Capítulo 1 - Funções reais de variável real

1.4 Algumas funções importantes

A. Funções trigonométricas diretas

B. Funções trigonométricas inversas

C. Funções hiperbólicas diretas

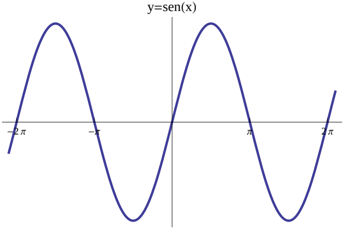
D. Funções hiperbólicas inversas

A. Funções trigonométricas diretas

As funções seno , cosseno , tangente e cotangente são contínuas e periódicas nos respetivos domínios. Todas elas são funções não injetivas e, portanto, não possuem inversa.

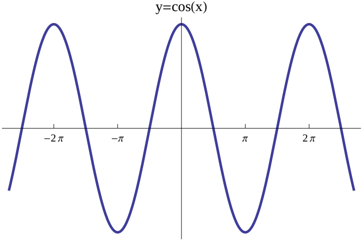
Seno

$y = \operatorname{sen} x$
$\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im}(\operatorname{sen}) = [-1, 1]$



Cosseno

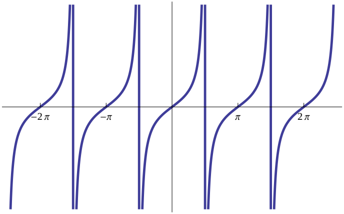
$y = \cos x$
$\operatorname{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im}(\cos) = [-1, 1]$



Tangente

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

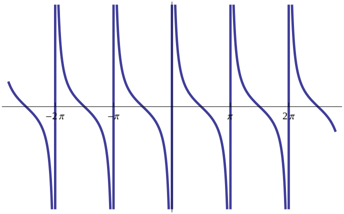
$\mathrm{Dom}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\mathrm{Im}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$



Cotangente

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$\mathrm{Dom}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$
$\mathrm{Im}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$



A. Funções trigonométricas diretas

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

1. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$; (fórmula fundamental da trigonometria)
2. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$; (a função seno é ímpar)
3. $\cos(-x) = \cos x$; (a função cosseno é par)
4. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \, \cos y + \operatorname{sen} y \, \cos x$; (fórmula da adição para o seno)
5. $\cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} y$. (fórmula da adição para o cosseno)

A. Funções trigonométricas diretas

Da igualdade 1. deduz-se

6. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

7. $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad x \neq k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Das igualdades 4. e 5. anteriores, deduz-se ainda

8. $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \, \cos x;$ (fórmula da duplicação para o seno)

9. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x;$ (fórmula da duplicação para o cosseno)

10. $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \, \cos y - \operatorname{sen} y \, \cos x;$

11. $\cos(x - y) = \cos x \, \cos y + \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} y.$

A. Funções trigonométricas diretas

Alguns valores das funções seno , cosseno , tangente e cotangente são apresentados na tabela seguinte:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$n.d.$
$\operatorname{cotg} x$	$n.d.$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

B. Funções trigonométricas inversas

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijetivas definidas em intervalos. A injetividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejetividade será obtida eliminando do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim definidas serão também contínuas.

B.1 Arco-seno

Relativamente à função seno, convencionamos considerar a restrição bijetiva

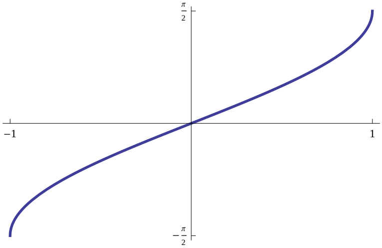
$$\begin{array}{rccl} \text{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \text{sen}\, x\,. \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-seno – lê-se *arco (cujo) seno* – é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \text{arcsen}\, y\,, \end{array}$$

onde $\text{arcsen}\, y$ indica o único arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a y. Assim,

$$x = \text{arcsen}\, y\,,\ y \in [-1,1] \iff y = \text{sen}\, x\,,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



$y = \text{arcsen}\, x$, $x \in [-1,1]$, $\text{Im}(\text{arcsen}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

B. Funções trigonométricas inversas

Pelo facto de sen e arcsen serem inversas uma da outra, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) &= x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y) &= y, \quad \forall y \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z)$, para $z \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z) \neq z\,, \quad \forall z \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

uma vez que $\operatorname{Im}(\operatorname{arcsen}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

B. Funções trigonométricas inversas

Exemplos

1. $\operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$,

   $\operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$,

   $\operatorname{arcsen} \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

   De facto, $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}$ *e* $-\dfrac{\pi}{3}$ *são os únicos arcos do intervalo* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *onde o seno é, respetivamente, igual a* 1 , $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. *Tem-se, por exemplo,*

$$\operatorname{sen}(3\pi) = 0 \text{ e } \operatorname{sen}(8\pi) = 0,$$

mas $\operatorname{arcsen} 0 = 0$.
Porque 0 *é o único arco do intervalo* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *onde o seno é igual a* 0 .

B. Funções trigonométricas inversas

B2. Arco-cosseno

Relativamente à função cosseno, convencionou-se considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x\,. \end{array}$$

A sua inversa, que se designa por arco-cosseno – lê-se *arco (cujo) cosseno* – é a função

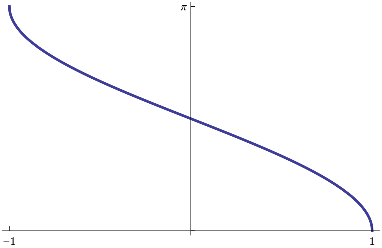
$$\begin{array}{rccl} \arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \arccos y\,, \end{array}$$

onde $\arccos y$ indica o único arco do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual a y.

B. Funções trigonométricas inversas

Assim,

$$x = \arccos y\,,\ y \in [-1, 1] \iff y = \cos x\,,\ x \in [0, \pi]\,.$$



$$y = \arccos x,\ x \in [-1, 1],\ \mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$$

B. Funções trigonométricas inversas

Atendendo a que as funções cos e arccos são inversas uma da outra, tem-se

$$\arccos(\cos x) = x\,, \quad \forall x \in [0, \pi]\,,$$
$$\cos(\arccos y) = y\,, \quad \forall y \in [-1, 1]\,.$$

Por outro lado, uma vez que $\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$, tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z\,, \quad \forall z \notin [0, \pi]\,.$$

Exemplos

1. $\arccos 1 = 0\,, \quad \arccos(-1) = \pi\,, \quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}\,.$

2. $\arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi\,,$

   $\arccos\left(\cos \dfrac{25\pi}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}\,.$

B. Funções trigonométricas inversas

B3. Arco-tangente

Relativamente à função *tangente*, consideramos a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{tg}: & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x\,. \end{array}$$

A sua inversa, designada por arco-tangente – lê-se *arco (cuja) tangente* – é a função

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \longmapsto & \mathrm{arctg}\, y, \end{array}$$

onde $\mathrm{arctg}\, y$ indica o único arco do intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a y.

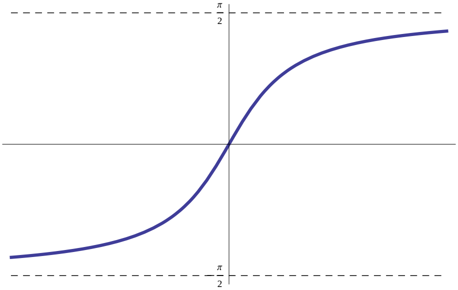
B. Funções trigonométricas inversas

Assim,

$$x = \operatorname{arctg} y, \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}$$

se e só se

$$y = \operatorname{tg} x\,,\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$



$y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(\operatorname{arctg}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

B4. Arco-cotangente

Relativamente à função co-tangente , consideramos a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccl} \text{cotg}: &]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{cotg}\, x, \end{array}$$

cuja inversa é a função arco-cotangente – lê-se *arco (cuja) cotangente* – definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{arccotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & y & \longmapsto & \text{arccotg}\, y, \end{array}$$

onde $\text{arccotg}\, y$ indica o único arco do intervalo $]0,\pi[$ cuja cotangente é igual a y.

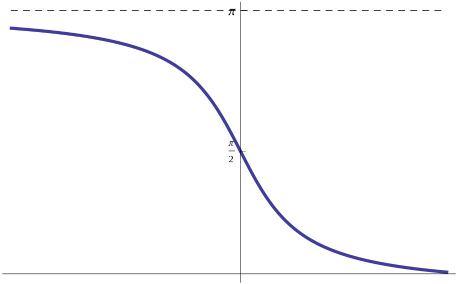
B. Funções trigonométricas inversas

Assim,

$$x = \operatorname{arccotg} y, \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}$$

se e só se

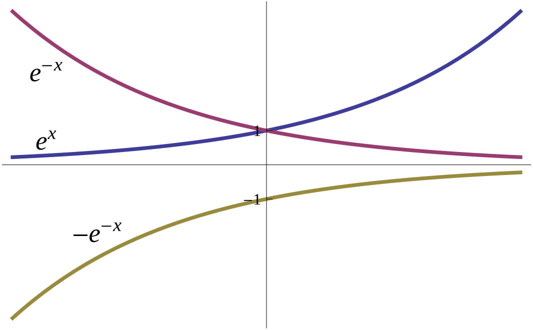
$$y = \operatorname{cotg} x\,,\ x \in\,]0, \pi[\,.$$



$y = \operatorname{arccotg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{arccotg}) =]0, \pi[$

C. Funções hiperbólicas diretas

Vamos agora introduzir as funções hiperbólicas , apresentar algumas das suas propriedades e esboçar os seus gráficos. São funções que resultam de combinações de exponenciais e possuem propriedades semelhantes, do ponto de vista formal, às das funções trigonométricas.

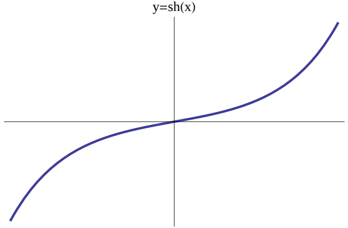


C1. Seno hiperbólico

O seno hiperbólico é a função

$$\begin{array}{rccc} \text{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injetiva. Possui um único zero, a origem. Além disso, $\lim_{x\to+\infty} \text{sh}\, x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \text{sh}\, x = -\infty$.



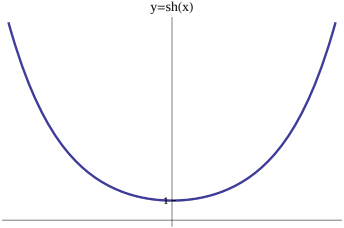
$y = \text{sh}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, $\text{Im}(\text{sh}) = \mathbb{R}$

C2. Cosseno hiperbólico

O cosseno hiperbólico é a função

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}.$$

Trata-se de uma função contínua e par. Logo, não é injetiva. Não possui zeros e atinge um mínimo na origem, com valor $\mathrm{ch}\, 0 = 1$. Além disso, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\, x = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$.



$y = \mathrm{ch}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im(ch)} = [1, +\infty[$

C3. Tangente hiperbólica

A tangente hiperbólica é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \text{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}, \end{array}$$

ou seja, por

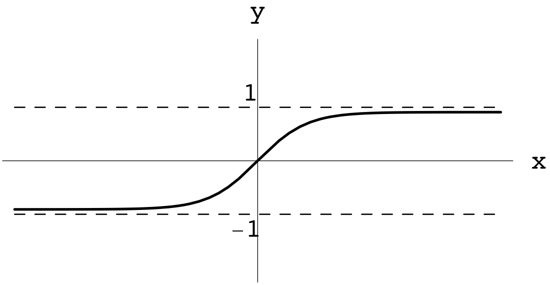
$$\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injetiva. Possui um único zero, em 0. Além disso,

$$\lim_{x\to+\infty} \text{th}\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{e^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}} = 1.$$

C3. Tangente hiperbólica

O gráfico da th possui, portanto, uma assímptota horizontal de equação $y = 1$, para $x \to +\infty$. Da imparidade da th, existe outra assímptota horizontal de equação $y = -1$, para $x \to -\infty$. Tem-se ainda Im(th) $=]-1, 1[$.



$y = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{th}) =]-1, 1[$

C4. Cotangente hiperbólica

A cotangente hiperbólica é a função definida por

$$\begin{array}{rccc} \coth : & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \end{array}$$

ou seja, por

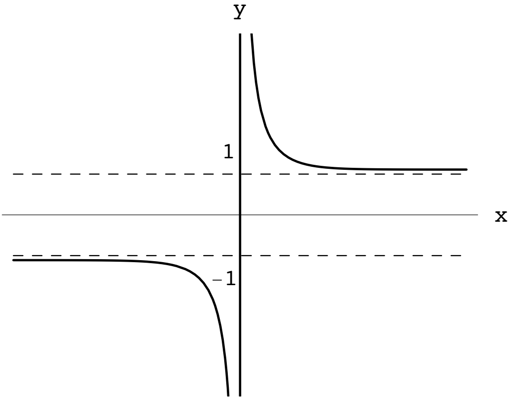
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \, , \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e sem zeros. Apesar de não ser monótona, é estritamente decrescente para $x > 0$, onde toma valores positivos, e para $x < 0$, onde toma valores negativos. Logo é injetiva. Da definição sai que

$$\lim_{x \to 0^+} \coth x = +\infty \, , \qquad \lim_{x \to +\infty} \coth x = 1.$$

C4. Cotangente hiperbólica

O gráfico da coth possui, portanto, uma assímptota horizontal de equação $y = 1$, para $x \to +\infty$, e uma assímptota vertical de equação $x = 0$. Da imparidade da coth, existe outra assímptota horizontal de equação $y = -1$, para $x \to -\infty$. Tem-se ainda $\mathrm{Im}(\coth) = \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$.



$y = \coth x$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\mathrm{Im}(\coth) = \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$

C5. Algumas propriedades

Com manipulações algébricas simples, é fácil verificar que estas funções hiperbólicas verificam as seguintes propriedades:

i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

ii) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

iii) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

iv) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

v) $\operatorname{th}^2 x + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

vi) $\operatorname{coth}^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

vii) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \ \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \ \operatorname{sh} y\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

viii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \ \operatorname{sh} y\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

C5. Algumas propriedades

Demonstração

i) Seja $x \in \mathbb{R}$, qualquer. Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1.
\end{aligned}$$

viii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, quaisquer. Então

$$\operatorname{ch} x \ \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \ \operatorname{sh} y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \operatorname{ch}(x+y).$$

As restantes alíneas demonstram-se de maneira semelhante.

D. Funções hiperbólicas inversas

Vamos agora definir as funções hiperbólicas inversas. Como vimos anteriormente, as funções sh, th e coth são injetivas, enquanto que a função ch não é injetiva e, portanto, não será invertível. Para esta última, iremos considerar uma restrição apropriada.

D.1 Argumento do seno hiperbólico

A função sh é contínua, bijetiva e possui inversa contínua. Trata-se da função argumento do seno hiperbólico , que se define por

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argsh} y, \end{array}$$

onde

$$x = \operatorname{argsh} y\,,\ y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{sh} x\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Mas, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{sh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

A última condição em (1) traduz uma equação do segundo grau na incógnita e^x. Tratando-a com a fórmula resolvente, sai

$$e^x \;=\; y \pm \sqrt{y^2 + 1}\,,$$

sendo a solução com o sinal $+$ a única admissível, uma vez que

$$e^x > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad y - \sqrt{y^2 + 1} < 0\,,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Mas

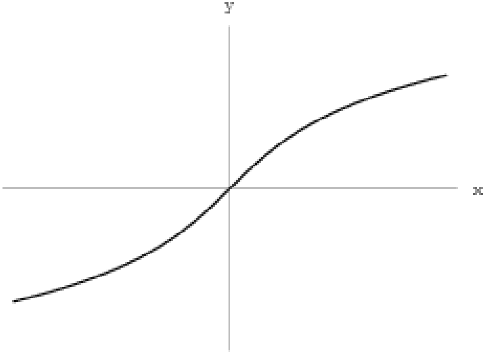
$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right),$$

donde

$$\operatorname{argsh} y \;=\; \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\,\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Assim, a função argsh fica completamente definida.

D.1 Argumento do seno hiperbólico



$y = \operatorname{argsh} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{argsh}) = \mathbb{R}$

D.2 Argumento do cosseno hiperbólico

A função ch não é injetiva, logo, não é invertível. Como tal, definiremos a inversa da seguinte restrição bijetiva e contínua

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{ch}\, x, \end{array}$$

que se designa por argumento do cosseno hiperbólico e que é também uma função contínua. Representa-se por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argch}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & y & \longmapsto & \mathrm{argch}\, y, \end{array}$$

onde

$$x = \mathrm{argch}\, y\,,\ \ y \in [1,+\infty[\iff y = \mathrm{ch}\, x\,,\ \ x \in [0,+\infty[\,.$$

Mas, para $x \geq 0$, tem-se

$$y = \operatorname{ch} x \iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\iff y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0. \qquad (2)$$

A última igualdade de traduz uma equação do segundo grau em e^x, donde

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Como $x \geq 0 \Longrightarrow e^x \geq 1$, a solução com o sinal $+$ é a única admissível (a solução com o sinal $-$ corresponderia à inversa da restrição do ch para $x \leq 0$). Mas

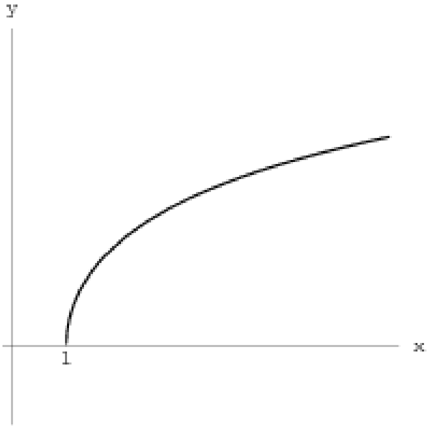
$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 1 \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 1,$$

donde

$$\operatorname{argch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)\,,\ y \in [1, +\infty[\,,$$

ficando a função argumento do cosseno hiperbólico completamente definida.

D.2 Argumento do cosseno hiperbólico



$$y = \operatorname{argch} x,\ x \in [1, +\infty[,\ \operatorname{Im}(\operatorname{argch}) = [0, +\infty[$$

D.3 Argumento da tangente hiperbólica

A função tangente-hiperbólica é injetiva mas não é sobrejetiva. Para poder inverter, basta considerar

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}\, x, \end{array}$$

que é bijetiva e, portanto, é invertível. Sendo contínua num intervalo, a sua inversa é contínua. Trata-se da função argumento da tangente hiperbólica , que se define por

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argth}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{argth}\, y, \end{array}$$

onde

$$x = \mathrm{argth}\, y\,,\ y \in\,]-1,1[\iff y = \mathrm{th}\, x\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

D.3 Argumento da tangente hiperbólica

Para $x \in \mathbb{R}$, $y \in]-1,1[$, tem-se

$$y = \operatorname{th} x \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

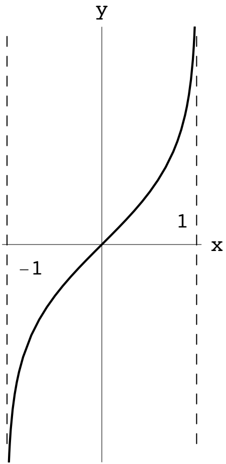
$$\iff e^{2x}(1-y) = 1 + y \iff x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right),$$

donde

$$\operatorname{argth} y = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right),\ y \in]-1,1[\,,$$

completando-se a definição do argumento da tangente hiperbólica.

D.3 Argumento da tangente hiperbólica



$$y = \operatorname{argth} x,\ x \in]-1, 1[,\ \operatorname{Im}(\operatorname{argth}) = \mathbb{R}$$

D.4 Argumento da cotangente hiperbólica

A função cotangente-hiperbólica é injetiva mas não é sobrejetiva.
Consideremos então

$$\begin{array}{rccc} \coth: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus[-1,1] \\ & x & \longmapsto & \coth x \end{array}$$

que é bijetiva e, portanto, é invertível. A sua inversa é contínua. Trata-se da função argumento da cotangente hiperbólica , que se define por

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argcoth}: & \mathbb{R}\setminus[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argcoth} y \end{array}$$

onde

$$x = \operatorname{argcoth} y\,,\ y \in \mathbb{R}\setminus[-1,1] \iff y = \coth x\,,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

D.4 Argumento da cotangente hiperbólica

Para $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $y \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1]$, tem-se

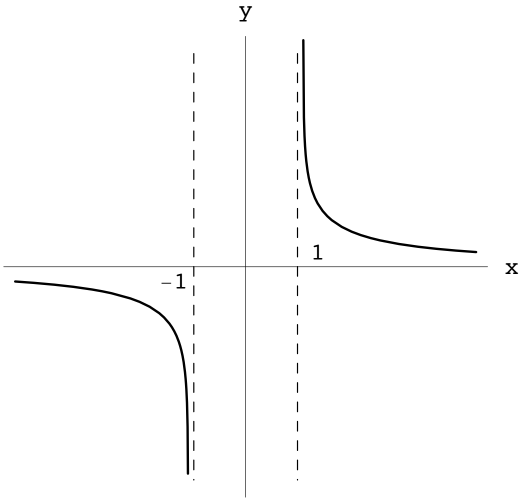
$$y = \coth x \iff x = \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right),$$

pelo que

$$\operatorname{argcoth} y \; = \; \ln\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right), \; y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],$$

ficando assim completa a definição da função argumento da cotangente hiperbólica.

D.4 Argumento da cotangente hiperbólica



$$y = \operatorname{argcoth} x,\ x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],\ \operatorname{Im}(\operatorname{argcoth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$