PARTE III – EXEMPLOS COM RESOLUÇÃO DETALHADA

CAPÍTULO 1. SELECÇÃO ECONÓMICA DE ALTERNATIVAS

1. Conceitos fundamentais e equações económicas

1.1 Quanto valerá a quantia de $30\,000\,UM$ ao fim de 4 anos, ao juro de 8% ao ano, composta: (a) anualmente; (b) trimestralmente? Neste último caso, qual a taxa de juro efectiva?

Resolução:

a) $P = 30000\,UM$ $S = ?$

$n = 4\ anos$

$i = 0{,}08$

Trata-se da aplicação directa da eq. (I-1):

$$S = P\,(1+i)^n = 30000\,(1+0{,}08)^4 = 30000 \times 1{,}3605 = 40815\,UM$$

(Verifique na tabela que $F_{PS,\,0.08,\,4} = 1{,}3605$)

b) $P = 30000\,UM$ $S = ?$

$n = 4\ anos$

$i = 0{,}08$

$p = 4$

Trata-se da aplicação directa da eq. (I-7):

$$S = P\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np} = 30000\,(1+0{,}02)^{16} = 30000 \times 1{,}3726 = 41184\,UM$$

(Complete: $1{,}3728 = F_{PS,\,0.02,\,16}$)

Note que o resultado é diferente do da alínea a). Porquê?

Para calcular a taxa de juro efectiva aplica-se a eq. (I-8):

$$i_{ef} = \left(1+\frac{i}{p}\right)^p - 1 = \left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^4 - 1 = (1+0{,}02)^4 - 1 = 0{,}082432$$

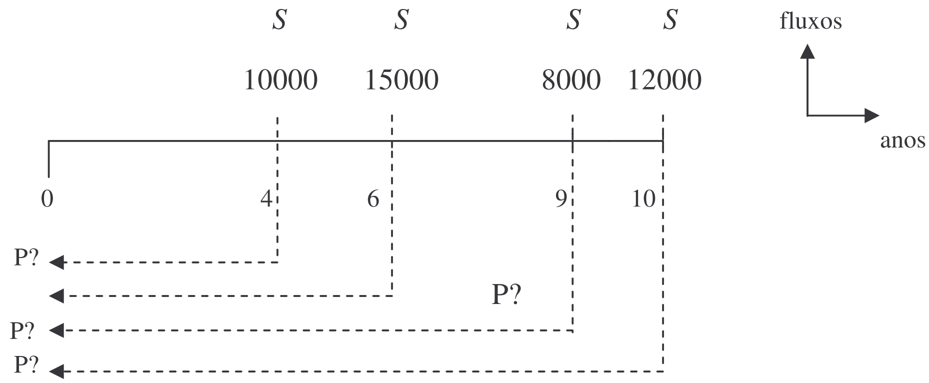
Verifique este resultado pondo na eq. (I-1) $i = i_{ef} = 0{,}082432$

R: a) $40815\,UM$
b) $41184\,UM$
$i_{ef} = 8{,}24\%$

1.2 Se a taxa de juro anual for de 10%, qual deverá ser o valor presente de $10\,000\,UM$ devido a 4 anos, mais $15\,000\,UM$ devido a 6 anos, mais $8\,000\,UM$ a 9 anos e mais $12\,000\,UM$ a 10 anos?

Resolução:

No diagrama fluxos-tempo pode-se representar simbolicamente a situação:



Aplicando a eq. (I-3) com o factor de conversão definido pela eq. (i-4)

$$P = \sum S'F'_{SP,i,n} = 10000F_{SP,0.1,4} + 15000F_{SP,0.1,6} +$$

$$+ 8000F_{SP,\ 0.1,9} + 12000F_{SP,0.1,10} = 23316UM$$

Justifique a legitimidade do somatório

Verifique na Tabela os valores utilizados para o factor do valor actual:

$F_{SP,0.1,4} = 0{,}68301$ $\quad F_{SP,0.1,6} = 0{,}56447$

$F_{SP,0.1,9} = 0{,}42410$ $\quad F_{SP,0.1,10} = 0{,}38554$

Resolva o problema usando a forma algébrica da eq. (I-3).

Resolva o problema usando vias alternativas.

R: $23316\,UM$

1.3 Qual a menor quantia que se deve investir agora, a 2% ao mês, para se ter uma renda mensal perpétua de $10\,000\,UM$?

Resolução:

Trata-se de calcular o valor actual de uma série perpétua de unidades uniformes, ou seja o custo capitalizado P_∞, dado i.

A eq. (I-28) dá imediatamente

$$P_\infty = \frac{R}{i} = \frac{10000}{0{,}02} = 500000\,UM$$

Deduza a eq. (I - 28)

R: $500000\,UM$

1.4 Se existir uma dívida de $10\,000\,UM$, qual deverá der a amortização para que ao fim de 8 anos a dívida fique paga à taxa de juro de 10% ao ano, se o pagamento for feito a) no fim do ano b) no princípio do ano.

Resolução:

a) $P = 10000\,UM$ $\quad\quad R = ?$

$i = 0{,}1$

$n = 8\,anos$

Aplica-se directamente a eq. (I-14)

$$R = P\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 10000\frac{0{,}1(1+0{,}1)^8}{(1+0{,}1)^8 - 1} = 1874{,}4\,UM$$

ou recorrendo a valores tabelados.

$$R = P\,F_{PR,\,i,\,n} = 10000\,F_{PR,\,0.1,\,8} = 10000 \times 0{,}18744 = 1874{,}4\,UM$$

Representa simbolicamente o problema num diagrama de fluxos - tempo.

b) $P = 10000\,UM$ $\quad\quad R_p = ?$

$i = 0{,}1$

$n = 8\,anos$

$$R_p = \frac{R}{(1+i)}$$ Porquê?

da alínea a)

$$R_p = \frac{1874{,}4}{1+0{,}1} = 1704\,UM$$

Alternativamente, do Quadro I-1

$$R_p = \frac{P}{1+i}\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{P}{1+i}\,F_{PR,\,i,\,n} = \frac{10000}{1{,}1}\,F_{PR,\,0.1,\,8} = \frac{10000}{1{,}1} \times 0{,}18744 = 1704\,UM$$

R: a) $1874{,}4\,UM$

b) $1704\,UM$

1.5 Quanto tempo levará para duplicar uma quantia depositada a 15% ao ano?

Resolução:

$P\,(dado) \qquad\qquad n\,?$
$i = 0{,}15$
$S = 2\,P$

Aplicando a expressão (I-1) e logaritmizando

$$2\,P = P\,(1+i)^n$$

$$\ln 2 = n \;\; \ln(1+i)$$

a que chegaria também aplicando directamente a eq.(I-24)

Substituindo valores e reordenando

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}15)} = 4{,}96\ldots$$

$$n = 5$$

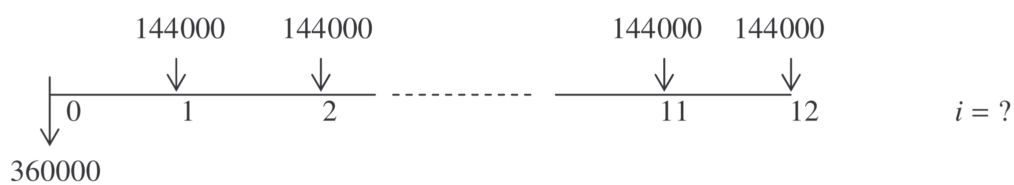
Resolva o problema, usando a eq. (I-1) com o factor do interesse composto e recorrendo às Tabelas.

R: $n = 5$ anos

1.6 Um operário semi-especializado que ganha $144\,000\,UM$ tem por funções medir periodicamente o nível do líquido numa série de reservatórios. Se se instalarem medidores tele-indicadores com um custo total de $360\,000\,UM$ e uma vida de 12 anos, aquele posto de trabalho pode ser eliminado. Que interesse sobre o capital investido se ganhará comprando esta instrumentação?

Resolução:

Simbolicamente:



(interprete e comente este diagrama!)

$P = R\,F_{RP,i,n}$

$360000 = 144000\,F_{RP,i,12}$

visto que $P = 360000\,UM$, $R = 144000\,UM$ e $n = 12\ anos$

$$F_{RP,i,12} = \frac{360000}{144000} = 2{,}5$$

Das tabelas, por interpolação, conclui-se que:

i ~0,4

R: i ~40%

1.7 Uma pessoa reformando-se aos 65 anos de idade e com uma esperança de vida de 16 anos tem um depósito de $200\,000\ UM$ no Banco vencendo um juro de 16% ao ano.

Que quantia uniforme pode ela retirar anualmente no fim de cada ano até esgotar aquele fundo em 16 anos?

Resolução:

É um problema de conversão de um valor actual numa anuidade uniforme

$P = 200000\,UM$ $\qquad R = ?$
$i = 0{,}16$
$n = 16\ anos$

$$R = PF_{PR,i,n} = 200000\,F_{PR,0.16,16} = 200000 \times 0{,}17641 = 35282\,UM$$

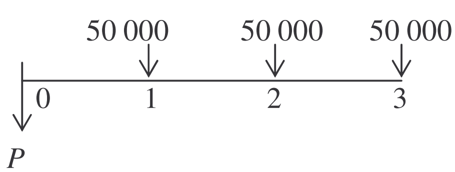
Represente a situação num diagrama fluxos-tempo.

R: $R = 35282\,UM$

1.8 Um engenheiro, logo após a sua formatura, vai fazer um curso de especialização no estrangeiro e necessita, durante 3 anos, das quantias anuais de $50\,000\ UM$. Entrando agora no último ano do seu curso de licenciatura, quanto deverá ser depositado já pelo pai para obter tais quantias, esgotando esse fundo, considerando-se uma taxa de juro de 20% ao ano?

Resolução:

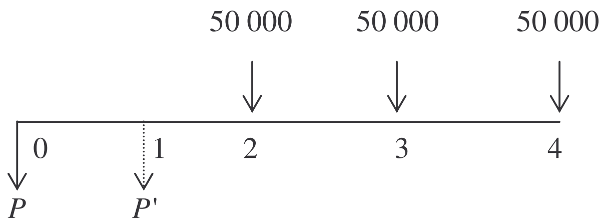
Se as quantias anuais forem levantadas no princípio do ano



$i = 0{,}2$ $\qquad P = ?$

$$P = R\ F_{RP,i,n} = 50000\ F_{RP,0.2,3} = 50000 \times 2{,}1065 = 105325\,UM$$

Se as quantias anuais forem levantadas no fim do ano



$$P' = 50000\ F_{RP,0.2,3} = 105325\,UM$$

$$P = 105325(1+0{,}2)^{-1} = 87771\,UM$$

$$(P') \quad (i)$$

$$\left[P = S(1+i)^{-n}, eq.(I-3)\right]$$

Considere resoluções alternativas.

R: $105325\,UM$
ou
$87771\,UM$

1.9 Concedeu-se um empréstimo de $100\,000\,UM$ a pagar em 8 anos em prestações anuais de $17\,400\,UM$ (no fim do ano). Se não se tiver liquidado o 4º pagamento que prestação uniforme se deverá pagar daí em diante para se liquidar a dívida em tempo?

Resolução:
Não é dado o valor da taxa de juro que se pode calcular no entanto, a partir do esquema de pagamento inicialmente previsto

$P = 100000\,UM$ $\qquad\qquad$ $i = ?$

$R = 17400\,UM$

$n = 8\ anos$

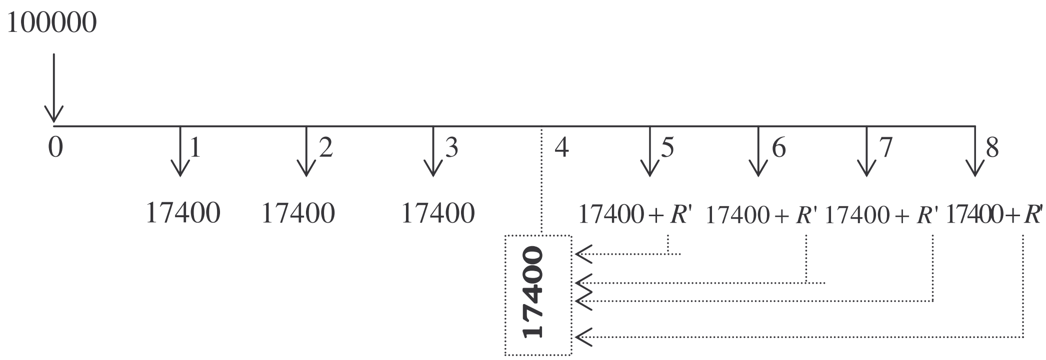
$P = R\ F_{RP,i,n}$

$$100000 = 17400\, F_{RP,i,8}$$

$$F_{RP,i,8} = \frac{100000}{17400} = 5{,}747$$ e das tabelas

$i \sim 0{,}08$

A situação criada pela falta de pagamento no 4º ano pode esquematizar-se no diagrama fluxos-tempo



os pagamentos adicionais R' de compensações podem considerar-se anuidades uniformes da prestação não paga $(17400\, UM)$ que tem o seu valor actual para o período em causa (4 anos).

$17400 = R' F_{RP,0.08,4}$ ou

$$R' = 17400\, F_{PR,0.08,4} = 17400 \times 0{,}30192 = 5250\, UM$$

A prestação a pagar no 5º, 6º, 7º e 8º anos será pois

$$R'' = R + R' = 17400 + 5250 = 22650\, UM$$

R: $22650\, UM$

1.10 Um automóvel de certa marca, quando novo custa $60000\, UM$. Carros usados da mesma marca têm cotações iguais para compra e venda. Assim com 1 ano de uso, valem $42000\, UM$; com 2 anos, $35000\, UM$; com 3 anos, $29000\, UM$; com 4 anos, $22000\, UM$; com 5 anos, $17000\, UM$; com 6 anos, $12000\, UM$. Admite-se que não há procura para carros com mais de 6 anos.

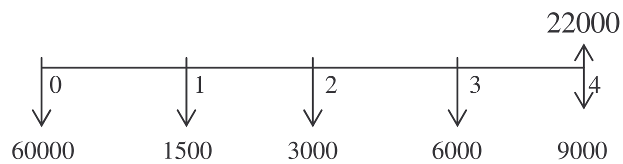
Os custos de manutenção crescem com o tempo e podem ser estimados em $1500\, UM$ ao fim de 1 ano de uso e em $3000\, UM$ ao fim de 2 anos. Nos anos seguintes estes custos aumentam uniformemente em $3000\, UM$ por ano. Só será possível vender um carro usado após incorrer nos gastos de manutenção correspondentes ao ano de uso. Ao comprar um carro usado, o cliente só terá despesas de manutenção no fim de cada ano de uso.

a) A uma taxa de juro de 6% ao ano, qual o custo anual de uso de um carro, nas seis alternativas se se vender ao fim de 1, 2, 3, 4, 5, e 6 anos?

b) Atendendo aos resultados obtidos em a) qual o número de anos óptimo durante o qual se deve ficar com um carro novo, antes de trocá-lo por outro?

Resolução:

a) Por exemplo, para o caso de se vender ao fim de 4 anos, tem-se



$0 = 0{,}06$

e o valor actual do custo total do automóvel é pois

$$P^{(4)} = 60000 + \frac{1500}{1+0{,}06} + \frac{3000}{(1+0{,}06)^2} + \frac{6000}{(1+0{,}06)^3} + \frac{9000-22000}{(1+0{,}06)^4} = 58826\,UM$$

$$R^{(4)} = 58826\,F_{PR,\,0.06,\,4} = 58826 \times 0{,}28859 = 16977\,UM$$

Procedendo identicamente obtém-se:

R:

$n, anos$	1	2	3	4	5	6
$R^{(n)}, UM$	23100	17986	16750	16977	17215	17760

b) A inspecção dos resultados da alínea anterior mostra que o número de anos óptimo é 3.

R: 3 anos

1.11 Estimam-se os custos de manutenção de um determinado equipamento em $1000\,UM$ no primeiro ano com um aumento anual de $100\,UM$ nos anos seguintes sendo estes valores referidos ao fim do ano. Se a taxa de juro for de 8% e se considerar tais custos durante 12 anos, qual o seu valor actual?

Resolução:

Os custos podem considerar-se a agregação de uma renda base uniforme $(1000\,UM\,/\,ano)$ e uma série de gradiente uniforme cujo valor é de $100\,UM\,/\,ano$

Portanto têm-se

$$P = P' + P''$$

em que $P' = R' F_{RP,i,n}$ e $P'' = G\ F_{GP,i,n} = \dfrac{F_{RP,i,n} - n\ F_{SP,i,n}}{i}$

$$P' = 1000\ F_{RP,0.08,12} = 1000 \times 7{,}5361 = 7536{,}1\ UM$$

$$P'' = 100\ F_{GP,0.08,12} = 100 \times 34{,}634 = 3463{,}4\ UM$$

e $$P = P' + P'' = 10999{,}5\ UM\ \sim 11000\ UM$$

1.12 Deposita-se em cada ano uma única quantia de $1766\ UM$ numa conta que oferece um interesse nominal sobre o capital de 6% composto ultimamente.

a) Qual a quantia existente na conta imediatamente após o 5º depósito?

b) Para obter um valor futuro no montante calculado na alínea a) qual deveria ser o valor do rendimento contínuo composto continuamente, no mesmo período de tempo e à mesma taxa de juro nominal?

Resolução:

a) Tem-se $R = 1766\ UM$

$i = 0{,}06$

$n = 5$

$$S = R\frac{e^{in} - 1}{e^{i} - 1} = 1766\frac{e^{0{,}06\times 5} - 1}{e^{0{,}08} - 1} = 1766\frac{1{,}3499 - 1}{1{,}0618 - 1} = 1766 \times 0{,}56618 =$$
$$= 9999 UM = \sim 10000$$

b) $$\overline{R} = S\frac{i}{e^{in} - 1} = S\frac{0{,}06}{e^{0{,}06\times 5} - 1} = 10000\frac{0{,}06}{1{,}35 - 1} = 10000 \times 0{,}17141 = 1714\ UM$$

A comparação de R com $\overline{R}$ é elucidativa!

2. Comparação de custos

2.1 Uma máquina nova custa $8000\ UM$ e dura 10 anos com um valor residual nulo. Se o dinheiro valer 10% ao ano, quanto se pode despender no presente para reparar uma máquina usada, prolongando a sua vida por mais três anos?

Resolução:

Calcule-se principalmente o custo anual uniforme relativo à aquisição de uma máquina nova

$$R_{nova} = C_i F_{PR,i,n} = 8000 \times 0{,}16275 = 1302\ UM$$
(porquê?) $\quad (F_{PR,0.1,10})$

O custo de recuperação da máquina velha deve ser tal que o respectivo custo anual uniforme equivalente não exceda $1302\ UM$

$R = 1302$
$n = 3$
$i = 0{,}1$
$P = C_r = ?$

De
$$R = P\ F_{PR,i,n}$$
vem
$$1302 = C_r F_{PR,0.1,3}$$
$$C_r = \frac{1302}{0{,}40211} = 3238\ UM$$

Abaixo deste valor poupa-se em relação à alternativa de máquina nova. Verifique que se a reparação custar $2500\ UM$ a poupança anual é de $297\ UM$

R: $3238\ UM$

2.2 Uma firma pode produzir 1 milhão de $UP\,/\,ano$ de um produto cujo processo infringe uma patente. A firma pode pagar um "*royalty*" de $0{,}08\ UM\,/\,UP$ ou investir $200\,000\ UM$ em equipamento e incorrer num custo de $0{,}05\ UM\,/\,UP$ para evitar a patente. Se o dinheiro valer 12% ao ano, que decisão deve tomar a firma, se se considerarem apenas os próximos 10 anos? Discutir a influência de outros factores.

Resolução:

A alternativa A – pagamento de "*royalty*" – traduz-se num encargo anual uniforme R_A dado por
$$R_A = 10^6\ UP/ano \times 0{,}08\ UM/UP = 8 \times 10^4\ UM/ano$$

A alternativa B conduz a um investimento inicial P_B e num cargo anual R'_B dados por
$$P_B = 2 \times 10^5 UM$$
$$R'_B = 10^6\ UP/ano \times 0{,}05\ UM/UP = 5 \times 10^4\ UM/ano$$

O encargo anual uniforme total na alternativa B é pois
$$R_B = R'_B + P\ F_{PR,i,n} = 5 \times 10^4 + 2 \times 10^5\ F_{PR,0.12,10}$$

visto ser $n = 10$ e $i = 0{,}12$
$$R_B = 5 \times 10^4 + 2 \times 10^5 \times 0{,}17698 \approx 8{,}537 \times 10^4 UM$$

A alternativa A conduz assim a menores encargos anuais, pelo que se deve preferir.

R: Pagar "*royalty*"

2.3 Dispõe-se de 3 máquinas para uma determinada operação. A máquina A custa $100\,000\,UM$ e dura 5 anos; a máquina B custa $150\,000\,UM$ e a máquina C custa $200\,000\,UM$. Se o dinheiro valer 20% ao ano, qual deve ser a vida das máquinas B e C para serem economicamente equivalentes à máquina A?

Resolução:

É conveniente usar para termo de comparação a anuidade uniforme:

$$R = P_n F_{PR,i,n}$$

Para a máquina A

$$P_{An} = 100000\,UM,\ n = 5\ anos,\ \ i = 0{,}2$$

$$R_A = 100000 \times F_{PR,0.2,5} = 100000 \times 0{,}33438 = 33438\,UM/ano$$

Máquina B

$$P_{Bn} = 150000\,UM,\ n = ?,\ \ i = 0{,}2$$

$$R_B = R_A = 33438 = 150000\ F_{PR,0.2,n}$$

(porquê)
de onde

$$F_{PR,0,2,n} = \frac{33438}{150000} = 0{,}22292$$

e dar tabelas

$$n = 12\ a\ 13\ anos$$

Máquina C

$$P_{cn} = 200000,\ n = ?,\ \ i = 0{,}2$$

$$33438 = 200000\ F_{PR,0.2,n}$$

$$F_{PR,0.2,n} = 0{,}16719$$

e

$$n \rangle\ 50\ anos$$

R: $B - 12\ a\ 13$ anos
$C -$ mais de 50 anos

2.4 Dispõe-se de dois tipos de tubagens para transporte de água, cujos custos se podem resumir como se segue:

CUSTOS UM	A	B
Investimento inicial	100 000	200 000
Custo anual (fim do ano)	25 000	20 000
Valor residual	0	0
Vida (anos)	15	20

A tubagem de tipo A tem de ser reparada ocasionalmente, como parte do custo anual, mas a água pode ficar contaminada quando se fazem essas reparações. A contaminação de água com a tubagem de tipo B é desprezável. Se o dinheiro valer 6% ao ano, quanto se deve creditar à tubagem B em benefícios para que fique economicamente equivalente à tubagem tipo A?

Resolução:

Trace o diagrama fluxos monetários-tempo para as duas alternativas.

Do diagrama (ou das expressões da pág. I-17) calcula-se:

$$P_{A15} = 100000 + 25000\ F_{RP,\,0.06,\,15} =$$

$$= 100000 + 25000 \times 9{,}7122 = 342805\,UM$$

(visto ser $n = 15$ e $i = 0{,}06$)

$$P_{B20} = 200000 + 20000\ F_{RP,\,0.06,\,20} - X\ F_{RP,\,0.06,\,20}$$

em que X é o beneficio a creditar e $n = 20$

Da eq. (I-37)

$$P_{A20} = P_{A15}\,\frac{F_{PR,\,0.06,\,15}}{F_{PR,\,0.06,\,20}} = 342805\,\frac{11{,}470}{9{,}7122} = 404849\ UM$$

Para determinar X faz-se $P_{B20} = P_{A20}$. Porquê?

$$200000 + (20000 - X)\ 11{,}470 = 404849$$

de onde

$$X = 2140{,}5\,UM$$

R: $2140{,}5\,UM$

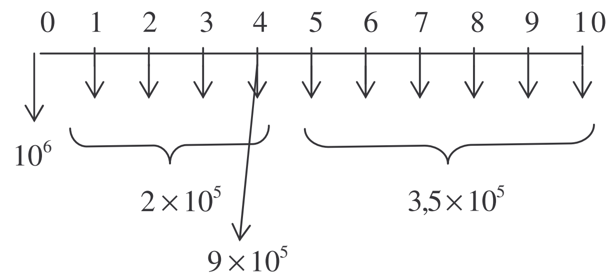
2.5 Existem duas alternativas para construir uma instalação química, ambas tendo o mesmo rendimento por ano, em qualquer momento considerado. Segundo o plano A, constrói-se no presente uma instalação com 50% de capacidade, requerendo um investimento inicial de $1000000\,UM$ e custos operatórios comparáveis de $200\,000\ UM/ano$ durante os primeiros 4 anos. No fim do 4º ano, procede-se à expansão da instalação para o dobro da capacidade, o que implica um investimento de $900\,000\ UM$. Os custos posteriores passam a ser de $350000\ UM/ano$.

Segundo o plano B, constrói-se no presente a instalação com a capacidade de 100%, investindo-se $1500000\,UM$, cifrando-se os custos operatórios em $250000\,UM/ano$, nos primeiros 4 anos e $300000\,UM/ano$ para os restantes anos.

Se se tomar como base de comparação um período de 10 anos e uma taxa de juro de 12% ano, que alternativa se deve escolher?

Resolução:

Alternativa A



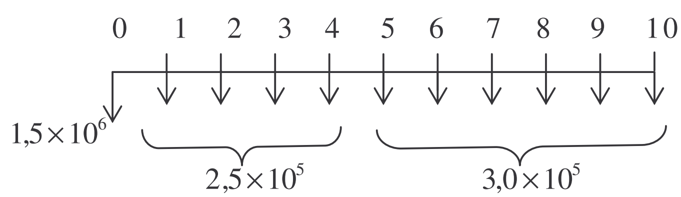
$i = 0{,}12$
$n = 10$
$P =$ valor actual dos custos

$$P_{A10} = 10^6 + 2\times10^5\ \underset{(3{,}0373)}{F_{RP,\,0.12,\,4}} + \left(9\times10^5 + 3{,}5\times10^5 \times \underset{(4{,}1114)}{F_{RP,\,0.12,\,6}}\right)\times \underset{(0{,}63552)}{F_{SP,\,0.12,\,4}}$$

(Explique a última parcela. Há cálculos alternativos!)

$$P_{A10} = 3{,}094\times10^6\ UM$$

Alternativa B



$i = 0{,}12$
$n = 10$
$P =$ valor actual dos custos

$$P_{B10} = 1{,}5\times10^6 + 2{,}5\times10^5\, F_{RP,0.12,4} + 3{,}0\times10^5 \times F_{RP,0.12,6} \times F_{SP,0.12,4}$$

$$P_{B10} = 3{,}043\times10^6\ UM$$

$$P_{B10} < P_{A10}$$

R: alternativa B

2.6 Uma empresa destinou $200000\,UM$ para a sua Associação de Trabalhadores. Esta Associação apresentou a sugestão de se adquirir uma aparelhagem sonora no valor de $100000\,UM$, revertendo para a Associação a valor anual do aluguer deste equipamento, no valor de $5000\,UM$ anuais, e o valor residual da venda do equipamento, após três anos, igual a $30000\,UM$.

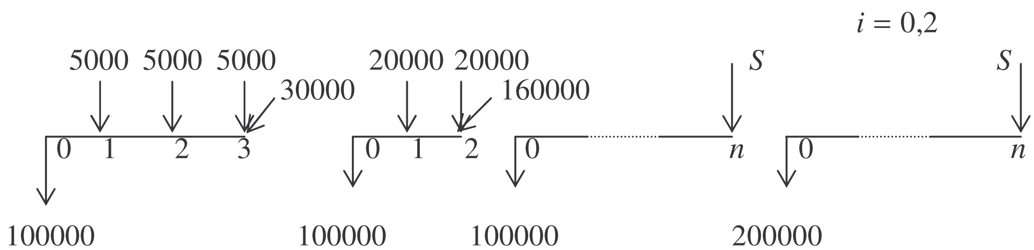
Além disso, as $100000\,UM$ restantes, deveriam ser aplicadas numa financiadora que oferecia, com direito a renovações, um rendimento anual de $20000\,UM$ por ano e um pagamento final, após dois anos , igual a $160000\,UM$.

Considerando ser de 20% a taxa máxima de atractividade, decidir sobre a viabilidade da proposta da Associação de Trabalhadores, analisando exaustivamente todas as combinações.

NOTA: para base de comparação, considere-se $n = 6$, repetindo-se os ciclos tantas vezes quantas forem necessárias.

Resolução:

As 4 alternativas que se podem considerar são simbolicamente



A (aparelhagem sonora) | B (financiadora) | C (depósito) | D (depósito)

e as várias combinações possíveis

$$(i) A+B; (ii) A+C; (iii) C+B; (IV) D$$

Utilizando períodos de 6 anos (trace os diagramas!) e usando o valor futuro dos fluxos (S_6) tem-se

(i)
$$S_A = -100000 F_{PS,0.2,6} + 5000 F_{RP,0.2,6} F_{PS,0.2,6} + \\ + (30000 - 100000) F_{PS,0.2,3} + 30000 = -339910 UM$$

$$S_B = -100000\, F_{PS,0.2,6} + 20000\, F_{RP,0.2,6}\, F_{PS,0.2,6} + \\ + (160000 - 100000)\, F_{PS,0.2,4} + (160000 - 100000) \times \\ \times F_{PS,0.2,2} + 160000 = +270815\, UM$$

$$S_{A6} + S_{B6} = -69095\, UM$$

(ii) $\quad S_A = -339910\, UM$

$$S_c = 100000\ F_{PS,\,0.2,\,6} = 298600\ UM$$
$$S_{A_6} + S_{C_6} = -41310\ UM$$

(iii)
$$S_c = 298600\ UM$$
$$S_B = 270815\ UM$$
$$S_{C_6} + S_{B_6} = 569415\ UM$$

(iv)
$$S_{D_6} = 200000\ F_{PS,\,0.2,\,6} = 597200\ UM$$

O maior valor é o de S_{D_6}, combinação (IV) que deve ser escolhida. As hipóteses (i) e (ii) não se podem considerar viáveis.

R: Depositar $200000\ UM$ a prazo

3. Amortização

3.1 Determinado bem custa $20000\ UM$, dura 10 anos e tem um valor residual de $1000\ UM$. Se o dinheiro valer 8% ao ano, calcule o valor contabilizado ao fim de 7 anos, aplicando o método do fundo de liquidação para a amortização respectiva.

Resolução:

$$C_i = 20000\ UM$$
$$C_L = 1000\ UM$$
$$i = 0{,}08$$
$$n = 10\ anos$$

$$B_7 = ?$$

De acordo com a eq. (I-58) a anuidade uniforme para o fundo de liquidação é dada por

$$R_{FL} = \left(C_i - e_i\right) F_{SP,\,i,\,n}\ F_{PR,\,i,\,n}$$

ou seja, neste caso

$$R_{FL} = (20000 - 1000)\ F_{SP,\,0.08,\,10}\ F_{PR,\,0.08,\,10} =$$
$$= 19000 \times 0{,}46319 \times 0{,}14903 = 1311{,}6\ UM$$

O valor contabilizado é dado por, eq. I-49,

$$B_7 = C_i - \sum_{m=1}^{m=7} D_m$$

sendo

$$\sum_{m=1}^{m=7} D_m = R_{FL}\ F_{RP,\,0.08,\,7}\ F_{PS,\,0.08,\,7} \quad \text{(porquê?)}$$
$$= 1311{,}6 \times 5{,}2064 \times 1{,}7138 = 11703\ UM$$

Portanto

$$B_7 = 20000 - 11703 = 8297\ UM$$

R: $8297\ UM$

3.2 O valor de uma instalação industrial é de $125000\ UM$ com um valor residual de $25000\ UM$ e uma vida de 4 anos. O método de amortização seguido foi o da dupla percentagem fixa, mas o valor real da instalação decresce de facto, linearmente ao longo de 4 anos de vida. A administração decide aproveitar esta diferença para reinvestir durante o segundo ano, sob a forma de equipamento, a diferença entre o valor amortizado e a depreciação real da instalação no fim do primeiro ano, em outro empreendimento onde tem de investir inicialmente ainda $10000\ UM$ para terreno e $5000\ UM$ para edifícios. Estima-se que esta nova instalação dure 5 anos, tenha um valor de sucata de $5000\ UM$ e um rendimento de $8000\ UM$.

Se a taxa de interesse fixado pela administração para as suas operações for de 12%, teria o investimento sido aconselhável?

Resolução:

$$C_1 = 125000\ UM \qquad n = 4\ anos$$
$$C_L = 25000\ UM \qquad i = 0{,}12$$

- Valor reinvestido

Valor amortizado (método da percentagem fixa)

$$F_{DPF} = \frac{2}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{(eq.I-63)}$$

$$D_1^{DPF} = C_i\ F_{DPF} = \frac{1}{2}\,125000 = 62500\ UM$$

Depreciação real (método linear)

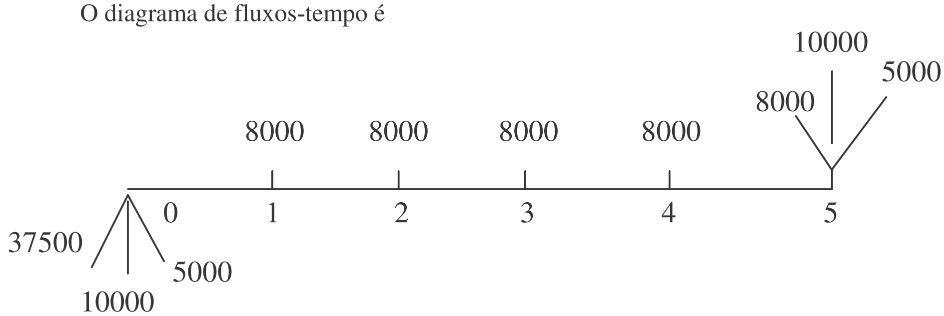
$$D_1^L = \frac{C_d}{n} = \frac{125000 - 25000}{4} = 25000\ UM \qquad \text{(eq.I-53)}$$

O valor reinvestido é

$$D_1^{DPF} - D_1^L = 62500 - 25000 = 37500\ UM$$

- Avaliação do reinvestimento

O diagrama de fluxos-tempo é



O valor actual do novo empreendimento é dado por

$$P = (37500 + 15000) - 15000\,F_{SP,x,5} - 8000\,F_{RP,x,5}$$

O valor de x para o qual $P = 0$ representa o interesse sobre o capital investido neste empreendimento.

(Explique porquê?)

Procedendo iterativamente verifica-se que $x < 0{,}12$. (Haverá processo mais expedito de chegar à mesma conclusão?). Conceba método alternativo de resolução.

Como o interesse obtido é à taxa de juro fixada pela administração, o investimento não foi aconselhável.

R: Não

4. Influência dos impostos na comparação de custos

4.1 Duas máquinas têm os custos comparativos

	A	B
Custo inicial, (UM)	18 000	24 000
Custo anual, uniforme (UM)	1 000	0
Valor residual (UM)	500	0
Vida útil (anos)	2	3
vida para fins fiscais, (anos)	5	5

Se o dinheiro valer 10% ao ano, a taxa de imposto for de 50% e se se usar o método de soma dos dígitos, qual a máquina mais económica?

Resolução:

Considera-se o valor do dinheiro após os impostos.

Para base de comparação toma-se a anuidade uniforme: aplicando as expressões (I-77) e as restantes adequadas do Quadro I-5, 3ª coluna (método da soma dos dígitos) e recorrendo à Tabela do Apêndice I, tem-se

Máquina A

Apresenta custos dos seguintes tipos: inicial, anual uniforme e residual. Exprimindo-os em termos de anuidades:

$$\Re'_A = C_{Ad}\left(1 - tF_{SDP,r,n'}\right)F_{PR,r,n} = \left(C_{AL^0}C_{AL}\right)\left(1 - tF_{SPP,0.1,5}\right)F_{PR,0.1,2} =$$
$$= (1800 - 500)(1 - 0{,}5 \times 0{,}80614)0{,}57619 = 6019UM$$

$$\Re_A^{''} = R_A(1-t) = 1000(1-0{,}5) \qquad = \ 500\,UM$$

$$\Re_A^{'''} = C.r = 500 \times 0{,}10 \ ) \qquad = 50\,UM$$

$$\Re_A = R_A^{'} + R_A^{''} + R_A^{'''} \qquad = 6569\,UM$$

Máquina B

Só apresenta custo tipo inicial, com $C_i \equiv C_d$

$$\Re_B = C_{Bd}\left(1 - tF_{SDP,r,n'}\right)F_{PR,r,n} = C_{Ai}\left(1 - tF_{SDP,0.1,5}\right)F_{PR,0.1,5} =$$
$$= 24000(1 - 0{,}5 \times 0{,}80614)0{,}40211 = 5761UM$$

$\Re_A > \Re_B$, logo a máquina B é mais económica.

R: Máquina B

4.2 Uma máquina tem um valor contabilizado de $300000\,UM$, valor residual nulo, restando-lhe ainda três anos de vida, e tem sido amortizada segundo o método linear. Se for abandonada, pode ser considerada um prejuízo imediato quando retirada da linha de fabrico. Se a taxa de imposto for de 51% e o dinheiro valer 10% ao ano após os impostos, calcule o valor actual dos benefícios em termos de impostos, se a máquina for abandonada agora.

Resolução:

- Suponha-se primeiramente que se retém a máquina.
  A amortização devida aos três anos de vida restantes será

  $$D_m = 100000\,UM\,/\,ano$$
  (porquê?)

  e a poupança anual em imposto
  $$D_m t = 51000\,UM\,/\,ano$$

  O respectivo valor actual P' será
  $$P' = 51000\,F_{RP,0.1,3} = 126822\,UM$$
  $$(2{,}4869)$$

- Se se abandonar a máquina agora, a poupança imediata em impostos é

  $$300000\,t = 153000\,UM$$
  (porquê?)

  cujo valor actual é
  $$P'' = 153000\,UM$$

Portanto, o ganho em termos de benefícios devidos a poupança de impostos será dada por, a favor do abandono imediato da máquina,

$$P''-P' = 153000 - 126822 = 26178\ UM$$

R: $26178\ UM$

4.3 Uma máquina nova custa $8000\ UM$ e dura 10 anos com um valor residual nulo. Quanto se pode despender no presente para reparar uma máquina usada já completamente amortizada, prolongando a sua vida por mais de três anos? O valor do dinheiro é de 10% ao ano, a taxa de imposto é de 52% e usa-se para amortização da máquina nova o método da soma dos dígitos e uma vida de 10 anos para efeitos fiscais.

Resolução:

O custo anual uniforme da máquina nova, considerando apenas o custo inicial e o valor residual, é

$$R_{nova} = C_{d_{nova}}\left(1 - t\, F_{SDP,r,n'}\right) F_{PR,r,n}$$

(porquê?)

$$= 8000\left(1 - 0{,}52\, \underbrace{F_{SDP,0.1,10}}_{(0{,}70099)}\right) \underbrace{F_{PR,0.1,10}}_{(0{,}16275)}$$

$$= 827{,}4 UM$$

O máximo que se deverá despender para reparar a máquina existente deve ser tal que a correspondente anuidade uniforme não exceda a da máquina nova, isto é,

$$R_{rep.} = R_{nova} = 827{,}4\ UM$$

Assim

$$R_{rep} = 827{,}4 = C_{rep}(1-t)\, F_{PR,r,n}$$

ou

$$827{,}4 = C_{rep}(1 - 0{,}52)\, \underbrace{F_{PR,0.1,3}}_{(0{,}40211)}$$

de onde

$$C_{rep} = 4287\ UM$$

R: $4287\ UM$

5. Substituição

5.1 Uma máquina custou, há 8 anos, $50000\ UM$ e tem uma vida de 10 anos. O seu valor real é agora $1000\ UM$, daqui a um ano $500\ UM$, não tendo qualquer valor daqui a dois anos. Foi no entanto depreciada pelo método linear, admitindo uma vida de 10 anos e um valor de sucata nulo. As despesas previstas no ano que se segue são de $5000\,UM$, e no ano seguinte $10000\,UM$, ambos estes valores referidos ao fim do ano.

Uma máquina nova, tecnologicamente mais avançada, custa $60000\,UM$, tem uma vida de 12 anos e um valor de sucata de $5000\,UM$. É amortizada em 10 anos, com o mesmo valor de sucata, pelo método linear. As despesas anuais são de 1000 unidades monetárias por ano, trazendo porém benefícios no valor de $4400\,UM$, devido á poupança de mão de obra e ao melhor rendimento.

Deve-se comprar a máquina nova ou consertar a existente? Se tanto nesta como naquela se tivesse usado para método de amortização o método da soma dos dígitos, chegar-se-ia á mesma conclusão?

Taxa de juro após impostos: 10%
Taxa de imposto: 50%

Resolução:

a) Existente

$$C_i = 50\ \ 000 UM,\ C_L = 0,\ n = 10\ anos$$

Tem-se $C_i = C_d$ (eq.I-47) e portanto o valor contabilizado (eq.I-49 e quadro I.3) será dado por

- método linear $B_m = C_i - \sum D_m = C_i\left(1 - \frac{m}{n}\right)$
- método da soma dos dígitos $B_m = C_i\left[1 - \frac{m}{n(n+1)}(2n + 1 - m)\right]$

Assim os valores contabilizados do existente no fim do oitavo ano, nono ano e décimo ano são, em UM,

Ano m	Método linear	Método da soma dos dígitos
8	$50000(1-0{,}8) = 10000$	$50000(1-0{,}945) = 2750$
9	$50000(1-0{,}9) = 5000$	$50000(1-982) = 900$
10	0	0

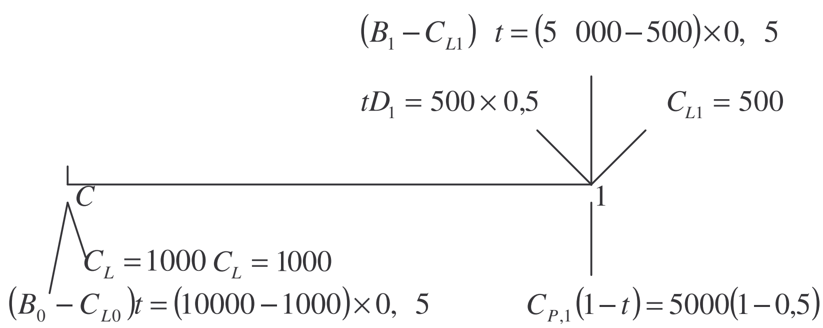
Com estes valores e atendendo aos valores residuais reais e às despesas previstas, respectivamente

$$C_{L0} = 1000\,UM,\ C_{L1} = 500\,UM,\ C_{L2} = 0\,UM,\ C_{f1} = 5000\,UM,\ C_{f2} = 100000\,UM$$

e ainda a que $r = 0{,}1$ e $t = 0{,}5$, é possível traçar os diagramas fluxos-tempo, para o ano seguinte ao oitavo e para os dois anos seguintes ao oitavo. (Os índices 0, 1 e 2 representam o fim do oitavo ano, do nono e do décimo ano).

Ano seguinte ao oitavo

- Método linear



(identifique os vários fluxos!)

O valor actual P_{c1} destes fluxos relativos ao existente é

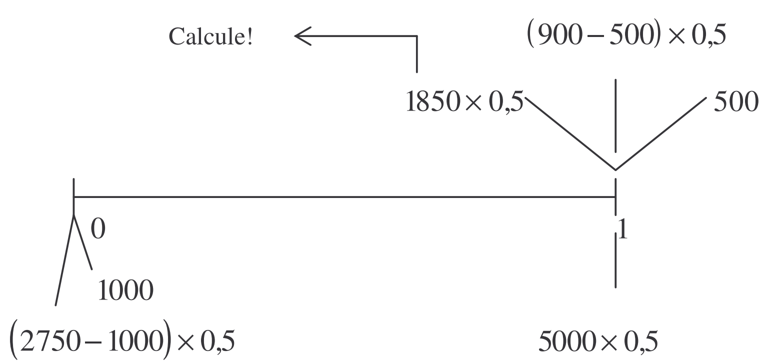
$$P_{C_1}^{ML} = 1000 + 4500 - \frac{2500 + 2250 + 500 - 2500}{1{,}1} = 3000UM$$

Tomado como um custo, e o correspondente custo anual uniforme

$$\Re_{C_1}^{ML} = 3000 \times 1{,}1 = 3300UM / ano$$

- Método da soma dos dígitos

Tem-se identicamente

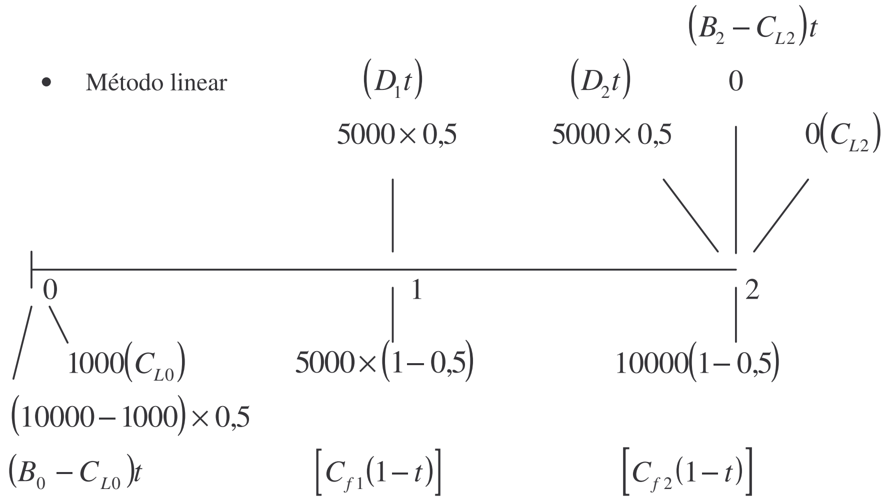


$$P_{C_1}^{SD} = 1000 + 875 - \frac{925 + 200 + 500 - 2500}{1{,}1} = 2670\ UM$$

$$\Re_{C_1}^{SD} = 2670 \times 1{,}1 = 2940\ UM / ano$$

Dois anos seguintes ao oitavo

- Método linear

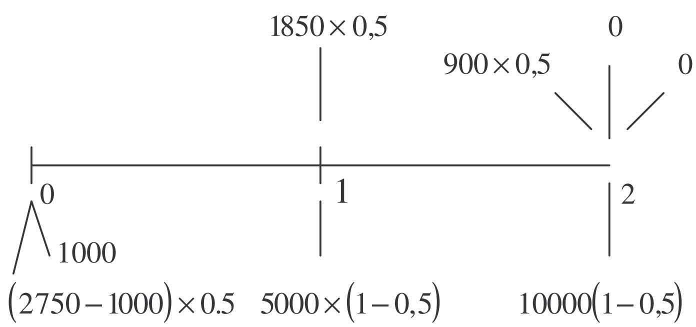


$$P_{e_2}^{ML} = 5500 - 0 - \frac{2500 - 5000}{1,1^2} = 7770UM$$

$$\Re_{e_2}^{ML} = 7770 F_{PR,0.1,2} = 4480 \;\; UM / ano$$

$$0,57619$$

- Método da soma dos dígitos



$$P_{C_2}^{SD} = 1875 - \frac{925 - 2500}{1,1} - \frac{450 - 5000}{1,1^2} = 7055\, UM$$

$$\Re_{C_2}^{SD} = 7055 \times 0,57619 = 4070\, UM / ano$$

$$(F_{PR,0.1,2})$$

b) Destituidor

- Método linear
  Em termos de custo anual uniforme

$$(C_i - C_L)(1 - tF_{MLP,r,n'})F_{PR,r,n} = 55000(1-0,\ \ 5\times 0,70099)0,\ \ 14676 = 5730$$
$$(6000-5000)(F_{MLP,0.1,10})(F_{PR,0.1,12})$$

$$R(1-t) \qquad = (1000-4400)(1-0,5) \qquad = -1700$$
$$C_L r \qquad = 5000\times 0,10 \qquad = \ \ 500$$

$$\Re_d^{ML} \quad = \quad 4530\, UM\ /\ ano$$

- Método da soma dos dígitos

$$(60000-5000)\left(1-0,5\, F_{SDP,0.1,10}\right) F_{PR,0.1,12} \qquad = \quad 5230$$
$$(0,61446)$$
$$R(1-t) \qquad = -1700$$
$$C_L r \qquad = \quad 500$$
$$\Re_d^{SD} = \quad 4030\, UM\ /\ ano$$

Comparando os valores de $\Re$ conclui-se que, amortizando pela soma dos dígitos, se deve conservar o existente só até ao fim do primeiro ano que segue e que amortizando pelo método linear, se deve conservar até ao fim da vida.

R: Linear – conservar o existente/Soma dos dígitos – substituir ao fim do 1 ano

5.2 Uma caldeira comprada há 5 anos custou $1000\, UM$ e foi depreciada pelo método linear na base de 8 anos de vida e um valor residual de $200\, UM$. No ano que segue, os custos de manutenção anuais são de $400\, UM$, aumentando de 20% por ano, nos anos seguintes. Os custos de mercado revelam, no entanto, que a amortização real da caldeira se processou mais de acordo com o modelo da dupla percentagem fixa. Uma caldeira nova custa $2350\, UM$, com um valor residual de $200\, UM$ e 10 anos de vida. Para método de amortização usar-se-á o da soma dos dígitos, baseado também numa vida de 10 anos.

Os custos anuais de manutenção estimam-se em $100\, UM$.

Pretende-se saber se se deve consertar a caldeira existente até ao fim da sua vida prevista, ou substituí-la por uma nova. Justifique a resposta, indicando as possíveis imprevisões da análise.

Valor do dinheiro após impostos: 8%
Taxa de imposto: 50%

Resolução:

a) Existente

$$Ci = 1000\, UM,\ C_L = 200\, UM,\ n = 8\ anos,\ C_{f6} = 400\, UM,\ C_{f7} = 4800\, UM$$

- Valor contabilizado (método linear de amortização)

$$B_m^{ML} = C_i - \sum_1^m D_m = C_i - \left(C_i - C_L\right)\frac{m}{n}$$

(eq I-49 e quadro I-3)

de onde se conclui que

$$B_5^{ML} = 500\ UM\ , B_6^{ML} = 400\ UM\ , B_7^{ML} = 300\ UM$$

- Depreciação real (segundo o método da dupla percentagem fixa)

Os valores residuais em cada ano são o valor contabilizado calculado pelo método da dupla percentagem fixa

$$B_m^{MDPF} = C_i - \sum_1^m D_m = C_i - C_i\left[1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right] = C_i\left(1-\frac{2}{n}\right)^m$$

(eq. I-49 e quadro I-3)

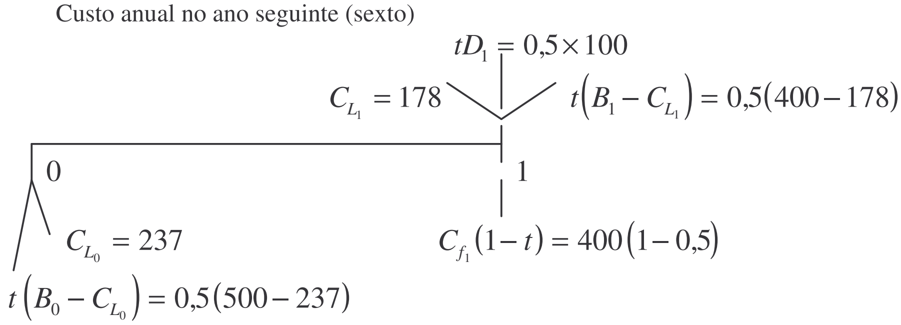
de onde se calcula que

$$B_5^{MDPF} = 237\ UM\ , B_6^{MDPF} = 178\ UM\ , B_7^{MDPF} = 133\ UM$$

Na análise para os anos seguintes, far-se-á, de acordo com a nomenclatura usada na secção 5 da Parte I,

$$B_5^{ML} \equiv B_0\ , B_6^{ML} \equiv B_1\ , B_7^{ML} \equiv B_2\ ; B_5^{MDPF} \equiv C_{L0}\ , B_6^{MDPF} \equiv C_{L_1}\ , B_7^{MDPF} \equiv C_{L_2}$$

- Custo anual no ano seguinte (sexto)

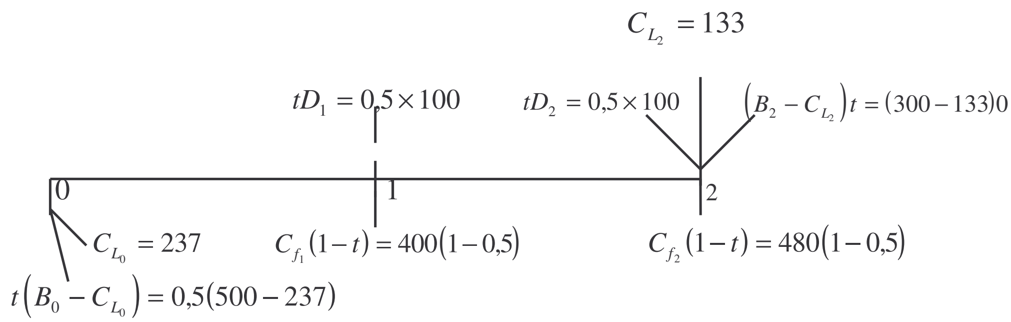


$$t = 0,5$$
$$r = 0,08$$

$$P_{e_1} = 237 + 0,5\times 263 + (200 - 111 - 178 - 50)F_{SP,0.08,1} = 239,8\ UM$$
$$(0,92593)$$

$$\Re_{e_1} = P_1 F_{RP,0.08,1} = 239,8\times 1,0800 = 259\ UM\ /\ ano$$

- Custo anual, considerando o sexto e o sétimo anos



$$P_{e_2} = 237 + 0,5 \times 263 + (200-50)\underset{(0.92593)}{F_{SP,0.08,1}} + (240-50-133-83 \bullet 5)\underset{(0.85734)}{F_{SP,0.08,2}} =$$
$$= 484\ UM$$
$$\Re_{e_2} = 484\ \underset{(0.56077)}{F_{PR,0.08,2}} = 272\ UM/ano$$

b) Destituidor

$$C_i = 2350\ UM,\ C_L = 200\ UM,\ n = n' = 10 anos,\ R = 100\ UM/ano$$

Em termos de custo anual uniforme

$$\underset{(2150)}{C_d}\left(1 - t\underset{(0,74771)}{F_{SDP,0.08,10}}\right)\underset{(0,14903)}{F_{PR,0.08,10}} = 201$$
$$R(1-t) = 100(1-0,5) = 50$$
$$C_L r = 200 \times 0,08 = 16$$
$$\Re_d = 267\ UM/ano$$

Comparando $\Re_d$ com $\Re_{C1}$ e $\Re_{C_2}$ conclui-se que se deve conservar o existente por mais um ano e substitui-lo então caso não se modifiquem os dados económicos.

R: Deve conservar-se apenas mais um ano

É necessário calcular os valores contabilizados - B_0, B_1 e B_3, bem como as amortizações anuais D_1, D_2 e D_3. Estas calculam-se pela expressão (quadro I-3)

$$\left(C_i - C_L\right)\frac{n-m+1}{0,5n(n+1)}$$

pondo respectivamente $m = 5, m = 6$ e $m = 7$ (porquê?). Tem-se

$$D_1 = 35000 \frac{10-5+1}{0,5n(n+1)} = 3818\ UM$$
$$D_2 = 3182\ UM$$
$$D_3 = 2546\ UM$$

Quanto a B_0, é dado por

$$B_0 = C_i - \sum_1^m D_m$$

em (quadro I-3)

$$\sum_1^m D_m = \left(C_i - C_L\right) \frac{m}{n\,(n+1)} (2n+1-m)$$

e $m = 4$ (porquê?). Tem-se

$$B_0 = 35000 - 35000 \frac{4}{10\,(10+1)} (20+1-4) = 13364\ UM$$

Por outro lado

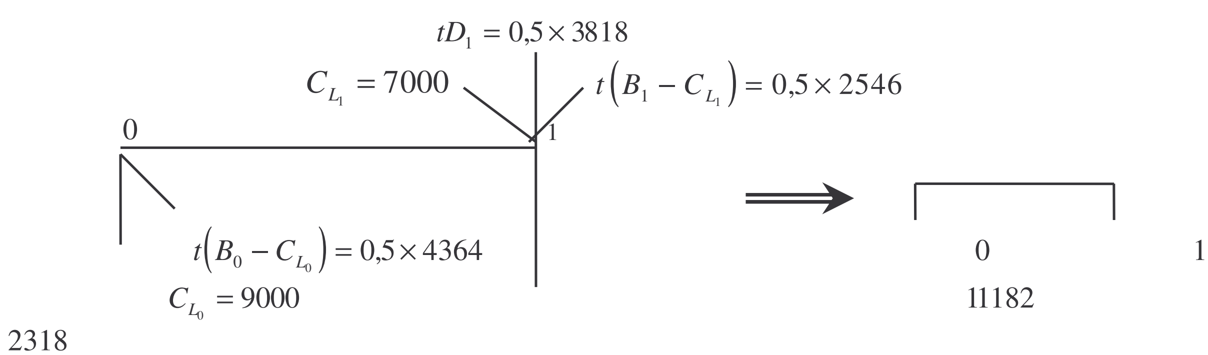
$$B_1 = B_0 - D_1 = 9546\ UM$$

e

$$B_3 = B_0 - \left(D_1 + D_2 + D_3\right) = 3818\ UM$$

Podem-se agora representar os diagramas de fluxos monetários-tempo para os anos que se seguem.

- Um ano de comparação



$$C_{f_1}(1-t) = 25000\left(1-0,5\right)$$ (verifique!)

Portanto

$$\Re_{C_1} = \underset{\text{(porquê?)}}{11182\left(1+0,12\right)} + 2318 = 14842\ UM\ /\ Ano$$

- Três anos de comparação

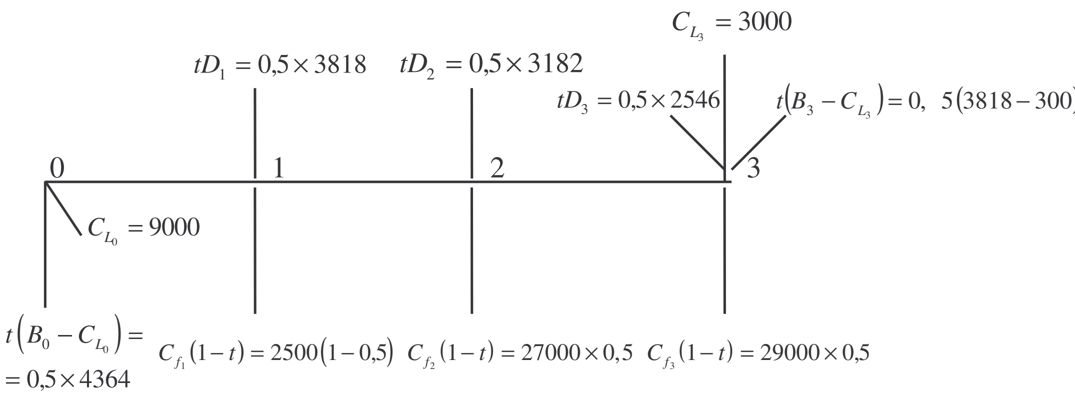


diagrama equivalente a

de onde

$$\Re_{C_3} = 11182\, F_{PR,0.12,3} + 10591(1+0{,}12)^{-1} F_{PR,0.12,3} + $$
$$+ 11909(1+0{,}12)^{-2} F_{PR,0.12,3} + 9818(1+0{,}12)^{-3} \times F_{PR,0.12,3} =$$
$$= 15455\, UM\,/\,ano$$

Conclui-se, por comparação de $\Re_{C_1}$ e $\Re_{C_3}$ com $\Re_d$ que convém manter o existente pelos três anos. (Faça os cálculos para os dois anos seguintes)

R: a) Não convém a reposição imediata
b) Convém manter a máquina usada durante os próximos 3 anos

5.4 Um equipamento custa $50000\, UM$, a pronto, e deve ser substituído em cada n anos. O custo de operação é praticamente constante com a idade do equipamento, porém o custo de manutenção cresce exponencialmente com a idade. Pode considerar-se que o custo anual de manutenção, apurado ao fim de cada ano, é dado por $M_K = 15000(1{,}3^{k-1})\,UM, k = 1{,}2{,}3\ldots.$ O valor residual do equipamento decresce também exponencialmente sendo dado, ao fim de cada ano, por $C_k = 50000(0{,}8^k)\,UM, k = 1{,}2\ldots$

Raciocinando-se com a taxe de juro de 15% ao ano, de quanto em quantos anos se deverá fazer a substituição desse equipamento? Sugestão: Considerar $n = 1{,}2{,}3.$

Resolução:

$$C_i = 50\ \ 000\,UM\,, M_k = 15\ \ 000\times 1{,}3^{k-1} = C_{fk,}\, C_{L_{12}} = 50\ \ 000\times 0{,}8^1$$
$$i = 0{,}15$$

- Para $n = 1$ ano

  O custo anual uniforme do equipamento é dado por, pondo $k = 1$,

$$\Re_1 = \left(50000 + \frac{15000\times 1{,}3^0 - 50000\times 0{,}8^1}{1+0{,}15}\right)(1+0{,}15) = 32500\,UM\,/\,ano$$

  (trace o diagrama fluxos-tempo)

- Para $n = 2$ anos

  O custo anual uniforme do equipamento é agora dado por

$$\Re_2 = \left[50000 + \underset{(k=1)}{\frac{15000\times 1{,}3^0}{1+0{,}15}} + \underset{(k=2)}{\frac{15000\times 1{,}3^1 - 50000\times 0{,}8^2}{(1+0{,}15)^2}}\right] F_{PR,0.15}$$
$$= 32965\,UM\,/\,ano$$

Como $\Re_2 > \Re_1$, conclui-se que o equipamento deve ser substituído ao fim de um ano.
Comente a resolução e o enunciado deste problema

R: Todos os anos

6. Inflação

6.1 Um determinado equipamento custa $10000\,UM$ e dura 1 ano. Quanto se pode despender na aquisição de outro equipamento para o mesmo fim, mas que dura 10 anos, se o dinheiro valer 8% ao ano e se a taxa de inflação for: a) 4% , b) 8% e c) 12% ?

Resolução:

a) Seja C_1, o custo do equipamento com duração de 1 ano $(10000\,UM)$ e C_{10} o do equipamento que dura 10 anos.

Combinando as eq.(I-98) e (I-99) e atendendo a que não se consideram os impostos, obtém-se

$$\Re_D = (r-d)\,C\frac{F_{PS,r,n}}{F_{PS,r,n} - F_{PS,d,n}} \qquad \begin{matrix} r = 0{,}08 \\ d = 0{,}04 \end{matrix} \qquad d < r$$

Para a primeira máquina

$$\Re_{D_1} = (0{,}08 - 0{,}04)\underset{C_i}{10000}\frac{\overset{(1{,}06)}{F_{PS,0{,}08,1}}}{\underset{(1{,}08)}{F_{PS,0.08,\ 1}} - \underset{(1{,}04)}{F_{PS,0.04,\ 1}}} = 10800\,UM$$

Para a segunda máquina C_{10} terá ser tal que

$$\Re_{D_2} = \Re_{D_1} = 10\ \ 800 = 0,\ \ 04C_{10}\frac{F_{PS,0.08,10}}{\underset{(2{,}1584)}{F_{PS,0.08,10}} - \underset{(1{,}4802)}{F_{PS,0.04,10}}}$$

de onde

$$C_{10} = 84881\,UM$$

b) Para este caso usa-se a eq.(I-102), sem ter a atenção os impostos

$$\Re_{D_1} = \frac{C_1}{n}(1+r) = \frac{10000}{\underset{(n=1)}{1}} \times 1{,}08 = 10800\,UM$$

e C_{10} é determinado por $\qquad r = d = 0{,}08$

$$10800 = C_{10}\frac{1+0{,}08}{\underset{(n=10)}{10}}$$

$$C_{10} = 100000\,UM$$

c) Procede-se como em a), usando a expressão

$$\Re_D = (d-r)\,C\frac{F_{PS,r,n}}{F_{PS,d,n} - F_{PS,r,n}} \qquad \text{(porquê?)} \qquad \begin{matrix} r = 0{,}08 \\ d = 0{,}12 \end{matrix} \qquad d > r$$

Obtém-se sucessivamente $R_{D_1} = 10800\,UM$ e $C_{10} = 118420\,UM$
Verifique!

R: a) $84881\,UM$; b) $100000\,UM$; c) $118420\,UM$

6.2 Um tanque novo custa 10 000 UM em termos de preços correntes, dura 3 anos e faz parte de um grupo de equipamento amortizado em 5 anos pelo método da soma dos dígitos. Se o dinheiro valer 10% ao ano após uma taxa de imposto de 52% e se a taxa de inflação for de 4% por ano, quanto se pode despender em reparações por ano (referidas ao fim do ano) de maneira a prolongar a vida do tanque por mais 2 anos (total de 5 anos de vida) ?

Resolução:

Tem-se, supondo o valor residual nulo, $C_d = 10000\,UM$ com $n = 3$ anos, $n' = 5$ anos, $r = 0{,}10$, $d = 0{,}04$ e $t = 0{,}52$.

Para a máquina nova e $n = 3$, utiliza-se a eq. I-98 ou a eq. da linha 1, coluna 2 do quadro I-6

$$P_\infty = C_d\,(1 - tF_{SDP,r,n'})\frac{F_{PS,r,n}}{F_{PS,r,n} - F_{PS,d,n}} = 10000\left(1 - 1{,}52\underset{(0,80614)}{F_{SDP,0.10,5}}\right)\times$$

$$\times\frac{F_{PS,0.1,3}}{\underset{(1,3310)}{F_{PS,0.1,3}} - \underset{(1,1249)}{F_{PS,0.04,3}}} = 37509UM$$

Para a mesma máquina, com reparações anuais uniformes para prolongar a vida para $n = 5$ anos, utilizam-se as eq. da coluna 2, linhas 1 e 2:

$$\Re_d = C_a\left(1 - tF_{SDP,n,n'}\right)\frac{F_{PS,r,n}}{F_{PS,r,n} - F_{PS,d,n}} + R(1-t)\frac{1-d}{r-d}$$

Para que a máquina se mantenha economicamente equivalente terá que se satisfazer a

$$R_d = 37509 = 10000(1 - 0{,}52\times 0{,}80614)\frac{F_{PS,0.1,5}}{\underset{(1,6105)}{F_{PS,0.1,5}} - \underset{(1,2167)}{F_{PS,1.04,5}}} +$$

$$+ R(1-0{,}52)\frac{1+0{,}04}{0{,}1-0{,}04}$$

de onde

$$R_D = 1653\,UM$$

(a preços correntes presentes)

Quando se paga, em dinheiro, no fim do 4º e do 5º anos de vida da máquina pelas reparações ?

R: $1653\,UM$, a preços constantes refª. ao fim do 3º ano.

CAPÍTULO 2. AVALIAÇÃO ECONÓMICA DE PROJECTOS

1. Um determinado projecto tem as despesas e receitas seguintes:

Tempo (anos)	Fluxo Monetário (UM)
0	-1000
0 – 1	475
1 – 2	400
2 – 3	330
3 – 4	270
4 – 5	200

Determine o valor dos índices: a) Posição de caixa; b) tempo de recuperação; c) taxa de juro interna e d) razão benefícios/custos.

Resolução:

a) A posição de caixa é o fluxo monetário acumulado no fim da vida do projecto ou seja

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = -1000 + 475 + 400 + 330 + 270 + 200 = 675\ UM$$

b) A parte interna do tempo de recuperação é m tal que

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \leq -a_0$$

ou seja, neste caso, $m = 2$, visto que

$$\sum_{j=1}^{2} a_j = 875 < \underset{(a_0)}{1000} \text{ e } \sum_{j=1}^{3} a_j = 1205 > 1000$$

A parte fraccionária f obtém-se por interpolação linear

$$f = -\frac{a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j}{a_{m+1}} = -\frac{-1000 + 875}{330} \approx 0{,}38$$

o que conduz a um tempo de recuperação de 2,38 anos, ou, aproximadamente, 2 anos e 5 meses

c) A taxa de juro interna é tal que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (1 + i_i)^{-j} = 0$$

em que i_i é a taxa de juro interna

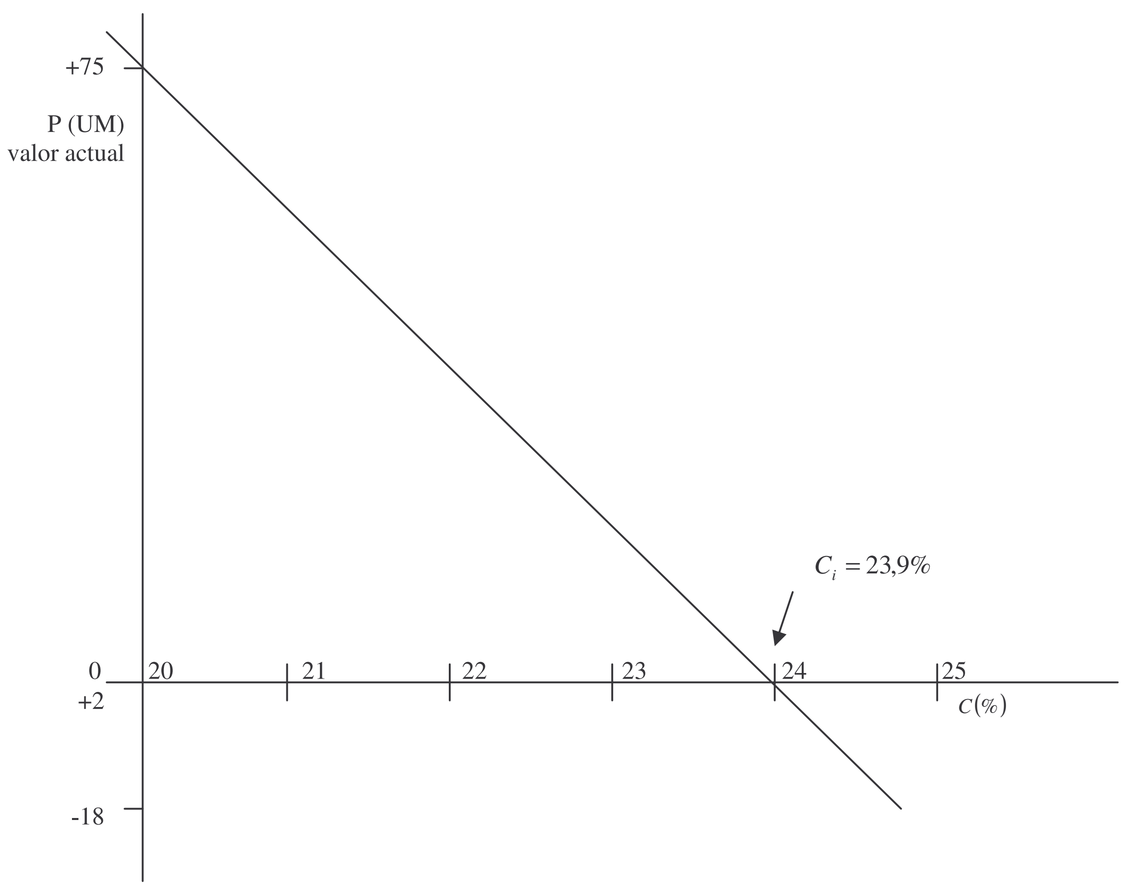
O valor de i_i determina-se por um método iterativo, arbitrando valores de i até se obter $\sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j}$, o valor actual dos fluxos monetários ocorridos na vida do projecto, igual a zero ou então por um processo gráfico em que se representa aquele valor actual em função de i e se determina graficamente qual o i para o qual se tem um valor actual nulo.

No quadro seguinte, ilustra-se o primeiro método, porém sem preocupações de determinar um valor exacto:

n_1 **anos**	**Fluxo monetário** UM	**Valor actual,** UM					
		$i = 0{,}25$		$i = 0{,}20$		$i = 0{,}24$	
		$F_{SP,i,n}$	P	$F_{SP,i,n}$	P	$F_{Sp,i,n}$	P
0	-1000	1,00000	-1000	1,00000	-1000	1,00000	-1000
1	475	0,80000	+ 380	0,83333	+ 396	0,80645	+ 383
2	400	0,64000	+ 256	0,69444	+ 278	0,65036	+ 260
3	330	0,51200	+ 169	0,57870	+ 191	0,52449	+ 173
4	270	0,40960	+ 111	0,48225	+ 130	0,42297	+ 114
5	200	0,32768	+ 66	0,40188	+ 80	0,3411	+ 68
			- 18		+ 75		- 2

Deste quadro conclui-se que a taxa de juro interna para este particular projecto, é cerca de 24%.

Os cálculos apresentados no quadro podem aproveitar-se para ilustrar o método gráfico, como se mostra na figura seguinte:



d) Para calcular a razão benefícios/custos é necessário o valor do interesse sobre o capital i que não é dado. Escolhendo por exemplo $i = 0{,}20$ e aproveitando os cálculos efectuados em c) obtém-se

$$\overline{R} = \left.\frac{PB}{PC}\right|_{i=0{,}20} = \frac{396 + 278 + 191 + 130 + 80}{1000} = \frac{1075}{1000} =$$

$$= 1{,}075$$

R: a) $675\,UM$
b) $2{,}38$ anos
c) -24%
d) $1{,}075$

2. Dois projectos A e B em comparação, ambos com a vida de 5 anos, apresentam-se rendimentos líquidos anuais estimados, respectivamente de $400\,UM$ e $500\,UM$, sendo nulo no entanto, o fluxo monetário do primeiro ano no projecto B. O investimento inicial no projecto B é de $1200\,UM$ e no projecto A tem que se fazer um investimento adicional de $100\,UM$ no terceiro ano. Qual deve ser o investimento inicial máximo no projecto A para que seja economicamente comparável ao projecto B?

Resolução:

Para o projecto B pode determinar-se a taxa de juro interna, índice que se utilizará para a pretendida equivalência dos dois projectos. Tem-se:

n **anos**	**Fluxo monetário** UM	**Valor actual,** UM $i = 0{,}16$	$i = 0{,}18$
0	-1200	-1200	-1200
1	-	-	-
2	500	372	359
3	500	320	304
4	500	276	258
5	500	238	219
		+ 6	- 60

Um valor muito aproximado para a taxa de juro interna será $i_i = 16{,}2\%$ (por interpolação).

O projecto A apresenta a seguinte estrutura

n, anos	0	1	2	3	4	5
fluxos, UM	X	400	300	400	400	400

Pretende-se X tal que a taxa de juro interna para A seja também $16{,}2\%$ e portanto terá que ser

$$-X + 400\,F_{RP,0.162,5} - 100\,F_{sp,0.162,2} = 0$$

(porquê?)

de onde se conclui que

$$X = 1229 \ UM$$

R: $1229 \ UM$

3. Uma firma tem de optar entre dois projectos A e B, ambos com 5 anos de vida útil e cujos rendimentos líquidos anuais estimados são (em UM, referidos ao fim do ano):

ANO PROJECTO	1	2	3	4	5
A	400	500	100	100	20
B	0	500	500	500	500

O projecto A exige um investimento inicial de $600 \ UM$ e um segundo investimento no 3º ano no valor de $335 \ UM$ e o projecto B apenas um único investimento inicial de $1140 \ UM$.

A firma fixou para as suas operações um valor do dinheiro não inferior a 14%.
Qual deveria ser o projecto seleccionado? Justifique a sua resposta.

Resolução:

Calcule-se primeiramente o valor actual (para $i = 0{,}14$) e a taxa de juro interna dos dois projectos

<u>Projecto A</u>

n **anos**	**Fluxo mon.,** UM	**Valor actual,** UM $i = 0{,}14$	$i = 0{,}15$	$i = 0{,}20$
0	-600	-600	-600	-600
1	400	351	348	333
2	500	385	378	347
3	-235	-159	-155	-136
4	100	59	57	48
5	20	10	10	8
		~+46	~+38	~0

Tem-se pois

$$P_A = 46 \ UM$$

$$i_{i_A} = 0{,}20$$

Projecto B

n, **anos**	**Fluxo mon.** UM	**Valor actual,** UM $i = 0{,}14$	$i = 0{,}16$	$i = 0{,}20$
0	-1140	-1140	-1140	-1140
1	-	-	-	-
2	500	385	372	347
3	500	338	320	289
4	500	296	276	241
5	500	260	238	201
		~+139	~+66	~-62

Conclui-se que

$$P_B = 139\ UM$$
$$i_{i_B} = 0{,}18$$
(por interpolação)

isto é, $P_B > P_A$ mas $i_{i_B} < i_{i_A}$

Fazendo a análise diferencial dos dois projectos

Projecto B – Projecto A

n **anos**	**Fluxo mon.** UM	**Valor actual,** UM $i = 0{,}14$	$i = 0{,}16$	$i = 0{,}20$
0	-540	-540	-540	-540
1	-400	-351	345	-333
2	0	0	0	0
3	735	496	471	425
4	400	237	221	193
5	480	249	229	193
		~+91	~+36	~-62

Após interpolação conclui-se que a taxa de juro interno para o projecto diferencial é $i_i = 0{,}175$, superior à taxa mínima de atractividade ($i = 0{,}14$) pelo que se deve escolher o projecto de maior investimento, ou seja o projecto B, aliás em consonância com o resultado a que se chega pelo método do valor actual.

R: Projecto B