Cálculo I 2008/2009

Proposta de Resolução do LEI

Teste 1

Exercício 1

a) Não existe. O conjunto A é aberto sse $A = \text{int} A$. Sendo A um conjunto de números racionais o seu interior é vazio por não existirem pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$]x-r, x+r[\subset A \quad , r>0$$

uma vez que todo o intervalo contém números irracionais e números racionais.

b) $B = \{ \sqrt{2}/n : n \in \mathbb{N} \}$

A aplicação

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow B \quad , \quad \varphi(n) = \sqrt{2}/n$$

é uma bijecção. O conjunto dos minorantes de B é $]-\infty, 0]$ mas $0 \notin B$, logo B é minorado mas não possui mínimo.

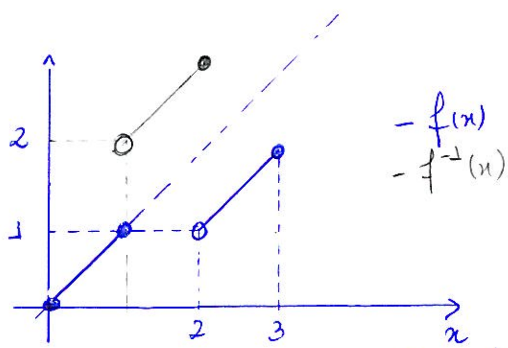
c) Não existe. Se f é contínua, $f([0,1])$ é um intervalo, isto é

$$f([0,1]) = [a,a] = \{a\} \quad \text{finito}$$

ou

$$f([0,1]) = [a,b] \, , \, a<b \quad \text{infinito não numerável.}$$

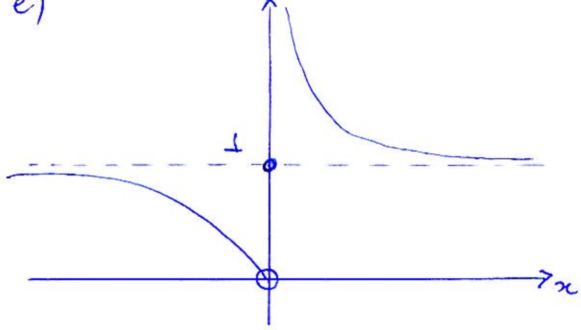
d)



$f: [0,1] \cup]2,3] \longrightarrow [0,2]$ é contínua e bijectiva

$f^{-1}: [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup]2,3]$ é bijectiva e descontínua

e)



Exercício 2

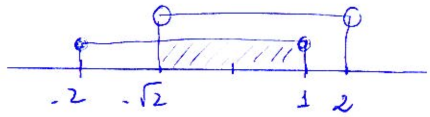
a) $-2 \leq x \leq 1 \iff x \in [-2, 1]$

$$|2x^2-1| < 3 \iff -3 < 2x^2-1 < 3 \iff -1 < x^2 < 2 \iff 0 \leq x^2 < 2$$
$$\iff x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$$

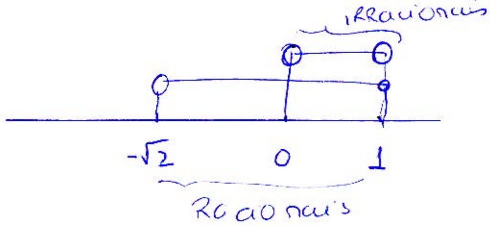
Assim

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -2 \leq x \leq 1 \ \wedge\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x \leq 1\}$$



$$= \left]-\sqrt{2}, 1\right] \cap \mathbb{Q}$$



b) $S = A \cup B$
$$= \left(\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cap \mathbb{Q}\right) \cup [0, 1]$$

① Majorantes $S = [1, +\infty[$ $\quad$ $\sup S = 1$
Minorantes $S = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$ $\quad$ $\inf S = -\sqrt{2}$

② Como
$$\operatorname{int} S =]0, 1[$$
tem-se
$$\operatorname{int} S \neq S$$, logo S não é aberto

Como
$$\overline{S} = [-\sqrt{2}, 1]$$
tem-se
$$\overline{S} \neq S$$ logo S não é fechado

③ $\operatorname{fr} S = [-\sqrt{2}, 0] \cup \{1\}$

$S' = [-\sqrt{2}, 1]$

S não tem pontos isolados.

Exercício 3

a) $\mathcal{D}_f = [1/e, 1] \cup [2, 3[$

b) Não. Basta notar que

$$f([2,3]) = \{2\},$$

logo, por exemplo

$$f(2) = f(3).$$

c) f é uma função contínua

d) f não é derivável em $x = 2$.

e) Seja $\tilde{f}$ o prolongamento de f ao intervalo $[-1, 3]$ pedido.

A função $\tilde{f}$ pode ser a função

$$\tilde{f} : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ P(x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ f(x) & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

onde P é um polinómio tal que

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P(0) = f(0) = 1 \\ 2)\ P(1) = 3 = \lim_{x \to 1^+} f(x) \end{array}\right) \text{ para que } \tilde{f} \text{ seja contínua em } [-1, 3]$$

e

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ P'(0) = f'(0) = 1 \\ 4)\ P''(0) = f''(0) = 1 \end{array}\right) \text{ para que } \tilde{f} \text{ seja 2 vezes derivável em } [-1, 1[$$

Para satisfazer as condições 1), 3) e 4), P deveria ser o polinómio de Taylor da função exponencial em torno de $x = 0$ com ordem 2.

Como P deve satisfazer ainda a condição 2), P deverá ser da forma

$$P(x) = P_{2,0}(x) + a x^3$$

onde a deve ser escolhido por forma a que 2) se verifique.

Ora

$$P_{2,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

pelo que

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + a x^3$$

Como

$$P(1) = 3 \qquad (2)$$

vem

$$3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + a \times 1 \Rightarrow a = 1/2$$

Logo

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}.$$

Exercício 4

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(2x)}{e^x - 1 - x}$ é uma indeterminação da forma $0/0$.

Derivando separadamente numerador e denominador vem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(2x)}{e^x - 1} \quad (= 0/0)$$

Derivando novamente, obtém-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4\cos}{e^x} = 3.$$

Então, aplicando a Regra de L'Hospital 2 vezes, conclui-se que o limite proposto é igual a 3.

b) O limite dado é uma forma indeterminada do tipo $0\times\infty$, à qual não se pode aplicar a regra de L'Hospital. Mas

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+1/x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+1/x\right)}{1/x} \quad (= 0/0)$$

Derivando numerador e denominador, obtém-se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

Então, aplicando a regra de L'Hospital, conclui-se que o limite proposto vale 1.

Exercício 5

Seja Q o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de $x=2$ da funç g:

$$Q(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{g''(2)}{2!}(x-2)^2$$

Onde

$$g(2) = f(2\times 2-3) = f(1)$$

$$g'(x) = [f(2x-3)]' = 2f'(2x-3) \Rightarrow g'(2) = 2f'(4-3) = 2f'(1).$$

$$g''(x) = [2f'(2x-3)]' = 4f''(2x-3) \Rightarrow g''(2) = 4f''(4-3) = 4f''(1)$$

Como $P_{2,1}$ é o polinómio de Taylor de f em torno de $x=1$,

$$f(1) = P_{2,1}(1) = 1$$

$$f'(1) = P'_{2,1}(1) = 2\times 1+2 = 4$$

$$f''(1) = P''_{2,1}(1) = 2$$

Assim,

$$Q(x) = 1 + 8(x-2) + \frac{8}{2}(x-2)^2$$

$$= 4x^2 - 8x + 1$$