I

a) V

b) F (para $x=1$, ~~a função~~ tem duas imagens, logo não é função)

c) V

II

a) $f^{-1}(\{0,1\}) = \{-1, 0, 1\}$

b) $g(\{1,2,3\}) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

c) $g \circ f = g(m^2) = \frac{1}{m^2+1}$

$g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

III

a) F (Contra-exemplo: $f(2,3) = f(1,6) = 6$)

b) V (Dem: ~~Seja~~ Para todo o $z \in \mathbb{Z}$, $z = z \times 1 = f(z,1)$)

c) V (Dem: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq b$. Então

$g(a) = \frac{1}{a+1} \neq \frac{1}{b+1} = g(b)$)

IV

$f^{-1} : [1,2] \longrightarrow [0,1]$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

V

a) $\{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

b) $\{(1,2), (2,1)\}$

c) $\{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}$

VI

a) F (Contra-exemplo: $X = \emptyset \Rightarrow X \cap X = \emptyset \Rightarrow X \not R X$)

b) V (Seja $X, Y \in P(\mathbb{R})$. Então $X \cap Y \Leftrightarrow Y \cap X$. Logo $X R Y \Leftrightarrow Y R X$

c) F (Provado pela anterior...)

d) F (Contra-exemplo: $X = \{1\}, Y = \{1,2\}, Z = \{2\}$. Então $X \cap Y = \{1\}$, $Y \cap Z = \{2\}$,

mas $X \cap Z = \emptyset$

VII a) $[0] = \{0\}$

b) $[2] = \{-2, 2\}$

c) $[-2] = \{-2, 2\}$

VIII

a) V ($\{1,3\} \cup \{2,4,5\} = A$ e $\{1,3\} \cap \{2,4,5\} = \emptyset$
logo $A/\sim$ é uma partição de A e portanto $\sim$ é uma relação de de equivalência.

$\sim = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(2,4),(2,5),(4,2),(4,5),(5,2),(5,4)\}$

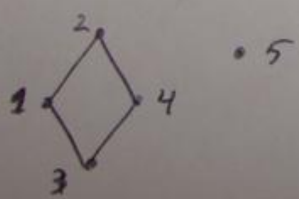
b) F ($\{1,3\} \cap \{2,3,4,5\} = \{3\} \neq \emptyset$. Logo $A/\sim$ não é uma partição e portanto $\sim$ não é uma relação de equivalência

c) F (Assumindo que $\sim$ é uma relação de equivalência, então 3R3, logo $3 \in [3]$, o que contradiz a afirmação

d) V (Exemplo: a mesma relação da alínea a)

e) F (Se $\sim$ é uma classe de equivalência e $[3] = \{3,4,5\}$ então 3R5, e $[3]=[5]$
Contradição

IX a)

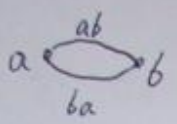


b) Majorantes de $\{1,3\} = \{1,2\}$

c) minimais do $\{2,4,5\} = \{4,5\}$

X) a) F (A soma dos graus de um grafo é sempre ~~[illegible]~~ um número par. $1+2+3+4+5 = 15$ que não é par)

b) ~~V~~F (Ex:



Caminhos fechados: {a}

{a, ab, b, ba, a}

{a, ab, b, ba, a, ab, b, ba, a}

.....

(~~um~~ caminho pode repetir vértices e arestas, logo existe um número infinito de caminhos)

XI) Hipótese: para todo $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Base de indução.

$p(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Logo $p(n)$ é verdadeiro para $n=1$

Passo de indução

Assume-se $p(k)$ verdadeiro

Quer-se provar $p(k+1)$

$$p(k+1) = 1+2+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)+2k+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1+2+\dots+k}+\cancel{(k+1)} = \underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}+\cancel{k+1}$$

$$\Leftrightarrow 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

que, por $p(k)$, é verdadeiro. Logo p é verdadeiro para todo $n \geq 1$.