Primitivas e integrais indefinidos

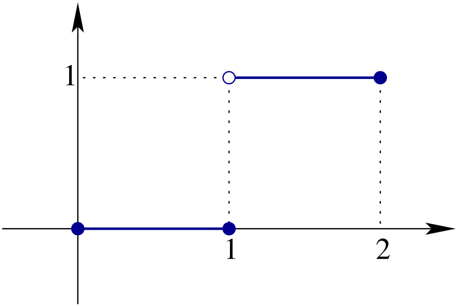
A primitivação é uma operação efectuada num subconjunto do conjunto das funções reais de variável real e corresponde, num certo sentido, à operação inversa da operação de derivação.

Definição

Seja X uma união finita de intervalos de $\mathbb{R}$. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diz-se que uma função $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **primitiva** *de f se F for derivável e $F' = f$. Diz-se que a função f é* **primitivável** *se f admitir uma primitiva.*

Exemplo A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$ é primitivável, visto que $F(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de f.

Exemplo A função $g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 0$ se $x \in [0,1]$, $g(x) = 1$ se $x \in]1,2]$ não é primitivável.



Nota

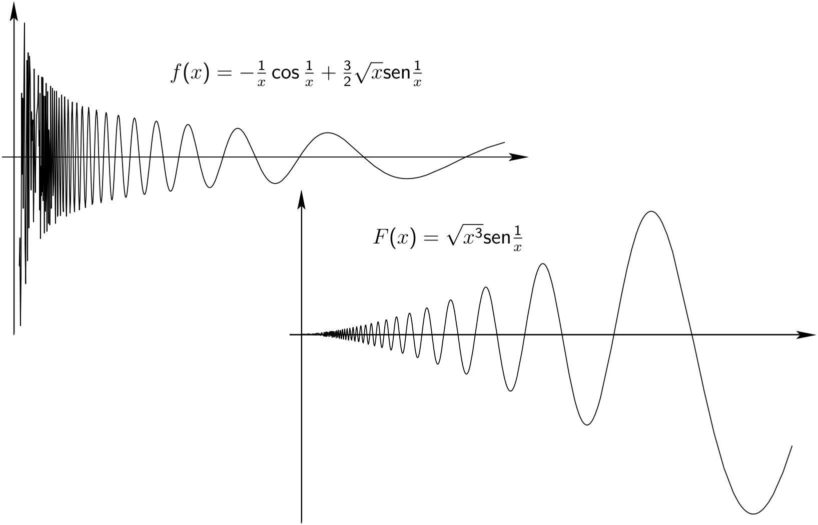
Recordar o Teorema de Darboux.

Exemplo A função g do exemplo anterior é descontínua e não admite primitiva. Vejamos agora o exemplo de uma função descontínua que admite primitiva. A função

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \,]0,1] \end{cases} \end{array}$$

admite primitiva

$$\begin{array}{rccl} F: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \sqrt{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \,]0,1]. \end{cases} \end{array}$$



Nota

Veremos mais tarde que qualquer função contínua é primitivável.

Teorema

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então

$$G \text{ é primitiva de } f \iff \exists\, C \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in I \qquad G(x) = F(x) + C.$$

Definição

Seja f uma função definida num intervalo, primitivável, e F uma sua primitiva. Ao conjunto de todas as primitivas de f chamamos **integral indefinido** *de f e denotamo-lo por $\int f(x)\,dx$, escrevendo, normalmente,*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Algumas propriedades dos integrais indefinidos

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções primitiváveis, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $f + g$ e λf são primitiváveis e:

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$;
- $\displaystyle\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$.

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e suponhamos que $g(J)) \subseteq I$. Então f' e $(f' \circ g) \cdot g'$ são primitiváveis e:

- $\displaystyle\int f'(x)\, dx = f(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$.

Integração imediata

- $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$
- $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
- $\displaystyle\int f^\alpha(x) f'(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

- $\int \mathrm{sen} x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \mathrm{sen} x + C$
- $\int \mathrm{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \mathrm{cotg} x \, dx = \ln|\mathrm{sen} x| + C$
- $\int \mathrm{sh} x \, dx = \mathrm{ch} x + C$
- $\int \mathrm{ch} x \, dx = \mathrm{sh} x + C$
- $\int \mathrm{th} x \, dx = \ln(\mathrm{ch} x) + C$
- $\int \mathrm{coth} x \, dx = \ln(|\mathrm{sh} x|) + C$

Integração por partes

Teorema

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Então é válida a seguinte

fórmula de integração por partes

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Integrais do tipo $\int \text{sen}^n x \cos^m x \, dx, \; n, \; m \in \mathbb{N}_0$

Vamos separar o cálculo dos integrais deste tipo em vários casos:

- se $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ (isto é, n é ímpar) então

  $$\int \text{sen}^n x \cos^m x \, dx = \int \text{sen} x \; (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x \, dx$$

  que pode ser decomposto numa soma finita de integrais do tipo

  $$a \int \text{sen} x \cos^l x \, dx, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } l \in \mathbb{N}_0,$$

  integrais que são imediatos.
- se $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}_0$ (isto é, m é ímpar), procede-se de modo análogo, atribuindo à função cos o papel atribuído à função sen no item anterior;

- se $n = 2k$ e $m = 2l$, sendo $k, l \in \mathbb{N}_0$, não simultaneamente nulos, então, como

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2},$$

temos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x \ \cos^m x \, dx &= \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^k \left(\cos^2 x\right)^l \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^k \left(\frac{\cos(2x) + 1}{2}\right)^l \, dx;\end{aligned}$$

O cálculo deste último integral reduz-se ao de uma soma de integrais do tipo dos do segundo ou do terceiro itens. Os do segundo item calculam-se imediatamente; para resolver os do terceiro item, nota-se que os expoentes são agora menores e procede-se do mesmo modo, isto é, utilizam-se as fórmulas de duplicação do ângulo. Obviamente, este processo termina necessariamente, chegando ou a integrais do tipo do segundo item ou a integrais do tipo $a \int \cos(2^r x) \, dx$.

Integração de fracções racionais

Integração por substituição

Teorema

Sejam I *um intervalo de* $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função que admite primitiva* F. *Sejam* J *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $\varphi : J \longrightarrow I$ *uma função bijectiva, derivável, cuja derivada não se anula. Então* $\Phi = F \circ \varphi$, *é uma primitiva de* $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *e é válida a seguinte*

fórmula de integração por substituição ou mudança de variável

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Integração por substituição

Nota

Para se calcular o integral $\int f(x)\,dx$*, fazendo a mudança de variável* $x = \varphi(t)$*, procede-se do seguinte modo:*

1. *a função que nos dá a mudança de variável,* φ*, deve ser uma função regular (deve admitir, pelo menos, primeira derivada). Se a sua derivada for não nula num ponto, e se a derivada for contínua, podemos garantir que há um intervalo que contém o ponto onde a derivada não se anula. Admitimos assim que tudo é feito num certo intervalo onde as condições do Teorema são verificadas;*
2. *ao considerarmos a mudança de variável* $x = \varphi(t)$ *escrevemos que "*$dx = \varphi'(t)\,dt$*". Esta forma de escrever, aparentemente sem sentido, tem um significado matemático claro e a sua utilização permite simplificar alguns cálculos.*

Integrais do tipo $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$:

Faz-se a mudança de variável $x = a\,\mathrm{sen}t$ (ou $x = a\,\cos t$).

Integrais do tipo $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$:

Faz-se a mudança de variável $x = a\,\mathrm{sh}t$ (em certos casos também resulta a substituição $x = a\,\mathrm{tg}t$).

Integrais do tipo $\int R(\mathrm{sen}x, \cos x)\, dx$:

Faz-se a mudança de variável $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Expressando $\mathrm{sen}x$, $\cos x$ em função da variável t e e dx em função de t e de dt, obtemos:

$$t = \mathrm{tg}\tfrac{x}{2}; \qquad x = 2\mathrm{arctg}t;$$

$$\mathrm{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$