Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo II
1º Teste

Eng. Informática
30/março/2011
[2h]

Nome [ ] Número [ ]

Justifique convenientemente todas as respostas.

Exercício 1. [3 valores] Considere uma função "voltagem/potência", V, para pontos num plano definida por

$$\begin{array}{rccl} V: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & V(x,y) = \frac{8}{\sqrt{16+x^2+y^2}} \end{array}$$

a) Para que pontos no plano está V definida?

b) As curvas de nível, para V, dizem-se "curvas equipotenciais". Identifique e/ou esboce as curvas equipotenciais para as quais a voltagem é 1, 2 e 4.

Exercício 2. [3 valores] Encontre, se existir, ou prove que não existe cada um dos seguintes limites.

$$\text{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2} \quad \Bigg\| \quad \text{b)} \lim_{(x,y,z)\to(0,-1,1)} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

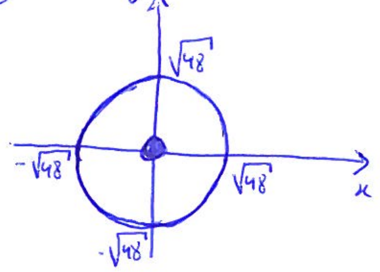
$\boxed{\text{Ex 1}}$ a) V está definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16+x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2$ //

b) $N_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{8}{\sqrt{16+x^2+y^2}} = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 48\}$

circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{48}$

$N_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+16 = 16\} = \{(0,0)\}$ ← ponto

$N_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = 4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+16 = 4\} = \emptyset$



$\boxed{\text{Ex 2}}$ a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{y=x}}} \frac{xy}{3x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2+2x^2} = \frac{1}{5}$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{y=0}}} \frac{xy}{3x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{3x^2} = 0$

$\neq$ Pela unicidade de limite conclui-se que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$ //

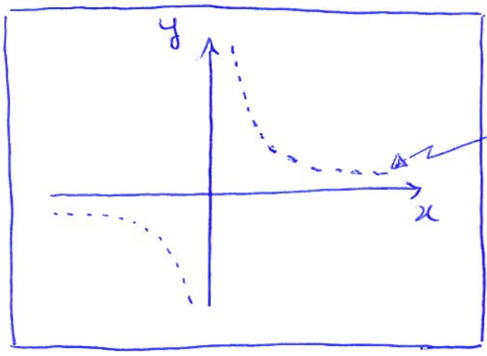
b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,1)} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = e^{\sqrt{0+1+1}} = e^{\sqrt{2}}$ //

Exercício 3. [2.5 valores] Esboce a região do plano onde a função g, real de duas variáveis reais, definida por $g(x,y) = e^{\frac{1}{1-xy}}$ é contínua.

Exercício 4. [1.5 valores] Encontre $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y)$ quando a função f, real de duas variáveis reais, é definida por $f(x,y) = y^2 \cos x + y$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$ Sendo g uma função exponencial cujo expoente é o quociente de polinómios, conclui-se que g é contínua em todo o seu domínio.

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - xy \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1\}$$



pontos onde g não é contínua.

$\boxed{\text{Ex 4}}$ $$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = f_{xyy}(x,y)$$

$f_x(x,y) = -y^2 \operatorname{sen} x$

$f_{xy}(x,y) = -2y \operatorname{sen} x$

$f_{xyy}(x,y) = -2 \operatorname{sen} x$

Exercício 5. [1.5 valores] Segundo a equação de Laplace $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Verifique se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ satisfaz essa equação.

Exercício 6. [3 valores] Um ponto desloca-se ao longo do parabolóide definido por $z = x^2 + 3y^2$.

a) Qual a taxa de variação instantânea de z quando o ponto se encontra na posição de coordenadas $(2, 1, 7)$ e se desloca paralelamente a YY'?

b) Defina, se existir, o plano tangente ao parabolóide no ponto de coordenadas $(2, 1, 7)$.

5

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

C.A. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Derivadas de 1ª ordem: $f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$

$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

C.A. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2}$

Derivadas de 2ª ordem (puras): $f_{xx} = \frac{(x^2+y^2).2 - 2x.2x}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{yy} = \frac{(x^2+y^2).2 - 2y.2y}{(x^2+y^2)^2}$

Então

$f_{xx} + f_{yy} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$, ou seja, a equação de Laplace é satisfeita.

6

a) taxa de variação instantânea ... em (2,1,7) ... paralelamente a YY' é:

$$f_y(2,1) = 6y\Big]_{(2,1)} = 6 \times 1 = 6$$

b) O plano tangente .... é definido por

$$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

onde $(x_0,y_0) = (2,1)$

$z_0 = f(x_0,y_0) = \dots = 7$

$f_x(x_0,y_0) = 2x\Big]_{(2,1)} = 2 \times 2 = 4$

$f_y(x_0,y_0) = 6$

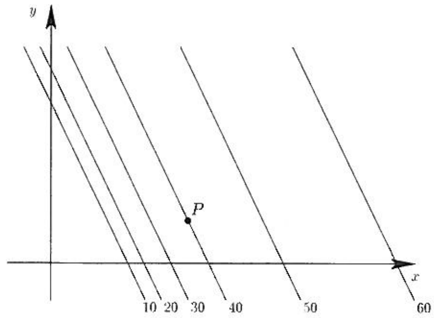
Donde o plano é definido por $z = 7 + 4(x-2) + 6(y-1)$

$\Leftrightarrow 4x + 6y - z = 7$

Exercício 7. [2.5 valores] O diagrama de nível anexo representa curvas isométricas (curvas com a mesma temperatura) de uma função T que mede a temperatura de uma placa metálica num plano. Com base na figura

a) determine os sinais de $T_x(P)$ e de $T_y(P)$.

b) qual das derivadas parciais $T_x(P)$ e $T_y(P)$ é maior em valor absoluto?



Exercício 8. [3 valores] Considere a função f, real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \text{ e } y \text{ são positivos ,} \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

a) Existem as derivadas parciais de f em $(0,0)$?

b) f é diferenciável em $(0,0)$?

7

a) $T_x(P)$ e $T_y(P)$ são ambas positivas porque i) quando nos encontramos em P e nos deslocamos paralelamente ao eixo das abcissas para a direita as cotas aumentam e para a esquerda as cotas diminuem, ou seja a variação nas cotas tem o mesmo sinal que a variação nas abcissas. Ora sendo a derivada parcial em ordem a x ($T_x(P)$) o limite da razão incremental entre cotas e abcissas o sinal é positivo.

ii) Analogamente para $T_y(P)$, derivada parcial em ordem a y, substituindo em i) as abcissas pelas ordenadas.

b) $T_x(P)$ tem maior valor absoluto porque para a mesma unidade de "deslocamento" a variação das cotas é maior.

8 a) $f_x(0,0) \underset{def.}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \dots = 0$

$f_y(0,0) \underset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \dots = 0$

Donde as derivadas parciais existem e valem "zero".

b) f não é diferenciável em (0,0) porque f não é contínua em (0,0)

Senão vejamos

f seria contínua em $(0,0)$ se

i) $f(0,0)$ existisse;

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ também existisse

e

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

Ora

i) $f(0,0)=0$, isto é, $f(0,0)$ existe (f está definida em $(0,0)$)

ii) Estudemos o $\lim f(x,y)$ quando $(x,y)\to(0,0)$

Seja, por exemplo,

$y=0$ (ao longo do eixo das abcissas)

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{y=0}{\overset{\downarrow}{=}} \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$

Seja

$y=x$ (no 1.º quadrante, isto é, x e y positivos)

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{y=x}{\overset{\downarrow}{=}} \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = -1$

"caminhos" distintos" de "aproximação" a $(0,0)$ conduzem-nos a limites distintos, isto é, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe

e, por conseguinte, f não é contínua em $(0,0)$.