



---

**Responda aos grupos I e II em folhas de teste SEPARADAS.**

---

### Grupo I

Exercício 1. [2 valores] Exprima o seguinte conjunto na forma de intervalo ou reunião de intervalos:  
 $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < 2x^2 - 1 \leq 7\}.$

Exercício 2. [2 valores] Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do seguinte conjunto:  
 $B = ([-\sqrt{3}, 0] \cap \mathbb{Q}) \cup \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$

Exercício 3. [2 valores] Calcule o interior, a aderência, a fronteira e o derivado do seguinte conjunto:  
 $C = \{-1\} \cup (]0, \pi[ \setminus \{1\}) \cup ([4, 5[ \cap \mathbb{Q}).$

Exercício 4. Apresente um exemplo de, ou justifique que não existe:

- a) [1.5 valores] um número irracional positivo menor que  $\frac{5}{10007}$ ;
- b) [1.5 valores] um conjunto não limitado, fechado e de interior vazio.

### Grupo II

Exercício 5. [2 valores] Calcule, ou justifique porque não existe,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - |x|}{x^3 + |x|}.$

Exercício 6. [2 valores] Mostre que a equação  $x^4 - 7x = 1$  tem pelo menos uma solução negativa e uma solução positiva.

Exercício 7. [2 valores] Calcule a primeira e a segunda derivada da função  $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ ,  $x > 0$ .

Exercício 8. [2 valores] Dê exemplo de duas funções descontínuas cujo produto seja uma função contínua.

Exercício 9. Considere a função  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}.$   
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

- a) [1.5 valores] Mostre que a equação da reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $x = a$  é:  $y = -2\sqrt{a}x + \sqrt{a}(1 + 2a).$
- b) [1.5 valores] Mostre que existe um valor de  $a$  para o qual a reta da alínea anterior passa no ponto  $(1, 2).$

## Algumas regras de derivação

---

(estamos a omitir os domínios de definição das funções)

$$C' = 0, \quad C \text{ constante}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\text{sen}' x = \cos x$$

$$\text{tg}' x = \sec^2 x$$

$$\sec' x = \sec x \text{ tg } x$$

$$\text{sh}' x = \text{ch } x$$

$$\text{th}' x = \text{sech}^2 x$$

$$\text{sech}' x = -\text{sech } x \text{ th } x$$

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (x < 1)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\cos' x = -\text{sen } x$$

$$\cotg' x = -\text{cosec}^2 x$$

$$\text{cosec}' x = -\text{cosec } x \cotg x$$

$$\text{ch}' x = \text{sh } x$$

$$\text{coth}' x = -\text{cosech}^2 x$$

$$\text{cosech}' x = -\text{cosech } x \coth x$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{arccotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{arccosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$