

Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios

2010/2011

Indução nos naturais

1. Prove, por indução, as seguintes propriedades dos números naturais:

- (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geq 1$.
- (b) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, para todo $n \geq 1$.
- (c) $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo $n \geq 1$.
- (d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.
- (e) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, para todo $n \geq 1$.
- (f) $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $n^2 + 5n + 1$ é par.

- (a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n + 1)$ é verdadeira.
- (b) Diga, justificando, para que naturais n a propriedade $P(n)$ é verdadeira.

3. Para $n \in \mathbb{N}$, define-se $n!$ por $1! = 1$ e $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$.

- (a) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $2^n < n!$.
- (b) Prove que, para todo o natural n tal que $n \geq 4$, $n! \geq n^2$.

4. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in X \Rightarrow n + 3 \in X.$$

Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

5. O seguinte exemplo é bem conhecido como uma alegada “prova” por indução que claramente não pode ser válida. Indique onde se encontra o erro.

Vamos provar que todos os gatos são da mesma cor. Mais precisamente, vamos provar que a afirmação “para qualquer colecção de n gatos, todos os gatos têm a mesma cor” é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que só há um número finito de gatos no mundo inteiro, segue que todos os gatos do mundo têm a mesma cor. Suponhamos que $n = 1$. É certamente verdade que para qualquer colecção com um gato, todos os gatos têm a mesma cor. Supondo o resultado válido para n , vamos agora mostrar o resultado para $n + 1$. Consideremos a colecção $\{G_1, \dots, G_{n+1}\}$ de $n + 1$ gatos. As colecções $\{G_1, \dots, G_n\}$ e $\{G_2, \dots, G_{n+1}\}$ têm ambas n gatos. Então, todos os gatos das duas colecções têm a mesma cor e, portanto, os gatos de $\{G_1, \dots, G_{n+1}\}$ têm a mesma cor. Fica assim provado por indução que todos os gatos do mundo têm a mesma cor.