Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMA

Cálculo
LEI
2013/2014

## Folha 4 - Algumas funções importantes

---

**Exercício 1** Calcule:

a) $\cos\frac{19\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{25\pi}{6}$;

b) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

**Exercício 2** Calcule os seguintes números reais:

a) $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ sabendo que $\cos\alpha=-3/5$ e $-\pi<\alpha<-\pi/2$;

b) $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sabendo que $\operatorname{tg}\alpha=-2$ e $-\pi<\alpha<0$.

**Exercício 3** Calcule:

a) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

b) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}\right)$;

c) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4}\right)$;

d) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2})\right)$;

e) $\operatorname{sen}(\pi-\operatorname{arcsen}1)$;

f) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{6})\right)$;

g) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$;

h) $\arccos\left(\cos(-\frac{\pi}{3})\right)$;

i) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi)$;

j) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

k) $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

l) $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(-1))$;

m) $\cos\left(-2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$;

n) $\operatorname{tg}\left(-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

o) $\operatorname{arctg}\left(-2+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\right)$.

**Exercício 4** Determine o número real $R$ tal que:

a) $R=2\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{15\pi}{2}\right)+5\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{4}\right)-3\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $R=3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

Exercício 5 Determine o domínio e o contradomínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \pi + \dfrac{1}{2}\,\text{arcsen}(2x)$;

b) $g(x) = \dfrac{1}{\text{arcsen}\,x}$;

c) $h(x) = \text{arccos}(2x)$;

d) $j(x) = \sqrt{\text{arccos}(3x)}$.

Exercício 6 Considere a função real de variável real definida por $t(x) = \dfrac{\pi}{4} + \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

a) Calcule $t(0) + t(-2)$.

b) Determine o domínio e o contradomínio de $t$.

c) Determine o conjunto de soluções da inequação $t(x) > 0$.

d) Caraterize a função inversa de $t$.

Exercício 7 Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \dfrac{\pi}{3} + 2\,\text{arcsen}\,\dfrac{1}{x}$.

a) Calcule $g(1) + g(-2)$.

b) Determine o domínio e o contradomínio de $g$.

c) Determine o conjunto de soluções da inequação $g(x) \leq 2\pi/3$.

d) Caraterize a função inversa de $g$.

Exercício 8 Considere a função $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq -1, \\ \text{arcsen}\,x & \text{se} \quad -1 < x < 1, \\ \dfrac{\pi}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

a) Estude a continuidade da função $f$.

b) Indique o contradomínio de $f$.

c) Determine, caso existam, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercício 9 Considere a função $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{se} \quad x \leq 0, \\ k\,\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Determine $k$ de modo que a função $f$ seja contínua.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercício 10 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $e^x = e^{1-x}$;

b) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$;

c) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$;

d) $\ln(x^2 - 1) + 2\ln 2 = \ln(4x - 1)$.

Exercício 11 Recorde que $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e que $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que:

a) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

b) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

c) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$;

d) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x,\ x \in \mathbb{R}$;

e) $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,\ x, y \in \mathbb{R}$;

f) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, ,\ x, y \in \mathbb{R}$;

g) $\operatorname{th}^2 x + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1,\ x \in \mathbb{R}$;

h) $\operatorname{coth}^2 x - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exercício 12 Usando as definições das funções hiperbólicas, calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{coth} x$;

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{coth} x$;

g) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{coth} x$.

Exercício 13 Verifique que:

a) $\operatorname{argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right),\ y \in \mathbb{R}$;

b) $\operatorname{argch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right),\ y \in [1, +\infty[$;

c) $\operatorname{argth} y = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}},\ y \in ]-1, 1[$;

d) $\operatorname{argcoth} y = \ln\sqrt{\frac{y+1}{y-1}},\ y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.