Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMA

2º Teste
Exemplo de Teste

Cálculo
LEI
2013/2014

Duração: 90 minutos

Nome: **Número:**

Grupo I

Para cada questão deste grupo, assinale qual das afirmações é verdadeira. Cada resposta certa vale 1.5 valores; nenhuma afirmação selecionada vale 0 valores; cada resposta errada ou nula vale -0.5 valores. A cotação mínima neste grupo é de 0 valores.

Questão 1 Considere a função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\cos x & \text{se} \quad \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$.

Então o valor de $\int_0^\pi f(x)\,dx$ é igual a

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.

Questão 2 Seja $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 4$ e $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -1$. Então o valor de $\int_0^1 (f(x) + 2)\,dx$ é igual a

a) 7. b) 5. c) 6. d) 4.

Questão 3 Dos seguintes integrais apenas um é um integral impróprio. Qual?

a) $\int_{-1}^0 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$.

b) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$.

c) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$.

d) $\int_1^2 \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$.

Questão 4 A série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right)$ é

a) divergente.

b) convergente para 0.

c) convergente para 1/2.

d) convergente para 2/3.

Questão 5 Sejam $u_n = \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}}$ e $v_n = \frac{\sqrt{n}+n}{n^3}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são convergentes.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são divergentes.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente.

Questão 6 Considere as seguintes afirmações sobre séries numéricas.

A. Se $(u_n)_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

B. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente, então $\lim_n u_n \neq 0$.

a) **A** e **B** são verdadeiras;

b) **A** é verdadeira e **B** é falsa;

c) **A** é falsa e **B** é verdadeira;

d) **A** e **B** são falsas.

Grupo II

Responda, no próprio enunciado, às seguintes questões indicando os cálculos que tiver que efetuar bem como as respetivas justificações.

Questão 7 Calcule o integral

$$\int_0^1 x^2 \ln(x^2+1)\, dx.$$

Questão 8 Usando a substituição $y = \sqrt[3]{x}$, calcule o integral

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x^2})\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Questão 9 Considere a região do plano

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge y \leq 3x \wedge y \leq 4 - x^2\}.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) Calcule a área da região R.

Questão 10 Diga se o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

é convergente ou divergente e, em caso de convergência, determine o seu valor.

Questão 11 Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

é convergente mas não é absolutamente convergente.

Questão 12 Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n}.$$

a) Justifique porque é que a série é convergente para $x = 1$ e divergente para $x = 3$.

b) Determine o intervalo de convergência da série.

Questão 13 Escreva o polinómio $x^3 - 15x^2 + 75x - 120$ em potências de $x - 5$.

(FIM)