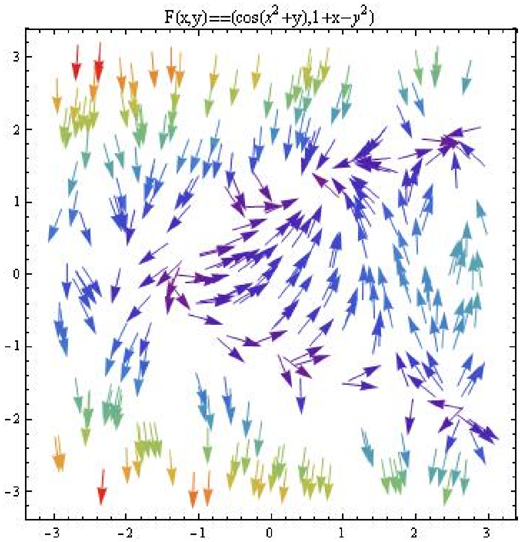
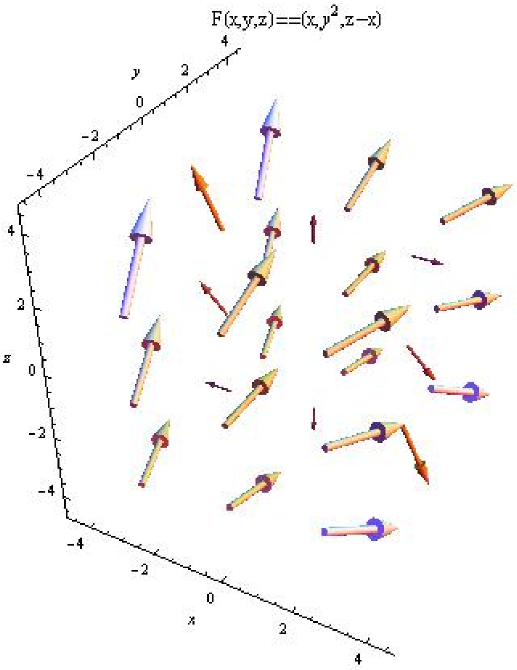
Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Campos Vetoriais

Exercício 7.1 Atente nos seguintes diagramas:





a) Que tipo de correspondências estão aqui representadas?

b) Identifique, em cada representação gráfica, as coordenadas de um ponto à sua escolha. Qual é, para esse ponto, o vetor (imagem) por F?

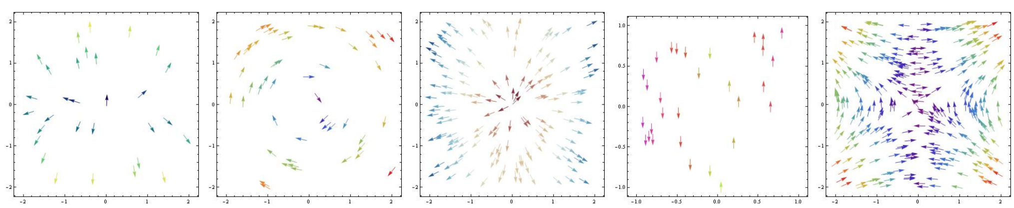
Exercício 7.2 Esboce alguns vetores do campo vetorial $\vec{F}$, sabendo que este:

a) é o gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) é o gradiente de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

c) se trata do campo de velocidades definido por $v(x,y,z) = (16 - x^2 - y^2)\vec{e_3}$

Exercício 7.3 Estabeleça a correspondência apropriada entre cada um das representações gráficas e cada uma das representações analíticas:



$\vec{F}(x,y) = x\vec{e_2}$ $\quad$ $\vec{F}(x,y) = x\vec{e_1} + 3y\vec{e_2}$ $\quad$ $\vec{F}(x,y) = x\vec{e_1} + \operatorname{sen} y\vec{e_2}$

$\vec{F}(x,y) = y\vec{e_1} - x\vec{e_2}$ $\quad$ $\vec{F}(x,y) = \dfrac{xy}{2}\vec{e_1} + \dfrac{x^2}{4}\vec{e_2}$

Exercício 7.4 O campo vetorial definido por $\vec{F}(x,y) = 2x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ é conservativo? E cada um dos que se seguem?

a) $\vec{F}(x,y) = x^2y\vec{e_1} + xy\vec{e_2}$?
b) $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{e_1} + x^2 - y\vec{e_2}$?
c) $\vec{F}(x,y,z) = x^3y^2z\vec{e_1} + x^2z\vec{e_2} + x^2y\vec{e_3}$?
d) $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\vec{e_1} + (x^2+z^2)\vec{e_2} + 2yz\vec{e_3}$?

Se sim, encontre a correspondente função potencial.

Parametrizações

Exercício 7.5 Defina, através de equações paramétricas:

a) a curva identificada por $y = x^2$;
b) uma partícula que partindo de um ponto com coordenadas $(0,3,0)$ se move ao longo de uma circunferência;
c) uma partícula que descreve uma espiral ascendente (hélice);
d) uma reta paralela ao vetor $\vec{u} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$ e que passa pelo ponto de coordenadas $(1,5,7)$.

Exercício 7.6 Reescreva as equações paramétricas do exercício anterior na forma de uma única equação vetorial (dita *parametrização*).

Exercício 7.7 Parametrize o segmento de reta que une os pontos de coordenadas $(2,-1,3)$ e $(-1,5,4)$.

Exercício 7.8 Encontre os pontos onde a reta definida por $x = t$, $y = 2t$ e $z = 1+t$ interseta a superfície esférica de raio 10 e centrada na origem do referencial.

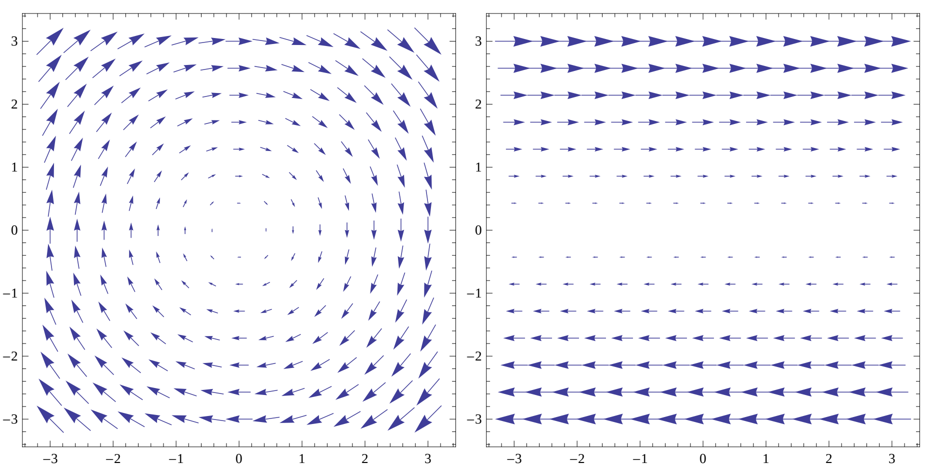
Exercício 7.9 Duas partículas descrevem, no espaço, as curvas definidas, respectivamente, por $\vec{r}_1(t) = t\vec{e_1} + (1+2t)\vec{e_2} + (3-2t)\vec{e_3}$ e $\vec{r}_2(t) = (-2-2t)\vec{e_1} + (1-2t)\vec{e_2} + (1+t)\vec{e_3}$.

a) Estas partículas alguma vez colidem?
b) E as trajectórias intersectam-se?

Integral de Linha

Exercício 7.10 Para cada um dos campos de vectores que se segue, represente uma curva orientada cujo integral de linha ao longo dessa curva seja:

a) positiva;
b) negativa;
c) zero.



Exercício 7.11 Considere o campo vetorial definido por $\vec{F}(x,y) = xy\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Qual o trabalho realizado pelo campo de forças sobre uma partícula que se desloca do ponto de coordenadas $(0,0)$ para o ponto de coordenadas $(1,1)$, ao longo de cada uma das trajectórias definidas a seguir:

a) $y = x$ **b)** $y = x^2$ **c)** $y = x^3$

Exercício 7.12 Resolva as questões enunciadas na pergunta anterior mas com o campo de forças definido por $\vec{F}(x,y) = xy\vec{e}_1 + \dfrac{x^2}{2}\vec{e}_2$ e acrescentando uma alínea **d)** onde a trajectória é qualquer.

Exercício 7.13 Determine os integrais de linha $\displaystyle\int_C \vec{F}d\vec{r}$, quando:

a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{e}_1 + xy\vec{e}_2 + xyz\vec{e}_3$ e C é o segmento de recta do ponto $(0,0,0)$ até ao ponto $(1,2,3)$;

b) $\vec{F}(x,y) = -y\operatorname{sen} x\vec{\imath} + \cos x\vec{\jmath}$ e C é a parábola $y = x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(2,4)$;

c) $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{e}_1 + xy\vec{e}_2$ e C é a curva que percorre a parábola $y = x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(1,1)$ e, depois, percorre o segmento de reta desde o ponto $(1,1)$ até ao ponto $(0,0)$;

d) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{e}_1 + (x+2z^2)\vec{e}_2 + 4yz\vec{e}_3$ e $C = C_1 + C_2$ onde C_1 é o segmento de recta do ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(0,0,0)$ e C_2 é o segmento de recta do ponto $(0,0,0)$ até ao ponto $(0,0,\sqrt{2})$;

e) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{e}_1 + (x+2z^2)\vec{e}_2 + 4yz\vec{e}_3$ e C é um arco de circunferência, no plano $y = x$, desde o ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(0,0,\sqrt{2})$;

f) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (xz-y)\vec{e}_3$ e C é o segmento de reta que une o ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(1,2,4)$.

Exercício 7.14 Considere um campo vectorial, constante, definido por $\vec{F}(x,y) = \vec{e}_1$ e três segmentos de trajetórias retilíneas - $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ - que unem, respetivamente, $(1,1)$ a $(3,3)$, $(5,4)$ a $(5,2)$ e $(4,1)$ a $(6,1)$.

a) Sem efectuar quaisquer cálculos ordene, por ordem crescente, os integrais de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}.d\vec{r}$, $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}.d\vec{r}$ e $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_3} \vec{F}.d\vec{r}$.

b) Confirme a sua ordenação calculando os integrais de linha enunciados na alínea anterior.

Exercício 7.15 Considere uma trajectória orientada que une o ponto de coordenadas $(0,0)$ a $(1,1)$. Calcule o integral de linha do campo vetorial definido por $\vec{F}(x,y) = (3x-y)\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$, usando a seguinte parametrização:

a) $\vec{r}(t) = (t,t)$ e $0 \leq t \leq 1$.

b) $\vec{s}(t) = (e^t - 1, e^t - 1)$ e $0 \leq t \leq \ln 2$.

Exercício 7.16 Usando o Teorema de Green, calcule o integral de linha $\displaystyle\int_C \vec{F}.d\vec{r}$, sabendo que $\vec{F}(x,y) = xy\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ e que C é o caminho de $(0,0)$ para $(1,1)$ ao longo do gráfico de $y = x^3$ e de $(1,1)$ para $(0,0)$ ao longo do gráfico de $y = x$.

Exercício 7.17 Sem usando o Teorema de Green, calcule o integral de linha referido na alínea anterior.

Exercício 7.18 Use o Teorema de Green para calcular a área de uma circunferência de raio r.

Exercício 7.19 Usando o integral de linha, obtenha uma fórmula para o cálculo da área de regiões planas.

Exercício 7.20 Calcule o integral de linha $\int_C (\arctan x + y^2)dx + (e^y - x^2)dy$, onde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ com C_1 de $(3,0)$ para $(-3,0)$ pelo arco $y = \sqrt{9 - x^2}$, C_2 de $(-3,0)$ para $(-1,0)$ pela reta $y = 0$, C_3 de $(-1,0)$ para $(1,0)$ pelo arco $y = \sqrt{1 - x^2}$ e C_4 de $(1,0)$ para $(3,0)$ pela reta $y = 0$.