



Universidade do Minho
Dep. de Matemática

Cálculo I

Exame de Recurso

Eng. Informática

14/02/2008
[2h 00m]

Nome

Número

- As respostas aos exercícios 1 e 2 são dadas nesta folha.
- As respostas aos exercícios seguintes são dadas numa folha de exame.

Exercício 1. [5 valores] Em cada alínea apresente um exemplo ou justifique porque não existe:

a) um conjunto numerável limitado;

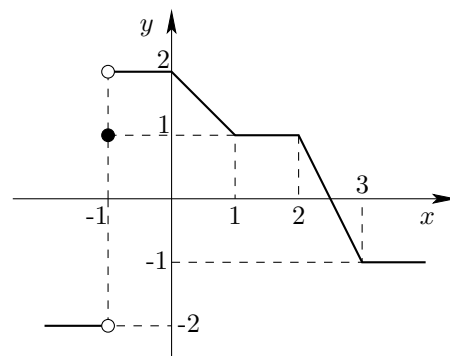
b) uma função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sobrejectiva;

c) uma função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe, mas existe $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$;

d) uma função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, estritamente crescente, tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$;

e) uma função integrável $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1]$.

Exercício 2. [5 valores] Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura. Em cada alínea apresente o(s) elemento(s) pedido(s) ou justifique porque não existe(m):



a) $f(\mathbb{R})$;

b) $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ é descontínua em } a\}$;

c) $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ é contínua mas não é derivável em } a\}$;

d) $\{a \in \mathbb{R} : f'(a) = 0\}$;

e) o polinómio de Taylor de f , de ordem 2, no ponto $\frac{1}{2}$;

f) $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < 0 < b$ tais que $\int_a^b f(x) dx = 0$;

Exercício 3. [2 valores] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$.

Exercício 4. [2 valores] Calcule apenas um dos seguintes integrais:

a) $\int x \arcsen x^2 dx$;

b) $\int \frac{4x^2 - 7x + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)} dx$.

Exercício 5. [4 valores] Considere a região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2x + 4 \wedge y \leq 4 \wedge y \geq x^2 + 1\}$.

a) Apresente um esboço gráfico da região D .

b) Calcule a área de D .

c) Escreva uma expressão que permita calcular o perímetro da fronteira da região D .

Exercício 6. [2 valores] Calcule a derivada da função $F(x) = \int_1^x \cos t^2 dt + \int_x^2 \sin t^2 dt$, $x \in \mathbb{R}$.