

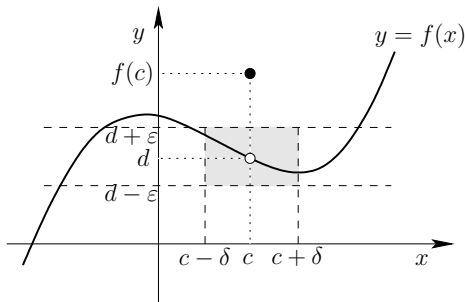
Limites

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c \in X'$ e $d \in \mathbb{R}$. Diz-se que o **limite de f quando x tende para c é d** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se então $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$.



Nota

- ▶ *Note-se que a definição de limite permite calcular $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, sendo $c \in X' \setminus X$, isto é, c pode não pertencer ao domínio da função;*
- ▶ *Se $c \in X \cap X'$, o $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ não tem de ser $f(c)$. Aliás, o valor que a função toma em c é irrelevante no cálculo do limite, visto que consideramos os pontos do domínio da função, próximos mas diferentes de c ;*
- ▶ *Observando que $0 < |x - c| \iff x \neq c$, a definição de limite pode ser reescrita dos seguintes modos:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$x \in X \cap]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\} \implies d - \varepsilon < f(x) < d + \varepsilon;$$

$$\forall x \in X \setminus \{c\} \quad c - \delta < x < c + \delta \implies d - \varepsilon < f(x) < d + \varepsilon;$$

$$\forall x \in X \setminus \{c\} \quad |x - c| < \delta \implies |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Proposição

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $c \in X'$, e suponhamos que existem $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Então:

1. existe $\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x)$ e é igual a $\lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
2. existe $\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x)$ e é igual a $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} g(x)$;
3. se $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$ então existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f}{g}(x)$ e é igual a $\frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$.

Proposição

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $c \in X'$, d um número real e suponhamos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > d$ (respect. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < d$). Então

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]c - \delta, c + \delta[\cap X \setminus \{c\} \quad f(x) > d \quad (\text{respect. } f(x) < d).$$

O conceito de limite pode ser generalizado, permitindo-se que o $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ possa ser $+\infty$ ou $-\infty$.

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $c \in X'$. Diz-se que:

- ▶ o limite de f quando x tende para c é $+\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in X \setminus \{c\} \quad |x - c| < \delta \implies f(x) > M$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$;

- ▶ o limite de f quando x tende para c é $-\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in X \setminus \{c\} \quad |x - c| < \delta \implies f(x) < M$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$.

Podemos também pensar no que acontece se o domínio X de uma função f for ilimitado, à direita ou à esquerda, e fizermos $x \in X$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$.

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Se X é um conjunto não majorado, diz-se que:

- ▶ o **limite de f quando x tende para $+\infty$ é d** e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = d \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x > N \implies |f(x) - d| < \varepsilon;$$

- ▶ o **limite de f quando x tende para $+\infty$ é $+\infty$** e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x > N \implies f(x) > M.$$

Definir **limite de f quando x tende para $+\infty$ é $-\infty$** , escrevendo-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Se X é um conjunto não minorado, diz-se

- o **limite de f quando x tende para $-\infty$ é d** e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad x < N \implies |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Definir **limite de f quando x tende para $-\infty$ é $+\infty$ ou é $-\infty$** , escrevendo-se, respectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Definição

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- Se $c \in X'_+$, diz-se que o **limite de f quando x tende para c por valores superiores a c é d** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad x \in]c, c + \delta[\cap X \implies |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d$ e diz-se que o **limite à direita, de f , em c , é d** .

- Se $c \in X'_-$, diz-se que o **limite de f quando x tende para c por valores inferiores a c é d** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad x \in]c - \delta, c[\cap X \implies |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = d$ e diz-se que o **limite à esquerda, de f , em c , é d** .

Nota

De forma inteiramente análoga se definem $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$.

Proposição

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $c \in X'_+ \cap X'_-$. Então

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = d.$$

Proposição

Sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in X'$ e suponhamos que

1. $\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ existem e são iguais a $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Então existe $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = a$.

Continuidade

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **contínua em** $x_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

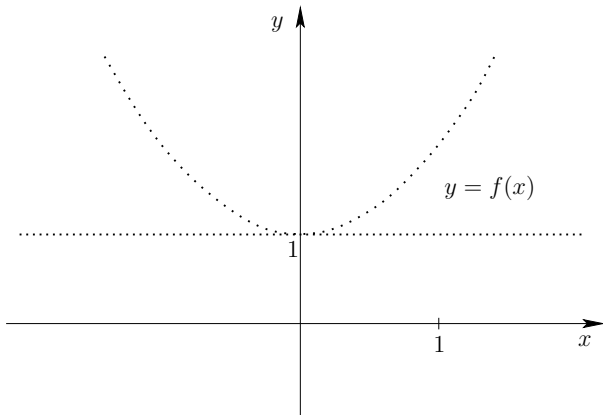
A função f diz-se **contínua** se for contínua em todos os pontos do domínio.

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in X$. Então f é contínua em x_0 se e só se ocorre uma das situações seguintes:

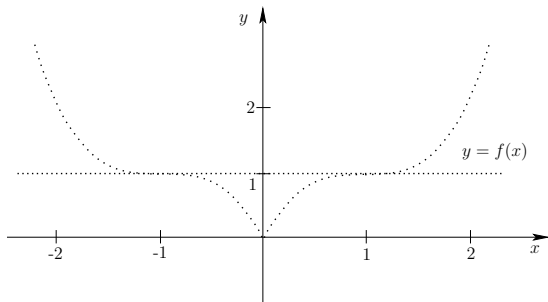
- ▶ x_0 é ponto isolado de X
- ▶ x_0 é ponto de acumulação de X e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
 \end{aligned}$$



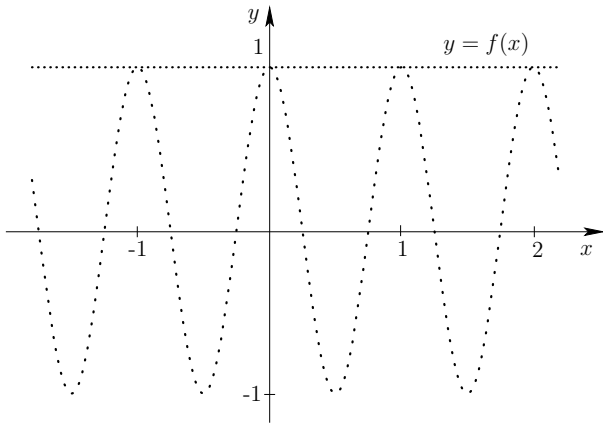
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 + (x - 1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^+ \\ 1 - (x + 1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^- \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

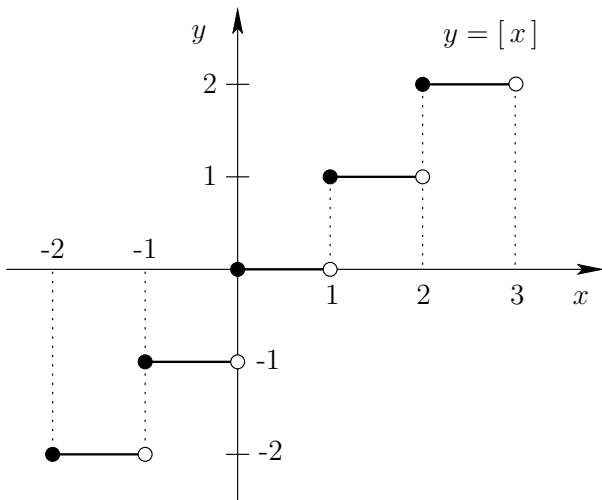


$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

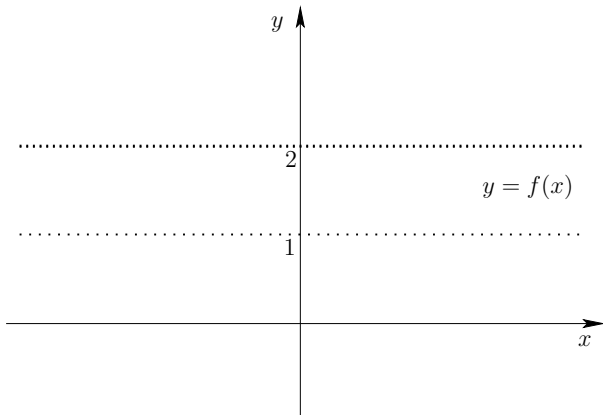


$$\begin{aligned} [\cdot] : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Proposição

Dadas $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in X$,

- ▶ $f + g$ e fg são funções contínuas em x_0 ;*
- ▶ se $g(x_0) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em x_0 .*

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua em $x_0 \in X$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $f(x_0)$. Então $g \circ f$ é contínua em x_0 .

Corolário

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então $g \circ f$ é contínua.

Teoremas sobre continuidade

Apresentamos alguns teoremas que realçam propriedades importantes das funções contínuas, com especial relevo para as que estão definidas em intervalos.

Teorema (de Weierstrass)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\exists c, d \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b] \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Teorema (de Bolzano-Cauchy)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f([a, b])$ contém o intervalo fechado de extremos $f(a)$ e $f(b)$.

Corolário

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que $f(a)f(b) < 0$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva. Então f é estritamente monótona.

Teorema

Sejam I e J intervalos de \mathbb{R} e $f : I \longrightarrow J$ uma função bijectiva e contínua. Então f^{-1} é contínua.