Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMA

Cálculo
LEI
2013/2014

Folha 1 - Noções elementares sobre funções reais de variável real

---

Exercício 1 Determine o domínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$;

b) $g(x) = \sqrt{2-3x} + \sqrt{x}$;

c) $h(x) = \sqrt{1-\cos(3x^3+x)}$;

d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$.

Exercício 2 Determine o contradomínio das seguintes funções:

a) $\begin{array}{rcl} f:[-1,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-3x \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} g:]-4,2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |2x-1| \end{array}$

Exercício 3 Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ -1 & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Determine $f^{-1}(]-1,3])$, $f^{-1}([-1,0])$ e $f^{-1}(\{2\})$.

Exercício 4 Indique o domínio e o contradomínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

b) $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$;

c) $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

d) $i(x) = \sqrt{x^2} - 1$.

Verifique ainda se as funções dadas são limitadas ou monótonas.

Exercício 5 Em cada um dos casos seguintes, esboce o gráfico da função dada e diga se a afirmação é verdadeira ou falsa justificando da sua resposta.

a) A função $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é crescente.

b) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ é crescente.

c) A função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -4x+3$ é estritamente decrescente.

d) A função i definida em $\mathbb{R}$ por $i(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2-2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ é estritamente crescente.

Exercício 6 Estude a paridade das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3x - x^3$;

b) $g(x) = |x+1| + |x-1|$;

c) $h(x) = x^3 - x^2$;

d) $i(x) = \cos(3x - x^3)$;

e) $j(x) = \operatorname{sen}(3x - x^3)$;

f) $k(x) = \sqrt{3x^4 + 2x^2 - 5}$.

Exercício 7 Considere as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [-2,2] \\ |x| & \text{se } x \in [-4,-2[\cup]2,4] \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{se } x \in [-2,0[\\ x - 1 & \text{se } x \in]2,3] \end{cases}$$

a) Indique o domínio e esboce os gráficos de cada uma das funções dadas;

b) Indique o contradomínio de cada uma das funções e verifique se algumas das funções é injetiva.

Exercício 8 Classifique quanto à injetividade e à sobrejetividade as funções definidas por:

a) $f(x) = x^2$;

b) $g(x) = -x$;

c) $h(x) = 0$;

d) $i(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1,2] \\ 2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash]-1,2] \end{cases}$.

Exercício 9 Descreva, caso seja possível, as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ e, em cada caso, indique o seu domínio.

a) $f(x) = x^2 - 3x, \quad g(x) = \sqrt{x+2}$;

b) $f(x) = \sqrt{x-15}, \quad g(x) = x^2 + 2x$;

c) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{x+5}$;

d) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x-3}$.

Exercício 10 Descreva a função composta $g \circ f$ para:

a) $g(x) = \operatorname{sen} 2x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f(x) = x^2 + \pi/4$, para $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases}$ e $f(x) = x - 2$, para $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 11 Considere as funções

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} k\colon & \mathbb{R}_0^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{R}_0^- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{-x}. \end{array}$$

a) Determine o contradomínio de cada uma das funções.

b) Verifique que não é possível definir cada uma das funções

$$k \circ g\,, \quad h \circ f\,, \quad k \circ h\,, \quad h \circ k.$$

c) Defina as funções compostas

$$f \circ g\,, \quad f \circ h\,, \quad g \circ k\,, \quad g \circ f.$$

Exercício 12 Para a função h dada indique duas funções f e g, diferentes da identidade, tais que $h = f \circ g$.

a) $h(x) = \sqrt{9x - x^2}$;

b) $h(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)^3}$.

Indique qual é o domínio de h.

Exercício 13 Considere as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ ,\ \ x > 1, \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1+x}{x}\ ,\ \ x > 0\ .$$

a) Determine o contradomínio de f e o contradomínio de g.

b) Verifique que f e g são inversas uma da outra.

c) Justifique que as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ não são iguais.

Exercício 14 Descreva a função inversa das seguintes funções:

a) $f(x) = -\dfrac{3x-1}{2}$;

b) $g(x) = x^3 - 1$;

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$;

d) $i(x) = \sqrt{x}$.

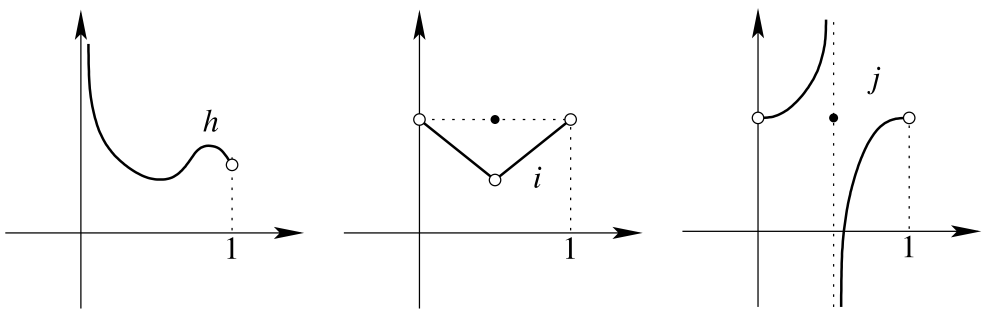
Exercício 15 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

a) Defina uma restrição de f que admita inversa.

b) Defina a função inversa da função da alínea a).

c) Esboce os gráficos da função e da sua inversa.

Exercício 16 Relativamente a cada uma das seguintes funções $h, i, j :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, diga se:



a) possui extremos locais ou absolutos;

b) é limitada (se não, especifique se é minorada ou majorada).