

Capítulo 1 - Funções reais de variável real

1.3 Continuidade

Vamos agora tratar a noção de **continuidade** que, como sabemos, está extremamente relacionada com o conceito de limite. Faremos primeiro uma abordagem sobre a continuidade pontual, isto é sobre a continuidade do ponto de vista **local**, e passaremos depois a um tratamento **global**, onde nos interessaremos pelas propriedades das funções contínuas em intervalos.

Definições e exemplos

Descontinuidades

Continuidade lateral

Propriedades sobre a continuidade pontual

Resultados sobre funções contínuas

Definições e exemplos

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diz-se que f é contínua em a quando

$$a \text{ é ponto isolado de } D \quad \text{ou} \quad a \in D' \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Simbolicamente, traduz-se a continuidade de f em a escrevendo

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : (x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon) \implies |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Diz-se ainda que:

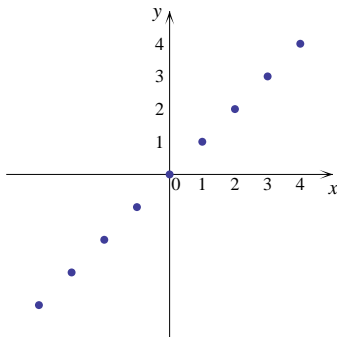
- ▶ f é contínua em A , com $A \subset D$, quando f é contínua em todo o ponto $a \in A$;
- ▶ f é contínua quando f é contínua em todo o domínio D .

Definições e exemplos

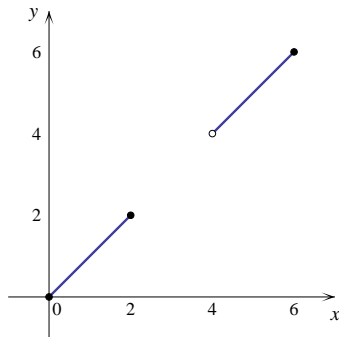
Exemplos

1. As funções f e g definidas a seguir são contínuas.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} g : [0, 2] \cup]4, 6] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$



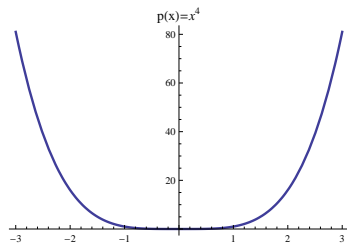
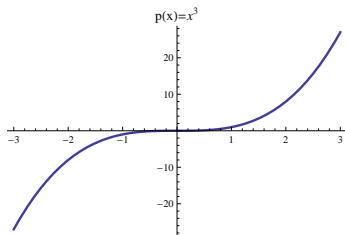
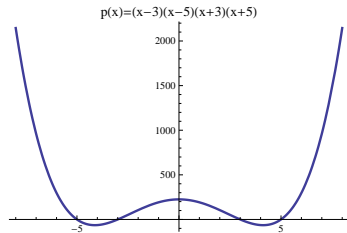
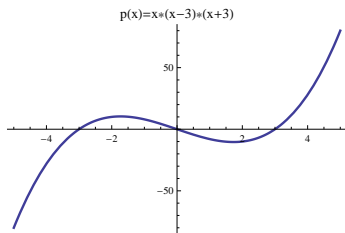
Definições e exemplos

2. Toda a função polinomial, $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como segue, é contínua

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

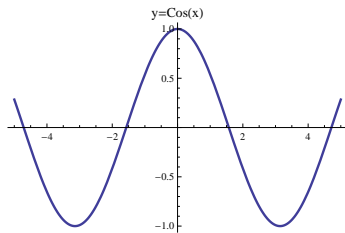
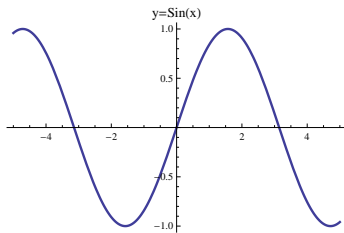
Em particular, toda a função constante é contínua.

Definições e exemplos



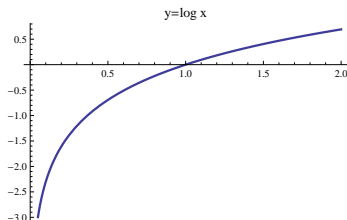
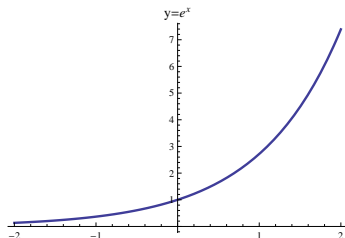
Definições e exemplos

3. As funções seno e cosseno são contínuas.



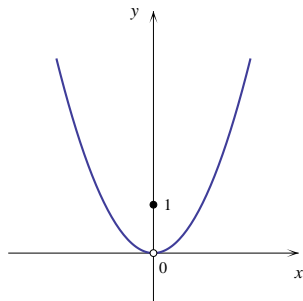
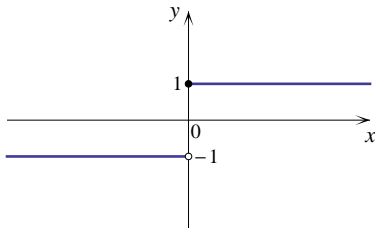
Definições e exemplos

4. As funções definidas por $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, são contínuas.



Definições e exemplos

5. A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6. A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Descontinuidades

Da definição de continuidade, uma função $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma **descontinuidade no ponto** $a \in D$ quando se verificar uma das duas condições seguintes:

- $a \in D'$ e não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- $a \in D'$, existe $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mas $\ell \neq f(a)$.

Diz-se, em particular, que f possui uma **descontinuidade removível**, quando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \ell \neq f(a),$$

caso em que, modificando o valor da função no ponto a , seria possível remover a descontinuidade, e que possui uma **descontinuidade de salto**, quando

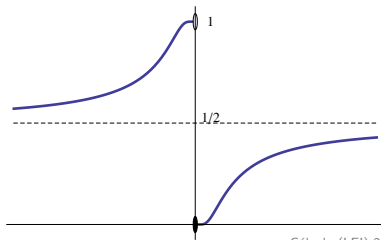
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell_2 \quad \wedge \quad \ell_1 \neq \ell_2.$$

Descontinuidades

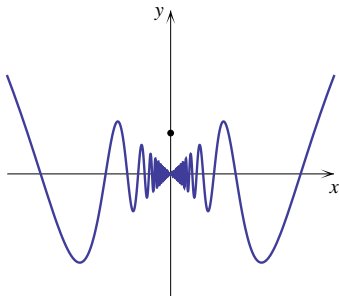
As funções apresentadas a seguir possuem uma descontinuidade na origem. Trata-se de uma **descontinuidade removível** no caso da função ℓ e de uma **descontinuidade de salto** no caso da função j .

Exemplos

$$1. \quad j(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$2. \quad \ell(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1/10 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Continuidade lateral

A continuidade lateral é uma noção que assume algum interesse quando estão em causa pontos de acumulação do domínio da função, já que no caso de pontos isolados, a função é trivialmente contínua, pela própria definição. Assim, diz-se que uma função $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é

- ▶ **contínua à direita** no ponto $a \in D \cap D'_+$ quando

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a);$$

- ▶ **contínua à esquerda** no ponto $a \in D \cap D'_-$ quando

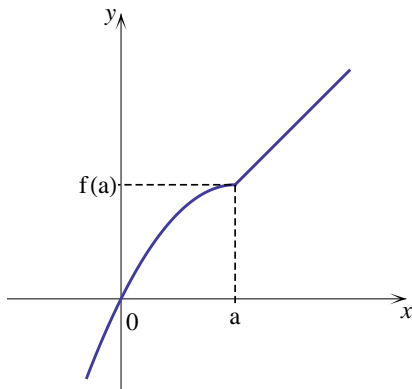
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Observação

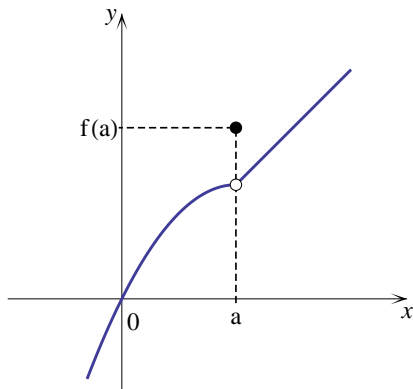
É óbvio que uma função f é contínua em $a \in D \cap D'$ se e só se f é contínua à direita e à esquerda no ponto a .

Continuidade lateral

Exemplos



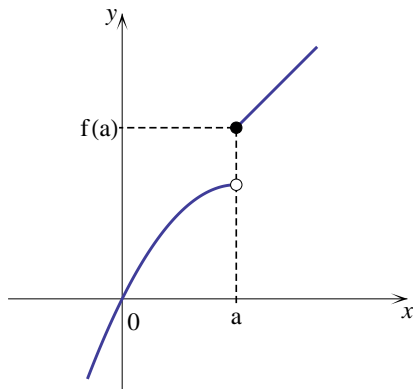
(a) f é contínua em a



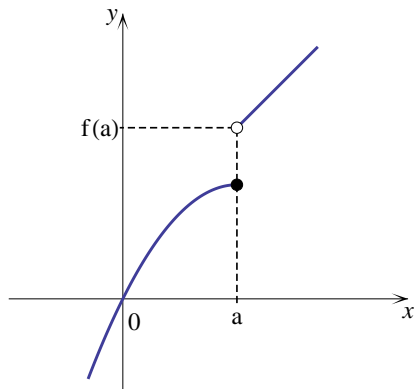
(b) f é descontinua bilateral em a

Continuidade lateral

Exemplos



(c) f é contínua à direita de a



(d) f é contínua à esquerda de a

Propriedades sobre a continuidade pontual

A partir da definição de função contínua num ponto e dos resultados apresentados sobre o limite de funções, extraem-se os resultados seguintes.

Teorema

[Continuidade de restrições]

Se $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$, então qualquer restrição de f a um subconjunto do domínio que contenha a é também contínua em a .

Teorema

[Limitação de funções contínuas]

*Se $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua** em a , então f é **limitada** em alguma vizinhança de a , i.e.*

$$\exists \varepsilon > 0, \exists M > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in D \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

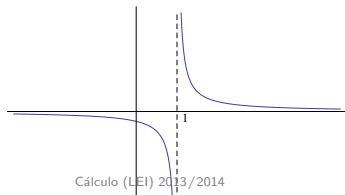
Propriedades sobre a continuidade pontual

Observação

Do último resultado sai que se uma função f se torna ilimitada em qualquer vizinhança de certo ponto a então f não pode ser contínua em a . É o caso da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ k & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

onde k é uma constante arbitrária. Independentemente do valor de k , f não é contínua na origem, pelo facto se se tornar ilimitada em qualquer vizinhança de $a = 1$.



Propriedades sobre a continuidade pontual

Teorema

[Aritmética de funções contínuas]

Sejam $f, g: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in D$. Então as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ são contínuas em a e a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a , desde que $g(a) \neq 0$.

Observação

Deste teorema segue, em particular, que se f é contínua em a , então também são contínuas em a as funções kf , com k uma constante real, e ainda $\frac{1}{f}$, desde que $f(a) \neq 0$.

Propriedades sobre a continuidade pontual

Teorema

[Continuidade da função composta]

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(D) \subset B$.

Se f é contínua em $a \in D$ e g é contínua em $f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a .

Observação

O Teorema anterior estabelece que a composta de duas funções contínuas é uma função contínua. No entanto, ainda que f ou g não sejam contínuas, pode acontecer que a composta seja contínua.

Resultados sobre funções contínuas

As funções contínuas em conjuntos “especiais” possuem propriedades fortes, que passamos agora a apresentar.

Teorema

[Teorema de Weierstrass]

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é limitada e atinge os seus extremos em $[a, b]$, isto é,

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta), \quad \forall x \in [a, b].$$

Observações

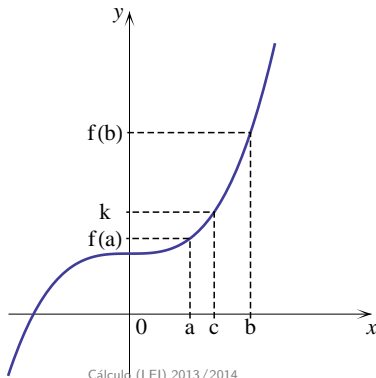
- ▶ Consideremos a função $f(x) = x$, $x \in]0, 5]$, que não atinge mínimo. Isto acontece porque $]0, 5]$ não é fechado.
- ▶ Consideremos a função $g(x) = x$, $x \in [0, +\infty[$, que não atinge máximo. Isto acontece porque $[0, +\infty[$ não é limitado.

Resultados sobre funções contínuas

Teorema

[Teorema do valor intermédio (Bolzano-Cauchy)]

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função *contínua* tal que $f(a) \neq f(b)$. Se k é um número real estritamente compreendido *entre* $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.



Resultados sobre funções contínuas

Corolário

[Teorema de Bolzano]

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $f(a)f(b) < 0$ então existe $c \in]a, b[$ para o qual $f(c) = 0$.

Corolário

Se $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e I é um intervalo de \mathbb{R} , então $f(I)$ é um intervalo.

Resultados sobre funções contínuas

Observações

1. *O primeiro corolário estabelece que uma função contínua num intervalo fechado e limitado não muda de sinal sem se anular (não diz qual é o ponto onde a função se anula nem quantas vezes se anula).*
2. *É fundamental que o domínio de f seja um intervalo. Consideremos a função*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, 0] \\ 1 & \text{se } x \in [1, 3], \end{cases}$$

que é contínua mas que muda de sinal sem se anular. Isto acontece precisamente porque o seu domínio não é um intervalo.

Resultados sobre funções contínuas

3. É fundamental que f seja contínua.

Consideremos a função

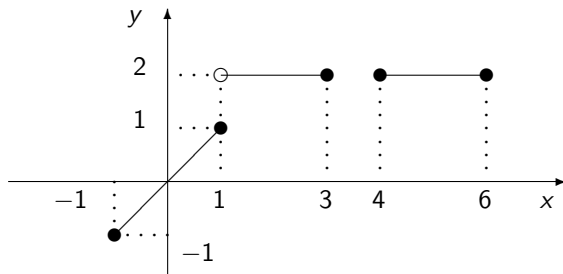
$$g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in [-2, 0[\cup]0, 2] \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

que está definida num intervalo e que muda de sinal sem se anular. Isto acontece porque g não é contínua.

Resultados sobre funções contínuas

4. Claro que a função pode não ser contínua nem estar definida num intervalo e, no entanto, anular-se sempre que muda de sinal. É o que acontece, por exemplo, com

$$k(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2 & \text{se } x \in]1, 3] \cup [4, 6] \end{cases}$$



mas o primeiro corolário não se refere a estes casos.

Resultados sobre funções contínuas

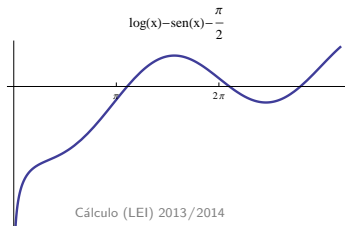
Exemplo

Vejamos que a equação $\ln x = \sin x + \frac{\pi}{2}$ possui uma raiz no intervalo $]\pi, 2\pi[$.

De facto, considerando a função contínua definida por

$$f(x) = \ln x - \sin x - \frac{\pi}{2}, \quad x \in [\pi, 2\pi],$$

tem-se $f(\pi) < 0$ e $f(2\pi) > 0$. Logo (teorema do valor intermédio) existe $c \in]\pi, 2\pi[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja tal que $\ln c = \sin c + \frac{\pi}{2}$.

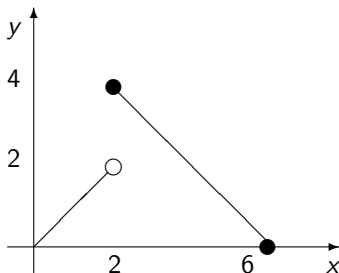


Resultados sobre funções contínuas

Do segundo corolário sai que uma função contínua transforma um intervalo I noutro intervalo $f(I)$.

Esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas. De facto, por exemplo, para a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 6 - x & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



tem-se $I = [0, 6]$, $f(I) = [0, 4]$ e, no entanto, f não é contínua.

Resultados sobre funções contínuas

Vejamos agora o que acontece, quanto à continuidade, à inversa de uma função contínua.

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow f(D)$ contínua e bijetiva.

Define-se a inversa, $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$, que pode não ser contínua.

É o caso da função g e da sua inversa,

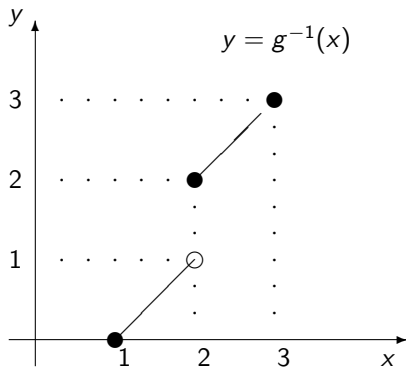
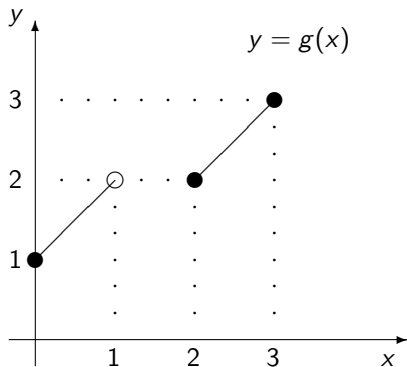
$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

e

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

A função g é contínua e bijetiva e a g^{-1} não é contínua.

Resultados sobre funções contínuas



No entanto, se f for bijetiva e contínua num intervalo, então a inversa também é contínua.

Teorema

[Continuidade da função inversa]

Seja $f: I \rightarrow J$ uma função *contínua* e bijetiva no intervalo I . Então a sua inversa, $f^{-1}: J \rightarrow I$, é *contínua*.