Folha 4 (Proposta de resolução, 2009/2010)

4.1 – a) $f'(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$. $f'(1) = 2$.

A recta tangente à parábola de equação $y = x^2$, no ponto de abcissa 1, possui declive 2.

b) Recta que passa por $(-1, f(-1))$ com declive $f'(-1)$. Mas

$$f(-1) = 1 \quad e \quad f'(-1) = -2,$$

pelo que a recta possui equação

$$y = 1 - 2(x+1) \Rightarrow y = -2x - 1.$$

4.2 – Em cada intervalo centrado em 1, há pontos

$$x < 1 \qquad \text{onde} \qquad f(x) = x^2$$

e pontos

$$x > 1 \qquad \text{onde} \qquad f(x) = 2 - x.$$

Então é necessário recorrer à definição de existência de derivada num ponto. Temos

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (-1) = -1$$

donde concluimos que f não é derivável em 1.

4.3 – a) $y' = 6x^2 - 2x$ b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \pi x^{\pi - 1}$

c) $y = -\sqrt{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ d) $y' = -\frac{2}{x^3}$

e) $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ f) $y' = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x \cdot x^3}{(x^2-4)^2}$

g) $y' = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2}$ h) $y' = 3x^2e^x - x^3e^x$

i) $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ K) $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

j) $\ln(x^2+x+1) + x \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ l) $y' = \sec^2 x$

m) $y' = \dfrac{(e^x \operatorname{sen}x + e^x \cos x)\ln x - \frac{1}{x} e^x \operatorname{sen} x}{(\ln x)^2}$ n) $y' = \cos x \, e^{\operatorname{sen} x}$

o) $y' = (\cos(x^2))' \cos(\cos(x^2)) = -2x \operatorname{sen}(x^2)\cos(\cos(x^2))$

p) $y' = -\frac{2}{3}x^{-5/3}e^x \operatorname{sen} x + x^{-2/3}e^x \operatorname{sen} x + x^{-2/3}e^x \cos x$

4.4 a) Tal ponto x corresponde a $f(x)=0$, i.e. $1-e^x=0$, que dá $x=0$. Logo o ponto é $(0,0)$.

b) A recta pedida passa por $(1, f(1))$ com declive $-1/f'(1)$. Mas

$$f(1) = 1-e, \quad f'(x) = -e^x, \quad f'(1) = -e,$$

e uma equação da recta é

$$y = 1-e+\frac{1}{e}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x + 1 - e - \frac{1}{e}.$$

4.5 - a) $D_f = [-6, 8]$, $D_f' = [-2, 4]$

b) $-3, 1, 5$ c) $-4, 0, 2, 4, 6$

4.6 - f não é derivável em $x=3$ porque não é contínua em $x=3$. Então

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}, & x<3 \\ -3, & x>3. \end{cases}$$

A função g não é contínua em 1, logo não é derivável em 1. É contínua em 2, pelo que poderá ser derivável em 2. Mas $g(2) = 16$ e

$$g'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{16 - 16}{x - 2} = 0$$

$$g'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = 24$$

pelo que g n̄ é derivável em 2. Então

$$g'(x) = \begin{cases} 6x, & x < 1 \\ 6x^2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

4.7 - f deve ser contínua em 3 e $f'_+(3)$ deve coincidir com $f'_-(3)$. Então vem

$$27 = 3a + b \quad e \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{ax+b-3a-b}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^3 - 3a - b}{x-3}.$$

Mas

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3 - (3a+b)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^3 - 27}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{x-3}}$$

$$= 27$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{ax+b-3a-b}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{a\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = a$$

Logo $\quad a = 27 \quad$ e $\quad b = 27 - 3a = -54.$

4.8 - $f(-1) = 0$ e $f'(-1) = 1$

a) $y = x + 1$ $\qquad$ b) Sim, porque f é derivável em 1.

c) f' é derivável em $]-2, +\infty[$, sendo $f''(x) = -\dfrac{\ln(x+2)}{(x+2)^2}$, pelo que $f''(2) = -\frac{1}{16}\ln 4 = -\frac{1}{8}\ln 2$.

4.9 – $g(x) = f(x^2-2) \Rightarrow g'(x) = 2x\, f'(x^2-2)$.

Então $g'(2) = 4 f'(2)$. Mas $f'(2)$ é o declive da recta referida no enunciado. Do gráfico sai

$$f'(2) = \frac{4-2}{6-2} = \frac{1}{2}, \quad \text{donde} \quad g'(2) = 2.$$

4.10 – $g(x) = f(5x-x^2) \Rightarrow g'(x) = (5-2x) f'(5x-x^2)$.

Então $g'(1) = 3 f'(4)$. Mas $f'(4) = -\frac{1}{m}$, com m o declive da recta referida no enunciado.

Do gráfico sai

$$m = \frac{6-2}{6-4} = 2, \quad \text{donde} \quad f'(4) = -\frac{1}{2},$$

pelo que
$$g'(1) = -\frac{3}{2}.$$

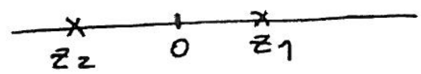
4.11 – Seja $f(x) = x^2 - x\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, que é derivável. Os zeros de f são as soluções da equação dada. Mas

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0, \quad f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0.$$

Da continuidade de f em $[0,\pi]$ e em $[-\pi, 0]$, o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de, pelo menos, dois zeros, digamos $z_1 \in]0,\pi[$ e $z_2 \in]-\pi, 0[$. Por outro lado,

$$f'(x) = 2x - \mathrm{sen}\,x - x\cos x + \mathrm{sen}\,x = x(2-\cos x),$$

pelo que $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$



Do teorema de Rolle sai que não pode existir outro zero para além de z_1 e z_2, pois se existisse $z_3 \neq z_1$ e $z_3 \neq z_2$, então f' deveria possuir outro zero. Por exemplo, se existisse $z_3 > z_1$ então f' deveria possuir outro zero em $]z_1, z_3[$.

4.12 – ϕ é contínua, com $\phi(1) = 3 > 0$ e $\phi(3) = -1 < 0$.
Então o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de $c \in]1,3[$ tal que $\phi(c) = 0$.
Por outro lado, ϕ é derivável em $\mathbb{R}$, com

$$\phi'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \; x \in \mathbb{R},$$

pelo que $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$.

Logo, pelo teorema de Rolle, não pode existir outro zero de ϕ em $]1,3[$. De facto, se existisse $d \in]1,3[$, com $\phi(d) = 0$ e $d \neq c$, concluir-se-ia da existência de um zero de ϕ' estritamente compreendido entre $\underline{c}$ e $\underline{d}$.

4.13 – Não existe porque, pelo teorema de Darboux (do valor intermédio para a derivada num intervalo), a derivada de uma função num intervalo não pode passar de 0 a 1 sem passar por todos os valores entre 0 e 1.

Um erro frequente é apresentar, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

, mas f não é derivável em 1.

4.14 – a) e b) fazer.
c) Não há qualquer contradição porque f não verifica as hipóteses do teorema de Rolle, já que f não é derivável na origem.

4.15 – a) Fazer.
b) Usar o teorema de Rolle e notar que g' possui apenas o zero 1, já que é injectiva.

4.16 – a) $P_{10,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}$.

b) $P_{7,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.

c) $P_{8,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$.

d) $P_{7,1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots$

$$+ \frac{1}{7!}(x-1)^7$$

Notar que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$,

e que, mais em geral, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n}$,

para $n \geq 2$.

e) $P_{6,0}(x) = -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6$.

4.17 – Fazer.

4.18 – $f(0) = P_{6,0}(0)$, $f'(0) = P'_{6,0}(0)$, $f''(0) = P''_{6,0}(0)$, e assim sucessivamente para as restantes derivadas, que também coincidem, na origem, com as derivadas da mesma ordem de f em 0.

4.19 – Seja $Q(x)$ o polinómio dado. O que se pretende é obter, para $f(x) = Q(x)$, o polinómio de Taylor de ordem 6 em torno de 1,

$$P_{6,1}(x) = Q(1) + Q'(1)(x-1) + \frac{Q''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{Q^{(6)}(1)}{6!}(x-1)^6$$

Resta determinar $Q(1), Q'(1), \dots, Q^{(6)}(1)$ a partir da expressão dada no enunciado para $Q(x)$.

4.20 - $P_{2,3}(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{1}{2} f''(3)(x-3)^2$

$$= 1 - 2(x-3) + \frac{3}{2}(x-3)^2$$

$$P_{3,3}(x) = P_{2,3}(x) + \frac{1}{3!} f'''(3)(x-3)^3$$

$$= 1 - 2(x-3) + \frac{3}{2}(x-3)^2 - \frac{5}{6}(x-3)^3$$

Os valores aproximados para $f(2,9)$ seriam $P_{2,3}(2,9)$ e $P_{3,3}(2,9)$.

4.21 - Consideremos a função $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e aproximemos

$$\sqrt{e} = f(1/2)$$

recorrendo a um polinómio de Taylor de f em torno de 0, com ordem n a determinar por forma a que se tenha $|erro| < 10^{-3}$. Pretendendo controlar o erro, recorremos à fórmula de Taylor com resto de Lagrange, para f, que dá

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

com $\underline{c}$ um ponto entre 0 e x. Em particular, para $x = 1/2$, fica

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(1/2)^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Mas $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, donde

$$f^{(n)}(c) = e^c.$$

Queremos uma ordem n para a qual se tenha

$$\frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-3}$$

e como

$$c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow e^c \in \left]1, e^{1/2}\right[\Rightarrow e^c < 2$$

basta tomar n tal que

$$\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-3} \Rightarrow (n+1)!\, 2^n > 10^3 .$$

Não é difícil verificar que o primeiro $n \in \mathbb{N}$ que verifica a desigualdade anterior é $n=4$, significando que a aproximação obtida para $\sqrt{e}$ recorrendo a qualquer polinómio

$$P_{n,0}(x), \quad \text{com } n \geq 4,$$

é satisfatória. Considerando $n=4$, vem

$$\sqrt{e} \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!}$$

$$\sqrt{e} \sim \frac{211}{128} .$$

4.22 – a) Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.
Pode ser levantada recorrendo à Regra de L'Hospital ou aos polinómios de Taylor em torno de $a=0$ das funções

$$f(x) = 4x^2 - \operatorname{tg}^2 x,$$

$$g(x) = \cos^2 x - 1$$

com ordem apropriada.

4.22
c)
d)
e)
página 12

Optando pelo segundo processo, temos

$$f(x) = 4x^2 - tg^2 x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$$
$$f'(x) = 8x - 2\, tg x \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 8 - 2\sec^4 x - 4\, tg^2 x \sec^2 x \Rightarrow f''(0) = 8-2 = 6$$

$$g(x) = \cos^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0$$
$$g'(x) = -2\cos x \,\text{sen}\, x \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 0$$
$$g''(x) = 2\,\text{sen}^2 x - 2\cos^2 x \Rightarrow g''(0) = -2$$

Então

$$f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) = \frac{f''(0)}{2!} x^2 + R_{2,0}(x)$$

$$f(x) = 3x^2 + R_{2,0}(x), \text{ com } \lim_{x \to 0} \frac{R_{2,0}(x)}{x^2} = 0,$$

e

$$g(x) = \frac{g''(0)}{2!} x^2 + S_{2,0}(x) = -x^2 + S_{2,0}(x), \lim_{x\to 0} \frac{S_{2,0}(x)}{x^2} = 0$$

Consequentemente

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2 - tg^2 x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + R_{2,0}(x)}{-x^2 + S_{2,0}(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \overset{\nearrow 0}{\frac{R_{2,0}(x)}{x^2}}}{-\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \underset{\swarrow 0}{\frac{S_{2,0}(x)}{x^2}}} = -3.$$

O limite proposto é igual a -3.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1-\ln x}{x\ln x - \ln x}$ (ind $\frac{0}{0}$)

De maneira semelhante a a), considere-se

$$f(x) = x-1-\ln x \quad \text{e} \quad g(x) = x\ln x - \ln x.$$

Tem-se

$$f(1) = 0, \quad g(1) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 0 \quad \text{e} \quad g'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = 1 \quad \text{e} \quad g''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow g''(1) = 2.$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + R_{2,1}(x), \text{ com } \lim_{x \to 1} \frac{R_{2,1}(x)}{(x-1)^2} = 0$$

$$g(x) = (x-1)^2 + S_{2,1}(x), \text{ com } \lim_{x \to 1} \frac{S_{2,1}(x)}{(x-1)^2} = 0.$$

Logo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1-\ln x}{x\ln x - \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2}(x-1)^2 + R_{2,1}(x)}{(x-1)^2 + S_{2,1}(x)} = \frac{1}{2}$$

4.23 - a) Verdadeira.

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)^3} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - g(x) - 3(x-3)^3}{(x-3)^3} = 0$$

Como $3(x-3)^3$ é um polinómio de grau ≤ 3 verificando uma condição do tipo

$$\lim_{x \to 3} \frac{\text{função} - \text{polinómio grau} \leq 3}{(x-3)^3} = 0,$$

conclui-se que $3(x-3)^3$ é o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno do ponto $a=3$ para a função

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Então

$$P_{3,3}(x) = 3(x-3)^3 \ , \text{ para } h$$

pelo que

$$h(3) = 0, \quad h'(3) = 0, \quad h''(3) = 0$$

que dá

$$f(3) = g(3), \quad f'(3) = g'(3), \quad f''(3) = g''(3).$$

b) Falsa, pois $f(1) = P_{2,1}(1) = 1$.

c) Verdadeira.

$$f(x) = -3x^3 + x^2 + 2 + h(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -3x^3 + x^2 + 2 + 10(x-3)^4 + \underbrace{\boxed{h(x) - 10(x-3)^4}}_{R(x)}$$

e podemos escrever

$$f(x) = -3x^3 + x^2 + 2 + 10(x-3)^4 + R(x), \text{ com } \lim \frac{R(x)}{(x-3)^4} = 0.$$

Pelo teorema de Taylor e, em particular, da unicidade do polinómio de Taylor como o único nas condições do teorema, conclui-se que

$$-3x^3 + x^2 + 2 + 10(x-3)^4$$

é o polinómio de Taylor de ordem 4 em torno de 3 da função f. Da definição do polinómio, sai ainda que

$$-3x^3 + x^2 + 2$$

é o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de 3 da função f, já que a parcela $10(x-3)^4$ corresponde a

$$\frac{f^{(4)}(3)}{4!}(x-3)^4.$$

4.22

c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ (Regra de L'Hospital)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0.$$

Logo, pela R. L'Hospital, o limite tem valor 0.

d) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

$= e^0$, pelo exercício 28).

e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{1/x^2}}$

Calculemos, primeiro, $\lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{1/x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \quad \left(\text{ind } \frac{0}{0}\right)$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\ln(\cos x)]'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} \quad \left(\text{ind } \frac{0}{0}\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Pela Regra de L'Hospital, o limite proposto vale $e^{-1/2}$.