introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios da folha autómatos celulares elementares — dois

1.

Sejam Φ', Φ regras de transição com códigos de Wolfram $\mathsf{N}_{\phi'} = (d'_7d'_6d'_5d'_4d'_3d'_2d'_1d'_0)_2$ e $\mathsf{N}_{\phi} = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
d'_7 &= \phi'(1,1,1) & d_7 &= \phi(1,1,1)\\
d'_6 &= \phi'(1,1,0) & d_6 &= \phi(1,1,0)\\
d'_5 &= \phi'(1,0,1) & d_5 &= \phi(1,0,1)\\
d'_4 &= \phi'(1,0,0) & d_4 &= \phi(1,0,0)\\
d'_3 &= \phi'(0,1,1) & d_3 &= \phi(0,1,1)\\
d'_2 &= \phi'(0,1,0) & d_2 &= \phi(0,1,0)\\
d'_1 &= \phi'(0,0,1) & d_1 &= \phi(0,0,1)\\
d'_0 &= \phi'(0,0,0) & d_0 &= \phi(0,0,0)
\end{aligned}$$

Ora, se Φ e Φ' são equivalentes por conjugação, sabemos que $\Phi'(\bar{\mathsf{C}}) = \overline{\Phi(\mathsf{C})}$, para qualquer configuração C. Deste modo, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
d'_7 &= \phi'(1,1,1) = \phi'(\bar0,\bar0,\bar0) = \overline{\phi(0,0,0)} = \bar d_0\\
d'_6 &= \phi'(1,1,0) = \phi'(\bar0,\bar0,\bar1) = \overline{\phi(0,0,1)} = \bar d_1\\
d'_5 &= \phi'(1,0,1) = \phi'(\bar0,\bar1,\bar0) = \overline{\phi(0,1,0)} = \bar d_2\\
d'_4 &= \phi'(1,0,0) = \phi'(\bar0,\bar1,\bar1) = \overline{\phi(0,1,1)} = \bar d_3\\
d'_3 &= \phi'(0,1,1) = \phi'(\bar1,\bar0,\bar0) = \overline{\phi(1,0,0)} = \bar d_4\\
d'_2 &= \phi'(0,1,0) = \phi'(\bar1,\bar0,\bar1) = \overline{\phi(1,0,1)} = \bar d_5\\
d'_1 &= \phi'(0,0,1) = \phi'(\bar1,\bar1,\bar0) = \overline{\phi(1,1,0)} = \bar d_6\\
d'_0 &= \phi'(0,0,0) = \phi'(\bar1,\bar1,\bar1) = \overline{\phi(1,1,1)} = \bar d_7
\end{aligned}$$

Assim sendo, podemos concluir que se Φ e Φ' são equivalentes por conjugação, então $\mathsf{N}_{\phi'} = (\bar d_0\bar d_1\bar d_2\bar d_3\bar d_4\bar d_5\bar d_6\bar d_7)_2$, com $\mathsf{N}_{\phi} = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$

2.

Por definição, duas regras de transição Φ e Φ' dizem-se equivalentes por conjugação se e só se $\Phi'(\bar{\mathsf{C}}) = \overline{\Phi(\mathsf{C})}$, para qualquer configuração C.

2.1 Seja C um ponto fixo de Φ. Então, temos que

$$\Phi'(\bar{\mathsf{C}}) = \overline{\Phi(\mathsf{C})} = \bar{\mathsf{C}},$$

pelo que podemos concluir que a configuração $\bar{\mathsf{C}}$ é um ponto fixo de Φ'.

2.2

Seja C_p um ponto fixo de Φ e C uma configuração pertencente à bacia de atracção do ponto fixo C_p. Por outras palavras, C é uma configuração tal que $\Phi^m\big(\mathsf{C}\big) = \mathsf{C}_p$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Ora, pela alínea anterior, sabemos já que $\bar{\mathsf{C}}_p$ é um ponto fixo de Φ'. Vamos então mostrar que $\bar{\mathsf{C}}$ pertence à bacia de atracção do ponto fixo $\bar{\mathsf{C}}_p$:

$$\Phi'^m\big(\bar{\mathsf{C}}\big) = \Phi'^{m-1}\big(\big(\overline{\Phi(\mathsf{C})}\big)\big) = \Phi'^{m-2}\big(\overline{\Phi\big(\Phi(\mathsf{C})\big)}\big) = \Phi'^{m-2}\big(\overline{\Phi^2(\mathsf{C})}\big) = \overline{\Phi^m\big(\mathsf{C}\big)} = \bar{\mathsf{C}}_p.$$

2.3

Seja C um ponto periódico, de período n, de Φ. Então, temos que

$$\Phi'^n\big(\bar{\mathsf{C}}\big) = \Phi'^{n-1}\big(\big(\overline{\Phi(\mathsf{C})}\big)\big) = \Phi'^{n-2}\big(\overline{\Phi\big(\Phi(\mathsf{C})\big)}\big) = \Phi'^{n-2}\big(\overline{\Phi^2(\mathsf{C})}\big) = \overline{\Phi^n\big(\mathsf{C}\big)} = \bar{\mathsf{C}},$$

pelo que podemos concluir que a configuração $\bar{\mathsf{C}}$ é um ponto periódico, de período n, de Φ'.
Para a segunda parte, seja C_p um ponto periódico, de período n, de Φ e C uma configuração pertencente à bacia de atracção de C_p, isto é, para a qual sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi^m\big(\mathsf{C}\big) = \mathsf{C}_p$.
Então, temos que

$$\Phi'^m\big(\bar{\mathsf{C}}\big) = \Phi'^{m-1}\big(\big(\overline{\Phi(\mathsf{C})}\big)\big) = \Phi'^{m-2}\big(\overline{\Phi\big(\Phi(\mathsf{C})\big)}\big) = \Phi'^{m-2}\big(\overline{\Phi^2(\mathsf{C})}\big) = \overline{\Phi^m\big(\mathsf{C}\big)} = \bar{\mathsf{C}}_p.$$

3.

3.1

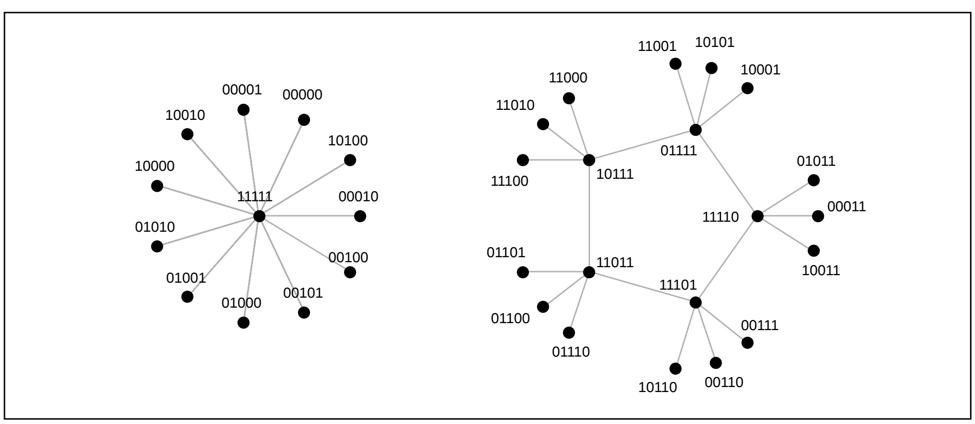
Dadas regras de transição $\mathsf{N}_{\phi'} = (d'_7d'_6d'_5d'_4d'_3d'_2d'_1d'_0)_2$ e $\mathsf{N}_{\phi} = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$ equivalentes por conjugação, sabemos que

$$\begin{aligned} d'_7 &= \bar{d}_0 & \qquad d'_3 &= \bar{d}_4 \\ d'_6 &= \bar{d}_1 & d'_2 &= \bar{d}_5 \\ d'_5 &= \bar{d}_2 & d'_1 &= \bar{d}_6 \\ d'_4 &= \bar{d}_3 & d'_0 &= \bar{d}_7 \end{aligned}$$

Ora, uma vez que $16 = (00010000)_2$ temos imediatamente que $\mathsf{N}_{\phi'} = (11110111)_2$, isto é, $\mathsf{N}_{\phi'} = 247$.

3.2

O diagrama de Wuensche do autómato celular elementar $\mathsf{N}_{\phi'} = 247$, para $N = 5$ e escolhidas condições de fronteira periódicas vai apresentar o mesmo aspecto que o diagrama de Wuensche do autómato celular elementar equivalente por conjugação $\mathsf{N}_{\phi'} = 16$. As únicas diferenças são as configurações, que, em cada posição, vão ser as conjugadas.



4.

Um autómato celular elementar diz-se auto-conjugado se aquele encontrado lhe ser equivalente por conjugação é ele próprio. Ora, por um exercício anteriores, sabemos que se dois autómatos celulares elementares Φ e Φ' são equivalentes por conjugação, então $\mathsf{N}_{\phi'} = (\bar{d}_0\bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3\bar{d}_4\bar{d}_5\bar{d}_6\bar{d}_7)_2$, com $\mathsf{N}_{\phi} = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$. Assim sendo, podemos concluir que autómatos celulares elementares auto-conjugados são aqueles cujos códigos de Wolfram satisfazem

$$\mathsf{N}_{\phi'} = (\bar{d}_0\bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3\bar{d}_4\bar{d}_5\bar{d}_6\bar{d}_7)_2 = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2 = \mathsf{N}_{\phi}$$

donde se retira as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} d_7 &= \bar{d}_0 \\ d_6 &= \bar{d}_1 \\ d_5 &= \bar{d}_2 \\ d_4 &= \bar{d}_3 \end{aligned}$$

Assim sendo, podemos afirmar que um autómato celular elementar ϕ é auto-conjugado se o seu código de Wolfram se escrever como

$$\mathsf{N}_{\phi} = (\bar{d}_0\bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3d_3d_2d_1d_0)_2.$$

Um exemplo de um autómato celular elementar auto-conjugado é $\mathsf{N}_{\phi} = (01001101)_2 = 77$.