Universidade do Minho — I.e.i.

Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear

exame **A** — dezembro 2010

nome: ______________________________ número: ____________

Não é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1∼(1.5+1.5+1.5+1.5), 2∼(2+2); em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai $0,25$.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre, usando o algoritmo de eliminação de Gauss, uma factorização $PM = LU$, onde $M = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$, P é matriz permutação, L é invertível e triangular inferior, e U é uma matriz escada de linhas.

   (b) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

   (c) Encontre uma base de $N(M)$.

   (d) Mostre $CS(A) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

2. Para $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

   (a) mostre que é diagonalizável e diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal),

   (b) mostre que $B = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule B^{-1} **ou** pelo algoritmo de Gauss-Jordan **ou** à custa dos complementos algébricos.

(II)

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada questão, e sem qualquer justificação, a (uma e só uma) afirmação correcta. As respostas assinaladas incorrectamente têm cotação negativa.

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

   (a) $\text{car}(A) = 1$.

   (b) $CS(A) = \mathbb{R}^2$.

   (c) $CS(A^T) = \mathbb{R}^3$.

   (d) Nenhuma das anteriores.

2. Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1,0,0) = (-1,0),\ T(0,1,0) = (1,1),\ T(0,0,1) = (0,0).$$

   (a) $T(1,1,1) = (0,1)$.

   (b) A matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à de $\mathbb{R}^2$ é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $T(x,0,z) = (x,0)$, para quaisquer $x, z \in \mathbb{R}$.

   (d) Todas as anteriores.

3. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

   (a) A é diagonalizável.

   (b) $\det(A) = 0$.

   (c) A é singular.

   (d) Todas as anteriores.

4. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   (a) $\sigma(A) = \{1\}$.

   (b) A é diagonalizável.

   (c) $\dim N(A) = 1$.

   (d) Nenhuma das anteriores.

5. Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

   (a) $Ax = b$ tem soluções.

   (b) $N(A) = \{(0,0)\}$.

   (c) $\text{proj}_{CS(A)} b = b$.

   (d) Todas as anteriores.

6. Dados subespaços vectoriais V, W de $\mathbb{R}^n$, com $\dim V = \dim W < n$,

   (a) Se $v \in V$ então $-v \in V$.

   (b) Se $V \subseteq W$ então $V = W$.

   (c) $V \neq \mathbb{R}^n$.

   (d) Todas as anteriores.

7. Dada uma matriz quadrada A, seja U uma matriz escada obtida de A após aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss, então garantidamente

   (a) $\det(A) = \det(U)$.

   (b) $\sigma(A) = \sigma(U)$.

   (c) $\dim CS(A) = \dim CS(U)$.

   (d) Nenhuma das anteriores.

8. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

   (a) $1 \in \sigma(A)$.

   (b) $(1, -1, 0)$ é vector próprio de A associado ao valor próprio -1.

   (c) $m_g(-1) = 2$.

   (d) Nenhuma das anteriores.

9. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (d) Nenhuma das anteriores.

10. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

    (a) $\text{car}(A) = 3$.

    (b) $Ax = b$ é sempre possível, para qualquer escolha de $b \in \mathbb{R}^3$.

    (c) $N(A) = \{(0, 0)\}$.

    (d) Nenhuma das anteriores.

Respostas:

1.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
2.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
3.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
4.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
5.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
6.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
7.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
8.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
9.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐
10.	a) ☐	b) ☐	c) ☐	d) ☐