Exame de Métodos Numéricos

1^a Chamada (3 horas) - 13 de Janeiro de 2007

Licenciatura em Engenharia Civil e Mecânica

Universidade do Minho, Escola de Engenharia, Departamento de Produção e Sistemas

---

Apresente e justifique todos os cálculos e decisões que tiver de efectuar

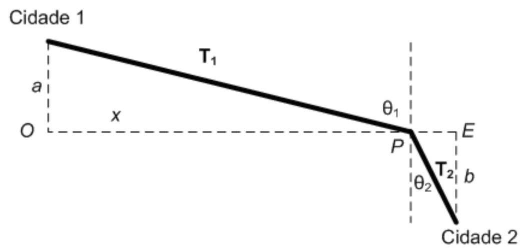
---

1. Considere duas cidades localizadas como se mostra na figura. Uma petrolífera pretende construir uma conduta que ligue as duas cidades. Devido às diferenças no terreno, o custo para construir a conduta será C_1 milhões de euros por quilómetro para o troço $\mathbf{T}_1$ e C_2 milhões de euros por quilómetro para o troço $\mathbf{T}_2$. Para tornar a construção mais económica, o ponto P de intersecção dos dois troços deve estar localizado de modo a que C_1 sen$(\theta_1) = C_2$ sen(θ_2).

   (a) Usando a informação da figura e escrevendo esta equação em função de x (a distância de O a P), mostre que se obtém

   $$C_2^2(L-x)^2(a^2+x^2) = C_1^2 x^2(b^2+(L-x)^2),$$

   sendo L a distância de O a E.



   (b) Resolva a equação considerando $a = 3$, $b = 1$, $L = 4$, $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$. Utilize o método da Secante com aproximações iniciais $x_1 = 3.0$, $x_2 = 3.5$ e $n_{\max} = 2$. Apresente uma estimativa do erro relativo.

2. O departamento de Metalurgia de uma fábrica desenvolveu uma nova liga metálica que foi testada em laboratório. A tabela seguinte mostra os valores obtidos da condutividade térmica k da liga em função da temperatura t:

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
k	0.94	A	0.694	B	0.547

   Pretende-se estimar a condutividade da liga através de uma spline cúbica completa.

   (a) Comece por apresentar o sistema de equações lineares que deve construir para calcular os $M's$, em função de A e B.

   (b) Considerando $A = 0.803$ e $B = 0.613$, estime o valor da condutividade k para uma temperatura de 0.25.

3. Considere a seguinte matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   com $\omega \in \mathbb{R}$. Analisando as condições suficientes de convergência do método de Gauss-Seidel, calcule os valores de ω que garantem a convergência do método de Gauss-Seidel para um sistema linear cuja matriz dos coeficientes é A.

4. Uma rolha de cortiça de comprimento L vai ser expulsa duma garrafa contendo um líquido em fermentação. As equações do movimento da rolha podem ser descritas pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= v \\ \dfrac{dv}{dt} &= \begin{cases} g(1+q)[(1+\dfrac{x}{d})^{-\gamma} + \dfrac{Rt}{100} - 1 + \dfrac{qx}{L(1+q)}], & x < L \\ 0, & x \geq L \end{cases} \end{cases}$$

em que

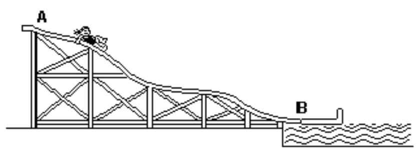
g é a aceleração da gravidade ($9.81\, ms^{-2}$)
q é o coeficiente de atrito da rolha
x é o deslocamento da rolha no gargalo da garrafa
t é o tempo
d é o comprimento do gargalo da garrafa
R é a razão percentual de aumento da pressão
γ é a constante adiabática para o gas na garrafa (1.4)

Considerando $q = 20$, $L = 3.75cm$, $d = 5cm$, $R = 4$, o sistema, após a substituição das constantes transforma-se em

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= v \\ \dfrac{dv}{dt} &= \begin{cases} 206.01[(1+0.2x)^{-1.4} + 0.04t - 1 + 0.25397x], & x < 3.75 \\ 0, & x \geq 3.75 \end{cases} \end{cases}$$

As condições auxiliares do problema são $x(0) = v(0) = 0$. Enquanto que $x < L$ a rolha mantém-se na garrafa, sendo expelida quando $x = L$. Considere o passo $h = 0.75$. Será que ao fim de duas etapas a rolha já saiu da garrafa? Qual a velocidade atingida na segunda etapa?

5. A figura mostra uma pessoa que desliza, sem atrito, do alto de um escorrega (ponto A), acoplando-se a um carrinho que se encontra em repouso no ponto B. A partir deste instante, a pessoa e o carrinho movem-se juntos na água até parar.



(a) Sabendo que a velocidade do conjunto pessoa-carrinho imediatamente após o acoplamento é 4 m/s e que a velocidade, v, em cada instante t na água é dada pela tabela seguinte, calcule (usando todos os pontos de tabela) a distância percorrida na água pelo conjunto pessoa-carrinho até parar.

t	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

(b) Estime o erro de truncatura cometido no intervalo [1.2, 4.2].

(c) Seleccione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, e calcule a mesma distância usando um única fórmula composta de integração no intervalo [0, 4.2].

FIM