LEI Uma proposta de resolução: 1º teste | 1

Parte I

17 Abril 2012

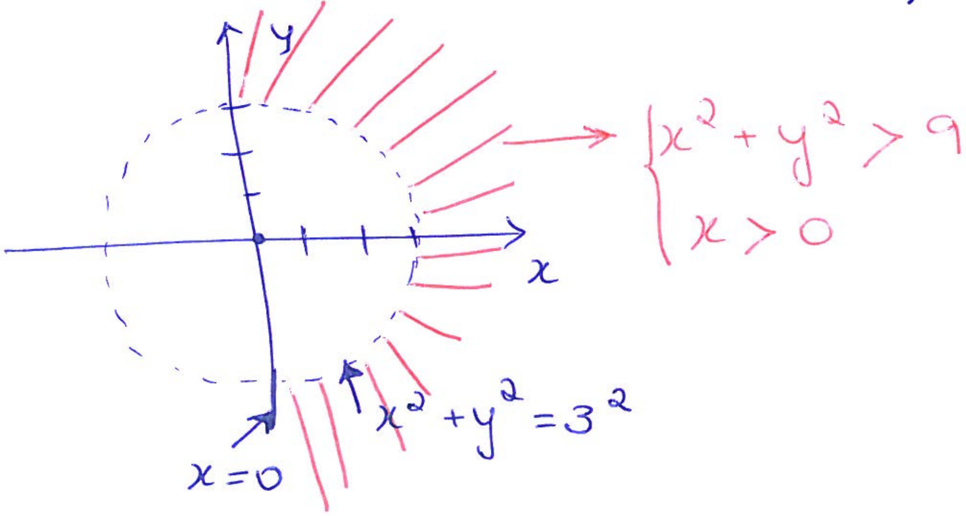
① $$f(x,y) = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$$

$$g(x,y) = y \ln x$$

$$h(x,y) = \left(f(x,y), g(x,y)\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2-9}}, y \ln x\right)$$

a)

$$D_h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-9 > 0 \ \wedge \ x > 0\right\}$$

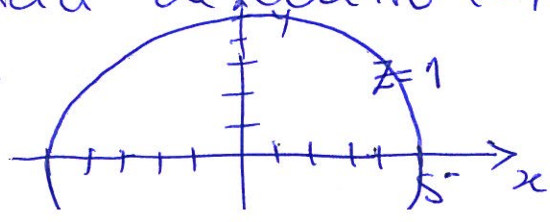


b)

$$f(x,y)=1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2-9}} = 1 \Leftrightarrow 4 = \sqrt{x^2+y^2-9}$$

$x^2+y^2-9=16 \Leftrightarrow x^2+y^2=25$ define uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio 5.

Donde



c)

$z = g(x, y)$

$z = y \ln x$

$\nabla g(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x\right)$ e $\nabla g(e, 2) = \left(\frac{2}{e}, 1\right)$

Donde

$$\nabla g(e, 2, 2) = \left(\frac{2}{e}, 1, -1\right)$$

ou seja o vetor $\vec{n} = \frac{2}{e}\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$

é diretor da reta normal que se pretende encontrar.

Além disso sabemos que a reta há-de passar pelo ponto de coordenadas $(e, 2, 2)$.

Assim

r pode ser definida pela sua equação vetorial, a saber

r: $P = A + k\vec{n}$; $k \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = (e, 2, 2) + k\left(\frac{2}{e}, 1, -1\right)$$

ou ainda

$$\frac{x - e}{\frac{2}{e}} = y - 2 = 2 - z$$

d)

$$\lim_{(x,y)\to(2,e)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,e)} \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2-9}}, y\ln x \right)$$

que existirá quando existirem ambos os limites seguintes

$$\lim_{(x,y)\to(2,e)} \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2-9}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,e)} (y \ln x)$$

|| prop. dos limites (porque o limite do denominador não é zero)

$$\frac{4}{\sqrt{4+e^2-9}} = \frac{4}{\sqrt{e^2-5}}$$

|| prop. limites

$$2 \times \ln e = 2$$

Donde

$$\lim_{(x,y)\to(2,e)} h(x,y) = \left(\frac{4}{\sqrt{e^2-5}}, 2 \right)$$

---

2 a)

$$|f(x,y)| = \left| \frac{xy \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x|.|y|.|\operatorname{sen} x|}{|x^2+y^2|}$$

$$\leq \frac{|x|.|y|.|x|}{|x^2+y^2|} = \frac{|x^2|.|y|}{|x^2+y^2|} \underset{\substack{\text{pq } x^2 \geq 0 \\ \text{e } x^2+y^2 \geq 0}}{=} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2}$$

tal como nos é

.) Recordemos que

f será contínua em $(0,0)$ quando

e $-\ (0,0) \in \mathcal{D}f$

$-\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existir

e $-\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

Ora

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2 \text{ e portanto } (0,0) \in \mathcal{D}f$$

Além disso $f(0,0) = 0$

Vejamos, pois, se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$!

Na alínea anterior já vimos que $|f(x,y)| \leq \dots$

e, por definição, sabemos que

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ quando sse $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall 0 \leq \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$ $\wedge (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(*)

Por outro lado, $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Uma vez que $|f(x,y)| \leq \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2}$ e $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, para $(x,y) \neq$

Então

$$|f(x,y)| \leqslant |y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)-(0,0)\|$$

Assim

existe $\delta = \varepsilon$ verificando ⊛

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

c.q.d.

Por conseguinte f é contínua em $(0,0)$

c)

$$f'_{(1,b)}(0,0) = ?$$

Ora

$$\|(1,b)\| = \sqrt{1+b^2}$$

Donde

$$\text{vers}(1,b) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) \text{ é unitário}$$

Pelo que

$$f'_{(1,b)}(0,0) = f'_{\text{vers}(1,b)}(0,0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(0+h\cdot \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, 0 + h\cdot \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{hb}{\sqrt{1+b^2}}\right) - 0}{}$$

ou seja

$$f_{(1,b)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{\sqrt{1+b^2}} \cdot \frac{hb}{\sqrt{1+b^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{h}{\sqrt{1+b^2}}\right)}{\frac{h^2}{1+b^2} + \frac{h^2 b^2}{1+b^2}} : h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{h^2}}{1+\cancel{b^2}} \cdot b \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{h}{\sqrt{1+b^2}}\right)}{\frac{\cancel{h^2}}{1+\cancel{b^2}} \left(1 + b^2\right) \cdot h}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{\sqrt{1+b^2}}\right)}{\left(\frac{h}{\sqrt{1+b^2}}\right)}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

Obs: Para o levantamento da indeterminação também se poderia ter usado a, denominada, "regra de l'Hôpital".

Parte II

③ $f(x,y) = x\cos y + \cos x$

$\Pi_t: \quad z = z_0 + m_x(x_0,y_0)(x-x_0) + m_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

onde $z_0 = f(0,0) = 1$

$m_x(x_0,y_0) = f_x(0,0) = \left(\cos y - \operatorname{sen} x\right)_{(0,0)} = \cos 0 -$

$- \operatorname{sen} 0 = 1$

$m_y(x_0,y_0) = f_y(0,0) = (-x \operatorname{sen} y)_{(0,0)} = 0$

Donde

$\Pi_t: \quad z = 1 + 1(x-0) + 0(y-0)$

$\Updownarrow$

$z = 1 + x$ define o plano tan_
gente requerido.

④ $f(x,y) = xy^2$ $\qquad x(t) = 4 + \cos(4\pi t)$
$\qquad y(t) = 1 + \operatorname{sen}(2\pi t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Então

$$f_x = y^2 = (1 + \text{sen}(2\pi t))^2$$

e

$$f_y = 2xy = 2\,(4 + \cos(4\pi t))(1 + \text{sen}(2\pi t))$$

Por outro lado

$$\frac{dx}{dt} = \left(4 + \cos(4\pi t)\right)' = -4\pi\ \text{sen}\,(4\pi t)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 + \text{sen}\,(2\pi t)\right)' = 2\pi \cos(2\pi t)$$

Pelo que

$$\frac{df}{dt} = (1 + \text{sen}\,(2\pi t))^2 \cdot (-4\pi\ \text{sen}\,(4\pi t)) +$$
$$+ 2(4 + \cos(4\pi t))(1 + \text{sen}(2\pi t)) \cdot 2\pi \cos(2\pi t)$$

para $t = 1$, tem-se

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = (1 + \cancel{\text{sen}\,2\pi})^2 \cdot (-4\pi\ \cancel{\text{sen}\,(4\pi)})$$
$$+ 2\left(4 + \cos(4\pi)\right)(1 + \cancel{\text{sen}(2\pi)}) \cdot$$
$$\cdot\, 2\pi \cos(2\pi) = 2(4+1) \cdot 2\pi \cdot 1 = 20\pi$$

5

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \rightsquigarrow f(x,y) = \left(x e^y,\ xy,\ \operatorname{sen}(x^2 y)\right)$$

Sejam

$$f_1(x,y) = x e^y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = e^y \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x e^y \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = xy \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = x \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f_3}{\partial x} = 2xy\cos(x^2 y) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial y}\ \ x^2\cos(x^2 y) \end{cases}$$

Então

$$J_f(2,\pi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(2,\pi) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(2,\pi) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(2,\pi) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(2,\pi) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(2,\pi) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(2,\pi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^\pi & 2e^\pi \\ \pi & 2 \\ 4\pi & 4 \end{bmatrix}$$

(6)

Recorde-se o enunciado do Teorema de Schwarz:

Sejam $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

e (a,b) as coordenadas de um ponto interior do domínio, $\mathcal{D}$, de f

Se as derivadas

f_x, f_y e f_{xy} estiverem definidas numa vizinhança de (a,b)

e

Se f_{xy} for contínua em (a,b)

Então

f_{yx} também está definida em (a,b)

e

$$f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b)$$

No caso presente sabemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 - 4y^3 + y$$

está definida para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Bem como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4y - 12xy^2$$

Ora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3y^2 - 4y^3 + y\right)$$

$$= 8x^3y - 12y^2 + 1$$

E

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^4y - 12xy^2\right)$$

$$= 8x^3y - 12y^2$$

Ou seja tanto $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ com $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

estão definidas e são contínuas para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

No entanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Pelo que, segundo o teorema de Schwarz, não existe um campo escalar

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

cujas derivadas parciais de 1ª ordem sejam as do enunciado do problema.

1º TESTE DE ANÁLISE - LEI

17/04/2013

Uma correção alternativa às questões 2-b), c), 3, 5.

2-b) Pela alínea a) sabemos que

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0$$

Então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, pelo que f é contínua em $(0,0)$.

2-c) $$f'((0,0);(1,b)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,b))-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h.hb.\operatorname{sen}h}{h^2+h^2b^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{b}{1+b^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b}{1+b^2}\,\frac{\cos h}{1} = \frac{b}{1+b^2},$$

sendo a penúltima igualdade verdadeira por aplicação da Regra de l'Hôpital ao $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h} = \frac{0}{0}$.

3- $f(0,0)=1$, pelo que $(0,0,1)\in G_f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y - \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Então a equação vetorial do plano tangente ao G_f no ponto $(0,0,1)$ é

$$(x,y,z) = (0,0,1)+\lambda(1,0,1)+\mu(0,1,0), \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

5. (2)

$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} e^{y} & xe^{y} \\ y & x \\ \cos(x^2y)2xy & \cos(x^2y)x^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{(2,\pi)}f = \begin{pmatrix} e^{\pi} & 2e^{\pi} \\ \pi & 2 \\ 4\pi & 4\pi \end{pmatrix}$$

$$J_{(2,\pi)}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi} & 2e^{\pi} \\ \pi & 2 \\ 4\pi & 4\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi}x+2e^{\pi}y \\ \pi x+2y \\ 4\pi x+4\pi y \end{pmatrix}$$

$$f'(2,\pi): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (e^{\pi}x+2e^{\pi}y,\ \pi x+2y,\ 4\pi x+4\pi y)$$