1. Grafos

Um grafo *G* é definido por um par de conjuntos ***Nós*** e ***Arcos*** onde:

- **N** é um conjunto finito, não vazio, de **nós** (ou **vértices**) do grafo, representado por "  "

- **A** é um conjunto de pares ordenados *a*=(x, y) denominados arcos , onde x e y ∈ N, e são as **arestas** do arco.

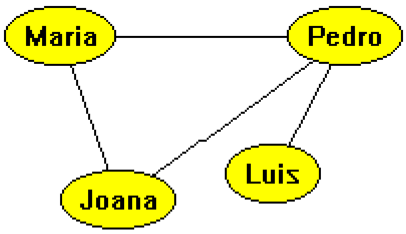
Vejamos, por exemplo, o grafo G(N, A) dado por:

N = { p | p é uma pessoa }
A = { (v,w) | < v é amigo de w > }

Esta definição representa toda uma família de grafos. Um exemplo de elemento desta família (ver G_1) é dado por:

N = { Maria, Pedro, Joana, Luís }
A = { (Maria, Pedro) , (Joana, Maria) , (Pedro, Luís) , (Joana, Pedro) }

G_1:



Neste exemplo estamos considerando que a relação *<v é amigo de w>* é uma **relação simétrica**, ou seja, se *<v é amigo de w>* então *<w é amigo de v>*. Como consequência, as arestas que ligam os vértices não possuem qualquer orientação

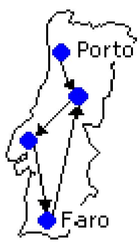
1.1. Grafo Dirigido

Um grafo **dirigido** é um grafo na qual os arcos são definidos por conjuntos ordenados onde os pares ordenados (Porto, Coimbra) e (Coimbra, Porto) representam dois arcos diferentes.

Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo:

G1 = (N1, A1)
N1 = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A1 = {(Porto, Coimbra), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}

Onde cada arco representa uma ***Estrada*** de sentido único entre duas localidades.



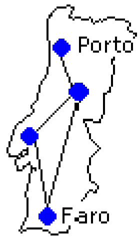
1.2. Grafo Não Dirigido

Um grafo **não dirigido** é um grafo na qual os arcos são definidos por conjuntos ordenados, onde os pares ordenados (Porto, Coimbra) e (Coimbra, Porto) representam o mesmo arco.

Considere o seguinte Grafo:
G2 = (N2, A2)

N2 = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A2 = {(Porto, Coimbra), (Coimbra, Porto), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}

Onde cada arco representa uma ***Estrada*** com dois sentidos entre duas localidades.



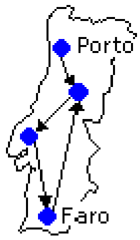
1.3. Grau de um Nó

<u>Grafos Dirigidos</u>

O **grau interno** de um nó é o número de arcos que incidentes nesse nó.

O **grau externo** de um nó é o número de arcos que partem desse nó.

Neste exemplo, a cidade do Porto tem **grau interno 0** e **grau externo 1**, e a cidade de Faro tem **grau interno 1** e **grau externo 1**.

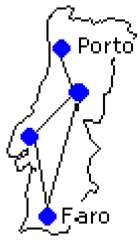


<u>Grafos Não Dirigidos</u>

O **grau** de um nó é o número de arcos incidentes nesse nó.

Neste exemplo, a cidade do Porto tem grau 1 e a cidade de Faro tem

grau 2.



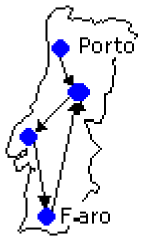
1.4. Caminho

Um **caminho** é uma sequência de um ou mais arcos, na qual o segundo nó de cada arco coincide com o primeiro nó do arco seguinte.

Grafos Dirigidos

Exemplo:

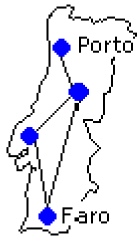
O caminho do Porto para Faro =
{(Porto, Coimbra), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro)}



Grafos Não Dirigidos

Exemplo:

O caminho do Porto para Faro =
{(Porto, Coimbra), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro)}
ou = {(Porto, Coimbra), (Coimbra, Faro)}



1.5. Comprimento de um Caminho

O **comprimento de um caminho** é igual ao número de arcos existentes no caminho.

No exemplo anterior, o comprimento do caminho do Porto para Faro = {(Porto, Coimbra), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro)} é igual a 3.

1.6. Ciclo, Circuito e Laço

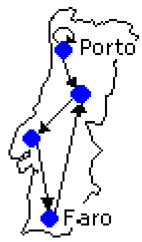
Um **ciclo** (*só para grafos dirigidos*) é um caminho na qual o nó de partida coincide com o nó de chegada.

Um **circuito** *(só para grafos não dirigidos)* é um caminho na qual o nó de partida coincide com o nó de chegada.

Um **laço**, é um ciclo com um único arco, isto é, um arco que inicia e termina no mesmo nó.

Grafos Dirigidos

Exemplo:

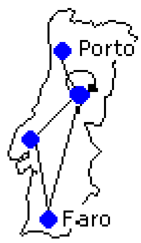


ciclo: {(Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}

laço: {(Porto, Porto)}

Grafos Não Dirigidos

Exemplo:



circuito:{(Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}

laço: {(Coimbra, Coimbra)}

1.7. Grafo Cíclico

Um grafo é **cíclico** se o grafo contém um ou mais ciclos.

1.8. Grafo Acíclico

Um grafo é **acíclico** se o grafo não contém nenhum ciclo.

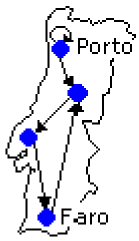
1.9. Grafo Parcial

Um grafo **parcial** é um grafo constituído pelos mesmos nós do grafo original, podendo conter apenas um subconjuntos de arcos do grafo original.

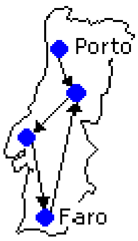
Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :

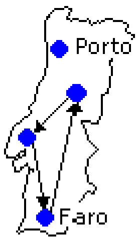
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A = {(Porto, Porto), (Porto, Coimbra), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}

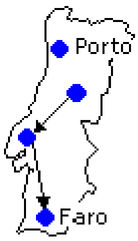
Partindo deste grafo G, podemos obter os seguinte grafos parciais:

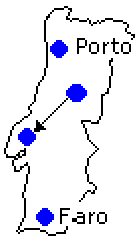


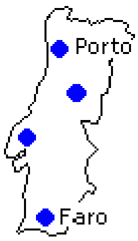
Grafos Parciais:

G1 

G2 

G3 

G4 

G5 

entre outros.

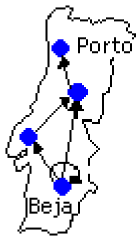
1.10. Subgrafo

Um **subgrafo** é um grafo constituído por um subconjunto dos nós do grafo original, juntamente com todos os arcos entre este subconjunto de nós, existentes no grafo original.

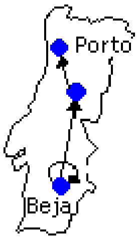
Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :

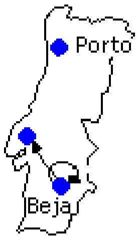
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Beja}
A = {(Beja, Beja), (Beja, Lisboa), (Beja, Coimbra), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Porto)}

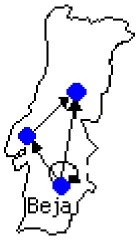
Partindo deste grafo G, podemos obter os seguinte subgrafos:

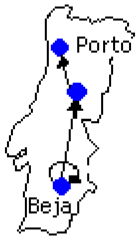


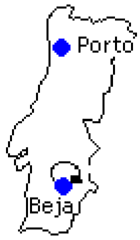
Subgrafos:

G1 

G2 

G3 

G4 

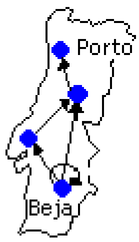
G5 

entre outros.

1.11. Grafo Conexo

Um grafo **conexo** é um grafo na qual existe pelo menos um nó a partir do qual existe caminho para todos os restantes nós.

Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
G = (N, A)
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A = {(Beja, Beja), (Beja, Lisboa), (Beja, Coimbra), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Porto)}

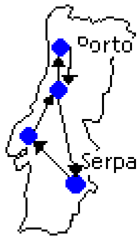


A partir do nó de Beja, existe pelo menos um caminho para todos os restantes nós, isto é, partindo de Beja pode-se alcançar qualquer um dos destinos.

1.12. Grafo Fortemente Conexo

Um grafo **fortemente conexo** é um grafo na qual a partir de qualquer nó, existe pelo menos um caminho para todos os restantes nós.

Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
G = (N, A)
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Serpa}
A = {(Serpa, Lisboa), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Serpa), (Coimbra, Porto), (Porto, Coimbra)}

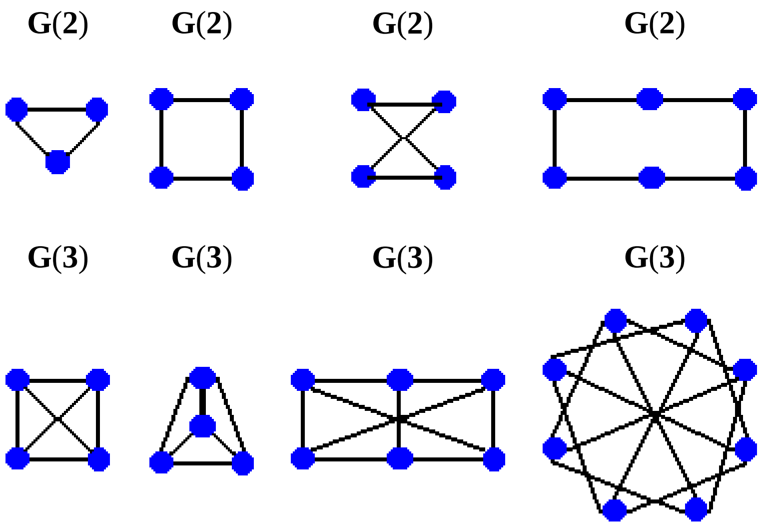


A partir de qualquer nó é possível alcançar qualquer um dos restantes destinos.

1.13. Grafo Regular (n)

Um grafo é dito ser **regular** (**n**) quando todos os seus vértices tem o mesmo grau, onde **n** é o grau dos seus nós.

Por exemplo, um grafo é um grafo regular-3 quando todos os seus nós têm grau 3.



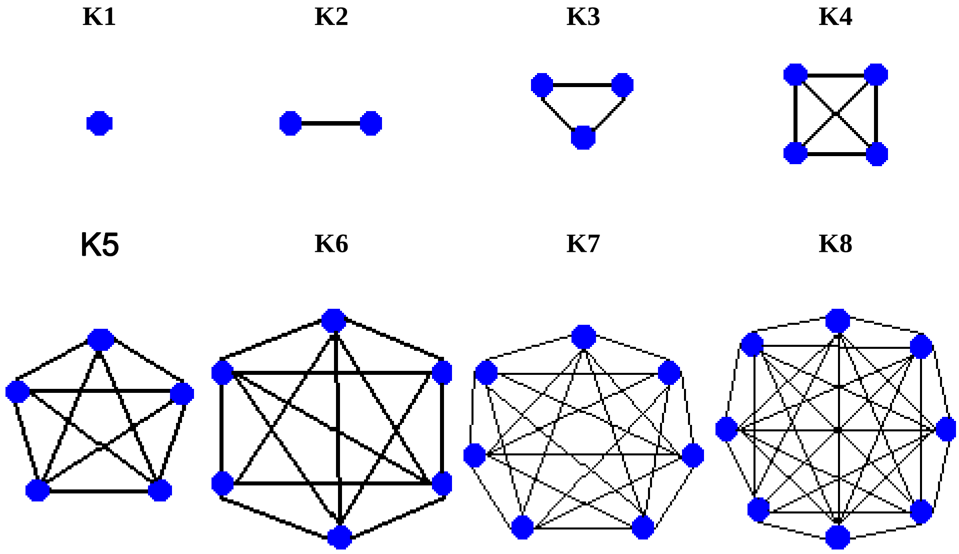
1.14. Grafo Completo - Kn

Um grafo completo é um grafo que contém o número máximo de arcos possível, isto é, quando existe, para cada nó, um arco desse nó para todos os restantes nós.
Estes grafos são designados por K**n**, onde **n** é o número de nós do grafo.

Propriedades:

- Existe um único grafo completo (a menos de isomorfismos) com **n** vértices que denotamos por K**n**
- Um grafo K**n** possui o número máximo possível de arcos para um dados **n**, sendo um grafo regular (**n-1**) dado que todos os seus vértices tem grau **n-1**.
- Todos os grafos completos são grafos regulares.

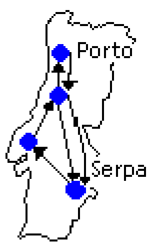
Exemplo:



1.15. Multigrafo

Um **multigrafo** é um grafo que contém múltiplas ocorrências de um mesmo arco, isto é, entre dois nós existe mais de um arco.

Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Serpa}
A = {(Serpa, Lisboa), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Serpa), (Coimbra, Serpa), (Coimbra, Porto), (Porto, Coimbra)}

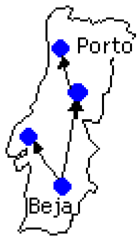


Neste grafo, existem 2 arcos entre os nós de Coimbra e Serpa.

1.16. Árvore

Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos, isto é, existe pelo menos um nó (raiz da árvore) a partir do qual existe caminho para todos os restantes nós.

Exemplo:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Beja}
A = {(Beja, Lisboa), (Beja, Coimbra), (Coimbra, Porto)}



Neste grafo, a partir do nó de Beja, existe um caminho para todos os restantes nós. (NOTA: se rodar a imagem nota-se o desenho de uma árvore binária).

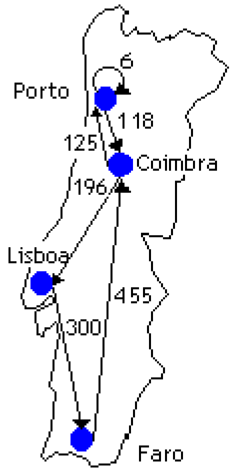
1.17. Grafo Pesado e Peso de um Arco

Um **grafo pesado** é um grafo na qual todos os arcos contêm um valor (peso) associado.

O **peso de um arco**, em grafos pesados, é o valor associado a cada arco.

Exemplo:

Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Serpa}
A = {(Serpa, Lisboa), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Serpa), (Coimbra, Serpa), (Coimbra, Porto), (Porto, Coimbra)}



Onde cada arco representa uma estrada de sentido único entre duas localidades, e o peso de cada arco representa a distancia entre duas localidades.

2. Representação de Grafos

2.1. Matriz de Adjacência

Um grafo G = (N, A) com **n** nós pode ser representado numa **matriz** de adjacência **M**, na qual, a matriz contém dimensão **n** x **n**, as linhas e as colunas representam os diversos nós do grafo e a sua intersecção representa a existência ou não de um arco a ligar os dois nós.

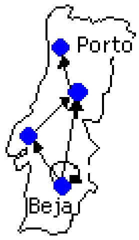
Grafos não pesado:
Para i (linha) e j (coluna), que representam respectivamente, origem e destino de uma matriz binária (só contém 0's ou 1's) de adjacência M,

- M(i,j) = 1 se existir um arco com origem em i e destino em j
- M(i,j) = 0 caso contrário

Grafos pesado:
Para i (linha) e j (coluna), que representam respectivamente, origem e destino de uma matriz de adjacência M,

- M(i,j) = **p** se existir um arco com origem em i e destino em j com ponderação **p**
- M(i,j) = ∞ caso contrário

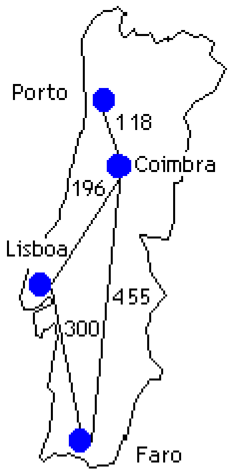
Exemplo I:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
G = (N, A)
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A = {(Beja, Beja), (Beja, Lisboa), (Beja, Coimbra), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Porto)}



Este grafo pode ser representado pela seguinte matriz de adjacência (Origem x Destino):

	Porto	Coimbra	Lisboa	Beja
Porto	0	0	0	0
Coimbra	1	0	0	0
Lisboa	0	1	0	0
Beja	0	1	1	1

Exemplo II:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
G = (N, A)
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A = {(Porto, Coimbra), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}

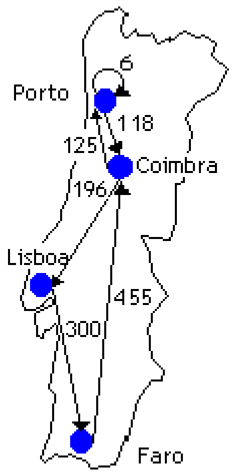


Este grafo pode ser representado pela seguinte matriz de adjacência (Origem x Destino):

	Porto	Coimbra	Lisboa	Faro
Porto	∞	118	∞	∞
Coimbra	118	∞	196	455
Lisboa	∞	196	∞	300
Faro	∞	455	300	∞

Nota: Grafos não dirigidos são representados por **Matrizes Simétricas**

Exemplo III:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
G = (N, A)
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A = {(Porto, Porto), (Porto, Coimbra), (Coimbra, Porto), (Coimbra, Lisboa), (Lisboa, Faro), (Faro, Coimbra)}



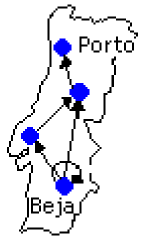
Este grafo pode ser representado pela seguinte matriz de adjacência (Origem x Destino):

	Porto	Coimbra	Lisboa	Faro
Porto	6	118	∞	∞
Coimbra	125	∞	196	∞
Lisboa	∞	∞	∞	300
Faro	∞	455	∞	∞

2.1.1. Determinação do Grau de um Nó

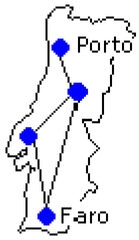
Grafos Dirigidos

	Porto	Coimbra	Lisboa	Beja	**Grau Externo**
Porto	0	0	0	0	0
Coimbra	1	0	0	0	1
Lisboa	0	1	0	0	1
Beja	0	1	1	1	3
Grau Interno	1	2	1	1	



Grafos Não Dirigidos

	Porto	Coimbra	Lisboa	Faro	**Grau**
Porto	0	1	0	0	1
Coimbra	1	0	1	1	3
Lisboa	0	1	0	1	2
Faro	0	1	1	0	2

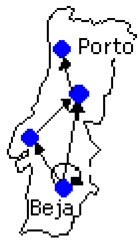


Nota: O grau de um grafo não dirigido, também pode ser calculado pela soma dos elementos da colunas (por a matriz ser sempre simétrica).

2.2. Listas de Adjacência

Um grafo G = (N, A) com **n** nós pode ser representado em **listas** de adjacência **L**, na qual, para cada nó existe um lista ligada que contém todos os nós adjacentes (que partem deste) a este. Cada elemento da lista ligada representa um arco entre o nó inicial e esse elemento.

Exemplo I:
Considere-se o seguinte grafo G = (N, A) :
G = (N, A)
N = {Porto, Coimbra, Lisboa, Faro}
A = {(Beja, Beja), (Beja, Lisboa), (Beja, Coimbra), (Lisboa, Coimbra), (Coimbra, Porto)}



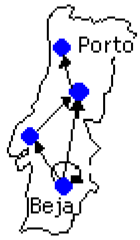
Este grafo pode ser representado pelas seguintes listas de adjacência:

Porto	-->	null						
Coimbra	-->	Porto	-->	null				
Lisboa	-->	Coimbra	-->	null				
Beja	-->	Beja	-->	Lisboa	-->	Coimbra	-->	null

2.2.1. Determinação do Grau de um Nó

Grafos Dirigidos

O **grau externo** de um nó é o número de elementos na lista de adjacência desse nó.
O **grau interno** não pode ser calculado directamente, sendo necessário percorrer todas as listas e contar o número de vezes que o nó aparece nas listas de adjacência.



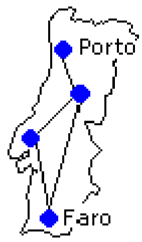
									Grau Externo
Porto	-->	null							0
Coimbra	-->	Porto	-->	null					1
Lisboa	-->	Coimbra	-->	null					1
Beja	-->	Beja	-->	Lisboa	-->	Coimbra	-->	null	3

Grau interno:

- Porto: 1
- Coimbra: 2
- Lisboa: 1
- Beja: 1

Grafos Não Dirigidos

O **grau** de um nó é o número de elementos na lista de adjacência desse nó.



									Grau
Porto	-->	Coimbra	-->	null					1
Coimbra	-->	Porto	-->	Lisboa	-->	Faro	-->	null	3
Lisboa	-->	Coimbra	-->	Faro	-->	null			2
Faro	-->	Coimbra	-->	Lisboa	-->	null			2

3. Operações sobre Grafos

Sejam G=(N, A), G'=(N, A') e G''=(N, A'')
Nota: Todos os grafos devem conter os mesmos nós.

3.1. União de Grafos

$G = G' \cup G''$ se e só se $A = \{ (x, y) : (x, y) \in A' \vee (x, y) \in A'' \}$

3.2. Composição de Grafos

$G = G' \circ G''$ se e só se $A = \{ (x, y) : \exists_{a \in N} \; (x, a) \in A'' \wedge (a, y) \in A' \}$

3.3. Exponenciação de Grafos

$\mathbf{I}^n$ - Matriz Identidade. Um grafo Identidade, é um grafo na qual existe um arco (x, y) se e só se x=y.

$$G^n = \begin{cases} \mathbf{I}^n & \text{se } n = 0 \\ G \circ G^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Isto é, existe um arco (x, y) em G^n sse existir em G um caminho com origem em x e destino em y, composto por **n** arcos.

3.4. Fecho Transitivo

$G^+ = \cup_{n=1}^{\infty} G^n$

Isto é, existe um arco (x, y) em G^+ sse existir em G um caminho com origem em x e destino em y, **composto por pelo menos um arco**.