LEI **Folha 4** **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**

Outubro 2014

1. Mostre que são linearmente independentes os seguintes subconjuntos de $\mathcal{C}^\infty(J)$:

   (a) $\{e^x, \ln(x)\}$, $J = \mathbb{R}^+$;

   (b) $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$, $J = \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \beta$;

   (c) $\{e^x \cos x, e^x \sin x\}$, $J = \mathbb{R}$;

   (d) $\{1, x\}$, $J = \mathbb{R}$.

2. Resolva as EDOs indicando, em cada caso, um conjunto fundamental de soluções:

   (a) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

   (b) $y'' + y' + 2y = 0$;

   (c) $y'' - 25y = 0$;

   (d) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3. Resolva, em função de b, o problema com condições iniciais: :

$$\begin{cases} y'' - 2by' + b^2 y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Resolva, em função de k, o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' = \cos kt \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

5. Resolva o problema com condições de fronteira:

$$y'' = y, \qquad t \in [0, 1]$$

$$y'(0) + y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a equação diferencial

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

   Determine a e b de modo que x e $x \ln x$ sejam soluções da equação (no intervalo $J =]0, +\infty[$). Neste caso, qual a solução geral da equação diferencial? Qual a solução y tal que $y(e) = 1$ e $y'(e) = 0$?

7. Se f é uma solução particular de uma EDO linear homogénea de ordem 2, as mudanças sucessivas de variável $y = fz$ e $w = z'$ transformam a equação inicial numa EDO linear homogénea de grau 1. Resolva:

   (a) $y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$ (considere a solução particular $f(x) = x^2$);

   (b) $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ (considere a solução particular $f(x) = \frac{1}{x}$).

8. Resolva os problemas com condições iniciais:

$$(i) \begin{cases} y'' - y' - 2y = 4x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} y'' + 4y' + 8y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

9. Determine a solução general das seguintes edos lineares:

   (a) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$;

   (b) $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$;

   (c) $y'' + 4y = e^{2x}$;

   (d) $y'' + 4y = \cos(2x)$.

10. Determine a solução general das seguintes edos lineares:

   (a) $y'' - y = e^x$;

   (b) $y'' - y = xe^x$;

   (c) $y'' - 2y' + y = e^x$;

   (d) $y'' - 2y' + y = xe^x$.