

# Tutorial

## Eliminação de Gauss

J.M.Valério de Carvalho  
Dept. Produção e Sistemas  
Universidade do Minho  
2010

# Conteúdo

- Introdução
- Operações Elementares em matrizes
- Eliminação de Gauss
- Aplicação a Exemplos

# Introdução

- O Método de Eliminação de Gauss consiste na aplicação de operações elementares em matrizes, de modo a obter um resultado desejado, como, por exemplo, a solução de um sistema de equações.
- Deve o seu nome a Carl Friedrich Gauss, que foi um matemático, astrónomo e físico alemão (1777-1855).
- O Método de Eliminação de Gauss é leccionado no ensino secundário e também em disciplinas introdutórias de Álgebra, no ensino superior.

# Operações elementares com matrizes

- Multiplicar uma linha por uma constante.
- Adicionar uma linha multiplicada por uma constante a outra linha.
- Trocar duas linhas.

## Exemplo 1 (i)

- Aplicação do Método de Eliminação de Gauss à resolução do sistema de equações:
- $4x + 5y = 200$
- $6x + 4y = 230$
- $1x + 2y + z = 70$
- O sistema de equações pode ser representado num quadro:

	x	y	z		
Equação 1:	4	5	0	=	200
Equação 2:	6	4	0	=	230
Equação 3:	1	2	1	=	70

## Exemplo 1 (ii)

	x	y	z		
Equação 1:	4	5	0	=	200
Equação 2:	6	4	0	=	230
Equação 3:	1	2	1	=	70

- Multiplicação da primeira linha pela constante  $\frac{1}{4}$ .

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	6	4	0	=	230
Equação 3:	1	2	1	=	70

## Exemplo 1 (iii)

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	6	4	0	=	230
Equação 3:	1	2	1	=	70

- Adição da primeira linha multiplicada pela constante -6 à segunda linha.

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	0	-7/2	0	=	-70
Equação 3:	1	2	1	=	70

## O porquê do nome ...

- Ao adicionar uma linha multiplicada por uma constante (escolhida convenientemente) a outra linha, eliminamos uma variável dessa linha (equação).
- Daí a designação de **Eliminação** de Gauss
- Isso acontece na Equação 2 do slide anterior:
- Equação 2:  $6x + 4y = 230$ .
- Equação 1:  $x + \frac{5}{4}y = 50$ , ou seja,  $x = 50 - \frac{5}{4}y$ .
- Assim,
- $6(50 - \frac{5}{4}y) + 4y = 230$  é equivalente a  $-\frac{7}{2}y = -70$ , e equivalente a  $y=20$ .



## Exemplo 1 (iv)

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	0	-7/2	0	=	-70
Equação 3:	1	2	1	=	70

- Adição da primeira linha multiplicada pela constante -1 à terceira linha.

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	0	-7/2	0	=	-70
Equação 3:	0	3/4	1	=	20

## Nota:

- Após efectuarmos estas operações elementares, a coluna de  $x$  é uma coluna da matriz identidade, ou seja,
- a variável  $x$  só aparece na Equação 1.

	$x$	$y$	$z$		
Equação 1:	1	$5/4$	0	=	50
Equação 2:	0	$-7/2$	0	=	-70
Equação 3:	0	$3/4$	1	=	20

- Iremos efectuar outras operações elementares para atingir os mesmos objectivos com as colunas de  $y$  e  $z$ .

## Exemplo 1 (v)

	x	y	z		
Equação 1:	1	$5/4$	0	=	50
Equação 2:	0	$-7/2$	0	=	-70
Equação 3:	0	$3/4$	1	=	20

- Multiplicação da segunda linha pela constante  $-2/7$ .

	x	y	z		
Equação 1:	1	$5/4$	0	=	50
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	$3/4$	1	=	20

## Exemplo 1 (vi)

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	3/4	1	=	20

- Adição da segunda linha multiplicada pela constante  $-5/4$  à primeira linha.

	x	y	z		
Equação 1:	1	0	0	=	25
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	3/4	1	=	20

## Exemplo 1 (vii)

	x	y	z		
Equação 1:	1	5/4	0	=	50
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	3/4	1	=	20

- Adição da segunda linha multiplicada pela constante  $-3/4$  à terceira linha.

	x	y	z		
Equação 1:	1	0	0	=	25
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	0	1	=	5

## Exemplo 1 (viii)

	x	y	z		
Equação 1:	1	0	0	=	25
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	0	1	=	5

- Após efectuar operações válidas com as linhas da matriz, obtemos a **solução do sistema de equações**:
- a primeira equação diz que  $x=25$ , a segunda que  $y=20$  e a terceira que  $z=5$ .

# Pivot

	x	y	z		
Equação 1:	1	0	0	=	25
Equação 2:	0	1	0	=	20
Equação 3:	0	0	1	=	5


- No processo de resolução, obtivemos colunas da matriz identidade para as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ .
- O elemento que dá origem ao 1 na coluna da matriz identidade é designado por elemento pivot.
- Usámos como elementos pivots os elementos  $(1,1)$  e  $(2,2)$  da matriz; não foi preciso fazê-lo para  $(3,3)$ .

# Elemento Pivot

- Para usar o elemento  $(i,j)$  como elemento pivot:
- A linha  $i$  é multiplicada por uma constante,
- A linha  $i$  é multiplicada por uma constante (escolhida convenientemente e dependendo de cada linha) e adicionada a cada uma das outras linhas.
- Depois das operações, a coluna  $j$  tem um 1 na linha  $i$  e 0s nas outras linhas.



## Exemplo 2 (i)

- Quando, a par da resolução do sistema de equações, se pretende obter a matriz inversa, o método é aplicado com uma matriz estendida com a matriz identidade.
- O elemento pivot é assinalado com  .

	x	y	z				
Equação 1:	4	5	0	1	0	0	200
Equação 2:	6	4	0	0	1	0	230
Equação 3:	1	2	1	0	0	1	70

## Exemplo 2 (ii)

	x	y	z				
Equação 1:	4	5	0	1	0	0	200
Equação 2:	6	4	0	0	1	0	230
Equação 3:	1	2	1	0	0	1	70

	x	y	z				
Equação 1:	1	5/4	0	1/4	0	0	50
Equação 2:	0	-7/2	0	-6/4	1	0	-70
Equação 3:	0	3/4	1	-1/4	0	1	20

## Exemplo 2 (iii)

	x	y	z				
Equação 1:	1	$5/4$	0	1/4	0	0	50
Equação 2:	0	$-7/2$	0	-6/4	1	0	-70
Equação 3:	0	$3/4$	1	-1/4	0	1	20

	x	y	z				
Equação 1:	1	0	0	-2/7	5/14	0	25
Equação 2:	0	1	0	3/7	-2/7	0	20
Equação 3:	0	0	1	-4/7	3/14	1	5

Já se obteve a matriz identidade na parte esquerda.

# Definição Matricial

- O sistema de equações pode ser representado pela equação matricial  $Ax = b$ .
- Se as colunas de  $A$  forem linearmente independentes (existindo a matriz inversa  $A^{-1}$ ), então a solução do sistema de equações é dada por  $x = A^{-1}b$ .
- As operações efectuadas correspondem a pré-multiplicar por  $A^{-1}$  a seguinte matriz.

x	y	z				
<table><tr><td colspan="2">A</td><td>I</td><td>b</td></tr></table>			A		I	b
A		I	b			

# Pré-multiplicação por $A^{-1}$

$$\boxed{A^{-1}} * \left[ \begin{array}{c|c|c} A & I & b \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} I & A^{-1} & A^{-1}b \end{array} \right]$$

## Exemplo 3

- Iremos de seguida aplicar o Método de Eliminação de Gauss usando o elemento pivot indicado.
- Não é aqui apresentada uma justificação para a forma como foi seleccionado, que decorre do método simplex.
- A Eliminação de Gauss é efectuada com cálculos linha a linha.

## Eliminação de Gauss: elemento pivot

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
z	1	-10	-9	0	0	0	0

Elemento pivot: cruzamento linha e coluna pivots

Pretende-se obter:

	z	x1	x2	x3	x4	x5
x3	0	0		1	0	
x4	0	0		0	1	
x1	0	1		0	0	
z	1	0		0	0	



## Quadro anterior

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
z	1	-10	-9	0	0	0	0

## Linha pivot: dividir linha pivot por elemento pivot

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3							
x4							
x1	0	1	1/2	0	0	1/2	35
z							

## Parte do novo quadro - I

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3		0					
x4							
x1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	35
z							

## Quadro anterior

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
z	1	-10	-9	0	0	0	0

folha de cálculo: adicionar linha pivot  
multiplicada por -5 à linha de x3

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
-5.x1	0	-5	-5/2	0	0	-5/2	-175
Total	0	0	3/2	1	0	-5/2	25

Linha pivot:

x1	0	1	1/2	0	0	1/2	35
----	---	---	-----	---	---	-----	----

## Parte do novo quadro - II

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25
x4		0					
x1	0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35

## Quadro anterior

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
z	1	-10	-9	0	0	0	0

folha de cálculo: adicionar linha pivot  
multiplicada por -4 à linha de x4

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x4	0	4	6	0	1	0	230
-4.x1	0	-4	-2	0	0	-2	-140
Total	0	0	4	0	1	-2	90

Linha pivot:

x1	0	1	1/2	0	0	1/2	35
----	---	---	-----	---	---	-----	----



## Parte do novo quadro - II

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25
x4	0	0	4	0	1	-2	90
x1	0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35
z		0					

## Quadro anterior

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
z	1	-10	-9	0	0	0	0

folha de cálculo: adicionar linha pivot  
multiplicada por 10 à linha de z

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
z	0	-10	-9	0	0	0	0
10.x1	0	10	5	0	0	5	350
Total	0	0	-4	0	0	5	350

Linha pivot:

x1	0	1	1/2	0	0	1/2	35
----	---	---	-----	---	---	-----	----

## Quadro completo

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25
x4	0	0	4	0	1	-2	90
x1	0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35
	1	0	-4	0	0	5	350

## Exemplo 4

- Os cálculos do Método de Eliminação de Gauss podem ser efectuados elemento a elemento.
- Esses cálculos são os que resultam para cada elemento das operações elementares efectuadas com as linhas.
- É útil conhecer esta forma de efectuar cálculos elemento a elemento para eventualmente verificar, em caso de dúvida, se um elemento foi calculado correctamente.

# Eliminação de Gauss

## cálculo elemento a elemento

quadro antigo

a	b
c	d



quadro novo

1	$b/a$
0	$(ad-bc)/a$

Os dois quadros representam dois conjuntos de células, uma do quadro antigo e outra do novo.

O elemento pivot é o elemento cujo valor é a.

## Exemplo 4.1: porção da matriz a considerar

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
	1	-10	-9	0	0	0	0

## Exemplo 4.1: cálculo elemento a elemento

antigo

a	b
c	d

→

novο

1	$b/a$
0	$(ad-bc)/a$

2	1
-10	-9

→

1	$1/2$
0	-4

Elemento pivot é o elemento cujo valor é 2.



## Exemplo 4.1: resultado

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25
x4	0	0	4	0	1	-2	90
x1	0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35
	1	0	-4	0	0	5	350

## Exemplo 4.2: porção da matriz a considerar

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	5	4	1	0	0	200
x4	0	4	6	0	1	0	230
x5	0	2	1	0	0	1	70
	1	-10	-9	0	0	0	0

## Exemplo 4.2: cálculo elemento a elemento

antigo

a	b
c	d



novo

1	$b/a$
0	$(ad-bc)/a$

4	0
2	1

0	-2
1	$1/2$

## Exemplo 4.2: resultado

	z	x1	x2	x3	x4	x5	
x3	0	0	$3/2$	1	0	$-5/2$	25
x4	0	0	4	0	1	-2	90
x1	0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	35
	1	0	-4	0	0	5	350

# FIM