LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Teste 1, Versão A - 26/11/11**

Nome: ______________________________ **Número:** ________ **TP:** __

****
IMPORTANTE: *A duração do teste é de 1 hora e 20 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por seis exercícios. Os exercícios I - V devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VI deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*
****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	$(p \Leftrightarrow \neg p) \Leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	$((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee r))$

II. (1 valor) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$p: \quad \forall x \forall y \forall z \quad (x \geq 0 \wedge y \leq z) \Rightarrow xy \leq xz$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição p.

$$\exists x\, \exists y\, \exists z \quad (x \geq 0 \wedge y \leq z) \wedge (xy > xz)$$

III. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$ e $B = \mathbb{Z} \cup \{\{1, 2\}, (1, 2)\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	$\{(1, 2)\} \in B$
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	$\{(1, 2)\} \subseteq B \setminus A$
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	$\{1, 2\} \subseteq A$ e $\{1, 2\} \in B$
$\boxed{\times}$	$\boxed{}$	$A \cap B \in B$
$\boxed{}$	$\boxed{\times}$	$A \cap B \not\subseteq \mathbb{Z}$

IV. Sejam A, B, C três conjuntos tais que $A \cap B = B \setminus C$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
$\boxtimes$	$\square$	$A \cap B \cap C = \emptyset$
$\boxtimes$	$\square$	$\forall x \in B \quad x \notin C \Rightarrow x \in A$
$\square$	$\boxtimes$	$A \cap C = \emptyset$
$\boxtimes$	$\square$	$\forall x \in B \quad x \notin A \Rightarrow x \in C$

V. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N},\ X = \{x\}\}, \quad B = \{\emptyset, 1\} \quad \text{e} \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \in B\}.$$

Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (1 valor) $C = \{-1, 1\}$

(b) (1 valor) $B^2 = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 1), (1, \emptyset), (1, 1)\}$

(c) (1 valor) $\mathcal{P}(B) \cap A = \{\{1\}\}$

(d) (1 valor) $\mathcal{P}(C) \setminus A = \{\emptyset, \{-1\}, \{-1, 1\}\}$

VI. [**Resposta em folha separada**] Sejam A, B e C três conjuntos.

(a) (2,5 valores) Mostre que, se $A \setminus C \subseteq A \setminus B$, então $A \cap B \subseteq A \cap C$.

(b) (2 valores) **Justificando a sua resposta**, diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

$$\text{Se } C \subseteq A \times B \text{ então existem } X \subseteq A \text{ e } Y \subseteq B \text{ tais que } C = X \times Y.$$

Nome: ____ **Número:** _________ **TP:** __

****
IMPORTANTE: *A duração do teste é de 1 hora e 20 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por seis exercícios. Os exercícios I - V devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VI deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*
****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
☐	☒	$(q \Rightarrow p) \Rightarrow p$
☒	☐	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$
☒	☐	$(q \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg p)$
☐	☒	$(r \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow ((r \wedge p) \vee q)$
☒	☐	$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$

II. (1 valor) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$p: \quad \forall x \forall y \forall z \quad (x \geq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow xz \geq yz$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição p.

$$\exists x \, \exists y \, \exists z \quad (x \geq y \wedge z \geq 0) \wedge (xz < yz)$$

III. Considere os conjuntos $A = \mathbb{Z} \cup \{(1,3), \{1,3\}\}$ e $B = \{1, 3, \{1\}, \{3\}\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☒	☐	$\{(1,3)\} \subseteq A \setminus B$
☐	☒	$\{(1,3)\} \in A$
☒	☐	$\{1,3\} \in A$ e $\{1,3\} \subseteq B$
☐	☒	$A \cap B \not\subseteq \mathbb{Z}$
☒	☐	$A \cap B \in A$

IV. Sejam A, B, C três conjuntos tais que $A \cap C = C \setminus B$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
$\boxtimes$	$\square$	$\forall x \in C \quad x \notin B \Rightarrow x \in A$
$\square$	$\boxtimes$	$A \cap B = \emptyset$
$\boxtimes$	$\square$	$A \cap B \cap C = \emptyset$
$\boxtimes$	$\square$	$\forall x \in C \quad x \notin A \Rightarrow x \in B$

V. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{\emptyset, 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \in A\}, \quad \text{e} \quad C = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N},\ X = \{x\}\}.$$

Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (1 valor) $\qquad A^2 = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 4), (4, \emptyset), (4, 4)\}$

(b) (1 valor) $\qquad B = \{-2, 2\}$

(c) (1 valor) $\qquad \mathcal{P}(A) \cap C = \{\{4\}\}$

(d) (1 valor) $\qquad \mathcal{P}(B) \setminus C = \{\emptyset, \{-2\}, \{-2, 2\}\}$

VI. [**Resposta em folha separada**] Sejam A, B e C três conjuntos.

(a) (2,5 valores) Mostre que, se $A \setminus C \subseteq A \setminus B$, então $A \cap B \subseteq A \cap C$.

Seja $x \in A \cap B$. Por definição da interseção, temos $x \in A$ e $x \in B$. Logo podemos dizer que $x \notin A \setminus B$ pois, caso contrário, teriamos $x \in B$ e $x \notin B$. Como $A \setminus C \subseteq A \setminus B$ e $x \notin A \setminus B$ obtemos $x \notin A \setminus C$ pois, por contraposição, $A \setminus C \subseteq A \setminus B$ é equivalente à implicação $z \notin A \setminus B \Rightarrow z \notin A \setminus C$ onde z é um objecto qualquer. Como $x \notin A \setminus C$ e $x \in A$ podemos agora concluir $x \in C$ e assim obtemos $x \in A \cap C$.

Resolução alternativa:

Admitamos que $A \setminus C \subseteq A \setminus B$. Pretendemos mostrar que $A \cap B \subseteq A \cap C$. Uma vez que, para todo o objeto x,

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B &(1)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) &(2)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus B) &(3)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus C) &(4)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin C) &(5)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in C) &(6)\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in C) &(7)\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in C) &(8)\\
&\Rightarrow (x \in A \cap C) &(9)
\end{aligned}
$$

tem-se $A \cap B \subseteq A \cap C$.

Nota:
(1) Definição de interseção.
(2) Sendo p e q proposições, $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge \neg(p \wedge \neg q))$ é uma tautologia.
(3) Definição de complementação.
(4) Tem-se $A \setminus C \subseteq A \setminus B$. Então,

$$\forall x,\ x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A \setminus B,$$

o que, por contraposição, é equivalente a termos

$$\forall x,\ x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \setminus C.$$

(5) Definição de complementação.
(6) Sendo p e q proposições, $\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
(7) Propriedade distributiva da conjução relativamente à disjunção.
(8) Sendo p uma proposição, $p \wedge \neg p$ é o elemento neutro da disjunção.
(9) Definição de interseção.

(b) (2 valores) **Justificando a sua resposta**, diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

Se $C \subseteq A \times B$ então existem $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tais que $C = X \times Y$.

A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$ e $C = \{(1,3),(2,4)\}$. Então não existem $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tais que $C = X \times Y$. Com efeito, se admitirmos que existem conjuntos X e Y tais que $C = X \times Y$ segue que $\{1,2\} \subseteq X$ e $\{3,4\} \subseteq Y$, pelo que $\{(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)\} \subseteq X \times Y$ (o que contradiz $C = X \times Y$).