Matemática Discreta II LESI 2004/2005 TPC 9

Nome e No.:____

Seja φ uma fórmula tal que $\vdash \varphi$. O objectivo deste exercício é dar *duas* demonstrações da seguinte proposição: para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^P$ e todo $\psi \in \mathcal{F}^P$, $\Gamma \vdash \psi$ sse $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

1. Dê uma demonstração da proposição usando as seguintes propriedades da relação de derivabilidade:
   (a) (Monotonia) Se $\Delta \vdash \sigma$ e $\Delta \subseteq \Delta'$, então $\Delta' \vdash \sigma$.
   (b) $\Delta, \sigma_1 \vdash \sigma_2$ sse $\Delta \vdash \sigma_1 \to \sigma_2$.
   (c) Se $\Delta \vdash \sigma_1 \to \sigma_2$ e $\Delta \vdash \sigma_1$, então $\Delta \vdash \sigma_2$.
2. Dê uma demonstração da proposição a partir da definição de derivabilidade.

Resolução:

1.

1.1. $\Gamma \vdash \psi$ só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
É imediato, por (a), pois $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$.

1.2. $\Gamma \vdash \psi$ se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
Suponhamos $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Queremos $\Gamma \vdash \psi$. De $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ vem, por (b), $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. De $\vdash \varphi$ e (a) segue $\Gamma \vdash \varphi$. De $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$ concluímos, por (c), $\Gamma \vdash \psi$.

2.

2.1. $\Gamma \vdash \psi$ só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
Suponhamos $\Gamma \vdash \psi$. Queremos mostrar que existe derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Ora, de $\Gamma \vdash \psi$ segue que existe derivação de ψ a partir de Γ. Mas uma derivação de ψ a partir de Γ é também uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

2.2. $\Gamma \vdash \psi$ se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
Suponhamos $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Queremos mostrar que existe derivação $\mathcal{D}$ de ψ a partir de Γ. De $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ vem que existe derivação $\mathcal{D}'$ de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. De $\vdash \varphi$ vem que existe demonstração $\mathcal{D}''$ de φ. Então, basta tomar $\mathcal{D}$ como sendo a derivação

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\varphi]^1 \\ \mathcal{D}' \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\, I \to^1 \qquad \begin{array}{c}\emptyset \\ \mathcal{D}'' \\ \varphi\end{array}}{\psi}\, E \to$$