Teste 2 de Análise - LEI

22/06/2013

Proposta de correcção

Parte I

Exercício 1

a) $\nabla f(x,y)=(0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 8y-(x+y)^3=0 \\ 8x-(x+y)^3=0 \end{cases} \begin{cases} 8y=8x \\ — \end{cases}$

$\begin{cases} y=x \\ 8x-8x^3=0 \end{cases} \begin{cases} — \\ 8x(1-x^2)=0 \end{cases} \begin{cases} — \\ x=0 \vee x^2=1 \end{cases} \begin{cases} y=x \\ x=0 \vee x=1 \vee x=-1 \end{cases}$

As soluções do sistema são os pontos $A=(0,0)$, $B=(1,1)$ e $C=(-1,-1)$

b) $$\text{Hess}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} -3(x+y)^2 & 8-3(x+y)^2 \\ 8-3(x+y)^2 & -3(x+y)^2 \end{pmatrix}$$

$\det \text{Hess}_{(0,0)} f = -64 < 0$, logo $(0,0)$ é ponto de sela

$\det \text{Hess}_{(1,1)} f = 144-16 = 128 > 0$. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -12 < 0$,

então $(1,1)$ é maximizante de f

$\det \text{Hess}_{(-1,-1)} f = 144-16=128>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -12 < 0$,

logo $(-1,-1)$ é maximizante de f

Exercício 2 Sejam $f(x,y) = x^2+y^2$ e $\Sigma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=3\}$.
Os extremos procurados estão entre as soluções dos sistemas

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (x,y) \in \Sigma_3 \\ \nabla f(x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} (x,y) \in \Sigma_3 \\ \nabla g(x,y) = \lambda \nabla f(x,y) \end{cases}$$

Resolução de (I)

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Sistema impossível

Resolução de (II)

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ 2xy = 2\lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \end{cases} \begin{cases} — \\ 2x(y-\lambda)=0 \\ — \end{cases} \begin{cases} — \\ x=0 \ \vee\ y=\lambda \\ — \end{cases}$$

$\boxed{x=0}$

$$\begin{cases} y^2=3 \\ 2\lambda y=0 \end{cases} \begin{cases} y=3 \ \vee\ y=-3 \\ \lambda=0 \end{cases}$$

Obtemos os pontos $A=(0,3)$ e $B=(0,-3)$

$\boxed{y=\lambda}$

$$\begin{cases} x^2+\lambda^2=3 \\ x^2=2\lambda^2 \end{cases} \begin{cases} 3\lambda^2=3 \\ — \end{cases} \begin{cases} \lambda=1 \ \vee\ \lambda=-1 \\ x^2=2 \end{cases} \begin{cases} — \\ x=\sqrt{2} \ \vee\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

Obtemos, assim, os pontos $C=(\sqrt{2},1)$, $D=(\sqrt{2},-1)$, $E=(-\sqrt{2},1)$, $F=(-\sqrt{2},-1)$

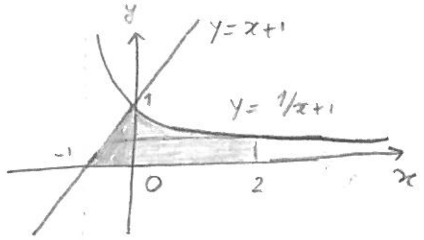
$f(0,3)=0$ $\quad f(\sqrt{2},1)=2$ $\quad f(\sqrt{2},-1)=-2$

$f(0,-3)=0$ $\quad f(-\sqrt{2},1)=2$ $\quad f(-\sqrt{2},-1)=-2$

Então $\max f|_{\Sigma_3} = 2$ e $\min f|_{\Sigma_3} = -2$.

Exercício 3

a)



b) Comecemos por determinar a intersecção da reta $x=2$ com a curva $y=\frac{1}{x+1}$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{x+1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

$y = x+1 \Leftrightarrow x = y-1$

$y=\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x+1 = 1/y \Leftrightarrow x = 1/y - 1$

$$I = \int_0^{1/3}\int_{1-y}^{2} dx\,dy + \int_{1/3}^{1}\int_{1-y}^{1/y-1} dx\,dy$$

c)
$$I = \int_{-1}^{0}\int_0^{x+1} dy\,dx + \int_0^2\int_0^{1/x+1} dy\,dx = \int_{-1}^{0}\left[y\right]_{y=0}^{y=x+1} dx + \int_0^2 \left[y\right]_{y=0}^{y=1/x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x+1)\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2 + \left[\log(x+1)\right]_0^2 = 4+\log 3$$

PARTE II

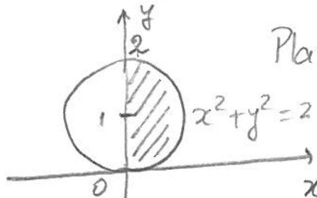
Exercício 4

a) $0 \le z \le 1$

$x^2+y^2=2y \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$ circunferência de centro em $(0,1)$ e raio 1.

Corte de S por $z=z_0$

Plano $z=z_0$



$x^2+y^2=2y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2y-y^2}$

$$\iiint_S x\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\,dy\,dz$$

b)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \le z \le 1 \\ x^2+y^2 \le 2y \end{cases} \quad \begin{cases} \rho\cos\varphi \geq 0 \\ 0 \le z \le 1 \\ \rho^2 \le 2\rho\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ \cos\varphi \geq 0 \\ \rho \le 2\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \rho \le 2\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\iiint_S x\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\varphi} \rho\cdot\rho\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\right]_{\rho=0}^{\rho=2\,\mathrm{sen}\varphi} d\varphi\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\,\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^1\left[\frac{\mathrm{sen}^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} dz = \frac{8}{3}\int_0^1 \frac{1}{4}\,dz = \frac{2}{3}\left[z\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Exercícios

a) $F_1(x,y) = 4xy \quad , F_2(x,y) = 2x^2$

Como $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 4x = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, o campo vetorial F é conservativo.

Pretendemos encontrar f tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \Rightarrow f(x,y) = 2x^2y + g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + g'(y) = 2x^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Então $\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 2x^2y \end{aligned}$ é uma função potencial do campo F.

b) $\begin{aligned} c: [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^2) \end{aligned}$ é uma parametrização da curva

$$\int_C F \cdot ds = \int_0^1 F(c(t)) \cdot c'(t)\,dt = \int_0^1 F(t,t^2) \cdot (1,2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t^3, 2t^4) \cdot (1,2t)\,dt = \int_0^1 (4t^3 + 4t^4)\,dt$$

$$= \left[t^4 + 4\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$