UNIVERSIDADE DO MINHO	5 de Dezembro de 2009
Álgebra Linear	
$1^{\underline{o}}$ Teste - **A**	
LEI	Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se A é uma matriz que verifica $(2I_2 + A)^T = -2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então a $2^{\underline{a}}$ coluna da matriz A é igual a $\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}^T$. V F

b) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, invertível. Existe uma matriz B, quadrada de ordem n, não nula, tal que AB é uma matriz nula. V F

c) Se A é uma matriz anti-simétrica ($A^T + A = O$) então A^2 é simétrica. V F

d) Se A é uma matriz de ordem 4 que verifica $(A + I_4)^2 = 0$ então A é invertível. V F

2. **a)** Os vectores $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (1, 0, \alpha)$ são linearmente dependentes para $\alpha = -1$. V F

b) Sejam u, v e w vectores linearmente dependentes de um espaço vectorial real V. Então v é combinação linear de u e w. V F

c) Se u, v e w são vectores linearmente dependentes de um espaço vectorial real V, então os vectores $u - v$, $v - w$ e $w - u$ são vectores linearmente independentes. V F

d) Em $\mathbb{R}^2$ não existe nenhum subespaço de dimensão 2 gerado pelos vectores $u = e_1 - e_2$ e $v = -e_2$ (sendo $\{e_1, e_2\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$). V F

3. **a)** Seja A uma matriz de ordem 9×10 tal que $car(A) = 5$, então o núcleo de A tem dimensão 4. V F

b) Existe uma matriz A, que define uma aplicação linear f, em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $dim\ \ Im(f) = dim\ \ Nuc(f)$, V F

c) A aplicação linear f, definida em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $Nuc_f = \{(x, y) : x = 0\}$ é um isomorfismo. V F

d) Se $H = \langle 1, 2+x, 3+2x+x^3 \rangle$, é um subespaço de P_3, sendo P_3 o subespaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, então $x \notin H$. V F

4. a) A matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} x_1 = 3 - x_4 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$ tem característica igual a 3.

V F

b) O espaço gerado pelos vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tem dimensão igual a 2. V F

c) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tem-se $car(A) = 1$ ou $car(A) = 2$, para quaisquer valores reais de r e s.

V F

d) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o espaço das colunas de A tem dimensão igual a 2.

V F

II

Para cada questão deste grupo, complete as respectivas afirmações.

1. Considere o seguinte sistema,

$$\begin{cases} x + y + (1+a)z &= 1 \\ x + (1+a)y + z &= 1+a \\ (2-a)(1+a)z &= 2-a \end{cases}$$

de variáveis x, y, z e com $a \in \mathbb{R}$.

a) Se $a = 1$ é solução do sistema o vector $(-3/2, 2/2, 1/2)$.

b) O sistema $AX = B$ é impossível se e só se $a = -1$.

c) O sistema $AX = B$ possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1 se e só se $a = 0$ ou $a = 2$.

d) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se $a \neq 0$ e $a \neq 2$ e $a \neq -1$.

2. Seja f a aplicação linear definida de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1,2) = (1,3,5) \quad \text{e} \quad f(2,7) = (-1,1,1).$$

a) Os vectores $(1,0)$ e $(0,1)$ podem escrever-se como combinação linear dos vectores $(1,2)$ e $(2,7)$ do seguinte modo

$(1,0) = \frac{7}{3}(1,2) - \frac{2}{3}(2,7)$ e $(1,2) = -\frac{2}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,7)$

b) Usando a alínea a) tem-se que $f(1,0) = \frac{7}{3}f(1,2) - \frac{2}{3}f(2,7) = (3, 19/3, 11)$ e $f(0,1) =-\frac{2}{3}f(1,2) + \frac{1}{3}f(2,7) = (-1,-5/3,-3)$.

c) *(Responda à seguinte questão justificando a sua resposta.)*

Determine, para a aplicação linear f, duas matrizes diferentes que a representem.

Resolução:

Considerando, o enunciado e as alienas anteriores, temos que a matriz da aplicação linear f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

e, a matriz da aplicação linear f relativamente à $(1,2),(2,7)$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é:

$$B_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 19/3 & -5/3 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$$

III

Responda à questão deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

Considere U e V, subespaços vectoriais reais de $\mathbb{R}^4$, tais que:

$$U = \{(x, y, z, t) : x = y, \;\; y + z = t \;\text{ e }\; x, y, z, t \in \mathbb{R}\},$$
$$V = \langle \;(1, 1, 0, 0), \;\; (0, 0, 1, 1)\; \rangle$$

a) Mostre que U é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^4$.

b) Determine uma base e a dimensão de V.

c) Determine o subespaço V através de condições que definam o seu elemento genérico.

d) Defina o subespaço $U \cap V$ e determine um conjunto de geradores de $U \cap V$.

Resolução:

a) Um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^4$ é um subconjunto não vazio, *fechado* para as operações de adição e de multiplicação por um número real, ou seja:

(i) $x + y \in U, \; \forall x, y \in U;$

(ii) $\alpha x \in U, \; \forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in U.$

Assim, pela sua definição, que U é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ e é não vazio pois $(0, 0, 0, 0) \in U$. Mostremos agora que U é fechado para as operações de adição e de multiplicação por um escalar. Sejam $\forall x, y \in U$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Então, tendo-se $x = (a, a, c, a + c)$ e $y = (a', a', c', a'+c')$, para $a, c, a', c', \in \mathbb{R}$, vem que $x+y = (a+a', a+a', c+c', a+a'+c+c')$ e deduz-se que $x + y \in U$. Tem-se ainda que $\alpha x = (\alpha a, \alpha a', \alpha c' \alpha(a' + c'))$ donde $\alpha x \in U$. Assim que U é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^4$

b) Consideremos a matriz cujas colunas são os vectores geradores de V, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tendo-se $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vem que a característica da matriz é igual a 2, e logo as duas colunas da matriz inicial são vectores linearmente independentes. Assim uma base de V é, por exemplo, $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$, sendo $dimV = 2$.

c) Se $(a,b,c,d) \in V$, então existem escalares reais α, β tais que $(a,b,c,d) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(1,1,0,0) \Leftrightarrow \alpha = 1 \;\; e \;\; \beta = 1$. Assim, tem-se $V = \{(x,x,z,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$.

d) $U \cap V = \{(x,y,z,t) : x = y, \;\; y+z = t, \;\; z = t \;\text{ e }\; x,y,z,t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z,t) : x = y = 0, z = t \;\text{ e }\; x,y,z,t \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,z,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Tem-se então $U \cap V = \langle (0,0,1,1) \rangle$

Cotações	Parte I	Parte II	Parte III
	8	4 +(1+1+2)	1+1+0.5+1.5