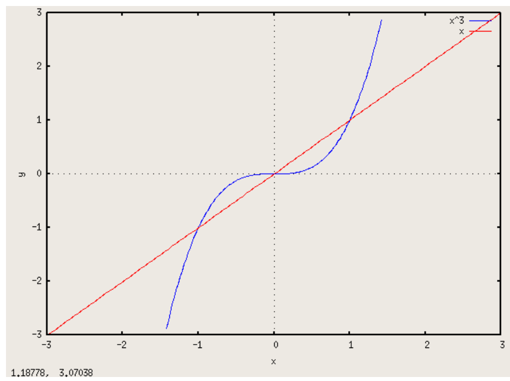
Introdução aos Sistemas Dinâmicos

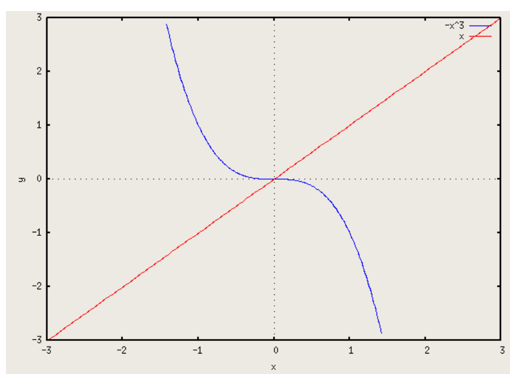
Sistemas Dinâmicos Discretos

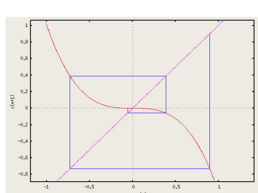
1. Em cada alínea estude a dinâmica do sistema dinâmico $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

(a) $f(x) = x^3$

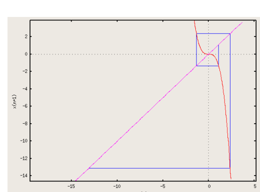


(b) $f(x) = -x^3$

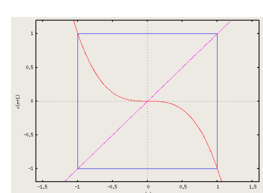




$x_0 = 0.9$

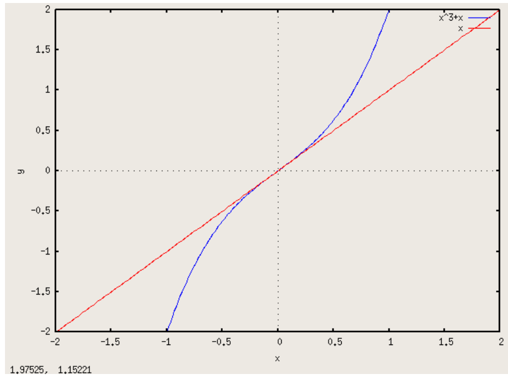


$x_0 = 1.1$

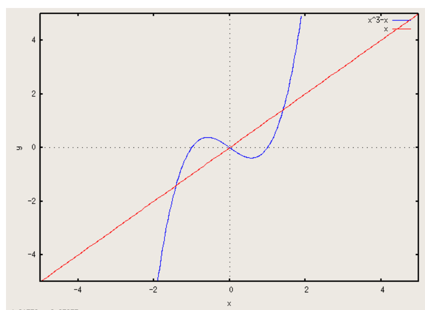


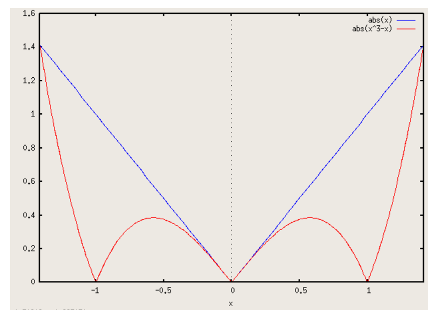
$x_0 = 1$

(c) $f(x) = x^3 + x$



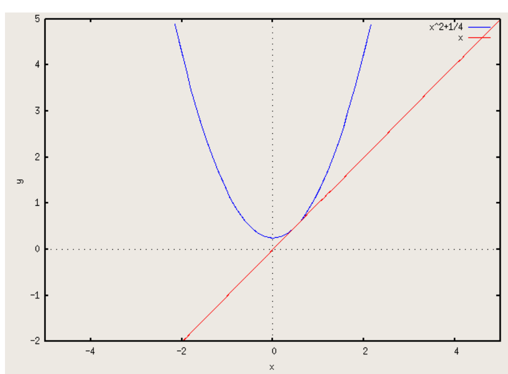
(d) $f(x) = x^3 - x$



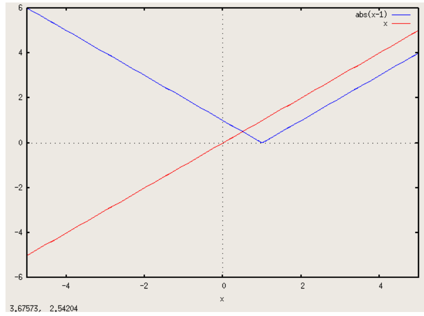


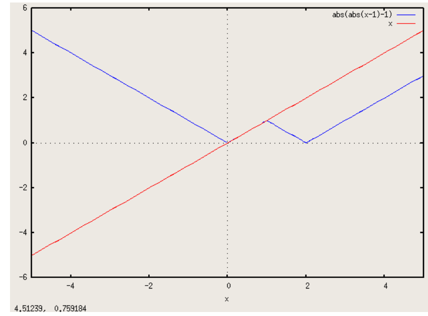
f $|f|$

(e) $f(x) = x^2 + 1/4$



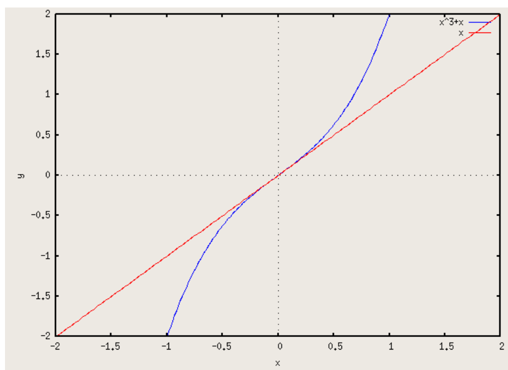
(f) $f(x) = |x - 1|$



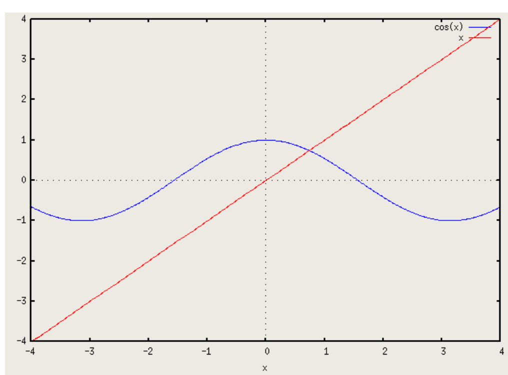


f $\qquad$ f^2

(g) $f(x) = \text{sen}x$



(h) $f(x) = \cos x$



Utilize o Maxima para prever a evolução da dinâmica de cada um dos sistemas.

2. Dê exemplo de, ou justifique por que não existe:

   (a) Um sistema dinâmico $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que não tenha pontos fixos.

   (b) Um sistema dinâmico contínuo $f :]0,3[\longrightarrow]0,3[$ que não tenha pontos fixos.

   (c) Um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não tenha pontos fixos.

3. Em cada alínea, apresente um exemplo de um sistema dinâmico contínuo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

   (a) $W^s(0) =]-1,1[$.

   (b) $\omega(x) = \{1\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\omega(x) = \varnothing$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $\omega(2) = \{-2,2\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (e) O conjunto $[-1,1]$ não contém pontos periódicos.

   (f) $\sqrt{3}$ é um ponto periódico de período 2.

   (g) f tem um único ponto fixo x e $W^s(x) = \mathbb{R}$.

   (h) Todo o ponto da recta é periódico.

   (i) Todo o ponto da recta é recorrente.

   (j) Todo o ponto da recta é não-errante.

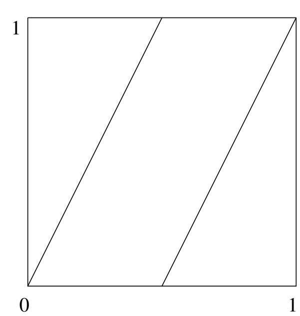
   (k) Nenhum ponto da recta é periódico.

   (l) Nenhum ponto da recta é recorrente.

   (m) O conjunto dos pontos recorrentes é $[0,2]$.

4. Apresente um exemplo de um sistema dinâmico $f : [0,1[\longrightarrow [0,1[$ que seja uma contracção sem pontos fixos.

5. Considere o sistema dinâmico $f(x) = 2x \pmod 1$, $x \in [0,1[$.

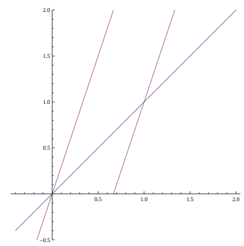


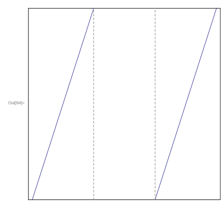
   (a) Mostre que $f(x) = (.s_2 s_3 \cdots)_2$, para todo $x = (.s_1 s_2 s_3 \cdots)_2$.

   (b) Encontre os pontos fixos (caso existam) e os pontos periódicos de período $p = 2$ e $p = 3$ (caso existam) de f.

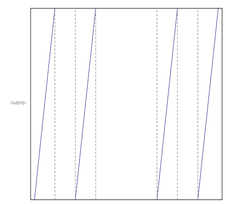
   (c) Apresente um exemplo de um ponto cuja órbita por f não seja periódica.

6. Considere o sistema dinâmico $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 2/3 \\ 3x - 2 & \text{se } x \geq 2/3 \end{cases}$

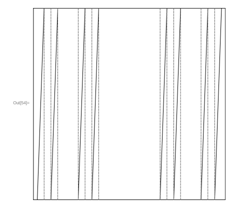




f



f^2



f^3

   (a) Caracterize o conjunto dos pontos do intervalo unitário cuja primeira iterada pertence ainda a esse intervalo.

   (b) Caracterize o conjunto dos pontos do intervalo unitário cuja iterada n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pertence ainda a esse intervalo.

   (c) Caracterize o conjunto invariante maximal de f.

7. Para cada uma dos seguintes sistemas dinâmicos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determine os pontos fixos e indique quais são atractivos e quais são repulsivos:

   (a) $f(x) = x^2 - x/2$

   (b) $f(x) = 4x - x^2$

   (c) $f(x) = x^2 - 1$

   (d) $f(x) = \text{sen}x$

   (e) $f(x) = x + x^3$

   (f) $f(x) = x - x^3$

   (g) $f(x) = x + x^2$

   (h) $f(x) = x - x^2$

   (i) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se} \quad x > 1/2 \end{cases}$

   (j) $f(x) = e^x - 1$

8. Considere o sistema dinâmico $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Mostre que $W^s(1) = \mathbb{R}^+$.

9. Em cada alínea, apresente um exemplo de um sistema dinâmico contínuo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

   (a) $\sqrt{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

   (b) $\sqrt{3}$ é um ponto fixo atractivo.

   (c) π e $-\pi$ são pontos fixos repulsivos.