LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Exame - 21/02/07**

Nome: ____ **Número:** _________

****
IMPORTANTE: *A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por nove exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VIII e IX devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,6 valores e cada resposta errada desconta 0,3 valores.*
****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
□	□	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
□	□	$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
□	□	$((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (r \vee q)$
□	□	$p \Rightarrow \neg p$
□	□	$(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

II. Considere o conjunto $A = \{1, 2, \{1, 3\}\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
□	□	$A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$
□	□	$A \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$
□	□	$\{1, 2\} \in A \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})$
□	□	$\{1, 2\} \in A \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N})$
□	□	$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \emptyset$

III. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $f(k) = (k^2, -k + 1)$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
□	□	A função f é injectiva.
□	□	A função f é sobrejectiva.
□	□	Existe uma função $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$.
□	□	Existe $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f^{-1}(A) = \emptyset$.

IV. Considere a relação R em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por

$$XRY \Leftrightarrow \text{existe uma função injectiva } f : X \to Y.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
□	□	R é reflexiva.
□	□	R é simétrica.
□	□	R é anti-simétrica.
□	□	R é transitiva.

V. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	Para toda a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{Z}$ tem-se: $\forall k \in \mathbb{Z} \quad [k] \cap [2] \neq \emptyset \Rightarrow k \sim 2$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}/\sim = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}/\sim = \{[2], [3]\}$
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}/\sim = \emptyset$.

VI. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$ em que

$$\preceq \quad = \quad \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,3), (2,5), (2,4), (1,3), (1,5), (1,4), (5,4)\}.$$

(a) (0,6 valores) Indique o diagrama de Hasse de $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$:

(b) (0,6 valores) Indique os elementos maximais de $\{2, 3, 4\}$:

____

VII. Indique se a seguinte afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F):

V	F	
☐	☐	Num grafo simples o grau de cada vértice é menor do que o número de vértices.

VIII. (2,5 valores) Mostre que, para todo o número natural $n \geq 2$, $n^2 + n < n^3 + 1$.

IX. (2,5 valores) Verdadeiro ou falso? Para qualquer função $f : X \to Y$ e quaisquer dois subconjuntos $A, B \subseteq X$ tem-se $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Justifique a sua resposta.