Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Cálculo I
Teste 1

Engenharia Informática
10/11/2010
Duração: 2h 00m

Responda aos grupos I e II em folhas de teste SEPARADAS.

Grupo I

Exercício 1. [2 valores] Escreva o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| \leq 1\}$$

na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

Exercício 2. [2 valores] Determine o interior, a aderência e a fronteira do conjunto

$$A = \left\{\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exercício 3. [2 valores] Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

Exercício 4. [2 valores] Dê exemplo de uma função $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com valor máximo 1 e sem valor mínimo.

Exercício 5. [2 valores] Calcule a primeira e a segunda derivadas da função $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$.

Grupo II

Exercício 6. [2 valores] Mostre que a equação

$$x = \cos(x)$$

possui uma única solução no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercício 7. [2 valores] Dê exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não seja derivável em $x = 0$.

Exercício 8. [2 valores] Calcule o polinómio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $a = 0$. Use o polinómio encontrado para estimar o valor de $\cos(0.1)$.

Exercício 9. [2 valores] Calcule o valor de $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$.

Exercício 10. [2 valores] Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $e^x - 6\, e^{-x} = 5$.

Algumas regras de derivação

(estamos a omitir os domínios de definição das funções)

$$C' = 0, \quad C \text{ constante}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$$

$$\sec' x = \sec x \ \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \ \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad (x < 1)$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \ \operatorname{coth} x$$

$$\operatorname{arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arccotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arccosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$