Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios 2011/2012

Relações binárias

1. Para cada uma das relações seguintes indique o respectivo domínio e imagem.
   (a) S é a relação de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para $B = \{1, 2, 3\}$ dada por
   $$S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}.$$
   (b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.
   (c) $\mid$ é a relação "divide" em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ definida por
   $$a \mid b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad b = na.$$
   (d) Dado um conjunto A, T é a relação de A para $\mathcal{P}(A)$ dada por $\{(x, X) \mid x \in X\}$.
   (e) $<$ é a relação "menor" usual em $\mathbb{N}$.

2. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A: $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (10, 8)\}$, $S = \{(10, 2), (10, 8)\}$ e $T = \{(6, 2), (6, 4), (8, 10)\}$. Determine
   (a) R^{-1} (b) $R^{-1} \cup S^{-1}$
   (c) $T \setminus S^{-1}$ (d) $T^{-1} \cap S$
   (e) $S \circ T$ (f) $R \circ T$
   (g) $S^{-1} \circ T^{-1}$ (h) $S^{-1} \circ S$

3. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, w, z\}$. Considere as relações binárias de A para B e de B para A, respectivamente:
   $$\begin{aligned} R &= \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z)\} \\ S &= \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (w, 2), (z, 3)\}. \end{aligned}$$
   Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.
   (a) Determine:
   i) R^{-1} ii) S^{-1} iii) T iv) $T \circ T$ v) U vi) $U \circ U$.
   (b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
   (c) Indique o domínio e a imagem de R.
   (d) Indique todas as relações binárias de A para B cujo domínio é $\{2, 3\}$ e cuja imagem é $\{x, z\}$.
   (e) Dê um exemplo de relações binárias não vazias R' de A para B e S' de B para A, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

4. Investigue se as igualdades que se seguem são verdadeiras, para quaisquer relações R_1, R_2 e R_3 definidas em conjuntos apropriados.

   (a) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \circ R_2^{-1})$

   (b) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

   (c) $(R_1 \cap R_2) \cup R_3 = R_1 \cap (R_2 \cup R_3)$

   (d) $(R_1 \cup R_2) \cup R_3 = R_1 \cup (R_2 \cup R_3)$

5. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

   $R_1 = \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}$,

   $R_2 = \{(2,3)\}$,

   $R_3 = \{(1,2), (2,3), (3,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$,

   $R_4 = \{(a,a) \mid a \in A\} = \mathrm{id}_A$.

   Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

   (a) reflexiva; (b) simétrica;

   (c) anti-simétrica; (d) transitiva.

6. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,2), (3,1)\}$ uma relação binária em A. Determine a menor relação binária em A que inclua R e que seja reflexiva (respectivamente, simétrica, transitiva e de equivalência).

7. Sejam A um conjunto e R uma relação simétrica e transitiva em A. Mostre que

   (a) R não é necessariamente reflexiva.

   (b) Se o domínio de R é A, então R é reflexiva.

8. Considere as relações R_1, R_2 e R_3 apresentadas a seguir:

   - R_1 é a relação em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ definida por $x\ R_1\ y$ se e só se x e y têm o mesmo resto na divisão inteira por 3;
   - R_2 é a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x, y)\ R_2\ (z, w)$ se e só se $y = w$;
   - R_3 é a relação em $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por $(a, b)\ R_3\ (c, d)$ se e só se $ad = bc$.

   (a) Verifique que R_1, R_2 e R_3 são relações de equivalência.

   (b) Para as relações R_1 e R_2 descreva cada classe de equivalência e indique o conjunto quociente.

   (c) Mostre que a correspondência $[(a, b)] \mapsto \frac{a}{b}$ define uma bijecção $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/R_3 \to \mathbb{Q}$.

9. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere a relação $\sim$ em $\mathcal{P}(A)$ definida por

   $$X \sim Y \text{ se e só se } X \cup \{1,2\} = Y \cup \{1,2\}.$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

   (b) Indique todos os elementos da classe $[\{1\}]_{\sim}$.

   (c) Determine o conjunto quociente $\mathcal{P}(A) / \sim$.

10. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e sejam

$$\Pi_1 = \{\{2,4\}, \{3\}, \{4,6\}, \{3,6,7\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{2,4,6\}, \{3,7\}\},$$
$$\Pi_3 = \{\{2\}, \{3,4,7\}\}, \quad \Pi_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\},$$
$$\Pi_5 = \{\{2\}, \emptyset, \{3,4\}, \{6,7\}\}, \quad \Pi_6 = \{\{2,6\}, \{3,7\}, \{4\}\}.$$

(a) Diga, justificando, quais dos conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ são partições de A.

(b) Para os conjuntos Π_j $(1 \leq j \leq 6)$ que são partições, determine a relação de equivalência em A associada a Π_j.

11. Sejam $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 26\}$ e $\sim$ a relação de equivalência em A definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais}$$

Determine a partição de A associada a $\sim$, isto é, o conjunto quociente $A/\sim$.

12. Considere a relação $\sim$ em $\mathbb{Z}$ definida por

$$x \sim y \text{ se e só se } |x| = |y|.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

(b) Determine a partição de $\mathbb{Z}$ associada a $\sim$, isto é, o conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim$.

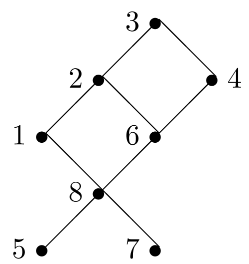
13. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A:

$$\rho_1 = \{(1,1), (4,1), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4)\}$$
$$\rho_2 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4), (2,4)\}$$
$$\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$
$$\rho_4 = \{(1,1), (2,3), (2,2), (2,1), (3,3), (4,4), (3,1)\}$$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

14. Determine todas as ordens parcias possíveis num conjunto com três elementos e construa os diagramas de Hasse correspondentes.

15. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \preceq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



Para cada um dos conjuntos X e Y determine, caso existam, os majorantes e minorantes, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.