DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

LISA SANTOS

Sejam $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n$, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ função derivável em $x_0 \in \mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ aberto de $\mathbb{R}^m$ tal que $f(\mathcal{U}) \in \mathcal{V}$, $g: \mathcal{V} \to \mathbb{R}^k$ função derivável em $f(x_0)$. Então $g \circ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ é derivável em x_0 e, além disso

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)}$$

REGRA DE DERIVAÇÃO DA FUNÇÃO COMOSTA

isto é, a aplicação linear $(g\circ f)'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é a composta das aplicações lineares $g'(f(x_0)): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ com $f'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

note-se que

$$J_{x_0}(g \circ f) = J_{f(x_0)}\, g \cdot J_{x_0} f$$

produto de matrizes

Exemplo:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \mapsto (x^2 y,\ x + yz)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \mapsto (xy^2, x, y)$

$$J_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$$

$$J_{(1,1,1)} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{(x,y)} g = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(1,1,1) = (1,2)$

$$J_{(1,2)} g = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g\circ f(x,y,z) = g(x^2y,\ x+yz) = (x^2y\,(x+yz)^2,\ x^2y,\ x+yz)$$

$$= (x^4y + 2x^3y^2z + x^2y^3z^2,\ x^2y,\ x+yz)$$

$$J_{(x,y,z)}\,g = \begin{pmatrix} 4x^3y + 4x^2y^2z + 2xy^3z^2 & x^4 + 4x^3yz + 3x^2y^2z^2 & 2x^3y^2 + 2x^2y^3z \\ 2xy & x^2 & 0 \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$$

$$J_{(1,1,1)}\,g = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{(1,2)}\,g \cdot J_{(1,1,1)}\,f = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>NOTA</u>: Neste exemplo é muito mais fácil calcular $J_{(1,2)}\,g \cdot J_{(1,1,1)}\,f$ que calcular $J_{(1,1,1)}(g\circ f)$

$$(g\circ f)'(1,1,1) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(g\circ f)'(1,1,1) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (12x + 8y + 4z,\ 2x+y,\ x+y+z)$$

<u>NOTA</u>: Quando derivamos a composta de duas funções reais de variável real, os cálculos são mais simples, uma vez que não é necessário utilizar matrizes. De facto, se f e g são funções escalares de uma só variável, deriváveis, então

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x)$$

Quando calculamos derivadas parciais de funções escalares estamos, na prática, a calcular derivadas de funções de uma só variável, pois consideramos as outras fixadas.

Exemplo:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto f(u,v) \qquad\qquad (x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$$

$$f \circ g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(u(x,y), v(x,y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Verificamos que f depende de x através da variável u e também através da variável v. Na prática, estamos a utilizar, de forma intuitiva, a regra de derivação da função composta, pois

$$J_{(x,y)}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right.$$

$$\parallel$$

$$J_{g(x,y)} f \cdot J_{(x,y)} g =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y), v(x,y)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y), v(x,y)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y), v(x,y))\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y), v(x,y))\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \right. ,$$

$$\hookrightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y), v(x,y))\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y), v(x,y))\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right)$$

Superfícies e linhas de nível

Seja $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^3$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função. Ao conjunto

$$\Sigma_c = \{(x,y,z) \in \mathcal{U} : f(x,y,z) = c\} = f^{-1}(\{c\}), \ c \in \mathbb{R}$$

chama-se superfície de nível c da função f

Exemplo

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$\Sigma_c = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = c\}$ é

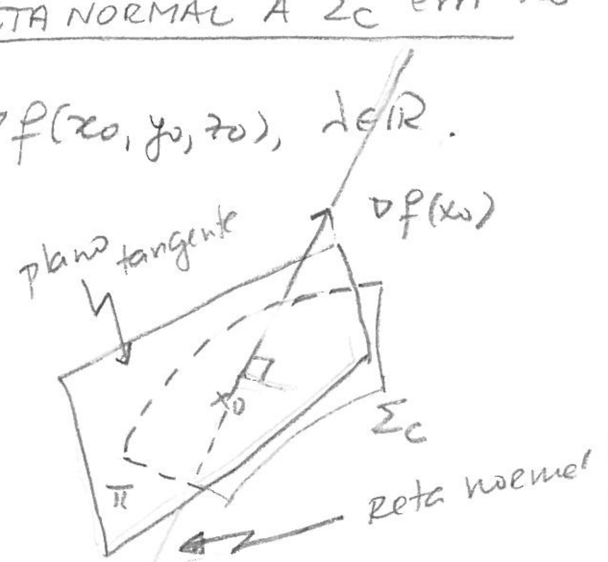
- a esfera de centro em $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{c}$, se $c > 0$;
- o conjunto $\{(0,0,0)\}$, se $c = 0$;
- o conjunto vazio, se $c < 0$.

Se f for derivável em $x_0 \in \mathcal{U}$ e $\nabla f(x_0) \neq (0,0,0)$ então $\nabla f(x_0)$ é ortogonal a Σ_c, sendo $c = f(x_0)$. Então, se $x_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a

EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA NORMAL A Σ_C em x_0

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

EQUAÇÃO CARTESIANA DO PLANO (π) TANGENTE A Σ_C EM x_0:



$$(X - x_0) \cdot \nabla f(x_0) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\right) = 0$$

$\iff$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)y + \frac{\partial f}{\partial z}(X_0)z = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)y_0 + \frac{\partial f}{\partial z}(X_0)z_0$$

<u>NOTA</u>: Recordem que o plano de equação cartesiana

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

passa no ponto (x_0, y_0, z_0) e é ortogonal ao vetor (a, b, c).

Seja $\mathcal{U}$ um aberto do $\mathbb{R}^2$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $X_0 \in \mathcal{U}$ e tal que $\nabla f(X_0) \neq (0,0)$. Então $\nabla f(X_0)$ é ortogonal à linha de nível $\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathcal{U} : f(x,y) = c\} = f^{-1}(\{c\})$.

<u>EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA NORMAL A Σ_c EM $X_0 = (x_0, y_0)$</u>

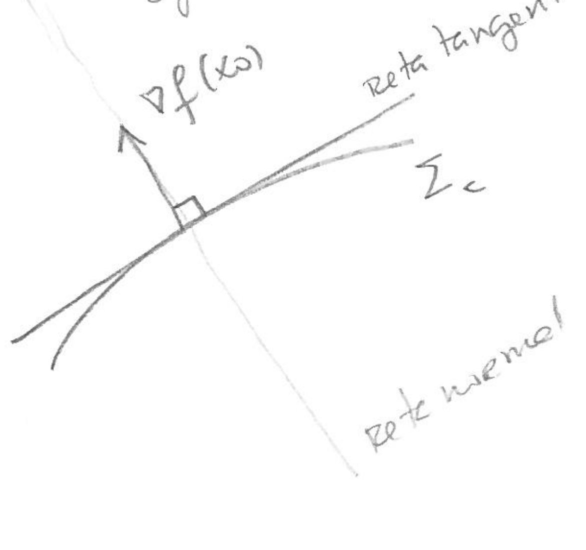
$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>EQUAÇÃO CARTESIANA DA RETA TANGENTE A Σ_c EM X_0</u>

$$(X - X_0) \cdot \nabla f(X_0) = 0$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X_0), \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\right) = 0$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)y = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)y_0$$



MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Seja $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \mathcal{U}$. Diz-se que x_0 é um ponto crítico de f se $\nabla f(x_0) = (0,0)$.

- Um ponto $x_0 \in \mathcal{U}$ diz-se maximizante local de f se

  $\exists r>0 \quad \forall x \in B(x_0, r) \qquad f(x) \leq f(x_0)$

  (note-se que r pode ser escolhido de modo que $B(x_0, r) \subseteq \mathcal{U} = D_f$);

  se x_0 é um maximizante local de f, diz-se que $f(x_0)$ é um máximo local de f

- Um ponto $x_0 \in \mathcal{U}$ diz-se um maximizante absoluto de f se

  $\forall x \in \mathcal{U} \qquad f(x) \leq f(x_0)$

  $f(x_0)$ diz-se o máximo absoluto de f.

- Um ponto $x_0 \in \mathcal{U}$ diz-se um minimizante local de f se

  $\exists r>0 \quad \forall x \in B(x_0, r) \qquad f(x) \geq f(x_0)$

  (sendo r tal que $B(x_0, r) \subseteq \mathcal{U} = D_f$)

  Se x_0 é um minimizante local de f então $f(x_0)$ é um mínimo local de f

- Um ponto $x_0 \in \mathcal{U}$ diz-se um minimizante absoluto de f se

  $\forall x \in \mathcal{U} \quad f(x) \geq f(x_0)$

  $f(x_0)$ diz-se o mínimo absoluto de f.

RESULTADO

Se f é derivável em x_0 e x_0 é um maximizante local ou um minimizante local de f, então $\nabla f(x_0) = (0,0)$, isto é,

$\boxed{\text{os maximizantes e os minimizantes locais de uma função derivável estão entre os seus pontos críticos.}}$

Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, define-se

$$\underbrace{\det(A)}_{\text{determinante de } A} = ad - bc \qquad \underbrace{\operatorname{tr}(A)}_{\text{traço de } A} = a + d$$

RESULTADO: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $x_0 \in U$ um ponto crítico de f (i.e., $\nabla f(x_0) = (0,0)$). Seja

$$\underbrace{\operatorname{Hess}_{x_0} f}_{\text{matriz hessiana de } f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

(NOTA: Como f é de classe C^2, pelo Teorema de Schwarz, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0)$).

Se

- $\det(\operatorname{Hess}_{x_0} f) < 0$, então x_0 não é maximizante local nem minimizante local de f;
- $\det(\operatorname{Hess}_{x_0} f) > 0$ e $\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}_{x_0} f) > 0$, então x_0 é um minimizante local de f;
- $\det(\operatorname{Hess}_{x_0} f) > 0$ e $\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}_{x_0} f) < 0$, então x_0 é um maximizante local de f.

NOTA: Quando $\det(\operatorname{Hess}_{x_0} f) = 0$, num ponto crítico x_0 de f, nada se pode concluir sobre se x_0 é maximizante local, minimizante local ou nem uma coisa nem outra, sendo necessário analisar a natureza do ponto crítico estudando diretamente o comportamento da função numa vizinhança do ponto.