1. Indução e recursão estruturais

1.9 Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, *, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{a \in G}\ 1 \qquad\qquad \frac{x \in G}{xa \in G}\ 2 \qquad\qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x * y) \in G}\ 3$$

Seja ainda $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:

- $i(a) = 1$;
- $i(xa) = i(x) + 1$, para todo o $x \in G$;
- $i\big((x * y)\big) = i(x) + i(y)$, para todos os $x, y \in G$.

a) Construa a árvore de formação do elemento $u = ((aa * a)a * a)$ de G.

R: *A árvore de formação de u é a seguinte*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \in G}\ 1}{aa \in G}\ 2 \qquad \dfrac{}{a \in G}\ 1}{(aa * a) \in G}\ 3}{(aa * a)a \in G}\ 2 \qquad \dfrac{}{a \in G}\ 1}{((aa * a)a * a) \in G}\ 3$$

b) Indique um elemento de X que não pertence a G.

R: *Seja, por exemplo, $v = aa)$. É claro que v é um elemento de X pois é uma sequência finita de letras do alfabeto $\{a, *, (,)\}$. Por outro lado v não pertence a G. De facto, dado que a última letra de v é) e a única regra que tem como conclusão uma palavra que acaba por) é a terceira, para v pertencer a G teria que ser conclusão de alguma instância*

$$\frac{x \in G \quad y \in G}{v \in G}\ 3$$

da regra 3. Ora tal é impossível pois nesse caso a primeira letra de v teria que ser (, o que não acontece.

c) Calcule $i(u)$.

R: *Denotemos por $(i.1)$, $(i.2)$ e $(i.3)$ respectivamente a primeira, a segunda e a terceira condições da definição da função i. Tem-se*

$$\begin{aligned}
i(u) &= i\Big(((aa * a)a * a)\Big) \\
&= i\Big((aa * a)a\Big) + i(a) && \textit{por } (i.3) \\
&= i\Big((aa * a)\Big) + 1 + 1 && \textit{por } (i.1) \textit{ e } (i.2) \\
&= i(aa) + i(a) + 2 && \textit{por } (i.3) \\
&= i(a) + 1 + 1 + 2 && \textit{por } (i.1) \textit{ e } (i.2) \\
&= 1 + 4 && \textit{por } (i.1) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

d) Enuncie o teorema de indução estrutural para G.

R: *O Princípio de Indução Estrutural para G pode ser enunciado da seguinte forma. Seja $P(x)$ uma propriedade relativa aos elementos $x \in G$ e suponhamos que:*

(1) *$P(a)$ é verdadeira;*

(2) *para qualquer $x \in G$, se $P(x)$ é verdadeira, então $P(xa)$ é verdadeira;*

(3) *para quaisquer $x, y \in G$, se $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiras, então $P\big((x * y)\big)$ é verdadeira.*

Então $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in G$.

e) Mostre que, para todo o $x \in G$, $i(x)$ é o número de ocorrências da letra a na palavra x.

R: *A prova será feita por indução estrutural sobre G. Para cada $x \in G$, denotemos por $|x|_a$ o número de ocorrências da letra a na palavra x e seja $P(x)$ a afirmação $i(x) = |x|_a$.*

(1) *$P(a)$ é a afirmação $i(a) = |a|_a$. Ora, $i(a) = 1$ por $(i.1)$, e como é evidente $|a|_a = 1$. Logo, $P(a)$ é verdadeira.*

(2) *Seja $x \in G$ e suponhamos, por hipótese de indução (H.I.), que $P(x)$ é válida. Ou seja, suponhamos que se tem $i(x) = |x|_a$. Queremos provar que $P(xa)$ é válida, i.e., que se tem $i(xa) = |xa|_a$. Ora $i(xa) = i(x) + 1$ por $(i.2)$, e claramente $|xa|_a = |x|_a + 1$. Logo, pode-se deduzir*

$$\begin{array}{rcll} i(xa) & = & i(x) + 1 & \\ & = & |x|_a + 1 & \textit{por } (H.I.) \\ & = & |xa|_a. & \end{array}$$

Portanto $P(xa)$ é verdadeira.

(3) *Sejam $x, y \in G$ e suponhamos, por hipótese de indução (H.I.), que $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiras. Ou seja, suponhamos que se tem $i(x) = |x|_a$ e $i(y) = |y|_a$. Queremos provar que se verifica $P\big((x*y)\big)$, i.e., que se tem $i\big((x*y)\big) = |(x*y)|_a$. Ora*

$$\begin{array}{rcll} i\big((x * y)\big) & = & i(x) + i(y) & \textit{por } (i.3) \\ & = & |x|_a + |y|_a & \textit{por } (H.I.) \\ & = & |(x * y)|_a. & \end{array}$$

Logo $P\big((x * y)\big)$ é verdadeira.

Mostramos assim que as condições (1), (2) e (3) do Princípio de Indução Estrutural para G são válidas. Logo, por esse Princípio, conclui-se que $P(x)$ é verdadeira para todo o $x \in G$, ou seja, que $i(x)$ é o número de ocorrências da letra a na palavra x para todo o $x \in G$.