1ª Parte. Derivadas Parciais.

Derivada parcial: Suponha que f(r,s,...,y,z) seja uma função de n variáveis. A derivada parcial de f em relação a sua variável t e representada por f_t e é definida como sendo a função obtida derivando-se f em relação a t e considerando-se as outras variáveis como constantes.

Notação: f_x, f_y, $\partial f/\partial fx$, $\partial f/\partial y$

À medida que damos um zoom em um ponto pertencente à uma superfície, que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, a superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis.

Derivada parcial de segunda ordem:
f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}; $\partial^2 f/\partial x^2$ etc

Derivadas parciais mistas de segunda ordem:

$$f_{yx} = f_{xy}$$

Teorema da igualdade das derivadas parciais mistas (Schwartz). Se $f_{xy}(a,b)$ e $f_{yx}(a,b)$ forem contínuas em (a,b), então

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Linearidade local. Fórmula de aproximação, diferenciação total:

variação de f =
(taxa de variação na direção x). △x +
(taxa de variação na direção y). △y

$$\triangle f = \partial f/\partial x.\triangle x + \partial f/\partial y.\triangle y$$

Linearização local. Aproximação pelo plano tangente a f(x,y) para (x,y) próximo do ponto (a,b). Desde que f seja diferenciável em (a,b) podemos aproximar f(x,y)

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$$

Pensamos em a e b como fixos, de modo que a expressão no segundo membro linear em x e y. O segundo membro desta aproximação chama-se a linearização local de f perto de x=a, y=b.

Diferencial. A diferencial de uma função z=f(x,y)
A diferencial df (ou dz), num ponto (a,b) é a função linear de dx e dy dada pela fórmula

$$df=f_x(a,b).dx +f_y(a,b).dy$$

A diferencial num ponto geral frequentemente é escrita como $df=f_x.dx +f_y.dy$

Teorema. Se as derivadas parciais f_x e f_y existem perto do ponto (a,b) e são contínuas em (a,b), então f é diferenciável em (a,b).

Teorema da igualdade das derivadas parciais mistas (Schwartz). Seja f: $A \subset R^2$ -> R, A aberto. Se f or de classe C^2 em A,

$$\partial^2 f(x,y)/\partial x\partial y = \partial^2 f(x,y)/\partial y\partial x$$

para todo $(x,y) \in A$.

2ª Parte. Regra da cadeia e Teorema da função implícita.

Regra da cadeia para uma variável independente.
Seja w=f(x,y), onde f é uma função diferenciável de x e y. Se x=g(t) e y=h(t), onde g e h são funções diferenciáveis de t, então w é uma função diferenciável de t e

$$dw/dt = \partial w/\partial x.dx/dt + \partial w/\partial y.dy/dt$$

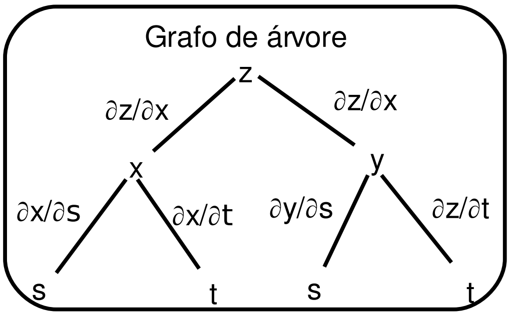
Regra da cadeia: duas variáveis independentes
Seja w=f(x,y), onde f é uma função diferenciável de x e y. Se x=g(s,t) e y=h(s,t) são tais que as derivadas parciais de primeira ordem $\partial x/\partial x$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$, $\partial y/\partial xt$ existem, então $\partial w/\partial s$ e $\partial w/\partial t$ também existem e são dadas por

$$\partial w/\partial s = \partial w/\partial x.\partial x/\partial s + \partial w/\partial y.\partial y/\partial s$$

e

$$\partial w/\partial t = \partial w/\partial x.\partial x/\partial t + \partial w/\partial y.\partial y/\partial t$$

Regra da cadeia e diagrama em árvore.
Para achar a taxa de variação de uma variável com relação a outra numa cadeia de funções compostas diferenciáveis;
a) Trace um diagrama em árvore exprimindo as relações entre as variáveis e assinale cada ligação no diagrama a derivada que relaciona as variáveis nas extremidades.
b) Paca cada caminho entre duas variáveis multiplique as derivadas de cada passo ao longo do caminho.
c) Some as contribuições de cada caminho.



Diferenciação Implícita. Se a equação f(x,y)=0 define y como uma função diferenciável de x, então

$$dy/dx= -F_x(x,y)/F_y(x,y),$$

Condições de aplicabilidade do teorema da função implícita.
i. Se F(a,b,c)=0, $F_z(a, b, c)\neq 0$, e F_x, F_y, e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação F(x, y, z) define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c) e esta função é diferenciável com derivadas das por:

$$\partial z/\partial x = -F_x(x,y)/F_z(x,y), \quad F_x(x,y)\neq 0$$

e

$$\partial z/\partial y = -F_y(x,y)/F_z(x,y), \quad F_z(x,y)\neq 0$$

3ª Parte. Derivadas direcionais e vetor gradiente.

Coeficiente angular da curva de nível: Se a curva de nível f(x,y)=C for o gráfico de uma função de x diferenciável, o coeficiente angular de sua tangente é dado pela fórmula

$$dy/dx = - f_x / f_y$$

GRADIENTE

O vetor grad f é chamado o gradiente da função escalar f.

$$\nabla f = \quad grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Propriedades geométricas do vetor gradiente

Se f é diferenciável no ponto (a,b) e grad f(a,b)≠0 então:

a) A direção de grad f(a,b) é:

- Perpendicular ao contorno de f que passa por (a,b)
- Paralelo à direção de f crescente

b) O módulo do gradiente é:

-Taxa de variação máxima de f no ponto.

-Grande quando os contornos estão próximos uns dos outros e pequena quando estão afastados.

DERIVADA DIRECIONAL. Se f é uma função diferenciável de x e y, então a derivada direcional de f na direção do vetor unitário **u** é

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\mathbf{u}$$

4ª Parte. Plano tangente e reta normal.

Plano tangente.

A- Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície z=f(x,y) no ponto $P(x_o,y_o,x_o)$ é dada por

$$z-z_o=f_x(x_o,y_o)(x-x_o)+f_y(x_o,y_o)(y-y_o)$$

B- Plano tangente. Se w é diferenciável em (a,b,c), então a equação do plano tangente à superfície da por **w(x,y,z)**=0 em (a,b,c) é

$$w_x(a,b,c)(x-a)+w_y(a,b,c)(y-b)+w_z(a,b,c)(z-c)=0$$

Reta Normal.

Equações paramétricas de uma reta no espaço. Uma reta L paralela ao vetor V=<a,b,c> e contendo o ponto $P=(x_1,y_1,z_1)$ é representada pelas equações paramétricas

$$x=x_1+at, \quad y=y_1+bt, \quad z=z_1+ct$$

Se os números a, b, c são todos não nulos, podemos eliminar o parâmetro t e obter as **equações simétricas**

$$(x-x_1)/a=(y-y_1)/b=(z-z_1)/c$$

SÉRIES DE TAYLOR

Série de Taylor para funções de uma variável.

$f(x)= f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2! + ... + f^{(n-1)}(a)(x-a)^{(n-1)} / (n-1)! +R_n$

onde R_n, o resto após n termos.

$R_n = f^{(n)}(t)(x-a)^{(n)} / n! \qquad a \le t \le x$

Procedimento para determinar o intervalo de convergência da série de potências, e o raio de convergência.

-Série de potências em x:

Se $Lin(n\to\infty)\ a_{n+1} / a_n = L$, então

a) M=0 => a série converge para todo x;

b) m≠0 => a série converge para o intervalo;

c) -1/L<x<1/L e diverge fora deste intervalo. Os pontos extremos do intervalo de convergência devem ser examinados separadamente.

-Série de potências em x-a:

Se $Lin(n\to\infty)\ b_{n+1} / b_n = M$, então

a) M=0 => a série converge para todo x;

b) m≠0 => a série converge para o intervalo;

c) a-(1/|M|) < x < a + (1/|M|) e diverge fora deste intervalo. Os pontos extremos do intervalo de convergência devem ser examinados separadamente.

Série de Taylor para funções de duas variáveis.

$f(x,y)= f(a,b) + (x-a).f_x(a,b) +(y-b).f_y(a,b) + \{(x-a)^2.f_{xx}(a,b) + 2.(x-a).(y-b).f_{xy}(a,b) + (y-b)^2.f_{yy}(a,b)\} +...$

EXERCÍCIOS.

1ª Parte. Derivadas Parciais.

1) Se $f(x,y)= x^3 + x^2 y^3 – 2y^2$, determine $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$.

Respostas. $f_x(2,1)=16$ e $f_y(2,1)=8$

2) Se $f(x,y)= 4 – x^2 – 2y^2$, ache $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$ e interprete estes números como inclinações.

Respostas. $f_x(1,1)=-2$ e $f_y(1,1)= - 4$

3) Se $f(x,y) = sen[x/(1+y)]$, calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

4) Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3+y^3+z^3+6xyz=1$$

Respostas.
$\partial z/\partial x=-(y^2+2yz)/(z^2+2xy)$
$\partial z/\partial y= -(y^2+2xz)/(z^2+2xy)$

5) Determine f_x, f_y e f_z se $f(x,y,z)=e^{xy} \ln z$.

Respostas.
$f_x,=ye^{xy} \ln z$, $f_y= xe^{xy} \ln z$ e $f_z=e^{xy} / z$

6) Para cada uma das seguintes funções, calcule as derivadas parciais de primeira ordem f_x e f_y:
a) $f(x,y)= 2x^3y + 3xy^2 +y/x$
b) $f(x,y)=(xy^2+1)^5$
Hofmann

7) Para cada uma das funções, calcule as derivadas parciais de segunda ordem f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}.
a) $f(x,y)=x^2+y^3-2xy^2$
b) $f(x,y)=x \ln y$
Hofmann

8) A que taxa está variando a área de um retângulo se seu comprimento é de 8 pés e está crescendo a 3 pés/s, enquanto que sua largura é de 6 pés e está crescendo? Anton p. 349

R: 34 pés/s

9) Mostre que $f(x,y)=xe^{xy}$ é diferenciável em (1,0) e determine sua linearização ali. Em seguida use a linearização para aproximar f(1,1;-0,1).

a) $f_x=e^{xy}+xye^{xy}$, $f_y=x^2 e^{xy}$
b) $L(x,y)=x+y$
c) $f(1,-1,-0,1)=1$

10) a) Se $z=f(x,y)=x^2+3xy-y^2$, determine o diferencial dz.
b) Se x varia de 2 a 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

a) $dz=(2x+3y)dx+(3x-2y)dy$
b) $\Delta z= 0,6449$

2ª Parte. Regra da cadeia e Teorema da função implícita.

1) Use a regra da cadeia para calcular dz/dt.
a) $z=x^3-3xy^2$; $x=2t$, $y=t^2$
b) $z=x \ln y$; $x=3t$, $y=e^t$
Hofmann

2) Calcule dz/dt, sendo $z=x^2++3x+1$, $x=2t+1$ e $y=t^2$.

R: $18t^2+14t+4$
Solução.
$dz/dt = \partial z/\partial x.dx/dt + \partial z/\partial y.dy/dt$

3ª Parte. Derivadas direcionais e vetor gradiente.

1) Determine o gradiente de $f(x,y)=3x^2y$ no ponto (1,2) e use-o para calcular a derivada direcional na direção do vetor $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$. Anton p.362

R: $D_uf(1,2)=48/5$

2) Seja $f(x,y)=x^2e^y$. Determine o valor máximo de uma derivada direcional em (-2,0), e determine o vetor unitário na direção do qual o valor máximo ocorre.
Anton p.362
R: a) grad $f(-2,0) = 4.(3)^{1/2}$ b) $\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{i}/(2)^{1/2} +\mathbf{j}/(2)^{1/2}$

3) Determine a derivada direcional de f(x,y,z)=x2y-yz3+z no ponto P(1,-2,0) na direção do vetor a=2i+j-2k e determine a taxa máxima de crescimento de f em p. Anton p.369

R: a) $D_uf(1,-2,0)=-3$ b) $grad(1,-2,0)=3(2)^{1/2}$

4ª Parte. Plano tangente e reta normal.

1) Determine uma equação para o plano tangente e equações paramétricas para a reta normal à superfície $z=x^2y$ no ponto (2,1,4).(Anton v.2p.354)
R: a) $4x+4y-z=8$ b) $x=2+4t$, $y=1+4t$, $z=4-t$

2) Determine o plano tangente ao parabolóide $z=2x^2+y^2$ no ponto (1, 1,3).

R: $z=4x+2y-3$

.