

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE



Distribuições de Probabilidade



Exemplo

Duas meias são selecionadas aleatoriamente de uma gaveta contendo 5 meias castanhas e 3 verdes. Liste os elementos do espaço amostral, as probabilidades correspondentes, os valores da variável aleatória W , que representa o número de meias castanhas selecionadas.

Elementos	Probabilidade	w
CC	$5/8 \times 4/7 = 20/56$	2
CV	$5/8 \times 3/7 = 15/56$	1
VC	$3/8 \times 5/7 = 15/56$	1
VV	$3/8 \times 2/7 = 6/56$	0



Distribuições de Probabilidade

Exemplo

Considere o lançamento de 2 dados. Liste os elementos do espaço amostral, as probabilidades correspondentes, os valores da variável aleatória X , que representa a soma dos pontos.

x	$P(X=x)$	x	$P(X=x)$
2	1/36	3	2/36
4	3/36	5	4/36
6	5/36	7	6/36
8	5/36	9	4/36
10	3/36	11	2/36
12	1/36		

$$f(x) = (6 - |x - 7|) / 36 \quad x = 2, \dots, 12$$

3



Distribuições de Probabilidade Discretas

Se X é uma variável aleatória discreta, a função dada por $f(x) = P(X = x)$, para cada valor de x na gama de valores de X , é **chamada função de probabilidade de X** .

4



Distribuições de Probabilidade Discretas

Exemplo

Encontre a fórmula para a distribuição de probabilidade do número total de caras (F) obtidas no lançamento de 4 moedas equilibradas

Resultados possíveis		$2^4 = 16$	
FFFF	4	CFFC	2
FFFC	3	CFCF	2
FFCF	3	CCFF	2
FCFF	3	FCCC	1
CFFF	3	CFCC	1
FFCC	2	CCFC	1
FCFC	2	CCCF	1
FCCF	2	CCCC	0

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16

$$f(x) = {}_4C_x / 16 \quad x=0,1,2,3,4$$

5



Função de Probabilidade

Uma função pode servir como função de probabilidade (f.p.) de uma variável aleatória discreta X se e só se os seus valores $f(x)$ satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para qualquer valor do seu domínio;
2. $\sum f(x) = 1$ onde o somatório se estende a todos os valores no seu domínio.

6



Função de Probabilidade

Exemplo

Verifique se a função dada por

$$f(x) = \frac{x+2}{25} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória

7



Função de Distribuição

- Existem muitas situações onde há interesse em conhecer a probabilidade de que o valor de uma variável aleatória seja menor ou igual a algum número real x .
- A probabilidade de que X tome um valor menor ou igual a x , dada por $F(x) = P(X \leq x)$, é uma função definida para todos os números reais, designada por função de probabilidade acumulada da variável aleatória X .

8

Função de Probabilidade Acumulada



Se X é uma variável aleatória discreta, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad -\infty < x < \infty$$

onde $f(t)$ é o valor da função de probabilidade de X em t , é chamada a função de probabilidade acumulada de X .

9

Propriedades



Os valores de $F(x)$ da função de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X satisfazem as condições:

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$ para quaisquer números reais a e b .

10



Função Acumulada

Exemplo

Encontre a função de probabilidade acumulada da variável W , número de meias castanhas retiradas da gaveta, e trace o respectivo gráfico.

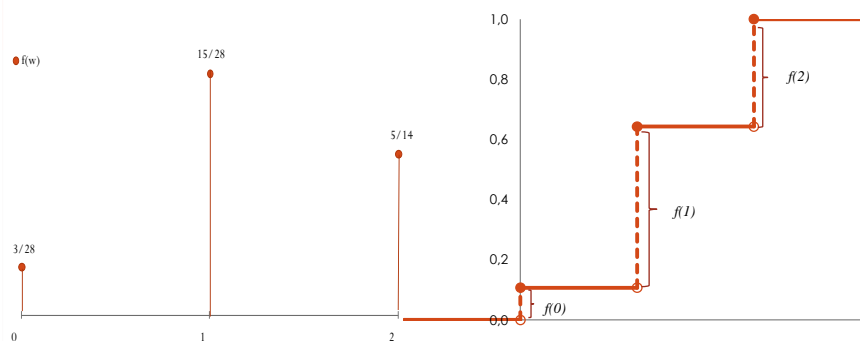
w	Prob.	$f(w)$	$F(w)$	
0	$3/28$	$3/28$	$3/28$	$f(0)$
1	$15/28$	$15/28$	$9/14$	$f(0)+f(1)$
2	$5/14$	$5/14$	1	$f(0)+f(1)+f(2)$

$$F(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 3/28 & 0 \leq w < 1 \\ 9/14 & 1 \leq w < 2 \\ 1 & w \geq 2 \end{cases}$$

11



Função de Probabilidade e Função Acumulada



12



Funções de Densidade de Probabilidade

Uma função com valores de $f(x)$ definidos sobre o conjunto de todos os números reais, é chamada uma **função densidade de probabilidade** (f.d.p.) de uma variável contínua X , se e só se

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

para quaisquer constantes reais a e b , com $a \leq b$.

13



Funções de Densidade de Probabilidade

De notar que $f(c)$, o valor da função densidade de probabilidade de X em c não é $P(X=c)$, como no caso discreto.

No caso contínuo as probabilidades são sempre dadas por integrais avaliados sobre intervalos, donde $P(X=c) = 0$ para qualquer constante real c ; por outro lado, também não interessa se os pontos extremos do intervalo a a b são incluídos.

Se X é uma variável aleatória contínua e, a e b são duas constantes reais com $a \leq b$, então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

14

Funções de Densidade de Probabilidade



Uma função pode servir como função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X se e só se os seus valores $f(x)$ satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

15

Funções de Densidade de Probabilidade



Exemplo

A função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine o valor de k e calcule $P(0.5 < X < 1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ke^{-3x} dx = k \left. \frac{e^{-3x}}{-3} \right|_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1$$

$$\int_{0.5}^1 3e^{-3x} dx = -e^{-3x} \Big|_{0.5}^1 = 0.173$$

16



Função de Probabilidade Acumulada

Se X é uma variável aleatória contínua, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad -\infty < x < \infty$$

onde $f(t)$ é o valor da função densidade de probabilidade de X em t , é chamada função de distribuição acumulada de X .

17



Propriedades

Os valores de $F(x)$ da função de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X satisfazem as condições:

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$ para quaisquer números reais a e b .

18



Propriedades

Se $f(x)$ e $F(x)$ são, respectivamente, os valores da função densidade e da função acumulada de X em x , então

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

para quaisquer constantes reais a e b , com $a \leq b$, e

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

onde a derivada existe.

19



Função de Probabilidade Acumulada

Exemplo

Determine a função acumulada correspondente à função densidade

$$f(x) = 3e^{-3x}, x > 0$$

e calcule $P(0.5 < X < 1)$.

$$F(x) = \int_0^x 3e^{-3t} dt = 1 - e^{-3x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & x > 0 \end{cases}$$

$$P(0.5 < X < 1) = F(1) - F(0.5) = 0.173$$

20



Observações

- Uma função de distribuição acumulada é uma função não decrescente de x , que é contínua à direita, com $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.
- Se x é um ponto de descontinuidade de $F(x)$, então a probabilidade $P(X=x)$ é igual ao salto que a função de distribuição tem no ponto x . Se x é um ponto de continuidade de $F(x)$, então $P(X=x) = 0$.

21

Função de Probabilidade Acumulada



Exemplo

Encontre a função densidade de probabilidade para a variável aleatória cuja função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

22