

Nome: \_\_\_\_\_ Nº: \_\_\_\_\_

## I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** têm cotação negativa.

1. a) Existem valores  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , para os quais a matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc \end{pmatrix}$  é invertível. V F

- b) Se  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$  então  $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ . V F

- c) Se  $B$  é uma matriz de ordem  $n$  tal que  $B = (A^T A^{-1})^2$  então  $|B| = 1$ . V F

- d) A matriz  $A$  (ordem  $n$ ) é invertível se e só se  $A^T A$  for uma matriz invertível. V F

2. Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) O polinómio característico da matriz  $A$  é  $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2$ . V F

- b) A matriz  $A$  tem  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  como vector próprio associado ao valor próprio  $\lambda = 1$ . V F

- c)  $|A| = 1$  V F

- d) As matrizes diagonais  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$  são semelhantes. V F

3. Seja  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- a) A matriz  $A$  é diagonalizável. V   F
- b) O conjunto  $U_\lambda = \{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço próprio associado ao valor próprio  $\lambda = 3$  de  $A$ . V   F
- c) Relativamente à matriz  $A$ , a multiplicidade aritmética do valor próprio  $\lambda = 3$  é igual a sua multiplicidade geométrica. V   F
- d) Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  e  $U_{\lambda_1}$ ,  $U_{\lambda_2}$ , dois subespaços próprios associados a dois valores próprios distintos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e tendo-se  $v \in U_{\lambda_1}$  e  $u \in U_{\lambda_2}$ . Os vectores  $v, \alpha u$  são vectores linearmente independentes, com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . V   F

## II

Para cada questão deste grupo, complete, **justificando**, as respectivas afirmações.

1. Considere a seguinte matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}, \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

- a) Os valores de  $x \in \mathbb{R}$  para os quais  $|A| = 0$  são:

- b) Considerando  $x = 1$  tem-se que:

$$\text{adj}(A) =$$

$$A^{-1} =$$

2. Considere a seguinte matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Os valores  $\lambda \in \mathbb{R}$  para os quais a matriz  $A - \lambda I_4$  tem inversa são:

b) Os valores próprios da matriz  $A$  e respectivas multiplicidade algébrica são:

c) O subespaço próprio associado ao valor próprio de  $A$ , de maior módulo é

d) Averigue se a matriz  $A$  é diagonalizável (*justifique a sua resposta*).

### III

Responda à questão deste grupo **justificando** a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  invertível. Prove que

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

2. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

Determine os possíveis valores próprios de  $A$ , considerando:

- (a)  $A$  uma matriz *idempotente*, ou seja  $A^2 = A$ ,
- (b)  $A$  uma matriz *nilpotente*, ou seja  $A^2 = O$ , sendo  $O$  a matriz nula.

Cotações:

Parte I	Parte II	Parte III
6	1.5+1.5+1 ; 1.5+1+1+1.5	2 ; 1.5+1.5