Limites

Regra geral:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Regras operatórias com limites:

Limites de funções constantes

Se f é uma função constante $f(x) = k$, então para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

Limites da função identidade

Se f é uma função identidade $f(x) = x$, então para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

Limites de operações com funções

Se L_1 e L_2 são dois números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to c} g(x) = L_2$, então

- **Limite da soma**

  $$\lim_{x \to c} [(f + g)(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L_1 + L_2$$

- **Limite do produto**

  $$\lim_{x \to c} [(f \times g)(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \times \lim_{x \to c} g(x) = L_1 \times L_2$$

- **Limite do quociente**

  $$\lim_{x \to c} \left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$$

- **Limite da potência**

  $$\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n = L_1{}^n$$

- **Limite da raiz**

  $$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$

$+$

		Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)		
	$f(x)$ / $g(x)$	a	$+\infty$	$-\infty$
Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)	b	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?
	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

$-$

		Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)		
	$f(x)$ / $g(x)$	a	$+\infty$	$-\infty$
Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)	b	$a-b$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

$\times$

		Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)			
	$f(x)$ / $g(x)$	$a \neq 0$	0 (por valores $\neq 0$)	$+\infty$	$-\infty$
Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)	$b \neq 0$	$a-b$	0	$+\infty$ se $b>0$ $-\infty$ se b<0	$+\infty$ se $b>0$ $-\infty$ se $b<0$
	0 (por valores $\neq 0$)	0	0	?	?
	$+\infty$	$+\infty$ se $a>0$ $-\infty$ se $a<0$	?	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$ se $a>0$ $-\infty$ se $a<0$	?	$+\infty$	?

$\div$

		Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)			
	$g(x)$ \ $f(x)$	$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
Limite quando $x \to c$ (finito ou infinito)	$b \neq 0$	$a - b$	0	$+\infty$ se $b > 0$ $-\infty$ se b$<$ 0	$+\infty$ se $b > 0$ $-\infty$ se $b < 0$
	0	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$	?	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$
	$+\infty$	0	0	?	?
	$-\infty$	0	0	?	?

Indeterminações

- Indeterminação $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$

  Para conseguir resolver esta indeterminação colocamos em evidência a mais alta potência de x.

- Indeterminação $\frac{0}{0}$

  Consegue-se levantar a indeterminação simplificando a fracção.

Limites de funções envolvendo exponenciais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Limites de funções envolvendo logaritmos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$