Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

2012/2013

Licenciatura em Engenharia Informática

Folha 1

Exercício 1.1 Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

a) $x^2 < y^2$;

b) $x^3 < y^3$;

c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ $(x, y \neq 0)$;

d) $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Exercício 1.2 Represente em extensão os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x+4| = 3\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x+2|\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2-7)^2 = 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x+1} = 2x\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |x|\,|x+3| = 4\}$.

Exercício 1.3 Em cada uma das alíneas seguintes encontre encontre números reais a e ε de modo a que a solução da inequação $|x-a| < \varepsilon$ seja o intervalo dado:

a) $]-2, 2[$;

b) $]-4, 0[$;

c) $]0, 4[$;

d) $]-3, 7[$.

Exercício 1.4 Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2-1) \geq 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} : |5x+2| \leq 1\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$;

i) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$;

j) $\{x \in \mathbb{R} : |3x-2| \leq 1\}$;

k) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$;

l) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x-2|\}$;

m) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\}$;

n) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| < 10\}$;

o) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-1| \leq 1\}$;

p) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$;

q) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$;

r) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\}$;

s) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2|x|\}$;

t) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| > |x-3|\}$.

Exercício 1.5 Represente os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

a) $1,25$;

b) $2,374$;

c) $5,(3)$;

d) $54,134(728)$.

Exercício 1.6 Escreva sob a forma de dízima as seguintes frações:

a) $\dfrac{3}{7}$;

b) $\dfrac{29}{4}$;

c) $\dfrac{7}{101}$;

d) $\dfrac{274301}{3300}$.

Exercício 1.7 Encontre um número racional e um número irracional no intervalo:

a) $\left]\dfrac{1}{1000}, \dfrac{2}{1000}\right[$; b) $\left]\dfrac{1}{101}, \dfrac{1}{100}\right[$.

Exercício 1.8 Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

a) $[-\sqrt{5}, 3] \cap \mathbb{Q}$;
b) $[0, \sqrt{3}\,] \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;
c) $\{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 11\}$;
d) $\{\, x \in \mathbb{R} : \ |x-5| < 3\,\}$;
e) $\{x \in \mathbb{Z} : \ x^2 < 25/16\}$;
f) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : \ x \leq 0 \wedge |x^2-1| < x+5\}$;
g) $\big\{x \in \mathbb{R} : \ 5 - x^2 < 1\big\}$;
h) $\{2 + 1/n : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \big\{\, x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 1\,\big\}$.

Exercício 1.9 Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + |x|$. Considere os conjuntos

$$A = f\,(\,[-4, 1[\,) \qquad \text{e} \qquad B = f\,(\,]-\infty, -2]\,)\ .$$

a) Especifique os conjuntos A e B e determine os correspondentes conjuntos de majorantes e de minorantes.

b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos considerados.

Exercício 1.10 Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : \ x > 7 \Longrightarrow |x| > 7$;
b) $\forall x \in \mathbb{R} : \ |1+4x| < 1 \Longrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$;
c) $\forall x \in \mathbb{R} : \ |x| \geq 1 \Longrightarrow x \geq 1$;
d) $\forall x \in \mathbb{R} : \ |x-5| \leq 2 \Longrightarrow 3 < x < 7$.

Exercício 1.11 Indique, justificando, o que está errado no texto seguinte:

Sejam a e b números reais tais que $a = b$. Então

$$\begin{aligned} a^2 = ab &\Longrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \\ &\Longrightarrow (a-b)(a+b) = b(a-b) \\ &\Longrightarrow a + b = b \\ &\Longrightarrow 2b = b \\ &\Longrightarrow 2 = 1\,. \end{aligned}$$

Exercício 1.12 Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}; \qquad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}; \qquad (x+y)^n = x^n + y^n; \qquad (xy)^n = x^n y^n.$$