APONTAMENTOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

L.E.S.I. – 2004/2005

Olga Vaz

CAPÍTULO I

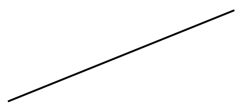
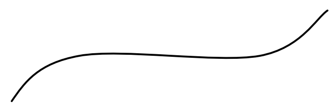
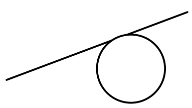
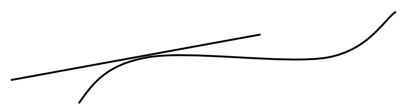
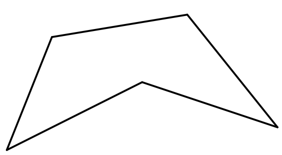
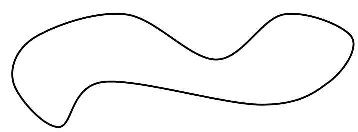
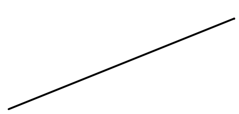
I. Os números reais e suas propriedades

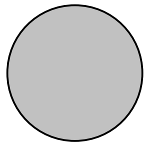
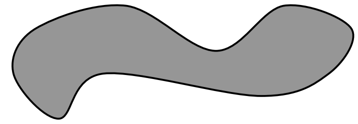
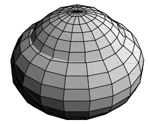
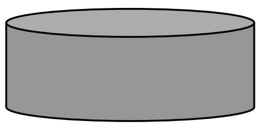
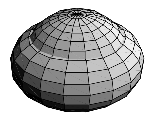
Análise Matemática

Nesta disciplina estudaremos sobretudo Cálculo Diferencial e Cálculo Integral.

A palavra "cálculo" vem da palavra latina usada nos tempos do Império Romano para significar "pedrinha"; com o passar dos séculos, por volta da Idade Média, "calcular" passou a ser sinónimo de "fazer contas".

Hoje em dia, o Cálculo baseia-se nos conceitos da Matemática Elementar (aritmética, geometria, trigonometria) enriquecidos com o conceito de limite.

Matemática Elementar	**Cálculo**
 declive de uma recta: $y = mx + b$	 declive de uma curva; $y = f(x)$
 recta tangente a uma circunferência	 recta tangente a uma curva
velocidade média aceleração média distância percorrida a velocidade constante	velocidade instantânea aceleração instantânea distância percorrida a velocidade variável
 área de uma região limitada por segmentos de recta	 área de uma região limitada por curvas
soma de um número finito de parcelas: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	soma de um número infinito de parcelas: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
média de uma colecção finita de números	média de uma função num intervalo
 comprimento de um segmento de recta	 comprimento de um segmento de curva

 centro de um círculo	 centróide de uma região
 volume de um sólido rectangular	 volume de um sólido de fronteira curva
 área da superfície de um cilindro	 área da superfície de um sólido mais genérico

A Análise é um ramo da Matemática onde se estudam os conjuntos de números reais e complexos e as funções definidas nesses conjuntos.

Embora as suas raízes remontem à Grécia Antiga, com Zenão de Eleia e os famosos paradoxos (~ 450 AC), e Arquimedes com o chamado "método de exaustão" (~ 225 AC), a sua formulação rigorosa data do século XVII com Newton e Leibniz; estuda conceitos tais como limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade. Foi depois desenvolvida pela família Bernoulli, tendo atingido o seu estado actual em cerca de um século.

Sir Isaac Newton
1643 – 1727 (Inglaterra)

Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646 - 1716 (Alemanha)

Newton e Leibniz desenvolveram separadamente uma formulação rigorosa usando notações diferentes. O desenvolvimento científico e tecnológico que foi possível com esta nova ferramenta foi imenso; hoje em dia é mais usada a notação de Leibniz.

A Análise Matemática trabalha com conceitos muito subtis como limite, infinitésimo e infinito, daí que o seu desenvolvimento fosse lento; muitos matemáticos contribuiram para a compreensão destes conceitos; a sua complexidade é ilustrada por Galileu (1564 – 1642):

...tentamos, com as nossas mentes finitas, discutir o infinito, atribuindo-lhe propriedades que damos aos finitos e limitados; mas eu acho que isso está errado, porque não podemos falar de quantidades infinitas como sendo uma menor ou maior ou igual a outra.

Mas a imaginação humana não tem limites, e os trabalhos de Newton e Leibniz começaram um caminho para o estudo formal de conjuntos infinitos; são de destacar os trabalhos de Cantor e Gödel.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
1845 - 1918 (Alemanha)

Kurt Gödel
1906 - 1978

Para mais informações sobre os trabalhos destes matemáticos, consultar os endereços:
http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/BiogIndex.html
http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Infinity.html

Propriedades dos números reais

Há conjuntos de números já conhecidos desde o ensino secundário, e com designações especiais:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$ é o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Verifica-se a seguinte inclusão natural: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Todos estes conjuntos são representados sobre um eixo, isto é, uma recta onde se marca uma origem — zero — e uma unidade — por exemplo, o número 1 — dando-lhe assim um sentido. Convencionou-se marcar os números negativos à esquerda do zero e os positivos à direita, fazendo corresponder a cada ponto da recta um e um só número real.

NOTA: o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos já não pode ser representado sobre uma recta, e vem a inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; basta ver que se pode convencionar escrever $3 = 3 + 0i$.

O conjunto $\mathbb{Q}$

Os números racionais podem ser representados na forma de fracção ou na forma decimal; neste caso temos sempre uma dízima finita ou infinita periódica.

EXEMPLOS:

$\frac{9}{3} = 3$; $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots$; $\frac{1}{50} = 0.02 = \frac{2}{10^2}$.

Cada número racional tem mais que uma representação fraccionária:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{30}{90} = \cdots$.

Notação: usam-se as seguintes notações para as dízimas infinitas periódicas:

$0.3333\cdots = 0.(3) = 0.\dot{3} = 0.\overline{3}$.

O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Os números racionais não permitem resolver todas as nossas medições; este problema foi reconhecido na Antiguidade pelos Gregos, cerca de 500 AC.

Suponhamos que queremos calcular a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Seja *x* a medida da diagonal; temos então que $x^2 = 2$ e hoje em dia escrevemos $x = \sqrt{2}$ (note que se trata de um problema de medição de um comprimento). É fácil provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Aos números reais que não são racionais chamamos irracionais; outros exemplos são os já conhecidos π, *e* (número de Neper). O conjunto dos números irracionais representa-se por $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Quando representados na forma decimal, os irracionais correspondem a dízimas infinitas não periódicas.

EXEMPLOS:

$\pi = 3.14159\cdots$; $\sqrt{2} = 1.414213\cdots$; $\sqrt[4]{2} = 1.189207\cdots$; $123.45678910111213\cdots$.

Temos então que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ têm uma propriedade muito importante: a <u>densidade</u>. Isto significa que, entre quaisquer dois elementos de um destes conjuntos, é sempre possível encontar um terceiro elemento desse mesmo conjunto.

EXEMPLOS:

- é fácil verificar que entre os números racionais $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ podemos encontrar o racional $\frac{35}{120}$; é também óbvio que entre $\sqrt{2}$ e 2 está $\sqrt{3}$.

Sugestão: verifique que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são densos.

No entanto há uma grande mas subtil diferença entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$: só o segundo é <u>completo</u>. A completude de $\mathbb{R}$ permite-nos resolver equações que são impossíveis em $\mathbb{Q}$, como $x^2 = 2$; permite-nos ainda uma operação muito importante em Análise: o cálculo de um limite. Suponhamos que definimos a seguinte sucessão (por recorrência), chamada sucessão de Cauchy: $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

É uma sucessão de números racionais e é possível demonstrar que é convergente e o seu limite é $\sqrt{2}$; este exemplo mostra que $\mathbb{Q}$ não é completo, uma vez que o limite é um irracional.

Consideremos agora a seguinte sucessão de números reais:

0.9; 0.99; 0.999; 0.9999; .....

Qual será o seu limite? Parece simples admitir que se trata do número real representado pela dízima infinita periódica: $0.9999\cdots = 0.\overline{9}$. Mas haverá outra forma de representar este número? A resposta é sim. Qual é a representação fraccionária deste número? E de $0.\overline{3}$?

Estas propriedades não serão demonstradas; um estudo mais aprofundados poderá ser encontrado no livro:"Curso de Análise", (Volume 1) de Elon Lages Lima, da Editora: IMPA - 1992.

Deve ser tomado em consideração que, quando se trabalha com uma máquina de calcular (usando o modo numérico), todos os números reais são tratados como dízimas finitas, o que pode levar a resultados inesperados. Devemos pois ter o cuidado de escrever:

$\frac{1}{3} \approx 0.333$; $\pi \approx 3.1416$; $\sqrt{2} \approx 1.414$.

Inequações e valor absoluto

Resolver uma inequação envolvendo uma incógnita *x* significa determinar todos os valores de *x* para os quais a desigualdade é verdadeira, isto é, determinar o conjunto-solução da inequação. Em geral usam-se as propriedades dos números reais para escrever uma desigualdade equivalente à dada, mas mais simples.

EXEMPLO: resolva a inequação na incógnita *t*: $\frac{1}{2t^2+2} < \frac{1}{4}$.

Recordemos que, dado um número real *a*, define-se módulo ou valor absoluto de *a* do seguinte modo: $|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$.

Em geral é útil pensar em $|a|$ como sendo a distância de *a* a 0, medida na recta real.

Uma das propriedades importantes do valor absoluto é a desigualdade triangular:

$|a+b| \leq |a| + |b|$ para todos os números *a* e *b* reais.

Para recordar as propriedades do valor absoluto vejamos os seguintes exemplos:

EXEMPLOS:

1- Resolva a inequação na incógnita *u*: $|u-2| < 1$;

2- Mostre que $|-3|^2 = (-3)^2$, justificando.

Recorde as definições de supremo, ínfimo, máximo e mínimo, usando os seus livros do ensino secundário ou o livro de Salas, Hille recomendado na bibliografia, para analisar se os conjuntos que se seguem são limitados.

EXEMPLOS:

$A =]-\infty, -13]$; $B = \{ x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 3 \}$; $C = \{ a \in \mathbb{R} : 1.\overline{5} \leq a \leq \sqrt{20} \}$

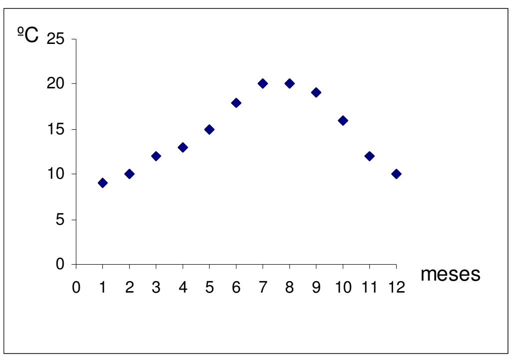
II. Funções reais de uma variável real

Domínio, contra-domínio e gráfico

Os dois principais processos usados em Análise Matemática, diferenciação e integração, são aplicados a funções. Em Matemática, usamos funções para representar a dependência de uma quantidade em relação a outra. Por exemplo, suponhamos que queremos saber como se tem comportado o clima em Braga nos últimos anos, através da temperatura média em cada mês, que nos é dada pela seguinte tabela:

Temperaturas médias em Braga, nos últimos 30 anos											
Jan	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
9°C	10°C	12°C	13°C	15°C	18°C	20°C	20°C	20°C	16°C	12°C	10°C

Um gráfico é uma outra forma de representar a relação entre cada mês e a respectiva temperatura:



Neste caso, temos um conjunto de valores para a variável independente – meses do ano – e um conjunto de valores para a variável dependente – a temperatura.

Outra forma de representar uma função é dar uma "regra" que relacione as variáveis e os seus domínios.

DEFINIÇÃO: sejam D e C dois conjuntos de números reais; diz-se que f é uma função real de variável real de D em C se, a cada elemento de D faz corresponder um e um só elemento de C, com a notação:

$\begin{array}{l} f: D \to C \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}$, onde D é o domínio de f e C é o conjunto de chegada.

Ao conjunto $f(D) = \{ f(x) : x \in D \}$ chamamos contra-domínio ou conjunto de valores de f. Tem-se $f(D) \subset C$.

Por vezes, o domínio de uma função não é especificado; nesse caso convenciona-se que o domínio será o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual o contra-domínio ainda é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

EXEMPLOS:

Que significa determinar o domínio das funções reais definidas pelas seguintes expressões algébricas: $g(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+\sqrt{5})}$ e $h(x)=\sqrt{2x-\pi}$?

Deve ter-se em atenção que o domínio é parte integrante da definição de uma função; por exemplo, são diferentes as funções: $\begin{array}{l} f1:[-3,3]\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto x^3 \end{array}$ e $\begin{array}{l} f2:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto x^3 \end{array}$.

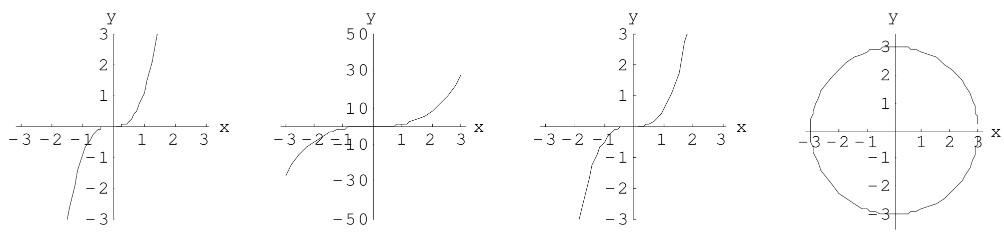
Sempre que possível, convém combinar várias forma de representação de uma função: algébrica, gráfica e numérica.

Em relação aos gráficos há que ter em conta que:

- o gráfico de uma função pode ter aspectos diferentes, dependendo dos eixos;
- funções diferentes podem ter o mesmo aspecto;
- nem todos os gráficos representam uma função.

EXEMPLOS:

$y = x^3$ e $y = 0.5x^5$



Composição de funções

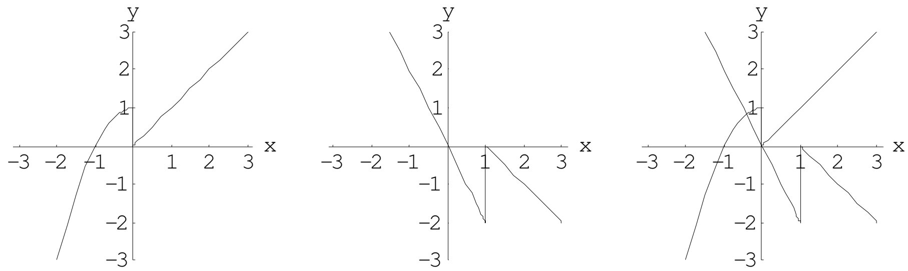
Recorde, usando os manuais, as condições necessárias para realizar operações com funções, tais como adição, multiplicação e divisão.

EXEMPLO:

Dadas as funções definidas por: $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{se } x\le 0\\ x & \text{se } x>0\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases}-2x & \text{se } x<1\\ 1-x & \text{se } x\ge 1\end{cases}$,

defina as funções $f+g$ e $f\times g$.

$y = \text{If}[x < 0,\ 1 - x^2,\ x]$ e $y = \text{If}[x < 1,\ -2x,\ 1 - x]$



NOTA: deve ter muita atenção quando interpreta gráficos de funções.

Recorde agora a definição de função composta de duas funções dadas:

DEFINIÇÃO:

Se o contra-domínio de uma função *g* está contido no domínio de uma função *f*, então a composta de f com g é a função cujo domínio é o domínio de *g* e é dada por $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

EXEMPLO:

Dadas as funções *f* e *g* definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, determine os seus domínios e defina as funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Funções inversas

Recorde as definições de: função injectiva, sobrejectiva e injectiva, e de função inversa de uma função dada.

DEFINIÇÕES:

Dada uma função $f: D \to C$,

1- *f* diz-se injectiva se a pontos diferentes do domínio D corresponderem imagens diferentes do conjunto de chegada C, isto é, $\forall\, a, b \in D,\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

2- *f* diz-se sobrejectiva se o conjunto de chegada C coincide com o contra-domínio $f(D)$, isto é, $\forall\, b \in C,\ \exists\, a \in D: f(a) = b$.

3- *f* diz-se bijectiva se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva.