Engenharia Informática **Teste 1 – Modelo – Proposta de resolução** ISD(2010/2011)

Parte I

Na parte I do teste não será pedido apresentar os cálculos auxiliares.

1. A função $y(t) = e^{t^2}$:

   ☐ é solução da EDO $y' = 2y$

   ☒ é solução da EDO $y' = 2ty$

   ☐ não é solução de nenhuma das EDOS anteriores.

   Cálculos auxiliares:

   Se $y(t) = e^{t^2}$ *então* $y'(t) = 2te^{t^2}$, *para todo o* $t \in \mathbf{R}$ *pelo que*

   $$y'(t) = 2te^{t^2} = 2ty(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

2. A função $y(t) = t\ln(2t)$ é solução da EDO $y' - \frac{1}{t}y = a$

   ☒ se $a = 1$

   ☐ se $a = 2$

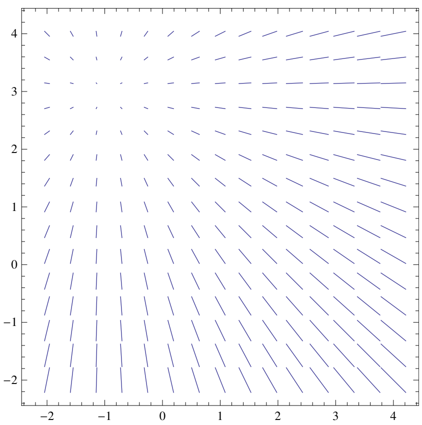
   ☐ y não é solução para nenhum dos valores anteriores.

   Cálculos auxiliares:

   A função $y(t) = t\ln(2t)$ *verifica* $y'(t) = \ln(2t) + 1$. *Assim*

   $$y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = \ln(2t) + 1 - \frac{1}{t}t\ln(2t) = 1$$

3. O campo de direcções



corresponde à EDO

☒ $y' = \dfrac{y-3}{t+1}$

☐ $y' = 4$;

☐ $y' = t$.

Cálculos auxiliares:

A soluções da EDO $y' = 4$ têm declive constante em todos os pontos (igual a 4) e as soluções da EDO $y' = t$ têm declive constante ao longo das rectas verticais (mesma coordenada t). Por outro lado, observa-se que no campo de direcções apresentado as soluções têm declive nulo nos pontos com coordenada $y = 3$ e tendem a ser verticais quando nos aproximarmos dos pontos com coordenada $t = -1$.

Resolução alternativa:

Trata-se de uma EDO separável que podemos resolver:

- *A solução constante é $y(t) = 3$, para todo $t \in \mathbf{R}$.*
- *As soluções não constantes verificam*

$$\frac{y'}{y-3} = \frac{1}{t+1}$$

donde $\ln(|y-3|) = \ln(|t+1|) + C$ e então

$$y(t) = K(t+1) + 3$$

com K constante. Assim, as soluções desta EDO são as rectas que passam pelo ponto $(-1, 3)$.

4. A mudança de variável $u = y^2 + t$ transforma a EDO $y' = \dfrac{ty^2 + t^2 - 1}{2y}$

   ☐ na EDO $u' = tu - 1$

   ☒ na EDO $u' = tu$

   ☐ na EDO $u' = 2tu$.

   Cálculos auxiliares:

   Se $u = y^2 + t$ então $u' = 2yy' + 1$. A EDO indicada pode escrever-se

$$2yy' = ty^2 + t^2 - 1$$

   ou, equivalentemente, $2yy' + 1 = ty^2 + t^2$. Como $u' = 2yy' + 1$ e $ty^2 + t^2 = t(y^2 + t)$ obtemos

$$u' = tu$$

Parte II

Considere a EDO de primeira ordem:

$$y' - ty = -ty^3$$

1. Resolva a EDO encontrando a solução geral.

   (Sugestão: multiplique a equação por y^{-3} e efectue a mudança de variável $u = y^{-2}$.)

2. Determine a solução desta EDO que verifica $y(0) = -2$. Determine a solução desta EDO que verifica $y(0) = -2$. Qual o intervalo aberto maximal onde está definida esta solução?

Resolução:

1. *Multiplicando a equação por y^{-3} obtemos a EDO*

   $$y^{-3}y' - ty^{-2} = -t$$

   Se $u = y^{-2}$ então $u' = -2y^{-3}y'$. Multiplicando ainda a EDO anterior por -2 obtemos

   $$-2y^{-3}y' + 2ty^{-2} = +2t$$

   Efectuando a mudança de variável indicada obtemos

   $$u' + 2tu = +2t$$

   Resolvemos esta EDO lineal: uma primitiva de $a(t) = 2t$ é $A(t) = t^2$. Como

   $$\int 2te^{t^2}dt = e^{t^2} + C$$

   obtemos $u(t) = e^{-t^2}(e^{t^2} + C) = 1 + Ce^{-t^2}$ donde $y(t)^2 = \dfrac{1}{1 + Ce^{-t^2}}$ e portanto

   $$y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-t^2}}}$$

   ou $y(t) = 0$ (solução perdida ao multiplicar por y^{-3}).

2. *Se $y(0) = -2$ então $y(t)$ deve ser da forma $y(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-t^2}}}$, verificando*

   $$-2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + Ce^0}}$$

   pelo que $\sqrt{1 + C} = 1/2$ e $C = 1/4 - 1 = -3/4$, donde

   $$y(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - 3/4e^{-t^2}}}$$

   A solução está definida para $1 - 3/4e^{-t^2} > 0$, ou seja $4/3 > e^{-t^2}$ ou, equivalentemente,

   $$\ln(4/3) > -t^2$$

   Como $\ln(4/3)$ é positivo e $-t^2$ é sempre negativo, o domínio é $\mathbf{R}$.