Programação Linear - transformações básicas

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

5 de fevereiro de 2015

Conteúdo

- Transformação de uma inequação numa equação
- Transformação de uma equação em duas inequações
- Transformação de um problema de minimização num problema de maximização
- Transformação de variáveis sem restrição de sinal
- Transformação de variáveis com limite inferior
- Transformação de restrições do tipo módulo

Transformação de uma inequação do tipo ≤ numa equação

- Qualquer inequação do tipo de menor ou igual pode ser transformada numa equação, introduzindo uma variável adicional de folga com valor não-negativo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, s_i \geq 0.$$

Exemplo

	Antes:	Depois:
•	$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \leq 8$	$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 + s_1 = 8$ $s_1 \geq 0$

- A quantidade de recurso disponível é 8.
- A função linear $2x_1 - 3x_2 + 4x_4$ indica a quantidade de recurso usada.
- A variável de folga s_1 indica a quantidade de recurso não usada.
- $s_1 = 8 - 2x_1 + 3x_2 - 4x_4$

Transformação de uma inequação do tipo ≥ numa equação

- Qualquer inequação do tipo de maior ou igual pode ser transformada numa equação, introduzindo uma variável adicional de excesso com valor não-negativo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, s_i \geq 0.$$

Exemplo

Antes:	Depois:
$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \;\geq\; 4$	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 - s_1 = 4$ $s_1 \geq 0$

- A quantidade requerida é 4.
- A função linear $1x_1 - 2x_2 + 3x_4$ indica a quantidade produzida.
- A variável de excesso s_1 indica o excesso em relação à quantidade requerida.
- $s_1 = 1x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 4$

Transformação de uma equação em duas inequações

- Qualquer restrição de igualdade pode ser expressa como uma par de inequações do tipo de menor ou igual:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array} \right.$$

Exemplo

Antes:	Depois:
$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 4$	$1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \leq 4$ $1x_1 - 2x_2 + 3x_4 \geq 4$

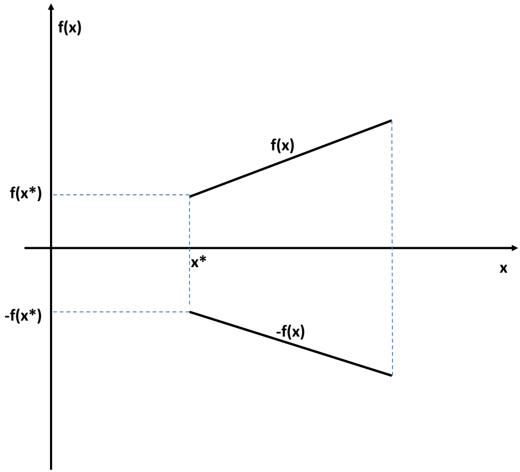
Transformação de um problema de minimização num problema de maximização - I

- Qualquer problema de minimização pode ser reduzido a um problema de maximização, em que se optimiza a função objectivo simétrica da original:

$$\min z = cx \Leftrightarrow \max z' = -cx.$$

(cont.)

- Solução óptima x^* é a mesma,
- mas o valor da função objectivo da solução óptima é o simétrico $f(x^*) = \min f(x) = -\max -f(x)$



Transformação de variáveis sem restrição de sinal

- Qualquer variável sem restrição de sinal pode ser expressa como a diferença de duas variáveis não-negativas:

$$x_j \text{ sem restrição} \Leftrightarrow x_j = x_j^+ - x_j^-, x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0.$$

Exemplo

- Antes: $2x_1 + 3x_2 \leq 20, x_1$ sem restrição$, x_2 \geq 0$
- Fazendo $x_1 = x_1^+ - x_1^-$
- Depois: $2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \leq 20,\ x_1^+, x_1^-, x_2 \geq 0$

Transformação de variáveis com limite inferior

- Uma variável com limite inferior pode ser substituída por uma variável com limite inferior igual a 0, por mudança de variável:

Exemplo

- Antes: $2x_1 + 3x_2 \leq 20,\ x_1 \geq 8, x_2 \geq 0$
- Fazendo $x_1' = x_1 - 8 \rightarrow x_1 = x_1' + 8$
- $2(x_1' + 8) + 3x_2 \leq 20, x_1' \geq 0, x_2 \geq 0$
- Depois: $2x_1' + 3x_2 \leq 4, x_1' \geq 0, x_2 \geq 0$

Restrições do tipo módulo (caso $\leq$)

- $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & -b_i \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i \end{array} \right.$$

Exemplo

- Antes: $|2x_1 + 3x_2| \leq 20$
- Depois: $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq & -20 \end{array} \right.$
- Trata-se de uma conjunção de restrições.

Restrições do tipo módulo (caso 2)

- $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \geq b_i \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \geq & b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & -b_i \end{array} \right.$$

- A disjunção de condições não pode ser representada por uma conjunção de restrições lineares, porque
- uma conjunção de restrições lineares define sempre um domínio convexo (ver slides sobre solução gráfica).

Exemplo

- $|x_1| \geq 2$
- equivale a: $\left| \begin{array}{lcr} x_1 & \leq & -2 \\ x_1 & \geq & 2 \end{array} \right.$
- Trata-se de um domínio não-convexo.

Fim