# introdução aos sistemas dinâmicos

caos

## 1.

Considere o sistema dinâmico discreto $\mathcal{S} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**1.1** Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{S}$ são repulsivos.

**1.2** Mostre que o conjunto Per($\mathcal{S}$) dos pontos periódicos de $\mathcal{S}$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$.

**1.3** Conclua que o sistema dinâmico $\mathcal{S}$ tem caos em todo o intervalo $[0,1]$.

## 2.

Chama-se aplicação tenda ao sistema dinâmico discreto $\mathcal{T} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2\,; \\ 2-2\,x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

**2.1** Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{T}$ são repulsivos.

**2.2** Mostre que o conjunto Per($\mathcal{T}$) dos pontos periódicos de $\mathcal{T}$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$.

**2.3** Conclua que o sistema dinâmico $\mathcal{T}$ tem caos em todo o intervalo $[0,1]$.

## 3.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x & \text{se } x < 1/2\,; \\ 3-3\,x & \text{se } x \geq 1/2\,. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos cuja órbita por $f$ permanece no intervalo $[0,1]$.

**3.1** Caracterize os pontos de $\mathcal{C}$.

**3.2** Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $f$ são repulsivos.

**3.3** Mostre que o conjunto Per($f$) dos pontos periódicos de $f$ é um conjunto denso em $\mathcal{C}$.

**3.4** Conclua que o sistema dinâmico $f$ tem caos em $\mathcal{C}$.