



Exercício 2.1 Determine o interior, a aderência, a fronteira e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos e indique quais são abertos e quais são fechados:

- | | | |
|--|-------------------|--|
| a) \mathbb{N} ; | e) \mathbb{Q} ; | i) $\mathbb{Q} \cap [-2, 0[$; |
| b) \mathbb{R} ; | f) $[0, 2[$; | j) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 2]$; |
| c) \mathbb{Z} ; | g) $[0, 3]$; | k) $]0, 3[\setminus \{1\} \cup \{4, 5\}$; |
| d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | h) $]5, 10[$; | l) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. |

Exercício 2.2 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

- a) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto então A não é limitado;
- b) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $B \subseteq \mathbb{R}$ é fechado então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;
- c) se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não são abertos nem fechados então $A \cap B$ não é aberto nem fechado;
- d) o conjunto $A =]0, 4[\cap \mathbb{Q}$ é aberto;
- e) o conjunto $A = [0, 7] \cap \mathbb{Q}$ é fechado;
- f) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 6 - x^2 < 1\}$ é limitado superiormente;
- g) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 7\}$ é fechado e limitado.

Exercício 2.3 Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, a aderência, a fronteira, o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

- | | |
|---|--|
| a) $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$; | f) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+2} > 2\}$; |
| b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$; | g) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x-1 \leq 4\}$; |
| c) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 50\}$; | h) $\{x \in \mathbb{Q} : x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$; |
| d) $\{x \in \mathbb{R} : x < x \}$; | i) $\{x \in \mathbb{Q} : x+4 < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 - 3 < 0\}$; |
| e) $\{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\}$; | j) $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. |

Exercício 2.4 Quando possível, apresente um subconjunto A de \mathbb{R} que:

- | | |
|---|--|
| a) não seja aberto nem fechado; | h) coincida com o seu derivado; |
| b) seja simultaneamente aberto e fechado; | i) tenha um único ponto de acumulação; |
| c) seja aberto e limitado; | j) seja limitado e cujo ínfimo pertença ao seu interior; |
| d) seja fechado e não limitado; | k) tenha apenas dois pontos de acumulação; |
| e) tenha o interior vazio e seja não limitado; | l) seja fechado e tal que $\overline{\overset{\circ}{A}} \neq A$; |
| f) seja limitado mas não seja aberto nem fechado; | m) seja aberto e tal que $\overline{\overset{\circ}{A}} \neq A$; |
| g) não contenha o seu derivado; | n) coincida com a sua fronteira; |
| | o) a sua fronteira seja o conjunto vazio. |