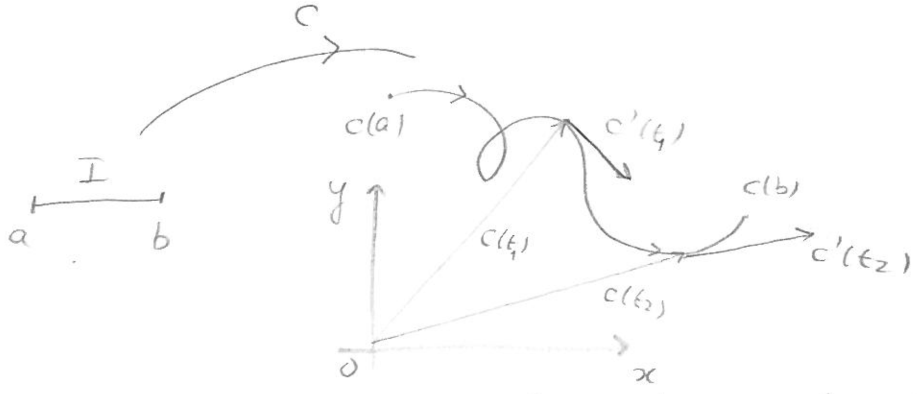
Integrais de linha

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n=2$ ou $n=3)$ uma curva



Recorde que $c'(t)$ é o vetor velocidade da curva, que é sempre tangente à curva.

Dadas uma função $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ aberto do $\mathbb{R}^n$ e $c: [a,b] \rightarrow \mathcal{U}$ uma curva, o integral da função f ao longo da curva c é calculado da seguinte forma:

$$\int_c f\,ds = \int_a^b f(c(t))\,\|c'(t)\|\,dt$$

No caso particular de f ser a função a função constante igual a 1, obtemos o comprimento da curva c

$$\underbrace{L(c)}_{\substack{\shortparallel \\ \text{Comprimento de } c}} = \int_c ds = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt$$

Observe-se que o comprimento de uma curva não depende da forma como a percorremos (isto é, se vamos mais depressa ou mais devagar), desde que mantenhamos a orientação que escolhemos (isto é, não vale andarmos para a "frente" e para "trás")

Um campo de vetores é uma função $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, sendo $\mathcal{U}$ um aberto do $\mathbb{R}^n$.

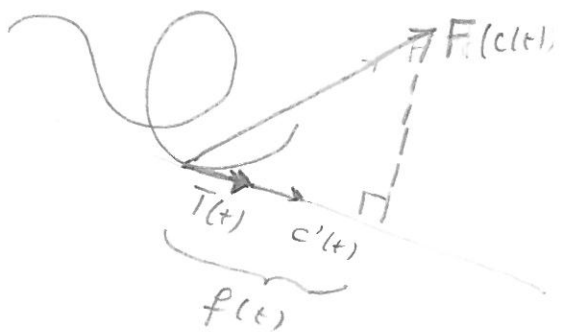
O integral do campo de vetores $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ao longo da curva $c: [a,b] \to \mathcal{U}$ é definido da seguinte forma:

$$\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t)\, dt$$

Nota: $F(c(t)) \cdot c'(t) = F(c(t)) \cdot \underbrace{\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}}_{\text{vetor unitário tangente à curva } c} \|c'(t)\|$

Denotando $\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = T(t)$ e $f(t) = F(c(t)) \cdot T(t)$ a projeção de $H(c(t))$ segundo a direção tangente a c no ponto $c(t)$, temos que

$$\underbrace{\int_C F \cdot ds}_{\text{integral do campo vetorial}} = \underbrace{\int_C f\, ds}_{\text{Integral da função escalar}}$$



Exemplos

Seja $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$, $t \in [0, 4\pi]$

1) $\int_C x\, ds$

$c'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4} = \sqrt{5}$

$\|$

$$\int_0^{4\pi} \cos t \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{4\pi} = 0$$

$$L(c) = \int_0^{4\pi} \sqrt{5}\, dt = \left[\sqrt{5}\, t\right]_0^{4\pi} = 4\pi\sqrt{5}$$

2) $\int_C xyz\, dx + y\, dz + z\, dy \quad , \quad c(t) = (t, t^2, t^3), \ t \in [0,1]$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (xyz, z, y)$

Usando a definição

$$\int_C xyz\, dx + y\, dz + z\, dy$$

$$= \int_0^1 (t^6, t^3, t^2) \cdot (1, 2t, 3t^2)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^6 + 2t^4 + 3t^4)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^7}{7} + t^5\right]_0^1 = \frac{1}{7} + 1 = \frac{8}{7}$$

Seguindo as notações

$$\int_C xyz\, dx + y\, dz + z\, dy$$

$$= \int_0^1 t \cdot t^2 \cdot t^3 \cdot 1\, dt + t^2 \cdot 3t^2\, dt + t^3 \cdot 2t\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^6 + 3t^4 + 2t^4)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^7}{7} + t^5\right]_0^1 = \frac{1}{7} + 1 = \frac{8}{7}$$

Um campo de vetores $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se um campo de gradientes se existe $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$.

Sejam $c: [a,b] \longrightarrow \mathcal{U}$ e $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de gradientes, isto é, $F = \nabla f$, para alguma função $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. Então

$$\boxed{\int_C F \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a))}$$

De facto,

$$\int_C F \cdot ds = \int_a^b \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)\, dt = \int_a^b (f \circ c)'(t)\, dt = f(c(b)) - f(c(a))$$

Note-se que mostrámos que se $c_1, c_2 : [a,b] \to \mathcal{U}$ são duas curvas que têm o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final então $\int_{c_1} F \cdot ds = \int_{c_2} F \cdot ds$.

Um <u>campo de vetores</u> $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ diz-se <u>conservativo</u> se

$$\int_C F \cdot ds = 0 \quad \text{qualquer que seja o caminho fechado em } \mathcal{U}$$

(nota: uma <u>curva</u> (ou caminho) $c : [a,b] \to \mathcal{U}$ diz-se <u>fechada</u> se $c(a) = c(b)$)

Note-se que um campo de gradientes é conservativo, uma vez que

$$\int_C \nabla f \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a)) = 0 \quad , \text{ se } c(a) = c(b).$$

Mostra-se que o recíproco é verdadeiro, isto é, qualquer campo conservativo é um campo de gradientes.

No caso de estarmos perante um campo de gradientes, é muito fácil calcular o integral desse campo ao longo de um caminho. É, por isso, importante, saber decidir se um dado campo de vetores é ou não um campo de gradientes. Se soubermos que sim, então é preferível procurar uma função cujo gradiente seja o nosso campo, pois o cálculo dos integrais fica então muito simples.

Critério

Sejam $\mathcal{U}$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1. Suponhamos que $\mathcal{U}$ não tem "buracos". Então

$$\boxed{F \text{ campo de gradientes} \iff J_x F \text{ é uma matriz simétrica, } \forall x \in \mathcal{U}}$$

Exemplo:

Seja
$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \left(x^2y,\ y^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

$$J_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ x^2 & 2y \end{pmatrix}$$ é simétrica, logo F é um campo de gradientes.

Queremos encontrar $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$. isto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2 + \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 y + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 + g'(y) = y^2 + \frac{x^3}{3} \Rightarrow g'(y) = y^2$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{y^3}{3} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Então
$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{3}y^3$$
é tal que $\nabla f = F$.

Seja $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (F_1(x,y),\ F_2(x,y))$$

Para verificar o critério da página anterior basta verificar que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad (\text{em } \mathcal{U})$$

Seja $G: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto (G_1(x,y,z),\ G_2(x,y,z),\ G_3(x,y,z))$$

Para verificar o critério da página anterior basta verificar que

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial G_2}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial y}$$