Universidade do Minho 20 de Junho de 2014

2º Teste de

Lógica EI

Lic. Eng. Informática Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique** adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. (a) Construa uma derivação em DNP que prove que $(p_1 \to p_2) \to \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ é um teorema.
   (b) Mostre que $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \wedge p_2)$ não é um teorema.
   (c) Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Prove que: se $\Gamma, p_1 \vdash \neg p_1 \wedge p_2$ então, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma, p_1 \vdash \varphi$.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\underbrace{\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}}_{\text{função}}, \underbrace{\{\mathsf{Q}, \mathsf{R}\}}_{\text{relação}}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{g}) = 2$ $\mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$.
   (a) Dê exemplo de um L-termo t cujas sequências de formação têm pelo menos 4 elementos.
   (b) Dê exemplo de uma L-fórmula φ tal que $LIV(\varphi) = \emptyset$, explicitando o conjunto $subf(\varphi)$ das subfórmulas de φ.
   (c) Considere a L-fórmula $\psi = (\forall x_0 \mathsf{Q}(f(x_0)) \wedge \mathsf{R}(x_1, \mathsf{c})) \to \exists x_2 \neg \mathsf{Q}(\mathsf{g}(x_1, x_2))$. Dê exemplo de uma variável x e de um L-termo t tais que x não é substituível por t em ψ.
   (d) Defina por recursão estrutural a função $u : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências dos símbolos de aridade maior que 0 em t.

3. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{R}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$ e $\mathcal{N}(=) = 2$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$$\overline{\mathsf{c}} = 0 \qquad \overline{\mathsf{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$$
$$\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(x) = |x| \qquad \overline{=} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x = y\}$$

   (a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = 1 - i$. Calcule:
      (i) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_2))[a]$;
      (ii) $\exists x_1 (R(x_2, x_1) \wedge \mathsf{f}(x_2) = x_1)[a]$.
   (b) Seja φ a L-fórmula $\forall x_1 (R(x_1, c) \to (\neg(\mathsf{f}(x_1) = x_1) \wedge \mathsf{f}(\mathsf{f}(x_1)) = \mathsf{f}(x_1)))$. Prove que:
      (i) φ é válida em E;
      (ii) φ não é universalmente válida.
   (c) Indique (sem justificar) uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação:
   Para cada inteiro positivo, existe um inteiro negativo cujo valor em módulo é maior que esse inteiro positivo.

4. Sejam L um tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que: $\forall x(\varphi \vee \psi), \exists x \neg\psi \vDash \exists x \varphi$.