UNIVERSIDADE DO MINHO 2006/07/05

MATEMÁTICA DISCRETA II

Correcção do Exame da Segunda Chamada - Época Normal

CURSO: Engenharia de Sistemas e Informática Duração: 2h

1. Considere a definição indutiva do conjunto das fórmulas do Cálculo Proposicional e seja $X \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ o conjunto das fórmulas com o seguinte esquema de árvore de formação:

$$\dfrac{\dfrac{}{\sigma_5 \in \mathcal{F}^{CP}}\,r_5 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma_1 \in \mathcal{F}^{CP}}\,r_1}{\sigma_2 \in \mathcal{F}^{CP}}\,r_2 \qquad \dfrac{}{\sigma_3 \in \mathcal{F}^{CP}}\,r_3}{\sigma_4 \in \mathcal{F}^{CP}}\,r_4}{\sigma \in \mathcal{F}^{CP}}\,r_6$$

(a) Indique, justificando, uma fórmula de X.

Os elementos de X são as fórmulas do Cálculo Proposicional com o esquema de árvore de formação dado. A fórmula $p_1 \to (\neg p_2 \wedge \bot)$ admite a árvore de formação

$$\dfrac{\dfrac{}{p_1 \in \mathcal{F}^{CP}}\,p_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p_2 \in \mathcal{F}^{CP}}\,p_2}{\neg p_2 \in \mathcal{F}^{CP}}\,\neg \qquad \dfrac{}{\bot \in \mathcal{F}^{CP}}\,\bot}{\neg p_2 \wedge \bot \in \mathcal{F}^{CP}}\,\wedge}{p_1 \to (\neg p_2 \wedge \bot) \in \mathcal{F}^{CP}}\,\to \quad .$$

Portanto, a fórmula $p_1 \to (\neg p_2 \wedge \bot)$ é um elemento de X.

Nota: como as regras r_1, r_3 e r_5 são regras base, $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5 \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$. Tem-se ainda que, $r_4, r_6 \in \{\to, \leftrightarrow, \vee, \wedge\}$, dado que correspondem a conectivos binários, e que $r_2 = \neg$, uma vez que $\neg$ é o único conectivo unário.

(b) Qual o número mínimo de subfórmulas de uma fórmula $\sigma \in X$? Justifique.

Se σ é um elemento de X, σ é uma fórmula do Cálculo Proposicional com a forma

$$x \Box_1 (\neg y \Box_2 z), \text{ com } \quad x, y, z \in \mathcal{V}^{\mathcal{CP}} \cup \{\bot\} \quad \text{e } \Box_1, \Box_2 \in \{\to, \leftrightarrow, \vee, \wedge\} \; .$$

As subfórmulas de σ são: x, y, z, $\neg y$, $\neg y \Box_2 z$ e $x \Box_1 (\neg y \Box_2 z)$.

Então, os elementos de X, para os quais $x = y = z$, têm o número mínimo de subfórmulas.

Portanto, o número mínimo de subfórmulas é 4.

(c) Sendo $\sigma \in X$ e admitindo que $\bot$ não é uma subfórmula de σ, que r_4 corresponde à conjunção e que r_6 corresponde à disjunção, diga, justificando, se é possível concluir que σ é uma forma normal disjuntiva.

Se σ é um elemento de X tal que $\bot$ não é uma subfórmula de σ, r_4 corresponde à conjunção e que r_6 corresponde à disjunção, então σ é da forma

$$x \vee (\neg y \wedge z), \text{ com } \quad x, y, z \in \mathcal{V}^{\mathcal{CP}} \; .$$

Dado que, uma forma normal disjuntiva é uma fórmula da forma

$$(l_{11} \wedge ... \wedge l_{1n_1}) \vee ... \vee (l_{k1} \wedge ... \wedge l_{kn_k})$$

onde $k, n_1, ..., n_k$ são naturais e os l_{ij} literais (variáveis proposicionais ou negações de variáveis proposicionais), podemos concluir que σ é uma forma normal disjuntiva, em que $k = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $l_{11} = x$, $l_{21} = \neg y$ e $l_{22} = z$.

(d) Indique, justificando, o número de elementos de X que são formas normais disjuntivas e cujo conjunto de variáveis proposicionais é $\{p_1\}$.

Tem-se que os conectivos $\perp$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ não podem ocorrer em FND's. Por outro lado, os elementos de X cujo conjunto das variáveis proposicionais é $\{p_1\}$ e onde não ocorrem os conectivos $\perp$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são:

$$p_1 \vee (\neg p_1 \wedge p_1),\ p_1 \vee (\neg p_1 \vee p_1),\ p_1 \wedge (\neg p_1 \wedge p_1),\ p_1 \wedge (\neg p_1 \vee p_1).$$

Como a fórmula $p_1 \wedge (\neg p_1 \vee p_1)$ é a única fórmula que não é FND, tem-se que o número de elementos de X, que são FND's e cujo conjunto das variáveis é $\{p_1\}$, é 3.

2. Considere as seguintes fórmulas proposicionais:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= (\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_0\\ \varphi_1 &= p_1 \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)\\ \varphi_2 &= p_0 \vee \neg p_2\end{aligned}$$

(a) Indique, se possível, uma valoração v que satisfaça o conjunto $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$. Justifique.

Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_1) = v(p_2) = 1$, por exemplo, a valoração que atribui o valor lógico 1 a todas as variáveis proposicionais. É fácil verificar que $v(\varphi_0) = v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$, logo, v satisfaz o conjunto de fórmulas $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$.

(b) Sendo v uma valoração, diga, justificando, se $v(p_1) = 1$ é uma condição necessária para $v(\varphi_1) = 1$.

A afirmação é verdadeira. Supondo que $v(\varphi_1) = 1$, vejamos que $v(p_1) = 1$. Se tivéssemos $v(p_1) = 0$ então $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$ independentemente do valor de $v(p_2)$ e, assim, $v(p_1) \neq v(\neg p_1 \vee p_2)$, pelo que $v(p_1 \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)) = 0$. Portanto, $v(p_1) = 1$ é condição necessária para $v(\varphi_1) = 1$.

(c) Construa uma derivação em DNP de $\perp$ a partir de $\{\varphi_1, \neg p_1\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p_1}{\neg p_1 \vee p_2}\vee_1 I \qquad p_1 \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)}{p_1}\leftrightarrow_2 E \qquad \neg p_1}{\perp}\neg E$$

(d) Indique se existe algum conjunto de fórmulas Γ que seja consistente e tal que $\varphi_1 \in \Gamma$ e $\Gamma \models \neg p_1$. Justifique.

Tendo em vista uma contradição, suponhamos que existe um conjunto de fórmulas Γ que é consistente e tal que $\varphi_1 \in \Gamma$ e $\Gamma \models \neg p_1$. Como Γ é consistente, existe uma valoração v_0 que satisfaz Γ. Em particular, como $\varphi_1 \in \Gamma$, temos que $v_0(\varphi_1) = 1$. Por outro lado, como $\Gamma \models \neg p_1$, então $v_0(\neg p_1) = 1$. Mas, como visto na alínea (b), quando φ_1 tem valor lógico 1 então, necessariamente, p_1 tem valor lógico 1. Chegamos, assim, a uma contradição. Portanto, não existe nenhum conjunto nas condições apresentadas.

3. Sejam φ, $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $\varphi \vee \psi$ é uma tautologia. Mostre que, dada $\theta \in \mathcal{F}^{CP}$:

(a) se $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ e $\Gamma, \psi \vdash \theta$ então $\Gamma \vdash \theta$;

Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ e $\Gamma, \psi \vdash \theta$. Assim, existe uma derivação D_1 de θ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e existe uma derivação D_2 de θ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Dado que $\varphi \vee \psi$ é uma tautologia, pelo Teorema da Completude, $\varphi \vee \psi$ é um teorema e, portanto, existe uma derivação D cuja conclusão é $\varphi \vee \psi$ e cujas hipóteses estão todas canceladas. Assim, a construção

$$\dfrac{\begin{matrix}\emptyset\\ D\\ \varphi \vee \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma, \cancel{\varphi}^{(1)}\\ D_1\\ \theta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma, \cancel{\psi}^{(1)}\\ D_2\\ \theta\end{matrix}}{\theta}\vee E^{(1)}$$

é uma derivação de θ a partir de Γ, donde, como pretendido, $\Gamma \vdash \theta$.

(b) se $\Gamma \vdash \theta$ então $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ e $\Gamma, \psi \vdash \theta$.

Admitamos que $\Gamma \vdash \theta$. Assim, existe uma derivação D de θ a partir de Γ. Deste modo, a conclusão de D é θ e as hipóteses não canceladas de D são elementos de Γ. Por maioria de razão, as hipóteses não canceladas de D são elementos de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Portanto, D é também uma derivação de θ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e uma derivação de θ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$, pelo que $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ e $\Gamma, \psi \vdash \theta$.

Nota: Resoluções alternativas destas duas alíneas podem ser obtidas por aplicação dos teoremas da Correcção e da Completude, substituindo derivabilidade por consequência semântica.

4. Seja $L = (\{c, f\}, \{=\}, N)$ a linguagem onde $N(c) = 0$, $N(f) = 1$ e $N(=) = 2$.

(a) Dê exemplo de variáveis x e y distintas e de L-termos t_0, t_1 e t_2 de tal modo que $(t_0[t_1/x])[t_2/y] \neq (t_0[t_2/y])[t_1/x]$. Justifique.

Sejam, por exemplo, $x = x_0$, $y = x_1$, $t_0 = f(x_0)$, $t_1 = x_1$ e $t_2 = f(x_0)$. Então, por definição de substituição em L-termos,

$$(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (f(x_0)[x_1/x_0])[f(x_0)/x_1] = f(x_1)[f(x_0)/x_1] = f(f(x_0)),$$
$$(t_0[t_2/y])[t_1/x] = (f(x_0)[f(x_0)/x_1)[x_1/x_0] = f(x_0)[x_1/x_0] = f(x_1),$$

e, como é óbvio, $f(f(x_0)) \neq f(x_1)$.

(b) Sejam x e y variáveis distintas e t_1 e t_2 L-termos tais que $x \notin var(t_2)$ e $y \notin var(t_1)$. Prove que, para qualquer L-termo t_0, $(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (t_0[t_2/y])[t_1/x]$.

Sejam x e y variáveis distintas e t_1 e t_2 L-termos tais que $x \notin var(t_2)$ e $y \notin var(t_1)$.
Sejam $t_0 \in \mathcal{T}_L$ e $P(t_0)$ a propriedade $(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (t_0[t_2/y])[t_1/x]$.
A prova de que $P(t_0)$ é válida para todo $t_0 \in \mathcal{T}_L$ é feita recorrendo ao Teorema de Indução Estrutural para o conjunto $\mathcal{T}_L$.

i) $P(c)$
Por definição de substituição $(t_0[t_1/x])[t_2/y] = c = (t_0[t_2/y])[t_1/x]$. Logo P(c).

ii) $P(x_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$
Caso $x_i = x$:
$(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (x_i[t_1/x_i])[t_2/y] = t_1[t_2/y] = t_1$
(note-se que $y \notin var(t_1)$, logo $t_1[t_2/y] = t_1$);
$(t_0[t_2/y])[t_1/x] = (x_i[t_2/y])[t_1/x_i] = x_i[t_1/x_i] = t_1$
(note-se que $y \neq x$, logo $x_i[t_2/y] = x_i$);
Caso $x_i = y$:
$(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (x_i[t_1/x])[t_2/x_i] = x_i[t_2/x_i] = t_2$
(note-se que $y \neq x$, logo $x_i[t_1/x] = x_i$);
$(t_0[t_2/y])[t_1/x] = (x_i[t_2/x_i])[t_1/x] = t_2[t_1/x] = t_2$
(note-se que $x \notin var(t_2)$, logo $t_2[t_1/x] = t_2$);
Caso $x_i \neq x$ e $x_i \neq y$:
$(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (x_i[t_1/x])[t_2/y] = x_i[t_2/y] = x_i$;
$(t_0[t_2/y])[t_1/x] = (x_i[t_2/y])[t_1/x] = x_i[t_1/x] = x_i$;
Em qualquer dos casos verifica-se $P(x_i)$.

iii) Para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t) \Rightarrow P(f(t))$
Seja $t \in \mathcal{T}_L$. Como Hipótese de Indução suponha-se $P(t)$.
Pretendemos provar $P(f(t))$. Então da Hipótese de Indução e por definição de substituição temos que:

$$\begin{aligned}
(f(t)[t_1/x])[t_2/y] &= f(t[t_1/x])[t_2/y] \\
&= f((t[t_1/x])[t_2/y]) \\
&= f((t[t_2/y])[t_1/x]) \quad \text{por H.I.} \\
&= f(t[t_2/y])[t_1/x] \\
&= f(t)[t_2/y][t_1/x]
\end{aligned}$$

Logo, para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t) \Rightarrow P(f(t))$.

Então, de i), ii) e iii), concluímos, pelo Teorema de Indução Estrutural para $\mathcal{T}_L$, que para todo $t_0 \in \mathcal{T}_L, P(t_0)$.

(c) Dê exemplo de uma L-fórmula ψ_0 que seja uma instância de tautologia. Justifique.

A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia do Cálculo Proposicional. Então a L-fórmula

$$= (x_0, x_1) \vee (\neg = (x_0, x_1))$$

é uma instância de tautologia: resulta de $p_0 \vee \neg p_0$ substituindo p_0 pela L-fórmula $= (x_0, x_1)$.

(d) Indique, justificando, uma L-estrutura E_1 que valide a L-fórmula

$$\psi_1 = \exists x_0 \exists x_1 \neg(x_0 = x_1).$$

Uma L-estrutura $E_1 = (D, -)$ valida ψ_1 se para toda a atribuição $a : \mathcal{V} \to D$, $E_1 \models \psi_1[a]$. Por sua vez,

$$\begin{aligned} E_1 \models \psi_1[a] \quad &\text{sse} \quad \text{existe}\, d_0 \in D \text{ existe}\, d_1 \in D, \left(\psi_1\left[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d_0 \end{pmatrix}\right]\right)\left[a\begin{pmatrix} x_1 \\ d_1 \end{pmatrix}\right]_{E_1} = 1 \\ &\text{sse} \quad \text{existe}\, d_0 \in D \text{ existe}\, d_1 \in D, (d_0, d_1) \notin \equiv \end{aligned}$$

Então a L-estrutura $E_1 = (\mathbb{N}_0, -)$ onde:

- $\overline{c}$ é o natural zero;
- $\overline{f} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ é a função identidade em $\mathbb{N}_0$;
- $\equiv$ é a relação de igualdade em $\mathbb{N}_0$,

valida a L-fórmula ψ_1, uma vez que, por exemplo, existem $1, 2 \in \mathbb{N}_0$ tais que $1 \neq 2$.

(e) A L-estrutura E_1 apontada na alínea (d) valida também a L-fórmula ψ_0 indicada na alínea (c)? Justifique.

A fórmula indicada na alínea (d) é uma instância de tautologia e toda a instância de tautologia é uma fórmula universalmente válida, i.e., é válida em qualquer L-estrutura. Então, em particular, a L-estrutura E_1 valida a fórmula indicada em (d).

Cotação:

1-a)	1.25 ;	**1-b)**	1.25 ;	**1-c)**	1.25 ;	**1-d)**	1.5 ;		
2-a)	1.25 ;	**2-b)**	1.25 ;	**2-c)**	1.5 ;	**2-d)**	1.5 ;		
3-a)	1.25 ;	**3-b)**	1.25 ;						
4-a)	1.25 ;	**4-b)**	1.5 ;	**4-c)**	1.25 ;	**4-d)**	1.5 ;	**4-e)**	1.25.