

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

\*\*\*\*\*

**IMPORTANTE:** A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. Nos exercícios de escolha múltipla, cada resposta certa conta 0,6 valores e cada resposta errada desconta 0,3 valores. A cotação do último exercício é 2 valores. Nos restantes exercícios a cotação de cada alínea é 0,6 valores.

\*\*\*\*\*

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V   F

☐ ☐ A correspondência  $x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \end{cases}$  define uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ .

☐ ☐ A correspondência  $x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 3 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$  define uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ .

☐ ☐ A correspondência  $x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$  define uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ .

II. Considere as funções  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  definidas por  $f(m) = m^2$  e  $g(n) = \frac{1}{n+1}$ .

(a) Tem-se  $f^{-1}(\{0, 1\}) =$

\_\_\_\_\_

(b) Tem-se  $g(\{1, 2, 3\}) =$

\_\_\_\_\_

(c) A função  $g \circ f$  é dada por:

\_\_\_\_\_

(Na alínea (c) indique em particular o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere as funções  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definidas por  $f(m, n) = mn$  e  $g(n) = (n, 1)$ . Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V   F

☐ ☐ A função  $f$  é injectiva.

☐ ☐ A função  $f$  é sobrejectiva.

☐ ☐ A função  $g$  é injectiva.

**IV.** Indique a função inversa da função  $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ .

---

**V.** Considere a relação  $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$  em  $\{1, 2, 3\}$ .

(a) A menor relação reflexiva que contém  $R$  é

---

(b) A menor relação simétrica que contém  $R$  é

---

(c) A menor relação transitiva que contém  $R$  é

---

**VI.** Considere a relação  $R$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  definida por

$$XRY \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset.$$

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V   F

☐ ☐  $R$  é reflexiva.

☐ ☐  $R$  é simétrica.

☐ ☐  $R$  é anti-simétrica.

☐ ☐  $R$  é transitiva.

**VII.** Seja  $\sim$  a relação de equivalência em  $\mathbb{Z}$  definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow 2x^2 = 2y^2.$$

Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(a)  $[0]$       =

---

(b)  $[2]$       =

---

(c)  $[-2]$     =

---

**VIII.** Considere o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V    F

- ☐ ☐ Existe uma relação de equivalência  $\sim$  em  $A$  tal que  $A/\sim = \{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$ .
- ☐ ☐ Existe uma relação de equivalência  $\sim$  em  $A$  tal que  $A/\sim = \{\{1, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ .
- ☐ ☐ Existe uma relação de equivalência em  $A$  tal que  $[3] = \{1, 2\}$ .
- ☐ ☐ Existe uma relação de equivalência em  $A$  tal que  $[3] = \{1, 3\}$ .
- ☐ ☐ Existe uma relação de equivalência em  $A$  tal que  $[3] = \{3, 4, 5\}$  e  $[5] = \{4, 5\}$ .

**IX.** Considere o conjunto parcialmente ordenado  $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$  em que

$$\preceq = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}.$$

(a) Indique o diagrama de Hasse de  $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$ :

(b) Indique os majorantes de  $\{1, 3\}$ :

---

(c) Indique os elementos minimais de  $\{2, 4, 5\}$ :

---

**X.** Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V    F

- ☐ ☐ Existe um grafo cujos vértices têm graus 1, 2, 3, 4 e 5.
- ☐ ☐ Existe um grafo conexo com pelo menos dois vértices e um número finito de caminhos fechados.

**XI.** Mostre por indução que, para todo o número natural  $n \geq 1$ ,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$