maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Folha 1 - Matrizes

uma proposta de soluções

---

1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -1 \\ \pi & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   d) $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 15 \end{pmatrix}$

2. a) (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$

   (iv) $D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 10 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 12 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   b) A: 2, 4, 6, 8 ; B: 2, 2, 2, 2 ; C: 2, 4, 6, 8, 10 ; D: 6, 8, 10, 12 ; E: 1, 1, 1

3. a) é possível 4×3 b) não é possível c) não é possível d) é possível 4×4 e) é possível 4×2 f) é possível 4×3

4. a) $A + D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, b) $3u - 2v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

   c) $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ d) $CA = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   e) $DA = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix} = AD$ f) $Bu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$ g) $Cx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v$

5. a) $-2, \ 2, \ 1$ b) $-8, \ 2, \ 4$ c) $1, \ 2, \ 0$ (note que $A^2 = A.A$)

6. (efectuar as operações sabendo $A^2 = A.A$ e que I_3 e $O_{3\times3}$ são, respectivamente as matrizes identidade e matriz nula, de ordem 3.)

7. Para que AB esteja definido tem que se verificar: $(m + 5) = n$.

   Para que BA esteja definido tem que se verificar: $(11 - n) = m$.

   Resolvendo o sistema com estas duas equações obtém-se $m = 3$ e $n = 8$.

8. Tendo-se $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ vem $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

9. a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2/3 \end{pmatrix}$ e)$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

10. a)

$$\begin{aligned} ((A^{-1})^T X)^{-1} = I \underset{1}{\Rightarrow} & \; X^{-1}((A^{-1})^T)^{-1} = I \\ \underset{2}{\Rightarrow} & \; X^{-1}((A^{-1})^{-1})^T = I \\ \underset{3}{\Rightarrow} & \; X^{-1}A^T = I \\ \underset{4}{\Rightarrow} & \; X(X^{-1}A^T) = XI \\ \underset{5}{\Rightarrow} & \; (XX^{-1})A^T = XI \\ \underset{6}{\Rightarrow} & \; IA^T = XI \\ \underset{7}{\Rightarrow} & \; A^T = X \end{aligned}$$

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 2.$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; 3. $(A^{-1})^{-1} = A$; 4. multiplicando ambos os membros da igualdade pela matriz X ; 5. propriedade associativa da multiplicação de matrizes ; 6. definição de matriz inversa ; 7. $\forall A, A.I = I.A = A$.

b) $X = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Efectuar as operações e verificar as igualdades, salientando que:

a) nenhum dos factores, matrizes A ou B, é igual à matriz nula e o produto originou a matriz nula,

b) tem-se que $AC = AD$, o que não implica igualdade entre matrizes $C = D$.

12. a) Pretende-se a matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tal que $AX = XA$. Resolvendo o sistema que resulta de $AX = XA$ tem-se $X = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

b) Neste caso tem que se ter $B = O_2$.

13. Terá que se provar, justificando através das propriedades das operações com matrizes, que $(P^TAP)^T = P^TAP$.

14. hipótese: $A = A^T$ e $B = B^T$

tese: $AB = (AB)^T \Leftrightarrow AB = BA$. (há que provar a *equivalência*, que é uma *dupla implicação*)

15. a) —-

b) Terá que se provar, justificando através das propriedades das operações com matrizes e sabendo-se que $A^T = -A$, que $P - P^T = (P - P^T)^T$.

16. a) hipótese: $AA^T = A^TA = I$ e $BB^T = B^TB = I$

tese: $(AB)^T.AB = I$

b) Há que "observar"a definição de matriz ortogonal $AA^T = A^TA = I$.

17. Verificar realizando as operaçoes que $AB = BA = I$.

18. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^3 = O_3$.

b) Há que verificar, realizando as operações e recorrendo às propriedades das mesmas que a matriz $(I_3 + A + A^2)(I_3 - A) = (I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3$. Em particular utilizar a propriedade distribuitiva da multiplicação relativamente à àdição.

19. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. a)—-

b) Escrever a matriz A^T e verificar que $A^T A = AA^T = I$.

c) verificar $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}3 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

21. a) verificar $(AB^{-1}C)^{-1} = C^{-1}BA^{-1}$ (lembrar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$)

b) <u>hipótese:</u> $(AB)^T = A^T B^T$

<u>tese:</u> $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} & \underset{1}{\Leftrightarrow} ((AB)^{-1})^T = (A^{-1}B^{-1})^T \\ & \underset{2}{\Leftrightarrow} ((AB)^T)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^T \\ & \underset{3,4}{\Leftrightarrow} (A^T B^T)^{-1} = (B^{-1})^T (A^{-1})^T \\ & \underset{5}{\Leftrightarrow} (B^T)^{-1}(A^T)^{-1} = (B^{-1})^T (A^{-1})^T \\ & \underset{2}{\Leftrightarrow} (B^{-1})^T (A^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T \end{aligned}$$

1. calculando a matriz transposta em ambos os membros da igualdade; 2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; 3. hipótese; 4. $(AB)^T = B^T A^T$, 5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

22. a) De $AB = O$ e sabendo que existe A^{-1}, já que a matriz A é uma matriz invertível, temos $A^{-1}(AB) = A^{-1}O \underset{1}{\Rightarrow} (A^{-1}A)B = A^{-1}O \underset{2,4}{\Rightarrow} I_n B = O \underset{3}{\Rightarrow} B = O$

b) De $AX = AY$ e sabendo que existe A^{-1}, já que a matriz A é uma matriz invertível, temos $A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY) \underset{1}{\Rightarrow} (A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y \underset{2}{\Rightarrow} I_n X = I_n Y \underset{3}{\Rightarrow} X = Y$

1. propriedade associativa da multiplicação de matrizes ; 2. definição de matriz inversa ; 3. $\forall A \;\; A.I = I.A = A$; 4. $\forall A \;\; A.O = O.A = O$, sendo O a matriz nula.

23. a)—- b)—- c)—-