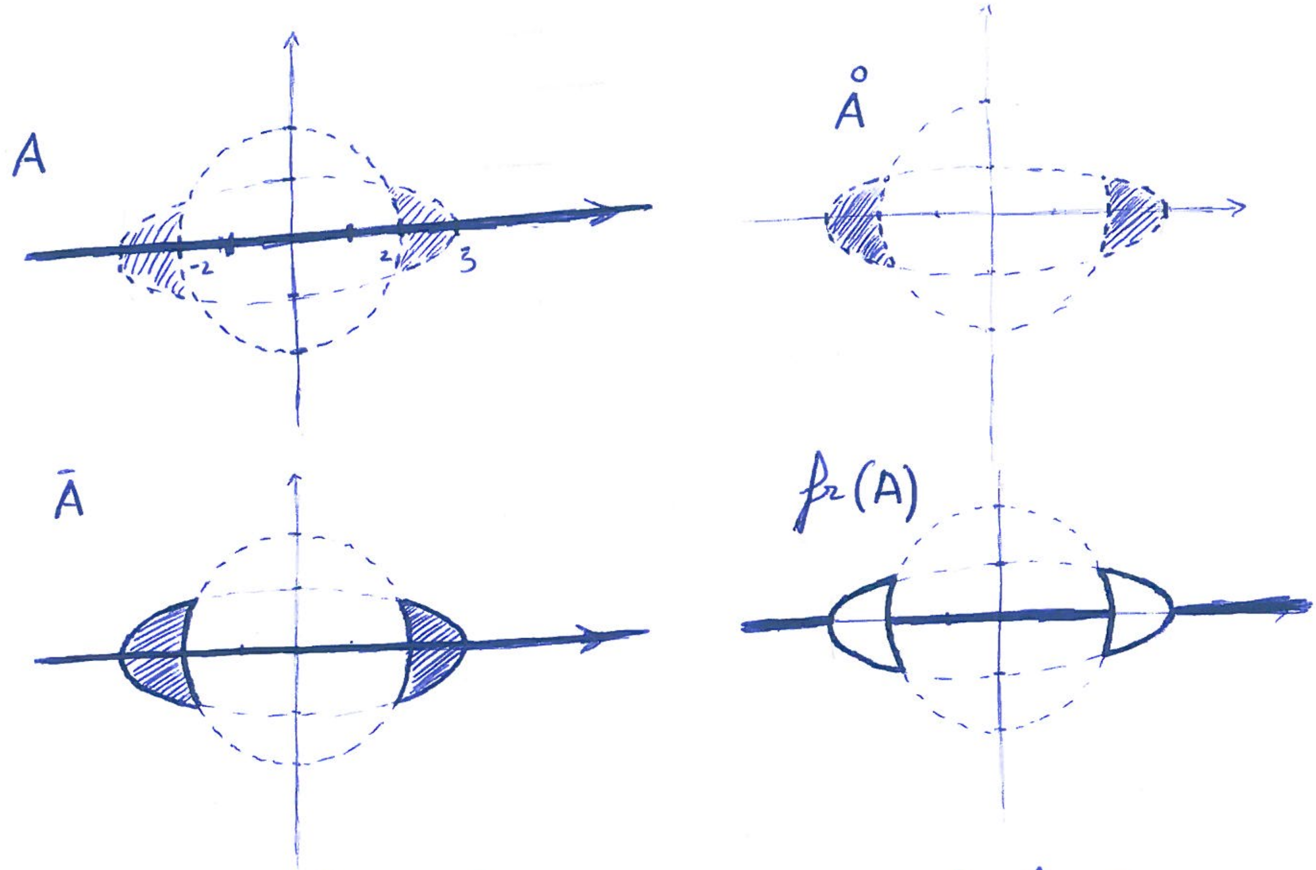
(1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>4 \text{ e } x^2+9y^2<9\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$

a)



b) Como $A\neq\mathring{A}$, conclui-se que o conjunto A não é aberto.

c) Tem-se que $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}\subseteq A$, logo não existem $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ e $r>0$ tais que

$$A\subseteq B((a,b),r).$$

Consequentemente A não é um conjunto limitado.

Ex2.

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{2x^4 + 3y^4}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{5x^4} = \frac{1}{5}$$

$\therefore$ não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ex. 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.5 a) f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, uma vez que é o quociente de funç. contínuas.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} f(0,0) = 0$$

$$0 \leq |f(x,y)| \overset{(x,y)\neq(0,0)}{=} \left| \frac{x^2y + xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| + \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \underbrace{|y| + |x|}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0}$$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ $\qquad$ f é contínua!

b) $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(2xy+y^2)(x^2+y^2) - 2x^2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{6-4}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x) \therefore \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{1}{2}$

$\nabla f(1,1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

c) $Df((0,0);(0,0)) = 0$

$(u,v) \neq (0,0) \Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h(u,v)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^3 uv(u+v)}{h^3(u^2+v^2)}$

$= \dfrac{uv(u+v)}{u^2+v^2}$.

d) f não é derivável em $(0,0)$, uma vez que $Df((0,0);(u,v))$ não é uma aplicação linear.

e) $z = f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \Leftrightarrow$

$z = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1) \Leftrightarrow$

$x + y - 2z = 0$.

4 $\quad g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (\underbrace{\operatorname{sen} x \cos y}_{g_1(x,y)}, \underbrace{2\cos x \operatorname{sen} y}_{g_2(x,y)})$

$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ derivável tal que

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 3x & 4xy \\ 4y & 3y^2 \end{bmatrix}$$

a) $$Jg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \cos y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ -2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & 2\cos x \cos y \end{bmatrix}$$

b) $$D(f\circ g)\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right) = Df\left(g\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\circ g\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right) =$$

$$= Df\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)\circ Dg\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$J(f\circ g)\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right) = Jf\left(\tfrac{1}{2},1\right)\cdot Jg\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J(f\circ g)\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}(v-u) \\ -u+v \end{bmatrix}$$

$$D(f\circ g)\left(\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \longmapsto \left(\tfrac{5}{4}(v-u),\ v-u\right)$$

ς

(5) $z e^{x-y} + z^3 = 2$

a) Considerando $g(x,y,z) = z e^{x-y} + z^3$, tem-se que a superfície $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z e^{x-y} + z^3 = 2 \}$ é a superfície de nível 2 da função g.

$P = (1,1,1)$ é um ponto da superfície S, logo $\nabla g(1,1,1)$ é um vector com sentido normal à superfície em P.

$$\nabla g(x,y,z) = \left(z e^{x-y}, -z e^{x-y}, e^{x-y} + 3z^2 \right)$$

$$\nabla g(1,1,1) = (1, -1, 4)$$

Equação vectorial da recta pedida:

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,-1,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Um ponto (x,y,z) pertence ao plano tangente a S em $P=(1,1,1)$ se e só se verifica a equação:

$$\left((x,y,z) - (1,1,1) \right) . (1,-1,4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 4z = 4.$$

Como o ponto $(1,-1,1)$ não verifica a equação

$$1 - (-1) + 4 \times 1 \neq 4,$$

conclui-se que $(1,-1,1)$ não pertence a plano tangente a S em P.

As respostas ao exercício 6 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 6. [4 valores] Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

a) Se qualquer curva de nível não vazia de uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é composta por retas, então o gráfico de f é um plano.

Falsa. As curvas de nível, por exemplo, da função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2$ são também retas mas o gráfico de f não é um plano (é um cilindro parabólico)

b) Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Designando por f_1 e f_2 as funções componentes de $\boldsymbol{f}$, se $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} f_2(x) = 2$, então $\boldsymbol{f}$ admite prolongamento contínuo a $\mathbb{R}$.

Verdade. Um exemplo de prolongamento contínuo de f a $\mathbb{R}$ é a função

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ (1,2), & x = 0. \end{cases}$$

c) Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + 2x_2 \cdots + nx_n$, então $Df(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1 + 2 + \cdots + n$.

Falso. A função f é um polinómio logo é derivável. Então

$$Df(a)(b) = \nabla f(a) \cdot b = (1 \ 2 \ \ldots \ n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = f(b)$$

ou

A função f é linear, logo é derivável e, em cada ponto a sua derivada coincide com a função: $Df(a)(b) = f(b)$.

d) Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(x,y) = y^3 + 8xy$ e $f_y(x,y) = 3xy^2 - 4x^2$.

Falso. Como f_x e f_y são polinómios, f também teria de ser um polinómio. Como tal é uma função C^∞. Em particular $f \in C^2$ e, pelo teorema de Schwarz, nestas condições ter-se-ia $f_{xy} = f_{yx}$.

Ora
$$f_{xy} = [y^3 + 8xy]'_y = 3y^2 + 8x$$
$$f_{yx} = [3xy^2 - 4x^2]'_x = 3y^2 - 8x$$
$\neq$

Logo não existe tal função.