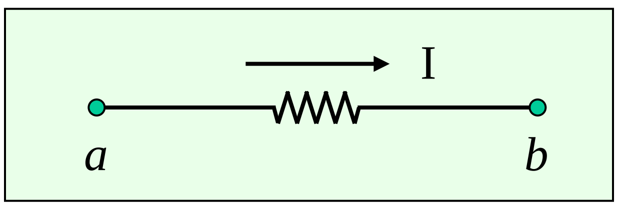
- Uma carga pode ver a sua energia diminuir, na forma de uma queda de potencial (-IR), por exemplo, ao atravessar uma resistência, ou vê-la aumentar na forma de um potencial **ε**, por exemplo, se atravessar uma *fem*.

$$\boxed{\sum_i \Delta V_i = 0}$$

- Aplicação da segunda regra de Kirchhoff: Lei das Malhas

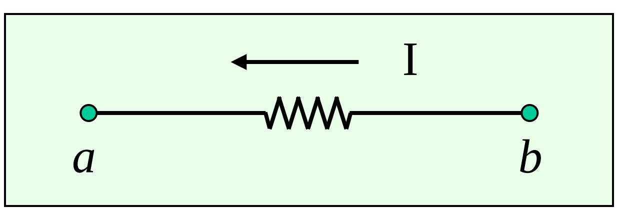
  Regras de cálculo:

1. Se uma resistência for atravessada na direcção da corrente, a variação do seu potencial (ΔV) é **-IR**



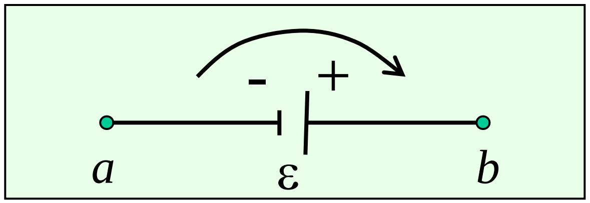
$$\boxed{\Delta V = V_b - V_a = -IR}$$

2. Se a resistência for atravessada numa direcção oposta à de I $\Rightarrow$ a variação do seu potencial (ΔV) é **+IR**



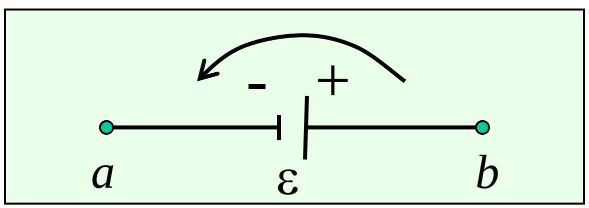
$$\boxed{\Delta V = V_b - V_a = +IR}$$

3. Se uma fonte de fem for atravessada na direcção da fem (***do terminal (-) para o (+)***), a ΔV é **+ε** >> salto de potencial



$$\Delta V = V_b - V_a = +\varepsilon$$

4. Se uma fonte de fem for atravessada na direcção oposta à da fem (***do treminal (+) para (-)***), a ΔV é **- ε** >> queda de potencial



$$\Delta V = V_b - V_a = -\,\varepsilon$$

Circuitos de corrente contínua

! A lei das malhas pode ser usada desde que em cada nova equação apareça um novo elemento do circuito (R ou ) ou uma nova I.

* Em geral o número de vezes que a lei dos nós deve ser usada é uma unidade menor que o número de nós no circuito.

- O número de equações independentes de que se precisa deve ser pelo menos igual ao número de incógnitas, para que um certo problema seja solúvel.
- Redes complicadas $\Rightarrow$ grande número de eq. lineares independentes e grande número de incógnitas $\Rightarrow$ álgebra de matrizes (ou programas de computador)
- Admite-se que os circuitos estejam em estado estacionário, e as correntes (I) nos diversos ramos sejam constantes.
- Se um condensador (C) aparecer como componente dum ramo, esse C actua como um interruptor aberto no circuito, e a I no ramo onde estiver será nula.

Estratégia e sugestões para a resolução de problemas:

1. Faça o diagrama do circuito e identifique, com nomes ou símbolos, todas as grandezas conhecidas e desconhecidas.
2. Em cada parte do circuito, atribua uma direcção a I. (*)
3. Aplique a Lei dos Nós (1ª regra)
4. Aplique a Lei das Malhas (2ª regra). Tenha atenção aos sinais!!!
5. Resolva o sistema de equações.

* Não fique preocupado se fizer uma escolha incorrecta do sentido duma corrente: nesse caso, o resultado terá o sinal negativo, mas o seu valor estará correcto. Embora seja arbitrária a fixação inicial da direcção de I, a partir daí é indispensável respeitá-la RIGOROSAMENTE ao aplicar as regras de Kirchhoff.

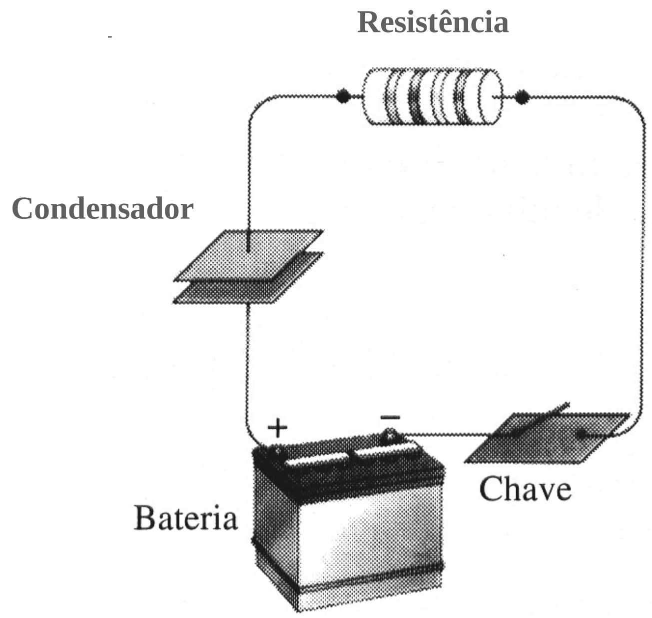
⇒ Exercício 6.5

6.4. Circuitos RC

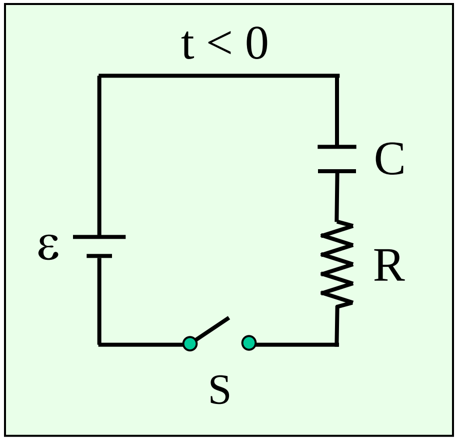
! Até agora: circuitos com as correntes constantes, os circuitos em estado estacionário.

! Agora: circuitos com condensadores, nos quais as ***correntes podem variar com o tempo***.

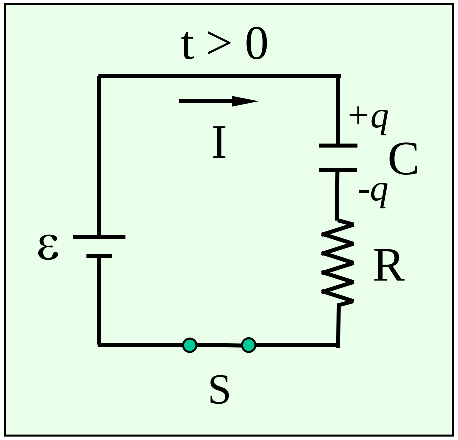
Quando se aplica uma diferença de potencial a um condensador descarregado, a velocidade de carga do condensador depende da sua capacidade e da resistência do circuito.



I - Carregando um Condensador



- **C** inicialmente descarregado.
- Quando o interruptor **S** estiver aberto ⇒ não há corrente (I) no circuito.
- Se **S** for fechado (t = 0) ⇒ estabelece-se uma corrente (I) ⇒ principia a carga do condensador (C).



- Há transferência de ***carga*** da placa esquerda para a placa da direita do condensador, através de **R**, **S** e **ε**, até que o **C** adquira a plena carga.
- O valor da $\mathbf{q_{max}}$ depende da **fem** da bateria.
- Uma vez atingida esta $\mathbf{q_{max}}$ a **I** no circuito anula-se.

Discussão Quantitativa:

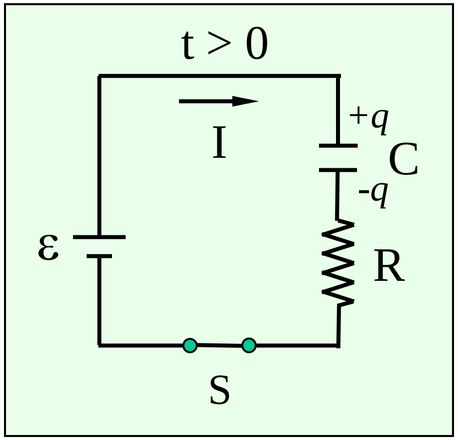
Aplicamos a lei das malhas (Kirchhoff), ao circuito depois de S ter sido fechado $\Rightarrow$

$$V = \frac{q}{C}$$

(1) $$\boxed{\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0}$$

queda de potencial no **C**

queda de potencial na **R**



! q e I são valores instantâneos durante o processo de carga do C.

Podemos usar (1) para achar a I inicial no circuito e a q_{max} no condensador.

- Em t = 0, o interruptor S é fechado ⇒ a carga no C é zero.

⇒ de 1 temos que a corrente inicial no circuito, **I_0, é máxima**: $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$

! Nesse instante, a queda de potencial ocorre inteiramente na resistência.

- No Fim, quando o C estiver com a sua $\mathbf{q_{max} = Q}$ ⇒ cessa o movimento das cargas ⇒ **I = 0**

- ! A queda de potencial ocorre inteiramente no C

Substituindo **I = 0** em 1 $\varepsilon - \underbrace{\cancel{IR}}_{0} - \frac{Q}{C} = 0$

⇒ **Q = Cε** (***carga máxima***)

- Dependência temporal da carga (q) e da corrente (I) durante a carga

Universidade do Minho

1 $\longrightarrow$ $$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon-\frac{q}{C}-IR\right)=0-\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}-R\frac{dI}{dt}=0$$

$$I=\frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon=cte\Rightarrow\frac{d\varepsilon}{dt}=0$$

$$-\frac{1}{C}I-R\frac{dI}{dt}=0\Leftrightarrow R\frac{dI}{dt}=-\frac{I}{C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt$$

R e ***C*** são constantes $\Rightarrow$ esta equação pode ser integrada, com a condição inicial:

$I = I_0$ em $t = 0$

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I}=\int_0^t-\frac{1}{RC}dt\Leftrightarrow \ln I-\ln I_0=-\frac{1}{RC}t\Leftrightarrow \ln\frac{I}{I_0}=-\frac{1}{RC}t\Leftrightarrow I=I_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

Obtemos assim:

Universidade do Minho

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}} \quad (2)$$

Dependência temporal da corrente (*I*)

A fim de achar a carga no ***C***, em função de ***t***, podemos substituir $I = \dfrac{dq}{dt}$ e $I_0=\varepsilon/R$ na eq. (2) e integrar:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \Leftrightarrow dq = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} dt$$

Usando q = 0 em t = 0 $\Rightarrow$ $$\int_0^q dq = \frac{\varepsilon}{R}\int_0^t e^{-t/RC} dt$$

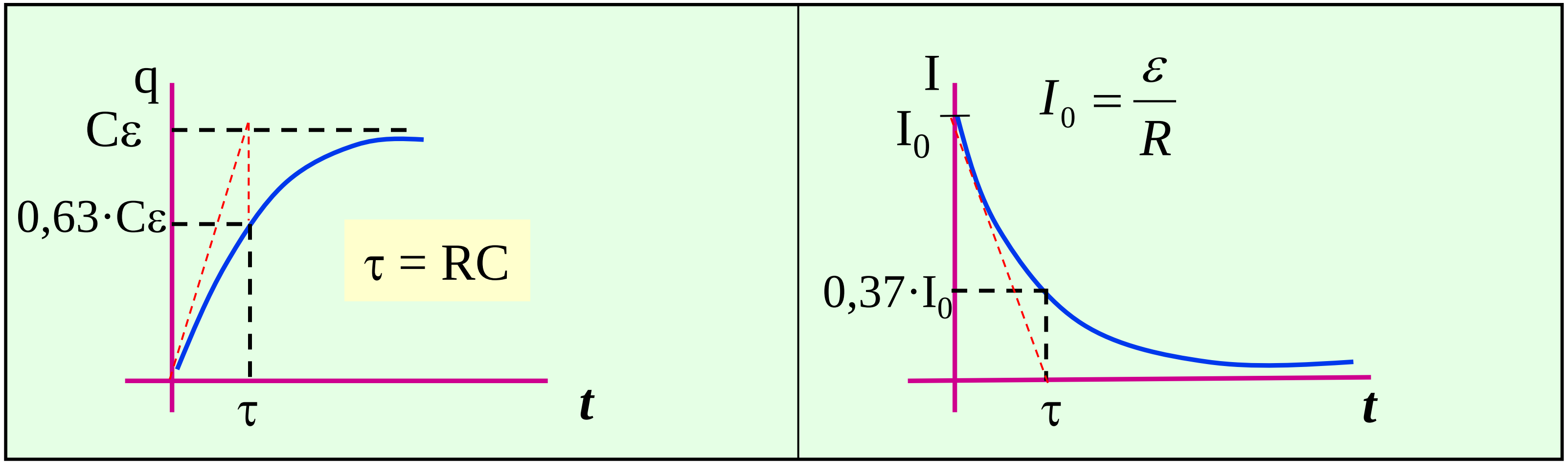
$$usando \int e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \quad ,vem: \Rightarrow$$

Gráficos da evolução da carga e corrente num circuito RC durante o carregamento do condensador

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \Leftrightarrow \int_0^q dq=\frac{\varepsilon}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{RC}}dt \Leftrightarrow q(t)=\frac{\varepsilon}{R}\cdot(-RC)\cdot\left[e^{-\frac{t}{RC}}-e^0\right]$$

$$\boxed{q(t)=C\varepsilon\left[1-e^{-t/RC}\right]=Q\left[1-e^{-t/RC}\right]} \quad 3$$

Q → q_{max} no C



3 2

- $q = 0$ em $t = 0$; $q \to q_{max} = C\varepsilon$ quando $t \to \infty$
- $I_{max} = I_0 = \varepsilon/R$ em $t = 0$ e decai exponencialmente até zero quando $t \to \infty$

- A grandeza RC das Eqs. é a ***constante de tempo***, τ, do circuito $\to$ O tempo necessário para I decrescer para o valor 1/e do seu valor inicial.

- No tempo τ, $I = e^{-1}.I_0 = 0.37\ I_0$

  No tempo 2τ $I = e^{-2}.I_0 = 0.135\ I_0$

- Da mesma forma, no tempo τ a carga aumentará de zero até

$$C\varepsilon\left[1 - e^{-1}\right] = 0.63\ C\varepsilon$$

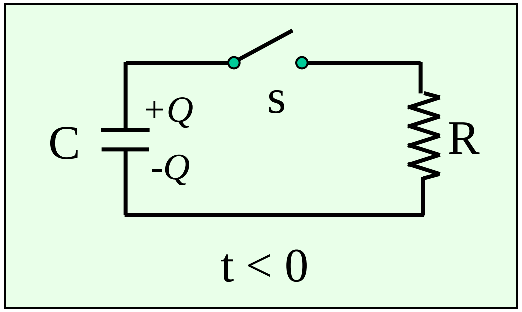
$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{V}{I} \times \frac{Q}{V}\right] = \left[\frac{Q}{Q/T}\right] = [T]$$ $\leftarrow$ Dimensão de tempo

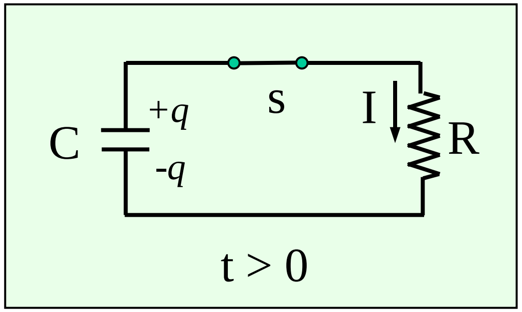
Trabalho feito pela bateria no processo de carga $|W|=Q\cdot\varepsilon = C\varepsilon\cdot\varepsilon = C\varepsilon^2$

C completamente carregado $\rightarrow$ energia no C: $U=½Q\varepsilon = ½C\varepsilon^2$ = metade do W feito pela bateria.

$\rightarrow$ A outra metade da energia é dissipada como calor na **R**, por efeito de Joule.

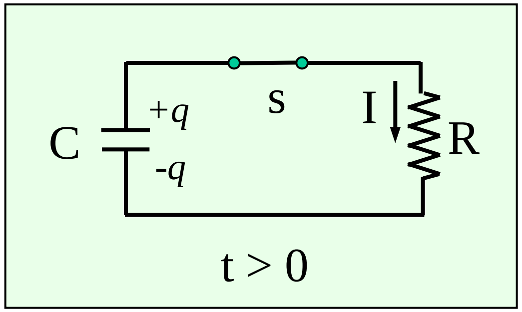
II - Descarga de um Condensador





- Carga inicial do C $\rightarrow$ Q
- t < 0, interruptor (S) aberto $\Rightarrow$ V = Q/C no C

  V = 0 na R (I = 0)
- t = 0, interruptor (S) fechado $\Rightarrow$ o condensador inicia a descarga através da resistência.
- Num determinado instante t $\Rightarrow$ corrente = I, carga = q
- 2ª lei de Kirchhoff (lei das malhas) $\Rightarrow$ **$-IR + q/C = 0$** (4)
- A queda de potencial na resistência é igual à diferença de potencial no condensador.



Durante a descarga do condensador, a corrente no circuito é igual à taxa de diminuição da carga no C, **I = -dq/dt**

4 ⇨

$$IR = \frac{q}{C} \Leftrightarrow -\frac{dq}{dt}R = \frac{q}{C} \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

Integrando, com a condição inicial q = Q em t = 0

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt, \quad \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow \boxed{q(t) = Qe^{-t/RC}}$$

Derivando a equação em ordem ao tempo ⇒

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[Qe^{-t/RC}\right] = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \rightarrow \boxed{I(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$

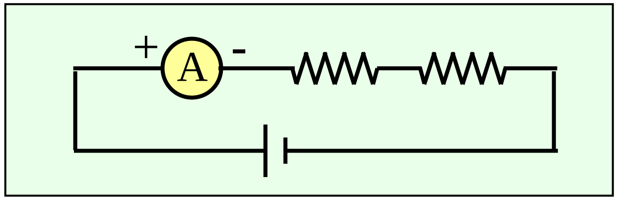
Onde **I_0 =ε/R= Q/RC** (corrente inicial)

A carga no C e a I no circuito decrescem exponencialmente a uma taxa caracterizada pela *constante de tempo* **τ = RC**

⇒ Exercício 6.7

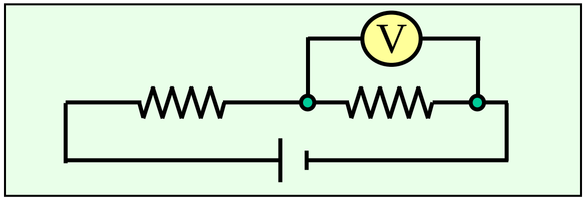
6.5. Instrumentos Eléctricos

- O Amperímetro → aparelho que mede corrente eléctrica



No caso ideal, um amperímetro deve ter resistência nula, de modo a não alterar a corrente a ser medida.

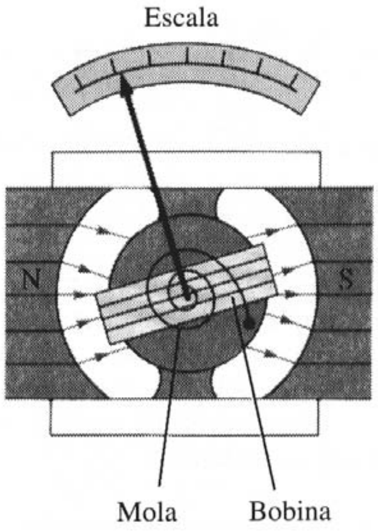
- O Voltímetro → dispositivo que mede diferenças de potencial.



Um voltímetro ideal tem resistência infinita, de modo que não haja passagem de corrente através dele.

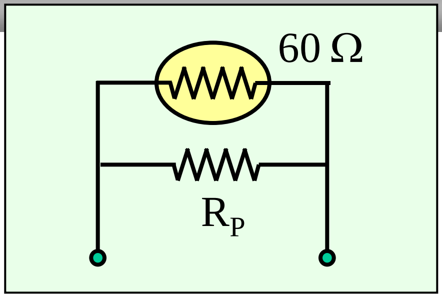
Ter sempre em conta a polaridade do instrumento!!

- O Galvanómetro $\rightarrow$ é o principal componente dos amperímetros e dos voltímetros.
    - A operação do galvanómetro baseia-se no facto de haver um momento sobre uma espira de corrente na presença dum campo magnético.
    - O momento sobre a bobina é proporcional à corrente na bobina: a deflexão angular da bobina é proporcional à corrente.



Galvanómetro típico $\Rightarrow$ R ~ 60 Ω

Galvanómetro num Amperímetro



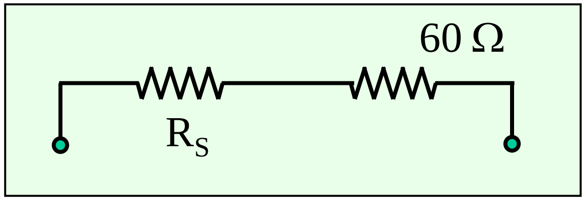
R_P – resistência shunt

$R_P << R_G$

Exemplo: para medir uma I = 2A com um galvanómetro,

$R_G = 60\ \Omega \Rightarrow R_P \sim 0.03\ \Omega$

Galvanómetro num Voltímetro



$R_S >> R_G$

Exemplo: para medir uma V_{max} = 100V com um galvanómetro, $R_G = 60\ \Omega \Rightarrow R_S \sim 10^5\ \Omega$