CÁLCULO II - LEI

Um pequeno resumo da matéria para o 1º teste

LISA SANTOS

DERIVAÇÃO - FUNÇÕES ESCALARES; DERIVADAS PARCIAIS

Seja $f: Df \to \mathbb{R}$ uma função, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$. Seja $A=(a_1, \dots, a_n) \in Df$. A derivada parcial em ordem a x_i no ponto A, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ é a derivada no ponto a_i da função de uma só variável, $g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Mais precisamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Observe-se que as regras de derivação para as derivadas parciais em ordem a x_i de uma função escalar de várias variáveis são as mesmas que as das funções reais de uma variável real, uma vez que, no cálculo das derivadas parciais fixamos $n-1$ variáveis, obtendo, assim, uma função de uma única variável, em ordem à qual vamos derivar

Exemplo:

$$f(x,y,z) = xy^2 e^{xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xyz} + xy^2 \cdot yz e^{xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\, e^{xyz} + xy^2 \cdot xz\, e^{xyz} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy^2\, xy\, e^{xyz}$$

Seja $f: Df \to \mathbb{R}$ uma função, $Df \subseteq \mathbb{R}^2$. Seja $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ um ponto de Gef. Então os vetores $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ e $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$ são vetores tangentes ao gráfico de f e uma equação vetorial do <u>plano tangente</u> a Gef no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) + \mu \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

<u>NOTAÇÃO</u>: Dado $f: Df \to \mathbb{R}$ função, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in Df$,

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

<u>FUNÇÕES ESCALARES : DERIVADAS DIRECIONAIS</u>

Seja $f: Df \to \mathbb{R}$ uma função, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in Df$ e v um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que f tem <u>derivada direcional no ponto A segundo</u> (ou na direção de) <u>o vetor v</u>, se existir e for finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A + hv) - f(A)}{h} = f'(A; v)$$

↳ NOTAÇÃO

Observe-se que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = f'(A; e_i)$ sendo $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ o i-ésimo vetor da base canónica de $\mathbb{R}^n$.

↑ posição i

Seja $f: Df \to \mathbb{R}$, $Df \subseteq \mathbb{R}$, uma função real de variável real, derivável em $x_0 \in Df$. Sabemos que a reta tangente ao Grf em $(x_0, f(x_0))$ é a reta que passa nesse ponto e tem declive $f'(x_0)$. Podemos, assim, a cada declive $f'(x_0)$, fazer corresponder a reta de declive $f'(x_0)$ que passa na origem.

No caso em que estamos $(n=1)$, qualquer reta que passe na origem fica univocamente determinada pelo seu declive.

Com dimensões $n>1$, quando pretendermos definir um hiperplano que passa na origem, precisamos de conhecer n vetores linearmente independentes.

Esta é a razão pela qual a definição de derivada para funções de várias (mais do que uma) variáveis é mais complexa que a definição de derivada para funções de uma só variável.

Seja $f: Df \to \mathbb{R}$ função, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \in Df$. Diz-se que <u>f é derivável em A</u> se existir uma aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{X \to A} \frac{|f(X) - f(A) - L(X-A)|}{\|X - A\|} = 0$$

A derivada de f em A, denotada por $f'(A)$ é a aplicação linear

$$f'(A): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longmapsto L(X)$$

Observemos que a matriz de $f'(A)$ nas bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$ é

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$$

isto é, a matriz linha associada ao vetor gradiente, $\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$.

Note-se que:

$$f \text{ derivável em } A \Rightarrow \text{existem } \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, como foi verificado nas aulas.

Na realidade, temos o seguinte:

$$\begin{tikzcd}
f \text{ derivável em } A \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] \arrow[dd, Rightarrow, shift left, "/" marking] & \text{Existe } f'(A;v),\ \forall v \neq 0 \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
 & \text{Existe } \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "/" marking] \\
\text{Existem e são contínuas } \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ numa vizinhança de } A \arrow[uu, Rightarrow, shift left] &
\end{tikzcd}$$

<u>RESULTADO</u>: Se f é derivável em A então f é contínua em A

Quando as derivadas parciais de f são contínuas numa vizinhança do ponto $A \in Df$, temos:

$$f'(A): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

(havendo aqui um ligeiro abuso de notação, uma vez que o produto de uma matriz com 1 linha e n colunas por uma matriz com n linhas e 1 coluna é uma matriz com 1 linha e 1 coluna, que se identifica, naturalmente, a um número real).

Nesta situação temos

$$f'(A; v) = f'(A)(v)$$

derivada direcional de f, no ponto A, segundo o vetor v

Derivada de f no ponto A calculada em v.

Além disso, facilmente se verifica que

$$f'(A; v) = \nabla f(A) \cdot v$$

DERIVAÇÃO: FUNÇÕES VETORIAIS

Seja $f: Df \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$
$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

Como as funções $f_1, \ldots, f_m$ são escalares, calculamos, sem dificuldades,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

<u>A derivada direcional de f no ponto $A \in Df$,</u> <u>segundo a direção</u> de um vetor $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é agora um vetor de $\mathbb{R}^m$, dada por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A+hv) - f(A)}{h},$$

quando este limite existe e é finito

Define-se a <u>matriz jacobiana de f em A</u> do seguinte modo:

$$J_A f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(A) \quad \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(A) \end{pmatrix}$$

Note-se que $J_A f$ tem m linhas (número de funções componentes) e n colunas (número de variáveis)

Diz-se que f é <u>derivável em A</u> se existe uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \to A} \frac{\| f(x) - f(A) - L(x-A) \|}{\| x - A \|} = 0$$

A derivada de f em A, denotada por $f'(A)$, é a aplicação linear

$$f'(A) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto L(x)$$

A matriz de $f'(A)$, nas bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é $J_A f$.

Com um ligeiro abuso de notação, podemos dizer que

$$\begin{aligned} f'(A): \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto J_A f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Na realidade, $f'(A)(x)$ é um vetor coluna com m linhas, que identificamos naturalmente com um vetor de $\mathbb{R}^n$).

O esquema apresentado na página 4, que relaciona os conceitos de derivadas parciais, derivada direcional e derivada, é também verificado por funções vetoriais.

Igualmente, se f é derivável em A, então f é contínua em A

<u>NOTA</u>: Uma aplicação $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se linear se

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad L(x+y) = L(x) + L(y)$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(\lambda x) = \lambda L(x)$.