Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2º Teste :: 1 de junho de 2016

Nome | Número

As respostas aos Exercícios 6 e 7 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 1. [3 valores] Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 2x + 3y + z^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ tal que $g(1, 2) = (0, 1, 2)$ e $Dg((1, 2); (u, v)) = (3u, 2v, u - v)$.

Calcule o vetor gradiente de $h = f \circ g$ no ponto $(1, 2)$.

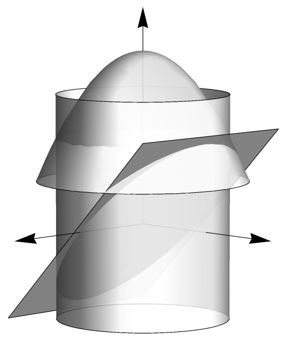
Exercício 2. [3 valores] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2x$ e o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Determine, caso existam, os extremos absolutos da função f quanto restrita ao conjunto A.

Exercício 3. [3 valores] Invertendo a ordem de integração, escreva a seguinte soma de integrais duplos como um único integral duplo:

$$\int_{-1}^{0} \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx dy + \int_{0}^{3} \int_{y}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx dy.$$

Sugestão: Comece por esboçar a região de integração.

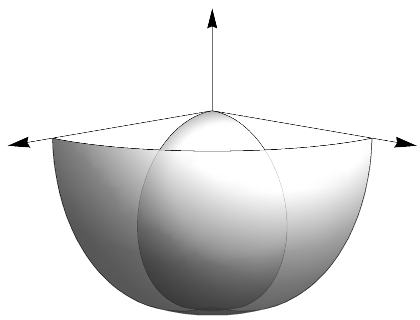
Exercício 4. [3 valores] Calcule o volume da região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, pelo parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = y$.



Exercício 5. [3 valores] Use um integral triplo para calcular o volume do sólido

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0,\ x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Sugestão: Use coordenadas esféricas.



As respostas aos Exercícios 6 e 7 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 6. [3 valores] Complete os espaços identificados com $\square$ de modo a obter proposições verdadeiras:

a) Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathscr{C}^1$ tal que $f(1,1) = 0$ e $\nabla f(1,1) = (1,2)$ então a reta cuja equação é $y = \square x + \square$ é tangente à curva de equação $f(x,y) = 0$;

b) Se $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathscr{C}^2$ tal que $\nabla f(1,1,2) = (0,0,0)$ e tal que

$$\mathrm{Hess} f(1,1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \square \end{bmatrix}$$

então $(1,1,2)$ é ponto de sela;

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2\pi} r \, d\theta dr = \square \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dxdy$;

Exercício 7. [2 valores] Seja $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, e $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$. Indique justificando se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) A função f tem mínimo e máximo;

b) Se f se anula em todos os pontos da fronteira de $\mathcal{D}$ então f tem pelo menos um ponto crítico no interior de $\mathcal{D}$;

c) Se ∇f nunca se anula em pontos da fronteira de $\mathcal{D}$ então existe um ponto $P = (u,v)$ na fronteira de $\mathcal{D}$ tal que os vetores (u,v) e $\nabla f(u,v)$ têm a mesma direção;

d) O ponto P referido na alínea anterior, se existir, é único.