Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

Licenciatura em Engenharia Informática

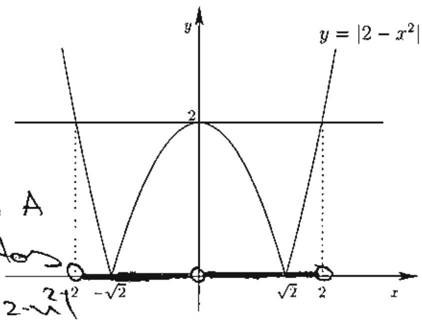
1º Teste :: 10 de novembro de 2011

Nome [ ] Número [ ]

As respostas aos exercícios 1 e 6 são dadas na folha do enunciado.

Exercício 1. [2,5 valores] Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |2 - x^2| < 2\}$.

a) A figura anexa permite identificar os elementos do conjunto A; descreva a forma como essa identificação é possível a partir da figura e assinale, sobre o eixo das abcissas, os elementos que pertencem ao conjunto A.



Os elementos do conjunto A são as abcissas dos pontos do gráfico da função $y=|2-x^2|$ que estão abaixo da reta de equação $y=2$.

b) Represente o conjunto A como um intervalo ou união de intervalos, resolvendo analiticamente a inequação $|2 - x^2| < 2$.

$|2-x^2|<2 \Leftrightarrow -2<2-x^2<2 \Leftrightarrow 0<x^2<4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2>0 \wedge x^2<4 \Leftrightarrow x\neq 0 \wedge -2<x<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in]-2,2[\setminus \{0\}$

Exercício 2. [3 valores] Considere o conjunto $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup ([2, e] \cap \mathbb{Q})$.

a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo de A.

b) Calcule $\bar{A}$, $\mathring{A}$, A' e ∂A.

Exercício 3. [1,5 valores] Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x \cos \frac{x+1}{x}$.

Exercício 4. [4 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$.

a) Calcule a derivada da função f.

b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

c) Indique uma função derivável $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja um prolongamento de f.

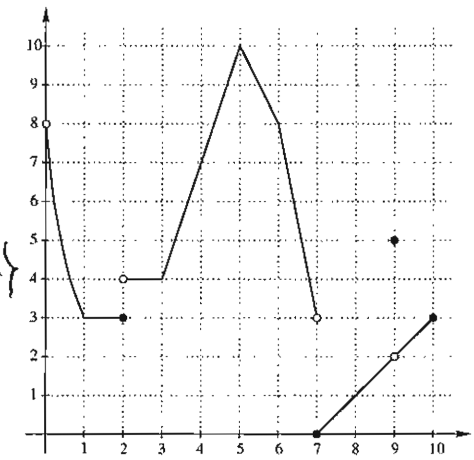
Exercício 5. [4 valores] Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \operatorname{sh}\sqrt{x}$.

a) Calcule a derivada de f.

b) Mostre que $f^{-1}(x) = \ln^2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

c) Calcule a derivada da função inversa de f.

Exercício 6. [5 valores] Considere a função $f :]0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa.



a) Indique o contradomínio de f.

$f(]0,10]) = [0,10] \setminus \{2\}$

b) Determine $f^{-1}([1,3])$.

$f^{-1}([1,3]) = [1,2] \cup [8,10] \setminus \{9\}$

c) Diga se a função f é injetiva.

f não é injetiva:
$f(1) = f(2) = 3$

d) Indique os pontos de mínimo local estrito de f, mencionando os respetivos mínimos locais.

Ponto de mínimo local estrito 7 ; $f(7) = 0$

e) Indique os pontos de máximo local de f.

Pontos de máximo local: $]1,2[\cup]2,3[\cup \{5,9,10\}$

f) Escolha um valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |f(x) - 10| < 1.$$

$\delta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

g) Indique os pontos onde f é descontínua.

$\{2, 7, 9\}$

h) Indique o valor de $f'(4)$.

$f'(4) = 3$

i) Indique o conjunto dos pontos onde a função f é derivável.

$]0,10] \setminus \{1,2,3,5,6,7,9\}$

j) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(1/x) = \lim\limits_{y\to 0^+} f(y) = 8.$

Exercício 2.

a) $\sup A = e$; $e \notin A$, logo A não tem máximo

$\inf A = -1$; $-1 \in A$, logo $\min A = -1$

b) $\bar{A} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \cup [2, e]$

$\mathring{A} = \emptyset$

$A' = \{0\} \cup [2, e]$

$\partial A = \bar{A}$

Exercício 3

$-1 \leq \cos \frac{n+1}{n} \leq 1$, logo $\underset{\downarrow n \to 0}{\underset{0}{-|n|}} \leq n \cos \frac{n+1}{n} \leq \underset{\downarrow n \to 0}{\underset{0}{|n|}}$

logo, $\lim_{n \to 0} n \cos \frac{n+1}{n} = 0$

Exercício 4.

a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}} \quad \frac{2x(1-x) + x^2+1}{(1-x)^2}$

$= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}} \quad \frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$

b) $f(0)=1$; $f'(0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$\frac{y-1}{x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+1.$$

c)

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\begin{cases} f(x), & \text{se } x\leq 0\\ \frac{3}{2}x+1, & \text{se } x>0.\end{cases}$$

5.

a) $f'(x)=(\operatorname{sh}\sqrt{x})'=\operatorname{ch}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

<u>ou</u>

$$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}=\frac{\operatorname{ch}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

b) $y=\operatorname{sh}\sqrt{x} \Leftrightarrow y=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2} \Leftrightarrow 2y=e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow e^{-\sqrt{x}}\left(e^{2\sqrt{x}}-2ye^{\sqrt{x}}-1\right)=0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}=y\pm\underbrace{\sqrt{y^2+1}}_{>|y|}$

$\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}=y+\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow x=\ln^2\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \therefore f^{-1}(x)=\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$

<u>Ou</u> mostrar que $f\circ f^{-1}(x)=f^{-1}\circ f(x)=x$

c) $$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{4\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}} =$$

$$= \frac{2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \frac{2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

– ou –

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$$

$$= 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}.$$