Capítulo 1 - Funções reais de variável real

Neste capítulo vamos estudar funções reais de variável real, dando particular atenção às noções de limite , de continuidade e de diferenciabilidade , bem como a resultados envolvendo estes conceitos.

1.1 Noções elementares

Definição e notações

Definição

Chama-se função real de variável real a dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, X *e* Y, *munidos de uma lei de formação ou regra de correspondência,* f *, que a cada elemento* x *de* X *associa um único elemento* $f(x)$ *de* Y.

- denota-se a função por $f : X \longrightarrow Y$;
- usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que o elemento x é enviado por f em $f(x)$ ou que f faz corresponder a x o elemento $f(x)$;
- o conjunto X designa-se domínio da função f e denota-se por $\mathrm{Dom}(f)$;

Definição e notações

- o conjunto
$$f(X) = \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\}$$
designa-se por contradomínio ou imagem da função f ;

- os elementos x de X denotam-se por objetos ;

- os elementos $f(x)$ tais que $x \in X$ denotam-se por imagens ;

- o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in X$
$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$
designa-se por gráfico de f .

Definição e notações

Observação

Uma função fica definida pelo domínio , pelo conjunto de chegada e pela regra de correspondência ou lei de formação , que a cada elemento do domínio associa um único elemento do conjunto de chegada.

Frequentemente, por abuso de notação, define-se uma função real de variável real apenas pela sua lei de formação, subentendendo-se que o seu domínio é o maior conjunto, no sentido da inclusão, onde essa lei tem sentido, e o seu conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.

Definição e notações

Definição

Consideremos uma função $f : X \longrightarrow Y$ *e dois conjuntos* $A \subset X$ *e* $B \subset Y$ *.*
Chama-se ***imagem de*** A ***por*** f *ao conjunto*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

e ***imagem recíproca*** *de* B *por* f *ao conjunto*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}\,.$$

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f(\,]-1,1[\,) = [0,1[\,, \quad f(\,[-4,2]\,) = [0,16]\,, \quad f(\,]1,3]\,) = \,]1,9]$$

$$f^{-1}(\,\{1\}\,) = \{-1,1\}\,, \quad f^{-1}(\,]-2,-1[\,) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(\,]-2,1]\,) = f^{-1}(\,[0,1]\,) = [-1,1].$$

Igualdade de funções

Duas funções $f\colon X_1 \longrightarrow Y_1$ e $g\colon X_2 \longrightarrow Y_2$ dizem-se iguais quando

$$X_1 = X_2 = X, \quad Y_1 = Y_2 \quad \text{e} \quad f(x) = g(x), \ \forall x \in X.$$

Exemplos

1. *As funções*

$$f(x) = |x|, \ \ x \in \mathbb{R}^- \quad \textit{e} \quad g(x) = -x, \ \ x \in \mathbb{R}^+,$$

não são iguais.

De facto, embora seja $f(x) = g(x) = -x$, as funções têm domínios diferentes.

2. *Já as funções*

$$h(x) = |x|, \ \ x \in \mathbb{R}^- \quad \textit{e} \quad j(x) = \sqrt{x^2}, \ \ x \in \mathbb{R}^-,$$

são iguais.

Repare-se que, para $x \in \mathbb{R}^-$, vem $h(x) = j(x) = -x > 0$.

Operações algébricas

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções.

- A soma de f e g é a função $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in X.$$

- O produto de f e g é a função $f\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(f\ g)(x) = f(x)\ g(x),\ \forall x \in X.$$

- O quociente de f e g é a função $\dfrac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x \in D = \{x \in X : g(x) \neq 0\}.$$

Vocabulário variado

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se:

(a) majorada quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \leq M,$$

ou seja, quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \in]-\infty, M];$$

(b) minorada quando

$$\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \geq m,$$

ou seja, quando

$$\exists m \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \in [m, +\infty[\,;$$

(c) limitada quando é majorada e minorada, ou seja quando

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ f(x) \in [m, M],$$

ou equivalentemente, quando

$$\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X, \ |\, f(x) \,| \leq M;$$

(d) crescente quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \;\; x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$

em particular, estritamente crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in X, \;\; x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

(e) decrescente quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \;\; x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$

em particular, estritamente decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in X, \;\; x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

(f) monótona se é crescente ou decrescente; em particular, estritamente monótona se é estritamente crescente ou estritamente decrescente;

(g) enquadrada pelas funções g e h, tais que Dom(g)=Dom(h)=X, quando

$$\forall x \in X, \;\; g(x) \leq f(x) \leq h(x);$$

(h) par quando

$$\forall x \in X, \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x);$$

(i) ímpar quando

$$\forall x \in X, \quad -x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x);$$

(j) periódica de período $T > 0$ quando

$$\forall x \in X, \quad x + T \in X \quad \wedge \quad f(x+T) = f(x);$$

(k) injetiva quando a objetos distintos em X correspondem imagens distintas em Y, ou seja, quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou ainda, quando

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2;$$

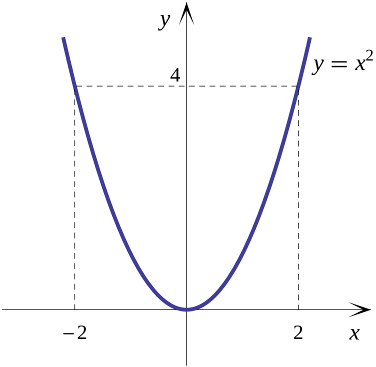
(l) sobrejetiva quando o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, ou seja, quando

$$\forall y \in Y\,, \;\; \exists x \in X : \;\; f(x) = y;$$

(m) bijetiva quando é, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva.

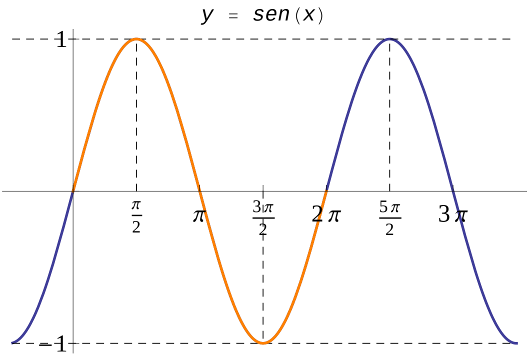
Exemplos

1. *A função* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2$ *é par, não é periódica, não é injetiva porque* $f(-x) = f(x)$*, nem é sobrejetiva porque* $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ *e, portanto, dado* $y < 0$*, não existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = y$*. Além disso,* f *é minorada mas não é majorada. Não é monótona, embora seja estritamente crescente em* $[0, +\infty[$ *e estritamente decrescente em* $]-\infty, 0]$*.*



Exemplos

2. *Sobre a função* $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \operatorname{sen} x$, *podemos dizer que é ímpar, periódica de período* 2π, *não é injetiva porque* $g(x) = g(x + 2\pi)$, *nem é sobrejetiva porque* $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. *Podemos ainda dizer que* g *é limitada e que não é monótona, embora seja estritamente crescente, por exemplo, em* $[0, \pi/2]$ *e estritamente decrescente, por exemplo, em* $[\pi/2, \pi]$.

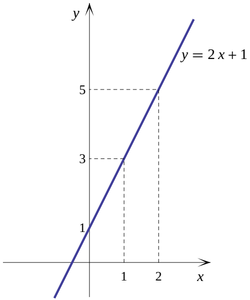


Exemplos

3. *Consideremos agora a função* $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = 2x + 1$. *Trata-se de uma função que não é par, não é ímpar, nem é periódica. É injetiva porque*

$$h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Também é sobrejetiva porque $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *De facto, dado arbitrariamente* $y \in \mathbb{R}$, *basta tomar* $x = (y-1)/2$ *para ter* $h(x) = y$. *Logo,* h *é bijetiva. Podemos ainda dizer que* h *não é majorada nem minorada, e que é estritamente crescente.*



Restrição e extensão

Sejam $f\colon X \longrightarrow Y$ uma função e A, B dois conjuntos tais que $A \subset X \subset B$.
Chama-se restrição de f ao conjunto A à função (única)

$$f|_{A} : A \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad (f|_{A})(x) = f(x), \ \forall x \in A,$$

e extensão de f a B a qualquer função

$$f^* : B \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad f^*(x) = f(x), \ \forall x \in X.$$

Exemplos

1. *Consideram-se frequentemente as restrições do $seno$ e do $cosseno$, ambas de domínio $\mathbb{R}$, aos intervalos* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e* $[0, \pi]$*, respetivamente.*

2. *A função* $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *pode ser estendida à origem pondo, por exemplo,*

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

Claro que f admite uma infinidade de extensões a todo $\mathbb{R}$, diferentes de f^*, basta modificar o valor atribuído na origem.

Composição de funções

Dadas duas funções $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon A \longrightarrow B$ tais que $f(X) \subset A$, define-se a função composta

$$g \circ f\colon\ X \longrightarrow B \quad \text{por} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))\,,\ \ \forall x \in X.$$

Exercício

Considerar as funções

$$\begin{array}{llll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, & f(x) = x^2; & g: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}\,, & g(x) = \sqrt{x} \\ k: \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}\,, & k(x) = x^2; & h: \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}\,, & h(x) = \sqrt{-x} \end{array}$$

a) *Determinar o contradomínio de cada uma delas.*

b) *Verificar que não é possível definir cada uma das funções*

$$k \circ g\,,\ \ h \circ f\,,\ \ k \circ h\,,\ \ h \circ k.$$

c) *Definir as compostas*

$$f \circ g\,,\ \ f \circ h\,,\ \ g \circ k\,,\ \ g \circ f.$$

Inversa de uma função

Seja $f : X \longrightarrow Y$.
Diz-se que a função $g : Y \longrightarrow X$ é inversa de f se
$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$, isto é, quando

$$(g \circ f)(x) = x\,, \ \ \forall x \in X \quad \wedge \quad (f \circ g)(x) = x\,, \ \ \forall x \in Y.$$

- Uma função que admite inversa diz-se invertível
- Pode verificar-se que se $f : X \longrightarrow Y$ é invertível, a sua inversa é única.
- A função inversa de f denota-se por $f^{-1} : Y \longrightarrow X$
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Inversa de uma função

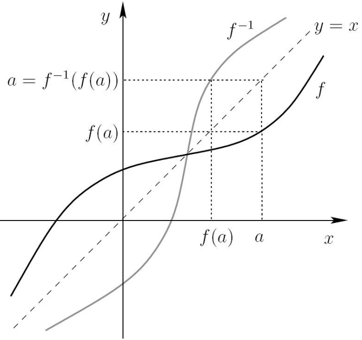
Proprosição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se e só se é bijetiva.

- Se uma função $f : X \longrightarrow Y$ é injetiva mas não é sobrejetiva, é usual falar da inversa de f. Na realidade, cometemos um abuso de notação, chamando ainda f à função bijetiva que se obtém substituindo Y pelo contradomínio de f.

Inversa de uma função

- A partir de uma representação gráfica da função f podemos obter uma representação gráfica de f^{-1}



Inversa de uma função

Exercício

Considerar as funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\,, \;\; x > 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1+x}{x}\,, \;\; x > 0\,.$$

a) *Determinar o contradomínio de* f *e o contradomínio de* g.

b) *Verificar que* f *e* g *são inversas uma da outra.*

c) *Justificar que as funções* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *não são iguais.*

Máximos e mínimos

Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ possui um:

(a) máximo local em $x_0 \in X$ se
$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap X \, , \quad f(x) \leq f(x_0);$$

(b) máximo absoluto em $x_0 \in X$ se
$$\forall x \in X \, , \quad f(x) \leq f(x_0);$$

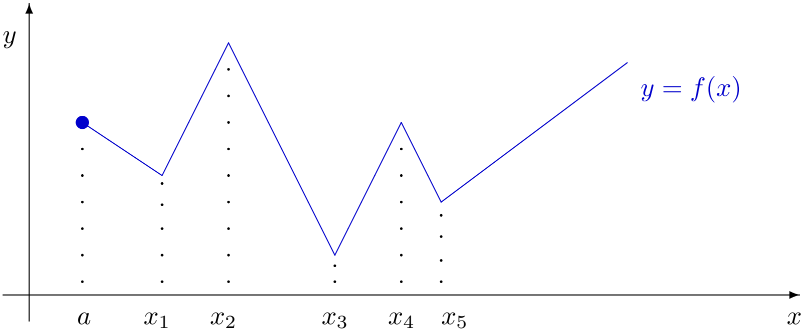
(c) mínimo local em $x_0 \in X$ se
$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap X \, , \quad f(x) \geq f(x_0);$$

(d) mínimo absoluto em $x_0 \in X$ se
$$\forall x \in X \, , \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Um ponto onde a função f atinge um extremo diz-se um ponto extremante de f, podendo tratar-se de um maximizante ou de um minimizante .

Exemplos

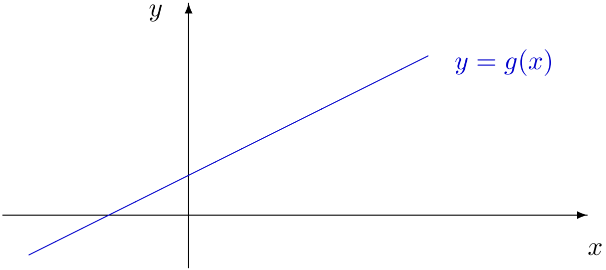
1. *Consideremos a função* f *definida em* $D = [a, +\infty[$, *cuja representação gráfica é*



A função f *possui máximos locais em* a, x_2 *e* x_4, *que são* $f(a)$, $f(x_2)$ *e* $f(x_4)$, *respetivamente. Não possui máximo absoluto. Possui mínimos locais em* x_1, x_3 *e* x_5, *que são* $f(x_1)$, $f(x_3)$ *e* $f(x_5)$, *respetivamente, e um mínimo absoluto em* x_3.

Exemplos

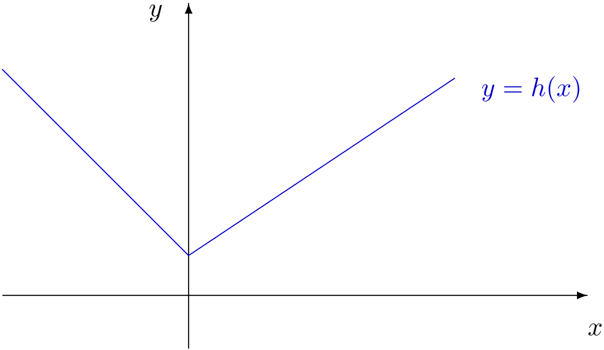
2. *Consideremos agora a função g definida em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica é*



A função g não possui extremos locais (nem absolutos).

Exemplos

3. *Seja agora a função h definida em $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica é*



A função h não possui máximos locais (nem absolutos) mas possui um mínimo absoluto na origem, que é $h(0)$.