Lic. Engenharia Informática
LÓGICA EI
3. Cálculo de Predicados de 1ª ordem da Lógica Clássica

José Carlos Costa

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

23 de Maio de 2011

A Lógica Proposicional, estudada até agora, é incapaz (ou insuficiente) para expressar certos argumentos matemáticos, tais como:

- "*Todos os quadrados são positivos. Como* 16 *é um quadrado, então* 16 *é positivo.*"
- "*Existe um número real cujo quadrado é* 5*.*"

Esta segunda afirmação é do tipo "*Existe um x com a propriedade P*", que pode ser denotada por

$$\exists_x \, P(x).$$

Um outro exemplo é dado por

$$\forall_x \, \exists_y \, (x \cdot y = 1)$$

que significa "*Para cada x existe um inverso y*".

De uma maneira geral, lidaremos com duas categorias de entidades sintácticas:

- uma para os objectos — os termos
  (por exemplo: 5, x, $x + 2^{x+y}$).

- outra para as afirmações — as fórmulas
  (por exemplo: $\exists_x \forall_y (x \cdot y < y)$).

Definição

Um *tipo de linguagem* é um terno $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, em que:

1. $\mathcal{F}$ é um conjunto enumerável de símbolos chamados *símbolos de função*;
2. $\mathcal{R}$ é um conjunto enumerável de símbolos chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*;
3. $\mathcal{N}$ é uma função $\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \cup \mathcal{R} & \to & \mathbb{N}_0 \\ s & \mapsto & \mathcal{N}(s) \end{array}$ sendo $\mathcal{N}(s)$ designado a *aridade* de s.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes* e o seu conjunto é vulgarmente representado por $\mathcal{C}$.

Para cada tipo teremos um alfabeto e uma linguagem de Cálculo de Predicados de 1ª ordem.

Exemplo

$$L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$$

onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem.

O que poderá ser uma palavra da linguagem associada a este tipo?

Qual será o alfabeto que permite escrever todas as palavras de uma tal linguagem?

Definição

O *alfabeto* $\mathcal{A}_L$, do Cálculo de Predicados, de um tipo de linguagem L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

1. símbolos de função e símbolos de predicado de L;
2. os conectivos proposicionais $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$;
3. $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, chamados *variáveis* , formando um conjunto numerável representado por $\mathcal{V}$;
4. $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respectivamente;
5. "(", ")" e ",".

Definição

O conjunto $\mathcal{T}_L$ dos *L-termos* é o subconjunto de $\mathcal{A}_L^+$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

1. para cada $x_i \in \mathcal{V}$, $\dfrac{}{x_i \in \mathcal{T}_L}\ x_i$;
2. para cada $c \in \mathcal{C}$, $\dfrac{}{c \in \mathcal{T}_L}\ c$;
3. para cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$\frac{t_1 \in \mathcal{T}_L \quad \cdots \quad t_n \in \mathcal{T}_L}{f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_L}\ f$$

Exemplo

A construção que se segue é uma árvore de formação da palavra $+(0, s(x_2))$ sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$.

$$\dfrac{\dfrac{}{0 \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\,0 \qquad \dfrac{\dfrac{}{x_2 \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\,x_2}{s(x_2) \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\,s}{+(0, s(x_2)) \in \mathcal{T}_{L_{Arit}}}\,+$$

Portanto, $+(0, s(x_2))$ é um L_{Arit}-termo.

Notação: Quando f é um símbolo de função de aridade 2 e t_1 e t_2 são L-termos,

$$t_1 f\, t_2 \text{ representa o } L\text{-termo } f(t_1, t_2)$$

Por exemplo, $0 + s(x_2) \rightsquigarrow +(0, s(x_2))$.

Definição

Chamaremos *subtermos* aos sub-objectos de um L-termo

Exemplo

O conjunto dos subtermos de $0 + s(x_2)$ é

$$\{0 + s(x_2), 0, s(x_2), x_2\}.$$

A sequência de objectos $x_2, s(x_2), 0, 0 + s(x_2)$ é uma sequência de formação de $0 + s(x_2)$.

Sendo o conjunto de L-termos um conjunto definido através de uma definição indutiva determinista, existe um teorema de indução estrutural para L-termos:

Teorema de Indução Estrutural em L-Termos

Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t e suponhamos que:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$ é válida;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$ é válida;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$, se $P(t_1), \ldots, P(t_n)$ são válidas, então $P(f(t_1, ..., t_n))$ é válida.

Então $P(t)$ é válida, para todo o L-termo t.

e existe um teorema de recursão estrutural para L-termos:

Teorema de Recursão Estrutural para L-Termos

Sejam Y um conjunto, $g_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to Y$ e $g_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to Y$ funções e seja, para cada símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, $g_f : Y^n \to Y$ uma função. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{T}_L \to Y$ tal que:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $G(x) = g_{\mathcal{V}}(x)$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $G(c) = g_{\mathcal{C}}(c)$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$G(f(t_1, ..., t_n)) = g_f(G(t_1), ..., G(t_n)).$$

Definição

O conjunto $\mathrm{VAR}(t)$, das *variáveis que ocorrem* num L-termo t, é definido, por recursão estrutural em t, como:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $\mathrm{VAR}(x) = \{x\}$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $\mathrm{VAR}(c) = \emptyset$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$\mathrm{VAR}(f(t_1, ..., t_n)) = \mathrm{VAR}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{VAR}(t_n).$$

Exemplo

O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}(x_2 + s(x_1)) &= \mathrm{VAR}(x_2) \cup \mathrm{VAR}(s(x_1)) \\ &= \{x_2\} \cup \mathrm{VAR}(x_1) \\ &= \{x_2, x_1\}.\end{aligned}$$

Definição

O L-termo que resulta da *substituição*, num L-termo t_0, de uma variável x por um L-termo t, que notaremos por $t_0[t/x]$, é definido, por recursão estrutural em t_0, como:

1. para todo o $y \in \mathcal{V}$, $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{se } y = x \\ y & \text{se } y \neq x \end{cases}$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $c[t/x] = c$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x]).$$

Exemplo

O resultado da substituição de x_1 por $s(0)$ em $x_2 + s(x_1)$ é

$$\begin{aligned}(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] &= x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ &= x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ &= x_2 + s(s(0)).\end{aligned}$$

Proposição

Dados L-termos t_1 e t_2 e dada uma variável x,
se $x \notin \mathrm{VAR}(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Definição

Uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_L$, da forma

$$R(t_1, \ldots, t_n)$$

onde $R \in \mathcal{R}$ tem aridade n e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$, é chamada uma *L-fórmula atómica*.

O conjunto das L-fórmulas atómicas representa-se por At_L.

Exemplo

As palavras $<(x_0, s(0))$ e $=(x_0, x_1)$, sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, são L_{Arit}-fórmulas atómicas.

Notação: Quando R é um símbolo de relação de aridade 2 e t_1 e t_2 são L-termos,

$$t_1 R t_2 \text{ representa a } L\text{-fórmula atómica } R(t_1, t_2).$$

Por exemplo, $\quad x_0 < s(0) \quad \leadsto \quad <(x_0, s(0))$.

Definição

O conjunto das *L-fórmulas*, que notamos por $\mathcal{F}_L$, é o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$, pelas regras:

1. $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}_L}\ \perp$;
2. $\dfrac{}{\varphi \in \mathcal{F}_L}\ \mathrm{At}_L$, para cada L-fórmula atómica φ;
3. $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L}\ \neg$;
4. $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L \quad \psi \in \mathcal{F}_L}{(\varphi\Box\psi) \in \mathcal{F}_L}\ \Box$, para cada $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
5. $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L}{(\exists_x\varphi) \in \mathcal{F}_L}\ \exists_x \qquad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}_L}{(\forall_x\varphi) \in \mathcal{F}_L}\ \forall_x$.

Exemplo

Considere a palavra

$$\varphi = (\forall_{x_0}(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1)))).$$

Será φ uma L_{Arit}-fórmula?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(x_0 < s(0)) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\,\mathrm{At}_{L_{Arit}}}{(\neg(x_0 < s(0))) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\,\neg \qquad \dfrac{}{(x_0 = x_1) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\,At_{L_{Arit}}}{((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1)) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\,\rightarrow}{(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1))) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\,\exists_{x_1}}{(\forall_{x_0}(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1)))) \in \mathcal{F}_{L_{Arit}}}\,\forall_{x_0}$$

Notação : Os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, para a L_{Arit}-fórmula

$$\varphi = (\forall_{x_0}(\exists_{x_1}((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow (x_0 = x_1)))).$$

do exemplo anterior,

$$\varphi \leftrightsquigarrow \forall_{x_0}\exists_{x_1}(\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow (x_0 = x_1)).$$

Definição

Aos sub-objectos de uma L-fórmula φ chamaremos *subfórmulas* de φ.

O conjunto das L-fórmulas encontra-se definido através de uma definição indutiva determinista. Como tal, existem os respectivos teoremas de indução e de recursão estrutural.

Teorema de Indução Estrutural em L-Fórmulas

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ, e suponhamos que:

1. $P(\bot)$ é válida;
2. para cada $\psi \in \mathrm{At}_L$, $P(\psi)$ é válida;
3. para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ é válida, então $P(\neg\psi)$ é válida;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ e $P(\sigma)$ são válidas, então $P(\psi \square \sigma)$ é válida;
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ é válida, então $P(Q_x \psi)$ é válida.

Então $P(\varphi)$ é válida, para toda a L-fórmula φ.

Teorema de Recursão Estrutural em L-fórmulas

Sejam Y um conjunto e $y \in Y$ e sejam $g : \mathrm{At}_L \to Y$, $g_\neg : Y \to Y$, $g_\square : Y \times Y \to Y$ (para cada $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$) e $g_Q : Y \to Y$ (para cada $Q \in \{\exists, \forall\}$) funções. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{F}_L \to Y$ tal que:

1. $G(\bot) = y$;
2. para qualquer $\varphi \in \mathrm{At}_L$, $G(\varphi) = g(\varphi)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $G(\neg\varphi) = g_\neg(G(\varphi))$;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$,
$$G(\varphi \square \psi) = g_\square(G(\varphi), G(\psi));$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathcal{F}_L$,
$$G(Q_x \varphi) = g_Q(G(\varphi)).$$

Definição

Dada uma subfórmula de uma L-fórmula φ da forma $Q_x\psi$, em que $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $x \in \mathcal{V}$, a L-fórmula ψ é chamada o *alcance* dessa ocorrência do quantificador Q_x.

Exemplo

Em $\forall_{x_0}(\exists_{x_1}(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists_{x_1}(x_1 < x_0)))$,

1. o alcance de $\forall_{x_0}$ é $\exists_{x_1}(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists_{x_1}(x_1 < x_0))$;
2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists_{x_1}$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists_{x_1}$ é $x_1 < x_0$.

Definição

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência numa subfórmula atómica de φ de uma variável x diz-se

- *livre* quando essa ocorrência não está no alcance de nenhum quantificador Q_x (com $Q \in \{\exists, \forall\}$);
- *ligada*, caso contrário.

Denota-se

$$\mathrm{LIV}(\varphi) = \{\text{variáveis que têm ocorrências livres em } \varphi\};$$
$$\mathrm{LIG}(\varphi) = \{\text{variáveis que têm ocorrências ligadas em } \varphi\}.$$

Exemplo

Seja

$$\varphi = \exists_{x_1}(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \rightarrow \forall_{x_0}(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(c)})).$$

- A ocorrência (a) de x_0 é *livre*.
- A ocorrência (b) de x_0, por se encontrar no alcance do quantificador $\forall_{x_0}$, é *ligada*.
- A ocorrência (c) de x_1 é também *ligada*, pois encontra-se no alcance do quantificador $\exists_{x_1}$.

Assim,

$$\mathrm{LIV}(\varphi) = \{x_0\} \quad \text{e} \quad \mathrm{LIG}(\varphi) = \{x_0, x_1\}.$$

Definição

A L-fórmula obtida por *substituição* numa L-fórmula φ de todas as ocorrências livres de uma variável x por um L-termo t, notada $\varphi[t/x]$, é definida por recursão estrutural em φ por:

1. $\bot[t/x] = \bot$;
2. para todo o símbolo de relação R, de aridade n, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]);$$
3. para todo o $\psi \in \mathcal{F}_L$, $\quad (\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$;
4. para quaisquer $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$,
$$(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x];$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$,
$$(Q_y\psi)[t/x] = \begin{cases} Q_y\psi & \text{se } y = x \\ Q_y\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}.$$

Exemplo

Seja
$$\varphi = \exists_{x_1}(\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow \forall_{x_0}(x_0 = x_1)).$$
Então,
$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists_{x_1}(\neg(s(x_1) < s(0)) \rightarrow \forall_{x_0}(x_0 = x_1)).$$

Definição

Uma variável x diz-se *substituível* por um L-termo t numa L-fórmula φ, quando

- não existem ocorrências livres de x no alcance de Q_y, em que $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $y \in \mathrm{VAR}(t)$,

ou, equivalentemente, quando

- para toda a ocorrência livre de x em φ, se essa ocorrência está no alcance de Q_y, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, então $y \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Exemplo

Sejam

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2) \quad e \quad t = x_1 + s(x_2).$$

- x_0 é substituível por t em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres em φ.
- x_1 é substituível por t em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 em φ não se encontra no alcance de quantificadores.
- x_2 não é substituível por t em φ, uma vez que x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$ e $x_1 \in \mathrm{VAR}(t)$.

Em φ existem duas ocorrências livres de x_2. Uma delas está no alcance de um único quantificador, $\forall_{x_1}$. A outra ocorrência não está no alcance de qualquer quantificador. Logo, x_2 é substituível por um L-termo t em φ se e só se $x_1 \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Observe que mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida. Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)).$$

No entanto, a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1 + s(x_2)$ em $\forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2))$ encontra-se definida e é igual a

$$\forall_{x_1}(x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))).$$

Contudo, note que a primeira ocorrência da variável x_2 em φ, que era livre, foi substituída pelo termo $x_1 + s(x_2)$, cuja ocorrência de x_1 passou a estar ligada ao quantificador $\forall_{x_1}$.

Caso nada seja dito em contrário, sempre que escrevermos $\varphi[t/x]$, assumimos que a variável x é substituível pelo L-termo t na L-fórmula φ.

Proposição

Dadas uma L-fórmula φ e uma variável x e dado um L-termo t, se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Demonstração.

- Caso $\varphi = \perp$. Tem-se, $\varphi[t/x] = \perp[t/x] = \perp = \varphi$.
- Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com R um símbolo de relação, n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Neste caso tem-se que, para quaisquer $1 \leq i \leq n$, $x \notin \mathrm{VAR}(t_i)$ pois de outra forma teríamos $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, uma contradição. Portanto, para quaisquer $1 \leq i \leq n$, $t_i[t/x] = t_i$, donde

$$
\begin{aligned}
\varphi[t/x] &= R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] \\
&= R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x]) \\
&= R(t_1, \ldots, t_n) \\
&= \varphi.
\end{aligned}
$$

Demonstração (continuação).

- Caso $\varphi = Q_y\varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.
  i) Subcaso $x = y$. Então:

$$\begin{aligned} \varphi[t/x] &= (Q_y\varphi_1)[t/x] \\ &= Q_y\varphi_1 \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

  ii) Subcaso $x \neq y$. Então:

$$\begin{aligned} \varphi[t/x] &= (Q_y\varphi_1)[t/x] \\ &= Q_y(\varphi_1[t/x]) \\ &= Q_y\varphi_1 \quad \text{por H.I., pois } x \notin \mathrm{LIV}(\varphi_1) \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

- Os restantes casos são deixados como exercício.

$\square$

Definição

Uma *L*-fórmula φ diz-se uma *L-sentença*, ou uma *L-fórmula fechada*, quando não tem ocorrências livres de variáveis, i.e., $\mathrm{LIV}(\varphi) = \emptyset$.

Corolário

Sejam φ uma *L*-sentença, x uma variável e t um *L*-termo. Então, $\varphi[t/x] = \varphi$.

Definição

Uma L-estrutura é um par $E = (D, \overline{})$ onde:

1. D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio* de E e notado por $dom(E)$;
2. $\overline{}$ é uma função de domínio $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, chamada a *função interpretação* de E, tal que:
   - a cada constante $c \in \mathcal{F}$ de L, $\overline{}$ faz corresponder um elemento $\overline{c}$ de D;
   - a cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}$ de L, de aridade $n \geq 1$, $\overline{}$ faz corresponder uma função n-ária $\overline{f} : D^n \longrightarrow D$;
   - a cada símbolo de relação $R \in \mathcal{R}$ de L, de aridade n, $\overline{}$ faz corresponder uma relação n-ária $\overline{R} \subseteq D^n$.

Para cada símbolo $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, $\overline{s}$ chama-se a *interpretação* de s em E.

Exemplo 1

Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número natural *zero*;
- $\begin{array}{rcl} \overline{s} : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ é a função de *sucessor* em $\mathbb{N}_0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{+} : \mathbb{N}_0^2 & \to & \mathbb{N}_0 \\ (n,m) & \mapsto & n+m \end{array}$ é a função de *adição* em $\mathbb{N}_0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{\times} : \mathbb{N}_0^2 & \to & \mathbb{N}_0 \\ (n,m) & \mapsto & n\times m \end{array}$ é a função de *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{=}$ é a relação $\{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n < m\}$, de *inferioridade* em $\mathbb{N}_0$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura.

Exemplo 2

É também uma L_{Arit}-estrutura o par $(\{0,1\}, \overline{})$, em que:

- $\overline{0} = 0$;
- $$\begin{array}{rcl} \overline{s} : \{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array};$$
- $$\begin{array}{rcl} \overline{+} : \{0,1\}^2 & \to & \{0,1\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array};$$
- $$\begin{array}{rcl} \overline{\times} : \{0,1\}^2 & \to & \{0,1\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x = y = 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \end{array};$$
- $\overline{=}$ é a relação $\{(0,0),(1,1)\}$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(0,1)\}$.

Definição

Seja $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura. Uma *atribuição em E* é uma função

$$a : \mathcal{V} \longrightarrow D,$$

do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis para o domínio D da L-estrutura E.

Exemplo

A função

$$\begin{array}{rcl} a^{ind} : \mathcal{V} & \to & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$$

é uma atribuição na L_{Arit}-estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$.

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e seja $t \in \mathcal{T}_L$ um L-termo.

O *valor de t para a atribuição a*, denotado por $t[a]_E$ ou simplesmente por $t[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o elemento de D definido, por recursão estrutural em t, como:

1. Para cada $x \in \mathcal{V}$, $x[a] = a(x)$;
2. Para cada $c \in \mathcal{C}$, $c[a] = \overline{c}$;
3. Para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$f(t_1, \ldots, t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], \ldots, t_n[a]).$$

Exemplo

Consideremos o L_{Arit}-termo $t = x_2 \times (0 + s(x_3))$ e a atribuição $a^{ind} : \mathcal{V} \to \mathbb{N}_0,\ x_i \mapsto i$, na L_{Arit}-estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$.

O valor de t para a^{ind} é

$$\begin{aligned}
(x_2 \times (0 + s(x_3)))[a^{ind}] &= x_2[a^{ind}] \mathbin{\overline{\times}} (0 + s(x_3))[a^{ind}] \\
&= a^{ind}(x_2) \mathbin{\overline{\times}} (0[a^{ind}] \mathbin{\overline{+}} s(x_3)[a^{ind}]) \\
&= 2 \mathbin{\overline{\times}} (\overline{0} \mathbin{\overline{+}} \overline{s}(x_3[a^{ind}])) \\
&= 2 \mathbin{\overline{\times}} (\overline{0} \mathbin{\overline{+}} \overline{s}(a^{ind}(x_3))) \\
&= 2 \mathbin{\overline{\times}} (\overline{0} \mathbin{\overline{+}} \overline{s}(3)) \\
&= 2 \times (0 + 4) \\
&= 8 \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Proposição

Seja t um L-termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$. Se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{VAR}(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Demonstração.

Por indução estrutural em t.

1. Caso $t = x_i \in \mathcal{V}$. Então, $x_i \in \mathrm{VAR}(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(x_i) = a_2(x_i)$. Assim,

$$\begin{aligned} t[a_1] &= x_i[a_1] \\ &= a_1(x_i) && \text{por (*)} \\ &= a_2(x_i) \\ &= x_i[a_2] && \text{por (*)} \\ &= t[a_2]. \end{aligned}$$

(*) Definição de valor de um termo para uma atribuição.

Demonstração (continuação).

2. Caso $t = c \in \mathcal{C}$. Então,

$$\begin{aligned} t[a_1] &= c[a_1] \\ &= \overline{c} \quad \text{por (*)} \\ &= c[a_2] \quad \text{por (*)} \\ &= t[a_2]. \end{aligned}$$

3. Caso $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, onde $f \in \mathcal{F}_L$ é um símbolo de função de aridade $n \geq 1$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,

$$\begin{aligned} t[a_1] &= f(t_1, \ldots, t_n)[a_1] \\ &= \overline{f}(t_1[a_1], \ldots, t_n[a_1]) \quad \text{por (*)} \\ &= \overline{f}(t_1[a_2], \ldots, t_n[a_2]) \\ &\qquad \text{por H.I., pois } \mathrm{VAR}(t_i) \subseteq \mathrm{VAR}(t) \\ &= f(t_1, \ldots, t_n)[a_2] \quad \text{por (*)} \\ &= t[a_2]. \end{aligned}$$

□

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$, seja x_i uma variável e seja $d \in D$. Denotamos por $a\binom{x_i}{d}$ a atribuição

$$\begin{aligned} a\binom{x_i}{d} : \mathcal{V} &\rightarrow D \\ x_j &\mapsto \begin{cases} d & \text{se } i = j \\ a(x_j) & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Proposição

Sejam t e u dois L-termos, seja x uma variável e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então $t[u/x][a] = t[a\binom{x}{u[a]}]$.

Demonstração.

Por indução estrutural em t [Exercício].

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula.

O *valor lógico de φ para a atribuição a*, denotado por $\varphi[a]_E$ ou simplesmente por $\varphi[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o elemento do conjunto $\{0, 1\}$ definido, por recursão estrutural em φ, como:

a) $\perp[a] = 0$;

b) Para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$R(t_1, \ldots, t_n)[a] = 1 \text{ se e só se } (t_1[a], \ldots, t_n[a]) \in \overline{R};$$

c) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, $(\neg\psi)[a] = 1 - \psi[a]$;

(continua)

Definição (Continuação)

d) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \wedge \sigma)[a] = min\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

e) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \vee \sigma)[a] = max\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

f) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,
$(\psi \rightarrow \sigma)[a] = 0$ se e só se $\psi[a] = 1$ e $\sigma[a] = 0$;

g) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,
$(\psi \leftrightarrow \sigma)[a] = 1$ se e só se $\psi[a] = \sigma[a]$;

h) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,
$(\exists_x \psi)[a] = 1$ se e só se $\exists_{d \in D}\ \psi[a\binom{x}{d}] = 1$
se e só se $max\left\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\right\} = 1$;

i) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,
$(\forall_x \psi)[a] = 1$ se e só se $\forall_{d \in D}\ \psi[a\binom{x}{d}] = 1$
se e só se $min\left\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\right\} = 1$.

Exemplo

Seja φ a seguinte L_{Arit}-fórmula

$$\forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2))),$$

e seja a a atribuição a^{ind} na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}. O valor lógico de φ para a atribuição a é 1. De facto, tem-se $\varphi[a] = 1$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \left((x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \left((x_1 = x_0)[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \text{ ou } (\exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \right)$

sse

$\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \left(x_1[a\binom{x_1}{n_1}] = x_0[a\binom{x_1}{n_1}] \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(x_1 = s(x_2))[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] = 1 \right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \left(n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(x_1[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] = s(x_2)[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}]) \right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \left(n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(n_1 = \overline{s}(x_2[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}])) \right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}(n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(n_1 = n_2 + 1))$.

Dado que esta última afirmação é verdadeira, deduzimos que $\varphi[a] = 1$.

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \bar{\ })$ e seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula. Diz-se que:

- E *satisfaz* φ para a atribuição a, e escreve-se $E \models \varphi[a]$, se o valor lógico de φ em E para a é 1, i.e., se $\varphi[a]_E = 1$.
- E *não satisfaz* φ para a atribuição a, e escreve-se $E \not\models \varphi[a]$, se $\varphi[a]_E = 0$.

Exemplo

A L_{Arit}-estrutura E_{Arit} *satisfaz* a L_{Arit}-fórmula

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2))),$$

para a atribuição a^{ind}. De facto, como vimos no exemplo anterior, tem-se $\varphi[a^{ind}]_{E_{Arit}} = 1$. Podemos assim escrever

$$E_{Arit} \models \varphi[a^{ind}].$$

Lema

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$. Então,

i) $E \models (\exists_x \varphi)[a]$ se e só se $\exists_{d \in D}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

ii) $E \models (\forall_x \varphi)[a]$ se e só se $\forall_{d \in D}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

iii) $E \not\models (\exists_x \varphi)[a]$ se e só se $\forall_{d \in D}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

iv) $E \not\models (\forall_x \varphi)[a]$ se e só se $\exists_{d \in D}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

Demonstração.

i) $E \models (\exists_x \varphi)[a]$ sse $(\exists_x \varphi)[a]_E = 1$ por def. de $\models$
sse $\exists_{d \in D}\ \varphi[a\binom{x}{d}]_E = 1$ por def. de valor lógico
sse $\exists_{d \in D}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$ por def. de $\models$.

ii)-iv) Exercício. $\square$

Exemplo

Seja φ a seguinte L_{Arit}-fórmula

$$\exists_{x_1}\forall_{x_0}(s(x_0) = x_0 + x_1).$$

Tem-se

$$\begin{array}{lll}
E_{Arit} \models \varphi[a^{ind}] & \text{sse} & \exists_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\, E_{Arit} \models \forall_{x_0}(s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_1 \\ n_1 \end{pmatrix}] \\
 & \text{sse} & \exists_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\forall_{n_0 \in \mathbb{N}_0}\, E_{Arit} \models (s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_1 \\ n_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ n_0 \end{pmatrix}] \\
 & \text{sse} & \exists_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\forall_{n_0 \in \mathbb{N}_0}(s(x_0) = x_0 + x_1)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_1 \\ n_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ n_0 \end{pmatrix}]_{E_{Arit}} = 1. \\
 & \text{sse} & \exists_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\forall_{n_0 \in \mathbb{N}_0}\, n_0 + 1 = n_0 + n_1.
\end{array}$$

Dado que esta afirmação é verdadeira (basta tomar $n_1 = 1$), concluimos que a L_{Arit}-estrutura E_{Arit} satisfaz a L_{Arit}-fórmula φ para a atribuição a^{ind}.

Teorema

Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$.

i) Se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, então
$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2].$$

ii) Se x é uma variável tal que $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, então
$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad \forall_{d \in D}\ E \models \varphi[a_1\binom{x}{d}].$$

iii) Se φ é uma L-sentença, então
$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2].$$

Demonstração.

i) Por indução estrutural em φ [Exercício].

ii)-iii) Imediatas por i).

Teorema

Sejam φ uma L-fórmula, $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível por um L-termo t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi\left[a\binom{x}{t[a]}\right].$$

Demonstração.

Se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$ por um resultado anterior. Logo,

$$\begin{aligned} E \models \varphi[t/x][a] \quad & \text{sse} \quad E \models \varphi[a] \\ & \text{sse} \quad E \models \varphi\left[a\binom{x}{t[a]}\right] \quad \text{pelo teorema anterior.} \end{aligned}$$

No caso de $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, a demonstração é feita por indução estrutural em φ [Exercício]. $\square$

Definição

Sejam φ uma L-fórmula e E uma L-estrutura. Diz-se que:

- φ *é válida em* E, e escreve-se $E \models \varphi$, se $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a em E.
- φ *não é válida em* E, e escreve-se $E \not\models \varphi$, se existe alguma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Definição

Seja φ uma L-fórmula. Diz-se que:

- φ *é (universalmente) válida* , e escreve-se $\models \varphi$, se φ é válida em todas as L-estruturas, ou seja, se $E \models \varphi$ para toda a L-estrutura E.
- φ *não é (universalmente) válida*, e escreve-se $\not\models \varphi$, se existe alguma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Exemplo

A L_{Arit}-fórmula

$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 = s(x_1)),$$

não é válida na L_{Arit}-estrutura E_{Arit} pois, por exemplo,

$$E_{Arit} \not\models \varphi[a^{ind}].$$

Consequentemente, φ *não é (universalmente) válida*.

Note-se no entanto que φ *é válida* em algumas L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, φ é válida numa L_{Arit}-estrutura de domínio D que interprete o símbolo de relação $=$ como sendo a relação D^2 (ou seja, a relação universal em D).