

Nome: _____ Número: _____

IMPORTANTE: A duração do teste é de 1 hora e 20 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por sete exercícios. Os exercícios I - V devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VI e VII devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(p \Leftrightarrow \neg p) \wedge q$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(p \Leftrightarrow p) \vee q$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

II. (0,75 valores) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$\exists x \forall y \quad y < x \Rightarrow 2^y < \frac{1}{2}$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição dada:

III. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \sqrt{2}, (1, 2, 3), \{1, 2\}\}$ e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \subseteq \mathbb{R}$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \subseteq B \cup \mathbb{R}$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \cap B = \emptyset$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\{1, 2\} \in A \setminus B$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\{1, 2, \sqrt{2}\} \in A \setminus B$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\{1, 2, \sqrt{2}\} \subseteq A \setminus B$

IV. Sejam A, B e C três conjuntos tais que $(A \cup B) \cap C \neq \emptyset$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \cap C \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \cap C \neq \emptyset \vee B \cap C \neq \emptyset$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\exists x \in C \quad x \notin A \Rightarrow x \in B$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(A \cup B) \setminus C \neq A \cup B$

V. Considere o conjunto $A = \{2, 3\}$. Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (0,75 valores) $\mathcal{P}(A \setminus \emptyset) =$ _____

(b) (0,75 valores) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(\emptyset) =$ _____

(c) (0,75 valores) $\mathcal{P}(A \cup \emptyset) =$ _____

(d) (0,75 valores) $\mathcal{P}(A \cap \emptyset) =$ _____

VI. (2,5 valores) Sejam A, B e C três conjuntos. Mostre que $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

VII. (2,5 valores) Verdadeiro ou falso? Para quaisquer dois conjuntos A e B tem-se

$$(A \setminus B) \times (A \setminus B) = (A \times A) \setminus (B \times B).$$

Justifique a sua resposta.