introdução aos sistemas dinâmicos

edos separáveis

1.

Considere a equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m), \qquad t \geqslant 0,$$

correspondente à lei do arrefecimento de Newton, que permite descrever a variação da temperatura de um corpo em contacto com um meio a uma temperatura constante T_m (k é uma constante, que podemos, de uma forma simples, dizer que depende apenas do material).

1.1 Resolva a equação diferencial, escrevendo a constante arbitrária em função do valor $T_\circ = T(0)$ que T toma no instante inicial $t = 0$.

1.2 Para $k = 2$ e $T_m = 20$, determine a temperatura do corpo após 2.3 instantes de tempo, sabendo que a sua temperatura inicial $T_\circ$ é igual a 80.

1.3 Ainda para os mesmos valores de k e T_m, quanto tempo demora o corpo a atingir a temperatura 19.2, se $T_\circ = 10$?

1.4 Ainda para os mesmos valores de k e T_m, determine a temperatura inicial do corpo sabendo que a sua temperatura após 3.0 instantes de tempo é igual a 24.8.

1.5 Ainda para os mesmos valores de k e T_m, se a temperatura do corpo após 1.5 instantes de tempo é igual a 28.4, determine a sua temperatura passado 3.5 instantes de tempo.

2.

Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{x}, \qquad x \neq 0.$$

2.1 Resolva a equação diferencial, procurando escrever a constante arbitrária em função do valor $x_\circ = x(0)$ que x toma no instante inicial $t = 0$.

2.2 Determine o valor de $x(2.4)$, sabendo que no instante inicial $x_\circ = 1$.

2.3 Determine o valor de $x(4.85)$, sabendo que no instante inicial $x_\circ = -2.13$.

2.4 Determine o valor de $x(-6.95)$, sabendo que no instante inicial $x_\circ = 7.16$.

3.

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 2tx^2.$$

3.1 Resolva a equação diferencial, procurando escrever a constante arbitrária em função do valor $x_o = x(0)$ que x toma no instante inicial $t = 0$.

3.2 Determine o valor de $x(3)$, sabendo que no instante inicial $x_o = -1$.

3.3 Determine o valor de $x(1.2)$, sabendo que no instante inicial $x_o = 0.25$.

3.4 Determine o valor de $x(-0.15)$, sabendo que no instante inicial $x_o = 1$.

4.

Resolva a equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1).$$

4.1 Resolva a equação diferencial, procurando escrever a constante arbitrária em função do valor $x_o = x(0)$ que x toma no instante inicial $t = 0$.

4.2 Determine o valor de $x(2)$, sabendo que no instante inicial $x_o = -1$.

4.3 Determine o valor de $x(4.02)$, sabendo que no instante inicial $x_o = 0.75$.

4.4 Determine o valor de $x(-1.65)$, sabendo que no instante inicial $x_o = 3.8$.

4.5 Desenhe o retrato de fases das soluções da equação diferencial apresentada.

5.

Considere a seguinte equação diferencial de primeira ordem sujeita a uma condição inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t}{2x-1}, & x \neq 1/2 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

Determine os valores de $x(-1.65)$ e $x(2.25)$.