Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMA

Cálculo
LEI
2013/2014

Folha 7 - Integral de Riemann

Exercício 1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}\,dx;$

b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}^2 x\,dx;$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}\,dx;$

d) $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x-1|\,dx;$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3-x}{x^2+1}\,dx;$

f) $\displaystyle\int_0^1 \big(\operatorname{sh}(5x) - 3e^{2x}\big)\,dx;$

g) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx;$

h) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx;$

i) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x}+e^{-2x})\,dx;$

j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(x^2+\sqrt[3]{x})\,dx;$

k) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx;$

l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx;$

m) $\displaystyle\int_0^2 x\operatorname{ch}(x^2)\,dx;$

n) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\operatorname{sh}(x^3+1)\,dx;$

o) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{4}{\cos^2 x}\,dx;$

p) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx;$

q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{6-x}{x^3}\,dx;$

r) $\displaystyle\int_2^5 2\sqrt{x-1}\,dx.$

Exercício 2 Calcule $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ para:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad -1 \le x \le 1, \\ 1+x & \text{se} \quad 1 < x \le 2, \end{cases} \qquad a=-1,\ b=2;$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2-e^x & \text{se} \quad 1 < x \le 2, \\ 1/x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases} \qquad a=0,\ b=5;$

c) $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen} x & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi/2, \\ -\cos x & \text{se} \quad \pi/2 < x \le \pi, \end{cases}, \qquad a=0,\ b=\pi.$

Exercício 3 Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

a) $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in [0,2];$

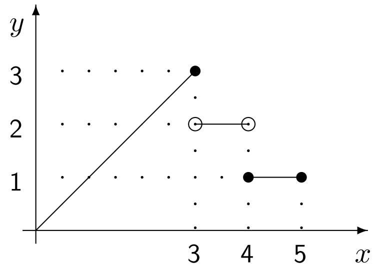
b) $f,g\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx$ e $f(x) \neq g(x), \forall x \in [0,2].$

Exercício 4 Sabendo que $\int_1^4 f(x)\,dx = 3$ e que $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$, determine:

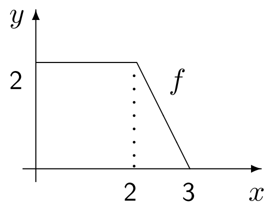
a) $\int_1^4 f(t)\,dt$; c) $\int_4^2 f(t)\,dt$; e) $\int_1^2 f(x)\,dx$;

b) $\int_1^4 3\,f(x)\,dx$; d) $\int_3^3 f(u)\,du$; f) $\int_{1/2}^2 f(2x)\,dx$.

Exercício 5 Sem recorrer ao Teorema Fundamental do Cálculo, determine $\int_0^5 f(x)\,dx$, sendo f a função representada na figura. Justifique convenientemente a sua resposta.



Exercício 6 Sejam $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função representada na figura e $F : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sua primitiva. Sem calcular qualquer integral, determine $F(3) - F(0)$.



Exercício 7 Calcule os seguintes integrais recorrendo ao método de integração por partes:

a) $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx$; b) $\int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x\,dx$; c) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln(\ln x)\,dx$.

Exercício 8 Calcule os seguintes integrais efetuando a substituição de variável indicada:

a) $\int_0^2 x(x+1)^6\,dx, \quad t = x+1$; c) $\int_0^{\sqrt{8}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx, \quad u = x^2+1$;

b) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{e^x - 1}\,dx, \quad e^x - 1 = t^2$; d) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx, \quad 1+\sqrt{x} = t$.

Exercício 9 Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que:

a) se f é par então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

b) se f é ímpar então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Exercício 10 Calcule a área da região plana:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1 \ \wedge\ e^x \le y \le 5\}$;

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi \ \wedge\ 0 \le y \le \operatorname{sen} x\}$;

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1 \ \wedge\ e^x \le y \le 2 + |x|\}$;

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \ \wedge\ \cos x \le y \le \operatorname{sen} x\}$.

Exercício 11 Calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

a) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3\pi/2$;
b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$;
c) $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$;
d) $y = 7 - x^2$, $y = 3$, $x = -2$, $x = 2$;
e) $y = 10$, $y = x^2 + 1$, $x = -3$, $x = 3$;
f) $x^2 - y = 4, y = 0$;
g) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;
h) $y = |x|$, $y = x^2 - 1$;
i) $y = 7 - x$, $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 4$;
j) $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$.

Exercício 12 Determine o comprimento da curva de equação apresentada a seguir, entre os pontos de abcissas a e b indicadas:

a) $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $a = 1$, $b = 8$;
b) $y = \text{ch}\, x$, $a = -1$, $b = 1$;
c) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $a = 0$, $b = 1$.

Exercício 13 Esboce a região plana $\mathcal{A}$ que é limitada pelas curvas de equações $y = \text{ch}\, x$ e $y = \text{ch}\, 2$. Determine a área de $\mathcal{A}$ e o comprimento da linha que limita a região $\mathcal{A}$ (note que tal linha é constituída por um segmento de reta e um arco de curva).

Exercício 14 Diga se cada um dos seguintes integrais impróprios é convergente ou divergente. Em caso de convergência determine o valor do integral impróprio

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{tg}\, x}{1 + \text{sen}^2 x}\, dx$;

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2x - 1}\, dx$.

Exercício 15 Verifique que é possível atribuir uma área à região

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x \geq 1 \ \ \wedge \ \ 0 \leq y \leq \frac{4}{2x+1} - \frac{2}{x+2} \right\}.$$

e determine-a.

[Neste exercício convém notar que os integrais $\int_1^{+\infty} \frac{4}{2x+1} \, dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x+2} \, dx$ são divergentes.]

Exercício 16 Uma substância radioativa decai exponencialmente no tempo de acordo com a lei $m(t) = m(0)e^{ct}$, onde c é uma constante negativa e $m(t)$ a massa da substância no instante t. A duração média de um átomo dessa substância é dada por

$$M = -c \int_0^{+\infty} te^{ct} \, dt.$$

Calcule a duração média de um átomo de carbono 14, para o qual $c = -0.000121$.
