Noções Topológicas em $\mathbf{R}^n$

Revisão - norma e distância em $\mathbf{R}^n$

Chama-se **norma Euclideana em** $\mathbf{R}^n$ à norma associada ao produto interno canónico em $\mathbf{R}^n$, isto é, à função definida por

$$\boxed{\begin{array}{llll} \|\cdot\| : & \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ & \mathbf{x} & \to & \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}|\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \end{array}}$$

Tal como todas as normas, verifica as seguintes propriedades:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e $\forall a \in \mathbf{R}$;
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$;
- Se $\|\mathbf{x}\| = 0$ então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Chama-se **distância** (ou métrica) **associada à norma Euclideana em** $\mathbf{R}^n$ à função

$$\begin{array}{llll} d : & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \to & d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \end{array}$$

onde $\|.\|$ é a norma Euclideana.

Portanto,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

A distância Euclideana goza das seguintes propriedades:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ sse $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$;
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$.

Nota: Qualquer função distância associada a uma norma verifica estas propriedades, que resultam das propriedades da norma.

Bola aberta e vizinhança

Definição: Sejam $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ e $r \in \mathbf{R}^+$.

Chama-se **bola aberta de centro a e raio** r ao conjunto

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}.$$

$\big[$representa-se também por $B(\mathbf{a}, r)\big]$.

Nota: Em $\mathbf{R}$, as bolas abertas são intervalos abertos.

Definição: Qualquer subconjunto de $\mathbf{R}^n$ que contenha uma bola aberta de centro em **a** diz-se uma **vizinhança de a**.

Isto é, V é uma vizinhança de **a** se existe algum $r > 0$ tal que

$$B_r(\mathbf{a}) \subseteq V.$$

Nota: qualquer bola aberta é vizinhança do seu próprio centro e facilmente se mostra que é vizinhaça de qualquer um dos seus pontos.

Noções Topológicas Elementares

Definição: Seja S um subconjunto de $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$.

- $\mathbf{a}$ diz-se um **ponto interior de** S, se S for uma vizinhança de $\mathbf{a}$, isto é, se
$$\exists r > 0 : B_r(\mathbf{a}) \subseteq S;$$

- $\mathbf{a}$ diz-se um **ponto exterior de** S se for interior ao seu complementar;

- $\mathbf{a}$ diz-se um **ponto fronteiro de** S se não for interior nem exterior ao conjunto S.

Nota: da definição resulta imediatamente que:

→ $\mathbf{a}$ é um ponto exterior de S sse existe uma bola de centro em $\mathbf{a}$ totalmente contida no complementar de S, isto é:
$$\exists r > 0 : B_r(\mathbf{a}) \subseteq \mathbf{R}^n \backslash S;$$
ou seja,
$$\exists r > 0 : B_r(\mathbf{a}) \cap S = \emptyset.$$

→ $\mathbf{a}$ é um ponto fronteiro de S sse qualquer bola de centro em $\mathbf{a}$ tem ponto de S e do seu complementar, isto é:
$$\forall r > 0 [B_r(\mathbf{a}) \cap S \neq \emptyset \wedge B_r(\mathbf{a}) \cap (\mathbf{R}^n \backslash S) \neq \emptyset].$$

Notação: Sendo S um subconjunto de $\mathbf{R}^n$,

interior de S → $\mathbf{int}S$ = conjunto dos pontos interiores de S;

exterior de S → $\mathbf{ext}S$ = conjunto dos pontos exteriores de S;

fronteira de S → $\mathbf{fr}S$ = conjunto dos pontos fronteiros de S.

(A fronteira de S representa-se também por ∂S.)

Proposição: Sendo S um subconjunto de $\mathbf{R}^n$,

- $\mathbf{int}S \subseteq S$;
- $\mathbf{ext}S \subseteq \mathbf{R}^n \backslash S$;
- $\mathbf{R}^n = \mathbf{int}S \,\dot{\cup}\, \mathbf{ext}S \,\dot{\cup}\, \mathbf{fr}S$.

  ($\dot{\cup}$ representa a união disjunta de conjuntos.)

Definição: Um subconjunto de $\mathbf{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os pontos seus pontos forem pontos interiores.

Portanto

$$S \subseteq \mathbf{R}^n \text{ é um conjunto aberto sse } \mathbf{int}S = S.$$

Nota:

A união finita ou infinita numerável de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

($\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = \left\{x\text{: existe } i \in \mathbf{N} \text{ tal que } x \in A_i\right\}$ diz-se uma **união numerável de conjuntos**.)

A intersecção finita de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

A intersecção infinita de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto!

Definição: Um subconjunto de $\mathbf{R}^n$ diz-se **fechado** se se o seu complementar for aberto.

Proposição: $S \subseteq \mathbf{R}^n$ é um conjunto fechado sse $\mathbf{fr}S \subseteq S$.

Nota: Um dado conjunto pode ser aberto, fechado, nem aberto nem fechado e simultaneamente aberto e fechado.

Definição: Chama-se **fecho** ou **aderência do conjunto** S à união de S com a sua fronteira que se representa por $\bar{S}$.

Portanto

$$\bar{S} = \mathbf{int}S \cup \mathbf{fr}S.$$

Um ponto **a** diz-se **aderente a** S se pertencer $\bar{S}$.

Nota: O fecho de um conjunto é sempre um conjunto fechado.

Nota: S é fechado sse $\bar{S} = S$.

Definição: Diz-se que o ponto $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ é **ponto de acumulação de** $S \subseteq \mathbf{R}^n$ se em toda a vizinhança de **a** existe uma infinidade de pontos de S.

Nota 1: É imediato que **a** é ponto de acumulação de S sse em toda a bola aberta de centro em **a** existe uma infinidade de pontos de S.

Nota 2: Prova-se que **a** é ponto de acumulação de S sse toda a bola aberta de centro em **a** tiver pelo menos um ponto de S diferente de **a**.

Chama-se **derivado de** S ao conjunto de todos os pontos de acumulação de S e denota-se por S'.

Nota: Um conjunto finito não tem pontos de acumulação.

Definição: Um ponto $\mathbf{a}$ de S diz-se **isolado** se existir $r > 0$ tal que

$$B_r(\mathbf{a}) \cap S = \{\mathbf{a}\}.$$

Definição: Um conjunto S diz-se **limitado** se existir alguma bola que o contenha.

Definição: Um subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ diz-se **compacto** se for limitado e fechado.

Nota: Os intervalos $[a, b]$, com $a, b \in \mathbf{R}$, são compactos de $\mathbf{R}$.