LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Teste 2, Versão A - 18/01/2012**

Nome: ____ **Número:** _______ **TP:** __

****
IMPORTANTE: *A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por oito exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VIII deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*
****

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ A correspondência $x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 4x-4 & \text{se} \quad x \leq 2 \end{cases}$ define uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

☐ ☐ A correspondência $n \mapsto (n, n-3)$ define uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

☐ ☐ A correspondência $X \mapsto \begin{cases} X \cup \{1,2\} & \text{se} \quad X \subseteq \{1,2,3\} \\ X \cap \{1,2\} & \text{se} \quad \{1,2\} \subseteq X \end{cases}$ define uma função $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

II. Considere as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ dadas por $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se} \quad x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 4 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ e $g(x) = x + 4$.

(a) (0,75 valores) Tem-se $f(\{1,3,4\}) =$ ______________________________

(b) (0,75 valores) Tem-se $f^{\leftarrow}(\{1,2\}) =$ ______________________________

(c) (0,75 valores) A função composta $f \circ g$ é dada por: ______________________

(Na alínea (c) indique o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida em II. e a função $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $g(X) = \mathbb{N} \setminus X$, para todo $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ f é injetiva.

☐ ☐ f é sobrejetiva.

☐ ☐ g é bijetiva.

IV. Seja R a relação binária em $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$X R Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset, \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ R é reflexiva.

☐ ☐ R é simétrica.

☐ ☐ R é anti-simétrica.

☐ ☐ R é transitiva.

V. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x \leq 4\}$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 3k.$$

(a) Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(i) (0,75 valores) $[-4] \quad =$ ______________________________

(ii) (0,75 valores) $[0] \quad =$ ______________________________

(b) (0,75 valores) Determine o conjunto quociente $A/\sim$.

____

VI. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\mathbb{N} \setminus \{2,3,4\}, \{3,4\}\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $[2]_\sim \cup [3]_\sim = \{3,4,5\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim\, = \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$.

VII. Considere os conjuntos

$$P = \{\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}\} \text{ e}$$
$$S = \{\{2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}.$$

(a) (0,75 valores) Desenhe o diagrama de Hasse do c.p.o. $(P, \subseteq)$ onde $\subseteq$ é a relação de inclusão.

(b) (0,75 valores) Determine, caso existam, os majorantes e os minorantes de S.

____

(c) (0,75 valores) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de S.

____

VIII. (a) (1,5 valores) (Verdadeiro ou Falso?) Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Se g é sobrejetiva, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

(b) (2 valores) Mostre por indução que, para todo o número natural $n \geq 1$,

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Teste 2, Versão B - 18/01/2012**

Nome: ____ **Número:** _______ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por oito exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VIII deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

□ □ A correspondência $n \mapsto (n-2, n)$ define uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

□ □ A correspondência $x \mapsto \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ 4x-3 & \text{se} \quad x \leq 3 \end{cases}$ define uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

□ □ A correspondência $X \mapsto \begin{cases} X \cup \{2,3\} & \text{se} \quad X \subseteq \{2,3,4\} \\ X \cap \{2,3\} & \text{se} \quad \{2,3\} \subseteq X \end{cases}$ define uma função $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

II. Considere as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ dadas por $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \neq 1 \land x \neq 3 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ 3 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ e $g(x) = x + 4$.

(a) (0,75 valores) Tem-se $f(\{1,2,3\}) =$ ____________________________

(b) (0,75 valores) Tem-se $f^{\leftarrow}(\{0,1\}) =$ ____________________________

(c) (0,75 valores) A função composta $f \circ g$ é dada por: ____________________________

(Na alínea (c) indique o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida em II. e a função $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $g(X) = \mathbb{N} \setminus X$, para todo $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

□ □ g é bijetiva.

□ □ f é injetiva.

□ □ f é sobrejetiva.

IV. Seja R a relação binária em $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$X R Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset, \ \ \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

□ □ R é reflexiva.

□ □ R é transitiva.

□ □ R é simétrica.

□ □ R é anti-simétrica.

V. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x \leq 4\}$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 3k.$$

(a) Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(i) (0,75 valores) $[-2] \quad =$ ______________________________

(ii) (0,75 valores) $[3] \quad =$ ______________________________

(b) (0,75 valores) Determine o conjunto quociente $A/\sim$.

____

VI. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim\, = \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/\sim = \{\mathbb{N} \setminus \{2,3,4\}, \{2,4\}\}$.
☐	☐	Existe uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$ tal que $[3]_\sim \cup [4]_\sim = \{4,5,6\}$.

VII. Considere os conjuntos

$$P = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}\} \text{ e}$$
$$S = \{\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}\}.$$

(a) (0,75 valores) Desenhe o diagrama de Hasse do c.p.o. $(P, \subseteq)$ onde $\subseteq$ é a relação de inclusão.

(b) (0,75 valores) Determine, caso existam, os majorantes e os minorantes de S.

____

(c) (0,75 valores) Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de S.

____

VIII. (a) (1,5 valores) (Verdadeiro ou Falso?) Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Se g é sobrejetiva, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

(b) (2 valores) Mostre por indução que, para todo o número natural $n \geq 1$,

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$