LEI **Teste 1** **Introd. Sistemas Dinâmicos**

Novembro 2012

Nome completo:____ Número:__________

1. (3 valores) Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} - 6xy = 2xy^2 \tag{1}$$

(a) Usando a mudança de variável $u = \dfrac{1}{y}$ mostre que a equação (1) reduz-se a

$$\frac{du}{dx} + 6xu = -2x \tag{2}$$

(b) Resolva a equação (2) e, em seguida, escreva a solução geral de (1).

(v.s.f.f.)

2. (7,5 valores) *Cada resposta correcta tem cotação 1,5 valores. Cada resposta errada desconta 0.5 valores.*

   (a) A solução do problema com condição inicial:

   $$\begin{cases} y' = 2y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

   ☐ é a função $y(t) = e^{2t} + 2$
   ☐ é a função $y(t) = 2e^{2t-2}$
   ☐ não é nenhuma das duas funções anteriores.

   (b) A função $y(t) = \cos(t^2)$ é solução da EDO $y' + aty = 0$

   ☐ se $a = 1$
   ☐ se $a = -2$
   ☐ y nunca é solução desse tipo de EDO.

   (c) A mudança de variável $u = t^2 y$ transforma a EDO $y' = \dfrac{\cos(t^2 y) - 2ty}{t^2}$

   ☐ na EDO $u' = t^2 \cos u$
   ☐ na EDO $u' = \cos u$
   ☐ em nenhuma EDO das anteriores.

   (d) A solução geral da EDO $y'' + 16y = e^t$

   ☐ é $y(t) = \frac{1}{17}e^t + C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t}$, com C_1, C_2 constantes;
   ☐ é $y(t) = \frac{1}{17}e^t + C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$, com C_1, C_2 constantes;
   ☐ não é nenhuma das indicadas acima.

   (e) Suponha-se que $y_1(t) = \ln t$ e $y_2(t) = 2t + \ln t$ são soluções de uma EDO linear homogénea de ordem 2. A solução dessa EDO verificando $y(1) = 2$ e $y'(1) = 2$

   ☐ é $y(t) = 2\ln t + 2t$
   ☐ é $y(t) = 2t$
   ☐ é $y(t) = 2\ln t + 2(\ln t + t)$

3. (1,5 valores) Utilise o método numérico de Euler com passo $h = 1/2$ para calcular o valor aproximado da solução do problema

   $$\frac{dx}{dt} + x^2 = t, \qquad x(0) = 0,$$

   no ponto $t = 2$.

(v.s.f.f.)

4. (3 valores) Suponha que a evolução da temperatura T de um objecto, ao longo do tempo t, num ambiente com temperatura constante T_0 é dada pela chamada *Lei de Newton do arrefecimento*:

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_0,$$

onde $k > 0$ é uma constante real.

Um computador trabalha à temperatura de 70^oC numa sala com temperatura constante de 20^oC. O computador é desligado a uma hora desconhecida, mas às 18h a sua temperatura é de 50^oC e passado uma hora é de 40^oC. A que horas foi desligado o computador?

(v.s.f.f.)

5. (5 valores) Considere a equação do oscilador harmónico forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = \cos(wt),$$

onde $w > 0$ é uma constante real.

(a) Determine a solução geral x_h da equação homogénea correspondente.

(b) Determine uma solução particular x_p da forma $x_p(t) = At\sin(wt)$, onde A é uma constante real a determinar.

(c) Escreva a solução geral da equação dada. Justifique.

(d) Calcule $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ e explique a ocorrência de ressonâncias.

(e) Determine a solução que satisfaz as condições iniciais $x'(0) = x(0) = 0$ e represente-a graficamente.