Pré-Cálculo

Uma Revisão de Conceitos Matemáticos para as Cadeiras de Cálculo

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Setembro de 2005

Este texto pretende dar aos alunos das disciplinas de Cálculo (I e II) uma visão genérica de algumas matérias, já estudadas anteriormente, e que consideramos serem pré-requisitos de Matemática para as disciplinas de Cálculo.
Não pretendemos mais do que fornecer ao aluno a possibilidade de recordar, de uma forma rápida e fácil, alguns resultados que foram (ou não) sendo estudados em anos anteriores e que consideramos indispensáveis à percepção das matérias a leccionar. Não usamos grande detalhe na exposição dos resultados, mas preocupamo--nos mais com a resolução de alguns exercícios que ajudem a recordar os conceitos estudados no ensino pré--universitário.
Ao longo do ano haverá provavelmente necessidade de outras revisões que aqui não puderam ser contempladas. Conscientes das dificuldades em Matemática, sentidas por grande número de alunos, procuraremos, deste modo, facilitar a sua integração no ensino superior. Para isso, é indispensável que da parte dos alunos haja **vontade de aprender** e **alguma vontade de trabalhar**...
Para um melhor aprofundamento das matérias aqui afloradas, os alunos deverão consultar outros textos. Para além dos manuais do ensino secundário, sugerem-se, a título de exemplo:

1. Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes. *Cálculo a Uma Variável*, volumes I e II. Edições Loyola, 2002.
2. Jaime Carvalho e Silva. *Princípios de Análise Matemática Aplicada*. McGraw-Hill, 1994.

Pode também consultar outra bibliografia conforme indicado nas Referências.

1 Números e Cálculo

1.1 Conjuntos de Números

Notação	Definição	Exemplos
$\mathbb{N}$	Números Naturais	$1; 2; 3; \ldots$
$\mathbb{N}_0$	Números Naturais e o Zero $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	$0; 1; 2; 3; \ldots$
$\mathbb{Z}$	Números Inteiros $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$	$\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots$
$\mathbb{Q}$	Números Racionais $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\right\}$	dízimas finitas: $-0,6; \frac{1}{4} = 0,25; 34,8; 3; \ldots$ dízimas infinitas periódicas: $0,1(6) = \frac{1}{6}; 0,(8) = \frac{8}{9}; \ldots$
$\mathbb{R}$	Números Reais $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{x : x \text{ é número irracional}\}$	irracionais (ou dízimas infinitas não periódicas): $\pi = 3.14159\ldots; \sqrt{7} = 2.645751\ldots$
$\mathbb{C}$	Números Complexos $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$	$4 - i; 3i; 5; \ldots$

Nota: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$ e $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty[$
$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} =]-\infty, 0[$ e $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\} =]-\infty, 0]$

1.2 Condições

Uma **condição (numérica)** é uma expressão que contém variáveis e que, para toda a concretização (substituição das variáveis por números), só admite um valor lógico, verdadeiro (**V**) ou falso (**F**). Chama-se **condição universal** (**c.univ.**) a uma condição que é verdadeira para toda a concretização (p.e., $x^2 + 1 > 0$); chama-se **condição impossível** (**c.imp.**) a uma condição que é falsa para toda a concretização.
A partir de condições elementares (por exemplo, relações de igualdade, $=$, ou de ordem, $<$), constroem-se condições mais *complicadas* por conjunção (com o operador $\wedge$, "e") ou disjunção (com o operador $\vee$, "ou").

À conjunção de condições ($\wedge$) corresponde a intersecção de conjuntos solução ($\cap$).
À disjunção de condições ($\vee$) corresponde a reunião de conjuntos solução ($\cup$).

Consequência disto são as seguintes leis.
Seja $\mathcal{C}$ uma condição qualquer. Então,

- $\mathcal{C} \wedge$ **c.imp.** e $\mathcal{C} \wedge$ **F** são **c.imp.**

  Exemplos:

  – $x + 1 = 0 \wedge x^2 + 1 = 0$
  – $x + 1 = 0 \wedge 1 = 0$

  são **c.imp.**.

- $\mathcal{C} \vee$ **c.univ.** e $\mathcal{C} \vee$ **V** são **c.univ.**

  exemplo:

  – $x + 1 = 0 \vee x^2 + 1 > 0$ e
  – $x + 1 = 0 \vee 1 > 0$

  são **c.univ.**.

- $\mathcal{C} \vee$ **c.imp.**, $\mathcal{C} \vee$ **F**, $\mathcal{C} \wedge$ **c.univ.** e $\mathcal{C} \wedge$ **V** são todas equivalentes a $\mathcal{C}$.

1.3 Módulo de um Número

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real x é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ou seja, é o valor não negativo que representa a distância desse número à origem da recta real.

Exemplo: Por definição

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Exercícios Propostos

1. Escreva, sem usar o símbolo | |, os seguintes módulos:
   (a) $|2x-3|$ (b) $2|x+4|$ (c) $|x| - x^3$
2. Mostre que:
   (a) $|-x| \neq x$ (b) $|x^2| = x^2 = |-x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$

1.4 Operações com Fracções

Propriedades	Exemplos
$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc} \wedge d \neq 0$	$\dfrac{\frac{x-1}{3x^2}}{\frac{x^3-2}{8}} = \dfrac{8(x-1)}{3x^2(x^3-2)}$
$\dfrac{ab+ac}{a} = b+c \wedge a \neq 0$	$\dfrac{3x \operatorname{sen} x - 5xe^{x^2}}{x} = 3 \operatorname{sen} x - 5e^{x^2} \wedge x \neq 0$
$\dfrac{ab+c}{a} \neq b+c$	$\dfrac{(x^2+1)\cos x^2 + \ln(x^4-5x)}{x^2+1} \neq \cos x^2 + \ln(x^4-5x)$
$\dfrac{b+c}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$	$\dfrac{2^{x-3} + \cos x}{3x^2+5} = \dfrac{2^{x-3}}{3x^2+5} + \dfrac{\cos x}{3x^2+5}$
$\dfrac{a}{b+c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$	$\dfrac{x^2}{e^x + x\tan x} \neq \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{x}{\tan x}$
$\dfrac{a+c}{b+d} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$	$\dfrac{5^{-x} + \ln(x+3)}{5^{-x}+x} \neq 1 + \dfrac{\ln(x+3)}{x}$

Exercícios Propostos

Utilizando os símbolos $=$ ou $\neq$, e impondo as condições necessárias, preencha os espaços de forma a que a afirmação resultante seja verdadeira. Justifique a sua resposta.

(a) $\dfrac{ab+ac}{a} \; \ldots \; b+ac$

(b) $\dfrac{a-b}{b-a} \; \ldots \; -1 \wedge \ldots$

(c) $-(a+b) \; \ldots \; -a+b$

(d) $(a-b)-c \; \ldots \; a-(b-c)$

(e) $-\dfrac{a}{b} \; \ldots \; \dfrac{-a}{b} \wedge \ldots$

(f) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} \; \ldots \; \dfrac{a}{\frac{b}{c}} \wedge \ldots$

1.5 Potências

$\boxed{a^u \text{ é uma } \textbf{potência de base } a \text{ e } \textbf{expoente } u}$

A potência a^u não está definida para todo $a, u \in \mathbb{R}$.

Se $a > 0$, a^u está sempre bem definida e $a^u \in \mathbb{R}^+$.

Se $a = 0$, a potência a^u só é válida se $u \in \mathbb{R}^+$ e $a^u = 0^u = 0$. Por exemplo, $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$ não tem significado.

Se $a < 0$, a potência a^u nem sempre tem significado. Por exemplo, $(-2)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{(-2)^5} = \sqrt{-32}$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e sejam $u, v \in \mathbb{R}$.

Propriedades	**Exemplos**
$a^{-u} = \dfrac{1}{a^u}$	$3^{-4} = \dfrac{1}{3^4}$
$a^{\frac{1}{u}} = \sqrt[u]{a}$	$7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$
$a^{\frac{v}{u}} = \sqrt[u]{a^v}$	$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$
$a^v a^u = a^{v+u}$ $a^v a^u \neq a^{vu}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ $4^1 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 4^3 \neq 4^{1\cdot 2} = 4^2$
$(a^u)^v = a^{uv} = (a^v)^u$	$(2^3)^2 = 8^2 = 64 = 2^6 = 2^{3\cdot 2}$ $(2^2)^3 = 4^3 = 64$
$a^u b^u = (ab)^u$	$5^2 \cdot 6^2 = 30^2$
$\dfrac{a^v}{a^u} = a^{v-u}$	$\dfrac{7^3}{7^4} = 7^{3-4} = 7^{-1}$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^u = \dfrac{a^u}{b^u}$	$\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{3^3}{5^3}$

ATENÇÃO	**Exemplos**
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$	$\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$ $5 + 12 = 17$
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$, se n é par	$\sqrt[4]{(-5)^4} = \lvert -5 \rvert = 5$
$\sqrt[n]{a^n} = a$, se n é ímpar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

NOTA: Se $a < 0$, as propriedades anteriormente descritas são apenas válidas se $u = \frac{r}{s}$, com s um número ímpar. Por exemplo, se aplicarmos a 5ª propriedade a

$$((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1;$$

por outro lado,

$$((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Exercícios Propostos

1. Prove, usando as propriedades anteriores, que $\boxed{a^0 = 1, \text{ para todo } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$.

   Justifique porque é que 0^0 não está definido.

2. Utilizando os símbolos $=$ ou $\neq$, e impondo as condições necessárias, preencha os espaços de forma a que a afirmação resultante seja verdadeira. Justifique a sua resposta.

   (a) $\sqrt{a^2+1} \ \ldots \ a+1$ (b) $(a^r)^2 \ \ldots \ a^{r^2}$

   (c) $a^x b^y \ \ldots \ (ab)^{xy}$ (d) $\sqrt[n]{\frac{1}{c}} \ \ldots \ c^{-\frac{1}{n}}$

   (e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \ \ldots \ a^{\frac{1}{mn}}$ (f) $\sqrt[n]{a^m} \ \ldots \ a^{mn}$

3. Simplifique as as seguintes expressões, aplicando as propriedades vistas anteriormente.

   (a) $\left(\sqrt{3}\right)^0 + 4^{-2} - \dfrac{5^3}{5^2}$;

   (b) $\left(2^3\right)^2 \cdot 2^{-1} + \dfrac{4^2}{4^{-1}}$;

   (c) $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt[3]{(-4)^3} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} + \sqrt[3]{-108}$

1.6 Casos Notáveis da Multiplicação

Quadrado da Soma	**Quadrado da Diferença**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferença de Quadrados
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemplo: Repare que

$$(3+t)^2 = 9 + 6t + t^2$$

$$(3-t)^2 = 9 - 6t + t^2$$

$$(3+t)(3-t) = 9 - t^2$$

2 Polinómios

Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Notação	Definição	Exemplo
monómio	$a_n x^n$	x^5; $-4x^2$; 3
grau do monómio	n	5; 2; 0
polinómio	é uma soma de monómios $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$x^5 - 4x^2 + 3$
termo independente	a_0	3
coeficientes do polinómio	$a_n; \ldots; a_1; a_0$	$1; 0; 0; -4; 0; 3$
grau do polinómio	é o maior grau dos monómios que formam o polinómio	5

Nota: O grau do monómio nulo é indeterminado.

2.1 Divisão Inteira de Polinómios

Dados dois polinómios p e d, **dividir** p por d é encontrar dois polinómios q e r tais que
$p = d \cdot q + r$, onde r tem grau inferior a d ou $r = 0$.
Se $r = 0$ dizemos que p é **divisível** por d.

$$\begin{array}{r|l} p\text{: } \textbf{dividendo} & d\text{: } \textbf{divisor} \\ \cline{2-2} r\text{: } \textbf{resto} & q\text{: } \textbf{quociente} \end{array}$$

Se o dividendo tem grau n e o divisor tem grau m então o quociente terá grau $n - m$.
Note-se que se o grau do divisor for maior que o grau do dividendo então o quociente da divisão inteira é 0 e o resto coincide com o dividendo.

2.1.1 Algoritmo da Divisão Inteira de Polinómios

Este algoritmo será ilustrado com um exemplo.
Pretende-se efectuar a divisão de $p(x) = 4x^4 + 2x^2 - 3$ por $d(x) = x^2 - 1$.

<table>
<tr><td>$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 2x^2 - 3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$</td><td>Começa-se por escrever, ordenadamente, o dividendo e o divisor colocando os expoentes das potências de x por ordem decrescentes, de acordo com o esquema.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 2x^2 - 3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} & 4x^2 \end{array}$$</td><td>Dividem-se os termos de maior grau do dividendo e do divisor $\dfrac{4x^4}{x^2} = 4x^2$. O resultado é o termo de maior grau do quociente.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 4x^4 & + & 2x^2 & - & 3 & x^2 - 1 \\ \cline{7-7} - & (4x^4 & - & 4x^2) & & & 4x^2 \\ \cline{1-6} & & & 6x^2 & - & 3 & \end{array}$$</td><td>Multiplica-se o divisor pelo termo de maior grau do quociente, escreve-se o simétrico desse produto e adiciona-se ao dividendo, obtendo o resto parcial.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 4x^4 & + & 2x^2 & - & 3 & x^2 - 1 \\ \cline{7-7} - & 4x^4 & + & 4x^2 & & & 4x^2 + 6 \\ \cline{1-6} & & & 6x^2 & - & 3 & \end{array}$$</td><td>Divide-se o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do divisor $\dfrac{6x^2}{x^2} = 6$. O resultado é o segundo termo do quociente.</td></tr>
<tr><td>$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 4x^4 & + & 2x^2 & - & 3 & x^2 - 1 \\ \cline{7-7} - & 4x^4 & + & 4x^2 & & & 4x^2 + 6 \\ \cline{1-6} & & & 6x^2 & - & 3 & \\ & & - & (6x^2 & - & 6) & \\ \cline{3-6} & & & & & 3 & \end{array}$$</td><td>Repete-se, em seguida, todo o processo.
A divisão acaba quando o grau do resto parcial é inferior ao grau do divisor.</td></tr>
</table>

Assim, o resto desta divisão inteira é $r(x) = 3$ e o quociente é $q(x) = 4x^2 + 6$.

2.1.2 Regra de Ruffini

A regra de Ruffini é um processo prático para a determinação dos coeficientes do quociente e do resto da divisão inteira de polinómios quando o divisor é da forma $x-\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Veja-se a partir de um exemplo em que consiste a Regra de Ruffini.
Considere a divisão de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5$ por $d(x) = x + 1$.

$\begin{array}{c\|cccc} & 2 & -5 & 0 & 5 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$	Na primeira linha colocam-se os coeficientes do dividendo. Escreve-se zero nos coeficientes nulos. Na segunda linha coloca-se o valor de $\alpha = -1$
$\begin{array}{c\|cccc} & 2 & -5 & 0 & 5 \\ -1 & \downarrow & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$	Transporta-se para a terceira linha o primeiro coeficiente do dividendo. É nesta linha que se obtém os coeficientes do polinómio quociente e do resto.
$\begin{array}{c\|cccc} & 2 & -5 & 0 & 5 \\ -1 & & -2 & & \\ \hline \times & 2 & & & \end{array}$	Obtém-se o segundo coeficiente do quociente -7 multiplicando por $\alpha = -1$ o primeiro coeficiente do quociente 2 e adicionando o resultado -2 ao segundo coeficiente do dividendo -5.
$\begin{array}{c\|cccc} & 2 & -5 & 0 & 5 \\ -1 & & -2 & 7 & -7 \\ \hline & 2 & -7 & 7 & -2 \end{array}$	Repete-se o processo sucessivamente. O último número obtido é o resto da divisão, sendo os anteriores os coeficientes do quociente.

Neste caso o resto é $r(x) = -2$ e o quociente é $q(x) = 2x^2 - 7x + 7$.

Exercícios Propostos

Determine quociente e o resto da divisão inteira de
(a) $p(x) = x^5 + 4x^2 - 2$ por $d(x) = x^2 + 2$ (b) $p(x) = x^6 - 4x^2 - 1$ por $d(x) = x^3 - 1$
(c) $p(x) = x^2 - 3x - 5$ por $d(x) = x - 2$ (d) $p(x) = x^4 - 2x^2 - 16$ por $d(x) = x + 2$

2.2 Zeros de um Polinómio e Factorização

Dado um polinómio p diz-se que β é um **zero** ou uma **raiz** de p se, ao substituir x por β, o polinómio anula-se, ou seja, $p(\beta) = 0$. Mostra-se que β é uma raiz de p se o resto da divisão de p por $x - \beta$ é zero.
A decomposição de um polinómio em factores consiste em escrever um polinómio como produto de factores. Se β é raiz do polinómio p então p pode decompor-se em factores da forma $p(x) = (x-\beta)q(x)$, onde $q(x)$ é o quociente da divisão inteira de $p(x)$ por $x - \beta$.
Existem vários processos para determinar zeros de um polinómio e a sua consequente decomposição.

- Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Os zeros deste polinómio existem (em $\mathbb{R}$) se e só se $b^2 - 4ac \geq 0$ e são dados pela **fórmula resolvente**

$$\boxed{\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \boxed{\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Nota: É usual denotar $\Delta = b^2 - 4ac$.

Caso existam os zeros, pode-se factorizar p do seguinte modo

$$p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Exemplo: Seja $p(x) = 3x^2 - 3x - 18$. Aplicando a fórmula resolvente, verifica-se que tem como zeros

$$x = \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18)}}{2 \cdot 3} = 3 \quad \text{e} \quad x = \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18)}}{2 \cdot 3} = -2.$$

Assim, $p(x) = 3(x - 3)(x + 2)$.

- Existem certos polinómios de grau 2 que são mais fáceis de factorizar aplicando os **casos notáveis da multiplicação**.

  Exemplo: Aplicando os casos notáveis pode-se decompor os seguintes polinómios

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 - 25 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 - 5^2 \quad \text{é a diferença entre os quadrados de } \sqrt{2}x \text{ e } 5 \\ &= \left(\sqrt{2}x - 5\right)\left(\sqrt{2}x + 5\right) \\ t(x) &= 9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 \quad \text{é o quadrado da diferença entre } 3x \text{ e } 4 \\ &= (3x-4)^2 \\ a(x) &= 4x^2 + 4\sqrt{5}x + 5 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 \quad \text{é o quadrado da soma de } 2x \text{ com } \sqrt{5} \\ &= (2x + \sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

- Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$. A regra de Ruffini pode ser usada para determinar o valor de α tal que o resto da divisão inteira de p por $x - \alpha$ seja nulo.

Regra prática
Suponha-se que p tem todos os coeficientes inteiros, ou seja, $a_i \in \mathbb{Z}$
Então, se tiver um zero da forma $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$, tal que $\beta \in \mathbb{Z}$ e $\gamma \in \mathbb{N}$
β é divisor de a_0 e γ é divisor de a_n.

  Donde $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, onde $q(x)$ é o quociente da divisão.

  Exemplo: Considere-se $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. De acordo com a regra prática, como

$$\begin{aligned} a_3 = 1 &\quad \Rightarrow \quad \beta = 1 \vee \beta = -1 \\ a_0 = 1 &\quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 \end{aligned}$$

  os possíveis candidatos a raízes são 1 e -1. Começa-se por experimentar.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & & -3 & 6 & -7 \\ \hline & 1 & -6 & 7 & \boxed{-6} \end{array}$$

  Como o resto é não nulo, -1 não é zero de p. Resta experimentar $\alpha = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

  Donde 1 é zero de p e $p(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$.

  Além disso, pela fórmula resolvente, sabe-se que

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2},$$

  o que quer dizer que $x^2 - 2x - 1 = \left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$. Logo

$$p(x) = (x-1)\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right).$$

- Outro processo baseia-se na **existência de factores comuns** em todos os monómios que compõem o polinómio. Se tais factores existirem, podem-se colocar em evidência.

  Exemplo 1: Seja $p(x) = -8x^3 + 16x^2$. Repare-se que $8x^2$ é um factor comum a todos os monómios que constituem o polinómio, ou seja, é um factor comum a $-8x^3$ e a $16x^2$. Donde

$$p(x) = 8x^2(-x + 2)$$

Exemplo 2: Seja $t(x) = 2x^2 - 2 + x^3 - x$. Poderia-se tentar aplicar a regra de Ruffini. Mas repare-se

$$2x^2 - 2 + x^3 - x = 2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1)$$

Donde existe um factor $x^2 - 1$ comum às duas parcelas. Logo

$$t(x) = (x^2 - 1)(2 + x)$$

E como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, tem-se que $t(x) = (x - 1)(x + 1)(2 + x)$.

Exercícios Propostos

Factorize os seguintes polinómios

(a) $x^2 - 3x + 2$ (b) $52x^2 - 10x^3 - 48x$

(c) $x^3 - 7x^2 + 3x + 3$ (d) $\dfrac{x^2}{36} - 9$

2.3 Simplificação de Expressões

O **domínio das expressões** é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão tem significado. O domínio da expressão inicial deve **ser igual** ao domínio da expressão obtida após simplificação. Para tal é, por vezes necessário, **acrescentar condições às variáveis** envolvidas na expressão.

Considerem-se alguns exemplos de simplificação de expressões e racionalização de denominadores.

Exemplo 1: Pelas propriedades das potências tem-se que

$$\left(\frac{x^4}{3y^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3y^3}{x^4}\right)^2 = \frac{3^2(y^3)^2}{(x^4)^2} = \frac{9y^6}{x^8} \wedge y \neq 0$$

Acrescentou-se a condição $y \neq 0$ porque o domínio da expressão $\dfrac{9y^6}{x^8}$ é $x \neq 0$ e o domínio da expressão inicial é $y \neq 0$ (encontra-se no denominador de uma fracção) e $x \neq 0$ (uma potência com expoente negativo não pode ter base nula). A igualdade das expressões apenas é válida se $y \neq 0$ e $x \neq 0$.

Exemplo 2: Novamente pelas propriedades das potências,

$$\sqrt[3]{\frac{2^3a^6}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{a^6}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{2a^2}{b}$$

Repare-se que o domínio das expressões, inicial e final, é $b \neq 0$, daí que não seja necessário acrescentar nenhuma condição às variáveis para que a igualdade entre as expressões seja válida.

Exemplo 3: Para simplificar a expressão

$$\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{2x + 3}{2x + 2} - \frac{1}{2x - 2}$$

reduzem-se todas as fracções ao mesmo denominador. Para isso é necessário factorizar os denominadores. Sabe-se que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, $2x - 2 = 2(x - 1)$ e $2x + 2 = 2(x + 1)$. Pode-se reduzir todas as fracções a fracções equivalentes com denominador $2(x^2 - 1)$. Assim

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{2x + 3}{2x + 2} - \frac{1}{2x - 2} &= \frac{2x}{2(x^2 - 1)} + \frac{(2x + 3)(x - 1)}{2(x^2 - 1)} - \frac{(x + 1)}{2(x^2 - 1)} \\ &= \frac{2x + (2x + 3)(x - 1) - (x + 1)}{2(x^2 - 1)}\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva e simplificando os termos semelhantes obtém-se

$$\begin{aligned} &= \frac{2x + 2x^2 - 2x + 3x - 3 - x - 1}{2(x^2 - 1)} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 4}{2(x^2 - 1)} = \frac{2(x^2 + x - 2)}{2(x^2 - 1)} \\ &= \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Ainda é possível simplificar mais, factorizando o numerador. Aplicando a fórmula resolvente, sabe-se que os zeros de $x^2 + x - 2$ são $x = 1$ e $x = -2$. Donde $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ e $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Logo

$$\begin{aligned} &= \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \frac{x + 2}{x + 1} \wedge x \neq 1 \end{aligned}$$

Repare-se que

$$\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{2x + 3}{2x + 2} - \frac{1}{2x - 2} \neq \frac{x + 2}{x + 1}$$

uma vez que os domínios das duas expressões não são iguais. O domínio da primeira é $x \neq 1$ e $x \neq -1$ e o domínio da segunda é $x \neq -1$. A igualdade só é válida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Exemplo 4: Considere-se a expressão $\dfrac{y^{-1} + x^{-1}}{(xy)^{-1}}$. Começa-se por reduzir tudo ao mesmo denominador. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{y^{-1} + x^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{xy}} &= \frac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{1}{xy}} = \frac{(x + y)(xy)}{xy} \\ &= x + y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{aligned}$$

Repare-se que o domínio de $x + y$ é $\mathbb{R}$ e o domínio da expressão dada é $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (porque são bases de potências com expoente negativo).

Exemplo 5: Considere-se a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 y}}.$$

Para simplificar este tipo de expressões com radicais multiplica-se o numerador e o denominador pelo radical que surge no denominador, $\sqrt{x^3 y}$.

> **Nota:** Ao multiplicar (ou dividir) por uma expressão tem que se garantir que essa expressão é não nula.

Neste caso, $\sqrt{x^3 y} \neq 0$ atendendo ao domínio da expressão dada. Obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^3 y}} &= \frac{\sqrt{x^3 y}}{\left(\sqrt{x^3 y}\right)\left(\sqrt{x^3 y}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x^3 y}}{x^3 y} \end{aligned}$$

Ainda é possível simplificar um pouco mais a expressão uma vez que existe uma potência de grau superior ao índice da raiz. Como $\sqrt{x^3 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{xy} = |x|\sqrt{xy}$, vem que

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 y}} = \frac{|x|\sqrt{xy}}{x^3 y}.$$

Exemplo 6: Seja $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$. Neste caso tem que se multiplicar e dividir por $\sqrt{x}+2$ (note-se que $\sqrt{x}+2 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Aplicando os casos notáveis, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\ &= \frac{(\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x})^2-2^2} = \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x-4}\end{aligned}$$

Note-se que o domínio da expressão inicial é $x \geq 0$ e $\sqrt{x}-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$, que coincide com o domínio da expressão obtida após simplificação.

Exercícios Propostos

Simplifique as expressões, racionalizando o denominador sempre que necessário.

(a) $\left(2x^2y^{-5}\right)\left(6x^{-3}y\right)\left(\dfrac{1}{3}x^{-1}y^3\right)$

(b) $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^3}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$

(c) $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{2t}+8}{\sqrt{t}-3}$

(e) $\dfrac{2}{3s+1}+\dfrac{9}{(3s+1)^2}$

(f) $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2+2x}+\dfrac{3}{x}$

(g) $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

(h) $\dfrac{x+t^2}{5-\sqrt{xt}}$

3 Equações

Notação	Definição	Exemplos
Equação	é uma igualdade onde figura pelo menos uma variável	$3x - 5 = 4$ $2^x = -8$ $\ln y^2 + 2x^2 = 2^x$
Equação Polinomial	é uma igualdade entre polinómios	$3x - 5 = 4$ $x^2 - 5 = 4x$
Solução ou Raiz da Equação	é um valor que, quando concretizado na variável, transforma a equação numa proposição verdadeira	-1 é solução de $x^2 - 5 = 4x$ pois $(-1)^2 - 5 = 4 \cdot (-1)$
Conjunto Solução	é o conjunto de todas as soluções	$\{-1, 5\}$ é o conjunto solução de $x^2 - 5 = 4x$
Equações Equivalentes	são equações com o mesmo conjunto solução	$3x - 5 = 4$ e $3x = 9$ são equivalentes
Equação Impossível	não tem nenhuma solução	$2^x = -8$ é uma equação impossível
Equação Possível	admite pelo menos uma solução	$x^2 - 5 = 4x$ é uma equação possível
Resolver uma Equação	é encontrar **todas** as soluções	aplicar a fórmula resolvente resolve $x^2 - 5 = 4x$

Serão recordados apenas métodos simples de resolver equações polinomiais do 1º e do 2º grau ou equações que podem ser simplificadas para equações desse tipo.

Chama-se **grau de uma equação polinomial** ao maior expoente das potências de x que surge na equação, após simplificação.

3.1 Equação do 1º Grau

Equação do 1º grau
Toda a equação que, depois de simplificada, tem a forma $ax = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
O seu **conjunto solução** é $\left\{\frac{b}{a}\right\}$.

NOTA: Se após simplificação, a equação for do tipo $0x = b$ então o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, é $\emptyset$ se $b \neq 0$; se $b = 0$, então o conjunto solução é $\mathbb{R}$

Exemplo: Considere-se a equação

$$\frac{2(x+1)}{3} - \frac{x+2}{4} = 2x$$

Simplificando, e atendendo ao quadro anterior, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\frac{2(x+1)}{3} - \frac{x+2}{4} = 2x &\Leftrightarrow \frac{8(x+1)}{12} - \frac{3(x+2)}{12} = \frac{12(2x)}{12} \\
&\Leftrightarrow 8(x+1) - 3(x+2) = 12(2x) \\
&\Leftrightarrow 8x + 8 - 3x - 6 = 24x \\
&\Leftrightarrow 8x - 3x - 24x = -8 + 6 \\
&\Leftrightarrow -19x = -2 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-2}{-19} = \frac{2}{19}.
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações.

(a) $\dfrac{x+10}{4} = 5 - x$ (b) $3\left(\dfrac{x}{2}+1\right) = x - 2(1-x)$

(c) $4 - \dfrac{10x+1}{6} = 4x - \dfrac{16x+3}{4}$ (d) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{4}{5}x = 2\left(1-\dfrac{x}{6}\right)$

3.2 Equações do 2º grau

Equação do 2º grau
Toda a equação que, depois de simplificada, tem a forma $ax^2+bx+c=0$, com $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Recorde-se que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Casos Possíveis	**Conjunto Solução em $\mathbb{R}$**
$\Delta < 0$	$\emptyset$
$\Delta = 0$	$\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$	$\left\{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

Exemplo: Pretende-se determinar o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação

$$x(x+1)+7 = 3-3x$$

Para a resolver a equação deve-se, em primeiro lugar, simplificá-la.

$$\begin{aligned} x(x+1)+7 = 3-3x &\Leftrightarrow x^2+x+7 = 3-3x \\ &\Leftrightarrow x^2+x+7-3+3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+4x+4 = 0 \end{aligned}$$

Trata-se de uma equação do 2º grau. Como $\Delta = 4^2 - 4\cdot 1 \cdot 4 = 0$, sabe-se que a equação admite uma única solução que é $x = -\dfrac{4}{2} = -2$.

Exercícios Propostos

Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, das seguintes equações.

(a) $4x^2 - 3x = 0$ (b) $1 + (x+2)(x-4) = x$

(c) $\dfrac{x^2-4}{12} + \dfrac{x^2+4}{8} = 1$ (d) $(x-1)^2 + (x+3)^2 = 0$

3.3 Equações com Radicais

Resolução de equações com radicais do tipo $\sqrt{f(x)}$

- Primeiro deve-se isolar os radicais.
- De seguida elevam-se ambos os membros ao quadrado.
  Ao fazer esta operação pode-se **não** obter uma equação equivalente à inicial pois podem ser introduzidas novas soluções.
- Por fim, e depois de obter as soluções da nova equação, verifica-se se estas satisfazem a equação inicial.
- Não esquecer que o domínio da expressão é $f(x) \geq 0$.

Exemplo: Pretende-se resolver a equação $\sqrt{5x-9} = x-3$. Elevando ambos os membros ao quadrado obtém-se

$$\begin{aligned}\sqrt{5x-9} = x-3 \Rightarrow \left(\sqrt{5x-9}\right)^2 = (x-3)^2 &\Leftrightarrow 5x-9 = x^2-6x+9\\ &\Leftrightarrow x^2-6x-5x+9+9=0\\ &\Leftrightarrow x^2-11x+18=0\\ &\Leftrightarrow x=9 \vee x=2\end{aligned}$$

Resta verificar se as soluções obtidas satisfazem a equação dada.
Para $x=2$, $\sqrt{5\cdot 2-9} = 2-3 \Leftrightarrow 1=-1$. Donde 2 não é solução da equação inicial.
Para $x=9$, $\sqrt{5\cdot 9-9} = 9-3 \Leftrightarrow 6=6$. Logo a única solução da equação dada é $x=9$.

Nota: Repare-se que coloca-se o sinal de implicação $\Rightarrow$ quando se eleva ao quadrado ambos os membros porque, tal como foi dito anteriormente, pode-se estar a acrescentar soluções, e portando não se obtêm equações equivalentes. Também por isso não é necessário escrever domínios iguais.

Exercícios Propostos

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações.

(a) $\sqrt{7-x} = x-5$ (b) $\sqrt{x^3} = \sqrt{x}$

(c) $x+\sqrt{4x+1} = 5$ (d) $\sqrt{x+\sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x}$

3.4 Equações com Módulos

Resolução de equações tipo $|f(x)| = g(x)$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)\right] \wedge g(x) \geq 0$$

NOTA: se $g(x) < 0$, a equação $|f(x)| = g(x)$ é impossível .

Exemplo 1: Pretende-se determinar o conjunto solução da equação $|x-3| = 8$.

$$\begin{aligned}|x-3| = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3=8 \vee x-3=-8) \wedge \underbrace{8 \geq 0}_{\mathtt{V}}\\ &\Leftrightarrow \quad x=11 \vee x=-5\end{aligned}$$

Recorde-se que $\mathtt{V} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$.
Logo o conjunto solução é $\{-5, 11\}$.

Exemplo 2: Considere-se a equação $|5x+4| = -2$. É fácil verificar que se trata de uma equação impossível pois uma distância nunca pode ser negativa. De facto,

$$|5x+4| = -2 \Leftrightarrow (5x+4=-2 \vee 5x+4=2) \wedge \underbrace{-2 \geq 0}_{\mathtt{F}}$$

pois $\mathtt{F} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathtt{F}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$. Donde a equação é impossível e, portanto, o conjunto solução é $\emptyset$.

Exemplo 3: Pretende-se determinar o conjunto solução da equação $|2x-1| = 3x+4$.
Sabe-se que

$$\begin{aligned}|2x-1| = 3x+4 \quad &\Leftrightarrow \quad \left[2x-1 = 3x+4 \vee 2x-1 = -(3x+4)\right] \wedge 3x+4 \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (2x-3x = 4+1 \vee 2x+3x = -4+1) \wedge 3x+4 \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \left(x=-5 \vee x=-\frac{3}{5}\right) \wedge x \geq -\frac{4}{3}\\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Note-se que $-5 < -\frac{4}{3}$. Portanto, o conjunto solução da equação dada é $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$.

Outro caso em que também se pode usar a técnica do "elevar ao quadrado ambos os membros", é nas equações que envolvem dois módulos. Nestas situações não se inserem novas soluções, ou seja, as soluções obtidas depois de se elevar ao quadrado ambos os membros são as mesmas da equação inicial.

Resolução de equações do tipo $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$

Exemplo: Considere-se a equação $|x-4| = \frac{1}{2}|2x-1|$. Elevando ambos os membros ao quadrado obtém-se

$$\begin{aligned}
|x-4| = \frac{1}{2}|2x-1| &\Leftrightarrow (x-4)^2 = \left(\frac{1}{2}(2x-1)\right)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = \frac{1}{4}(4x^2 - 4x + 1) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 - x + \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 - x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow -7x + \frac{63}{4} = 0 \Leftrightarrow -7x = -\frac{63}{4} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{63}{28}.
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes equações.

(a) $3|x+1| - 2 = -11$ (b) $|3x-2| + 3 = 7$

(c) $|5x-1| = 6x$ (d) $|x+1| - 2x = 8x + 3$

(e) $|x-2| = |x+5|$ (d)$|x+1| - 2|x-3| = 0$

3.5 Resolução de outras Equações

Um processo muito usado na resolução de equações é usar a decomposição em factores seguida da lei do anulamento do produto.

Lei do anulamento do produto
O produto de dois ou mais factores é nulo se e só se pelo menos um dos factores é nulo, ou seja, $ab\cdots z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee \cdots \vee z = 0$

Exemplo: A lei do anulamento do produto permite determinar o conjunto solução da equação

$$\frac{1}{2}(7-3x)(5-x)(x+1) = 0.$$

Aplicando a lei do anulamento do produto vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(7-3x)(5-x)(x+1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2} = 0}_{\mathtt{F}} \vee 7 - 3x = 0 \ \vee \ 5 - x = 0 \ \vee \ x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{3} \ \vee \ x = 5 \ \vee \ x = -1
\end{aligned}$$

Recorde-se que $\mathtt{F} \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$. Assim o conjunto solução é $\left\{-1, \frac{7}{3}, 5\right\}$.

Outros processos de **resolução de outro tipo de equações** serão exemplificados.

Exemplo 1: Considere-se a equação $x^4 + x^2 - 12 = 0$. Apesar de se tratar de uma equação do 4º grau, onde não se encontra nenhum factor comum para colocar em evidência, pode-se resolvê-la como sendo uma equação do 2º grau. Repare-se que

$$x^4 + x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 + x^2 - 12 = 0$$

Se se fizer uma mudança de variável $y = x^2$ e se aplicar a fórmula resolvente obtém-se

$$\begin{aligned} y^2 + y - 12 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-1+7}{2} \vee y = \frac{-1-7}{2} \\ &\Leftrightarrow y = 3 \vee y = -4. \end{aligned}$$

Como $y = x^2$ tem-se que $x^2 = 3 \vee x^2 = -4$. A equação $x^2 = -4$ é impossível. Donde as soluções da equação dada são as mesmas da equação $x^2 = 3$.

$$\begin{aligned} x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0, \text{ é a diferença de quadrados} \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \vee x + \sqrt{3} = 0, \text{ pela lei do anulamento do produto} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exemplo 2: Pretende-se determinar o conjunto solução da equação

$$\frac{1}{x-2} + \frac{x}{3x+6} = \frac{4}{x^2-4}.$$

Para simplificar a equação tem que se determinar o menor denominador comum às três fracções, pelo que, começa-se por decompor os denominadores em factores. Como $3x + 6 = 3(x + 2)$ e $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{x}{3x+6} = \frac{4}{x^2-4} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + \frac{x}{3(x+2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x+2)}{3(x+2)(x-2)} + \frac{x(x-2)}{3(x+2)(x-2)} - \frac{12}{3(x-2)(x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x + 6 + x^2 - 2x - 12}{3(x+2)(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{3(x+2)(x-2)} = 0 \end{aligned}$$

Sabe-se que

No domínio da expressão, uma fracção é nula se e só se o seu numerador é nulo.

Assim

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \wedge 3(x+2)(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \wedge (3 \neq 0 \wedge x + 2 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = -3) \wedge (x \neq 2 \wedge x \neq -2) \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Note-se que 2 não pertence ao domínio da expressão donde não pode ser solução. O conjunto solução da equação dada é $\{-3\}$.

Exercícios Propostos

Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes equações.

(a) $\dfrac{2x+7}{3} - \dfrac{2(x^2-4)}{5x} - \dfrac{4x^4-6}{15x} = \dfrac{7x^2+6}{3x^2}$

(b) $\dfrac{4x+3}{2x-5} - \dfrac{3x+8}{3x-7} = 1$

(c) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{6x^2}{9x^2-1} = \dfrac{2}{3x-1}$

(d) $\dfrac{x-2}{\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2} - 1 = x$

(e) $\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 5$

(f) $\dfrac{(x-\sqrt{2})^2\left(x-\frac{1}{10}\right)(x+\sqrt{17})}{x^4+2x^2+1} = 0$

4 Inequações

Notação	Definição	Exemplos
Inequação	indica uma relação de **maior que** (**menor que**) entre duas expressões	$3x-5\leq 4$ $x^2+2>2x\cos x$ $e^{x^2}+2\geq x$
Solução ou Raiz da Inequação	é um valor que, quando concretizado na variável, transforma a inequação numa proposição verdadeira	1 é solução de $3x-5\leq 4$ pois $3\cdot 1-5\leq 4$
Conjunto Solução	é o conjunto de todas as soluções	o conjunto solução de $3x-5\leq 4$ é $]-\infty,3]$
Inequações equivalentes	têm o mesmo conjunto solução	$3x-5\leq 4$ e $3x\leq 9$ são equivalentes

Regras Práticas	Exemplos
Quando se **adiciona** a ambos os membros de uma inequação **qualquer número** . o **sentido da desigualdade mantém-se**	$x+3\geq 7$ $x+3-3\geq 7-3$ $\Leftrightarrow x\geq 4$
Quando se **multiplicam** ambos os membros de uma inequação por um número **positivo** o **sentido da desigualdade mantém-se**.	$3x\geq 9$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)3x\geq\left(\frac{1}{3}\right)9$ $\Leftrightarrow x\geq 3$
Quando se **multiplicam** ambos os membros de uma inequação por um número **negativo** **inverte-se o sentido da desigualdade**.	$-2x\geq 10$ $\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)\leq\left(-\frac{1}{2}\right)10$ $\Leftrightarrow x\leq -5$

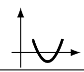
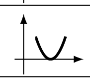
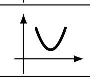
4.1 Inequações do 2º grau

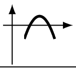
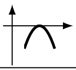
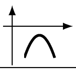
O gráfico da função $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$, é uma parábola. Se $a<0$ então a concavidade da parábola é voltada para baixo. Se $a>0$ então a concavidade é voltada para cima.

Resolver a inequação $\boxed{ax^2+bx+c>0}$ é determinar os valores de x para os quais a função f é positiva, isto é, o gráfico da função fica **acima do eixo dos** xx.

Analogamente, resolver a inequação $\boxed{ax^2+bx+c<0}$ é determinar os valores de x para os quais a função é negativa, ou seja, o gráfico da função fica **abaixo do eixo dos** xx.

As soluções deste tipo de inequações dependem do valor de a e da posição do vértice da parábola correspondente à inequação tal como ilustram as tabelas seguintes. Recorde-se que a ordenada do vértice é dada por $y_v=-\dfrac{\Delta}{4a}$ e a abcissa é $x_v=-\dfrac{b}{2a}$.

	Δ	y_v	Gráfico	Zeros	Exemplos	Conjunto Solução
Caso $\mathbf{a}>\mathbf{0}$ (concavidade para cima)	>0	<0		2	$2x^2-2x-12\geq 0$	$]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[$
	$=0$	$=0$		1	$x^2-10x+25\leq 0$	$\{5\}$
	<0	>0		0	$4x^2+x+7>0$	$\mathbb{R}$

	Δ	y_v	Gráfico	Zeros	Exemplos	Conjunto Solução
Caso $\mathbf{a} < \mathbf{0}$ (concavidade para baixo)	> 0	> 0		2	$-2x^2 + 4x + 6 > 0$	$]-1,3[$
	$= 0$	$= 0$		1	$-x^2 + 16x - 64 < 0$	$\mathbb{R} \setminus \{8\}$
	< 0	< 0		0	$-5x^2 + 5x - 15 \geq 0$	$\emptyset$

Exercícios Propostos

1. Determine o menor número natural que verifica a condição

$$\frac{x-3}{4} - \frac{x^2+5}{4} < \frac{2x^2}{3} + 10.$$

2. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes inequações

(a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(3-x) < 0$ (b) $x^2 - 12x + 27 \leq 0$

(c) $x^2 \geq x$ (d) $(x-1)^2 - 7(x-2)^2 \leq 0$

4.2 Inequações com módulos

Resolução de inequações do tipo $|f(x)| < g(x)$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \big[f(x) < g(x) \wedge f(x) > -g(x)\big] \wedge g(x) > 0$$

Nota: Se $g(x) \leq 0$ então a inequação é impossível.

Exemplo 1 Considere-se a inequação $|5x+2| \leq 0$. Então

$$|5x+2| \leq 0 \Leftrightarrow 5x+2 \leq 0 \wedge 5x+2 \geq 0 \wedge \underbrace{0 \geq 0}_{\mathtt{V}}$$

Recorde-se que $\mathcal{C} \wedge \mathtt{V} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$ e, além disso,

$$5x+2 \leq 0 \wedge 5x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 5x+2 \leq 0 \Leftrightarrow 5x+2 = 0.$$

Logo a solução é $5x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

Exemplo 2 Seja $|x^2 - x| \leq 2x - 3$.

$$\begin{aligned} |x^2 - x| \leq 2x - 3 &\Leftrightarrow \big[x^2 - x \leq 2x - 3 \wedge x^2 - x \geq -(2x-3)\big] \wedge 2x - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \big(x^2 - x - 2x + 3 \leq 0 \wedge x^2 - x + 2x - 3 \geq 0\big) \wedge 2x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \big(x^2 - 3x + 3 \leq 0 \wedge x^2 + x - 3 \geq 0\big) \wedge x \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

As duas primeiras inequações são do 2º grau. Pode-se usar o raciocínio visto anteriormente.
Repare-se que $f(x) = x^2 - 3x + 3$ não admite zeros ($\Delta = -3 < 0$) e tem a concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$), o que permite concluir que o seu gráfico está sempre acima do eixo dos xx, ou seja, $x^2 - 3x + 3 \leq 0$ é uma condição impossível. Como $\mathtt{F} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathtt{F}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$, temos que a inequação dada é impossível, ou seja, o seu conjunto solução é $\emptyset$.

Resolução de inequações do tipo $|f(x)| > g(x)$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \big(f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x)\big) \vee g(x) \leq 0$$

Nota: Se $g(x) \leq 0$ inequação é sempre possível.

Exemplo Considere-se a inequação $|3x-4| \geq 2$. Usando as propriedades anteriores, pode-se escrever

$$|3x-4| \geq 2 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 2 \vee 3x-4 \leq -2 \vee \underbrace{2 < 0}_{\mathtt{F}}$$

Recorde-se que $\mathcal{C} \vee \mathtt{F} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$. Donde

$$\Leftrightarrow 3x \geq 6 \vee 3x \leq 2$$
$$\Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq \frac{2}{3}$$

Logo o conjunto solução é $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty[$.

Exercícios Propostos

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes inequações

(a) $|4x^2 - 5x| < 1$; (b) $|3x-9| \leq 2x-6$;
(c) $|x+4| \geq x+1$

4.3 Inequações com Radicais

Propriedade	Exemplos
se $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ então $x \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$	$1 \geq -2 \nRightarrow 1 \geq 4$ $(-2)^2 \geq 1^2 \nRightarrow -2 \geq 1$
se $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ então $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$	$-2 \leq 1 \nRightarrow 4 \leq 1$ $(-3)^2 \leq (-4)^2 \nRightarrow -3 \leq -4$

Resolução de inequações do tipo $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \Big[g(x) \leq 0 \vee \big(f(x) \geq g(x)^2 \wedge g(x) > 0\big)\Big] \wedge f(x) \geq 0$$

Nota: Se $g(x) \leq 0$ então a inequação é sempre possível; se $g(x) > 0$,
elevam-se ambos os membros ao quadrado e obtém-se uma inequação equivalente.
Recorde-se que $f(x) \geq 0$ é o domínio da expressão.

Exemplo Seja $\sqrt{x-2} \geq 2x$.

$$\sqrt{x-2} \geq 2x \Leftrightarrow \big[2x < 0 \vee \big(x-2 \geq (2x)^2 \wedge 2x \geq 0\big)\big] \wedge x-2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x < 0 \vee \underbrace{\left(\underbrace{-4x^2+x-2 \geq 0}_{\text{c. imp.}} \wedge x \geq 0\right)}_{\text{c. imp.}}\right] \wedge x \geq 2$$

Recorde-se que $\texttt{F} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \texttt{F}$ e $\texttt{F} \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$. Donde

$$\Leftrightarrow x < 0 \wedge x \geq 2$$

Logo a inequação dada é impossível, ou seja, o seu conjunto solução é $\emptyset$.

Resolução de inequações do tipo $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \big(f(x) \leq g(x)^2 \wedge g(x) \geq 0\big) \wedge f(x) \geq 0$$

Nota: Se $g(x) < 0$ então a inequação é impossível; se $g(x) \geq 0$,

eleva-se ambos os membros ao quadrado e obtém-se uma inequação equivalente.
Recorde-se que $f(x) \geq 0$ é o domínio da expressão.

Exemplo Seja $\sqrt{3x-4} \leq x$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x-4} \leq x &\Leftrightarrow \big(3x-4 \leq x^2 \wedge x \geq 0\big) \wedge 3x-4 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{-x^2+3x-4 \leq 0}_{\texttt{V}} \wedge x \geq 0 \wedge x \geq \frac{4}{3} \\
&\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \geq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Recorde-se que $\texttt{V} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, qualquer que seja a condição $\mathcal{C}$. Logo o conjunto solução da inequação dada é $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

Exercícios Propostos

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes inequações

(a) $\sqrt{x-2} \leq 3$; (b) $\sqrt{x^2-3x+2} \geq x+1$

(c) $\sqrt{-x+2} < x+1$

4.4 Resolução de outras Inequações

O primeiro passo a realizar na resolução de uma inequação é transformá-la numa inequação equivalente cujo segundo membro da inequação seja nulo. De seguida, e sempre que possível, simplificar o primeiro membro de modo a obter um produto/quociente de expressões .

Exemplo 1 Considere-se a seguinte inequação $(x-4)(x+1) > 0$. Resolver esta inequação é determinar os valores de x para os quais o produto de $x-4$ por $x+1$ é positivo. Atendendo a que o produto de dois factores só é positivo se ambos tiverem o mesmo sinal, pode-se concluir que os valores de x são os que verificam as condições

$$\begin{aligned}
(x-4)(x+1) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-4 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-4 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 4 \\ x < -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x > 4 \vee x < -1
\end{aligned}$$

Uma forma mais simples para a resolução deste tipo de inequações é a construção de uma tabela. O primeiro membro da inequação $(x-4)(x+1) > 0$ tem dois factores. O que se pretende é colocar numa tabela os intervalos em que cada um dos factores é positivo ou negativo.

Os valores que se têm de colocar nas colunas são os valores para os quais cada factor se anula, por ordem crescente. Os factores anulam-se para 4 e -1, respectivamente. Assinala-se o sinal que cada factor toma em cada intervalo. Assim a tabela tem a forma

		-1		4	
$x-4$	$-$	-5	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	5	$+$
$(x-4)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

A última linha é preenchida atendendo à regra dos sinais.

Regra dos Sinais
Um produto é **positivo** se o número de factores negativos é **par**
Um produto é **negativo** se o número de factores negativos é **ímpar**

Assim

$$(x-4)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 4,$$

ou seja, o conjunto solução da inequação é $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$.
Se se pretende resolver a inequação $(x-4)(x+1) \leq 0$, basta observar de novo o quadro e concluir que

$$(x-4)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$$

Exemplo 2 Considere-se a seguinte inequação

$$\frac{x-3}{4-x} \leq 1$$

Tem que se colocar o segundo membro da inequação a zero e depois transformar o primeiro membro num produto/quociente de expressões.

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{4-x} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{x-3}{4-x} - 1 \leq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x-3}{4-x} - \frac{4-x}{4-x} \leq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x-3-4+x}{4-x} \leq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2x-7}{4-x} \leq 0\end{aligned}$$

Aplicando a tabela descrita no exemplo anterior, os factores anulam-se para $\frac{7}{2}$ e 4, respectivamente. Assim a tabela tem a forma

		$\frac{7}{2}$		4	
$2x-7$	$-$	0	$+$	1	$+$
$4-x$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$
$\frac{2x-7}{4-x}$	$-$	0	$+$	S/S	$-$

Note-se que, quando $x = 4$, o denominador anula-se e a inequação não faz sentido e, por isso, é usual escrever-se S/S, que significa *Sem Significado*. Pretende-se os valores que tornam negativa ou nula a fracção. Assim o conjunto solução é $\left]-\infty, \frac{7}{2}\right] \cup]4, +\infty[$.

Exercícios Propostos

1. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das seguintes inequações

   (a) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x+1} \geq 0$

   (b) $\dfrac{x(x-1)}{x(x+2)} \leq -3$

   (c) $\dfrac{x+2}{x+8} > \dfrac{x-2}{x+3}$

   (d) $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{4}{x+2} < \dfrac{x}{3}$

   (e) $\dfrac{1}{x^2+x} \geq \dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1}$

   (f) $\dfrac{5}{3x-1} + \dfrac{20}{9x^2-1} < \dfrac{2}{3x-1}$

   (g) $\dfrac{x-1}{x+4} \leq \dfrac{x-5}{x-1}$

2. Exercício 3 das páginas 58 e 59 do livro adoptado: Cálculo I (vol. I).

5 Generalidades sobre Funções

5.1 Noção de Função. Domínio e Contradomínio

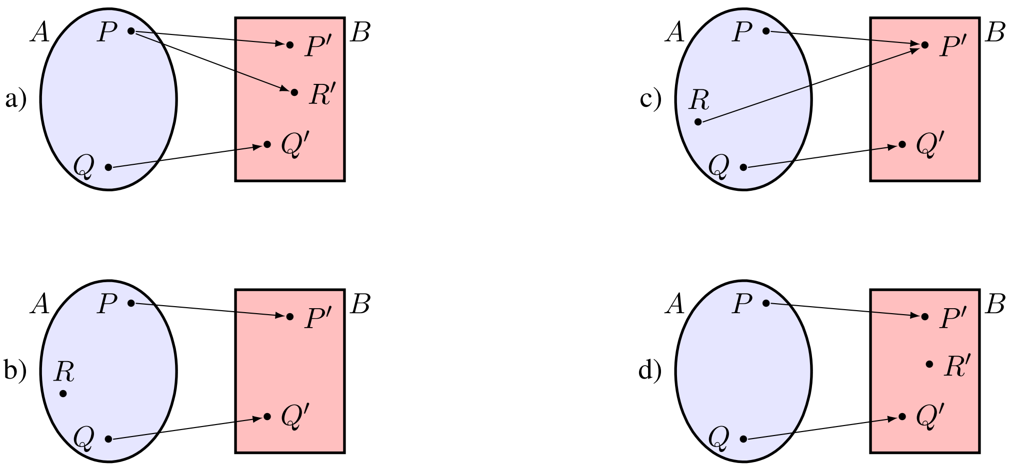
Definição: Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma ***função*** $f : A \to B$ é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. Formalmente podemos escrever:

$$\forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

Nota: $\exists^1$ lê-se "existe um e um só" ou "existe um único".
O conjunto A diz-se o ***domínio*** de f e o conjunto B o ***conjunto de chegada*** de f.
O subconjunto de B dado por

$$f(A) = \{y \in B : y = f(x) \text{ com } x \in A\} \subseteq B$$

diz-se o ***contradomínio (ou conjunto das imagens)*** de f.
Os elementos do domínio designam-se por **objectos** e os do contradomínio por **imagens**.



Apenas c) e d) são funções. Em a) o ponto P tem "duas imagens", portanto contraria o facto de para cada x existir um e um só y tal que $y = f(x)$. Em b) o ponto R (ponto do domínio) "não tem imagem".
Usar-se-ão as notações D_f para domínio da função f e CD_f para contradomínio de f.

5.2 Funções Reais de Variável Real

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$ A função f diz-se **função real de variável real**, se o domínio, D_f, é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ ($f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$). O contradomínio de f é, neste caso,

$$CD_f = f(D_f) = \{f(x) : x \in D_f\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in D_f\}$$

Chama-se **gráfico de uma função** f, real de variável real, ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$Gr_f = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in D_f \text{ e } y = f(x)\}.$$

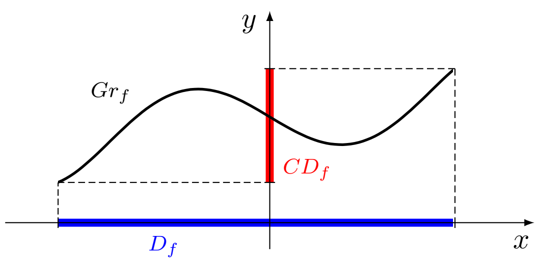
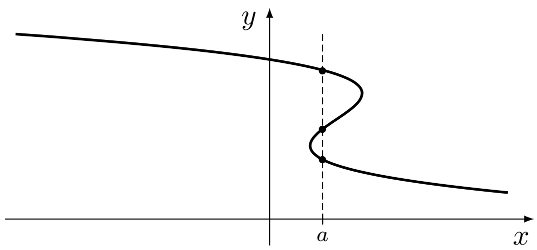


Gráfico de f com domínio D_f
e contradomínio CD_f



Não é o gráfico de uma função, porque a recta $x = a$ intersecta a curva em mais do que um ponto.

Para que uma curva represente o gráfico de uma função, qualquer recta vertical intersecta a curva no máximo num ponto.

Quando a função é dada pela sua expressão analítica, o domínio é o **maior** subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão tem significado. Por exemplo

$$g(x) = x^3 - 3x, D_g = \mathbb{R}; \qquad h(x) = \frac{1}{x-1}, D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Exercícios Resolvidos

Considere as funções definidas por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-4}{-x^2+3x}} \quad \text{e} \quad g(x) = 3 - \sqrt{x+1}.$$

(a) Determine os domínios das funções f e g.

(b) Calcule os zeros de f e g e determine, caso existam, $f(0)$ e $g(0)$.

(c) Indique o contradomínio de g.

(d) Indique os domínios de:

(d.1) $f + g$;

(d.2) $\dfrac{f}{g}$

Resolução:

(a) Como a expressão que define a função f é uma raiz quadrada, o radicando tem que ser não negativo, e, sendo o radicando uma fracção, o denominador não pode ser nulo.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-4}{-x^2+3x} \geq 0 \wedge -x^2+3x \neq 0 \right\}$$

$$\frac{2x-4}{-x^2+3x} \geq 0 \Leftrightarrow \big(2x-4 \geq 0 \wedge -x^2+3x > 0\big) \vee \big(2x-4 \leq 0 \wedge -x^2+3x < 0\big)$$

Vamos determinar os zeros de $2x - 4$ e de $-x^2 + 3x$:

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$-x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(-x+3) = 0 \quad \underset{\text{(lei do anulamento do produto)}}{\Leftrightarrow} \quad x = 0 \vee -x+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3$$

		0		2		3	
$-x^2+3x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{2x-4}{-x^2+3x}$	$+$	ND	$-$	0	$+$	ND	$-$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee 2 \leq x < 3\} \\ &=]-\infty, 0[\cup[2,3[\end{aligned}$$

A função g apenas envolve um radicando portanto,

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$$

(b) Os zeros de f são os pontos do domínio de f que anulam a função:

$$\{x \in D_f : f(x) = 0\} = \{2\}.$$

Como a função não está definida em 0, não existe $f(0)$.

Os zeros de g são os pontos do domínio de g que anulam a função, i.e., $\{x \in D_g : g(x) = 0\}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 9}_{(\text{há equivalência porque } x \geq -1)} \Leftrightarrow x = 8.$$

Assim, $g(x) = 0$ se e só se $x = 8$.

O valor $g(0) = 3 - \sqrt{0+1} = 2$.

(c) $CD_g = \{y \in \mathbb{R} : y = g(x) \wedge x \in D_g\}$.

$$\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x+1} \leq 3$$

Assim, como $\sqrt{x+1}$ assume qualquer valor maior ou igual a zero, $CD_g =]-\infty, 3]$.

(d.1) A função soma é a função definida por:

$$\begin{array}{rccl} f+g: & D_{f+g} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (]-\infty, 0[\cup[2,3[) \cap [-1, +\infty[= [-1, 0[\cup[2,3[.$$

(d.2) A função quociente é a função definida por:

$$\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g}: & D_{\frac{f}{g}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

em que

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = ([-1, 0[\cup[2,3[) \cap \mathbb{R} \setminus \{8\} = [-1, 0[\cup[2,3[.$$

Exercícios proposto

Determine os domínios de f e g, D_f e D_g, sendo f dada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$ e g dada por $g(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{x^2+1}$.

5.3 Restrição de uma função

Dada uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e A um subconjunto de D_f, podemos definir uma nova função $r : A \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ dada por $r(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. As funções f e r têm a mesma expressão analítica mas $A = D_r \subseteq D_f$. Esta função designa-se por **restrição** de f a A e indica-se

$$r = f\,|_A\,.$$

Exemplo: A restrição da função

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

ao conjunto $A =]-\infty, 1[$ é

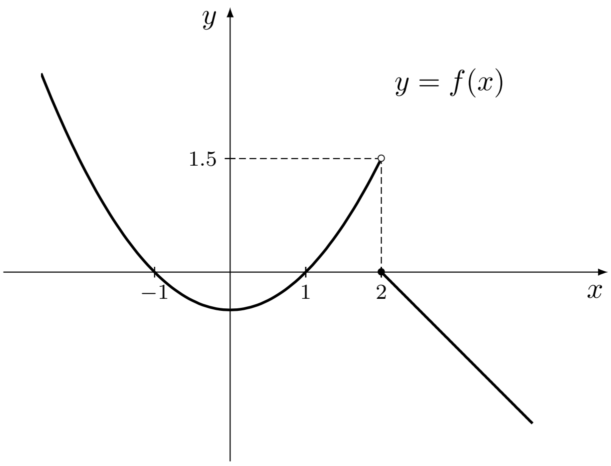
$$\begin{array}{rccc} h\,|_A: &]-\infty, 1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

O contradomínio de h é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e o contradomínio de $h\,|_A$ é $]-\infty, 0[$.

5.4 Funções definidas por ramos

Considere-se a função

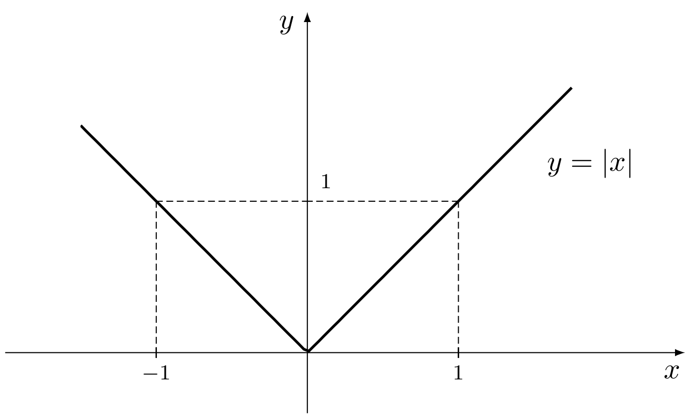
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2} & \text{se } x < 2 \\ 2-x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



Por exemplo $f(3) = 2-3 = -1$ e $f(1) = \dfrac{1}{2}(1^2-1) = 0$. Observe-se que $f(2) = 2-2 = 0$ e $f(2) \neq \frac{3}{2} = \dfrac{2^2-1}{2}$.

5.4.1 A função módulo

A função *módulo* pode ser encarada como uma função definida por ramos:



$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

Seja f a função definida por $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

(a) Reescreva a expressão analítica de f sem usar o símbolo $|\ |$.

(b) Determine o conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ por forma a que a proposição "$f(x) < 1,$ se e só se $x \in A$" seja verdadeira.

Resolução:

(a) Comecemos por analisar o sinal de $x^2 - 3x + 2$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1. \text{ Assim, } x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

O produto será positivo se os dois factores tiverem o mesmo sinal e negativo se os factores tiverem sinais contrários. Então:

		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) > 0 \text{ se } x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$
$$\text{e}$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) < 0 \text{ se } x \in]1, 2[$$

Podemos agora definir a função f por ramos da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se} \quad x \leq 1 \vee x > 2 \\ \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Repare que $f(1) = f(2) = 0$ sendo portanto indiferente calcular o valor da função nestes pontos num ou noutro ramo.

(b) Pretende-se determinar o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3x + 2| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 - 3x + 2 < 1\}$$

Resolvendo as duas inequações temos:

$-1 < x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 > 0$	$x^2 - 3x + 2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0$
A equação $x^2 - 3x + 3 = 0$ não tem raízes reais.	A equação $x^2 - 3x + 1 = 0$ admite as raízes $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Portanto $x^2 - 3x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	Portanto $x^2 - 3x + 1 < 0, \forall x \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$

O conjunto A é a intersecção dos conjuntos solução das duas inequações,

$$A = \mathbb{R} \cap \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[= \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$$

Exercícios Propostos

Reescreva a expressão analítica das seguintes funções, sem usar o símbolo módulo:

(a) $f(x) = |x - 1|$;

(b) $g(x) = |x| - 3$.

5.5 Injectividade e sobrejectividade

Definição: Uma $f : A \to B$ diz-se ***injectiva*** se a objectos distintos correspondem imagens distintas, i.e.,

$$\forall x, x' \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou equivalentemente, se a cada elemento do contradomínio corresponde um único elemento do domínio (a imagens iguais correspondem objectos iguais), i.e.,

$$\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição: f diz-se ***sobrejectiva*** se todos os elementos do conjunto de chegada são imagem de algum elemento do domínio, i.e.,

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$

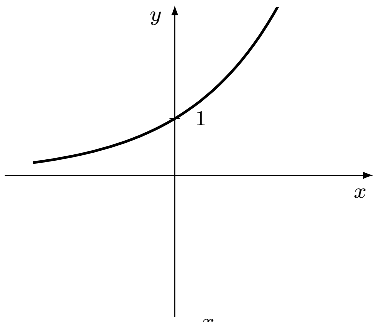
ou equivalentemente, se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, i.e., $CD_f = B$

Definição: Uma função diz-se ***bijectiva*** se é injectiva e sobrejectiva, i.e.,

$$\forall y \in B,\ \exists^1 x \in A\ :\ y = f(x).$$

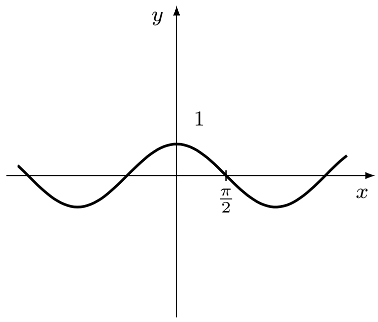
Obs.: Sendo f uma função real de variável real, f é sobrejectiva se o seu contradomínio é $\mathbb{R}$, i.e., $CD_f = \mathbb{R}$ e é ***bijectiva*** se

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists^1 x \in D_f\ :\ y = f(x).$$



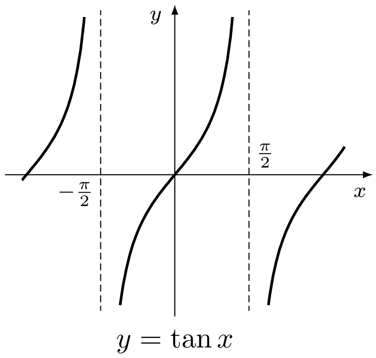
$y = e^x$

Injectiva e não sobrejectiva



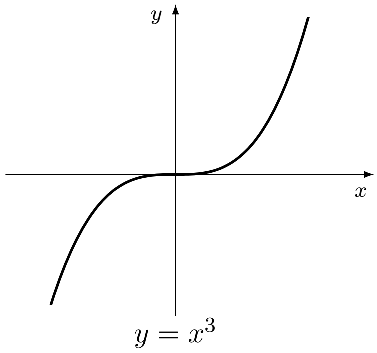
$y = \cos x$

Não injectiva e não sobrejectiva



$y = \tan x$

Sobrejectiva e não injectiva



$y = x^3$

Injectiva e sobrejectiva - bijectiva

Exercícios Resolvidos

Considere as funções definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad g(x) = x^2; \quad j(x) = \frac{1}{x}$$

(a) Determine os seus domínios.

(b) Determine os seus contradomínios.

(c) Indique, justificando, se as funções são injectivas e/ou sobrejectivas.

Resolução: Vamos resolver o exercício apenas para a função j.

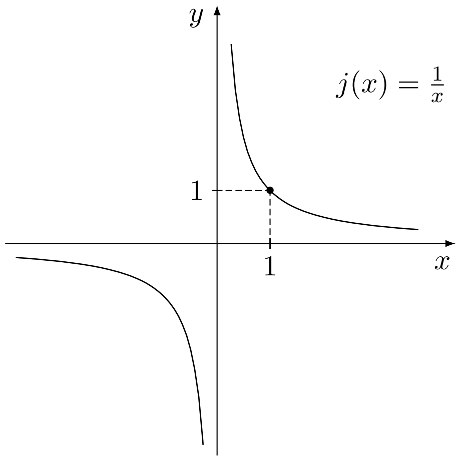
(a) $D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $CD_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) A função j é injectiva:

$$j(x) = j(x')(\text{ com } x, x' \in D_j) \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Longleftrightarrow x = x'.$$

A função j não é sobrejectiva, já que 0 não é imagem de nenhum ponto do domínio de j. Por outras palavras, o contradomínio ($CD_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) não coincide com o conjunto de chegada ($\mathbb{R}$).



5.6 Paridade de Funções

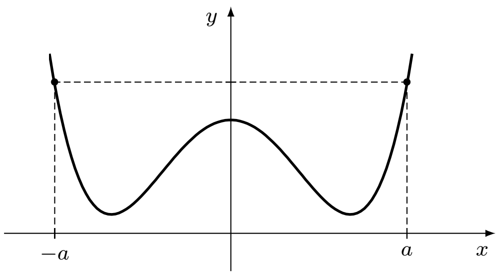
Definição: Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **simétrico** em relação à origem se cada elemento do conjunto D tem o seu simétrico em D, i.e.,

$$\forall x \in D_f, -x \in D$$

Definição: Seja $D_f \subseteq \mathbb{R}$ simétrico em relação à origem . A função real $f : D_f \to \mathbb{R}$ diz-se **par** se

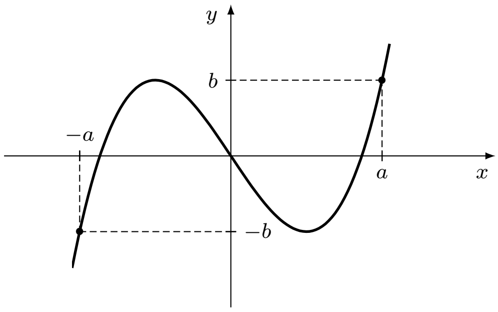
$$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$$

As funções pares têm gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas.



Definição: Seja $D_f \subseteq \mathbb{R}$ simétrico em relação à origem. A função real f, definida em D_f diz-se **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo o $x \in D_f$.

As funções ímpares têm gráficos simétricos em relação à origem do referencial.



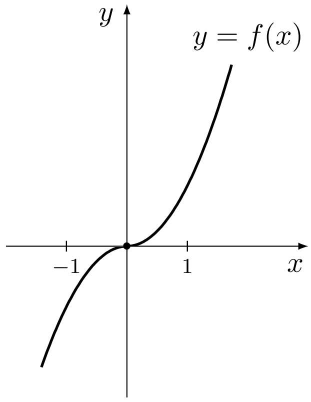
Exercícios Resolvidos

Estude, quanto à paridade, as funções definidas por:

$$\text{(a) } f(x) = x|x|; \quad \text{(b) } h(x) = \sqrt{x}; \quad \text{(c) } j(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se \quad x < 0 \\ \\ 2x & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolução: (a) Podemos definir a função f por ramos e traçar o seu gráfico:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



O domínio de f é $\mathbb{R}$ que é um conjunto simétrico. Como,

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x|-x| \\ &= -x|x| = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

a função f é ímpar.

(b) O domínio de h, $D_h = \mathbb{R}_0^+$, não é um conjunto simétrico, portanto a função h não é par nem ímpar.

(c) O domínio da função j, $D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é um conjunto simétrico. Graficamente pode observar-se que a função não é par nem ímpar. Como provar analiticamente esta afirmação?
Repare que $j(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ e $j(1) = 2 \cdot 1 = 2$, logo $j(1) = j(-1)$. Esta igualdade permite concluir que a função não é ímpar, mas não permite concluir que a função é par. Contudo, por exemplo $j(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$ e $j(2) = 4$, e portanto, $j(-2) \neq j(2)$, logo j não é par. Podemos então afirmar que a função j não é par nem ímpar.

Exercícios do livro adoptado Cálculo I (vol. I): Ex. 6, 7, ..., 10 p.194; Ex.11 p.195; Ex. 15, 16 p.196

5.7 Funções Monótonas

Definição: Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se monótona (em sentido lato) se

$$\forall x, y \in D_f, \ x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(y) \ (f \text{ monótona crescente}) \\ \\ f(x) \geq f(y) \ (f \text{ monótona decrescente}) \end{cases}$$

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se estritamente monótona se

$$\forall x, y \in D_f, \ x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) \ (f \text{ estritamente monótona crescente}) \\ \\ f(x) > f(y) \ (f \text{ estritamente monótona decrescente}) \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

Estude quanto à monotonia as seguintes funções:

(a) $f(x) = -x^3 + 1$;

(b) $h(x) = \dfrac{1}{|x| + 2}$.

Resolução:

(a) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tais que $x_1 < x_2$. Então, como $x_1^3 < x_2^3$, resulta que $-x_1^3 > -x_2^3$. Portanto

$$f(x_1) = -x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1 = f(x_2),$$

ou seja, f é monótona decrescente (em sentido estrito).

(b) Observe que a função é sempre positiva e é par, ou seja simétrica relativamente ao eixo das ordenadas. Considerando os pontos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, tem-se $x_1 < x_2 < x_3$. Calculando os valores de h nestes pontos vem:

$$h(x_1) = \frac{1}{|-1|+2} = \frac{1}{3} = h(x_3)(\text{ porque } f \text{ é par }); \quad \text{e } h(x_2) = \frac{1}{2}.$$

Assim, $h(x_1) < h(x_2)$ e $h(x_2) > h(x_3)$, logo h não é monótona.

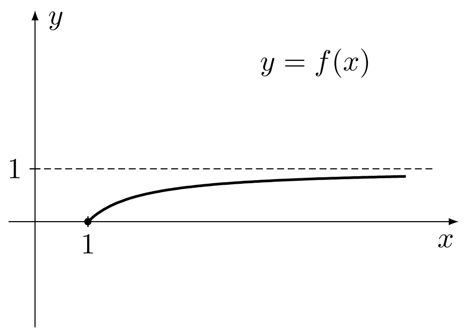
5.8 Função Limitada

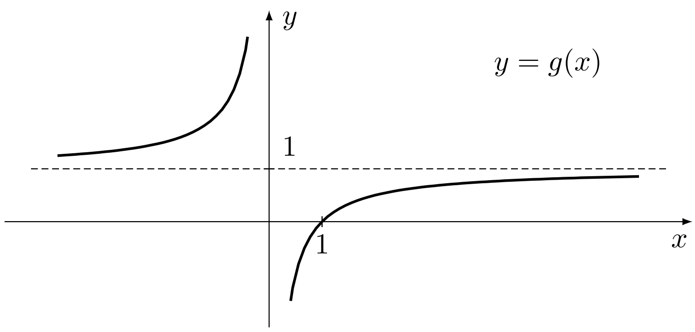
Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se limitada se o seu contradomínio é um conjunto limitado, isto é, se existem $A, B \in \mathbb{R}$, tais que $A \leq f(x) \leq B, \forall x \in D_f$. Equivalentemente, $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se limitada se existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in D_f.$$

Exercícios Resolvidos

Considere as funções $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.





1. Mostre que a função f é limitada.
2. Mostre que a função g não é limitada.

Resolução:

1. Como o domínio de f é $[1, +\infty[$, $x \geq 1$ e portanto $0 < \dfrac{1}{x} \leq 1$. Então:

$$-1 \leq -\frac{1}{x} < 0 \Longrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{x} < 1$$

e portanto f é limitada (sendo $A = 0$ e $B = 1$).

Se usarmos a segunda definição de função limitada, basta tomar $M = 1$.

2. No caso da função g, se x estiver próximo de 0 o valor de $|g(x)|$ torna-se muito elevado. Seja $M > 0$ um número positivo arbitrário. Então, existe $x_M \neq 0$ tal que $|g(x_M)| > M$, por exemplo, $x_M = \dfrac{1}{2M+1}$:

$$|g(x_M)| = \left|1 - \frac{1}{\frac{1}{2M+1}}\right| = |1 - 2M - 1| = |-2M| = 2M > M$$

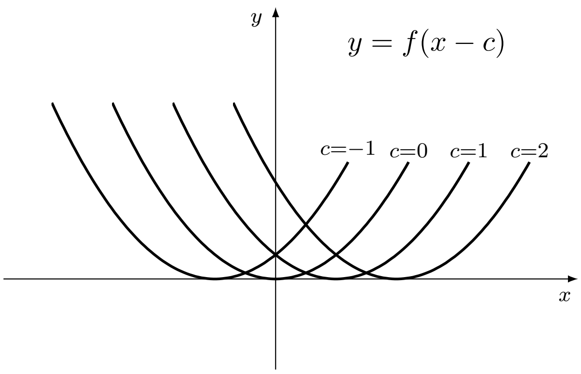
Podemos interpretar este facto graficamente. Qualquer que seja a recta horizontal $y = M$, encontramos sempre um valor de x para o qual $|g(x)|$ está acima da recta considerada, i.e., $|g(x)| > M$. Portanto, g não é limitada.

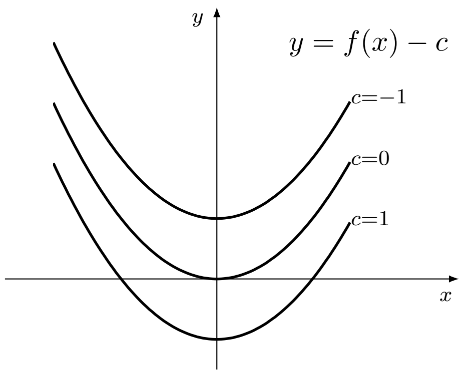
5.9 Funções com parâmetros ou famílias de funções

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos obter uma nova função fazendo uma translação do gráfico de f ao longo do eixo das abcissas ou ao longo do eixo das ordenadas, $g(x) = f(x - c)$ ou $g(x) = f(x) - c$, em que c é um parâmetro real.
No caso $g(x) = f(x - c)$, o domínio de g é

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - c \in D_f\}.$$

Se $g(x) = f(x) - c$, o domínio de g coincide com o domínio de f.





Nota: $g(x) = f(x - c)$ representa uma translação de f sobre o eixo dos xx segundo $(c, 0)$ (para a direita se $c > 0$ e para a esquerda se $c < 0$).

5.10 Funções polinomiais

Uma função polinomial[1] é uma função de domínio $\mathbb{R}$ da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

em que os coeficientes a_i são números reais.
Se $a_n \neq 0$ a função polinomial diz-se ter grau n.
Se P tem grau ímpar o seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e se P tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $]-\infty, \alpha]$ se $a_n < 0$, ou $[\beta, +\infty[$ se $a_n > 0$.

Exemplos:

1. Se $P(x) = -3x + 1$ o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.
2. Se $Q(x) = -2x^2 + 3$, o seu contradomínio é $]-\infty, 3]$

A determinação de raízes [2] (zeros) de polinómios reveste-se de grande importância daí que surja o seguinte

Teorema: Um polinómio de grau $n > 0$ tem n raízes em $\mathbb{C}$ (não necessariamente reais nem distintas), contando que uma raiz de ordem m é considerada como correspondente a m raízes.

Por exemplo o polinómio de grau 6, $P(x) = (x^2+3)(x+2)^4$ tem duas raízes complexas conjugadas (portanto distintas), $r_1 = -\sqrt{3}i$, $r_2 = \sqrt{3}i$ e uma raiz real de multiplicidade 4, $r_3 = -2$.

[1] Ver secção sobre polinómios.
[2] z é uma raiz de P, se e só se $P(z) = 0$, ou seja, se e só se $(x - z)$ é um factor de P. z é uma raiz de ordem m de P se e só se $(x - z)^m$ é um factor de P mas $(x - z)^{m+1}$ já não é factor de P.

5.11 Funções racionais

Funções racionais são funções do tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que P e Q são polinómios. Já sabemos que o seu domínio é o conjunto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Exercícios Propostos

1. Indique o domínio de:

   (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 5}$

   (b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x - 2x}$.

5.12 Função Composta

Definição: Sejam f e g duas funções reais de variável real. A função composta g após f, $g \circ f$, é definida por:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right), \end{array}$$

com $D = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$.

Se o contradomínio de f é um subconjunto do domínio de g, $CD_f \subseteq D_g$, então o domínio da função $g \circ f$ é D_f.

Exercícios Resolvidos

Considere as funções f, g e h definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{x-1}$$

Determine os domínios e as expressões analíticas de

$$g \circ f, \quad f \circ g, \quad h \circ f, \quad f \circ h.$$

Resolução:

$$D_f = \mathbb{R}_0^+; \qquad D_g = \mathbb{R}; \qquad D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Então,

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}_0^+.$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{x^2 \in \mathbb{R}_0^+}_{\text{cond. universal}}\right\} = \mathbb{R}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = |x| = x \text{ (porque } x \geq 0)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Considerem-se agora as funções f e h:

$$D_{h \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_h\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge \sqrt{x} \neq 1\right\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} D_{f\circ h} &= \{x\in\mathbb{R} : x\in D_h \wedge h(x)\in D_f\} = \left\{x\in\mathbb{R} : x\neq 1 \wedge \frac{1}{x-1}\geq 0\right\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : x\neq 1 \wedge x-1>0\} =]1,+\infty[. \end{aligned}$$

Os domínios, como no caso anterior, são distintos. Vejamos agora as expressões analíticas das duas funções.

$$(h\circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

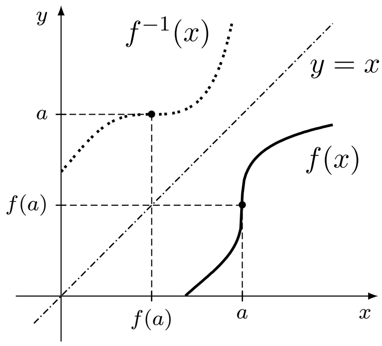
$$(f\circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}.$$

5.13 Inversa de uma Função

Definicão: Seja $f:\ D_f\subset\mathbb{R} \ \rightarrow\ \mathbb{R}$ uma função injectiva. Sendo assim, para todo o $y\in CD_f$ existe um único $x\in D_f$, tal que $y=f(x)$, ou seja, existe uma função $f^{-1}: CD_f \longrightarrow \mathbb{R}$, com contradomínio D_f, definida por:

$$f^{-1}(y) = x \text{ se e só se } f(x) = y, y\in CD_f$$

Tal função designa-se por ***função inversa*** de f.
Se f admite função inversa, f diz-se ***invertível***. Neste caso a função inversa é **única**!



Observação: O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à recta $y=x$.

Teorema: Se f é uma função invertível e f^{-1} é a sua inversa, então

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x,\ \forall x\in D_f;$$

$$(f\circ f^{-1})(y) = y,\ \forall y\in D_{f^{-1}} = f(D_f) = CD_f.$$

A composta $f\circ f^{-1}$ é a função identidade $i_1: CD_f \longrightarrow CD_f$ e a composta $f^{-1}\circ f$ é a função identidade $i_2: D_f\rightarrow D_f$ ($i_1(y)=y$ e $i_2(x)=x$).

Exercícios Resolvidos

1. Determine a inversa da função $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Resolução: A função h é injectiva, o seu domínio é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Para determinar a expressão da inversa vamos resolver a equação $y=\dfrac{1}{x-1}$ em ordem a x (não esquecendo o domínio e o contradomínio de h):

$$y=\frac{1}{x-1} \Longleftrightarrow (x-1)y=1 \Longleftrightarrow x=\frac{1+y}{y} = 1+\frac{1}{y}.$$

Assim, a função inversa, h^{-1}, de h é:

$$\begin{array}{rccl} h^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1+\dfrac{1}{x} \end{array}$$

Observe que, efectivamente,

$$\left(h\circ h^{-1}\right)(a)=h\left(1+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{a}-1}=a \text{ e } \left(h^{-1}\circ h\right)(b)=h^{-1}\left(\frac{1}{b-1}\right)=1+\frac{1}{\frac{1}{b-1}}=b.$$

Exercícios do livro adoptado Cálculo I (vol. I): Ex. 2, 3, ..., 6 p.221; Ex. 7, 9, 10, 11, 13 p.222

6 Função logarítmica e função exponencial

6.1 Logaritmos

Definição: Chama-se ***logaritmo de** b **(**$b > 0$**) na base*** a (a positivo e $a \neq 1$) ao expoente a que é preciso elevar a base a para obter b, isto é,

$$\log_a b = y \Longleftrightarrow a^y = b.$$

Em qualquer base, $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$ e $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.

Observe-se que:

$$a^{\log_a b} = b \text{ e } \log_a a^y = y.$$

Logaritmo neperiano: se a base é e (número de Neper) escrevemos $\ln$ em vez de $\log$, ou seja, $\ln c = \log_e c$.

6.1.1 Propriedades

Se $u, v > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então:

1. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$,
2. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$,
3. $\log_a(u^v) = v \log_a u$,
4. $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ (mudança de base).

Exemplo: Usando algumas das propriedades acima referidas temos que:

$$\log_5\left(\frac{\sqrt{5^4}}{5^3}\right) = \log_5 5^2 - \log_5 5^3 = 2 - 3 = -1.$$

6.2 Função Exponencial

Definição: Chama-se ***função exponencial de base*** a, $a > 0$ e $a \neq 1$, à correspondência

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a^x, \end{array}$$

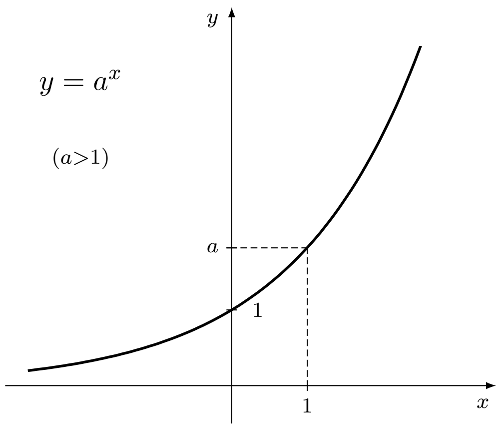
Quando é referida "função exponencial"sem especificar a base, subentende-se que a base é e (número de Neper) e a função é dada por $f(x) = e^x$.

6.2.1 Propriedades da exponencial

Sejam $a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, então:

1. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$.
3. $a^x a^y = a^{x+y}$.
4. $(ab)^x = a^x b^x, \forall b > 0$
5. $a^0 = 1$.

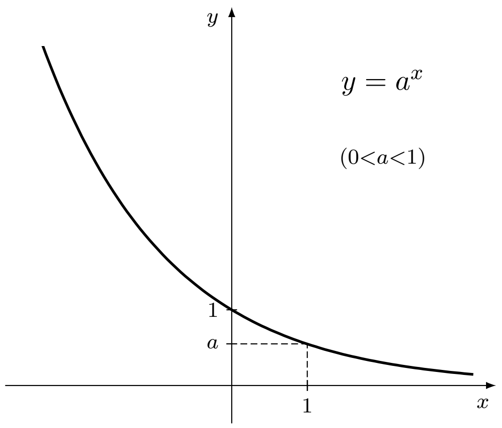
6.2.2 Função Exponencial de Base a com $a > 1$



- Domínio $\mathbb{R}$. Contradomínio $\mathbb{R}^+$.
- Contínua em todo o domínio.
- A função é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e portanto injectiva.
- Não tem zeros. O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.
- Admite a assímptota horizontal $y = 0$ quando $x \to -\infty$. Não tem assímptotas verticais nem oblíquas.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

6.2.3 Função Exponencial de Base a com $0 < a < 1$



- Domínio $\mathbb{R}$. Contradomínio $\mathbb{R}^+$.
- Contínua em todo o domínio.
- A função é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e portanto injectiva.
- Não tem zeros. O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.
- Admite a assímptota horizontal $y = 0$ quando $x \to +\infty$. Não tem assímptotas verticais nem oblíquas.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} a^x 0.$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolva a equação $e^x = e^{-x}$.

   Resolução: Observe-se que a função exponencial é injectiva e nunca se anula. Assim,

   $$e^x = e^{-x} \iff e^x - e^{-x} = 0 \iff \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = 0 \iff e^{2x} = 1 (\wedge e^x \neq 0) \iff x = 0$$

   ou

   $$e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0 \qquad \text{(pela injectividade)}$$

2. Determine os valores de x tais que $2^x \leq \frac{1}{2}$.

   Resolução:

   $$2^x \leq \frac{1}{2} \iff 2^x \leq 2^{-1} \iff x \leq -1 \qquad \text{(por ser estritamente crescente)}$$

3. Determine o conjunto solução de cada uma das condições :

   (a) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$

(b) $\dfrac{1-2^{3x-1}}{3^{x^2-2}-9} \geq 0$

(c) $x^2e^{x+1} - xe^{x+2} < 0$

Resolução:

(a) Como $4^x = (2^2)^x$, temos,

$$4^x - 3\cdot 2^x + 2 \leq 0 \Longleftrightarrow 2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2 \leq 0. \tag{1}$$

Substituindo $y = 2^x$ em (1), vem:

$$y^2 - 3y + 2 \leq 0 \Longleftrightarrow 1 \leq y \leq 2,$$

porque a função dada pela equação $y^2 - 3y + 2$ é representada graficamente por uma parábola de zeros 1 e 2 e concavidade voltada para cima. Então, como a função exponencial $f(x) = 2^x$ é crescente,

$$2^0 \leq 2^x \leq 2^1 \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Assim, o conjunto solução da inequação é $[0,1]$.

(b) Comecemos por determinar os zeros do numerador e do denominador:

$$1-2^{3x-1} = 0 \Longleftrightarrow 2^{3x-1} = 1 \Longleftrightarrow 2^{3x-1} = 2^0 \Longleftrightarrow 3x-1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3} \qquad \text{(pela injectividade)}$$

$$3^{x^2-2} - 9 = 0 \Longleftrightarrow 3^{x^2-2} = 3^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2 = 2 \Longleftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Como a função exponencial de base maior do que 1 é crescente, podemos construir a seguinte tabela de variação de sinal:

		-2		$\frac{1}{3}$		2	
$1-2^{3x-1}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$3^{x^2-2}-9$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{1-2^{3x-1}}{3^{x^2-2}-9}$	$+$	ND	$-$	0	$+$	ND	$-$

Assim, o conjunto solução da inequação dada é:

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left[\frac{1}{3}, 2\right[$$

(c) Podemos pôr em evidência o factor xe^{x+1} para podermos aplicar a lei do anulamento do produto:

$$x^2e^{x+1} - xe^{x+2} = xe^{x+1}(x-e)$$

Assim,

$$xe^{x+1}(x-e) = 0 \Longleftrightarrow xe^{x+1} = 0 \vee (x-e) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = e$$

Como $e^{x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o sinal de xe^{x+1} apenas depende do sinal de x. Então,

		0		e	
xe^{x+1}	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-e$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2e^{x+1} - xe^{x+2}$	$+$	0	$-$	0	$+$

O conjunto solução da inequação é:

$$\text{C.S.} =]0, e[$$

4. Determine a e b para que a expressão $y = a + b^{x+1}$ defina uma função cujo gráfico intersecte o eixo das ordenadas (yy) no ponto de ordenada 7 e tenha por assímptota a recta de equação $y = 2$.

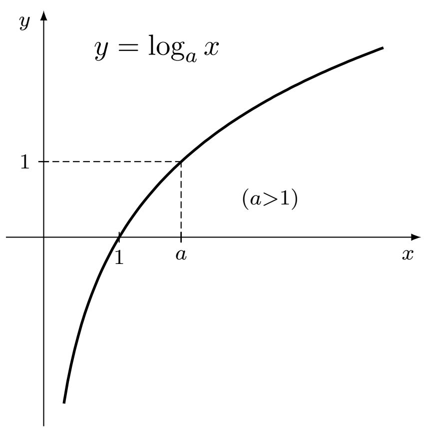
   Resolução: O gráfico da função de equação $y = a + b^{x+1}$ resulta da translação associada a $(-1, a)$ do gráfico da função dada por $y = b^x$. Como a recta $y = 0$ é a única assímptota do gráfico de $y = b^x$, a recta $y = a$ é a única assímptota do gráfico de $y = a + b^{x+1}$. Podemos então afirmar que $a = 2$.

   Como o gráfico da função passa pelo ponto $(0, 7)$, substituindo $x = 0$ e $y = 7$ na equação que traduz a expressão da função, temos
$$7 = 2 + b^{0+1} \Longleftrightarrow b = 5.$$
   A função que satisfaz as condições do problema é
$$y = 2 + 5^{x+1}.$$

6.3 Função Logarítmica

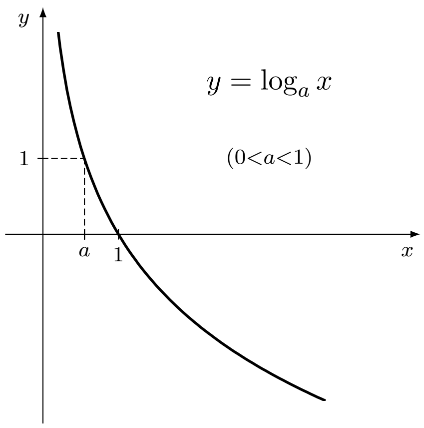
Definição: Chama-se ***função logarítmica de base*** a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, à correspondência
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log_a x, \end{array}$$
A função logarítmica é a inversa da função exponencial, isto é,
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & y & \longmapsto & x = a^y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f^{-1} = g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_a x \end{array}$$
Note-se que, pelas propriedades dos logaritmos temos
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = \log_a a^x = x$$
e
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = a^{\log_a y} = y.$$

6.3.1 Função Logarítmica de Base a, com $a > 1$



- Domínio $\mathbb{R}^+$. Contradomínio $\mathbb{R}$.
- Contínua em todo o domínio.
- A função é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e portanto injectiva.
- A função tem um único zero em $x = 1$. O gráfico de g não intersecta o eixo das ordenadas.
- $x = 0$ é a única assímptota ao gráfico de g.
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty.$$

6.3.2 Função Logarítmica de Base a, com $0 < a < 1$



- Domínio $\mathbb{R}^+$. Contradomínio $\mathbb{R}$.
- Contínua em todo o domínio.
- A função é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e portanto injectiva.
- O gráfico de g intersecta o eixo das abcissas no ponto $(1, 0)$ e não intersecta o eixo das ordenadas.
- $x = 0$ é a única assímptota ao gráfico de g.

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty.$$

Exercícios Resolvidos

1. Simplifique a expressão $e^{3\ln 2 - \ln x}$.

   Resolução: Aplicando as propriedades 6.1.1 e 6.2.1,

   $$e^{3\ln 2-\ln x} = e^{\ln 2^3 - \ln x} = e^{\ln \frac{8}{x}} = \frac{8}{x}.$$

   Observe que esta simplificação só é válida em

   $$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[.$$

2. Determine o conjunto solução das condições:

   (a) $2\ln x - \ln(x-1) = 2\ln 2$

   (b) $\log_3 x \le 0$

   (c) $x\log_2 (x+1) > x$

   Resolução:

   (a) Comecemos por observar que o domínio da expressão $2\ln x - \ln(x-1)$ é

   $$x > 0 \wedge x > 1 \iff x > 1.$$

   Aplicando as propriedades 6.1.1 temos, para $x > 1$,

   $$2\ln x - \ln(x-1) = 2\ln 2 \iff \ln x^2 = \ln(x-1) + \ln 2^2$$

   $$\iff \ln x^2 = \ln((x-1)2^2) \iff x^2 = ((x-1)2^2) \iff x = 2$$

   Como $x = 2$ está no domínio da expressão, resulta que o conjunto solução é $C.S. = \{2\}$.

   (b) O domínio da função dada por $f(x) = \log_3 x$ é $]0, +\infty[$.
   Como a função $f(x) = \log_3 x$ é monótona crescente,

   $$\log_3 x \le 0 \iff \log_3 x \le \log_3 1 \iff x \le 1$$

   Atendendo ao domínio da expressão, resulta que o conjunto solução da inequação dada é

   $$C.S. =]0, 1].$$

(c) O domínio da função dada por $f(x) = \log_2(x+1)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[.$$

Então, para $x \in]-1, +\infty[$,

$$x \log_2(x+1) > x \Longleftrightarrow x(\log_2(x+1) - 1) > 0 \tag{2}$$

O produto é positivo se:

$$\begin{cases} \log_2(x+1) - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \log_2(x+1) - 1 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Como

$$\log_2(x+1) - 1 = 0 \Longleftrightarrow \log_2(x+1) = 1 \Longleftrightarrow x+1 = 2^1 \Longleftrightarrow x = 1 \quad \text{(pela injectividade)}$$

e a função dada por $f(x) = \log_2(x+1) - 1$ é crescente, (3) vem:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Sistematizada esta informação num quadro de sinal, temos:

	-1		0		1	
$\log_2(x+1) - 1$	ND	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x(\log_2(x+1) - 1)$	ND	$+$	0	$-$	0	$+$

Atendendo ao domínio D, o conjunto solução da inequação (2) é:

$$C.S. =]-1, 0[\cup]1, +\infty[.$$

3. Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = 2 + e^{x-1}$

(b) $g(x) = \log_{10}(2 - x)$

Resolução:

(a) O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}$.O contradomínio de f é $CD_f =]2, +\infty[$:
Como a função exponencial é sempre positiva,

$$e^{x-1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow 2 + e^{x-1} > 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

(Note-se que o gráfico de f obtém-se a partir de uma translação do gráfico da função exponencial segundo o vector $(1, 2)$.)
Para determinar a expressão da inversa vamos resolver a equação $y = 2 + e^{x-1}$ em ordem a x:

$$y = 2 + e^{x-1} \Longleftrightarrow \ln(y-2) = \ln e^{x-1} \Longleftrightarrow x = 1 + \ln(y-2)$$

Assim, a inversa de f é f^{-1} definida por:

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 + \ln(x-2). \end{array}$$

(b) O domínio de g é:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x > 0\} =]-\infty, 2[,$$

e o seu contradomínio é $CD_g = \mathbb{R}$.
Para determinar a expressão da inversa vamos resolver a equação $y = \log_{10}(2-x)$ em ordem a x:

$$y = \log_{10}(2-x) \Longleftrightarrow 10^y = 2 - x \Longleftrightarrow x = 2 - 10^y$$

Então, a inversa de g é dada por:

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2 - 10^x. \end{array}$$

e o seu contradomínio é $]-\infty, 2[$.

Exercícios Propostos

1. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$.

   (a) Mostre que $f(x) = 3 + \log_3 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$

   (b) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico f com a recta de equação $y = 8$.

2. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} g: & [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(1+x) - x, \end{array}$$

   (a) Recorrendo à função derivada de g, mostre que g é decrescente.

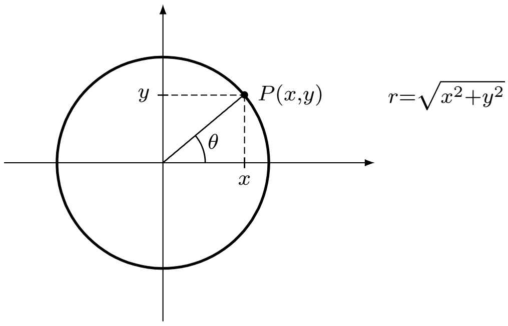
   (b) Tendo em conta a alínea anterior e o valor de $g(0)$,indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

7 Funções trigonométricas

Considerem-se dois eixos ortogonais Ox e Oy. Relativamente a este sistema de eixos coordenados, os ângulos orientados têm uma posição em que o vértice está na origem das coordenadas e o lado origem coincide com o semi-eixo positivo Ox. Nestas condições, diz-se que o ângulo é do 1^o, 2^o, 3^o ou 4^o quadrante conforme o lado extremidade se situe num daqueles quadrantes, respectivamente.

7.1 Funções Trigonométricas

No que se segue, definiremos as funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) utilizando um círculo de raio r.



Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência, e designe-se por r a distância da origem O ao ponto P e por θ o ângulo que o vector $\overrightarrow{OP}$ faz com o semieixo positivo das abcissas. Entre os três números x, y e r podem estabelecer-se as seguintes razões:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \quad r \neq 0$	$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad r \neq 0$	$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

A cada valor do ângulo θ corresponde *um e um só* valor de cada uma das três razões consideradas, as quais por este facto são funções do ângulo θ. Tais funções são chamadas funções circulares ou **Funções Trigonométricas**.
Se tomarmos $r = 1$ conclui-se que $\operatorname{sen}\theta = y$ e $\cos\theta = x$. Ao círculo orientado de centro na origem e raio unitário chama-se **círculo trigonométrico**.
Em seguida apresenta-se uma tabela de valores das funções trigonométricas, anteriormente definidas, para alguns ângulos do 1^o Quadrante.

θ (Graus)	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
θ (Radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não definida

As funções trigonométricas são funções periódicas, i.e.,

$$\exists p > 0 : \ f(x+p) = f(x), \ \forall x \in D_f$$

Ao menor valor positivo p que satisfaça a igualdade acima dá-se a designação de período da função f.
As funções trigonométricas não são injectivas pois são periódicas.

7.2 Identidades Trigonométricas

Fórmula Fundamental da Trigonometria

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1} \tag{4}$$

Dividindo ambos os membros da identidade por $\cos^2 x$, vem:

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{5}$$

Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned} \tag{6}$$

As identidades trigonométricas seguintes são consequência das fórmulas anteriores.

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Fórmulas da duplicação dos ângulos

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

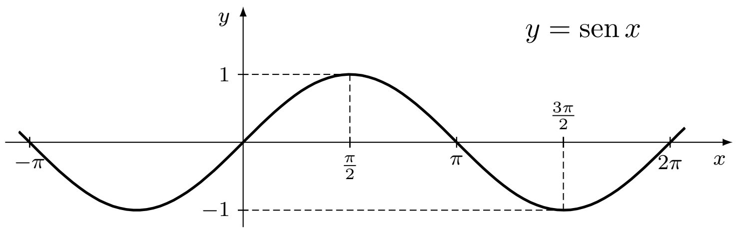
$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Fórmulas de transformação logarítmica

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

7.3 Gráficos das funções trigonométricas

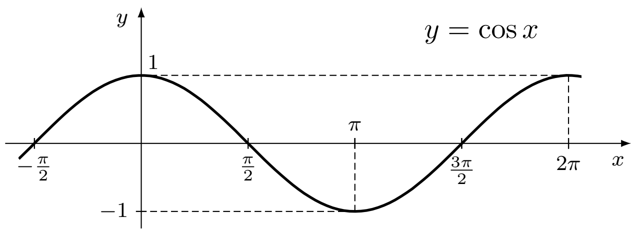
7.3.1 Funções *seno* e *cosseno*



- Domínio: $\mathbb{R}$. Contradomínio: $[-1, 1]$.
- $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R}$ (a função é ímpar)
- A função é periódica de período 2π:

  $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Zeros:

  $\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$



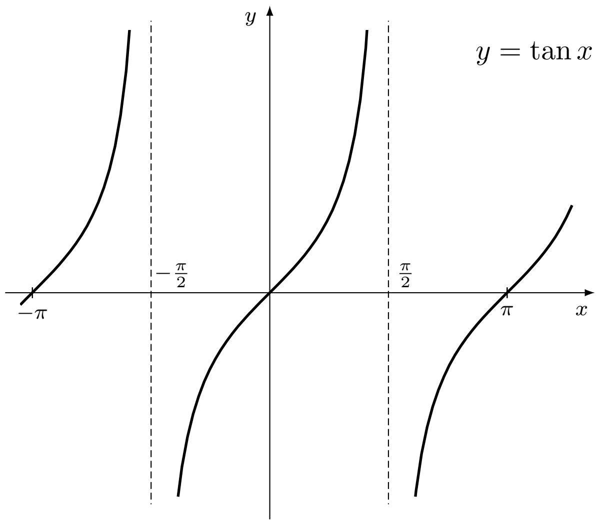
- Domínio: $\mathbb{R}$. Contradomínio: $[-1, 1]$.
- $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ (a função é par)
- A função é periódica de período 2π: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Zeros: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Verificam-se as seguintes identidades, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

7.3.2 Função tangente



- Domínio: $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Contradomínio: $\mathbb{R}$.
- $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R}$ (a função é ímpar)
- A função é periódica de período π: $\tan(x + k\pi) = \tan x, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Zeros: $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7.4 Equações trigonométricas

1. Consideremos a equação $\operatorname{sen} x = c,\ c \in [-1, 1]$.

   Pretende-se determinar as amplitudes x cujo *seno* é igual a c.

   Seja $\alpha \in [0,\ 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}\alpha = c$. Usando a identidade $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ temos

   $$x = \alpha \vee x = \pi - \alpha \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\alpha.$$

   Atendendo à periodicidade da função *seno*, vem:

   $$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\alpha \Longleftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

   Exemplo: $\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2. A solução geral da equação $\cos x = \cos\alpha$ é:

   $$x = \pm\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. A solução geral da equação $\tan x = \tan\alpha$ é:

   $$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercícios Resolvidos

1. Simplifique a seguinte expressão:

$$\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\pi-\alpha\right).$$

Resolução: Usando as propriedades das funções seno e cosseno em 7.3.1, temos

$$\operatorname{sen}\left(\alpha-\tfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\pi-\alpha\right)=\operatorname{sen}\left(-\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)+\cos\left(2\pi+\pi-\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{sen}\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)+\cos\left(\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha$$

2. Calcule $\tan\dfrac{x}{2}$ sabendo que $\operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$.

Resolução: Usando as fórmulas (5) e (6), temos que

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}-1. \tag{7}$$

e usando 7.2

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2}.$$

Assim, dado que $\operatorname{sen}x=\frac{3}{5}$,

$$\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

Como $x\in 2^oQ$, $\cos x=-\frac{4}{5}$. Logo,

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\frac{4}{5}}{2}=\frac{1}{10}.$$

Então,

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{10}}-1=9.$$

Como $x\in 2^oQ$, $\tan\dfrac{x}{2}=-3$.

3. Considere a função $g:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2x)$.

(a) Determine os zeros da função g;

(b) Estude, quanto à existência de assímptotas, a função h definida em $[0,\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ por $h(x)=\dfrac{g(x)}{\cos x}$.

Resolução:

(a) Pretendemos resolver a equação $g(x)=0$, com $x\in[0,\pi]$. Como,

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2x)=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=-\operatorname{sen}(2x)\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}(-2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-2x+2k\pi\vee x=\pi-(-2x)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\tfrac{2k\pi}{3}\vee x=-\pi-2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Queremos os valores de $k\in\mathbb{Z}$, tais que:

$$x=\frac{2k\pi}{3}\in[0,\pi]\text{ ou }x=-\pi-2k\pi\in[0,\pi],$$

ou seja,

$$0\leq\tfrac{2k\pi}{3}\leq\pi\Leftrightarrow 0\leq k\leq\tfrac{3}{2}\quad\text{ou}\quad 0\leq-\pi-2k\pi\leq\pi\Leftrightarrow-1\leq k\leq-\tfrac{1}{2}$$

a que correspondem os valores de $k=0$ e $k=1$ no primeiro caso, e $k=-1$ no segundo. Os zeros da função g são, portanto,

$$0,\frac{2\pi}{3},\pi.$$

(b) Pelo facto do domínio de h ser um conjunto limitado, não tem sentido procurar assímptotas não verticais. Sendo h contínua em todo o seu domínio ($[0,\pi]\backslash\{\pi\}$), só poderá haver assímptota vertical em $x = \dfrac{\pi}{2}$. Como,

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} h(x) = -\infty,$$

a recta de equação $x = \dfrac{\pi}{2}$ é assímptota vertical do gráfico de h.

Exercícios Propostos

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$
   (a) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
   (b) Resolva a equação $\ln[f(x)] = x$
   (c) Estude a função f quanto à existência de assímptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

2. Sabendo que
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \frac{5}{13},\ \ \tan(7\pi - b) = \frac{4}{3}$$
   e que $a \in 4^o\ Q,\ b \in 2^o\ Q$, calcule
   a) $\operatorname{sen}(a+b)$; b) $\cos(a-b)$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+b\right)$.

3. Resolva as seguintes equações trigonométricas:
   (a) $\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 1$; (b) $\cos 4x - \operatorname{sen} 4x = 0$;
   (c) $\cos 2x = 2 - 3\operatorname{sen} x$; (d) $\operatorname{sen}(x+\pi/6) = \operatorname{sen} x$;
   (e) $\cos(2x+\pi/4) = \cos x$; (f) $\cos x = 1 - 5\operatorname{sen} x \tan x$.

4. Usando as fórmulas da soma de dois ângulos (6), mostre que:
   (a) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$; (b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$;
   (c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; (d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

5. Considere a função f, de domínio $[0,2\pi]$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1+\ln(\pi - x) & \text{se} \quad 0 \le x < \pi \\ \cos(2x) & \text{se} \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$
   (a) Estude f quanto à continuidade.
   (b) Determine os zeros de f.
   (c) Seja $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ tal que $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Determine $f(\alpha)$.

6. Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \frac{1}{3} + 2e^{1-x}$ e $g(x) = 2\operatorname{sen} x - \cos x$.
   (a) Estude a função f quanto à existência de assímptotas paralelas aos eixos coordenados.
   (b) Resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma $\ln(ke)$, onde k representa um número real positivo.

8 Sucessões reais

8.1 Conceitos fundamentais

Definição: Uma **sucessão** é uma função de domínio $\mathbb{N}$. Se o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, então designa-se por **sucessão real**.
Portanto, uma sucessão real é uma função

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

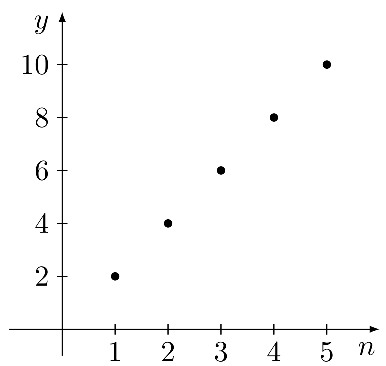
que se denota usualmente por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- u_n é o **termo geral** (define a expressão analitica da sucessão, por exemplo $u_n = 2^n - 1$),
- n é a **ordem** do termo u_n,
- $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é o **conjunto dos seus termos** (ou seja, é o contradomínio da sucessão).

Por exemplo, a sucessão de **termo geral** $a_n = 2n$ é a função em que a imagem de cada número natural é o dobro desse número: a imagem de 1 é 2, a imagem de 2 é 4, e assim sucessivamente. Obtém-se a sequência

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

O **gráfico** desta sucessão é o seguinte:



Exercícios Resolvidos

Considere a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$.

(a) Calcule os primeiros termos da sucessão.

(b) Mostre que todos os termos de ordem par são positivos.

(c) Esboce o gráfico da sucessão.

Resolução:

(a) Substituindo no termo geral n por 1, obtemos

$$u_1 = (-1)^1 = -1.$$

Logo o primeiro termo é -1. Para determinar o segundo termo, substituímos n por 2. Assim sendo,

$$u_2 = (-1)^2 = 1.$$

Repetindo o processo, os primeiros termos da sucessão dada são

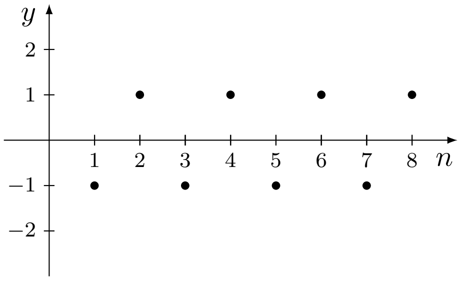
$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

(b) Se n é um número par, então pode ser escrito na forma $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto

$$u_n = u_{2k} = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$$

que é positivo.

(c) O gráfico da sucessão é



Exercícios Resolvidos

Dada a sucessão real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \dfrac{2n-9}{n+3}$,

(a) Determine o termo de ordem 8.

(b) Averigúe se $5/2$ é termo da sucessão.

(c) Mostre que, se $n > 10$, então $a_n > 0$.

Resolução:

(a) Basta substituir n por 8 no termo geral:

$$a_8 = \frac{2\cdot 8 - 9}{8+3} = \frac{7}{11}.$$

Logo o 8° termo é $\frac{7}{11}$.

(b) Pretende-se saber se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 5/2$. Para tal, devemos resolver a equação

$$\frac{2n-9}{n+3} = \frac{5}{2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\frac{2n-9}{n+3} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{4n-18-5n-15}{n+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-n-33}{n+3} = 0 \Leftrightarrow n = -33 \wedge n \neq -3.$$

Como $-33 \notin \mathbb{N}$, a equação anterior é impossível em $\mathbb{N}$ e concluímos que $5/2$ não é termo da sucessão.

(c) Se $n > 10$, então $2n-9 > 2\cdot 10 - 9 = 11$ e $n+3 > 10+3 = 13$. Logo, para $n > 10$, as expressões $2n-9$ e $n+3$ são positivas e atendendo a que o quociente de dois números positivos é ainda um número positivo, provámos o pretendido.

Uma **sub-sucessão** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão que se obtém de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suprimindo alguns dos seus termos e denota-se por $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Por exemplo, se $u_n = (-1)^n$, então $u_{2n} = 1$ é uma sub-sucessão de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8.1.1 Sucessões definidas por recorrência

Uma sucessão pode ser definida por **recorrência**, *i.e.*, são dados o(s) primeiro(s) termo(s) da sucessão e alguma lei que nos permite determinar os restantes. Por exemplo, a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

está definida por recorrência. Quais são os termos desta sucessão? O primeiro e segundo são, respectivamente, 4 e 1, conforme é indicado. Para determinarmos os restantes olhemos para a terceira expressão:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Esta expressão indica que cada termo é soma dos dois termos que o antecedem. Por exemplo, o terceiro termo é (substituindo na expressão anterior n por 1)

$$a_3 = a_1 + a_2 = 4 + 1 = 5.$$

O quarto termo é (substituindo agora $n = 2$)

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 5 = 6$$

e assim sucessivamente

$$a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 6 = 11,$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 6 + 11 = 17,$$

$$\ldots$$

Exercícios Resolvidos

Considere a sucessão definida por

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{8}$$

(a) Determine os quatro primeiros termos da sucessão dada.

(b) Qual será o termo geral da sucessão?

Resolução:

(a) Conforme é indicado no sistema, $a_1 = -4$. Para determinarmos a_2, basta substituir n por 1 na equação $a_{n+1} = a_n + 2$; logo $a_2 = a_1 + 2 = -4 + 2 = -2$. Substituindo agora n por 2 e 3, obtemos $a_3 = a_2 + 2 = 0$ e $a_4 = a_3 + 2 = 2$.

(b) O primeiro termo da sucessão é -4 e $a_{n+1} - a_n = 2$, *i.e.*, a diferença entre dois termos consecutivos é 2. O termo geral será

$$a_n = -6 + 2n.$$

Notemos que $a_{n+1} - a_n = [-6 + 2(n+1)] - [-6 + 2n] = 2$ e $a_1 = -6 + 2 = -4$. Logo esta sucessão satisfaz a condição (8).

Será esta sucessão única? Neste momento não temos meios de dar resposta a esta questão; posteriormente, aquando do estudo das progressões, veremos como poderíamos justificar a unicidade da sucessão.

8.2 Monotonia

Teorema: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão real. A sucessão é **monótona**

- **crescente** se $a_{n+1} - a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente** se $a_{n+1} - a_n \leq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **estritamente crescente** se $a_{n+1} - a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **estritamente decrescente** se $a_{n+1} - a_n < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, a sucessão $a_n = 1/n$ é estritamente decrescente, uma vez que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que toda a sucessão estritamente crescente (respectivamente "estritamente decrescente") é crescente (respectivamente "decrescente"). Uma sucessão constante, por exemplo, $u_n = 4$ é simultaneamente crescente e decrescente, sendo portanto monótona.

Exercícios Resolvidos

Estude a monotonia das sucessões de termo geral:

(a) $a_n = 3 + \sqrt{n}$.

(b) $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

(c) $c_n = n^2 - 11n + 10$.

(d) $d_n = (-2)^n$.

(e) $\begin{cases} e_1 = 4 \\ e_{n+1} = e_n + 2n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Resolução:

(a) Devemos estudar o sinal de $a_{n+1} - a_n$. Como $n+1 > n$, então $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$. Logo, $a_{n+1} - a_n = [3 + \sqrt{n+1}] - [3 + \sqrt{n}] = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$, e portanto a sucessão é monótona crescente.

(b) Devemos estudar novamente o sinal de $b_{n+1} - b_n$:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$\frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0,$$

uma vez que, como $n \in \mathbb{N}$, então $n+2 > 0$ e $n+1 > 0$. Logo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

(c) Como $c_{n+1} - c_n = 2n - 10$ e esta expressão toma valores positivos ou negativos[3], dependendo do valor de n, concluímos que a sucessão dada não é monótona.

(d) Atendendo a que $d_1 = -2$, $d_2 = 4$ e $d_3 = -8$, então $d_1 < d_2$ e $d_2 > d_3$. Portanto a sucessão é não monótona.

(e) Uma vez que

$$e_{n+1} = e_n + 2n + 1 \Leftrightarrow e_{n+1} - e_n = 2n + 1$$

e $2n+1$ é sempre positivo, concluímos que a sucessão dada é monótona crescente.

[3]Por exemplo, se $n = 3$, $2n - 10 < 0$, e $c_4 < c_3$; mas se $n = 6$, então $2n - 10 > 0$ e portanto $c_7 > c_6$.

8.3 Sucessões limitadas

Definição: Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é

- **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **limitada inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **limitada** se existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que que $m \leq a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

M é um **majorante** e m um **minorante** do conjunto dos termos da sucessão.
Ainda existe uma outra maneira de definirmos sucessão limitada: uma sucessão é limitada se existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercícios Resolvidos

Prove que são limitadas as sucessões

(a) $a_n = 2/n$.

(b) $b_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+3}$.

Resolução:

(a) Como $n \geq 1$, então $0 < 1/n \leq 1$. Logo $0 < 2/n \leq 2$ e portanto 0 é um minorante do conjunto dos termos da sucessão e 2 um majorante.

(b) Podemos escrever a sucessão dada como

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+3}, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\dfrac{2n}{n+3}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Além disso, efectuando a divisão de $2n$ por $n+3$, obtemos

$$\frac{2n}{n+3} = 2 - \frac{6}{n+3}.$$

Logo, para n par:

$$n \geq 2 \to n+3 \geq 5 \to 0 < \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{5} \to -\frac{6}{5} \leq -\frac{6}{n+3} < 0 \to$$
$$\frac{4}{5} \leq 2 - \frac{6}{n+3} < 2.$$

Para n ímpar, obtemos

$$n \geq 1 \to n+3 \geq 4 \to 0 < \frac{6}{n+3} \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \to -2 < -2 + \frac{6}{n+3} \leq -\frac{1}{2}.$$

Portanto $-2 < b_n < 2$, ou seja, é limitada.

Exercícios Resolvidos

Considere a sucessão definida por $a_n = \dfrac{n+8}{n+1}$.

(a) Mostre que a sucessão é decrescente.

(b) Mostre que a sucessão é limitada.

Resolução:

(a) Uma vez que $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-7}{(n+2)(n+1)} < 0$, provámos o pretendido.

(b) Uma vez que a sucessão é monótona decrescente, o seu primeiro termo, $a_1 = 9/2$, é um majorante do conjunto dos termos da sucessão. Facilmente se vê que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Logo 0 é um minorante e concluímos assim que $0 < a_n \leq 9/2$.

8.4 Progressões aritméticas e geométricas

8.4.1 Progressões aritméticas

Definição: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Dizemos que a sucessão é uma **progressão aritmética** de **razão** $r \in \mathbb{R}$ se a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sucessão é constante, i.e.,

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por exemplo, a sucessão $u_n = 2n - 3$ é uma progressão aritmética de razão 2 pois $u_{n+1} - u_n = 2$.
A sucessão de termo geral $v_n = 1/n$ não representa uma progressão aritmética porque $v_{n+1} - v_n$ não é constante (a diferença depende de n).
Da definição decorre que uma progressão aritmética é sempre monótona, sendo crescente ou decrescente consoante r é não negativo ou não positivo, respectivamente.

Teorema: O termo geral de uma progressão aritmética $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de razão r é $a_n = a_1 + (n-1)r$.
Logo, se conhecermos o primeiro termo da progressão e a razão, podemos determinar o seu termo geral.

Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ como sendo

$$\begin{array}{rl} S_1 = & a_1 \\ S_2 = & a_1 + a_2 \\ S_3 = & a_1 + a_2 + a_3 \\ & \vdots \\ S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{array}$$

S_n representa a soma dos n primeiros termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema: Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética, então $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$.
Podemos generalizar esta fórmula para o caso seguinte: supor que pretendíamos calcular a soma dos termos consecutivos da sucessão:

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n, \qquad k \leq n.$$

Neste caso viria

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n = \frac{a_k + a_n}{2} \underbrace{(n-k+1)}_{\text{número de termos}}.$$

Notação: $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n.$

Exercícios Resolvidos

Sabendo que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética e que $u_5 = -7$ e $u_{12} = -28$,

(a) determine a razão da progressão;

(b) escreva a expressão do termo geral da sucessão;

(c) determine a soma dos 20 primeiros termos da sucessão;

(d) calcule $\displaystyle\sum_{i=3}^{50} u_i$.

Resolução:

(a) Uma vez que $u_5 = u_1 + (5-1)r$ e $u_{12} = u_1 + (12-1)r$, então substituindo pelos valores dados, vem

$$\begin{cases} -7 = u_1 + 4r \\ -28 = u_1 + 11r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -3 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

Logo a razão é igual a -3.

(b) O termo geral é dado por $u_n = u_1 + (n-1)r = 5 + (n-1)(-3) = -3n + 8$.

(c) A soma consecutiva dos 20 primeiros termos é igual a

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2} 20 = -470.$$

(d)

$$\sum_{i=3}^{50} u_i = \frac{u_3 + u_{50}}{2}(50 - 3 + 1) = -3432.$$

Notemos que o número de termos da soma é igual a $50 - 3 + \mathbf{1}$.

8.4.2 Progressões geométricas

Definição: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão. Dizemos que a sucessão é uma **progressão geométrica** de **razão** $r \neq 0$ se o quociente entre quaisquer dois termos consecutivos é constante, i.e.,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema: O termo geral de uma progressão geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de razão r é dado por $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Teorema: Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica, então $S_n = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r}$, para $r \neq 1$.
De um modo geral,

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k \frac{1 - r^{n-k+1}}{1-r}.$$

Exercícios Resolvidos

Dada a sucessão definida por

$$u_n = \frac{5 \cdot 2^n}{3^{n+1}},$$

(a) Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa uma progressão geométrica.

(b) Calcule S_{18}.

Resolução:

(a) Devemos começar por determinar o quociente $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(5 \cdot 2^{n+1})(3^{n+1})}{(3^{n+2})(5 \cdot 2^n)} = \frac{2}{3}.$$

Como $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ é constante, provamos que a sucessão dada é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

(b) A soma é igual a

$$S_{18} = u_1 \frac{1 - r^{18}}{1-r} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1 - (2/3)^{18}}{1 - (2/3)} = \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{18}\right).$$

Exercícios Resolvidos

Sabendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica com $a_1 = 3$ e $a_6 = 96$,

(a) Determine a razão da progressão geométrica.

(b) Escreva o termo geral da sucessão.

(c) Calcule $\displaystyle\sum_{i=10}^{30} a_i$.

Resolução:

(a)

$$a_6 = 96 \Leftrightarrow 3 \cdot r^5 = 96 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$$

Logo a razão é igual a 2.

(b) O termo geral é $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

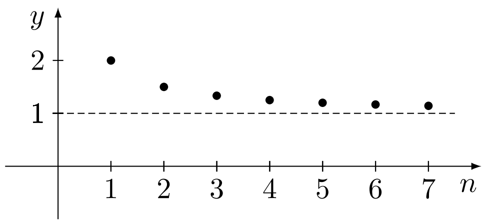
(c)

$$\sum_{i=10}^{30} a_i = a_{10}\frac{1-2^{21}}{1-2} = 3 \cdot 2^9(2^{21}-1).$$

Notemos que o número de termos da soma é igual a $30 - 10 + \mathbf{1} = \mathbf{21}$.

8.5 Convergência de uma sucessão

Consideremos a sucessão real $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. O seu gráfico é o seguinte:



O que se verifica é que, à medida que n aumenta, o valor de a_n aproxima-se de 1. Escrevemos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ ou simplesmente $\lim a_n = 1$.

Definição: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão real. Dizemos que a sucessão é **convergente** se existe um número real L tal que, à medida que n cresce, os termos da sucessão aproximam-se de L. Escrevemos $\lim a_n = L$. Formalmente, dizemos que a sucessão converge para L se

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ n \geq N \to |a_n - L| < \epsilon$$

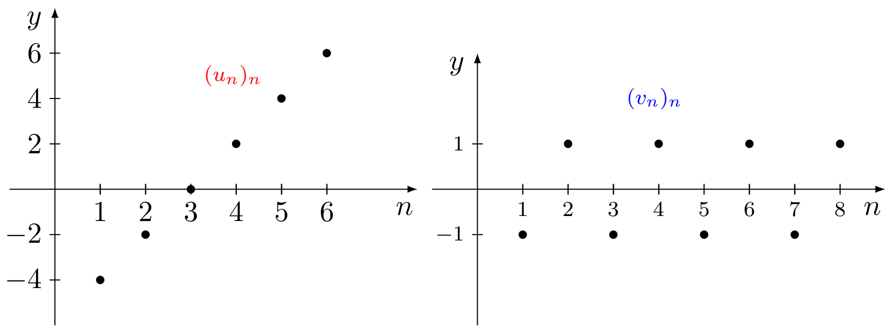
Se tal real L não existe, dizemos que a sucessão é **divergente**.

Teorema: O limite de uma sucessão, se existir, é único.

Por exemplo, tomemos as duas seguintes sucessões:

$$u_n = 2n - 6 \qquad \text{e} \qquad v_n = (-1)^n.$$

Os gráficos das duas sucessões são, respectivamente



Os termos da sucessão $(u_n)_n$ aumentam indefinidamente; dizemos que $\lim u_n = +\infty$.
Os termos da sucessão $(v_n)_n$ vão oscilando entre -1 e 1 consoante n é ímpar ou par, respectivamente. Uma vez que o limite de uma sucessão quando existe é único, concluímos que esta sucessão não tem limite.
Ambas as sucessões são **divergentes**.

Definição: Se $\lim a_n = +\infty$ dizemos que a sucessão $(a_n)_n$ é um **infinitamente grande positivo**. Formalmente dizemos,

$$\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \rightarrow a_n > M;$$

Se $\lim a_n = -\infty$ a sucessão diz-se um **infinitamente grande negativo**. Formalmente temos:

$$\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \rightarrow a_n < M;$$

Se $\lim a_n = 0$ a sucessão é um **infinitésimo**. Formalmente,

$$\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \rightarrow |a_n| < \epsilon.$$

8.6 Limites notáveis

Segue a lista de alguns limites "notáveis", i.e., alguns dos limites frequentemente usados e cuja determinação não é simples.

- $\lim \frac{1}{n} = 0,$
- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, onde $a > 0$;
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$;
- $\lim a^n \begin{cases} = 0 & \text{se} \quad -1 < a < 1 \\ = 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ = +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad a \leq -1 \end{cases}$
- $\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$

8.7 Propriedades aritméticas dos limites

Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões convergentes, tais que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então

1. $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$;
2. $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
3. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$;

Observação: Se $a = \pm\infty$ e $b \in \mathbb{R}$, então:

- $\lim(a_n \pm b_n) = \pm\infty$;
- Se $b \neq 0$ então $\lim(a_n \cdot b_n) = \pm\infty$, dependendo do sinal de b.
- Se $b \neq 0$ então $\lim \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$, dependendo do sinal de b.

8.8 Teoremas sobre limites

Teorema: Toda a sucessão limitada e monótona é convergente.

Este resultado não nos permite determinar o limite mas garante a sua existência. Frequentemente é usado em sucessões definidas por recorrência.

Teorema: Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sucessões convergentes para a e b respectivamente. Se a partir de certa ordem, se verifica $a_n \leq b_n$, então $a \leq b$.

Teorema das sucessões enquadradas Dadas três sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$, a partir de certa ordem;
2. $\lim a_n = \lim c_n$,

então existe $\lim b_n$ e $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$.

Exercícios Resolvidos

Calcule o limite das seguintes sucessões:

(a) $a_n = \dfrac{3n-5}{n+1}$.

(b) $b_n = \dfrac{4n^5+3n^2-n-5}{3n^2-2n+10}$.

(c) $c_n = -n^2+n+7$.

(d) $d_n = \dfrac{2^n-3^{n+2}}{2^{n-1}+3^{n+1}}$.

(e) $e_n = \sin(n\pi)$.

(f) $f_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(g) $g_n = \dfrac{(-1)^{n+3}n+1}{n^3+1}$.

(h) $h_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+2n}$.

(i) $i_n = \dfrac{(2n+1)!n!}{(2n-1)!(n+1)!}$.

(j) $j_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

(m) $m_n = \left(\dfrac{n+1}{n+4}\right)^n$.

Resolução:

(a) $$\lim \frac{3n-5}{n+1} = \lim \frac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{3-\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3-0}{1+0} = 3.$$

(b) $$\lim \frac{4n^5+3n^2-n-5}{3n^2-2n+10} = \lim \frac{n^2\left(4n^3+3-\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}\right)} = \lim \frac{4n^3+3-\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}} = +\infty.$$

(c) $\lim(-n^2+n+7) = \lim n^2 \underbrace{\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}_{\substack{\downarrow \\ -1}} = -\infty.$

(d) $\lim \dfrac{2^n - 3^{n+2}}{2^{n-1}+3^{n+1}} = \lim \dfrac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3^2\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2^{-1}+3\right)} = \lim \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2^{-1}+3} = \dfrac{0-9}{0+3} = -3.$

(e) Como $\sin(n\pi)=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$, então $\lim e_n = 0$.

(f) Observe-se que:

- Se n é da forma $1+4k$, vem, $f_{1+4k} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- Se n é da forma $2+4k$, vem, $f_{2+4k} = \sin\pi = 0$
- Se n é da forma $3+4k$, vem, $f_{3+4k} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$
- Se n é da forma $4+4k$, vem, $f_{4+4k} = \sin 2\pi = 0$

com $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Então f_n toma somente os valores $1, 0, -1$. Logo não existe limite da sucessão dada porque podemos escolher subsucessões de $(f_n)_n$ com limites distintos.

(g) Para n par, $g_n = \dfrac{-n+1}{n^3+1}$ e para n ímpar, $g_n = \dfrac{n+1}{n^3+1}$. Como $\lim \dfrac{-n+1}{n^3+1} = \lim \dfrac{n+1}{n^3+1} = 0$, resulta que $\lim g_n = 0$.

(h) $\lim(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+2n}) = \lim \dfrac{(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+2n}} =$

$= \lim \dfrac{(n^2+2n+3)-(n^2+2n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+2n}} = \lim \dfrac{3}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+2n}} = 0.$

(i) $\lim \dfrac{(2n+1)!n!}{(2n-1)!(n+1)!} = \lim \dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)!n!}{(2n-1)!(n+1)n!} = \lim \dfrac{(2n+1)(2n)}{n+1} = +\infty$

(j) Como $-1 \leq \sin n \leq 1$, então $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Pelo teorema das sucessões enquadradas, como $\lim \dfrac{-1}{n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$, concluímos que $\lim \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

(m) Procedendo à divisão de $n+1$ por $n+4$, obtemos $\dfrac{n+1}{n+4} = 1 + \dfrac{-3}{n+4}$. Logo

$$\lim\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{-3}{n+4}\right)^{n+4}\cdot\left(1+\frac{-3}{n+4}\right)^{-4}\right] = e^{-3}\cdot 1^{-4} = e^{-3}.$$

Exercícios Resolvidos

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4, \quad \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

Sabendo que a sucessão converge, determine o seu limite.

Resolução: Designemos por L o valor do limite. Como a sucessão converge, $\lim a_n = \lim a_{n+1}$ e portanto

$$\lim a_{n+1} = \lim\left(\frac{1}{2}a_n + 4\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}L + 4 \Leftrightarrow L = 8.$$

Logo a sucessão converge para 8.

Exercícios Resolvidos

Sejam $a \in]-1,1[$ e $b \in \mathbb{R}$. Considere a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termo geral

$$s_n = b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}).$$

Mostre que

$$\lim s_n = \frac{b}{1-a}.$$

Resolução: Se $a = 0$, é óbvio.
Suponhamos agora que $a \neq 0$. Uma vez que $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$ é a soma consecutiva de termos de uma progressão geométrica de razão a, então

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Como $|a| < 1$, esta sucessão converge para $\dfrac{1}{1-a}$. Logo

$$\lim s_n = \frac{b}{1-a}.$$

Exercícios Resolvidos

Calcule o limite da sucessão cujos primeiros termos são

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

Resolução: Designemos por a_n o termo geral desta sucessão. Então

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2^{\frac{1}{2}} \\
a_2 &= \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \\
a_3 &= \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De um modo geral

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}.$$

Como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

é a soma consecutivas dos termos de uma progressão geométrica de razão $1/2$, temos que

$$\lim\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

então $\lim a_n = 2^{\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} = 2^1 = 2.$

Exercícios Propostos

1. Escreva os 5 primeiros termos das seguintes sucessões:

   (a) $a_n = \dfrac{3 \cdot (-1)^n}{n!}$;

   (b) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

   (c) $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}, n \in \mathbb{N}$;

   (d) $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$;

   (e) $a_n = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

2. Estude a monotonia de cada uma das seguintes sucessões e verifique se são limitadas:

   (a) $a_n = \dfrac{1}{5^n}$;

   (b) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$;

   (c) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

   (d) $a_n = 1 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$;

   (e) $a_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

   (f) $a_n = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{n!}$;

   (g) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

3. Averiguúe se cada uma das seguintes sucessões é convergente ou divergente, e no caso de convergência, indique o respectivo limite.

   (a) $a_n = n(n-1)$;

   (b) $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$;

   (c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$;

   (d) $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$;

   (e) $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+2)}{n^3+4}$;

   (f) $a_n = \left(1 + \dfrac{3}{n+2}\right)^{2n+1}$;

   (g) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$;

   (h) $a_n = \dfrac{\cos^2(n)}{2^n}$.

9 Limites e Continuidade

9.1 Definição de Limite

No que se segue considere-se uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que D contém um intervalo aberto de centro em a com possível excepção do ponto a.

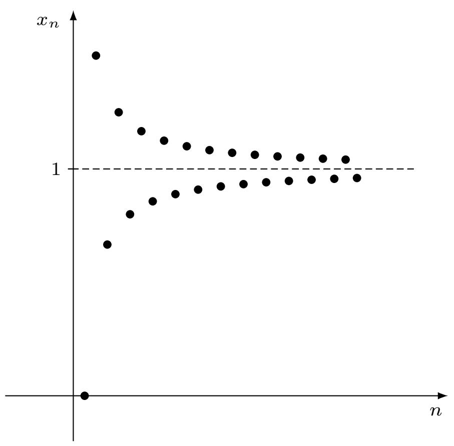
Definição: Diz-se que f ***tem limite*** $l \in \mathbb{R}$ ***quando*** x ***tende para*** a ***em*** D,

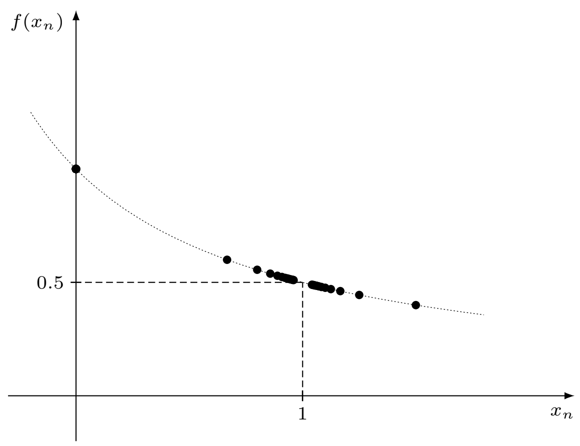
$$\lim_{x\to a} f(x) = l,$$

se para toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de D, distintos de a, que tende para a ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$), a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende para l ($\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$).

Exemplo: Seja $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ com $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Considerando a sucessão

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \to 1 \qquad \text{tem-se que} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \frac{1}{2}.$$





Contudo, este exemplo não demonstra que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2}$, porque foi considerada uma sucessão particular $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Para mostrarmos que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2}$ vamos considerar uma sucessão $(x_n)_n$ qualquer, que convirja para 1 e tal que $x_n \in D \setminus \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, assim temos

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

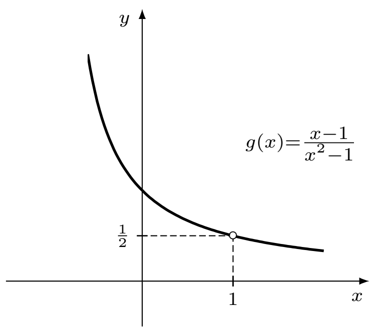
Como $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ é independente da sucessão $(x_n)_n$ escolhida, pode garantir-se que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Observações:

1. Pode existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ e $a \notin D_g$. Vejamos por exemplo a função g definida por $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, com domínio $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ e

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

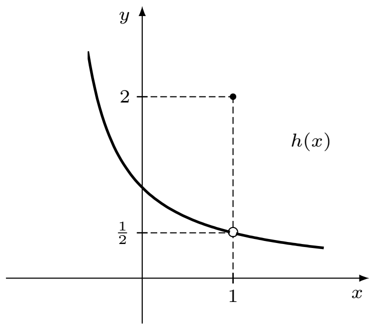
Repare-se que $\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} \wedge x \neq 1$. Como se trata do limite quando x tende para 1, x é efectivamente diferente de 1.



2. O limite da função num ponto não é necessariamente a imagem da função no ponto. Considere-se por exemplo a função,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ e $h(1) = 2$.



9.2 Continuidade

Seja I um intervalo aberto de números reais.
Definição: Seja $f : I \to \mathbb{R}$. A função f é ***contínua em*** $a \in I$ se e só se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

f é **contínua à direita** de a quando $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
f é **contínua à esquerda** de a quando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Se f não for contínua em a, f diz-se ***descontínua*** em a.

Observação: Uma função diz-se descontínua no ponto a se não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mas é diferente de $f(a)$.

Continuidade num intervalo

1. f diz-se contínua num intervalo I se f é contínua em todos os pontos desse intervalo.
2. Uma função é contínua em $[a, b]$ se for:
   (a) contínua em $]a, b[$;
   (b) contínua à direita do ponto a;
   (c) contínua à esquerda do ponto b.

Obs.: Considerando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, os pontos do domínio de f, estão à direita de a e à esquerda de b, i.e., $a \leq x \leq b$. Daí que no cálculo dos limites nos extremos do intervalo se pense apenas em $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

- As funções elementares conhecidas (polinomiais, racionais, trigonométricas, potências, exponencial e logarítmica) são funções contínuas no seu domínio.
- Uma função contínua em I é contínua em qualquer subintervalo de I.

9.3 Propriedades dos Limites

1. **Unicidade do Limite:** Se existe, em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ então esse limite é único.
2. Seja c uma constante real. Se $f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c,\ \forall a \in \mathbb{R}$
3. Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ com $l, m \in \mathbb{R}$.
   - Se $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cl$;
   - $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$;
   - $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = l\, m$;

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ se $m \neq 0$;

Se n for um número natural qualquer, tem-se:

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = l^n$
Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ então $\lim\limits_{x \to a} P(x) = a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + \cdots + a_0$

- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ supondo que $l \geq 0$ quando n é par.

9.4 Propriedades das Funções Contínuas

Propriedades Aritméticas: Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $a \in D_f \cap D_g$ então as seguintes funções também são contínuas em a:

(a) $f \pm g$; (b) fg; (c) $\frac{f}{g}$, se $g(a) \neq 0$.

Composição de Funções: Se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem limite $l \in \mathbb{R}$ quando x tende para a e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $l (\in D_g)$ então a função composta $g \circ f$ tem limite $g(l)$ quando x tende para a:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(l)$$

Como consequência, a composição de funções contínuas é contínua.

Exemplos: $h(x) = \sin(x^2)$ e $g(x) = \ln(1 + \cos^2 x)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Como a função $s(x) = \sin x$ e a função $p(x) = x^2$ são contínuas em $\mathbb{R}$, a função $h = s \circ p$ é contínua em $\mathbb{R}$. Analogamente, como a função $l(x) = \ln x$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ e a função $c(x) = \cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$, a função $r(x) = 1 + \cos^2 x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Por consequência, atendendo a que $r(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a função $g = l \circ r$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Exercícios Resolvidos

1. Considere a função real de variável real dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 7x - 12}{2x^2 - 5x - 3}, & x > 3 \\ -2, & x = 3 \\ 2x - k, & x < 3 \end{cases}$

   (a) Determine $k \in \mathbb{R}$ por forma a que exista $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

   (b) Para que valores de k encontrados f é contínua em $x = 3$?

   Resolução:

   (a) Como a função é definida por ramos, ao fazermos x tender para 3, temos que considerar o que se passa se $x < 3$ ($\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$) e o que se passa com $x > 3$ ($\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$).
   Comecemos por calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-x^2 + 7x - 12}{2x^2 - 5x - 3}$.
   Vamos simplificar a função racional:

$$-x^2 + 7x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{-2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

   Assim, como $x \neq 3$ porque se trata do limite quando x tende para 3, podemos afirmar que as seguintes expressões são iguais:

$$\frac{-x^2 + 7x - 12}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{-(x-3)(x-4)}{2(x-3)(x + \frac{1}{2})} = \frac{4 - x}{2x + 1}$$

e portanto,

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{-x^2+7x-12}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{4-x}{2x-1}=\frac{1}{7}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ é necessário que os limites laterais sejam iguais, e é dessa igualdade que obtemos o valor de k:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{-x^2+7x-12}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3^-}(2x-k)\Leftrightarrow \frac{1}{7}=6-k\Leftrightarrow k=\frac{41}{7}$$

(b) Como $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\neq f(3)$ a função não é contínua em 3, logo, não existe um valor de k para o qual f seja contínua.
No entanto, se $k=8$ a função é contínua à esquerda de 3.

2. Calcule, caso existam, os limites de cada uma das funções nos pontos indicados:

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $a=\frac{1}{2}$, 0 e 1, com f definida por
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-2}; \end{array}$$

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ para $a=0,1$ e 2, com $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & x>1\\ 2x, & x\leq 1\end{cases}$;

(c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{|x-a|}$, com $a\in\mathbb{R}$.

Resolução:

(a) Para $a=\frac{1}{2}$ o limite coincide com a imagem da função no ponto:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2}=-1;$$

Como a função só está definida à direita de 0, para $a=0$ calcula-se o limite lateral à direita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x-2}=-\frac{1}{2};$$

Como a função só está definida à esquerda de 1, o limite quando x tende para $a=1$ é igual ao limite lateral esquerdo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-2}=-2;$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$ (calcula-se no 2º ramo)
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$ (calcula-se no 1º ramo)

Para $a=1$, calculam-se os limites laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

(c) Como $|x-a|=x-a$, para valores à direita de a, e $|x-a|=-(x-a)$, para valores à esquerda de a, tem-se:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{|x-a|}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

e

$$\lim_{x\to a^-}\frac{x-a}{|x-a|}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{-(x-a)}=-1$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite não existe.

Exercícios Propostos

Estude a continuidade das seguintes funções, nos respectivos domínios:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ **2.** $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ **3.** $h(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

4. $i(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \geq -1 \\ 1 - x, & x < -1 \end{cases}$ **5.** $j(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 3 \\ -x^2 + 3x, & x \leq 3 \end{cases}$

6. $l(x) = \begin{cases} |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ \frac{1}{x}, & x \in]0, 2[\\ x^2 - 4x, & x \in [2, 4] \end{cases}$

9.5 Limites Infinitos e Limites no Infinito

Definição: Diz-se que f ***tem limite*** $+\infty$ ***quando*** x ***tende para*** a ***em*** D,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

se para toda a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de D, distintos de a, que tende para a ($\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$), a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende para $+\infty$ ($\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$).

Definição: Diz-se que f ***tem limite*** l ***quando*** x ***tende para*** $+\infty$ ***em*** D,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l,$$

se para toda a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de D, que tende para $+\infty$ ($\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$), a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende para l ($\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$).

Definição: Diz-se que f ***tem limite*** $+\infty$ ***quando*** x ***tende para*** $+\infty$ ***em*** D,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

se para toda a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de D, que tende para $+\infty$ ($\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$), a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende para $+\infty$ ($\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$).

Definem-se de modo análogo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Convém sublinhar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais e quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, diz-se que não existe em $\mathbb{R}$ o limite de $f(x)$ quando x tende para a.

Exercício resolvido

Vejamos que não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$.
Se considerarmos as sucessões $x_n = 2n\pi$ e $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, ambas são infinitamente grandes, ou seja, tendem para $+\infty$, no entanto, tem-se:

$$\sin(x_n) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0$$

e
$$\sin(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1.$$
Se o limite existisse, seria único e portanto qualquer sucessão $(f(x_n))_n$ deveria convergir para esse limite, independentemente da escolha da sucessão $(x_n)_n$.
De forma análoga se prova que **não existem** os seguintes limites:
$$\lim_{x\to-\infty} \sin x, \quad \lim_{x\to+\infty} \cos x, \quad \lim_{x\to-\infty} \cos x, \quad \lim_{x\to+\infty} \tan x, \quad \lim_{x\to-\infty} \tan x.$$

9.6 Propriedades dos Limites Infinitos

O teorema da **unicidade do limite** enunciado anteriormente para limites finitos pode generalizar-se a limites infinitos.

As **propriedades aritméticas** dos limites finitos poderão também ser generalizadas a limites infinitos depois de estabelecida uma aritmética dos limites infinitos.

Aritmética dos Limites
No caso em que a aplicação das propriedades do limite conduzam a resultados do tipo descrito abaixo, por abuso de linguagem escreve-se

$$-(+\infty) = (-\infty) \qquad (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) \qquad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$$
$$(\pm\infty) + a = (\pm\infty) \qquad \infty \cdot \infty = \infty \qquad \infty \cdot a = \infty, \text{ se } a \neq 0$$
$$\frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \frac{1}{\infty} = 0$$
$$0^{+\infty} = 0 \qquad 0^{-\infty} = +\infty$$

No produto de limites infinitos é válida a regra de sinais usada no produto de números reais.

No caso de sermos conduzidos a um destes tipos
$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \infty \cdot 0, \ +\infty - \infty, \ +\infty^0, \ 0^0, \ 1^\infty.$$
diz-se que temos uma **indeterminação**.

Se no cálculo de um limite, surgir uma indeterminação, tal não significa que o limite não exista. Dever-se-á proceder à manipulação da expressão analítica da função em estudo por forma a averiguar a existência, ou não, desse limite.

Alguns limites que conduzem a indeterminações são designados **limites notáveis** e são fundamentais no cálculo de limites.

Indeterminação	**Limites Notáveis**
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
1^∞	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, a \in \mathbb{R}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, p \in \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, p \in \mathbb{R}^+$
$0 \cdot \infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} x^p \ln x = 0, p \in \mathbb{R}^+$

Exercícios Resolvidos

Calcule, caso existam, cada um dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-3}$ **2.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}$ **3.** $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{2-x}$

4. $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x^2-1}$ **5.** $\lim\limits_{x\to2}\ln(x-2)$ **6.** $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$

Resolução:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-3}=0$ (porque $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ e o inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo).

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}=?$

   Vamos calcular os limites laterais:
   $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ (como $x\to3^-$ tem-se $(x-3)\to0^-$ e "$\frac{1}{0^-}=-\infty$")
   $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ (tem-se $(x-3)\to0^+$ e "$\frac{1}{0^+}=+\infty$")

   Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}$.

   (Para determinarmos se um limite tende para 0 por valores à direita (0^+) ou por valores à esquerda (0^-), basta termos em conta o sinal da função à direita e à esquerda de 0. Neste caso a função $y=x-3$ é positiva para valores superiores a 3 e negativa para valores inferiores a 3.)

3. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{2-x}=+\infty$ (é "$\frac{1}{0^+}$" porque a função $y=2-x$ é positiva à esquerda de 2).

4. $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$ (é "$\frac{1}{0^-}$" porque a função $y=x^2-1$ é negativa para valores à direita de -1 que estão próximos de -1. O gráfico da função $y=x^2-1$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima).

5. $\lim\limits_{x\to2}\ln(x-2)=\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)=-\infty$
   (Note-se que função só está definida à direita de 2 e "$\ln(0^+)=-\infty$").

6. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=?$
   Vamos determinar os limites laterais quando x tende para 0:
   $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ e "$e^{+\infty}=+\infty$")
   $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$ ($\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ e "$e^{-\infty}=0$")
   Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$.

Exercícios Resolvidos

Calcule, caso existam, cada um dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-2^x}{3^{x+1}+2^{x-3}}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-x-2}$ **3.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ **4.** $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos(t)}{\sin(t)}$

5. $\lim\limits_{t\to2}\dfrac{e^{2t-4}-1}{t-2}$ **6.** $\lim\limits_{t\to+\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}$ **7.** $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$ **8.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x^2+2)-\ln(x^2)\right)$ **10.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$

Resolução:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-2^x}{3^{x+1}+2^{x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2^x}{3^x}}{3+\frac{2^{x-3}}{3^x}}=\dfrac{1}{3}.$
   (Dividimos o numerador e o denominador pela exponencial de maior base, neste caso 3^x.)

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 3.$
(Dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x.)

3.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} &= \lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} && \text{(multiplicando pelo conjugado)}\\
&= \lim_{x\to2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}\\
&= \lim_{x\to2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} && \text{(como } x\neq 2 \text{ podemos simplificar a expressão)}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{1-\cos(t)}{\sin(t)} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{1-\cos(t)}{t}\cdot\dfrac{t}{\sin(t)} = 0\cdot1 = 0.$

5. Como $\lim\limits_{y\to0} \dfrac{e^y-1}{y} = 1$ e $2t-4\to0$ quando $t\to2$,
$$\lim_{t\to2} \frac{e^{2t-4}-1}{t-2} = \lim_{t\to2} 2\frac{e^{2t-4}-1}{2(t-2)} = 2\lim_{t\to2} \frac{e^{2t-4}-1}{2t-4} = 2\cdot1 = 2.$$

6. Como $\lim\limits_{y\to0} \dfrac{\sin(y)}{y} = 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, tem-se:
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \text{“}+\infty\cdot1\text{''} = +\infty.$$

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{-y}{e^y} = 0$ (Recorremos a uma mudança de variável $y=-x$.)

8.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} && \text{(multiplicando pelo conjugado.)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-(x+1)}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} = 0
\end{aligned}$$

9. $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\ln(3x^2+2)-\ln(x^2)\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\dfrac{3x^2+2}{x^2} = \ln\left(\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2}\right) = \ln 3$
(Usamos as propriedades aritméticas dos logaritmos e a continuidade da função logarítmica, que nos permite “trocar” o limite com o logaritmo)

10.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)(1+\sin(x))}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))} && \text{(repare-se que } x\neq\tfrac{\pi}{2} \text{ e portanto } \sin x\neq 1)\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)(1+\sin(x))}{1-\sin^2(x)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)(1+\sin(x))}{\cos^2(x)} && \text{(usando a fórmula fundamental da trigonometria)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty && \left(\text{quando } x\to\frac{\pi}{2}^+\text{, tem-se que } \sin x\to1 \text{ e } \cos x\to0^-\right)
\end{aligned}$$

Exercícios Resolvidos (Levantamento de indeterminações do tipo $\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty$)

Calcule, caso existam, cada um dos seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ **2.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Resolução:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2$ (porque $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$)

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = ?$
   Recorde-se que $a^b = e^{b\ln a}$. Assim,
   $$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$
   Como
   $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0,$$
   resulta que,
   $$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = ?$
   Analogamente ao exercício anterior
   $$x^x = e^{x\ln x}$$
   Como
   $$\lim_{x\to +\infty} x\ln x = 0,$$
   resulta que,
   $$\lim_{x\to +\infty} x^x = e^0 = 1.$$

Exercícios Propostos

Calcule, caso existam, os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2}{x^2+10}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(5+x)}{4+x}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{3-x}$
7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a-h)^4-a^4}{h}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$
10. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos(t)}{t}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^{2x}-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(2x)]^{\frac{1}{x^2}}$
14. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$
15. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

Estude a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\ln x}, & x\in]0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no seu domínio.

9.7 Assímptotas

Assímptotas não verticais

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que D contém um intervalo da forma $]a, +\infty[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. A recta de equação $y = mx + b$ é uma ***assímptota ao gráfico de f à direita*** se

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0,$$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que D contém um intervalo da forma $]-\infty, a[$, para algum $a \in \mathbb{R}$. A recta de equação $y = mx + b$ é ***assímptota ao gráfico de f à esquerda*** se

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0.$$

- Se existirem, em $\mathbb{R}$, os limites $m = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ e $b = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$ então $y = mx + b$ é a equação de uma assímptota ao gráfico de f à direita.

- Se existirem, em $\mathbb{R}$, os limites $m = \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ e $b = \displaystyle\lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx]$ então $y = mx + b$ é a equação de uma assímptota ao gráfico de f à esquerda.

Exemplos:

1. A função $f(x) = e^x$ não tem assímptota não vertical à direita porque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$, mas $y = 0$ é uma assímptota não vertical (horizontal) à esquerda porque $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$;
2. A função $g(x) = \ln x$ não tem assímptota não vertical à esquerda porque o domínio de g é $\mathbb{R}^+$. Por outro lado $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, ou seja, g podia ter uma assímptota com declive $m = 0$. Mas, como não existe finito o limite que determina o coeficiente b, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) - mx = \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, conclui-se que g nem sequer admite assímptota não vertical à direita.

Assímptotas verticais

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que D contém um intervalo aberto de centro em a com possível excepção do ponto a. A recta de equação $x = a$ diz-se uma ***assímptota vertical*** ao gráfico de f se se verifica uma das condições:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Observações:

- Uma função contínua não tem assímptotas verticais nos pontos do seu domínio.
- A recta de equação $x = a$ pode ser assímptota e $a \in D$. Por exemplo, seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

  f tem domínio $\mathbb{R}$ e $x = 0$ é assímptota vertical ao gráfico de f porque $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.

Exemplos:

1. A função $f(x) = \ln x$ tem um assímptota vertical $x = 0$, porque $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$ (não faz sentido calcular o limite à esquerda de 0 porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$);
2. A função $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ não tem assímptotas verticais, recorde que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercícios Resolvidos

Determine as equações das assímptotas ao gráfico de cada uma das funções:

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
2. $g(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$

Resolução:

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$,
   logo a recta $x = 1$ é assímptota vertical ao gráfico de f.

   $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2-x} = 0$ e $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, logo a recta $y = 1$ é assímptota horizontal bilateral ao gráfico de f.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0$, logo $x = 0$ é assímptota vertical.

   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\right] = 1$$

   $$\begin{aligned} b = \lim_{x\to+\infty} (g(x)-x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x}} - (x+1) + 1\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x+1)(e^{\frac{1}{x}}-1)\right] + 1 = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x+1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right] + 1 = 1\cdot 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

   A recta $y = x + 2$ é assímptota oblíqua bilateral ao gráfico de g.

Exercícios Propostos

Determine, caso existam, as assímptotas dos gráficos de cada uma das seguintes funções:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x-6}$;
2. $g(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$;
3. $h(x) = \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$;
4. $i(x) = e^{-\frac{1}{x}}$;
5. $i(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

10 Derivadas

10.1 Derivada de uma Função num Ponto. Função Derivada

Definição: Seja a um ponto de um intervalo aberto I contido no domínio D_f da função f, ou seja, $a \in I \subseteq D_f$. A ***derivada da função*** f ***no ponto*** a é definida pelo limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ou equivalentemente,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

caso o limite exista e seja finito. A função f é ***derivável*** em $I \subseteq D_f$ se admite derivada em todos os pontos de I.

A função que a cada elemento $a \in D_f$ em que f admite derivada faz corresponder $f'(a)$ designa-se por ***função derivada*** de f. Note que $D_{f'} \subseteq D_f$ mas os dois domínios podem ser diferentes.

Exercícios Resolvidos

Mostre que a função f dada por $f(x) = |x|$ não é derivável em 0. Determine a função derivada, f', de f.

Resolução: Observe-se que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Como os limites laterais

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

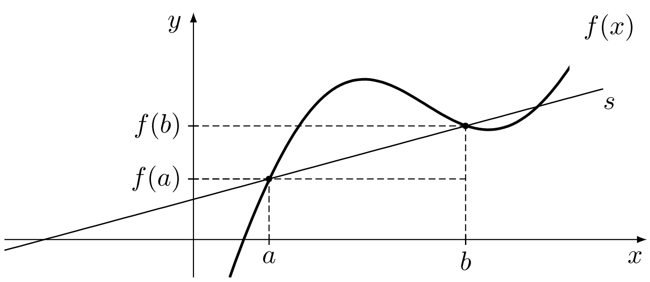
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

são diferentes concluimos que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, ou seja, não existe a derivada de f no ponto 0. Contudo, a função derivada de f está definida em $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

10.2 Interpretação Geométrica da Derivada

Seja f uma função real de variável real. Uma recta que passa por dois pontos distintos do gráfico de f diz-se ***recta secante*** ao gráfico de f.



A equação da recta secante, s, ao gráfico de f em $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, é dada por

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

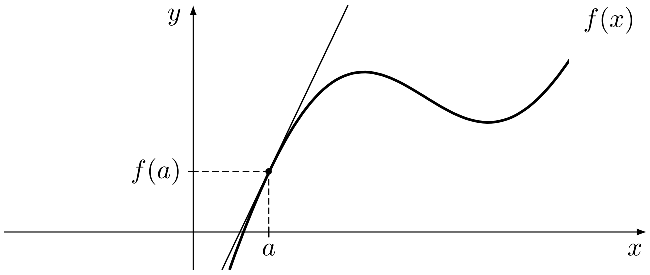
Ao declive da recta secante,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

chama-se ***taxa de variação*** da função f no intervalo $[a, b]$.

A ***recta tangente*** ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ tem declive $f'(a)$ e sua equação é

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Exercícios Resolvidos

1. Determine a recta tangente ao gráfico da função dada por $f(x) = x^2$ no ponto de abcissa $x_0 = -1$.

   Resolução:
   Por definição de derivada de uma função num ponto, x_0, temos,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 \in \mathbb{R}$$

   Como x_0 é um número real arbitrário, f é derivável em $\mathbb{R}$.
   A recta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = -1$ tem declive $f'(-1)$ (derivada de f no ponto $x_0 = -1$) e é dada por:

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -2x - 1.$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma recta, r. Mostre que a tangente ao gráfico da função em qualquer ponto é a própria recta r.

   Resolução:
   Consideremos a função $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ (cujo gráfico é uma recta com declive a e ordenada na origem b), derivável em $\mathbb{R}$. A derivada de f é dada por:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

   i.e, $f'(x_0) = a$ para qualquer número real x_0.
   Se fizermos $x_0 = 1$, a equação da recta tangente ao gráfico de f neste ponto é dada por

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = ax + b.$$

   Efectivamente, qualquer que seja o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ a recta tangente coincide com o gráfico da própria função:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = a(x - x_0) + ax_0 + b = ax + b.$$

10.3 Regras de Derivação

Sejam f e g funções deriváveis no conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

- $\alpha f + \beta g$ é derivável em D e $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ ("linearidade");
- fg é derivável em D e $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\frac{f}{g}$ é derivável em D desde que $\frac{f}{g}$ esteja definida em D e $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $(f^\alpha)'$ é derivável em D e $(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$, desde que f^α e $f^{\alpha-1}$ estejam definidas.

As funções racionais, polinomiais, trigonométricas, exponencial e logarítmica são funções deriváveis no seu domínio.

Derivadas de funções elementares:

Função	**Derivada**
k (constante)	0
$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$	$a_1 + ... + a_nx^{n-1}$
u^n	$nu^{n-1}u'$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tan u^2)u'$
e^u	$u'e^u$
a^u	$u'a^u \ln a$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$

Exercícios Resolvidos

1. Determine a função derivada de cada uma das funções:

   (a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$;

   (b) $g(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$;

   (c) $h(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$.

   Resolução:

   (a) $f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 1)' = (x^3)' - (5x^2)' + (1)' = 3x^2 - 10x$
   $D_{f'} = D_f = \mathbb{R}$;

   (b) $g'(x) = \left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)' = \dfrac{(x+3)'(2x-1) - (x+3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \dfrac{-7}{(2x-1)^2}$
   $D_{g'} = D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$;

   (c) $h'(x) = \left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}\right)' = \dfrac{2}{3}(2x-1)^{\frac{2}{3}-1}(2x-1)' = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$
   $D_h = \mathbb{R}$ e $D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exercícios Propostos

1. Determine a função derivada de cada uma das funções:

   (a) $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x)$;

   (b) $g(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$;

   (c) $h(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;

   (d) $r(x) = e^{x^2}$;

   (e) $q(x) = 5^{x^2 - x}$;

   (f) $p(x) = (1 - x^2) \ln x$;

   (g) $j(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x}$.

10.4 Derivada da Função Composta

Sejam $f : J \to \mathbb{R}$ derivável em J e $g : I \to \mathbb{R}$ derivável em I, com $g(I) \subseteq J$.
A função composta $h = f \circ g : I \to \mathbb{R}$ é derivável em I e

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x), \forall x \in I.$$

Observação: A regra de derivação da função composta é frequentemente chamada *regra da cadeia*.
A derivada da função $f \circ g \circ h : I \to \mathbb{R}$, com $f : L \to \mathbb{R}$ derivável em L, $g : J \to \mathbb{R}$ derivável em J e $h : I \to \mathbb{R}$ derivável em I, com $h(I) \subseteq J$ e $g(h(I)) \subseteq L$, é dada por:

$$[f(g(h(x)))]' = f'(\ g(h(x))\ )\,[g(h(x))]' = f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x), \forall x \in I$$

Exercícios Resolvidos

1. Determine a derivada de cada uma das funções:

   (a) $h(x) = \sin(3x^2 + 5)$;

   (b) $r(x) = \ln(x^2 - 5x)$;

   (c) $s(x) = 3^{\tan\left(\sqrt{x}\right)}$.

   Resolução:

   (a) A função h é a composta de f após g, $h = f \circ g$, com f e g dadas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 3x^2 + 5$. A derivada de f é $f'(x) = \cos(x)$ e a derivada de g é $g'(x) = 6x$, logo

   $$h'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = \cos(3x^2 + 5)\,(6x) = 6x\cos(3x^2 + 5).$$

   (b) A função r é a composta $r = f \circ g$, em que f e g são dadas por $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 5x$, com derivadas, respectivamente, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g'(x) = 2x - 5$. Então,

   $$r'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = f'(x^2 - 5x)(2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}.$$

   (c) Vamos decompôr a função s. Sejam f, g e h dadas por $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \tan x$ e $h(x) = 3^x$. As derivadas destas funções são:

   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0; \qquad g'(x) = \sec^2 x, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \qquad h'(x) = 3^x \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Como $s(x) = h(g(f(x)))$, a derivada de s é dada por:

   $$\begin{aligned} s'(x) &= h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x) \\ &= 3^{\tan\left(\sqrt{x}\right)} \sec^2\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln 3, \forall x \in \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Exercícios Propostos

1. Determine a derivada de cada uma das funções:

   (a) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$;

   (b) $g(x) = \ln(2 - e^x)$;

   (c) $h(x) = \cos(x^2 - 1)$.

10.5 Derivada da função inversa

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função invertível com inversa $f^{-1} : CD_f \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em D e f' nunca se anula, então f^{-1} é derivável em $f(D)$ e tem-se

$$\forall y \in f(D),\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Observação: Note-se que se $y = f(x)$ então $x = f^{-1}(y)$ e portanto $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Exercícios Resolvidos

1. Determine a derivada da inversa da função definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

   Resolução:
   A função $f(x) = \sqrt{x}$ é invertível e tem derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ não nula no intervalo $I =]0, +\infty[$. Portanto, a sua inversa é derivável em $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ e

$$\forall y \in]0, +\infty[, \ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\frac{1}{2y}} = 2y.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que f é invertível e $f(-1) = -3$, determine $(f^{-1})'(-3)$.

   Resolução:
   A função f é uma função invertível e tem derivada $f'(x) = 35x^6 + 18x^2 + 1$ não nula em $\mathbb{R}$. Assim, a inversa de f é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-3))}$$

   De $f(-1) = -3$ resulta que $f^{-1}(-3) = -1$, logo

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{54}.$$

Exercícios Propostos

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

10.6 Derivadas de ordem superior à primeira

Seja f derivável em D e f' também derivável em D. Podemos obter uma nova função $f'' : D \to \mathbb{R}$, tal que $f''(x) = (f')'(x), \forall x \in D$ a que se chama **função derivada de segunda ordem** ou **segunda derivada**. Este processo pode ser repetido para obter a **função derivada de ordem** n que se denota por $f^{(n)}$ (desde que as sucessivas derivadas existam). De modo análogo, a função f' designa-se também por **derivada de primeira ordem**.

- A notação de Leibniz é também muito usada para designar derivadas:
  $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(x)$ e $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Exercícios Resolvidos

1. Seja $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Determine a derivada de ordem n da função f.

Resolução:

$$f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos x; f'''(x) = \sin x; f^{(4)}(x) = \cos x = f(x).$$

Podemos, neste caso, obter uma regra para a derivada de qualquer ordem da função f:

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x \text{ e } f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k \sin x, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Obs.: Se n par, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, se n ímpar, $n = 2k - 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exercícios Propostos

1. Encontre as derivadas de 2ª ordem das funções $y(x) = \sin x$ e $y = x$.
2. Encontre a derivada de 3ª ordem da função $g(x) = \ln |x|$.
3. Encontre todas as derivadas até à 7ª ordem da função $f(x) = e^x$.

10.7 Aplicação das derivadas ao estudo de funções

10.7.1 Monotonia

Teorema: Seja f uma função derivável num intervalo $I \subseteq D_f$. Se

- $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$, então f é ***monótona crescente*** em I;
- $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in I$, então f é ***monótona decrescente*** em I;
- $f'(x) > 0,\ \forall x \in I$, então f é ***estritamente monótona crescente*** em I;
- $f'(x) < 0,\ \forall x \in I$, então f é ***estritamente monótona decrescente*** em I;
- $f'(x) = 0,\ \forall x \in I$, então f é ***constante*** em I.

Definição: Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com contradomínio CD_f. O ponto $c \in D_f$ é

- ***ponto de máximo (resp. mínimo) global*** de f se $f(c)$ é o máximo (resp. mínimo) de CD_f, i.e.,

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in D_f \quad \text{(máximo global)} \qquad f(x) \geq f(c), \forall x \in D_f \quad \text{(mínimo global)}$$

- ponto de máximo (resp. mínimo) local se existe um intervalo aberto I que contém c tal que c é ponto de máximo (resp. mínimo) global de f no conjunto $D_f \cap I$, i.e.,

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in D_f \cap I \quad \text{(máximo local)} \qquad f(x) \geq f(c), \forall x \in D_f \cap I \quad \text{(mínimo local)}$$

Exercícios Resolvidos

1. Dada a função $f(x) = (x-1)^3$

   (a) caracterize f';

   (b) estude o sinal de f';

   (c) estude a monotonia de f.

   Resolução:

   (a) f' fica caracterizada com a determinação da sua expressão analítica e respectivo domínio. A expressão analítica da primeira derivada de f é dada por $f'(x) = 3(x-1)^2$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$, pois f é uma função polinomial.

   (b) Se $x = 1$ tem-se $f'(x) = 0$ e se $x \neq 1$ tem-se $f'(x) > 0$.

   (c) Como $f'(x) \geq 0$, f é monótona crescente em $\mathbb{R}$.

2. Seja f definida por $f(x) = e^{-x^2}$. Estude f quanto à monotonia em $\mathbb{R}$.

   Resolução: Como $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ temos,

		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

   A função f é crescente em $]-\infty, 0[$, decrescente em $]0, +\infty[$ e tem em 0 o máximo (absoluto) $f(0) = 1$.

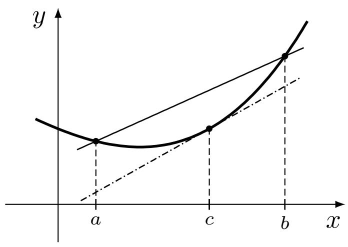
10.7.2 Convexidade, Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja f uma função definida em $D_f \subseteq \mathbb{R}$ e $D \subseteq D_f$.

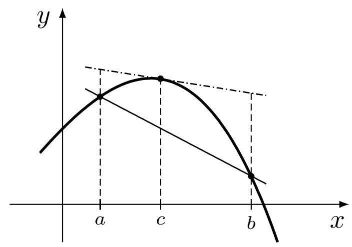
Definição: Diz-se que f é ***convexa*** (***côncava***) em D se para qualquer intervalo $[a, b] \subseteq D$, o gráfico da função não está acima (resp. abaixo) da recta secante nos pontos a e b.

Se f é convexa (côncava), diz-se que tem a concavidade voltada para cima (resp. para baixo).

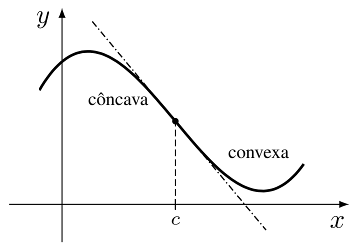
Definição: O ponto $c \in D_f$ é ***ponto de inflexão*** da função f se em $x = c$ o seu gráfico muda o sentido da concavidade.



Função convexa



Função côncava



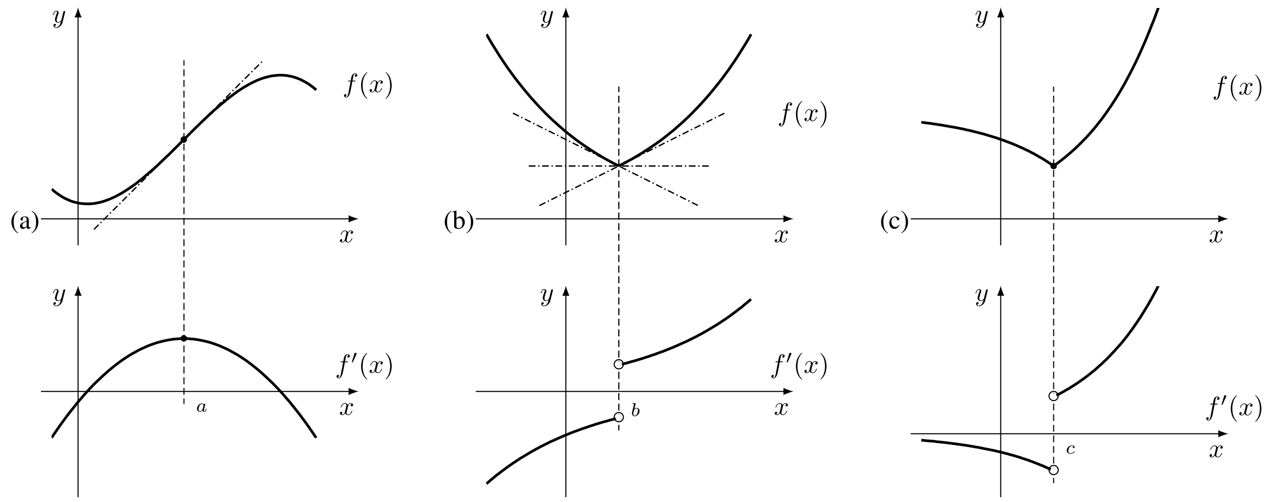
Ponto de inflexão

Se f' for derivável, pode estudar-se a concavidade de f a partir do sinal da segunda derivada, f''.
Seja $I \subseteq D_{f'}$ um intervalo onde f' é derivável. Se

- $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$, então f é convexa em I;
- $f''(x) < 0,\ \forall x \in I$, então f é côncava em I.

Observe-se que se f é convexa (côncava) em I a recta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto $c \in I$ fica abaixo (acima) do gráfico de f, numa *vizinhança* de c.

Na figura seguinte estão representados os gráficos de algumas funções e respectivas derivadas:



Em (a) o sentido da concavidade muda no ponto a, i.e, a é ponto de inflexão de f. Repare-se que no intervalo onde f é convexa (resp. côncava), f' é crescente (resp. decrescente) .
Em (b) a função f é convexa (tem concavidade voltada para cima) e a função f' é crescente em $]-\infty, b[$ e em $]b, +\infty[$.
Note-se que a função f não é derivável no ponto $x = b$.
Em (c) a função f é côncava em $]-\infty, c[$ e convexa em $]c, +\infty[$. Apesar de não existir derivada de f em $x = c$, c é ponto de inflexão.

Exercícios Resolvidos

1. Estude os intervalos de concavidade da função $f(x) = x \ln |x|$.

Resolução:
Comecemos por determinar o domínio de f.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim, podemos definir a função f por ramos da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ x \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A derivada da função f é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e a segunda derivada de f por

$$f''(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Estudemos o sinal de f''

		0	
$f''(x)$	$-$	ND	$+$
$f(x)$	$\frown$	ND	$\smile$

Podemos concluir que f é

- convexa em $\mathbb{R}^+$
- côncava em $\mathbb{R}^-$
- não tem pontos de inflexão porque $0 \notin D_f$.

Exercícios Propostos

1. Estude a monotonia, os extremos e o sentido das concavidades das seguintes funções:
   (a) $f(x) = e^{x^3-3x}$;
   (b) $g(x) = x^3 - 6x^2$;
   (c) $h(x) = 1 + \sin(2x)$;
   (d) $r(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes. *Cálculo a Uma Variável — Uma Introdução Ao Cálculo*, volume I. Edições Loyola, São Paulo, Brasil, 2002.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes. *Cálculo a Uma Variável — Derivada e Integral*, volume II. Edições Loyola, São Paulo, Brasil, 2002.

Virgínia Santos. Apontamentos manuscritos de apoio à disciplina de calculo. (currículo antigo).

Jaime Carvalho e Silva. *Princípios de Análise Matemática Aplicada*. McGraw-Hill, Portugal, 1994.

Paula Rocha. *Cálculo*. Edição da Universidade de Aveiro, Portugal, 1994.

Serge Lang. *A First Course in Calculus*. Springer, New York, EUA, 1993.

Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 1982.

Joseph W. Kitchen. *Cálculo*. McGraw-Hill, Madrid, Espanha, 1986.