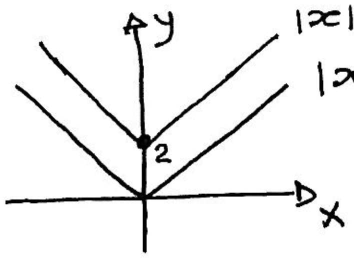
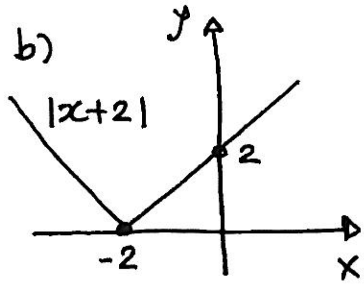
Folha 3

3.1 - $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$

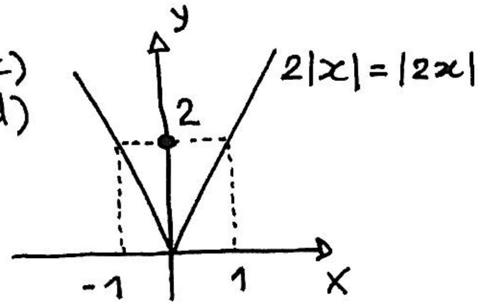
a)



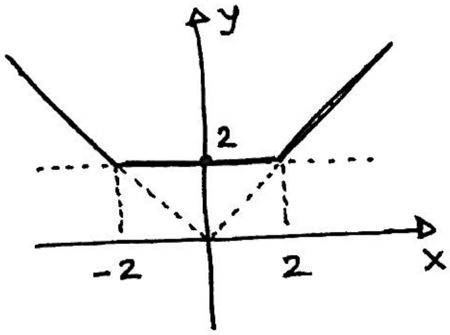
b)



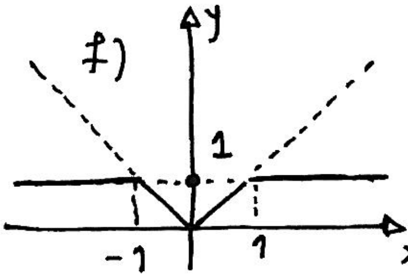
c)
d)



e)



f)



3.2 - 1) $-\infty$

2) $+\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$

4) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

5) 1

6) -1

7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underset{\downarrow\, 0}{\dfrac{1}{x}} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\text{limitada}} = 0$

9) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}/2}$ (não há indeterminação).

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|\operatorname{sen} x|} = 1.$

11) $4/3$

12) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \overbrace{\operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}}^{\text{limitada}} = 0$

13) 6

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\operatorname{sen}x\right)}{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\underbrace{\operatorname{sen}x}_{\text{limitada}}\right)} = 1$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \dfrac{1}{2}$

16) 0, porque $\cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$ é limitada e $x \to 0$.

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\underbrace{\cos x}_{\text{limitada}}\right) = +\infty$

18) $5/7$.

19) 0 (não há indeterminação).

20) $-\infty$

21) 0

22) Não existe.

Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$
e $B = \{y \in \mathbb{R} : y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$ // não majorados

Então

$\cos x = 0,\ \forall x \in A,\quad$ e $\cos y = 1,\ \forall y \in B.$

Logo

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in A}} e^{\cos x} = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in B}} e^{\cos x} = e$

pelo que o limite proposto não existe.

23) Não existe. Semelhante a 22).

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in A}} e^{x}\cos x = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0.$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in B}} e^{x}\cos x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty.$

24) $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{e^{x}}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\cos x}_{\text{limitada}} = 0.$

25) Não existe porque

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1.$$

26) $1/2$.

27) 0, pois $-\frac{1}{x^4} \to -\infty$.

3.3 – a) χ_A é descontínua em em todos os pontos de $\mathbb{Z}$.

b) χ_A é descontínua em 0 e 2.

c) χ_A é descontínua em todos os pontos do $\mathbb{R}$.

3.4 – f é contínua em 1 sse

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x).$$

Mas $f(1) = a$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = a$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 - a$.

Então

$$a = 1 - a \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2.$$

3.5 – a) $f(x) = \pi, \forall x \in \mathbb{R}$. $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

$(g \circ f)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Pensar. c) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \pi, & x \in \mathbb{Q} \\ e, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$$(f \circ g)(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = \pi, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Não há qualquer contradição com o teorema referido, pois ele apenas estabelece que a composta de funções contínuas é também contínua. Em nenhuma destas alíneas, as funções satisfazem as hipóteses do teorema.

3.6 – $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2, & f(x) \neq 1 \\ 0, & f(x) = 1 \end{cases} = \begin{cases} 2, & x+1 \neq 1 \\ 0, & x+1 = 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Então $(g \circ f)(0) = 0$ e $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 2$. Completar.

3.7 – a) Seja $f(x) = x^3 - x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, que é contínua.

Tem-se $f(-2) = -8+2+3 = -3 < 0$

$f(-1) = -1+1+3 = 3 > 0$

Então f é contínua em $[-2,-1]$, onde muda de sinal. Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, f possui um zero em $]-2,-1[$, zero esse que é uma solução da equação dada.

b) Semelhante.

c) Seja $f(x) = x + \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, que é contínua. Tem-se

$f(1) = 1 > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, pelo que existe

$a \in]0,1[$ com $f(a) < 0$. Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, f possui um zero em $]0,1[$ e tal zero é solução da equação dada.

d) Seja $f(x) = 2 + x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (contínua).

$f(0) = 1 > 0$, $f(2) = 4 - e^2 < 0$

$f(-2) = -e^{-2} < 0$

Logo f possui um zero em $]-2,0[$ e outro em $]0,2[$. Tais zeros são soluções da equação dada.

3.8 - a) Existe. Por exemplo $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -1, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$,

sendo $D = [1,2] \cup [3,4]$.

b) Não existe.

Se f^2 e f^3 são contínuas (e não nulas, já que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$), então $f^3/f^2 = f$ é também contínua.

c) Não existe.

Se g é contínua e h, com $h(x) = \operatorname{sen} x$, é também contínua, então f dada por $f(x) = g(x) - \operatorname{sen} x$ deve ser contínua.

d) Existe. Por exemplo, $f : [0,1] \cup]2,3] \longrightarrow [0,2]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 2 < x \leq 3 \end{cases},$$

cuja inversa é

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ y+1, & 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

Fazer os gráficos de f e f^{-1}!

3.9 - A função g possui um mínimo em 0 e não possui máximo algum. Esta função não verifica as hipóteses do teorema porque o seu domínio não é fechado.

3.10 - a) Falsa. Cf. o exercício 3.5.

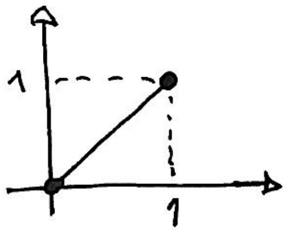
b) Verdadeira (teorema de Weierstrass), porque $[0,1]$ é fechado e limitado, e f é contínua.

c) Verdadeira. Cf. o exercício 3.7.

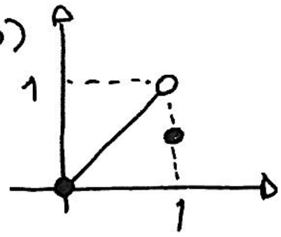
d) Falsa. Pensar em $f(x) = x$, $x \in [0,2[$.

e) Falsa. Pensar em $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

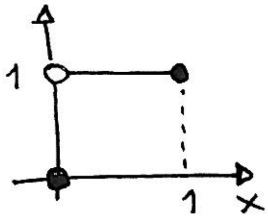
3.11 – a)



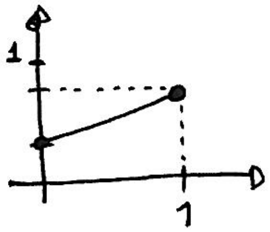
b)



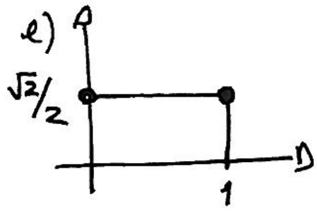
c)



d)

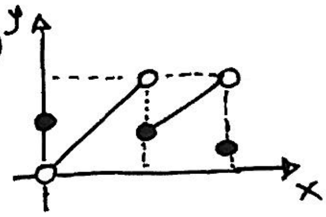


e)

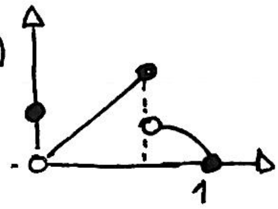


f) Não existe.

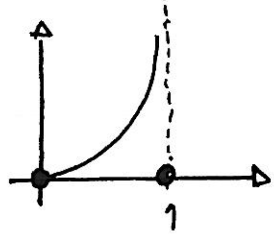
g)



h)



i)



j) Não existe. Entraria em contradição com teo Weierstrass.

k) como em i).

l)