Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Cálculo II
Exame de Recurso

Eng. Informática
10/07/2010
[1h30m+1h30m]

Nome ______________________ Número __________

- Este exame é composto por duas partes estando cada uma delas cotada para 20 valores.
- O aluno que pretender realizar apenas uma das partes terá que entregar a prova 1h30m após o seu início.
- Antes de entregar a prova assinale a(s) parte(s) a que está a responder. $\boxed{1^{\text{a}}}$ $\boxed{2^{\text{a}}}$

1ª Parte

Justifique convenientemente todas as respostas.

Exercício 1.1 [3 valores] Descreva as superfícies de nível da função f definida por $f(x, y, z) = \cos(x+y+z)$.

Exercício 1.2 [4 valores] Sabendo que g é uma função real de 2 variáveis reais definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ c & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

verifique se existe $c \in \mathbb{R}$ para o qual g é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 1.3 [4 valores] Defina, se existir, a recta normal à superfície definida por $z = ye^{\frac{x}{y}}$, no ponto de coordenadas $(1, 1, e)$.

Exercício 1.4 [3 valores] A função h, definida por $h(x, t) = 5 + \cos(\frac{x}{2} - t)$ descreve uma onda.

O valor $h(x, t)$ dá-nos a profundidade da água (em cm) a uma distância x (em m) de um determinado lugar e no instante t (em segundos). Nestas condições, calcule as derivadas parciais de 1^{a} ordem de h no ponto de coordenadas $(2, 5)$ e interprete os resultados obtidos em termos da onda.

Nome [ ] Número [ ]

Exercício 1.5 [3 valores] Considere a função f, real de 2 variáveis reais, definida por $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$. Verifique que f não é diferenciável na origem.

Exercício 1.6 [3 valores] Existirá uma função diferenciável f tal que, num ponto A do seu domínio, se tem $\|\nabla f(A)\| = 0$ e, simultaneamente, $f_{\vec{u}}(A) \neq 0$?

2ª Parte

Justifique convenientemente todas as respostas.

Exercício 2.1 [4 valores] Seja f a função definida por $f(x,y)=\frac{x}{y^2}+xy$.

a) Determine o domínio de f.

b) Encontre e classifique os seus pontos críticos.

Exercício 2.2 [3 valores] Seja g uma função, real de 2 variáveis reais, definida por

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \cos(1+e^{xy}) \end{array}$$

a) Justifique que g tem, no seu domínio, um mínimo global.

b) Encontre o mínimo de g.

Exercício 2.3 [4 valores] Seja $\mathcal{R}$ a região do plano limitada pelas curvas definidas por $y = x$ e $y = x^2$.

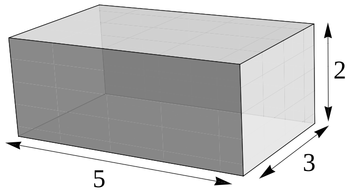
a) Esboce $\mathcal{R}$.

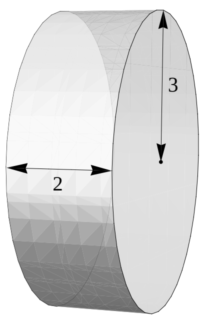
b) Encontre um integral duplo que determine a área de $\mathcal{R}$.

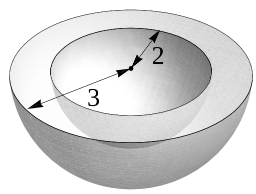
c) Reescreva o integral anterior, trocando convenientemente a ordem de integração.

d) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

Exercício 2.4 [4 valores] Para cada uma das seguintes regiões escreva, escolhendo sistemas de coordenadas apropriadas, um integral triplo (incluindo os limites de integração) que permita calcular o seu volume.







Exercício 2.5 [5 valores] Considere o campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$.

a) Verifique que $\boldsymbol{F}$ é um campo de gradientes, isto é, que existe uma função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \boldsymbol{F}$.

b) Determine o integral de linha de $\boldsymbol{F}$ ao longo de qualquer caminho de classe C^1 que una o ponto $(1, 0, 1)$ ao ponto $(0, 1, 0)$.