

Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios

2010/2011

Funções

- Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.
 - Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.
 - Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A ?
- Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 1$. Determine:
 - $g(\{-1, 0, 1\})$
 - $g([-\infty, 0])$
 - $g(\mathbb{R})$
 - $g^{-1}(\{0\})$
 - $g^{-1}([-\infty, 0])$
- Sejam f, g e h as funções de \mathbb{N} para \mathbb{N} definidas por:
$$f(n) = n + 1; \quad g(n) = 2n; \quad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$
Determine:
 - $f \circ f$
 - $f \circ g$
 - $g \circ f$
 - $g \circ h$
 - $f \circ g \circ h$
- Dê exemplos de:
 - Duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.
 - Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.
- Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja:
 - não injectiva;
 - injectiva;
 - sobrejectiva;
 - não sobrejectiva.
- Diga, justificando, quais das seguintes funções são injectivas, sobrejectivas ou bijectivas:
$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(x) = 2x - 1; & f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(x) = x + 1; \\ f_3 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, f_3(x) = \frac{1}{x}; & f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_4(x) = x + 1; \\ f_5 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, f_5(x) = x^2; & f_6 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f_6(x) = |x| + 2. \end{array}$$

- Considere as seguintes funções

$$\begin{array}{lll} f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x^3 & x \mapsto 2x - 3 & x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Verifique que f, g e h são funções bijectivas e determine as respectivas funções inversas.

- Seja $f : D \rightarrow E$ uma função. Suponha que $D \neq \emptyset$. Mostre que
 - f é injectiva se e só se existe uma função $g : E \rightarrow D$ tal que $g \circ f = id_D$;
 - f é sobrejectiva se e só se existe uma função $g : E \rightarrow D$ tal que $f \circ g = id_E$.