Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

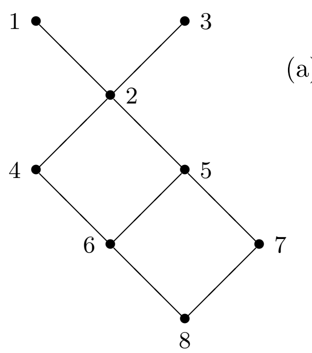
Exame – Época Normal [1^a chamada] 10.jan'07 [2 horas]

1. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:
   (a) Se o valor lógico da fórmula proposicional $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big(\neg(p \wedge r) \Rightarrow q\big)$ é o de falsidade então a proposição p é verdadeira.
   (b) Existe um conjunto A tal que $\mathcal{P}(A) \cup A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
   (c) Dada a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x^2 - x + 6$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $g(\{-2, 2, 4\}) = \{-14, 0, 4\}$ e $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) =]-3, 2[$.
   (d) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2|x|$, para todo o real x, é injectiva ou é sobrejectiva.

2. Construa uma prova para cada uma das seguintes afirmações:
   (a) Se A, B e C são conjuntos tais que $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$.
   (b) Para todo o natural $n \geq 4$, $n^2 > 3n + 3$.
   (c) $\exists_{k \in \mathbb{N}}\ \forall_{n \in \mathbb{N}}\ \big(n \geq k \Rightarrow n^2 > 3n + 3\big)$.

3. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, as relações binárias $S = \{(1, 1), (2, 3), (4, 6), (6, 4)\}$ e $T = \{(1, 5), (2, 3), (3, 5), (5, 4)\}$ em A e a partição $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{6\}\}$ de A.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $T \circ S$.
   (b) Diga, justificando, se a relação S é reflexiva, se é simétrica, se é anti-simétrica e se é transitiva.
   (c) Determine a menor relação de ordem parcial em A que contém T.
   (d) Seja R a relação de equivalência associada a Π, definida em A. Indique três elementos x, y e z de A cujas classes de equivalência $[x]_R$, $[y]_R$ e $[z]_R$ sejam distintas.

4. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{1, 2, 4, 7\}$.



   (a) Considere o c.p.o. $(X, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse ao lado.
      i. Indique, referindo a definição, os elementos minimais e maximais de X.
      ii. Indique, referindo a definição, os majorantes e os minorantes de A e de B. Determine o supremo e ínfimo de A e de B.
   (b) O diagrama em cima representa um grafo G com X como conjunto dos vértices (i.e., $\mathcal{V}(G) = X$).
      i. Indique um caminho simples que não seja caminho elementar de 1 para 3.
      ii. O grafo G é uma árvore? Justifique a sua resposta.

Cotação:
1. $\sim (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5)$; 2. $\sim (1,5 + 2 + 1)$; 3. $\sim (1,5 + 2 + 1 + 1)$; 4. $\sim (1 + 1,5 + 1 + 0,5)$