

Álgebra Linear

exame B

7 de fevereiro de 2011

nome: _____ número: _____

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1~(2+2), 2~(2+2+2+2); em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.

- (a) Encontre, usando o algoritmo de eliminação de Gauss, uma matriz U escada de linhas equivalente por linhas a $M = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$.
- (b) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Encontre uma base do núcleo de A .
- (b) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A . Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.
- (c) Calcule os valores próprios de A .
- (d) Verifique se A é diagonalizável e em caso afirmativo diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal)

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente à **melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) $\sigma(A) = \sigma(J)$, ou seja, A e J têm os mesmos valores próprios.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ é vector próprio associado ao valor próprio 0 de A .

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in N(A)$.

(d) Todas as anteriores. (V)

2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,

(a) As colunas de A formam uma base de \mathbb{R}^3 .

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\det(A) = 1$.

(d) Todas as anteriores. (V)

3. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(a) A é diagonalizável.

(b) $CS(A) = \mathbb{R}^3$.

(c) $Ax = 0$ é possível determinado.

(d) Nenhuma das anteriores. (V)

4. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(a) $Ax = b$ é sempre possível, independentemente da escolha de $b \in \mathbb{R}^2$. (V)

(b) $\text{nul}(A) = 2$.

(c) $(0, 1, -1) \in N(A)$.

(d) Nenhuma das anteriores.

5. Sendo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(1, 0) = (0, 1, 1), \quad T(0, 1) = (1, 0, 1).$$

(a) $T(1, 2) = (2, 1, 3)$. (V)

(b) A matriz que representa T em relação à base canônica de \mathbb{R}^2 e à de \mathbb{R}^3 é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $T(x, x) = (x, 2x, x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(d) Todas as anteriores.

6. Dada uma matriz quadrada A , seja U uma matriz escada obtida de A após aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss, então garantidamente

(a) $\det(A) = \det(U)$.

(b) $\sigma(A) = \sigma(U)$, ou seja, são iguais os conjuntos dos valores próprios de A e de U .

(c) $\dim CS(A) = \dim CS(U)$. (V)

(d) Nenhuma das anteriores.

7. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b \in \mathbb{R}^3$,

(a) $Ax = b$ é possível determinado.

(b) As colunas de A formam uma base de \mathbb{R}^3 .

(c) $\text{proj}_{CS(A)} b = b$.

(d) Todas as anteriores. (V)

8. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

(a) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .

(b) Se A é invertível então A^2 também é invertível. (V)

(c) Se A e B são invertíveis então $A + B$ também é invertível.

(d) Apenas duas das afirmações anteriores são verdadeiras.

Respostas:

- | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 2. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 3. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 4. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 5. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 6. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 7. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 8. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |