1. Mostre que
$$u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$
é solução da equação de Laplace
$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$
em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Usando o método de separação de variáveis, mostre que o problema de Dirichlet num rectângulo
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = f(y), & 0 \le y \le b \\ u(a,y) = g(y), & 0 \le y \le b \end{cases} \tag{1}$$
onde $f, g \in C(\mathbb{R})$, tem soluções dadas por
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \left[\beta_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) - \alpha_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}\right)(x-a)\right]$$
com
$$\alpha_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy, \qquad \beta_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy.$$

3. Determine a solução do problema (1) para $a = b = \pi$, $f(y) = y(\pi - y)$ e $g(y) = 0$.

4. Mostre que o problema de Neumann num rectângulo
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0, & 0 \le x \le a \\ u_x(0,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u_x(a,y) = f(y), & 0 \le y \le b \end{cases} \tag{2}$$
onde $f, g \in C(\mathbb{R})$, tem soluções
$$u_n(x,y) = c_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\ n \in \mathbb{N},$$
e deduza a solução formal do problema dado.