Tópicos de Matemática Discreta

Exercícios — 2010/2011

Teoria elementar de conjuntos

1. Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

   (a) $\left\{a \in A \,|\, a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$
   (b) $\{a \in A \,|\, a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$
   (c) $\left\{a^2 \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$
   (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists a \in A \quad a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a}\right\}$
   (e) $\left\{b \in \mathbb{Z} \,|\, \exists a \in A \;\; b = a^2\right\}$
   (f) $\left\{b \in \mathbb{R} \,|\, \exists a \in A \;\; b^2 = a\right\}$

2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

   (a) $A = \{-1, 1\}$
   (b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$
   (c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
   (d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

3. Sejam A e B dois conjuntos. Simbolize convenientemente:

   (a) A e B têm um elemento em comum.
   (b) Nenhum elemento de A é elemento de B.
   (c) A tem um único elemento.
   (d) A tem exactamente dois elementos.

4. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

   (a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n^2 \leq 4\right\}$.
   (b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$.
   (c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$.

5. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

   (a) $5 \in A$
   (b) $\{5\} \in A$
   (c) $\{5, 11\} \in A$
   (d) $A \subseteq \mathbb{R}$
   (e) $\{5, 11\} \subseteq A$
   (f) $0 \in A$
   (g) $\emptyset \in A$
   (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

   (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   (c) $\emptyset \notin \emptyset$
   (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

7. Prove que se $A \subseteq \emptyset$ então $A = \emptyset$.

8. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

   (a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $c \notin A$

   (d) $d \in B$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

9. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

   (a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$ (b) $A \nsubseteq B$ e $A \in B$

   c) $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$ (d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

10. Considere conjuntos A, B e C. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem, é ou não verdadeira.

    (a) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \in C$.

    (b) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

    (c) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \in C$.

    (d) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$ então $A \subseteq C$.

11. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x = 2y\}$ e $C = \{x^2 \mid x \in A\}$. Determine

    (a) $A \cup C$ (b) $A \cup A$ (c) $A \cup B$ (d) $C \cup B$

    (e) $B \cup C \cup A$ (f) $A \cap B$ (g) $B \cap B$ (h) $A \backslash B$

    (i) $C \backslash A$ (j) $B \backslash B$

12. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

    (a) $A \cup A = A$ (b) $A \cup B = B \cup A$

    (c) $A \cap \emptyset = \emptyset$ (d) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$

    (e) $A \backslash B \subseteq A$ (f) $A \backslash \emptyset = A$

    (g) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$ (h) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$

    (i) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ (j) se $A \subseteq B$ então $A \cup (B \backslash A) = B$

    (k) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ (l) $X \setminus (X \setminus A) = A$

13. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

14. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

    (a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$. (b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$.

    (c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$. (d) Se $A \cup B \subseteq C$ então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$.

    (e) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cup B \subseteq C$. (f) Se $C \subseteq A \cap B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

    (g) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$. (h) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$.

    (i) Se $A \cap B \subseteq C$ então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$. (j) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$ então $A \cap B \subseteq C$.

15. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respectivamente:

    (a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

    (b) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

16. Sejam $A = \{1, 5, 7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1, 5, 7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

17. Determine todos os elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

18. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

    (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

    (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

19. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$.

    (a) Determine

        i. $A \times C$ e $C \times A$

        ii. $(A \times C) \setminus (C \times A)$

        iii. $A \times B \times C$

        iv. $A \times \emptyset \times C$

        v. C^3

        vi. $C^3 \times B$

    (b) Verifique que os conjuntos $C^3 \times B$ e $B \times C^3$ não são iguais.

    (c) Qual o número de elementos dos conjuntos $A^4 \times B \times C^2$ e $C^3 \times B \times A$?

20. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que

    (a) se $A \subseteq B$ então $A \times C \subseteq B \times C$

    (b) se $A \subseteq B$ então $C \times A \subseteq C \times B$

    (c) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

    (d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

21. Sejam A e B conjuntos. Prove que

$$(A \times A) \backslash (B \times B) = ((A \backslash B) \times A) \cup (A \times (A \backslash B)).$$

22. Sejam A e B conjuntos tais que $A \neq B$. Suponha que C é um conjunto tal que $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

23. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?