Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMA

Cálculo
LEI
2013/2014

Folha 5 - Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

Exercício 1 Seja f a função definida por $f(x) = x^2$.

a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

Exercício 2 Indique, justificando, se cada uma das funções definidas a seguir é derivável no respetivo domínio. Nos pontos onde não existir derivada, averigue se existem as derivadas laterais.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 3, \\ 3x & \text{se} \quad x \geq 3; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

Exercício 3 Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2+1} & \text{se} \quad x < 3, \\ -3x & \text{se} \quad x \geq 3; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ 2x^3 & \text{se} \quad 1 < x < 2, \\ 16 & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases}$

Exercício 4 Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que f e g são contínuas em 0.

b) Mostre que f não é derivável em 0.

c) Mostre que g é derivável em 0 e calcule $g'(0)$.

Exercício 5 Determine a expressão das derivadas das funções definidas por:

a) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{3}x$;

b) $f(x) = (x-3) \cdot (4-5x)$;

c) $f(x) = x^{100} \cdot (1+4x)$;

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$;

g) $f(x) = \dfrac{3x-1}{3-x^2}$;

h) $f(x) = x^{-10}$;

i) $f(x) = \sqrt{x} + x^4$;

j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

k) $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x}}$;

l) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

m) $f(x) = e^{2x} - x$;

n) $f(x) = \operatorname{sen} x + 3\cos x^2$;

o) $f(x) = \ln(x+2)$;

p) $f(x) = xe^x$;

q) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

r) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-4}$;

s) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$;

t) $f(x)=x^3e^{2x}$;

u) $f(x)=x\ln x$;

v) $f(x)=x\ln(x^2+x+1)$;

w) $f(x)=\operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

x) $f(x)=\operatorname{tg} x$;

y) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}+(\operatorname{sen} x)^2$.

Exercício 6 Determine a expressão das derivadas das funções definidas por:

a) $f(x)=3x\operatorname{arcsen}(\sqrt{x^2-1})$;

b) $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

c) $h(t)=t\operatorname{arcsen}(4t)$;

d) $i(t)=\operatorname{arctg}^2(7t)$;

e) $j(y)=\sqrt{\operatorname{sen} y}+\arccos\dfrac{1}{y}$;

f) $k(y)=\cos(\operatorname{arctg}(3y))$;

Exercício 7 Determine a expressão das derivadas das funções definidas por:

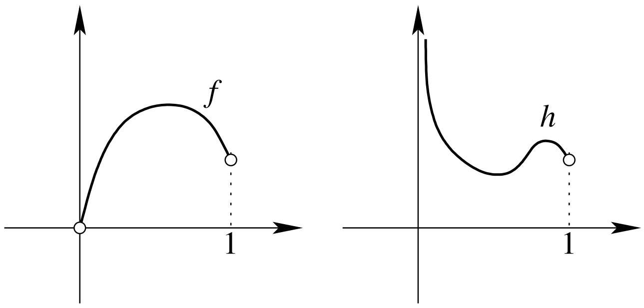
a) $f(x)=\operatorname{ch}(3x)$;

b) $g(x)=\operatorname{sh}(x^2+1)$;

c) $h(t)=t^2\operatorname{sh}^3 t$;

d) $i(t)=\ln(\operatorname{ch}(t+1))$.

Exercício 8 Considere as funções $f,h,i,j,k:]0,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ dadas a seguir pelos seus gráficos.

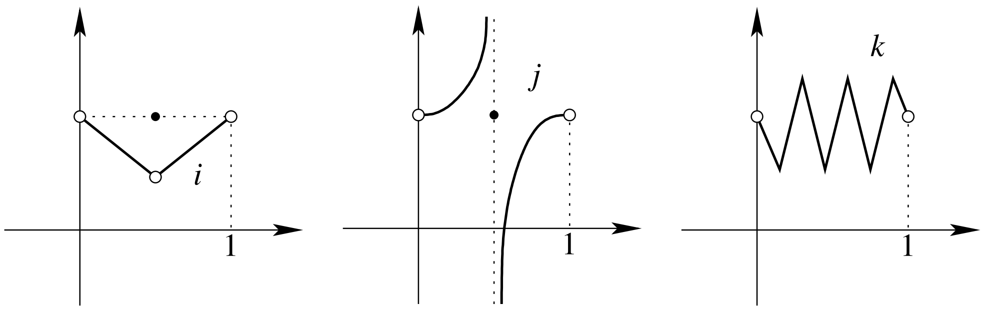


Indique as funções que:

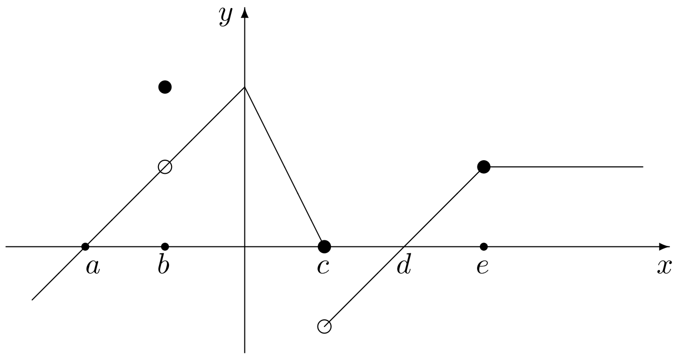
a) são deriváveis;

b) não são deriváveis em mais do que um ponto;

c) não são deriváveis apenas num ponto.

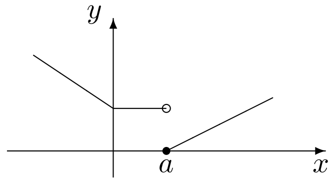


Exercício 9 Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ representada graficamente na figura seguinte.



Indique os pontos onde f não é derivável, especificando se existem as derivadas laterais e indicando o seu sinal.

Exercício 10 Esboce o gráfico da derivada da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representada na figura ao lado.



Exercício 11 Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e considere a seguinte tabela que mostra alguns dos seus valores e das correspondentes derivadas. Determine $h'(2)$ para:

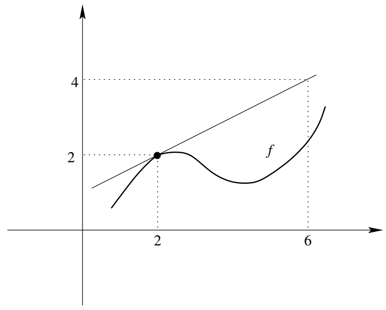
x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	5	5	e	$\sqrt{2}$
5	2	8	π	7

a) $h = f \circ g$;
b) $h = g \circ f$;
c) $h = f \circ f$.

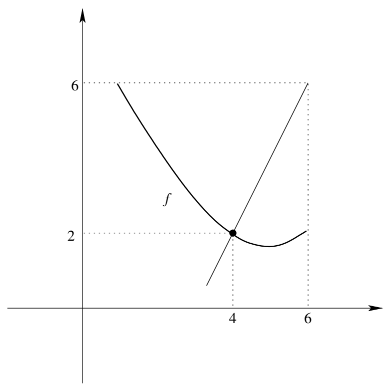
Exercício 12 Seja $k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $k'(1) = 2$. Determine a derivada de:

a) $k(2x)$, para $x = 1/2$; b) $k(x+1)$, para $x = 0$; c) $k\left(\frac{x}{4}\right)$, para $x = 4$.

Exercício 13 A figura em baixo representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(2, 2)$. Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, determine $g'(2)$.



Exercício 14 A figura em baixo representa o gráfico de uma função f e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto $(4, 2)$. Sendo $g(x) = f(5x - x^2)$, determine $g'(1)$.



Exercício 15 Diga, justificando devidamente, se existe alguma função $f\colon [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1, 2]$.

Exercício 16 Usando o teorema de Rolle, mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

Exercício 17 Mostre que o polinómio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

Exercício 18 Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.

b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $]-1, 1[$.

c) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

Exercício 19 Seja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x - e^{x-1}$.

a) Verifique que $g(1) = g'(1) = 0$.

b) Mostre que $z = 1$ é o único zero de g.

Exercício 20 Diga, justificando devidamente, se existe alguma função derivável $g\colon [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(0) = -3$, $g(5) = 5$ e $g'(x) \leq 1$ para todo $x \in]0, 5[$.

Exercício 21 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

b) Verifique que f é uma função derivável.

c) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f.

d) Determine o contradomínio de f.

Exercício 22 Calcule os seguintes limites, indicando, quando for o caso, o tipo de indeterminação presente:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$;

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$;

e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$;

f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x + \operatorname{sen} x}$;

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$;

h) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(5x))}{\ln(\operatorname{sen}(6x))}$;

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$.
