Programação Dinâmica: Modelos Determinísticos

Prof. Fernando Augusto Silva Marins
Departamento de Produção
Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá
UNESP

www.feg.unesp.br/~fmarins
fmarins@feg.unesp.br

Introdução

Útil em processos de decisão sequencial / multiestágio / com muitas variáveis interdependentes.

Histórico:

Wald (1950) - decisão sequencial

Dvoretzky, Kiefer & Wolfowitz (1952) - estoques

Bellman (década de 50) - artigos, livros.

Idéia:

obter uma série de problemas com um único estágio e um número menor de variáveis.

Princípio da Otimalidade da Programação Dinâmica

A aplicação da Programação Dinâmica-PD baseia-se fundamentalmente naquele que é conhecido como Princípio de Otimalidade de Bellman:

"Uma política de decisões ótimas só pode ser formada por subpolíticas ótimas":

A verificação da validade desse princípio é intuitiva: basta considerar uma subpolítica tomada de uma decisão ótima; se essa subpolítica não for ótima, existe outra subpolítica melhor, a qual, completa pelo restante da política considerada, poderá melhorar esta, o qual contraria a hipótese efetuada.

Introdução

Exemplos da PD:

Problema da viagem

Problema da produção (contínua)/ estocagem

Problema da sobrevivência

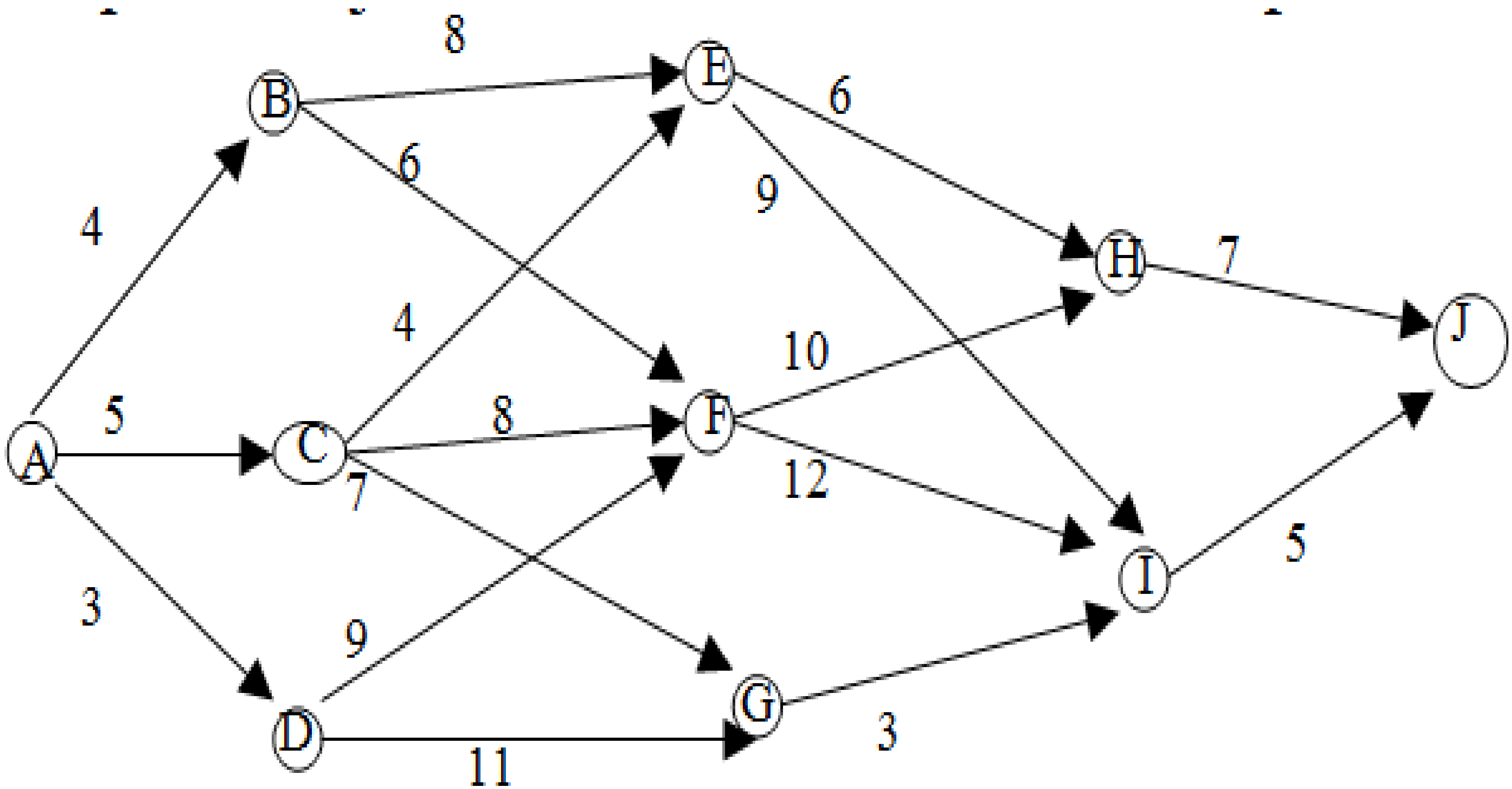
Problema da Viagem com Custos Terminais

Problema da produção (discreta)/ estocagem

Problema da Viagem

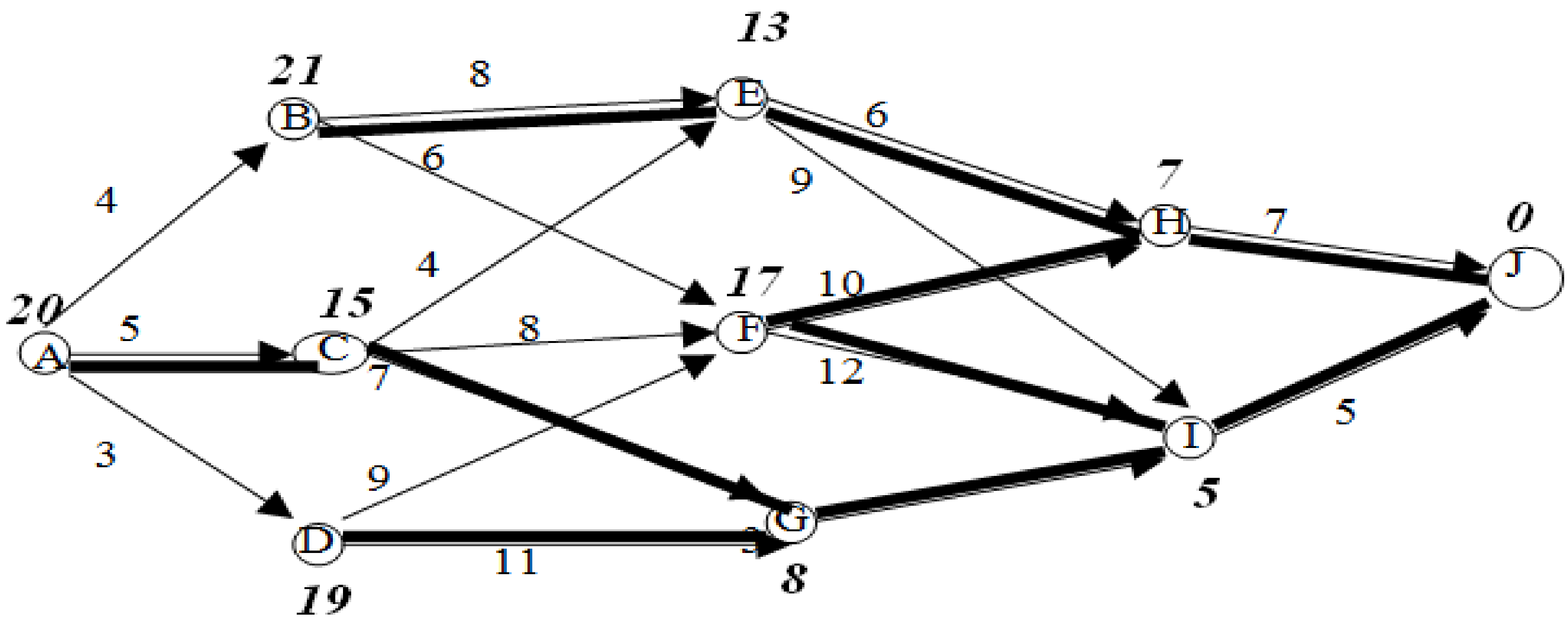
Viajante sai da cidade A com destino a cidade J.

Qual a trajetória de menor custo de transporte?

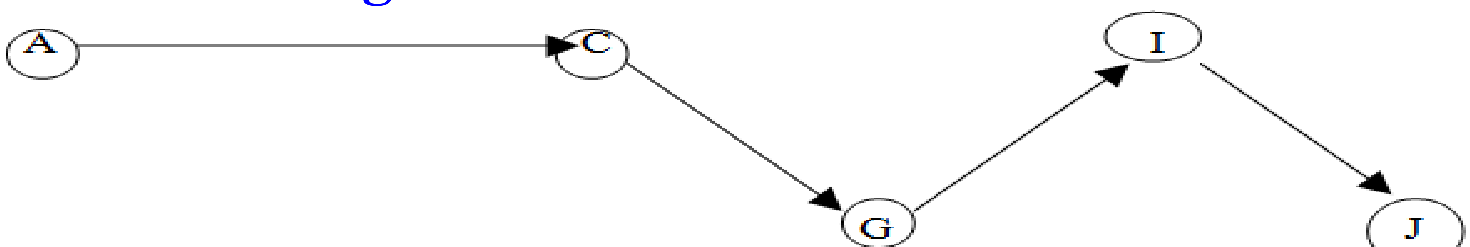


Problema da Viagem

Solução sobre o Grafo, partindo da Cidade Destino J e considerando o **Custo Remanescente Mínimo** de cada Cidade até J .



Custo mínimo da viagem entre as cidades A e J= 20



Elementos importantes em modelos de PD: ilustração com o Problema da Viagem

Estágios

(instante de início/término de uma viagem - k= 0, 1, 2, 3, 4)

Estado

(cidade onde o viajante está num dado estágio - exemplo: no estágio 3 há os estados viáveis h, i)

Decisão

(para ir de uma cidade à outra - de outro estágio - o viajante deve tomar uma decisão admissível)

Custos (elementares) da tomada de decisão

(quanto custa para ir de uma cidade à outra)

Critério ou Objetivo

(como comparar trajetórias alternativas para o viajante - exemplo: Min custo total da viagem)

Elementos importantes em modelos de PD: ilustração com o Problema da Viagem

Estilos de resolução

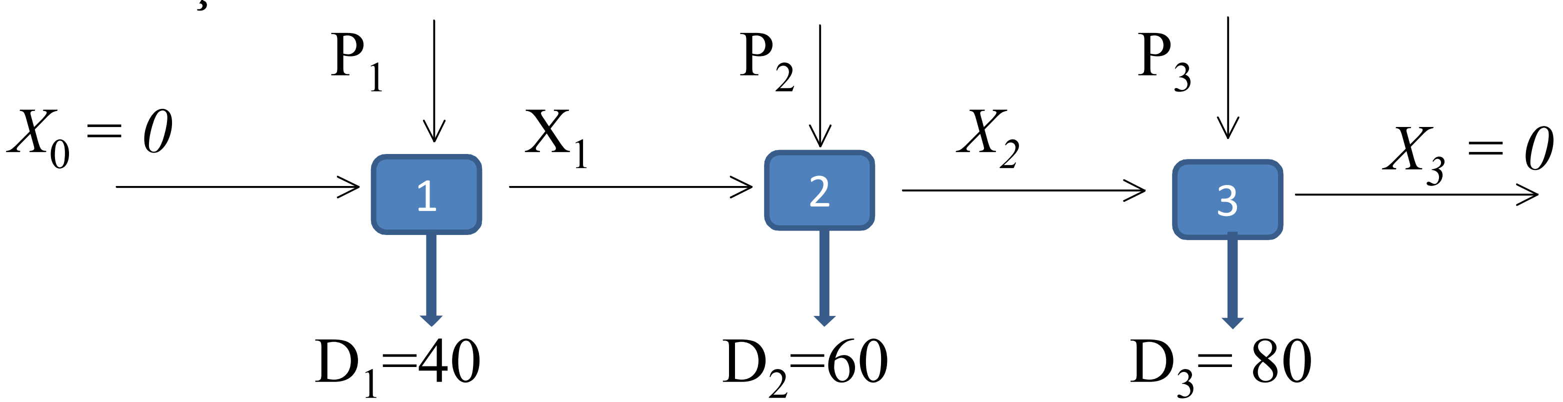
- ***Backward***: fixar o último estado = objetivo estabelecido - uso em operação de sistemas.
- ***Forward***: fixar o estado inicial = condições iniciais conhecidas - uso em planejamento.

Recuperação da trajetória - percorrer o grafo no sentido contrário (***Backtracking***) utilizado para os cálculos efetuados

(obter as cidades intermediárias que compõem a trajetória ótima até a Cidade J a partir da Cidade A).

Problema de Produção Contínua

Horizonte de planejamento: 3 meses
Estoque inicial e final: nulos
Custo unitário de estoque: \$ 4
Custo de produção: $C_i(P_i) = 50P_i + 0{,}2P_i^2$
Demandas:
1ª mês - 40 (D_1)
2ª mês - 60 (D_2)
3ª mês - 80 (D_3)
Resolução: *Backward*



Problema de Produção Contínua

Inicialização: $f_3(X_3) = 4X_3 = 0$

Estágio 3: $X_3 = X_2 + P_3 - D_3$ ou $P_3 = 80 - X_2$ (A)

$$f_2(X_2) = \min_{P_3} [4X_2 + C_3(P_3) + f_3(x_3)] = [4X_2 + 50(80 - X_2) + 0{,}2(80 - X_2)^2]$$

$$f_2(X_2) = 0{,}2x_2^2 - 78x_2 + 5280$$

Problema de Produção Contínua

Estágio 2: $X_2 = X_1 + P_2 - D_2$ ou $X_2 = X_1 + P_2 - 60$ (B)

$f_1(X_1) = \min_{P2} [4X_1 + C_2(P_2) + f_2(X_2)] =$

$$= \min_{P2} [4X_1 + 50P_2 + 0{,}2P_2^2 + 0{,}2X_2^2 - 78X_2 + 5280] = (1)$$

Encontrar P_2 responsável por $f_1(x_1)$ e fazer a substituição em (1):

$$X_2 = X_1 + P_2 - 60 \; e \; calcular \; \frac{d(1)}{dP_2} = 0, \; para \; P_2 = P_2^*$$

Assim: $P_2^* = \dfrac{130 - X_1}{2}$ (C)

$$f_1(X_1) = 0{,}1X_1^2 - 72X_1 + 8990$$

Problema de Produção Contínua

Estágio 1: $X_1 = X_0 + P_1 - D_1 \;\; ou \;\; X_1 = P_1 - 40$ (D)

$$f_0(X_0) = \min_{P_1} \left[4X_0 + C_1(P_1) + f_1(X_1)\right] =$$

$$\min_{P_1} \left[50\,P_1 + 0{,}2\,P_1^2 + 0{,}1\,X_1^2 - 72\,X_1 + 8990\right] \quad = (2)$$

Substituindo $X_1 = P_1 - 40$ em (2) e calculando

$$\frac{d(2)}{dP_1} = 0, com \;\; P_1 = P_1^*$$

Tem-se: P_1*= 50 e $f_0(X_0)$ = 11.280 (Custo mínimo)

Problema de Produção Contínua

Recuperação da trajetória:

P_1*= 50 , usando (D): X_1= 50 – 40 = 10

X_1=10, usando (C): $P_2* = \dfrac{130 - 10}{2} = 60 -> X2 = 10 + 60 - 60 = 10$

X_2=10, usando (A): P_3*= 80 – 10 = 70

Portanto deve-se produzir 50 unidades no mês 1, 60 unidades no mês 2 e 70 unidades no mês 3.

O custo mínimo total será de $ 11.280 - $f_0(x_0)$

Recursão não aditiva: ao invés de somar deve-se multiplicar os custos elementares

Exemplo:

Um estudante deve fazer 3 exames, matemática, física e química, e não pode ser reprovado em nenhum deles.

Conhece-se as probabilidades dele ser reprovado em cada exame em função do número de horas de estudo que ele dedique ao assunto.

O aluno deseja escolher o número de horas que deverá estudar de cada assunto para minimizar a probabilidade de reprovação, sendo que ele tem um número determinado de horas disponíveis para esta preparação.

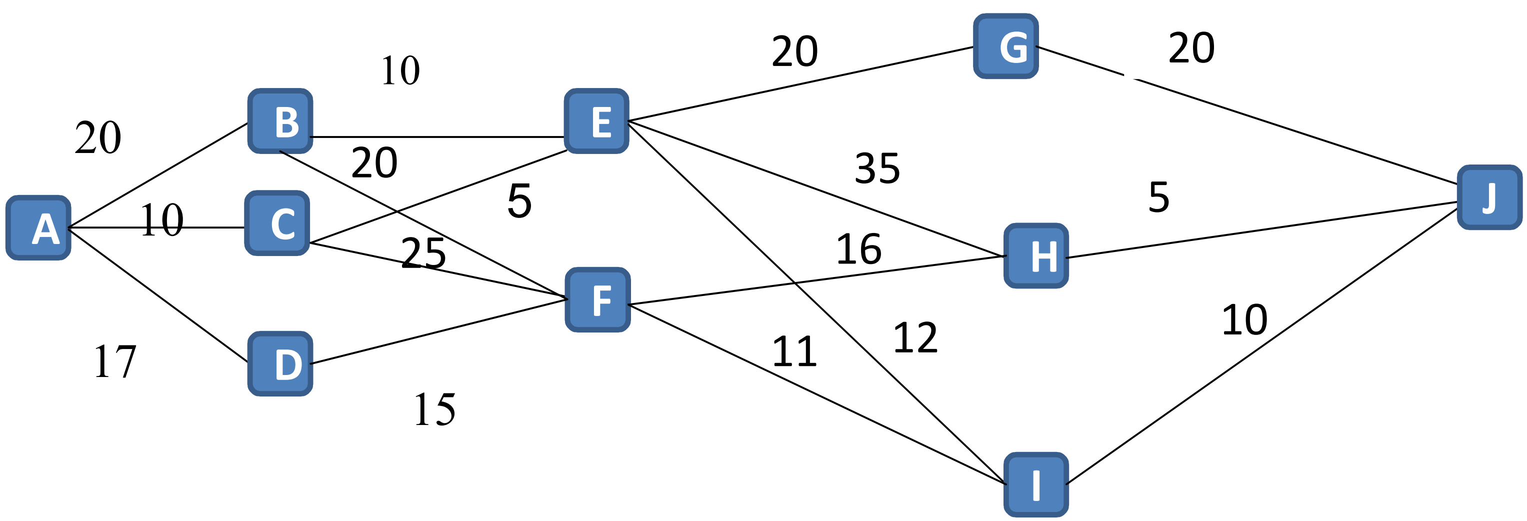
Problema do estudante: 8 horas disponíveis

Horas de Estudo/Disciplina e Probabilidade de ser reprovado

Horas de Estudo	Matemática	Física	Química
0	0,9	1,0	0,95
1	0,8	0,9	0,85
2	0,6	0,8	0,65
3	0,3	0,5	0,4
4	0,25	0,3	0,2

Recursão não aditiva: Problema de Sobrevivência

A macaca Chita avisou a Tarzan que Jane se encontra prisioneira na cidade dos Gorilas. Antes de seguir em encontro de Jane, Tarzan considerou todas às trajetórias de cipós disponíveis, e os seus perigos no grafo adiante, onde os valores numéricos representam (em %) a probabilidade de vir a ser morto por algum animal selvagem.



Problema de Sobrevivência

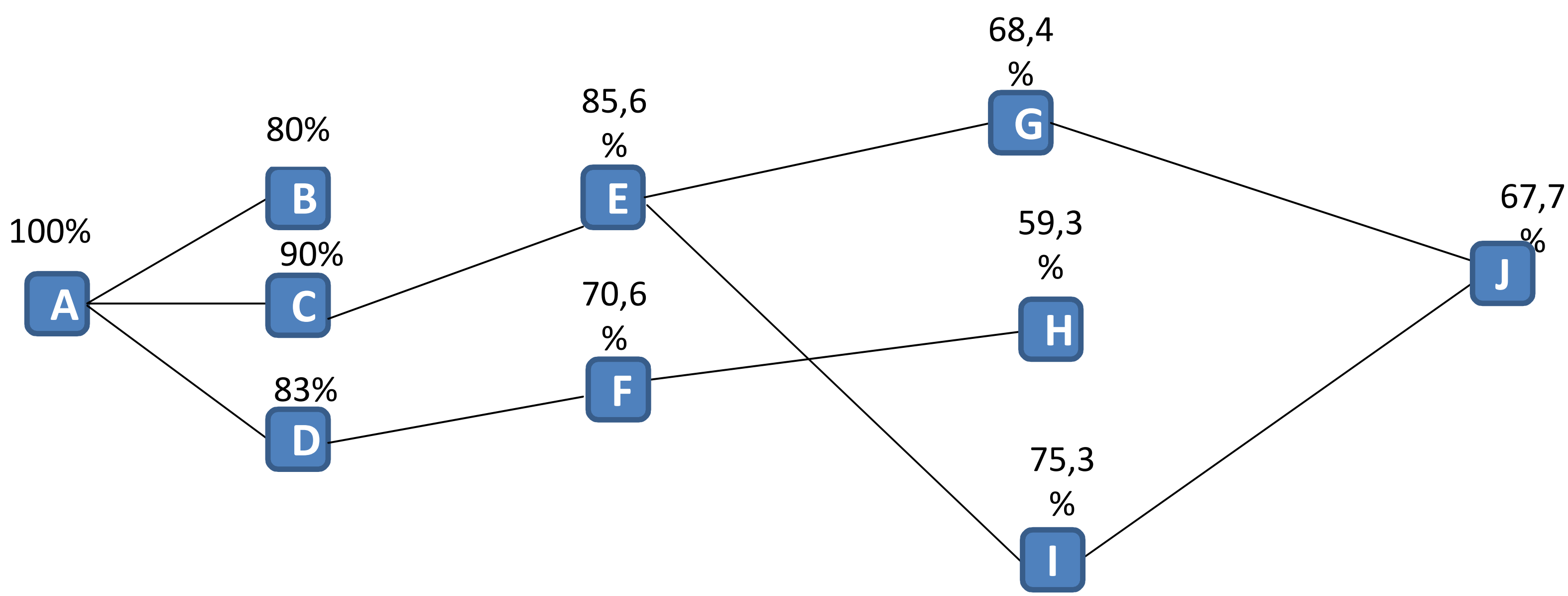
Sabendo que Tarzan foi educado na Inglaterra e que, portanto, sabe Programação Dinâmica e não perderá a fleugma numa situação como essa, determine qual será a sua trajetória.

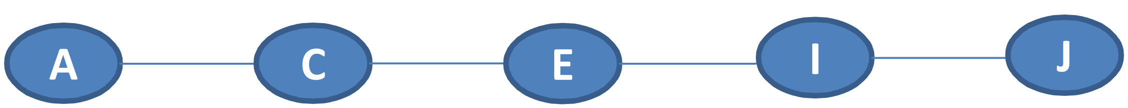
Resolução sobre o grafo: *Forward*.

O objetivo é maximizar a probabilidade de Tarzan chegar vivo até Jane = produto das probabilidades de sobrevivência de Tarzan, nas rotas intermediárias entre A e J por ele utilizadas.

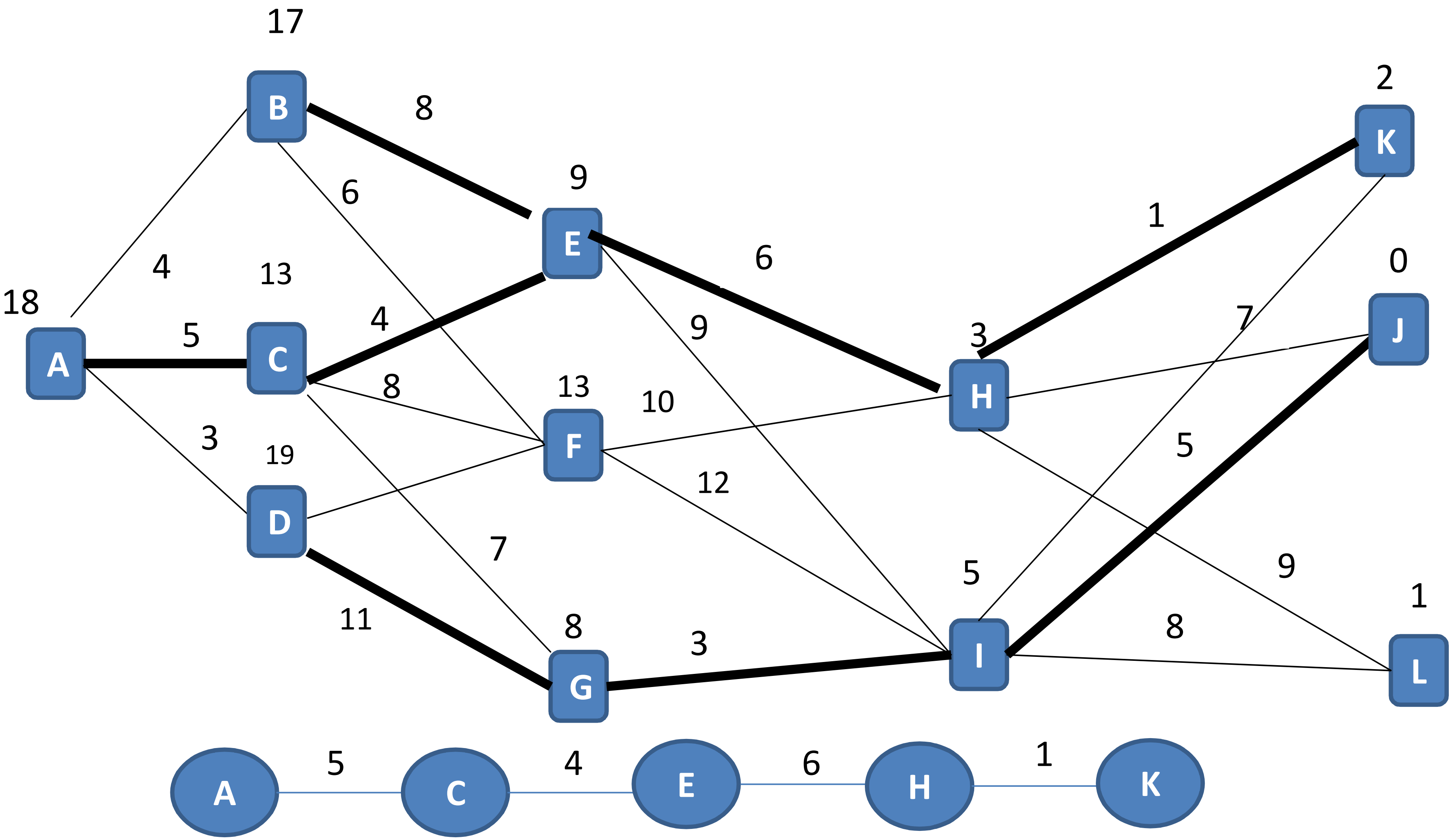
Os números acima de cada nó do grafo abaixo correspondem a probabilidade de Tarzan saindo de A chegar a esse nó vivo. Exemplificando, na Figura abaixo, a probabilidade de Tarzan atingir vivo o nó E é de 85,6%, e até o nó H essa probabilidade cai para 59,3%, e assim por diante. No destino final em J, a probabilidade é 67,7%.

A solução do problema será Tarzan usar a rota abaixo, que permitirá a ele a chance máxima de 67,7% de chegar até Jane:





Custos Terminais – CT: O enfoque é o mesmo já apresentado.



Problema de Produção Discreta com Estocagem

Meta: Obter a programação da produção da fábrica com menor custo de produção e estocagem.

Dados: Estoque inicial = 1500, estoque final (5° mês) = 0.

Produz lotes de 500 peças ao custo de $ 500 ou Lotes de 1000 peças ao custo de $800.

Custo de estocagem mensal/peça = $ 0,2.

Previsão de vendas					
Mês	1	2	3	4	5
Vendas	1500	1000	500	500	1500

Problema de Produção Discreta com Estocagem

Resolução: *Backward*.

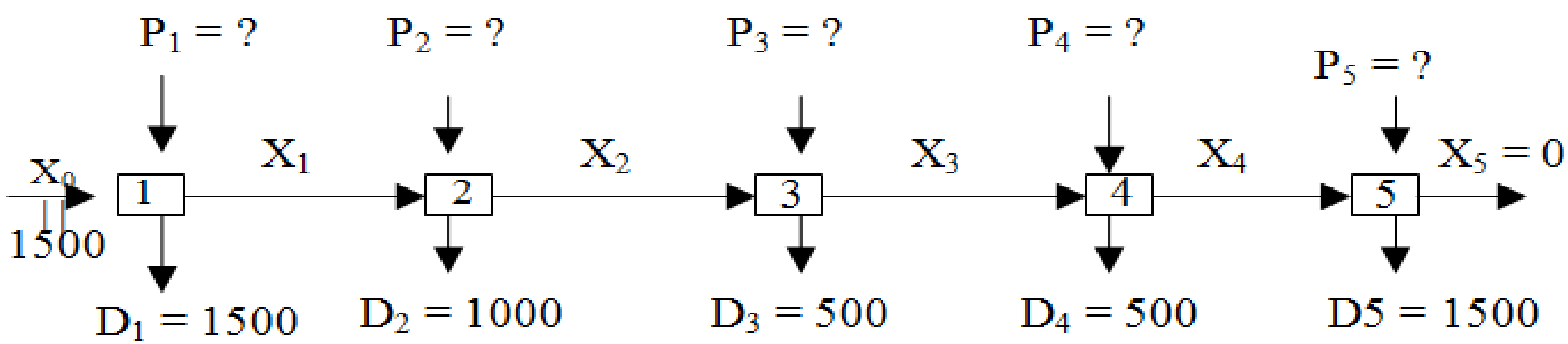
X_i = *Variável de Estado* = Estoque ao final do mês *i*.

P_i = *Decisão* = Quanto produzir no mês *i*.

D_i = *Demanda* no mês *i* = Previsão de vendas no mês *i*.

Estágios: estão associados a cada mês (k = 0, 1, 2, 3, 4).

Modelo de Programação Dinâmica:



Problema de Produção Discreta com Estocagem

Funções de custo do modelo: C(P)= Custo produção, CA(x)=Custo armazenagem.

$$\mathbf{C(P)} = \begin{cases} \mathbf{\$\ 0,\ SE\ P = 0} \\ \mathbf{\$\ 500,\ SE\ P = 500} \\ \mathbf{\$\ 800,\ SE\ P = 1000} \end{cases} \quad \mathbf{,} \quad \mathbf{CA(X) = O{,}2\ X}$$

Equação de transição de estado: $X_{i-1} + P_i = X_i + D_i$ para cada mês ***i.***

Definindo:

$F_i\ (X_i\ ,\ P_{i+1}\ )$ = Custo Remanescente a partir do mês *i*.

$f_i(x_i)$ = Custo Remanescente **Mínimo** a partir do mês *i*.

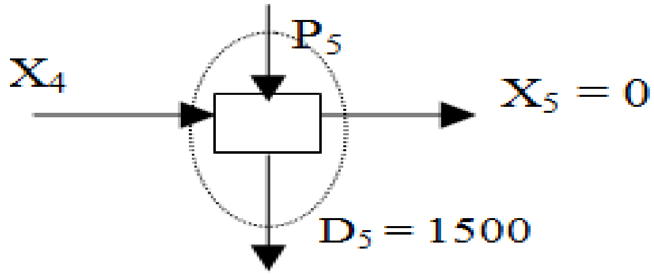
Assim tem-se a Função objetivo:

$$f_i(X_i) = \underset{p_{i+1}}{\mathrm{Min}}\ (F_i\ (X_i, P_{i+1})) = \underset{p_{i+1}}{\mathrm{Min}}\ (C_i(P_{i+1}\ ) + 0{,}2X_i + f_{i+1}(X_{i+1})).$$

Problema de Produção Discreta com Estocagem

Análise Sequencial dos Estágios do Modelo

- Ver resolução completa na planilha PD - prod e estocagem discreta -



Inicialização: $X_5 = 0$ e $f_5\,(X_5\,) = 0$.

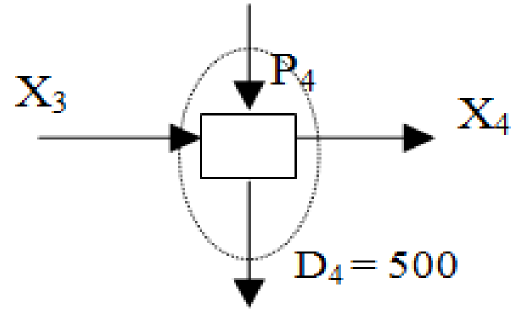
Estágio 4 (Mês 5):

Equação de transição:
$$\begin{cases} X_5 = X_4 + P_5 - D_5 \Rightarrow \\ X_4 = 1500 - P_5 . \end{cases}$$

$$f_4(X_4) = \min_{P_5} F_4(X_4, P_5) = \min_{P_5} [C_4(P_5) + 0{,}2X_4 + f_5(X_5)] \Rightarrow$$

$$f_4(X_4) = \min_{P_5}[C_4(P_5) + 0{,}2(1500 - P_5) + 0].$$ *Considerar cada* (X_4, P_5).

Estágio 3 (Mês 4) - Equação de transição :



$$\begin{cases} \mathbf{X_4 = X_3 + P_4 - D_5} \Rightarrow \\ \mathbf{X_3 = X_4 + 500 - P_4.} \end{cases}$$

$$f_3(X_3) = \underset{P_4}{\mathrm{Min}}\, F_3(X_3, P_4) = \underset{P_4}{\mathrm{Min}}\, [C_3(P_4) + 0{,}2X_3 + \mathbf{f_4(X_4)}] \Rightarrow$$

$$f_3(X_3) = \underset{P_4}{\mathrm{Min}}[C_3(P_4) + 0{,}2(X_4 + 500 - P_4) + \mathbf{f_4(X_4)}]$$

Fazer para os valores viáveis de X_4 e usando os $\mathbf{f_4(X_4)}$ do estágio analisado anteriormente

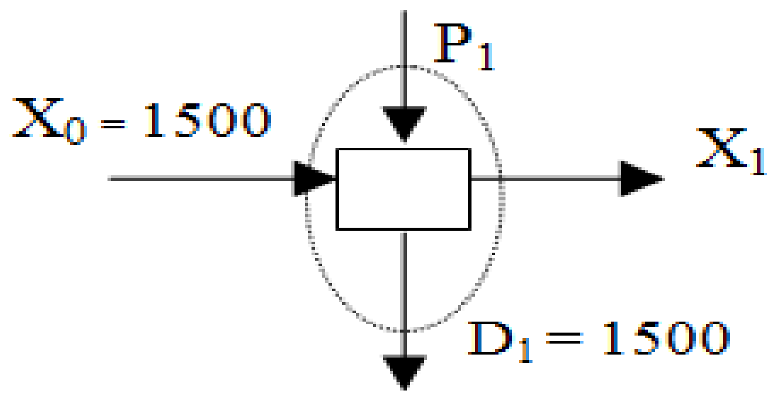
Este processo continua até o estágio 0 (mês 1)

Ver resolução completa na planilha PD - prod e estocagem di

Problema de Produção Discreta com Estocagem

Análise Sequencial dos Estágios do Modelo

Estágio 0 (Mês 1):



Equação de transição:

$$\begin{cases} \mathbf{X_1 = X_0 + P_1 - D_1} \Rightarrow \\ \mathbf{X_1 = P_1.} \end{cases}$$

Ver resolução completa na planilha PD - prod e estocagem discreta

Problema de Produção Discreta com Estocagem

Análise Sequencial dos Estágios do Modelo

$$f_0(X_0) = \underset{P_1}{\text{Min}}\, F_0(X_0, P_1) = \underset{P_1}{\text{Min}}\, [C_0(P_1) + 0{,}2X_0 + f_1(X_1)] \Rightarrow$$

A partir de X_1 e $f_1(X_1)$ tem-se: $f_0(X_0) = 3300$, $P_1 = 0$, $X_0 = 1500$.

Recuperação da trajetória (Programação da Produção)					
Mês	1	2	3	4	5
Produção	0	1000	500	1000	1000
Custo mínimo = $ 3300					

Ver resolução completa na planilha PD - prod e estocagem discreta

Princípio da Otimalidade e a Formalização da Programação Dinâmica

A aplicação da Programação Dinâmica-PD baseia-se fundamentalmente naquele que é conhecido como Princípio de Otimalidade de Bellman:

"Uma política de decisões ótimas só pode ser formada por subpolíticas ótimas":

A verificação da validade:

Considere uma subpolítica da política de tomada de decisão ótima;

Se essa subpolítica não for ótima, existe outra subpolítica melhor, a qual, completada pelo restante da política considerada, poderia melhorar a solução ótima;

Isto contraria a hipótese efetuada o que verifica a validade do Pri

Princípio da Otimalidade e a Formalização da Programação Dinâmica

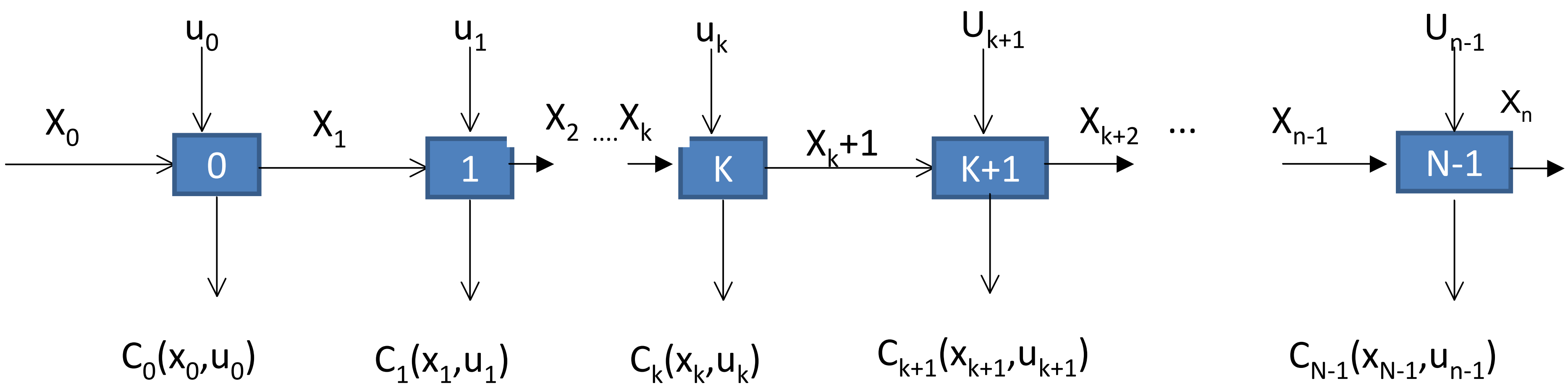
Como visto nos exemplos, existem certos elementos que devemos identificar num problema a ser resolvido pela PD.

Essa identificação nem sempre é fácil, e depende mesmo de uma certa experiência na área por parte do analista de Pesquisa Operacional.

Admitindo que essa etapa já foi cumprida, foram determinadas:

as decisões, os estágios, os estados, os custos elementares e a equação de transição (interligação entre os estágios).

Assim, pode-se montar um modelo sequencial:



X_i= Variável de Estado no início do Estágio *i*.

u_i= Decisão tomada no Estágio *i*, quando o Estado era $x_{i.}$ Ela leva o sistema ao Estado x_{i+1} do Estágio *i+1*,

$C_i(x_i,u_i)$ = Custo elementar da decisão u_i.

Equação de transição: $x_{k+1}=g_k(x_k,u_k)$

$$min\left[\sum_{k=0}^{N-1} C_k(x_k,u_k)\right], S.a\ :\begin{Bmatrix} x_{k+1} = g_k(x_k,u_k) \\ x_k \in X_k, u_k \in U_k \end{Bmatrix}\ para\ \ k = 0,1,2,...,\ \ (N-1)$$

X_k=conjunto dos estados viáveis no estágio k; U_k= conjunto das decisões admissíveis no estágio *k*, quando o estado é x_k

Formalização da Programação Dinâmica

O problema geral, muitas vezes, pode ser resolvido globalmente determinando-se uma solução por algum método de otimização.

Na PD divide-se o problema global de encontrar N decisões ótimas (uma para cada estágio), em N subproblemas com uma única decisão a ser otimizada em cada um deles.

O enfoque da resolução será o de *Backward*, mas vale também para *Forward*, bastando definir convenientemente a função objetivo de cada subproblema.

Formalização da Programação Dinâmica

A função objetivo para o estágio *k* :

$$f_k(x_k) = \min \left[\sum_{i=k}^{N-1} C_i(x_i, u_i) \right]$$

Se a Propriedade de Decomponibilidade é válida, tem-se:

$$f_k(x_k) = \min_{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{n-1}} \left[C_k(x_k, u_k) + \sum_{i=k+1}^{N-1} C_i(x_i, u_i) \right] =$$

$$\min_{u_k} \left[C_k(x_k, u_k) + \min_{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{n-1}} \sum_{i=k+1}^{N-1} C_i(x_i, u_i) \right]$$

Usando a definição da função objetivo para o estágio $k+1$, pode-se obter a equação de recorrência para cálculo de $f_k(x_k)$ como função de $f_{k+1}(x_{k+1})$ que, como optou-se pela resolução de *Backward*, já terá sido determinada.

Formalização da Programação Dinâmica

Assim tem-se como Subproblema do estágio *k*.

$$f_k(x_k) \min_{u_k} \left[C_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \right]$$

$$s.a: \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = g_k(x_k, u_k) \\ x_k \in X_k, u_k \in U_k \\ f_{k+1}(x_{k+1}) \; conhecida \end{array} \right\}$$

A técnica consiste em otimizar f_{N-1} (X_{N-1}) considerando as condições finais de X_N.

Calcular cada $f_i(x_i)$ sobre os estágios i = (N-2), ..., 2,1,0, obtendo a política de decisões completa para o problema: u^*_0, $u^*_{1,}$ $u^*_{N-1,}$ e o valor da função objetivo do sistema global, $F_0(x_0)$.

Formalização da Programação Dinâmica

Para determinar a sequência de estados ocupados pelo sistema (Recuperação da trajetória) nos diversos estágios admitidos, basta seguir o sentido inverso dos cálculos efetuados, isto é, fazer com x_0 e u^*_0 determinar-se x_1, com x_1 e u_1^* determina-se x_2, e assim por diante até x_N.

Deve-se notar que não serão exigidos cálculos adicionais para a recuperação da trajetória ótima, pois estes já foram efetuados quando da obtenção dos $f_k(x_k)$