Nome: ____ **Número:** _______ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por oito exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VIII deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	A correspondência $x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 4x-4 & \text{se} \quad x \leq 2 \end{cases}$ define uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	A correspondência $n \mapsto (n, n-3)$ define uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	A correspondência $X \mapsto \begin{cases} X \cup \{1,2\} & \text{se} \quad X \subseteq \{1,2,3\} \\ X \cap \{1,2\} & \text{se} \quad \{1,2\} \subseteq X \end{cases}$ define uma função $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

II. Considere as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ dadas por $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se} \quad x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 4 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$

e $g(x) = x + 4$.

(a) (0,75 valores) Tem-se $f(\{1,3,4\}) =$ {2,4}

(b) (0,75 valores) Tem-se $f^{\leftarrow}(\{1,2\}) =$ {1,4}

(c) (0,75 valores) A função composta $f \circ g$ é dada por: $\begin{array}{rl} f \circ g : & \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \\ & x \mapsto x + 2 \end{array}$

(Na alínea (c) indique o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida em II. e a função $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $g(X) = \mathbb{N} \setminus X$, para todo $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	f é injetiva.
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	f é sobrejetiva.
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	g é bijetiva.

IV. Seja R a relação binária em $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$X\,R\,Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset, \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	R é reflexiva.
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	R é simétrica.
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	R é anti-simétrica.
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	R é transitiva.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 3k.$$

(a) Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(i) (0,75 valores) $[-4] = \{y \in A : -4 \sim y\} = \{y \in A : \exists k \in \mathbb{Z}, -4 - y = 3k\} = \{-4, -1, 2\}$

(ii) (0,75 valores) $[0] = \{y \in A : 0 \sim y\} = \{y \in A : \exists k \in \mathbb{Z}, 0 - y = 3k\} = \{-3, 0, 3\}$

(b) (0,75 valores) Determine o conjunto quociente $A/\sim$.

Uma vez que $[-4] = [-1] = [2]$, $[0] = [-3] = [3]$ e $[1] = \{-2, 1, 4\} = [-2] = [4]$, tem-se

$A/\sim = \{[x] : x \in A\} = \{[0], [1], [2]\} = \{\{-3, 0, 3\}, \{-2, 1, 4\}, \{-4, -1, 2\}\}$.

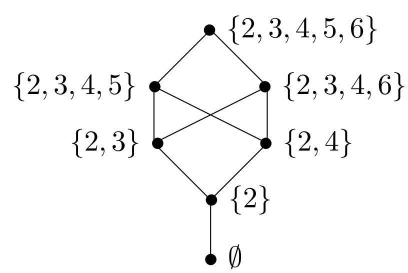
VI. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☒	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\mathbb{N} \setminus \{2,3,4\}, \{3,4\}\}$.
☐	☒	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $[2]_\sim \cup [3]_\sim = \{3,4,5\}$.
☒	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$.

VII. Considere os conjuntos

$$P = \{\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}\} \text{ e}$$
$$S = \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}.$$

(a) (0,75 valores) Desenhe o diagrama de Hasse do c.p.o. $(P, \subseteq)$ onde $\subseteq$ é a relação de inclusão.



(b) (0,75 valores) Determine, caso existam, os majorantes e os minorantes de S.

Minorantes de S: $\emptyset$, $\{2\}$;

Majorantes de S: $\{2,3,4,5\}$, $\{2,3,4,6\}$, $\{2,3,4,5,6\}$.

(c) (0,75 valores) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de S.

Supremo de S: não existe; Ínfimo de S: $\{2\}$.

VIII. (a) (1,5 valores) (Verdadeiro ou Falso?) Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Se g é sobrejetiva, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

(b) (2 valores) Mostre por indução que, para todo o número natural $n \geq 1$,

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Nome: ____ **Número:** _______ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por oito exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VIII deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\square$	$\boxtimes$	A correspondência $n \mapsto (n-2, n)$ define uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$\boxtimes$	$\square$	A correspondência $x \mapsto \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ 4x-3 & \text{se} \quad x \leq 3 \end{cases}$ define uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
$\square$	$\boxtimes$	A correspondência $X \mapsto \begin{cases} X \cup \{2,3\} & \text{se} \quad X \subseteq \{2,3,4\} \\ X \cap \{2,3\} & \text{se} \quad \{2,3\} \subseteq X \end{cases}$ define uma função $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

II. Considere as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ dadas por $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ 3 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$

e $g(x) = x + 4$.

(a) (0,75 valores) Tem-se $f(\{1,2,3\}) =$ {1,3}

(b) (0,75 valores) Tem-se $f^{\leftarrow}(\{0,1\}) =$ {1,2}

(c) (0,75 valores) A função composta $f \circ g$ é dada por: $\begin{array}{rl} f \circ g : & \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z} \\ & x \mapsto x+3 \end{array}$

(Na alínea (c) indique o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida em II. e a função $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $g(X) = \mathbb{N} \setminus X$, para todo $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxtimes$	$\square$	g é bijetiva.
$\square$	$\boxtimes$	f é injetiva.
$\square$	$\boxtimes$	f é sobrejetiva.

IV. Seja R a relação binária em $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$X \, R \, Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset, \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxtimes$	$\square$	R é reflexiva.
$\square$	$\boxtimes$	R é transitiva.
$\boxtimes$	$\square$	R é simétrica.
$\square$	$\boxtimes$	R é anti-simétrica.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 3k.$$

(a) Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(i) (0,75 valores) $[-2] = \{y \in A : -2 \sim y\} = \{y \in A : \exists k \in \mathbb{Z}, -2 - y = 3k\} = \{-2, 1, 4\}$

(ii) (0,75 valores) $[3] = \{y \in A : 3 \sim y\} = \{y \in A : \exists k \in \mathbb{Z}, 3 - y = 3k\} = \{-3, 0, 3\}$

(b) (0,75 valores) Determine o conjunto quociente $A/\sim$.

Uma vez que $[-2] = [1] = [4]$, $[3] = [0] = [-3]$ e $[2] = \{-4, -1, 2\} = [-4] = [-1]$, tem-se

$A/\sim = \{[x] : x \in A\} = \{[0], [1], [2]\} = \{\{-3, 0, 3\}, \{-2, 1, 4\}, \{-4, -1, 2\}\}$.

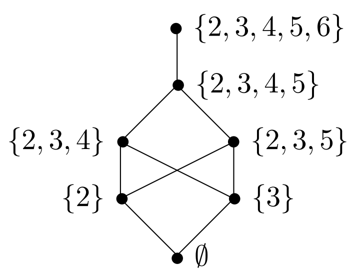
VI. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxtimes$	$\square$	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$.
$\square$	$\boxtimes$	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\mathbb{N} \setminus \{2,3,4\}, \{2,4\}\}$.
$\square$	$\boxtimes$	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $[3]_\sim \cup [4]_\sim = \{4, 5, 6\}$.

VII. Considere os conjuntos

$$P = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}\} \text{ e}$$
$$S = \{\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}\}.$$

(a) (0,75 valores) Desenhe o diagrama de Hasse do c.p.o. $(P, \subseteq)$ onde $\subseteq$ é a relação de inclusão.



(b) (0,75 valores) Determine, caso existam, os majorantes e os minorantes de S.

Minorantes de S: $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$;

Majorantes de S: $\{2,3,4,5\}$, $\{2,3,4,5,6\}$.

(c) (0,75 valores) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de S.

Ínfimo de S: não existe; Supremo de S: $\{2,3,4,5\}$.

VIII. (a) (1,5 valores) (Verdadeiro ou Falso?) Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Se g é sobrejetiva, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

A afirmação é falsa.
Contra-exemplo: Sejam $A = B = C = \mathbb{R}$ e f e g as funções definidas, respetivamente, por

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} B & \to & C \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

$$\forall y \in C\ \exists x = y \in B,\ g(x) = y$$

e, no entanto, a função $g \circ f$, definida por

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & g(f(x)) = x^2 \end{array},$$

não é sobrejetiva, pois

$$\exists y = -1 \in B\, \forall x \in A, (g \circ f)(x) \neq y.$$

(Com efeito, $-1 = (g \circ f)(x)$ se e só se $x^2 = -1$, mas esta equação não tem solução em $A = \mathbb{R}$).

(b) (2 valores) Mostre por indução que, para todo o número natural $n \geq 1$,

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$". A prova de que $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$ é feita recorrendo ao Princípio de Indução nos Naturais.

(1) Base de indução (n=1): Pretendemos provar que $p(1)$ é verdadeiro. De facto,

$$2^0 + 2^1 = 3 = 2^{(1+1)} - 1$$

pelo que $p(1)$ é verdadeiro.

(2) Passo de indução: Pretendemos mostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$p(k) \Rightarrow p(k+1).$$

Com efeito, se assumirmos, por hipótese de indução, que $p(k)$ é verdadeiro, ou seja, que $2^0 + 2^1 + \ldots 2^k = 2^{(k+1)} - 1$, tem-se

$$2^0 + 2^1 + \ldots 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

e, portanto, $p(k+1)$ é verdadeiro. Desta forma, provámos que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$p(k) \Rightarrow p(k+1).$$

De (1) e (2) concluímos, pelo Princípio de Indução nos Naturaisfi, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeiro.