Proposta de Resolução exame Recurso

02/07/2014 Análise Lic. Engª Informática

$\boxed{1}$ 1ª figura: $z = \operatorname{sen}(x+y^2)$. Porque $x = -y^2 + \frac{\pi}{2}$ é curva de nível 1.

2ª figura: $z = \ln|y - x^2|$. Porque a curva de nível k $(k \in \mathbb{R})$ é constituída pelas equações: $y = x^2 + e^k$; $y = x^2 - e^k$

3ª figura: $z = \cos x + \cos y$. Porque a função é periódica ao longo dos eixos coordenados $(x=0; y=0)$

$\boxed{2}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} = \infty,$$

logo $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$.

$\boxed{3}$ Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $x.y \neq 0$, a função f é o quociente entre funções contínuas, logo é contínua.

Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $x.y = 0$, tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 = f(0,0) \quad (\text{pois } x.y=0),$$

logo f é também contínua em $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $x.y=0$.

Conclusão:

f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{4}$ Para $f(x,y,z) = xyz$, tem que S é a superfície de nível 12 da função f. Tem-se

$S = N_{12} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 12\}$, $(2,-2,-3) \in N_{12}$ e

$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

Assim $\nabla f(2,-2,-3) = (6,-6,-4)$ é um vector normal à superfície S, pelo que uma equação da recta normal pedida é:

$$(x,y,z) = (2,-2,-3) + \lambda(6,-6,-4) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{5}$ $f(x,y) = x^2 y^3$, Domínio: $\mathbb{R}^2$

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$. Como existem e são contínuas todas as derivadas parciais de f de 1ª ordem, conclui-se que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

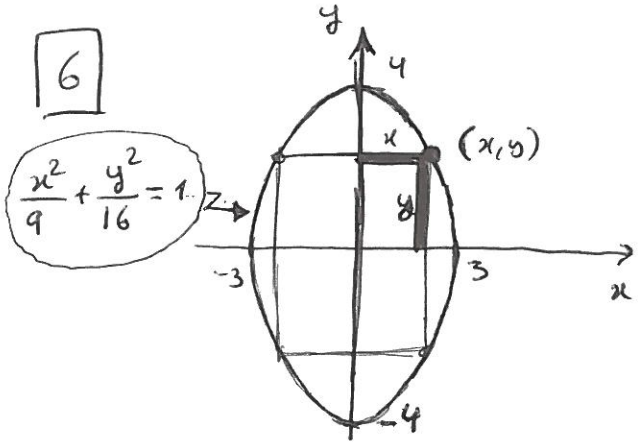
b)

$\nabla f(P) = \nabla f(-1,2) = (-16, 12)$ o vector gradiente, $\nabla f(P)$, indica a direção e sentido de maior crescimento de f partindo de P, pelo que o sentido contrário é o de menor crescimento.

Resposta: $\vec{v} = (16, -12)$.

c) É um vector perpendicular ao vector $\nabla f(P)$. Por exemplo: $\vec{u} = (12, 16)$.

6



$A(x,y) = x \cdot y$ — função a maximizar

$\underbrace{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}}_{g(x,y)} = 1$ — restrição nas variáveis

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y,x) = \lambda\left(\frac{2}{9}x, \frac{1}{8}y\right) \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{9}\lambda x \\ x = \frac{\lambda}{8} y \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x = \frac{\lambda^2}{36} x \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \text{impossível ou } \begin{cases} y = \pm\frac{4}{3}x \\ \lambda = \pm 6 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2\sqrt{2} \\ \text{——} \\ x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$; $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right)$

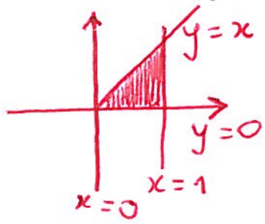
Dado o contexto do problema, tem-se $(x,y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

Dimensões: largura: $3\sqrt{2}$; altura: $4\sqrt{2}$.

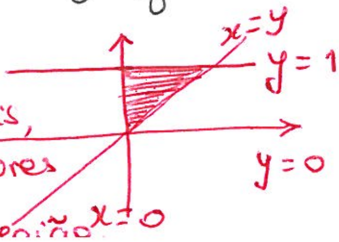
7 Falsa. Note que a região de integração não é a mesma.

Por exemplo, para $f(x,y)=x$ tem-se

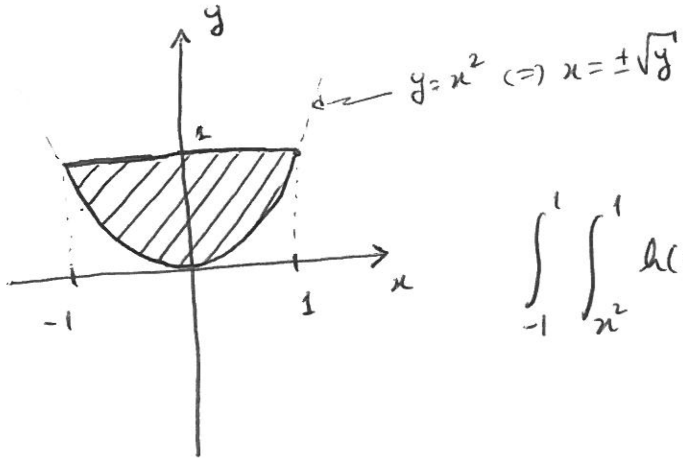
$$\int_0^1\int_0^x x\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{6} = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\,dy = \int_0^1\int_0^y x\,dx\,dy$$



Obs: Embora as áreas das regiões sejam iguais, a função f tomará valores distintos ~~[illegible]~~ consoante os pontos de cada região.



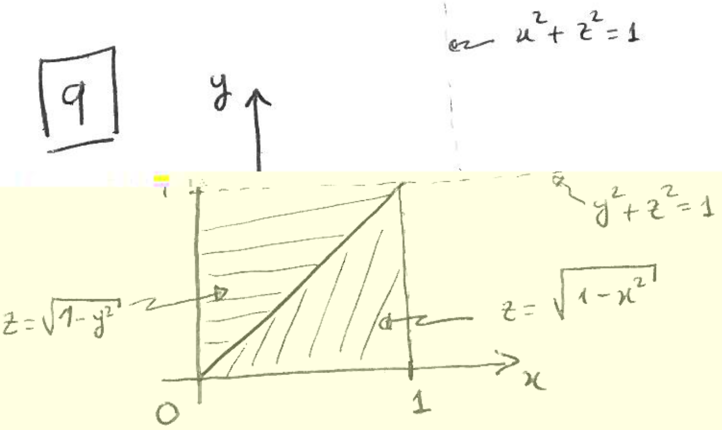
8



$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} h(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} h(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} h(x,y)\,dx\,dy$$

9



$$\text{Volume} = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x} \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy\,dx$$

10

<u>Obs</u>: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$f(r,\theta,z) = r^2 + z^2$

$$\iiint_S f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{0}^{4}\int_{-1}^{1} (r^2+z^2)\,r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{0}^{4} \left[\left(r^2 z + \frac{z^3}{3}\right) r\right]_{-1}^{1} dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{0}^{4} 2r^3 + \frac{2}{3}r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\frac{r^4}{2} + \frac{r^2}{3}\right]_{0}^{4} d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{4^4}{2} + \frac{4^2}{3}\,d\theta = \left(4^3 + \frac{8}{3}\right)\pi$$

$\boxed{12}$ $\vec{F}'(x,y) = \begin{bmatrix} -y\cos x & -\operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, logo $\vec{F}$ é campo conservativo, donde $\vec{F}$ possui função potencial $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Ou seja, $\begin{cases} f_x(x,y) = -y\operatorname{sen} x \Leftrightarrow f(x,y) = y\cos x + C(y) \\ f_y(x,y) = \cos x \Leftrightarrow \cancel{\cos x} + C'(y) = \cancel{\cos x} \Leftrightarrow C'(y) = 0, \end{cases}$

logo $f(x,y) = y\cos x$ é função potencial de $\vec{F}$ e

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = f(2,4) - f(0,0) = 4\cos 2.$$

Ou $\vec{r}(t): \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ $t \in [0,2]$ Donde $\vec{r}'(t) = (1, 2t)$

Pelo que
$$\int_{C} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t=0}^{2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

E $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(t, t^2) = -t^2 \operatorname{sen} t\, \vec{e}_1 + \cos t\, \vec{e}_2$

e $\vec{r}'(t) = (1, 2t)$ $\therefore$ $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -t^2 \operatorname{sen} t + 2t\cos t$

Ou seja
$$\int_{t=0}^{2} (-t^2 \operatorname{sen} t + 2t\cos t)\, dt = \ldots\ldots = 4\cos 2$$