1. (2 valores) Considere o problema com valores iniciais

$$x' = t\cos(t^2), \quad x(0) = 0.$$

   (a) Determine a solução do problema.

   (b) Represente graficamente a solução da alínea anterior.

2. (1 valor) Indique uma EDO de 1^a ordem para a qual $f(t) = e^{2t}$ é solução.

3. (4 valores) Considere a EDO

$$tx\frac{dx}{dt} = 2t^2 + 3x^2, \quad t \neq 0 \tag{1}$$

   (a) Use a mudança de variável $u = \dfrac{x}{t}$ para transformar a equação anterior em

$$t\frac{du}{dt} = \frac{2}{u} + 2u.$$

   (b) Resolva a equação da alínea anterior.

   (c) Determine a solução geral da EDO (1) e indique o intervalo máximo de existência da sua solução.

4. (3,5 valores) Alguém desligou o meu computador. Para encontrar o culpado, medi a temperatura T do computador às 18h, obtendo 50^o, e às 19h, obtendo 40^o. Sei que o computador trabalha a 70^o e assumo que o arrefecimento obedece à lei de Newton:

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_0,$$

   onde $k > 0$ é uma constante e T_0 a temperatura ambiente que se manteve nos 20^o. A video-vigilância mostrou que estiveram no meu gabinete: o Wittgenstein às 10.15h, o Habermas às 12.30h, o Descartes às 14.45h, o Sócrates às 16.45h e o Chomsky às 17.35h. Qual deles é o culpado?

5. (2 valores) Escreva uma EDO de 2^a ordem para a qual $f(t) = e^t + 2e^{-t}$ é solução.

6. (4,5 valores) Considere a EDO linear de 2^a ordem

$$x'' + x' - 6x = 36t \tag{2}$$

   (a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente, i.e. da equação $x'' + x' - 6x = 0$.

   (b) Determine uma solução particular de (2) na forma $x_p(t) = At + B$.

   (c) Use as alíneas anteriores para escrever a solução geral de (2). Justifique cuidadosamente.

7. (3 valores) A equação do oscilador harmónico livre é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0$$

   onde $\lambda^2 = k/m$, com k a constante elástica e m a massa do corpo em oscilação. Determine a solução da equação com as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ e, em seguida, mostre que a solução encontrada pode ser escrita na forma

$$x(t) = A\cos(\lambda t - \phi)$$

   onde A e ϕ são constantes reais. [Use a identidade $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$].