Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Equações Diferencias Lineares de Ordem n

1. Considere a equação diferencial linear homogénea de segunda ordem

$$y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = 0\,.$$

   (a) Mostre que $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, são soluções linearmente independentes da equação.

   (b) Determine a solução maximal que passa no ponto $(0,2)$ e que satisfaz $y'(0) = 3$.

2. Para as equações diferenciais que se apresentam de seguida, mostre que as funções correspondentes formam um conjunto fundamental de soluções:

   (a) $y'''(x) + 2\,y''(x) - 11\,y'(x) - 12\,y(x) \;=\; 0\,,\qquad \{\,\mathrm{e}^{3x},\, \mathrm{e}^{-x},\, \mathrm{e}^{-4x}\,\}$

   (b) $y'''(x) - y''(x) + 4\,y'(x) - 4\,y(x) \;=\; 0\,,\qquad \{\,\mathrm{e}^{3x},\, \operatorname{sen} x,\, \cos x\,\}$

   (c) $x^3\,y'''(x) - 3x^2\,y''(x) + 6x\,y'(x) - 6\,y(x) \;=\; 0\,,\quad x > 0\,,\qquad \{\,x,\, x^2,\, x^3\,\}$

   (d) $y^{(4)}(x) - y(x) \;=\; 0\,,\qquad \{\,\mathrm{e}^{x},\, \mathrm{e}^{-x},\, \operatorname{sen} x,\, \cos x\,\}$

3. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares homogéneas:

   (a) $y''(x) - 2\,y'(x) - 3\,y(x) = 0$

   (b) $y'''(x) - 3\,y''(x) - y'(x) + 3\,y(x) = 0$

   (c) $y''(x) - 8\,y'(x) + 16\,y(x) = 0$

   (d) $y'''(x) - 6\,y''(x) + 12\,y'(x) - 8\,y(x) = 0$

   (e) $y''(x) - 4\,y'(x) + 13\,y(x) = 0$

   (f) $y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$

   (g) $y^{(iv)} + y(x) = 0$

   (h) $y^{(iv)} + 2\,y''(x) + y(x) = 0$

4. Sabendo que $y(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5\,y = 0\,,$$

resolva a equação.

5. Determine a solução maximal da equação $y''(x) - y'(x) - 12\,y(x) = 0$ que passa no ponto $(0,3)$ e que satisfaz $y'(0) = 5$.

6. Determine a solução maximal da equação $y''(x) - 4\,y'(x) + 29\,y(x) = 0$ que passa no ponto $(0,0)$ e que satisfaz $y'(0) = 5$.

7. Determine a solução maximal da equação $y''(x) = y'(x)$ que passa no ponto $(1,1)$ e que satisfaz $y'(0) + y(0) = 0$.

8. Resolva a equação diferencial $y'' - 3\,y' + 2\,y = f(x)$, quando:

   (a) $f(x) = 4x^2$ (b) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ (c) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ (d) $f(x) = 2x^2 + \mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x + 4x\,\mathrm{e}^{3x}$

9. Determine a solução maximal da equação $y'' - 2\,y' - 3\,y = 2\,\mathrm{e}^x - 10 \operatorname{sen} x$ que passa no ponto $(0,2)$ e que satisfaz $y'(0) = 4$.

10. Determine a solução maximal da equação $y'' + y = 3x^2 - 4 \operatorname{sen} x$ que passa no ponto $(0,0)$ e que satisfaz $y'(0) = 1$.

11. Resolva as seguintes equações diferenciais:

    (a) $y'' - 3\,y' + 2\,y = \operatorname{sen}(2x) + \mathrm{e}^{2x}$ (b) $y''' - 4\,y' = 3x + \mathrm{e}^x$

    (c) $y'' - y' + 2\,y = 2x - 1 - 3\,\mathrm{e}^x$ (d) $y''' - 2\,y'' - 5\,y' + 6y = \mathrm{e}^x + x^2$

    (e) $y''' + y'' - 2y = x\,\mathrm{e}^x + 1$