Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Análise
Licenciatura em Engenharia Informática
Folha6-2013/14

Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$: Integrais triplos

Exercício 6.1 Seja $\mathcal{W}$ um cone definido por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 2$. Nestas condições e sem efetuar quaisquer cálculos indique, justificando, qual o sinal de

a) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ **b)** $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} \left(z - \sqrt{x^2+y^2}\right) dV$ **c)** $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} x\, dV$

d) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} y\, dV$ **e)** $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} z\, dV$ **f)** $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} xy\, dV$

g) $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} xyz\, dV$ **h)** $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} (z-2)\, dV$ **i)** $\displaystyle\int\int\int_{\mathcal{W}} e^{-xyz}\, dV$

Exercício 6.2 Encontre os integrais triplos da função f, sobre a região $\mathcal{S}$, sabendo que:

a) $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - z$ e $\mathcal{S}$ é uma caixa retangular definida por $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$ e $2 \leq z \leq 3$.

b) $f(x,y,z) = ax+by+cz$ (com a, b e c constantes) e $\mathcal{S}$ é uma caixa retangular definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 2$.

c) $f(x,y,z) = e^{-x-y-z}$ e $\mathcal{S}$ é uma caixa retangular com vértices nos pontos de coordenadas $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(o,b,0)$ e $(0,0,c)$.

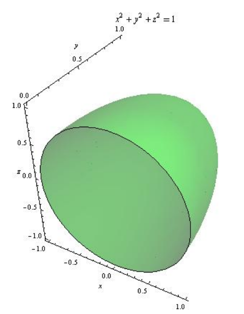
d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x \, \cos(y+z)$ e $\mathcal{S}$ é um cubo definido por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ e $0 \leq z \leq \pi$.

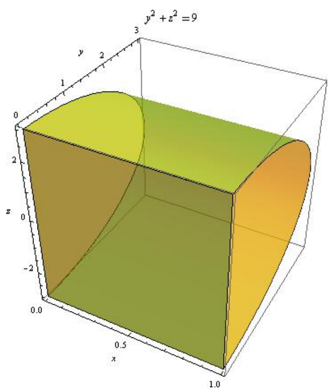
Exercício 6.3 Esboce a região de integração de:

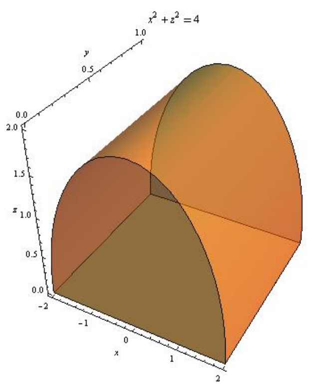
a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx.$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz.$

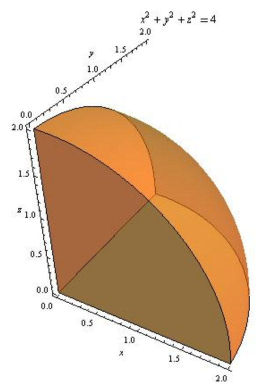
b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy.$ **d)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx.$

Exercício 6.4 Identifique os limites de integração para um integral triplo que permita calcular os volumes dos sólidos (esféricos ou cilíndricos) que se seguem









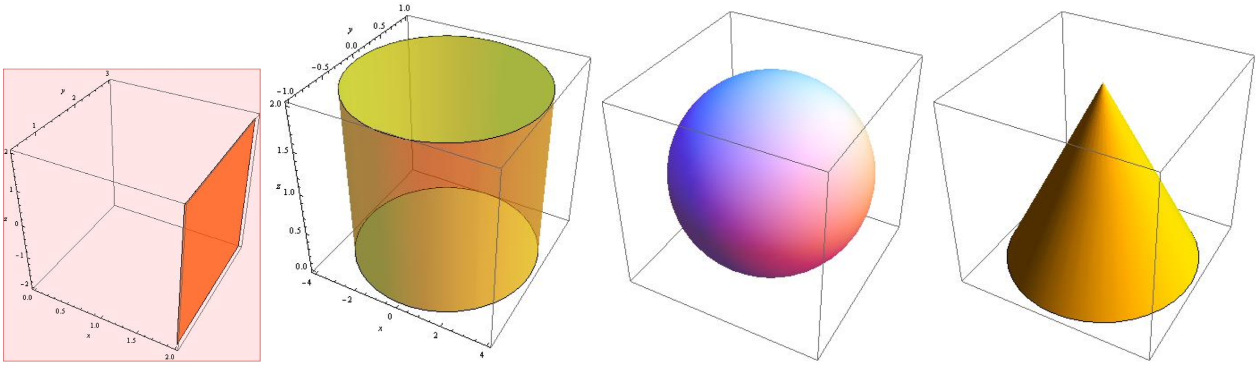
Exercício 6.5 Calcule o volume

a) do sólido limitado pelos gráficos definidos pelas seguintes equações $z = x + y$, $z = 10$, $x = 0$ e $y = 0$.

b) da pirâmide delimitada pelos planos definidos por $z = -6$, $y = 0$, $y - x = 4$ e $2x + y + z = 4$.

c) do sólido definido por $z = x^2$, $0 \leq x \leq 5$, $y = 0$, $y = 3$ e $z = 0$.

Exercício 6.6 Recorra a um sistema de coordenadas apropriado para definir analiticamente cada uma das seguintes superfícies:



Exercício 6.7 Descreva, em coordenadas cilíndricas, uma fatia de queijo cortada de um cilindro que tem de altura $4cm$ e raio $6cm$.

Exercício 6.8 Calcule a massa da fatia de queijo descrita na questão anterior, sabendo que a sua densidade é de $1.2g/cm^3$.

Exercício 6.9 Use coordenadas cilíndricas no cálculo de integrais triplos da função f sobre o sólido $\mathcal{S}$, sabendo que

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\mathcal{S} = \{(r,\theta,z) : 0 \leq r \leq 4 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \wedge -1 \leq z \leq 1\}$.

b) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$; $\mathcal{S}$ é um cilindro de altura 4 e cuja base circular tem raio 1 e está assente no plano definido por $z = -1$.

Exercício 6.10 Que volume (em função de h) alberga um depósito para combustíveis, hemisférico de raio a, cuja altura de combustível é h?

Exercício 6.11 Use um sistema de coordenadas apropriado para deduzir a fórmula de cálculo para o volume de uma esfera.

Exercício 6.12 Use coordenadas esféricas no cálculo de integrais triplos da função f sobre o sólido $\mathcal{S}$, sabendo que

a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\mathcal{S}$ é uma semiesfera "inferior" de raio 5 e centrada na origem do referencial.

b) $f(\rho,\theta,\phi) = \operatorname{sen}\phi$; $\mathcal{S} = \{(\rho,\theta,\phi) : 1 \leq \rho \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Exercício 6.13 Esboce o sólido sobre o qual está definido $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 f(\rho,\theta,\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta$.