

Álgebra Linear1^o Teste - A

LEI

Esboço de possível resolução

Duração: 2 horas

Nome: _____ Nº: _____

Responda às seguintes questões, do grupo I e II, justificando convenientemente a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** têm cotação negativa.

1. a) Se $2\left(3A + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} - 2A$ então $A = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. (V) F

b) A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 - 5A + 4I_2 = O$. (V) F

c) As matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ são comutáveis, se $k = 4$ ou $k = -11$. V (F)

d) Se A e B são matrizes de ordem n invertíveis, tais que $ABA = A$, então $B = A^{-1}$. (V) F

e) Se A é uma matriz idempotente ($A^2 = A$) então $A^k = A$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. (V) F

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$, onde α é um número real.

a) A matriz A é simétrica, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. V (F)

b) A matriz A é ortogonal, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. (V) F

c) A matriz A é invertível tendo-se $A^{-1} = A$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. V (F)

d) O subespaço das soluções do sistema homogêneo associado a A é gerado pelo conjunto $\{\mathbf{0}\}$. (V) F

3. Sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} dois vectores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 e S um subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por estes.

a) Os vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} e $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ geram S . (V) F

b) Os vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} e $\mathbf{0}$ são linearmente dependentes. (V) F

c) Existem reais α e β tais que $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$. (V) F

d) A característica da matriz $A = (\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u} + \mathbf{v})$ é igual 3. V (F)

II

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \alpha y + \beta z = 1 \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Complete, de acordo com os valores de α e β , de modo a obter afirmações verdadeiras.

- (i) O sistema é impossível se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
- (ii) O sistema é possível indeterminado se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

b) Existem valores para α e β que tornam o sistema possível determinado? Se sim, quais?

Não. Sendo, no máximo, $c(A) = 2$ e tendo-se, número de variáveis $n = 3$, o sistema nunca pode ser possível determinado.

c) Sendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ determine o conjunto solução do sistema.

Considerando a matriz ampliada do sistema tem-se: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$,

$$\text{donde vem } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

e assim o conjunto solução é $S = \{(-y + 1, y, 1), y \in \mathbb{R}\}$.

d) Considere o respectivo sistema homogêneo associado ao sistema dado e determine, tendo em atenção as diferentes possibilidades para os parâmetros α e β , o seu conjunto solução.

A matriz dos coeficientes do sistema homogêneo é: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$$\boxed{\alpha = 0 \text{ e } \beta = 0} \quad c(A) = 1; n = 3, \text{ tendo-se } x + y - z = 0 \Leftrightarrow x = -y + z \text{ e } S = \{(-y + z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{\alpha \neq 0 \text{ e } \beta = 0} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{array} \right); \begin{cases} x + y - z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}; S = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{\alpha = 0 \text{ e } \beta \neq 0} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \beta \end{array} \right); \begin{cases} x + y - z = 0 \\ \beta z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}; S = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{\alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & \beta \end{array} \right); \begin{cases} x + y - z = 0 \\ \alpha y + \beta z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + \frac{\beta}{\alpha}z \\ y = -\frac{\beta}{\alpha}z \end{cases}; S = \{(z + \frac{\beta}{\alpha}z, -\frac{\beta}{\alpha}z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 3 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a e b para os quais:

(i) a característica de A é igual a 2, $b = 0$ ou $a = -1$ ou $a = 1$.

(ii) a característica de A é igual a 3. $b \neq 0$ e $a \neq -1$ e $a \neq 1$.

3. Seja U_α , uma família de subconjuntos de \mathbb{R}^3 , definida por:

$$U_\alpha = \{(3a, b + \alpha, b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Considere $\alpha = 0$ e mostre que $U = U_0$ é um subespaço vectorial real de \mathbb{R}^3 .

* $U_0 \neq \emptyset$, pois, por exemplo, $(0, 0, 0) \in U_0$.

* Sejam $\mathbf{x} = (3a, b, b)$ e $\mathbf{y} = (3a', b', b')$ elementos de U_0 , com $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Então $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (3(a + a'), b + b', b + b')$ e, portanto, é também um elemento de U_0 .

* Seja $k \in \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{x} = (3a, b, b)$ um elemento de U_0 , com $a, b \in \mathbb{R}$. Então $k\mathbf{x} = (3ka, kb, kb)$ e, portanto, é também um elemento de U_0 .

Portanto, sendo U_0 um subconjunto de \mathbb{R}^3 , não vazio, fechado relativamente à soma de vectores e relativamente ao produto escalar, conclui-se que é um subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 .

b) Determine um conjunto de vectores geradores de U_0 que sejam linearmente independentes.

Qualquer elemento de U_0 ($\alpha = 0$) é da forma $(3a, b, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Veja-se que, $(3a, b, b) = 3a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1)$, ou seja, os vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são geradores de U_0 .

Além disso, estes vectores são linearmente independentes pois, $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \beta) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

c) Para que valores de α , U_α é um subespaço vectorial real de \mathbb{R}^3 ? Justifique.

Sejam $(3a, b + \alpha, b)$ e $(3a', b' + \alpha, b')$ elementos de U_α , com $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

Então $(3a, b + \alpha, b) + (3a', b' + \alpha, b') = (3(a + a'), b + b' + 2\alpha, b + b')$ e o vector soma $(3(a + a'), b + b' + 2\alpha, b + b')$ pertence a U_α se $2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Também, $\forall k \in \mathbb{R}$, o produto escalar, $k(3a, b + \alpha, b) = (3ka, kb + k\alpha, kb)$, será um elemento de U_α se $k\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha(k - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ pois k é um valor real qualquer.

Logo U_α é um subespaço vectorial real de \mathbb{R}^3 se $\alpha = 0$.

4. Mostre que:

- a) Se A , B e C são matrizes de ordem n , invertíveis, tais que, $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$, então $X = CB - A$.

$$\begin{aligned}
 C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n &\Rightarrow C(C^{-1}(A + X)B^{-1}) = C.I_n \\
 &\stackrel{1.}{\Rightarrow} (CC^{-1})((A + X)B^{-1}) = C \\
 &\stackrel{2., 3.}{\Rightarrow} I_n((A + X)B^{-1}) = C \\
 &\stackrel{4.}{\Rightarrow} (A + X)B^{-1} = C \\
 &\stackrel{2.}{\Rightarrow} ((A + X)B^{-1})B = C.B \\
 &\stackrel{5.}{\Rightarrow} (A + X)(B^{-1}B) = C.B \\
 &\stackrel{3.}{\Rightarrow} (A + X)I_n = C.B \\
 &\stackrel{4.}{\Rightarrow} (A + X) = C.B \\
 &\stackrel{2.}{\Rightarrow} X = C.B - A \\
 &\stackrel{6.}{\Rightarrow}
 \end{aligned}$$

1. multiplicando ambos os membros, à esquerda, pela matriz C .
2. propriedade de existência de elemento neutro (matriz I_n) relativamente à multiplicação de matrizes.
3. propriedade associativa da multiplicação de matrizes.
4. definição de matriz inversa.
5. multiplicando ambos os membros, à direita, pela matriz B .
6. para qualquer matriz $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, existe $-A = (-a_{ij})$.

- b) Sejam A e S matrizes de ordem n .

Se A é uma simétrica e S é ortogonal, então $S^{-1}AS$ é uma matriz simétrica.

Hipóteses:

1. A é uma simétrica, ou seja $A = A^T$.
2. S é ortogonal, ou seja, $S.S^T = S^T.S = I_n$, tendo-se $S^{-1} = S^T$.

Tese: $S^{-1}AS$ é uma matriz simétrica, ou seja, $S^{-1}AS = (S^{-1}AS)^T$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 (S^{-1}AS)^T &\Rightarrow S^T A^T (S^{-1})^T \\
 &\stackrel{1.}{\Rightarrow} S^T A (S^{-1})^T \\
 &\stackrel{2.}{\Rightarrow} S^T A (S^T)^T \\
 &\stackrel{3.}{\Rightarrow} S^T A S \\
 &\stackrel{4.}{\Rightarrow}
 \end{aligned}$$

1. $\forall A, B \quad (AB)^T = B^T A^T$.
2. hipótese 1, A é uma matriz simétrica.
3. hipótese 2, S é uma matriz ortogonal tendo-se $S^{-1} = S^T$.
4. $\forall A, (A^T)^T = A$.

Cotação:

I	II - 1	II - 2	II - 3	II - 4
6.5	1+1+1+1.5	3	1.5+2+1	0.75+0.75