$\int a\,dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$	$\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ $1 \; (e)^{-3x}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
$\int f'(x) \cos(f(x))\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$	$\int f'(x) \operatorname{sen}(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + C$
$\int f'(x) \sec^2(f(x))\,dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C$ $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = \operatorname{tg}(f(x)) + C$	$\int f'(x) \operatorname{cosec}^2(f(x))\,dx = -\operatorname{cotg}(f(x)) + C$
$\int f'(x) \operatorname{tg}(f(x))\,dx = -\ln\lvert\cos(f(x))\rvert + C$	$\int f'(x) \operatorname{cotg}(f(x))\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen}(f(x))\rvert + C$
$\int f'(x) \operatorname{ch}(f(x))\,dx = \operatorname{sh}(f(x)) + C$	$\int f'(x) \operatorname{sh}(f(x))\,dx = \operatorname{ch}(f(x)) + C$
$\int f'(x) \operatorname{cosech}^2(f(x))\,dx = -\operatorname{coth}(f(x)) + C$	$\int f'(x) \operatorname{sech}^2(f(x))\,dx = \operatorname{th}(f(x)) + C$
$\int f'(x) \operatorname{th}(f(x))\,dx = \ln(\cosh(f(x))) + C$	$\int f'(x) \operatorname{coth}(f(x))\,dx = \ln\lvert\operatorname{sh}(f(x))\rvert + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}\,dx = \operatorname{argsh}(f(x)) + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}\,dx = \operatorname{argch}(f(x)) + C$

$C' = 0$, C constante	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$(e^x)' = e^x$	$\ln' x = \frac{1}{x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$
$\operatorname{sen}' x = \cos x$	$\cos' x = -\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$	$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$	$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$
$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$
$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x$	$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x$
$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

EDO → envolve derivadas de uma função dependente de 1 só variável.

EDO parcial → envolve derivadas parciais de uma função que depende de mais do que 1 variável.

$\frac{dx}{dt} = Kx$, $K \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ e $x(t)$.
→ função

EDO separável: $\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$, para algumas funções f e g. $\Rightarrow \int \frac{1}{f(x)}\,dx = \int g(t)\,dt$

Para verificar soluções, substituir na expressão inicial.

EDOs lineares → são da forma $a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = b(t)$

c/ $a_i(t)$ funções de t e $a_0(t) \neq 0$.

Resolução das de 1ª ordem: $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \Rightarrow x(t) = e^{-\int P(t)\,dt}\left[\int e^{\int P(t)\,dt} Q(t)\,dt + C\right]$ } resolução

ATENÇÃO: $a_0(t)\frac{dx}{dt} + a_1(t)x = b(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \overset{P(t)}{\frac{a_1(t)}{a_0(t)}}x = \overset{Q(t)}{\frac{b(t)}{a_0(t)}}$

Mudança de variável

Ex: $\frac{dx}{dt} + x = tx^3$ (EDO 1ª ordem não linear) multiplicar p/ x^{-3} → $x^{-3}\frac{dx}{dt} + \underbrace{x^{-2}}_{v} = t$ (transformar numa eq. linear)

$v = x^{-2}$ $\quad \frac{dv}{dt} = (-2)\frac{dx}{dt}x^{-3} \Rightarrow x^{-3}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}$

$-1/2\frac{dv}{dt} + v = t \Rightarrow \frac{dv}{dt}\underbrace{-2v}_{P_1(t)} = \underbrace{-2t}_{Q(t)}$

EDOs de ordem n lineares

$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = F(t)$

LEMA: f_1, f_2, f_m, soluções EDO, combinação linear $c_1f_1 + c_2f_2 + c_mf_m + \dots$ tb. é solução.

As m funções são l. independentes num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se: $c_1f_1 + c_2f_2 + \dots + c_mf_m = 0$, $\forall t \in I \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

DEFINIÇÃO Ao cjto. das funções l. independentes que são solução da EDO linear homogénea, chama-se cjto. fundamental de soluções e à solução: $x(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \dots + c_nf_n(t)$ chama-se solução geral da EDO.

Ao determinante $W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-2)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ chama-se Wronskiano das funções $f_1, f_2, \dots, f_m$.

PROPOSIÇÃO: As n funções são l. independentes em $I \subset \mathbb{R}$ se $W(f_1, f_2, \dots, f_n) \neq 0$, para algum $t \in I$.

EDOs lineares homogéneas c/ coeficientes $a_1, \dots, a_n$ ctes

$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = 0$, c/ $a_0, a_1, \dots, a_n$ ctes

a) Soluções da forma $x(t) = e^{mt}$.

b) Derivadas.

c) Substituir EDO e resolver

A) Q DO TEM RAÍZES DISTINTAS $m_1, m_2, \dots, m_n$

$e^{m_1t}, e^{m_2t}, \dots, e^{m_nt}$ são soluções da EDO.

l.i. pq. $m_1 \neq m_2 \dots$

$\{e^{m_1t}, e^{m_2t}, \dots, e^{m_nt}\}$ cjto. fundamental de sol. l. independentes.

Fica $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t} + \dots + c_{n-1}e^{m_{n-1}t} + c_ne^{m_nt}$, c/ $c_1, c_2, \dots,$ ctes arbitrárias

Eq. característica c/ algumas raízes reais iguais

2 raízes reais ='s, c/ as restantes $m_3, m_4, \dots, m_n \neq$'s. Prova-se que $x = t e^{mt}$ tb. é solução da EDO de ordem n.

Provar que $x_1(t) = e^{mt}$ e $x_2(t) = t e^{mt}$ são l.i. fazendo $w(e^{mt}, te^{mt})$

$\Delta < 0 \rightarrow$ ñ há zeros reais ($\mathbb{R}$)
$\Delta > 0 \rightarrow$ 2 zeros
$\Delta = 0 \rightarrow$ 1 zero (multip. 2)

solução geral da EDO:

$x(t) = c_1 e^{mt} + c_2 t e^{mt}$. Para ordem n:

$x(t) = c_1 e^{mt} + c_2 t e^{mt} + c_3 e^{m_3 t} + \dots + c_m e^{m_n t}$

(...) para raízes da eq. característica de multiplicidade $K \leq n$

soluções da EDO $e^{mt}, te^{mt}, t^2 e^{mt}, \dots, t^{K-1} e^{mt}$ l. independentes.

sol. geral $\Rightarrow x(t) = c_1 e^{mt} + c_2 t e^{mt} + \dots + c_K t^{K-1} e^{mt} + c_{K+1} e^{m_{K+1} t} + c_{K+2} e^{m_{K+2} t} + \dots + c_n e^{m_n t}$

(...) c/ raízes complexas $m = a \pm bi$ $\quad (e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \rightarrow$ fórmula de Euler.

$x(t) = e^{at} [(c_1 + c_2 t + \dots + c_K t^{K-1}) \cos(bt) + (c_{K+1} + c_{K+2} t + \dots + c_{2K} t^{K-1}) \operatorname{sen}(bt)]$

EDOs lineares não homogéneas

$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t) x = F(t) \quad (\neq 0)$

$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \rightarrow$ solução geral da EDO não homogénea

Método da variação das constantes (para encontrar x_p)

$x_H = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$

$x_p(t) = v_1(t) x_1(t) + v_2(t) x_2(t)$

$$\begin{cases} x_1 v_1' + x_2 v_2' = 0 \\ x_1' v_1' + x_2' v_2' = \frac{F(t)}{a_0(t)} \end{cases}$$

Para resolver o sistema:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ \frac{F(t)}{a_0 t} & x_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}} = \frac{-x_2 \frac{F(t)}{a_0 t}}{w(x_1, x_2)} \Rightarrow v_1(t) = -\int \frac{x_2 F(t)}{a_0 w} dt$$

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_1' & \frac{F(t)}{a_0 t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}} = \frac{x_1 \frac{F(t)}{a_0(t)}}{w(x_1, x_2)} \Rightarrow v_2(t) = \int \frac{x_1 F(t)}{a_0(t) w} dt$$

(para encontrar x_p).

Método dos coeficientes indeterminados (para encontrar x_p)

Dada 1 EDO qq. desde que linear e não homogénea, basta:

1) Determinar x_H

2) Determinar x_p, assumindo $x_p(t) = \underbrace{A}_{\text{coeficiente a determinar}} F(t)$

Substituir na equação. Tirar o coeficiente. Tiramos a solução particular.

Que F(t)'s considerar?

t^n se $n > 0$
e^{at}, $a \neq 0$
$\operatorname{sen}(at+b)$, $a \neq 0$
$\cos(at+b)$, $a \neq 0$

funções CI (coeficientes indeterminados)

Cjto. CI $\rightarrow$ cjto de todas as funções l. independentes que resultam de derivadas de f.

Qq. que função que resulte do produto de 1 ou mais funções destas pode ser considerada. constituído p/ f e todas as

Integração p/partes

$\int f'(x) g(x) = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$.

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sin	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

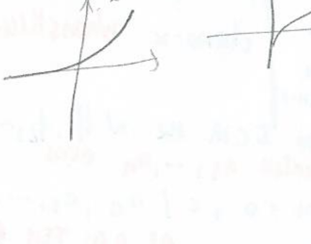
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\log X + \log Y = \log(XY)$

$\log X - \log Y = \log\left(\frac{X}{Y}\right)$

$P \log X = \log X^P$



$\frac{dx}{dt} + P(t) x = Q(t)$

Multip. p/ fator integrante $\mu(t) = e^{\int P(t) dt}$

$\underbrace{e^{\int P dt}}_{\mu} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v'} + \underbrace{P e^{\int P dt}}_{\mu'} x = e^{\int P dt} Q$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{e^{\int P dt}}_{\mu} \underbrace{x}_{v} \right) = e^{\int P dt} Q$

$\Rightarrow e^{\int P dt} x = \int e^{\int P dt} Q \, dt + C$

$\Rightarrow x = e^{-\int P dt} \left[\int e^{\int P dt} Q \, dt + C \right]$