



Exercício 7.1 Calcule:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1) $\int (3x^2 - 2x^5) dx;$                 | 13) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx;$                            | 24) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx;$                             |
| 2) $\int (\sqrt{x} + 2)^2 dx;$              | 14) $\int \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx;$                            | 25) $\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx;$                |
| 3) $\int (2x + 10)^{20} dx;$                | 15) $\int \left(\frac{2}{x} - 3\right)^2 \frac{1}{x^2} dx;$        | 26) $\int \frac{-3}{x(\ln x)^3} dx;$                                |
| 4) $\int x^2 e^{x^3} dx;$                   | 16) $\int \operatorname{sen}(\pi - 2x) dx;$                        | 27) $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx;$                               |
| 5) $\int x^4(x^5 + 10)^9 dx;$               | 17) $\int \operatorname{th} x dx;$                                 | 28) $\int \frac{e^x}{1 - 2e^x} dx;$                                 |
| 6) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} dx;$    | 18) $\int \operatorname{sen} x \cos x dx;$                         | 29) $\int \frac{1}{\cos^2(7x)} dx;$                                 |
| 7) $\int \sqrt{2x + 1} dx;$                 | 19) $\int \operatorname{sen}(2x) \cos x dx;$                       | 30) $\int (\sqrt{2x - 1} - \sqrt{1 + 3x}) dx;$                      |
| 8) $\int \frac{x}{3 - x^2} dx;$             | 20) $\int \operatorname{sen}^2 x dx;$                              | 31) $\int \frac{1}{x} (1 + \ln^2 x) dx;$                            |
| 9) $\int \frac{1}{4 - 3x} dx;$              | 21) $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$ | 32) $\int \frac{2 + \sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1 + 4x^2} dx;$ |
| 10) $\int \frac{1}{e^{3x}} dx;$             | 22) $\int \cos^3 x dx;$  | 33) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx;$           |
| 11) $\int \frac{-7}{\sqrt{1 - 5x}} dx;$     | 23) $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx;$                                   | 34) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx.$       |
| 12) $\int \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x}}{x} dx;$ |  |   |

Exercício 7.2 Calcule:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $\int \ln x dx;$                    | e) $\int \ln(1 - x) dx;$                    | i) $\int \ln^2 x dx;$  |
| b) $\int x \operatorname{sen}(2x) dx;$ | f) $\int x \ln x dx;$                       | j) $\int e^x \cos x dx;$   |
| c) $\int \operatorname{arctg} x dx;$   | g) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx;$      | k) $\int \operatorname{arcsen} x dx;$                              |
| d) $\int x \cos x dx;$                 | h) $\int x \operatorname{sen} x \cos x dx;$ | l) $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x dx;$ |

$$\begin{array}{lll} \text{m)} \int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; & \text{o)} \int x^2 \ln x dx; & \text{q)} \int \operatorname{ch} x \operatorname{sen}(3x) dx; \\ \text{n)} \int x \operatorname{arctg} x dx; & \text{p)} \int \operatorname{sen}(\ln x) dx; & \text{r)} \int x^3 e^{x^2} dx. \end{array}$$

Exercício 7.3 Usando o método de substituição, calcule:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int x (x+3)^{1/3} dx; & \text{d)} \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; & \text{g)} \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x}} dx; \\ \text{b)} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx; & \text{e)} \int \frac{e^{2x}}{3 + e^x} dx; & \text{h)} \int \sqrt{1+x^2} dx. \\ \text{c)} \int \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx; & \text{f)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx; \end{array}$$

Exercício 7.4 Calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)(x+1)^2} dx; & \text{g)} \int \frac{27}{x^4 - 3x^3} dx; \\ \text{b)} \int \frac{3x^2 - 4x - 1}{(x^2 - 1)(x-2)} dx; & \text{h)} \int \frac{x^4 - 8}{x^3 - 2x^2} dx; \\ \text{c)} \int \frac{2x^2 - x - 2}{x^2(x-2)} dx; & \text{i)} \int \frac{x+3}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} dx; \\ \text{d)} \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x(x+1)^3} dx; & \text{j)} \int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2} dx; \\ \text{e)} \int \frac{x^2 - x + 2}{x(x^2 - 1)} dx; & \text{k)} \int \frac{x+2}{2x(x-1)^2(x^2+1)} dx; \\ \text{f)} \int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} dx; & \text{l)} \int \frac{3x^3 + x^2 - x - 1}{x^2(x^2 - 1)} dx. \end{array}$$

Exercício 7.5 Calcule:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{1}{(2 + \sqrt{x})^7 \sqrt{x}} dx; & \text{e)} \int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} dx; \\ \text{b)} \int \operatorname{tg}^2 x dx; & \text{f)} \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x dx; \\ \text{c)} \int \frac{x + (\arcsen(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx; & \text{g)} \int \frac{1}{1+e^x} dx; \\ \text{d)} \int \frac{x e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx; & \text{h)} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx. \end{array}$$

Exercício 7.6 Sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ , calcule a primitiva de  $f$  cujo gráfico passa pelo ponto  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

**Exercício 7.7** Em cada alínea, determine a única função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , duas vezes derivável, tal que:

a)  $f''(x) = 4x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(1) = 3 \quad \text{e} \quad f'(2) = -2;$

b)  $f''(x) = \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 1.$

**Exercício 7.8** Calcule os seguintes integrais:

a)  $\int_0^1 e^{\pi x} dx;$

i)  $\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx;$

b)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| dx;$

j)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx;$

c)  $\int_{-3}^5 |x - 1| dx;$

k)  $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsen x dx;$

d)  $\int_0^2 |(x - 1)(3x - 2)| dx;$

l)  $\int_{-3}^2 \sqrt{|x|} dx;$

e)  $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx;$

m)  $\int_0^2 f(x) dx, \text{ com}$   

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

f)  $\int_{-5}^0 2x\sqrt{4 - x} dx;$

n)  $\int_0^1 g(x) dx, \text{ com}$   

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -x & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

g)  $\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} dx;$

h)  $\int_0^1 \log(x^2 + 1) dx;$

**Exercício 7.9** Dado  $a \in \mathbb{R}^+$ , seja  $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Mostre que:

a) se  $f$  é par então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$

b) se  $f$  é ímpar então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

**Exercício 7.10** Dados  $a < b \in \mathbb{R}$ , mostre que se  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Exercício 7.11** Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de  $F$ , sendo  $F$  definida por:

a)  $F(x) = \int_0^x (1 + t^2)^{-3} dt, \quad x \in \mathbb{R};$

b)  $F(x) = \int_0^{x^2} (1 + t^2)^{-3} dt, \quad x \in \mathbb{R};$

c)  $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1 + t^4} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$

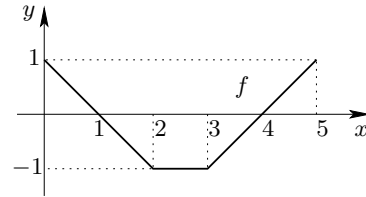
Exercício 7.12 Sabendo que  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para  $x \geq 0$ , calcule  $f$  em cada um dos seguintes casos:

a)  $\int_0^x f(t) dt = x^2(1+x);$

b)  $\int_0^{x^2} f(t) dt = x^3 e^x - x^4.$

Exercício 7.13 Considere  $F : [0, \sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{R}$  definida

por  $F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ , onde a função  $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  é aquela cujo gráfico está representado na figura. Determine  $F(\sqrt{3})$  e  $F'(\sqrt{3})$ .



Exercício 7.14 Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

- uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  não integrável;
- uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável mas não integrável;
- uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável mas não primitivável;
- uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  primitivável mas não derivável;
- uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável mas não primitivável;
- uma função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  não integrável tal que  $|f|$  seja integrável.

Exercício 7.15 Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

- $x = 1, x = 4, y = \sqrt{x}, y = 0;$
- $x = 0, x = 1, y = 3x, y = -x^2 + 4;$
- $x = 0, x = 2, x^2 + (y - 2)^2 = 4, x^2 + (y + 2)^2 = 4;$
- $x = 0, x = \pi/2, y = \sin x, y = \cos x;$
- $x = -1, y = |x|, y = 2x, x = 1;$
- $y = -x^3, y = -(4x^2 - 4x);$
- $y = -x^2 + \frac{7}{2}, y = x^2 - 1;$
- $y = 0, x = -\ln 2, x = \ln 2, y = \operatorname{sh} x.$

Exercício 7.16 Escreva uma expressão integral que permita calcular a área de cada uma das seguintes regiões:

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -x \leq y \leq x^2\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq e^x \wedge 0 \leq y \leq e^{-x}\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq y \leq 2 - x\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge y \geq x^2 - 2x \wedge y \leq 4\};$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \wedge y \geq x^2 - 4x + 3 \wedge y \leq -x^2 + 5x - 4\}.$