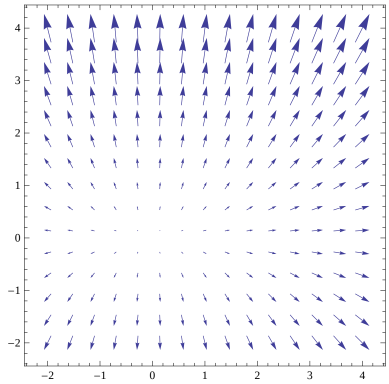
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Considere o diagrama de fase de um sistema de EDOs:



A origem é uma solução de equilíbrio

☐ estável mas não assimptoticamente estável;

☐ assimptoticamente estável;

☒ instável.

2. Determine a solução geral da EDO

$$y'' - 2y' + y = 4t$$

sabendo que existe uma solução particular do tipo $\widetilde{y}(t) = A + Bt$. Qual a solução que verifica $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$?

Cálculos auxiliares:

O polinómio associado a EDO homogénea $y'' - 2y + y = 0$ é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, que tem uma única raiz $\lambda = 1$. Assim, um SFS da EDO homogénea é $\{e^t, te^t\}$ e a solução geral da EDO será

$$y(t) = \widetilde{y}(t) + C_1e^t + C_2te^t$$

com $\widetilde{y}(t)$ uma solução particular da EDO inicial.

É preciso determinar A e B tais que $\widetilde{y}(t) = A + Bt$ é solução da EDO completa.

Tem-se que $\widetilde{y}'(t) = B$ e $\widetilde{y}''(t) = 0$, donde

$$0 - 2B + (A + Bt) = 4t$$

e portanto $B = 4$ e $A = 8$, visto que $\{1, t\}$ são independentes. A solução geral da EDO inicial é então:

$$y(t) = 8 + 4t + C_1e^t + C_2te^t, \qquad t \in \mathbf{R}$$

Derivando obtemos $y'(t) = 4 + C_1e^t + C_2e^t + C_2te^t$. A solução verificará as condições iniciais indicadas se:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = 8 + C_1 \\ -1 = y'(0) = 4 + C_1 + C_2 \end{cases}$$

Assim, $C_1 = -7$ e $C_2 = 2$, donde obtemos

$$y(t) = 8 + 4t - 7e^t + 2te^t$$