1. Determine uma função f e uma função g que verifiquem, respectivamente:

$$\begin{cases} f'(t) = t \\ f(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'(t) = -\frac{1}{t} \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

Desenhe os gráficos das funções obtidas. Qual a relação entre a tangente ao gráfico de f e a tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1)$?

2. Determine uma função real f que verifique :

(a) $\begin{cases} f'(t) = (2+t)^3 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'(t) = \sqrt{2+t} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f'(t) = (at+b)^n \quad (a, b > 0, n \neq -1) \\ f(1) = 1 \end{cases}$

Indique o intervalo aberto maximal onde a solução pode ser definida e esboce o seu gráfico. Qual a solução na alínea (c) se $n = -1$?

3. Suponha-se que a aceleração de um automóvel é dada, em m/s^2, pela seguinte função de tempo $a(t) = 2t$. Se no instante $t = 0$ o automóvel inicia a sua marcha, determine a distância percorrida pelo automóvel em 5 segundos.

4. Indique se existe alguma função constante y que verifique $y' = y + 2$. Determine as funções constantes y que verificam:

$$y' = (y-a)(y^2 - 2by + b^2)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Determine se a função y indicada é solução da equação diferencial em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Indique em cada caso a ordem da equação diferencial apresentada.

(a) $y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}, \quad y'' + 2y' + y = 0;$

(b) $y(t) = 1, \quad y'' + 2y' + y = 0;$

(c) $y(t) = \sin t, \quad y''' + y'' + y' + y = 0.$

6. Verifique que a função dada por $f(x) = \ln x$ é solução da equação diferencial

$$xy'' + y' = 0$$

Qual o intervalo aberto maximal onde f é solução? Pode indicar uma solução de tal equação no intervalo $]-\infty, 0[$?

7. Determine α e β de maneira a que $y(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ seja solução do problema com condições de fronteira

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

Existe solução deste tipo se modificarmos as condições de fronteira para $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 1$?

8. Determine uma equação diferencial $y'' + py' + qy = 0$ tendo como soluções:

(a) $e^t, e^{-t};$

(b) $\sin 2t, \cos 2t;$

(c) $1, t;$

(d) $e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t.$

9. Existe alguma função y tal que $y' = y$? E tal que $y' = ky$, com k constante?