Universidade do Minho
Dep. de Matemática

Cálculo I

2009/2010

Licenciatura em Engenharia Informática

Folha 2

Exercício 2.1 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo ou justifique que não existe:

a) um número racional pertencente ao intervalo $\left[\frac{\pi}{1001}, \frac{\pi}{1000}\right]$;

b) um número irracional pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}\right]$;

c) um número racional positivo menor do que qualquer número irracional positivo;

d) o maior número racional menor do que 1.

Exercício 2.2 Determine o interior, a aderência, a fronteira e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos e indique quais são abertos e quais são fechados:

a) $\mathbb{N}$;

b) $\mathbb{R}$;

c) $\mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;

e) $\mathbb{Q}$;

f) $[0,2[$;

g) $[0,3]$;

h) $]5,10[$;

i) $\mathbb{Q}\cap[-2,0[$;

j) $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,2]$;

k) $]0,3[\backslash\{1\}\cup\{4,5\}$;

l) $\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

Exercício 2.3 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

a) se $A\subseteq\mathbb{R}$ é aberto então A não é limitado;

b) se $A\subseteq\mathbb{R}$ é aberto e $B\subseteq\mathbb{R}$ é fechado então $A\cup B$ não é aberto nem fechado;

c) se $A,B\subseteq\mathbb{R}$ não são abertos nem fechados então $A\cap B$ não é aberto nem fechado;

d) o conjunto $A=\,]0,4[\,\cap\,\mathbb{Q}$ é aberto;

e) o conjunto $A=[0,7]\cap\mathbb{Q}$ é fechado;

f) o conjunto $A=\{x\in\mathbb{R} : 6-x^2<1\}$ é limitado superiormente;

g) o conjunto $A=\{x\in\mathbb{R} : |x|\leq 7\}$ é fechado e limitado.

Exercício 2.4 Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, a aderência, a fronteira, o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

a) $\mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Q}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x^2 < 50\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : x < |x|\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x-1| \leq 4\}$;

g) $\{x \in \mathbb{Q} : |x| < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$;

h) $\{x \in \mathbb{Q} : |x+4| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x^2 - 3 < 0\}$;

i) $[0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 2.5 Quando possível, apresente um subconjunto A de $\mathbb{R}$ que:

a) não seja aberto nem fechado;

b) seja simultaneamente aberto e fechado;

c) seja aberto e limitado;

d) seja fechado e não limitado;

e) tenha o interior vazio e seja não limitado;

f) seja limitado mas não seja aberto nem fechado;

g) não contenha o seu derivado;

h) coincida com o seu derivado;

i) tenha um único ponto de acumulação;

j) seja limitado e cujo ínfimo pertença ao seu interior;

k) tenha apenas dois pontos de acumulação;

l) seja fechado e tal que $\overline{\operatorname{int} A} \neq A$;

m) seja aberto e tal que $\operatorname{int} \overline{A} \neq A$;

n) coincida com a sua fronteira;

o) a sua fronteira seja o conjunto vazio.