Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

1º Teste :: 30 de março de 2016

Nome ______________________ Número __________

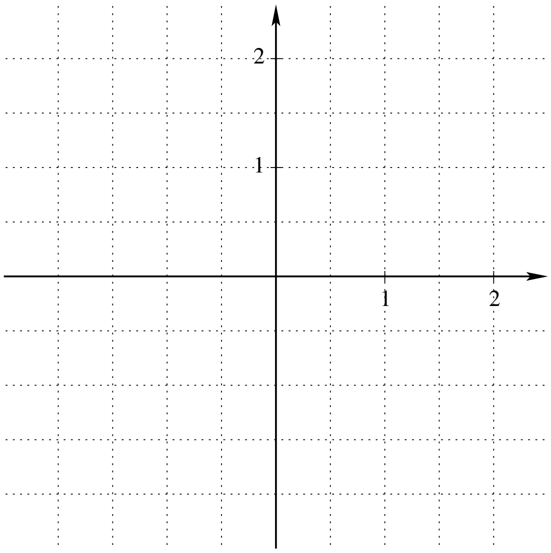
A resposta ao Exercício 1 deve ser dada na folha de enunciado.

Exercício 1. [3 valores] Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + 4y^2 > 4\}$.

a) Apresente um esboço do conjunto A.

b) Preencha a tabela usando os símbolos $\in$ e $\notin$.

c) Diga, justificando, se A é ou não um conjunto fechado.



	A	$\mathring{A}$	$\bar{A}$	∂A
$(1, 0)$				
$(0, 1)$				
$(1, 1)$				
$(2, 0)$				
$(0, 2)$				
$(2, 2)$				

Exercício 2. [4 valores] Considere a função definida por $f(x,y) = \sqrt{25 - 4x^2 - y^2}$.

a) Identifique o domínio da função f.

b) Descreva ou esboce as curvas de nível 0, 4, 5 e 6 de f.

c) Identifique a superfície definida pelo gráfico de f.

d) A função f é limitada? Justifique.

Exercício 3. [3 valores] Calcule, ou justifique que não existe:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^4}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen} y}{x^2 + y^4}$.

Exercício 4. [2 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}.$$

a) Justifique que f é contínua.

b) É possível prolongar continuamente a função f a $\mathbb{R}^2$? Justifique.

Exercício 5. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Justifique que f é contínua.

b) Calcule $Df((0,0);(u,v))$ para qualquer $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

c) Indique, caso exista, o valor de $f_x(0,0)$ e de $f_y(0,0)$.

d) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

Exercício 6. [4 valores] Considere a função $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (xyz^2, ye^{xy})$.

a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$.

b) Justifique que a função $\boldsymbol{f}$ é derivável.

c) Calcule a derivada de $\boldsymbol{f}$ no ponto $(1,1,2)$.

d) Calcule $D\boldsymbol{f}((1,1,2);(1,0,1))$.