



Duração: 2 horas

1º Teste

[2.0 valores] Exercício 1. Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge 1 < (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$.

Faça um esboço dos seguintes conjuntos:

- a) A ; b) $\overset{\circ}{A}$; c) \overline{A} ; d) $\text{Fr}(A)$.

[3.0 valores] Exercício 2. Considere a função definida por $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$.

- a) Determine e esboce o domínio de f .
b) Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

[7.5 valores] Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{2x^2 + 3y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.
b) Calcule $\nabla f(0, 0)$.
c) Determine a derivada direcional de f no ponto $(0, 0)$ segundo a direção do vetor $(1, 1)$.
d) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.
e) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

[3.0 valores] Exercício 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x - 1)^3 + (x - 1)y^2 - x + 2$.

- a) Represente graficamente a curva de nível 1 de f , isto é, $N_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$.
b) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(2, 1)$.

[4.5 valores] Exercício 5. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (ye^{yz}, xyz)$.

- a) Calcule $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,2)} f(x, y, z)$.
b) Calcule a matriz jacobiana de f .
c) Determine $f'(1, 2, 3)$.