Curso de Professores do 2º Ciclo do Ensino Básico – Variante de Matemática e Ciências

Disciplina: Elementos de Topologia

1. Noções topológicas no conjunto dos números reais

Módulo ou valor absoluto

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **valor absoluto** ou **módulo de *x***, representa-se por $|x|$, e é definido do seguinte modo:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

1. $|x| \geq 0$

2. $|-x| = |x|$

3. $-|x| \leq x \leq |x|$

4. $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$

$|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x > \varepsilon \vee x < -\varepsilon$

5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade triangular)

6. $|x-y| \leq \left||x| - |y|\right|$ (Desigualdade triangular inversa)

7. $|xy| = |x| \times |y|$

8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

Distância entre dois pontos

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Chama-se **distância de *x* a *y***, e representa-se por ***d*(*x*, *y*)**, ao módulo da diferença $x - y$, ou seja:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $d(x, y) = d(y, x)$ simetria

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade triangular)

Vizinhança

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Chama-se **vizinhança de centro *a* e raio *ε***, e representa-se por $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$, ao conjunto formado por todos os números reais *x* cuja distancia a *a* é menor que *ε*, ou seja:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R}: d(x, a) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: -\varepsilon < x - a < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} \\ &=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\end{aligned}$$

Interior, exterior, fronteira e aderência de um conjunto

Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que ***a* é ponto interior** do conjunto *X* se existir uma vizinhança centrada em *a* que esteja contida em *X*, ou seja, se existir $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \subseteq X$.

O conjunto formado por todos os pontos interiores de *X* chama-se **interior de *X*** e representa-se por ***int(X)***.

Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que ***a* é ponto exterior** do conjunto *X* se existir uma vizinhança centrada em *a* cuja intersecção com *X* seja o conjunto vazio, ou seja, se existir $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap X = \emptyset$.

O conjunto formado por todos os pontos exteriores de *X* chama-se **exterior de *X*** e representa-se por ***ext(X)***.

Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que ***a* é ponto fronteira** do conjunto *X* se não for interior nem exterior a *X*.

O conjunto formado por todos os pontos fronteira de *X* chama-se **fronteira de *X*** e representa-se por ***fr(X)***.

Chama-se **aderência ou fecho** do conjunto *X*, e representa-se por $\overline{X}$, ao conjunto $int(X) \cup fr(X)$.

Os elementos de $\overline{X}$ chamam-se **pontos aderentes** de *X*.

Ponto de acumulação de um conjunto

Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que ***a* é ponto de acumulação** do conjunto *X* se qualquer vizinhança centrada em *a* tiver pelo menos um ponto de *X* distinto de *a*.

O conjunto formado por todos os pontos de acumulação de *X* chama-se **derivado de *X*** e representa-se por X'.