Ilustração de algumas situações

(1) Soluções óptimas alternativas

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 6x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq \emptyset$$

Resolução pelo método das 2 fases

I FASE

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2		
S_1	1	3	-1	0	1	0	3	(1)
S_2	4	6	0	-1	0	1	8	(8/6)
	0	0	0	0	1	1	0	
$-1*(S_1)$	-1	-3	1	0	-1	0	-3	
$-1*(S_2)$	-4	-6	0	1	0	-1	-8	
	-5	-9	1	1	0	0	-11	

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
x_2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	1
S_2	2	0	2	-1	-2	1	2
	-2	0	-2	1	3	0	-2

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
x_2	0	1	$-2/3$	$1/6$	$2/3$	$-1/6$	$2/3$
x_1	1	0	1	$-1/2$	-1	$1/2$	1
	0	0	0	0	1	1	0

1ª solução básica encontrada $x_1 = 1,\ x_2 = 2/3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

II FASE

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$-2/3$	$1/6$	$2/3$
x_1	1	0	1	$-1/2$	1
	2	3	0	0	0
$-3*(x_1)$	0	-3	2	$-1/2$	-2
$-2*(x_2)$	-2	0	-2	1	-2
	0	0	0	$1/2$	-4

Solução óptima encontrada

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$-2/3$	$1/6$	$2/3$
x_1	1	0	1	$-1/2$	1
	0	0	0	$1/2$	-4

Existem, no entanto, outras soluções básicas alternativas que podem ser encontradas introduzindo x_3 na base.

De notar que o valor da função objectivo não se irá alterar.

Solução alternativa

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$2/3$	1	0	$-1/6$	$4/3$
x_3	1	0	1	$-1/2$	1
	0	0	0	$1/2$	-4

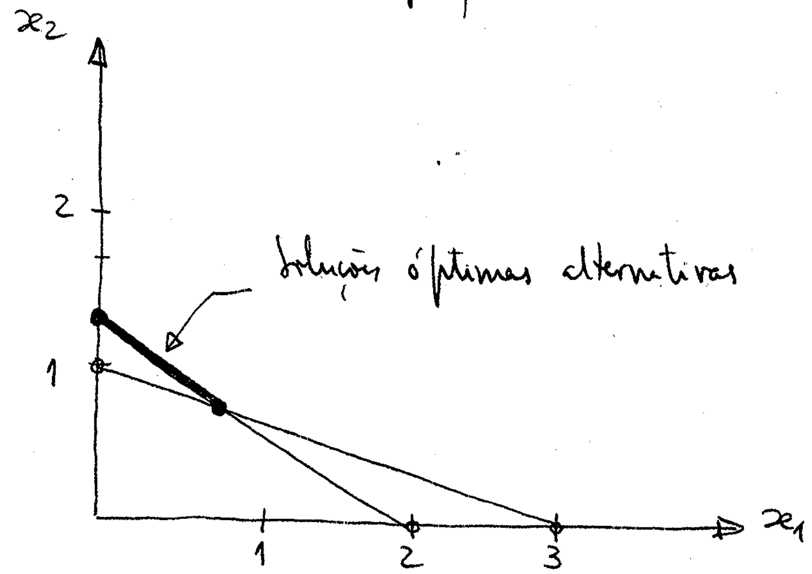
Se introduzirmos x_1 na base, voltamos à solução óptima anterior.

As soluções dos quadros (soluções básicas) são vértices do domínio definido pelas restrições. A aresta que une esses dois pontos é também uma solução óptima.

Expressão das soluções óptimas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \; 0 \leq \alpha \leq 1$$

Interpretação gráfica



① Apendice

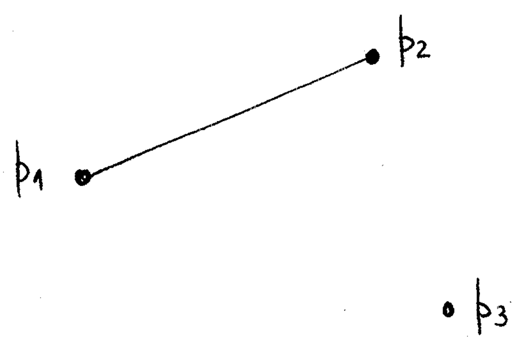
No espaço a duas dimensões, o conjunto de pontos $-p$ que une os pontos p_1 e p_2 pode ser dado através da seguinte expressão:

$$p = \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 \ , \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Se $\alpha = 0$, temos o ponto p_2,
$\alpha = 1$, temos o ponto p_1,
$0 < \alpha < 1$, temos os pontos intermédios.

Este conjunto de pontos, no caso de um domínio SIMPLEX convexo é uma aresta.

No espaço a três dimensões, se existirem 3 pontos óptimos (i.é, 3 vertices do domínio convexo) então o espaço de soluções óptimas será um plano, limitado pelas arestas que unem os três pontos.
Sejam p_1, p_2 e p_3 esses 3 pontos.



A expressão

$p_a = \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2$ dá-nos um ponto pertencente à aresta que une p_1 a p_2

A expressão

$p = \beta p_a + (1-\beta) p_3$ dá-nos um ponto pertencente ao segmento de recta que une o ponto p_3 ao ponto p_a; o ponto p_a depende evidentemente do valor de α e pode ser um ponto qualquer desde p_1 até p_2.

Assim a expressão

$$p = \beta \left(\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 \right) + (1-\beta) p_3$$ é o espaço

de soluções óptimas alternativas que procurávamos.

Ex: