maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Álgebra Linear
LEI - 2009/2010

Folha 6 - Valores e Vectores Próprios

---

1. Considere a seguinte matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e diga quais dos seguintes vectores

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   são vectores próprios de A. Em caso afirmativo indique o valor próprio correspondente.

2. Verifique que se $\lambda = 3$ é valor próprio da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

   Em caso afirmativo indique um vector próprio associado.

3. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Para cada uma das matrizes anteriores, determine os seus valores próprios, e respectivas multiplicidades algébricas.

   (b) Determine os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios, determinados nas alínea anterior.

   (c) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios anteriores. Qual a dimensão dos subespaços?

4. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A e A^T têm os mesmos valores próprios.

5. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A + 5I = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

   (a) Determine os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

   (b) Determine os valores próprios e os vectores próprios da matriz $A + 5I$.

   (c) Compare os resultados que obteve nas alienas a) e b).

6. Se λ é um valor próprio de uma matriz invertível A.

   Prove que $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} é valor próprio de A^{-1}.

7. Considere que a matriz A tem um vector próprio v associado a um valor próprio λ. Mostre que v também é um vector próprio de A^2 associado ao valor próprio λ^2.

8. Mostre que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ são semelhantes.

9. Determine a, b e c de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ tenha -1, 0 e 1 como valores próprios.

10. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 e $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 6$ os seus valores próprios. Considere a matriz $B = A^2 - I$.

    (a) Averigue que as matrizes A e B são comutáveis.

    (b) Determine os valores próprios da matriz B.

11. Seja A uma matriz de ordem n e f_A, a aplicação linear definida do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

    Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

    (a) A matriz A é invertível sse $Ax = 0$ tem apenas a solução trivial.

    (b) A matriz A é invertível sse $\det(A) \neq 0$.

    (c) A matriz A é invertível sse a aplicação f_A é injectiva.

    (d) A matriz A é invertível sse $0 \notin \lambda(A)$.

12. (a) Prove que matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.

    (b) Verifique que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ têm os mesmos valores próprios mas não são semelhantes.

13. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    (a) Verifique que os valores próprios de A são 1 e -1.

    (b) Encontre dois vectores próprios linearmente independentes associados ao valor próprio 1.

    (c) Construa uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

14. Averigue se as seguintes matrizes são diagonalizáveis:

    (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. Estude para cada alínea o resultado traduzido pelo teorema seguinte:

    "A dimensão de um subespaço proprio U_λ, não excede a multiplicidade algébrica de λ".

    (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

    (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$