UNIVERSIDADE DO MINHO

ESCOLA DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Equações Diferenciais Ordinárias

Maria Joana Torres e Ricardo Severino

Conteúdo

1 Equações diferenciais: noções básicas

Quando, a partir de finais do século XVII, foi possível entender e manipular o conceito de variação instantânea de uma quantidade, relativamente ao tempo, por exemplo, a perspetiva de modelar matematicamente os fenómenos naturais[1] teve um desenvolvimento e um sucesso sem paralelo na história. Veja-se o caso muito simples, mas que de alguma forma mostra como a nossa apreensão dos fenómenos naturais é basicamente feita registando variações.

Exemplo 1. Lei do arrefecimento de Newton. É habital chamar-se lei do arrefecimento de Newton à seguinte afirmação: a taxa de variação da diferença de temperatura entre um determinado objeto e o meio onde está inserido é proporcional a essa diferença de temperatura.

A lei do arrefecimento de Newton fornece um modelo simplificado para o fenómeno da variação da temperatura de um corpo por perda de calor para o meio ambiente, em que consideramos as seguintes hipóteses:

1. a temperatura $T(t)$ é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;

2. a temperatura T_m do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;

3. o fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt, é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m), \tag{1}$$

   onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo.

O sinal $-$ em (1) explica-se pelo fato de o calor fluir da fonte quente para a fonte fria, e assim, se $T > T_m$, então T decresce. Se $T < T_m$, então dT/dt cresce e o corpo aquece, em lugar de resfriar.

Este modelo foi considerado por Newton no estudo da perda de calor de uma bola de metal aquecida. Um modelo mais correto foi obtido usando a lei de Newton para "elementos

[1] Ideia essa com origem em Galileu Galilei, um século antes.

próximos" dentro do corpo e considerando uma equação envolvendo derivadas parciais da temperatura $T(t,x)$, que agora dependeria também do ponto x no corpo. A equação obtida

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} \tag{2}$$

é conhecida como equação do calor e, após o trabalho de Fourier por volta de 1810, recebeu um tratamento extensivo.

Como podemos observar, as igualdades (1) e (2) são muito diferentes das equações que estamos habituados a resolver, primeiro porque as incógnitas são funções e depois porque temos a presença de derivadas dessas funções. Com efeito, na equação (1) a incógnita é a função $T(t)$ e temos a presença da derivada (total) de T. Na equação (2) a incógnita é a função $T(t,x)$ e temos a presença de derivadas parciais de T. Para resolver estas equações teremos de tentar encontrar uma função que satisfaz uma igualdade onde temos, para além da função, as suas derivadas. É a este tipo de equações que vamos passar a chamar **equação diferencial**.

Os nossos conhecimentos de Cálculo permitem-nos resolver a equação (1). Com efeito, se C é uma constante real qualquer, a função

$$T(t) = T_m + Ce^{-kt}$$

é uma solução da equação, uma vez que

$$T'(t) = -kCe^{-kt} = -k(T(t) - T_m).$$

Além disso, não existem mais soluções. Para mostramos esta afirmação, seja $U(t)$ uma qualquer solução e calculemos a derivada de $(U(t) - T_m)e^{kt}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((U(t) - T_m)e^{kt}) &= U'(t)e^{kt} + k(U(t) - T_m)e^{kt} \\ &= -k(U(t) - T_m)e^{kt} + k(U(t) - T_m)e^{kt} = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, $(U(t) - T_m)e^{kt}$ é uma constante C e, portanto, $U(t) = T_m + Ce^{-kt}$. Isto prova a nossa afirmação.

Neste modelo é importante caraterizar a constante C relativamente às condições do problema no instante inicial, que vamos escolher como sendo $t = 0$: designando por T_0 a temperatura do objeto nesse instante inicial, temos que

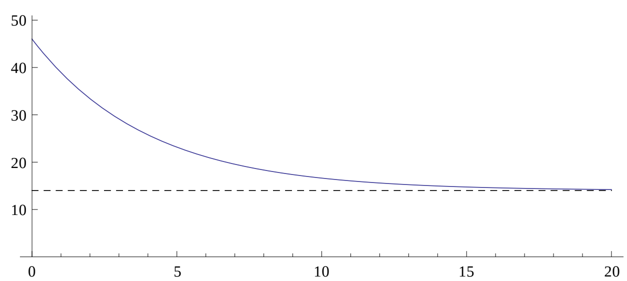
$$T(0) = T_m + C = T_0,$$

ou seja, a constante C é igual à diferença entre as temperaturas, $C = T_0 - T_m$. Podemos então concluir que a função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

é a função que satisfaz a lei de arrefecimento de Newton, quando a temperatura inicial é T_0.

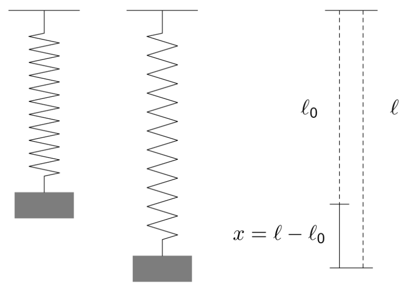
Considerando uma situação em que a temperatura ambiente é igual a $T_m = 14$, a temperatura inicial do corpo é igual a $T_0 = 46$ e um meio caraterizado por um valor da constante $k = 0.25$, teremos uma evolução temporal da temperatura do corpo representada pelo seguinte gráfico:



Como podemos observar pelo gráfico, a variação da temperatura corresponde à ideia que o corpo vai arrefecer até atingir o equilíbrio térmico com o ambiente que o rodeia. Mas agora temos um modelo que descreve exatamente, em cada instante, essa variação. Vejamos um segundo exemplo, encontrado, também empiricamente, por um contemporâneo de Newton.

■

Exemplo 2. Robert Hooke $(1638 - 1703)$ foi o físico e matemático britânico que primeiro enunciou a lei do movimento de uma mola: a força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o elongamento l da mola e a sua posição de equilíbrio l_0. A constante de proporcionalidade é hoje chamada constante de Hooke da mola. Consideremos então uma mola e coloquemos um corpo de massa m na sua extremidade (ver figura). Naturalmente que a presença do corpo vai esticar um pouco a nossa mola até atingir a sua posição de equilíbrio, com um elongamento que vamos designar por l_0.



De seguida, vamos retirar o sistema da sua posição de equilíbrio, puxando o corpo um pouco para baixo, até uma posição correspondente a um elongamento l da mola. A lei de Hooke estabelece que a força exercida no corpo pela mola é proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio, portanto, que

$$F = -k(l - l_0) = -kx.$$

O sinal no lado direito da igualdade reflete a ideia que a força exercida pela mola tende a levar o corpo na direção da posição de equilíbrio, ou seja, a contrariar a sua posição.

A segunda lei do movimento de Newton diz-nos então que a posição do corpo, relativamente à posição de quilíbrio, vai evoluir de acordo com a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Habitualmente escreve-se esta igualdade da seguinte forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{3}$$

com $\omega^2 = k/m$ uma constante do sistema, dependente da constante de Hooke da mola e da massa do corpo nela pendurado. Assim sendo, esta vai ser uma equação diferencial que descreve a evolução temporal da posição de um qualquer corpo de massa m, neste caso, como todos sabemos, um movimento oscilatório, para cima e para baixo, pendurado numa mola de constante de Hooke k.

Comparando a equação (3) com a equação (1) do exemplo anterior, não é difícil prever que encontrar uma função que satisfaça a equação (3) será proventura uma tarefa mais difícil, uma vez que nela encontramos a segunda derivada da função. Contudo, uma vez mais, os nossos conhecimentos das funções elementares vão conduzir-nos facilmente a uma função que satisfaz a igualdade (3).

Como sabemos do estudo das funções elementares, existem duas funções cujas segundas derivadas são proporcionais aos seus simétricos: são as funções trigonométricas seno e cosseno. Deste modo, pelas propriedades da derivada de uma função, é possível antecipar que a função

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t),$$

com A, B e ω constantes arbitrárias, terá igualmente essa caraterística. Vejamos que isso é realmente verdade, calculando a sua segunda derivada. Como sabemos,

$$f'(t) = \omega A\,\mathrm{sen}(\omega t) + \omega B\cos(\omega t),$$

a partir da qual encontramos que

$$f''(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\,\mathrm{sen}(\omega t).$$

Ora, reescrevendo o lado direito da igualdade anterior,

$$f''(t) = -\omega^2(A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)),$$

podemos concluir facilmente que a função f apresentada satisfaz a igualdade

$$f''(t) = -\omega^2 f(t),$$

ou seja, que essa função satisfaz a equação diferencial

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0.$$

Ora, comparando esta equação com (3), podemos concluir que

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

com $\omega^2 = k/m$, descreve a posição, relativamente ao repouso, de um corpo de massa m suspenso numa mola de constante de Hooke k. Qual será a interpretação possível para as duas constantes A e B? A resposta é dada, tal como no exemplo anterior, relativamente ao tempo inicial, isto é, ao valor $t = 0$: de fato, escolhendo $t = 0$ na expressão acima, obtemos que a posição inicial do corpo, que vamos designar por x_0, é dada por

$$x(0) = x_0 = A\cos(\omega 0) + B\,\mathrm{sen}(\omega 0) = A.$$

Podemos assim concluir que a primeira das constantes é igual à posição inicial do corpo. Por outro lado, recuperando a expressão para a primeira derivada da função, e escolhendo também $t = 0$, encontramos que a velocidade inicial do corpo, que vamos designar por v_0, é dada por

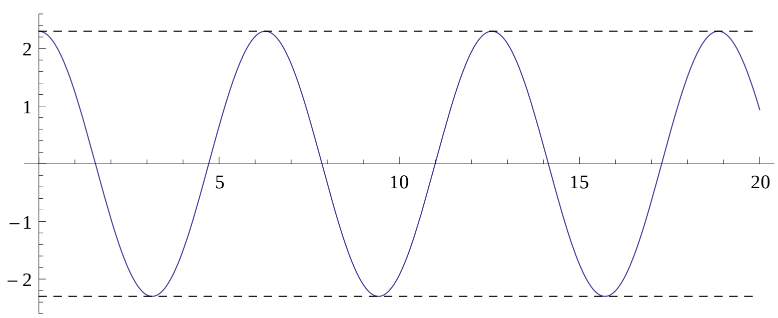
$$x'(0) = v_0 = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega 0) + \omega B\,\mathrm{sen}(\omega 0) = \omega B,$$

ou seja, que a constante B é proporcional à velocidade inicial do corpo. Concluindo, podemos escrever que a posição do corpo ao longo do tempo é descrita pela função

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t),$$

com x_0 e v_0 a posição e a velocidade iniciais, respetivamente, do corpo.

Escolhendo uma situação com a massa do corpo $m = 1$, a constante de Hooke da mola $k = 1$, a posição inicial do corpo $x_0 = 2.3$ e a velocidade inicial do corpo nula, $v_0 = 0$, a variação da posição do corpo ao longo do tempo será representada pelo seguinte gráfico:



onde se pode constatar a oscilação, para cima e para baixo, em torno da sua posição de equilíbrio, da posição do corpo. As linhas tracejadas pretendem sublinhar o fato do corpo ter um movimento periódico, como aliás se poderia constatar estudando a função x. ■

Na primeira parte destas notas vamos considerar situações em que temos uma única variável independente. Portanto, a variável dependente vai ser função apenas dessa variável e assim todas as suas derivadas serão relativamente a ela. Por isso se chamam equações diferenciais **ordinárias**, no sentido de envolverem as derivadas usuais. Na segunda parte destas notas iremos considerar equações em que temos mais do que uma variável independente, as chamadas equações **parciais**.

Para simplificar a escrita das equações diferenciais ordinárias tornou-se habitual a seguinte notação: dada uma função $y(x)$, vamos escrever as derivadas de y, de diferentes ordens, relativamente a x como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y(x) &= \frac{dy}{dx} = y'(x) \\ \frac{d^2}{dx^2}y(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} = y''(x) \\ &\vdots \\ \frac{d^n}{dx^n}y(x) &= \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Vejamos então a definição deste tipo de equações.

Definição 1.1. *Chama-se* **equação diferencial ordinária de ordem** n *relativamente a* $y(x)$ *a toda a igualdade*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{4}$$

em que F é uma função real definida num aberto U de $\mathbb{R}^{n+2}$. Uma vez que nessa equação a derivada de maior ordem presente na equação é a derivada de ordem n da variável y, dizemos que se trata de uma equação diferencial ordinária de ordem n.

Estabelecido o que entendemos por equação diferencial de ordem n, temos, naturalmente, que perceber bem o que significa resolver uma dessas equações, isto é, o que é uma solução de uma equação diferencial.

Definição 1.2. *Uma* **solução da equação diferencial ordinária** *(4) é uma função $y : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo aberto da reta real, tal que y e todas as suas derivadas até à ordem n existem e são contínuas em I e tal que ao substituirmos y e as suas derivadas na equação (4), a igualdade é válida, qualquer que seja $x \in I$.*

Exemplo 3. Consideremos a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \cos x. \tag{5}$$

Vamos mostrar que a função

$$y(x) = \frac{1}{2}(3xe^x - \operatorname{sen} x)$$

é solução desta equação diferencial em toda a reta real. Tal como nos indica a definição de solução de uma equação diferencial, devemos começar por mostrar que tanto a função y como a sua primeira e segunda derivadas, y' e y'', são funções contínuas em $\mathbb{R}$. Ora, a continuidade de y conclui-se facilmente pois esta é uma soma de funções contínuas. Calculemos então y' e y''. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \frac{1}{2}(3e^x + 3xe^x - \cos x)$$

e que

$$y''(x) = \frac{1}{2}(6e^x + 3xe^x + \operatorname{sen} x).$$

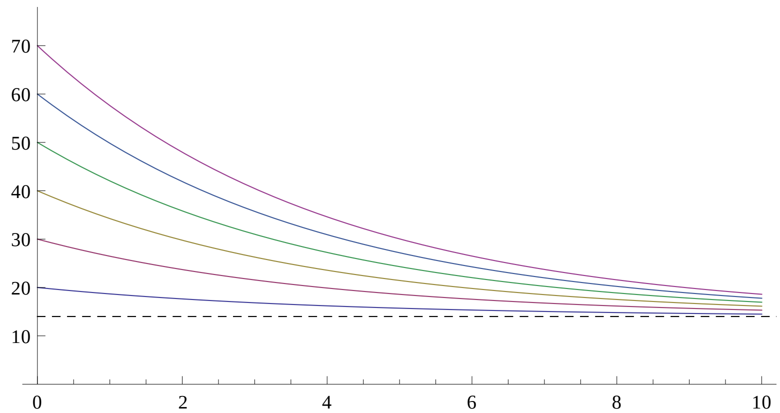
As expressões obtidas permitem-nos concluir igualmente que as funções y' e y'' são contínuas. Vejamos agora que estas funções satisfazem a igualdade (5):

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}(6e^x + 3xe^x + \operatorname{sen} x) - (3e^x + 3xe^x - \cos x) + \frac{1}{2}(3xe^x - \operatorname{sen} x) = \cos x.$$

Se recordarmos o Exemplo 1 e o Exemplo 2, veremos que as soluções aí apresentadas para as equações diferenciais se escreviam em termos de umas constantes arbitrárias, isto é, constantes cujos valores podíamos escolher, a saber, a constante T_0 na solução do Exemplo 1, e as duas constantes x_0 e v_0 na solução do Exemplo 2.

Nesses casos dizemos que estamos perante famílias de soluções, no sentido que a cada escolha das constantes corresponde uma solução diferente da equação diferencial. Pode ser muito interessante desenhar algumas curvas-solução de uma equação diferencial, para deste modo percebermos de que modo o comportamento da solução depende da escolha das constantes arbitrárias. Por exemplo, se relativamente à família de soluções do Exemplo 1,

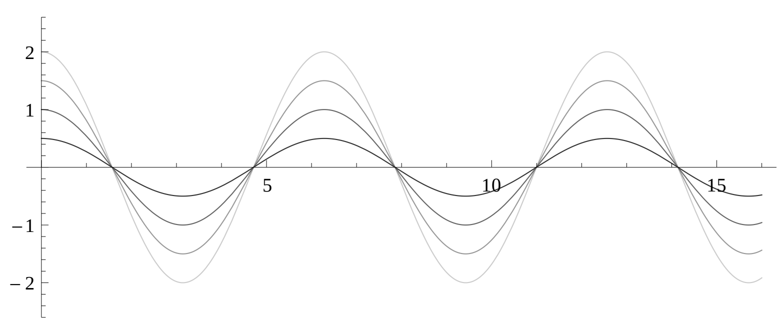
$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt},$$



escolhermos diferentes valores para a temperatura inicial do corpo, T_0, obteremos curvas-solução com idêntico comportamento, ilustrando o fato da temperatura do corpo tender, mais depressa ou mais devagar, para o equilíbrio com a temperatura do meio.

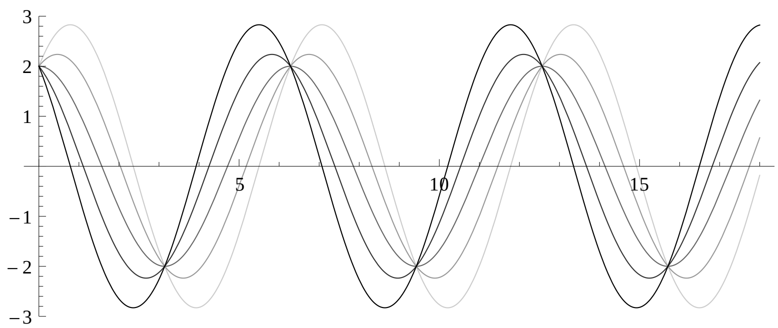
Notamos que, para considerarmos diferentes soluções a partir de diferentes escolhas da constante T_0, definimos a família de soluções como uma função dependendo não só da variável independente, o tempo t, mas dependendo também de um segundo parâmetro, da temperatura inicial do corpo T_0.

O estudo da família de soluções apresentada no Exemplo 2 é um pouco mais complicado, pois desta vez temos duas constantes, os valores iniciais da posição e da velocidade do corpo suspenso na mola. Talvez o melhor seja fixar um valor para a velocidade inicial do corpo, por exemplo $v_0 = 0$ e então desenhar as curvas-solução correspondentes a diferentes escolhas da posição inicial.



Como podemos constatar, apenas a amplitude máxima do movimento do corpo suspenso varia com a sua posição inicial; o período do movimento depende apenas da constante ω, isto é, da constante de Hooke da mola e da massa do corpo.

Na segunda parte do estudo, podemos fixar um valor para a posição inicial do corpo, $x_0 = 2$, e escolher então diferentes valores para a constante v_0. As correspondentes curvas-solução apresentam as seguintes formas:



Uma vez mais, pela análise das diferentes curvas-solução, podemos observar que o período do movimento do corpo não depende da sua velocidade inicial, mas, mais importante, que a amplitude máxima do movimento depende apenas do módulo dessa velocidade inicial, isto é, que movimentos iniciados com velocidades com valores simétricos têm idênticas amplitudes máximas.

O número de constantes arbitrárias presentes nas expressões das equações diferenciais nestes dois exemplos é diferente, acompanhando a ordem da equação diferencial em causa. Essa constatação pode ser generalizada: assim, podemos dizer que, em geral, uma equação diferencial de ordem n tem uma família de soluções que depende de n constantes arbitrárias.

Definição 1.3. *A* **solução (geral) de uma equação diferencial ordinária de ordem** n *é uma família de soluções, dependente de n constantes arbitrárias, tal que qualquer solução particular pode ser obtida da solução geral atribuindo-se valores às constantes.*

2 Equações diferenciais do tipo $y' = f(x, y)$

2.1 Problemas básicos

Atendendo à definição apresentada anteriormente, as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6}$$

onde F é uma função definida num aberto U de $\mathbb{R}^3$. Nesta secção iremos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$y' = f(x, y), \tag{7}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$. Chamamos a Ω o domínio da equação diferencial.

Nota 2.1. *Suponhamos que a função F em (11) é de classe $\mathcal{C}^1$ e admite, num dado ponto, derivada parcial não nula em ordem à última variável. Nesse caso o Teorema da Função Implícita garante-nos que, numa vizinhança desse ponto, a equação $F(x, y, y') = 0$ é equivalente a uma equação do tipo $y' = f(x, y)$.*

Definição 2.2. *Uma* **solução de uma equação do tipo** $y' = f(x, y)$ *é uma função $y : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo aberto, tal que*

$$\forall x \in I, \quad (x, y(x)) \in \Omega \quad \text{e} \quad y'(x) = f(x, y(x)). \tag{8}$$

Diremos que a solução y passa por um ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$.

Definição 2.3. *Uma solução $y : I \to \mathbb{R}$ de uma equação diferencial do tipo $y' = f(x, y)$ diz-se* **maximal** *se não for prolongável a uma outra solução definida num intervalo aberto contendo propriamente I.*

Exemplo 4. Para todo $c \in \mathbb{R}$ as funções,

$$\begin{array}{rccc} y_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y_2 : & (-c, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y_3 : & (-\infty, -c) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x+c} \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial $y' = -y^2$.

$\blacksquare$

Exemplo 5. As funções

$$\begin{array}{rccc} y_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

são duas soluções maximais (com o mesmo domínio) da equação diferencial $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, que passam no ponto $(0, 0)$.

$\blacksquare$

No estudo de uma equação diferencial do tipo $y' = f(x, y)$ surgem três problemas básicos:

1. Determinação das soluções da equação.

   Apesar de existirem resultados de existência e unicidade para equações deste tipo, em certas condições, não se espera conseguir encontrar, mesmo em casos simples, as soluções das equações de um modo explícito. Nos casos que vamos tratar daremos métodos que nos permitem encontrar a solução y pretendida como uma solução *implícita* de uma equação do tipo $F(x, y) = 0$. Nestes casos, a derivada paricial de F em ordem a y será diferente de 0, o que nos garante que a equação $F(x, y) = 0$ define localmente y como função de x. Hipoteticamente, a equação $F(x, y) = 0$ pode ser resolvida *explicitamente* em ordem a y.

   Muitas vezes as equações diferenciais poderão ter a forma $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, em que $P(x, y)$, $Q(x, y)$ são funções contínuas definidas num mesmo aberto V de $\mathbb{R}^2$. É claro que, no aberto $\{(x, y) \in V : Q(x, y) \neq 0\}$, esta equação é equivalente,

   $$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

   Por outro lado uma equação do tipo $y' = f(x, y)$ pode ser sempre escrita na forma $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, basta tomar $P(x, y) = -f(x, y)$ e $Q(x, y) = 1$.

Nota 2.4. *O domínio das equações diferenciais do tipo $y' = f(x,y)$ será sempre o maior possível, de modo a que "f tenha sentido".*

Analogamente, sempre que nos referirmos a uma equação diferencial do tipo $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$, estaremos a assumir que o domínio (comum) das funções $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ é o maior possível de tal modo que $Q(x,y)$ nunca se anula.

2. Determinação da solução maximal que passa num dado ponto (x_0, y_0) do domínio.

   Veremos na próxima secção que, sob certas condições, existe uma e uma só solução da equação $y' = f(x,y)$ que passa num dado ponto (x_0, y_0).

   Exemplo 6. Vamos determinar a solução maximal da equação $\dfrac{dy}{dt} = e^{3t}$ que passa no ponto $(1/3, e/3)$.

   A equação
   $$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$
   pode ser resolvida por integração direta obtendo-se:
   $$y(t) = \int e^{3t}\, dt = \frac{e^{3t}}{3} + c,$$
   que é a solução da equação diferencial. Substituindo $t = 1/3$ e $y = e/3$ na solução geral encontrada, obtem-se $c = 0$. Assim, a solução maximal da equação dada que passa no ponto $(1/3, e/3)$ é:
   $$\begin{array}{rcl} y: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{3t}}{3} \end{array}$$
   ■

3. Teoria qualitativa.

   Em muitos problemas de aplicações não é necessário conhecer-se a expressão algébrica das soluções da equação diferencial. É suficiente conhecer-se as propriedades das soluções, como por exemplo, o seu comportamento quando x se aproxima de um valor pré-definido. Com isto em vista, é interessante e importante estudar-se propriedades geométricas da família das soluções da equação diferencial. Este problema básico no estudo das equações diferenciais pertence à chamada *teoria qualitativa*.

2.2 Interpretação geométrica da equação $y' = f(x, y)$

Para melhor compreendermos os problemas referidos na secção anterior é importante compreender o significado geométrico da equação diferencial

$$y' = f(x, y), \tag{9}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano.

A função f atribui a cada ponto de Ω um número real $f(x, y)$; a equação diferencial diz que a solução que passa por esse ponto deve ter inclinação igual a esse número real:

$$\text{tg } \theta = f(x, y),$$

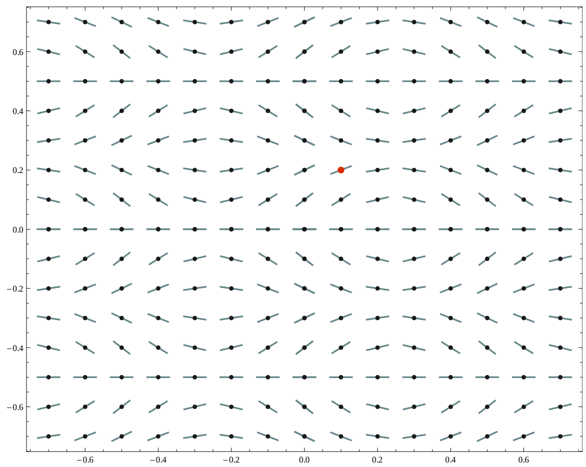
onde θ é o ângulo da tangente T à solução com o eixo horizontal. Esta interpretação pode tornar-se ainda mais geométrica se imaginarmos o seguinte. Em cada ponto $(x, y) \in \Omega$, consideramos o vetor $v(x, y) = (1, f(x, y))$ que determina a tangente T. Assim, temos um campo de vetores definido em Ω. As soluções da equação $y' = f(x, y)$ são as curvas cujos vetores tangentes em cada ponto (x, y) são os vetores $v(x, y)$.

Definição 2.5. *O* **campo de direções tangentes** *de uma equação do tipo $y' = f(x, y)$, onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida num aberto Ω do plano, é a representação gráfica das retas tangentes às soluções da equação em cada ponto $(x, y) \in \Omega$.*

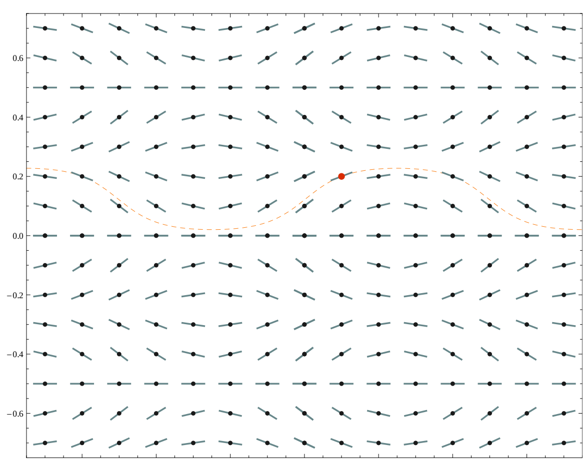
Exemplo 7. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \cos(2\pi x)\,\text{sen}(4\pi y).$$

Se, em cada ponto (x_0, y_0), desenharmos um pequeno segmento de reta de declive exatamente igual ao valor da função f nesse ponto, obteremos a seguinte figura:



O significado destas direções, definidas em cada ponto, é muito fácil de aprrender: se desenharmos a solução da equação diferencial, y, que passa pelo ponto $(0.1, 0.2)$, podemos observar que essa solução, apresentada a tracejado, passa por mais dois destes pontos da figura, nos quais é visível que as direções neles desenhadas correspondem extamente às retas tangentes a y.

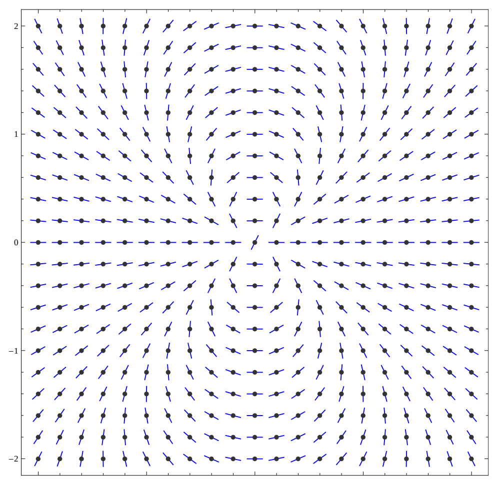


É esta a interpretação geométrica dos segmentos de reta definidos em cada ponto com a direção de $f(x, y)$: são as direções das retas tangentes à solução da equação diferencial que passa por esse ponto. Com o exemplo seguinte procuraremos sublinhar um outro aspeto importante desta interpretação geométrica.

Exemplo 8. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem que descreve as linhas de força de um pequeno magneto, aqui considerado como pontual, ou seja, cujas dimensões são consideradas muito menores que as distâncias em causa:

$$y' = f(x, y) = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

Se, uma vez mais, desenharmos em cada ponto um pequeno segmento de reta de declive exatamente igual ao valor da função f nesse ponto, obteremos a seguinte figura:



Desta vez decidimos considerar mais pontos (x_0, y_0), de modo que agora o desenho dos segmentos de reta quase que, escolhido um determinado ponto, permitem deduzir o gráfico da solução y que por ele passa. Mas é exatamente isto que significa resolver uma equação diferencial do tipo $y' = f(x, y)$: encontrar uma função y tal que, para cada x_0, a sua reta tangente tenha como declive a direção assinalada no ponto (x_0, y_0), com $y_0 = y(x_0)$.

2.3 Teorema de existência e unicidade de solução

Estamos agora em condições de enunciar um dos mais importantes resultados nesta área da matemática, o chamado Teorema Fundamental das Equações Diferenciais do tipo $y' = f(x, y)$. Não será feita a sua demonstração uma vez que, para o fazer, seriam necessários conceitos ainda não conhecidos dos alunos: o teorema do ponto fixo, o princípio da boa ordenação, etc..

Teorema 2.6. (Fundamental das Equações Diferenciais do tipo $y' = f(x, y)$) *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que a derivada parcial de f com relação à segunda variável é contínua. Consideremos a equação diferencial $y' = f(x, y)$.*

Então, se $(x_0, y_0) \in \Omega$:

1. *existe uma e uma só solução maximal que passa por (x_0, y_0);*
2. *toda a solução pode ser prolongada a uma solução maximal;*
3. *se $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ são duas soluções da equação diferencial que passam em (x_0, y_0) então ${y_1}_{|I_1 \cap I_2} = {y_2}_{|I_1 \cap I_2}$.*

A última alínea deste teorema é uma consequência simples das outras duas alíneas.

Exemplo 9. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$y' = f(x, y) = \frac{2x(1 + y)}{1 + x^2} \tag{10}$$

definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Como facilmente se verifica, tanto f como a sua derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

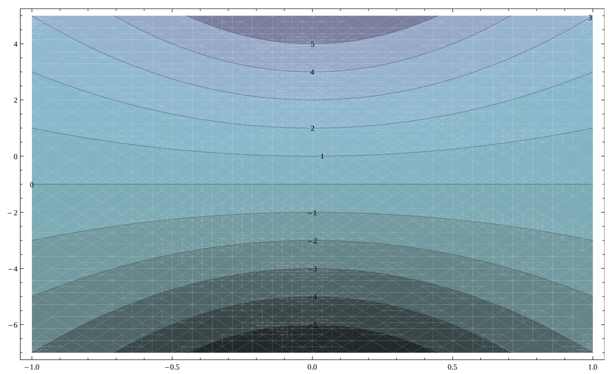
são funções contínuas em todo o plano, pelo que o teorema anterior garante a existência de uma única solução maximal y que passa num dado ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Desenhando algumas curvas-solução teremos uma ideia do que isso significa. Mas, primeiro, verifiquemos que a família de funções, definidas implicitamente por

$$G(x, y) = \frac{1 + y}{1 + x^2} = k$$

com k uma constante arbitrária, satisfazem a equação diferencial (10):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1 + y}{1 + x^2}\right) = -\frac{2x(1 + y)}{(1 + x^2)^2} + \frac{1}{1 + x^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Rearranjando os termos do lado esquerdo da última igualdade, chegamos facilmente à igualdade (10), como queríamos mostrar. Usando o comando ContourPlot do Mathematica é agora possível desenhar várias curvas-solução, correspondentes a diferentes escolhas para k.



■

Este exemplo mostra um desenho caraterístico das curvas-solução de uma equação diferencial de primeira ordem que satisfaz as condições do teorem de existência e unicidade de solução. De seguida, vamos estudar tipos muito particulares de equações diferenciais de primeira ordem, relativamente aos quais existem procedimentos para se obter as respetivas soluções.

2.4 Equações diferenciais lineares

Este tipo de equações diferenciais não é o mais simples de resolver, mas tem a vantagem de nos conduzir diretamente à sua solução explícita.

Definição 2.7. *Uma* **equação diferencial linear de primeira ordem** *é uma equação que pode ser escrita na forma*

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \tag{11}$$

onde P e Q são funções contínuas definidas num aberto I da reta real.

O método para encontrar a solução deste tipo de equações diferenciais inicia-se pela multiplicação, por razões que serão entendidas *a posteriori*, de ambos os membros da igualdade por uma função, que é habitual designar por μ. Assim sendo, a igualdade anterior apresenta-se como

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = \mu(x)Q(x). \tag{12}$$

O ponto fundamental do método é o seguinte: será possível escolher a função μ de modo que o lado esquerdo da igualdade (12) seja igual à derivada do produto das funções y e μ, isto é, existirá uma função μ tal que

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = (y(x)\mu(x))'? \tag{13}$$

Como vamos mostrar de seguida, caso consigamos encontrar uma função μ com estas caraterísticas a resolução da equação diferencial ficará extremamente facilitada. Bom, para responder à questão levantada temos apenas que desenvolver a derivada que se apresenta no lado direito da igualdade (13) e ver que condição daí resulta para a função μ:

$$y'(x)\mu(x) + P(x)y(x)\mu(x) = (y(x)\mu(x))' = y'(x)\mu(x) + y(x)\mu'(x)$$

ou seja,

$$P(x)I(x) = \mu'(x). \tag{14}$$

Esta igualdade diz-nos que a função μ é tal que a sua derivada é proporcional a si própria, propriedade que imediatamente nos permite identificar μ como uma função exponencial. Neste caso, será uma função exponencial com uma função como expoente cuja derivada é igual à função P dada (notemos que a função P é contínua), ou seja,

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{15}$$

Note-se que esta não é a única função I que satisfaz a igualdade (14), mas isso não vai, como veremos mais tarde, implicar nenhuma particularização da nossa parte na solução da equação diferencial que estamos a resolver. Partindo do princípio que é possível encontrar uma função μ que satisfaz a igualdade (13), que dependa da nossa capacidade em calcular o integral envolvido em (15), vamos agora ver como se obtém a solução da equação diferencial.

A partir das igualdades (12) e (13), podemos escrever

$$(y(x)\mu(x))' = \mu(x)Q(x),$$

da qual imediatamente se retira que

$$y(x)\mu(x) = \int \mu(x)Q(x). \tag{16}$$

Como a função μ nunca se anula, temos que a solução procurada é,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\mu(x)Q(x)\,dx.$$

Concluímos assim o método para encontrar, de uma forma explícita, a solução de uma qualquer equação diferencial linear de primeira ordem.

Exemplo 10. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = -2y(x) + 50e^{-10x},$$

que facilmente se reconhece como sendo do tipo linear, com

$$P(x) = 2 \;\text{ e }\; Q(x) = 50e^{-10x}.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}.$$

Multiplicado a equação por μ obtemos

$$e^{2x}y'(x) + 2e^{2x}y(x) = 50e^{-8x}.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $e^{2x}y(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y(x)) = 50e^{-8x}.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$e^{2x}y(x) = -\frac{25}{4}e^{-8x} + C,$$

e, portanto,

$$y(x) = -\frac{25}{4}e^{-10x} + Ce^{-2x}.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = -\frac{25}{4}e^{-10x} + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

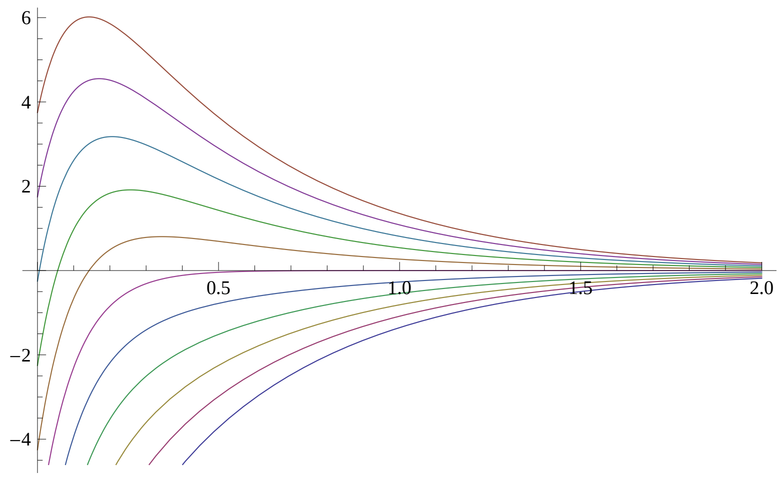


Figura 1: Algumas curvas-solução da equação diferencial $y'(x) = -2y(x) + 50e^{-10x}$.

Para cada $c \in \mathbb{R}$ a função,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & -\frac{25}{4}e^{-10x} + Ce^{-2x} \end{array}$$

é a solução maximal da equação diferencial.

Exemplo 11. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = \frac{y}{x} - xe^x,$$

de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$. Esta equação é do tipo linear, com

$$P(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad Q(x) = -xe^x.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}\, dx} = e^{-\log|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

Multiplicado a equação por μ obtemos

$$\frac{1}{|x|}y'(x) - \frac{y}{x|x|} = -\frac{x}{|x|}e^x.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $\frac{1}{|x|}y(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{|x|}y(x)\right) = -\frac{x}{|x|}e^x.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$\frac{1}{|x|}y(x) = -\frac{x}{|x|}e^x + C,$$

e, portanto,

$$y(x) = -xe^x + C|x|.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = -xe^x + C|x|$, $C \in \mathbb{R}$.

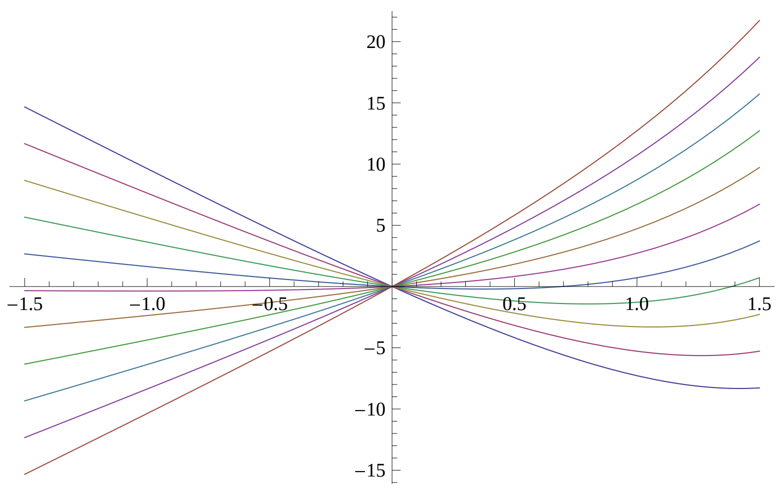


Figura 2: Algumas curvas-solução da equação diferencial $y'(x) = \frac{y}{x} - xe^x$.

Para todo o $c \in \mathbb{R}$ as funções,

$$\begin{array}{rcl} (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -xe^x + Cx \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} (-\infty,0) & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & -xe^x - Cx \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial.

Exemplo 12. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) + \frac{3y}{x} + 3x = 2,$$

de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$. Esta equação é do tipo linear, com

$$P(x) = \frac{3}{x} \;\text{ e }\; Q(x) = 2 - 3x.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{3\log|x|} = |x|^3.$$

Multiplicado a equação por μ obtemos

$$|x|^3 y'(x) + 3\frac{|x|}{x} y = 2|x|^3 - 3x|x|^3.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $|x|^3 y(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(|x|^3 y(x)\right) = 2|x|^3 - 3x|x|^4.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$|x|^3 y(x) = |x|\frac{x^3}{2} - 3|x|\frac{x^4}{5} + C,$$

e, portanto,

$$y(x) = \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{C}{|x|^3}.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{C}{|x|^3}$, $C \in \mathbb{R}$.

Para todo o $c \in \mathbb{R}$ as funções

$$\begin{array}{rcl} (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{C}{x^3} \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} (-\infty,0) & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} - 3\frac{x^5}{5} - \frac{C}{x^3} \end{array}$$

são soluções maximais da equação diferencial.

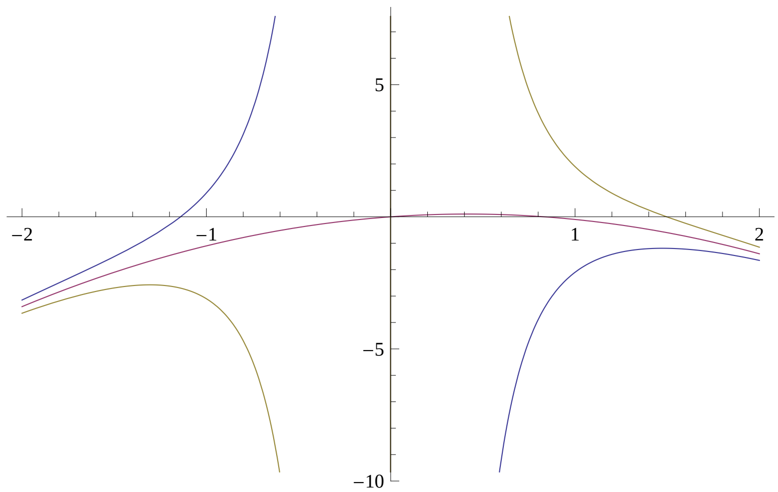


Figura 3: Algumas curvas-solução da equação diferencial $y'(x)+\frac{3y}{x}+3x = 2$ ($C = -2, C = 0$ e $C = 2$)

Exemplo 13. Consideremos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$x^2y'(x) + xy = 1$$

de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$. Vamos determinar a solução maximal da equação que passa no ponto $(1, 2)$.

A equação dada é equivalente a

$$y'(x) + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Esta equação é do tipo linear, com

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{1}{x^2}.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\log|x|} = |x| = x.$$

Multiplicado a equação por μ obtemos

$$xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x}.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $xy(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(xy(x)\right) = \frac{1}{x}.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$xy(x) = \frac{\log x}{x} + C$$

e, portanto,

$$y(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Conclusão: A expressão geral da solução da equação é: $y(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

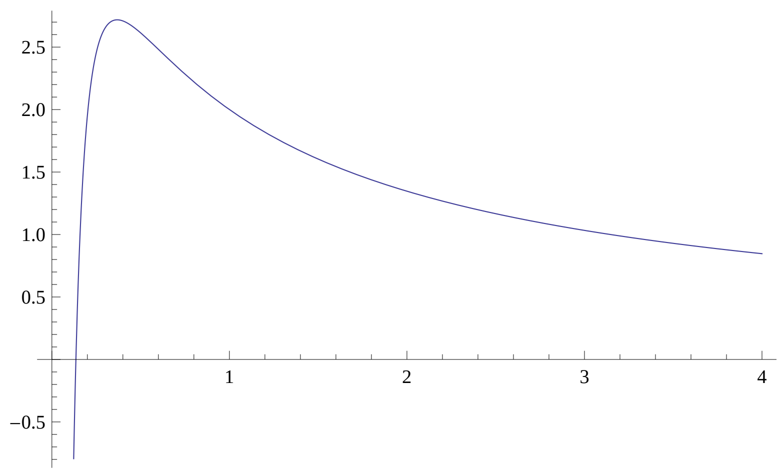


Figura 4: Curva-solução da equação diferencial $x^2 y'(x) + xy = 1$ que passa no ponto $(1, 2)$.

Encontrada a solução geral, temos agora de encontrar a solução que passa no ponto $(1, 2)$, isto é, temos de determinar para que escolha da constante C se obtém $y(1) = 2$. Temos que

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2.$$

Assim, a solução maximal que passa no ponto $(1, 2)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \frac{\log x}{x} + \frac{2}{x} \end{array}$$

2.5 Equações diferenciais separáveis

O segundo tipo de equações diferenciais que vamos estudar tem associado um método de resolução muito mais simples que as equações diferenciais lineares anteriormente estudadas. No entanto, como veremos já de seguida, tem o inconveniente de conduzir a soluções implícitas.

O procedimento para resolver este tipo de quação diferencial foi pela primeira vez apresentado por Gottfried Leibniz, em 1961. Contudo, somente John Bernoulli, em 1694, as classificou formalmente como equações diferenciais separáveis e considerou explicitamente a forma de as resolver.

Definição 2.8. *Chamamos* **equação separável** *a uma equação que se pode escrever na forma*

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

em que $f(x)$, $g(y)$ são funções contínuas.

Vamos ver como resolver uma equação separável. Começamos com uma observação:

- Suponhamos que y é uma função de x e que queríamos calcular uma primitiva de uma função do tipo $h(y(x))y'$. Um modo de o fazer é encontrar $H(y)$, uma primitiva de $h(y)$ em ordem a y, e considerar a função $x \mapsto H(y(x))$. Esta é uma consequência simples do Teorema da Derivação da Função Composta, uma vez que,

  $$(H \circ y)' = H'(y(x))y'(x) = h(y(x))y'(x).$$

  Deste modo, "calcular uma primitiva em ordem a x de $h(y(x))y'(x)$ equivale a encontrar uma primitiva em ordem a y de $h(y)$".

Consideremos uma equação separável $y'(x) = f(x)g(y)$, $x \in I$, $y \in J$.

1. **Determinação das soluções constantes**.

   As soluções constantes da equação são as funções $y : I \to \mathbb{R}$ dadas por $y(x) = \lambda$ onde $\lambda \in J$ é um zero de g.

Exemplo 14. – A função $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é a única solução constante da equação $y' = xy^3$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

– A equação $(1 + x^2)y' = \dfrac{1}{y}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0, +\infty[$ não tem soluções constantes.

– A equação $y' = x \cos^2(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tem uma infinidade de soluções não constantes: são as funções $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. **Determinação das soluções não constantes**.

Se $y \in J \backslash \{y \in J : g(y) = 0\}$, a equação $y'(x) = f(x)g(y)$ é equivalente à equação

$$\frac{1}{g(y)} y'(x) = f(x).$$

Sejam $A(x)$ uma primitiva de $f(x)$ e $B(y)$ uma primitiva de $\frac{1}{g(y)}$. Integrando em ordem a x e usando a observação acima,

$$\frac{1}{g(y)} y'(x) = f(x) \iff \exists c \in \mathbb{R} : \, B(y) - A(x) = c.$$

Note-se que:

– o valor de c pode ser encontrado usando a condição inicial $y(x_0) = y_0$. Assim $c = B(y_0) - A(x_0)$;

– a equação $B(y) - A(x) = c$ define de facto y (implicitamente) como função de x uma vez que a derivada de $B(y) - A(x)$ em ordem a y é diferente de zero no ponto (x, y). Note-se que esse valor é $\dfrac{1}{g(y)}$.

Na prática, a resolução de uma equação separável pode fazer-se "separando as variáveis": denotemos a derivada do lado esquerdo da igualdade $y' = f(x)g(y)$ como um quociente de diferenciais, isto é, consideremos a equação diferencial separável reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Deste modo, manipulando o quociente de diferenciais e as funções em causa, para valores de y tais que $g(y) \neq 0$, podemos facilmente obter uma igualdade entre duas quantidades envolvendo, em cada um dos lados, apenas uma das variáveis, isto é,

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx. \tag{17}$$

É desta forma de representar a equação diferencial que vem a sua designação, pois, como podemos constatar, foi possível isolar cada uma das variáveis em causa em diferentes lados da igualdade. A partir de (17) é possível obter uma igualdade entre duas funções se calcularmos o integral de ambos os lados,

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx. \tag{18}$$

Partindo do princípio que é possível calcular ambos os integrais, esta igualdade apresenta-nos uma relação entre uma função de $y(x)$, a solução da equação diferencial, e uma função da variável independente. Temos assim a solução procurada dada de uma forma implícita. Antes de ilustrar este método com alguns exemplos, talvez seja importante antecipar o seguinte ponto: como sabemos, das integrações envolvidas em (19) vamos ter duas constantes arbitrárias, que resulta numa diferença de constantes arbitrárias, ao passar uma delas para o outro lado da igualdade. Ora, como facilmente se constata, a diferença de duas constantes arbitrárias é apenas e só uma constante arbitrária, e como tal deve ser apresentada. Assim sendo, aquando da integração deste tipo de equação diferencial é habitual não considerar a constante arbitrária da integração do lado esquerdo de (19), vindo então a constante resultante da outra integração como aquela, única, que deve aparecer na expressão final.

Exemplo 15. Consideremos a equação $y' = (\cos x)\, e^{-y}$ de domínio $\mathbb{R}^2$. Esta equação é separável. Note-se que e^{-y} nunca se anula. Assim podemos concluir que a equação dada é equivalente a

$$e^y y' = \cos x.$$

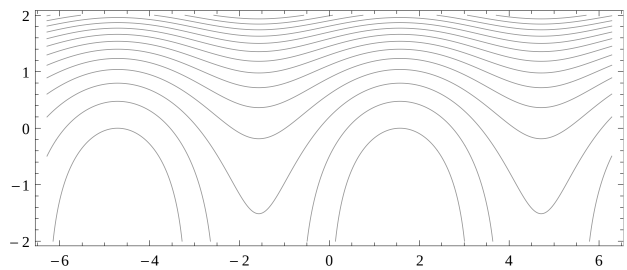
Separando as variáveis obtemos

$$e^y\, dy = \cos x\, dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$e^y = \operatorname{sen} x + C \quad \text{para algum } C \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

A partir da relação (19) é possível apresentar o desenho de algumas das suas curvas-solução:



Exemplo 16. Consideremos a equação $y' = x\cos x/(1 + \operatorname{sen}^2(y))$ de domínio $\mathbb{R}^2$. Esta equação é separável com $f(x) = x\cos x$ e $g(y) = 1/(1 + \operatorname{sen}^2(y))$. Note-se que a função g nunca se anula. Assim podemos concluir que a equação dada é equivalente a

$$(1 + \operatorname{sen}^2(y))y' = x\cos x.$$

Separando as variáveis obtemos

$$(1 + \operatorname{sen}^2(y))\,dy = x\cos x\,dx.$$

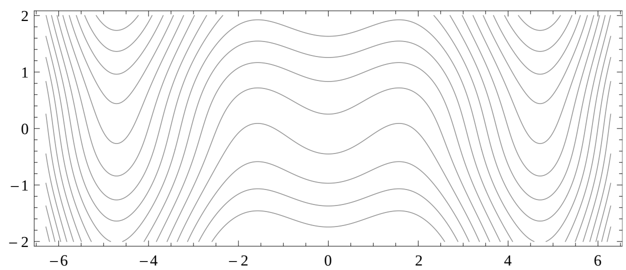
Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$\frac{3y}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) = \cos x + x\operatorname{sen} x + C \quad \text{para algum } C \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

A partir da relação (20) é possível apresentar o desenho de algumas das suas curvas-solução:

Exemplo 17. Consideremos a equação $y' = 2\operatorname{sen}(4x)e^{-x}\dfrac{1+y^2}{4y}$ de domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Esta equação é separável com $f(x) = 2\operatorname{sen}(4x)e^{-x}$ e $g(y) = \frac{1+y^2}{4y}$. Note-se que a função g nunca se anula. Assim podemos concluir que a equação dada é equivalente a

$$\frac{4y}{1+y^2}y' = 2\operatorname{sen}(4x)e^{-x}.$$



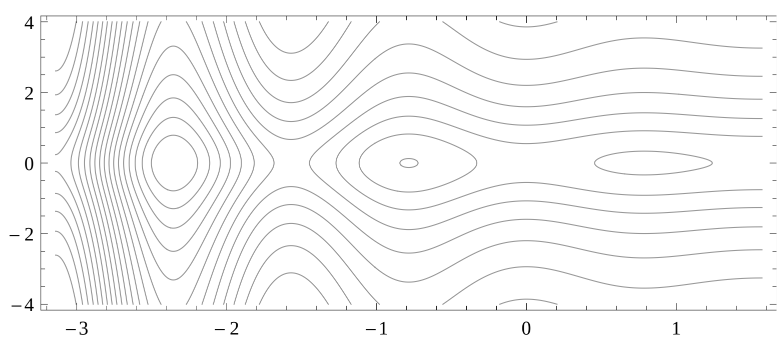
Separando as variáveis obtemos

$$\frac{4y}{1+y^2}\,dy = 2\,\mathrm{sen}(4x)e^{-x}\,dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$2\log(1+y^2) = -\frac{2}{17}e^{-x}(4\cos(4x)+\mathrm{sen}(4x)) + C \quad \text{para algum } C \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

A partir da relação (21) é possível apresentar o desenho de algumas das suas curvas-solução: Observe-se que não existe solução válida numa vizinhança de qualquer um dos pontos da



reta $y = 0$.

Exemplo 18. Consideremos a equação $y' = 6xy$ de domínio $\mathbb{R}^2$. Vamos determinar a solução maximal desta equação que passa no ponto $(0, -2)$. Esta equação é separável com $f(x) = 6x$ e $g(y) = y$.

- A função g anula-se quando $y = 0$. Consequentemente, a função nula é solução da equação diferencial. Mas a solução nula não passa no ponto $(0, -2)$.

- Se $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então a equação original é equivalente à equação

$$\frac{1}{y} y' = 6x.$$

Separando as variáveis obtemos

$$\frac{1}{y}\, dy = 6x\, dx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução geral (implícita)

$$\log|y| = 3x^2 + C \quad \text{para algum} \quad C \in \mathbb{R}.$$

A solução explícita da equação é, então:

$$|y| = e^C e^{3x^2} = Ae^{3x^2}.$$

Como, $y(0) = -2$, obtemos que $A = -2$. Consequentemente, a solução maximal que passa no ponto $(0, -2)$ é a função

$$\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & -2e^{3x^2} \end{array}$$

2.6 Substituições em equações de primeira ordem

Vamos estudar algumas equações de primeira ordem que podem ser transformadas em equações já estudadas anteriormente.

2.6.1 Equações homogéneas de primeira ordem

Definição 2.9. *Uma equação diferencial diz-se* **homogénea** *se for da forma* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Por exemplo, a equação $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ é uma equação homogénea.

As equações homogéneas podem ser resolvidas do seguinte modo: consideremos uma equação homogénea

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

e façamos a mudança de variável dependente

$$y = xz.$$

Obtemos assim,

$$y' = z + xz'.$$

Substituindo, obtemos,

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow z + xz' = f(z) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}[f(z) - z].$$

Ficamos assim na presença de uma equação de variáveis separáveis, cujo método de resolução já foi descrito.

Exemplo 19. O domínio da equação diferencial homogénea $y' = \dfrac{t^2 + y^2}{2ty}$ é $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Comecemos por notar que a equação dada pode ser escrita na forma

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{t}\right).$$

Façamos a mudança de variável dependente

$$y = tz.$$

Obtemos assim,

$$y' = z + tz'.$$

Substituido na equação obtemos,

$$z + tz' = \frac{1}{2z} + \frac{z}{2}$$

isto é,

$$z' = \frac{1 - z^2}{2z}\frac{1}{t} \tag{22}$$

1. (i) Determinação das soluções constantes da equação (1)

   Os zeros da função $g(z) = \frac{1-z^2}{2z}$ são $z = -1$ e $z = 1$. Consequentemente, as funções constantes $z = -1$ e $z = 1$ são soluções constantes da equação (1).

   Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que as funções $y(t) = -t$ e $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$, são soluções da equação homogénea dada.

2. (ii) Determinação das soluções não constantes da equação (1)

   Se $z \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, a equação (1) é equivalente a

   $$\frac{2z}{1-z^2}z' = \frac{1}{t}.$$

   Separando as variáveis, temos que

   $$\frac{2z}{1-z^2}dz = \frac{1}{t}dt.$$

   Integrando ambos os membros, obtemos

   $$-\log|1-z^2| = \log|t| + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

   Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos

   $$-\log\left|1-\frac{y^2}{t^2}\right| = \log|t| + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

2.6.2 Equações de Bernouilli

Definição 2.10. *As chamadas equações de Bernouilli são equações da forma*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

em que $n \in \mathbb{R}$.

Método de Resolução:

- Se $n \in \{0,1\}$, as equações são lineares.

- Suponhamos então que $n \notin \{0,1\}$. Fazendo a mudança de variável $z = y^{1-n}$ (em vizinhanças de pontos onde esta igualdade defina de facto uma mudança de variável), obtemos
$$\begin{aligned} y' + p(x)y = q(x)y^n \quad &\Leftrightarrow \quad y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x). \end{aligned}$$
Ficamos assim reduzidos ao estudo de uma equação linear de primeira ordem.

Exemplo 20. Determinemos a solução maximal da equação $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}x^2y^3$ que passa no ponto $P = (1, \frac{1}{2})$.

A equação é de Bernoulli com $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = -\frac{5}{2}x^2$, e $n = 3$. O domínio da equação é $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}$.

(i) A função constante $y = 0$ é solução da equação mas não passa no ponto $P = (1, \frac{1}{2})$!

(ii) Se $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, façamos a mudança de variável
$$z = y^{-2}.$$
Obtemos que
$$\begin{aligned} y' - \tfrac{y}{x} = -\tfrac{5}{2}x^2y^3 \quad &\Leftrightarrow \quad y^{-3}y' - \tfrac{1}{x}y^{-2} = -\tfrac{5}{2}x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{z'}{-2} - \tfrac{1}{x}z = -\tfrac{5}{2}x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad z' + \tfrac{2}{x}z = 5x^2 \end{aligned}$$
Esta equação é linear com
$$P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad Q(x) = 5x^2.$$
O fator integrante é:
$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\log|x|} = |x|^2 = x^2.$$

Multiplicado ambos os membros da equação por μ obtemos

$$z'x^2 + 2xz = 5x^4.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $x^2z(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(x^2z(x)\right) = 5x^4.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$x^2z(x) = x^5 + C,\ C \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$z(x) = x^3 + Cx^{-2},\ C \in \mathbb{R}.$$

Fazemos a seguinte observação: o ponto $(1, \frac{1}{2})$ nas variáveis (x, y) corresponde ao ponto $(1, 4)$ nas variáveis (x, z).

Consequentemente, a constante C que corresponde à solução pedida pode ser obtida notando que

$$z(1) = 4 \Leftrightarrow 4 = 1 + C \Leftrightarrow C = 3.$$

Temos então que uma expressão geral da solução pedida na variável z é:

$$z(x) = x^3 + 3x^{-2}.$$

Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{x^5+3}}.$$

Assim, a solução maximal que passa no ponto $(1, \frac{1}{2})$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{x^2}{x^5+3}} \end{array}$$

Exemplo 21. A equação $y' + y = y^{-1}$ tem domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{0\}$. A equação é de Bernoulli com $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, e $n = -1$. Façamos a mudança de variável

$$z = y^2.$$

Obtemos que

$$\begin{aligned} y' + y = y^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad yy' + y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} z' + z = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z' + 2z = 2. \end{aligned}$$

Esta equação é linear com

$$P(x) = 2 \ \text{ e } \ Q(x) = 2.$$

O fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}.$$

Multiplicado ambos os membros da equação por μ obtemos

$$e^{2x} z' + 2e^{2x} z = 2e^{2x}.$$

O primeiro membro é igual à derivada do produto $e^{2x} z(x)$. Logo a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x} z(x)\right) = 2e^{2x}.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{2x} z(x) = e^{2x} + C, \ C \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$z(x) = 1 + Ce^{-2x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que

$$y^2(x) = 1 + Ce^{-2x}, \ C \in \mathbb{R}.$$

2.6.3 Outras substituições

Consideremos a equação

$$y' = \frac{y-x}{y-x-1}.$$

Vamos resolvê-la usando a mudança de variável dependente

$$y = z + x.$$

Temos que

$$y' = z' + 1.$$

Substituido na equação obtemos,

$$z' + 1 = \frac{z}{z-1}$$

isto é,

$$z' = \frac{1}{z-1}.$$

Então,

$$(z-1)z' = 1,$$

que é uma equação separável cuja solução é

$$\frac{z^2}{2} - z = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Voltando a usar a mudança de variável, agora em sentido contrário, obtemos que a expressão geral da solução da equação é dada implicitamente por

$$\frac{(y-x)^2}{2} - y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 Equações diferenciais lineares de ordem superior: em breve

Referências

[1] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[2] Robert Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, Perseus Publishing Co., 1989.

[3] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.

[4] Boris Hasselblatt and Anatole Katok, *A first course in dynamics, with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.

[5] Reginaldo J. Santos, *Introdução Às Equações Diferenciais Aplicadas*, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011..