Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Algumas propriedades das funções trigonométricas

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

2. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a$

3. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$

4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$ (sen é ímpar)

5. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \cos(-a) = \cos a$ (cos é par)

6. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \cos(\frac{\pi}{2} - a) = \operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$

7. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(a + 2\pi) = \operatorname{sen} a$ (sen tem período 2π)

8. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \cos(a + 2\pi) = \cos a$ (cos tem período 2π)

9. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

10. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a$

11. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad \cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}$

12. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

Algumas propriedades das funções hiperbólicas

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \operatorname{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$

2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}^2 a + \operatorname{sech}^2 a = 1$

3. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \coth^2 a - \operatorname{cosech}^2 a = 1$

4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(-a) = -\operatorname{sh} a$ (a função sh é ímpar)

5. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(-a) = \operatorname{ch} a$ (a função ch é par)

6. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$

7. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} a$

8. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch}(na) + \operatorname{sh}(na)$