Capítulo 5 - Séries de potências

Até aqui limitámo-nos a estudar séries com termos constantes, ou seja, as séries numéricas . Neste capítulo vamos estudar séries em que a sucessão geradora envolve a potência natural de uma variável (ou de uma variável menos uma constante), ou seja, as séries de potências . Vamos estudar, em particular, a série de Taylor e a série de MacLaurin .

Vamos ainda ver como é que que uma função f com boas propriedades de derivabilidade pode ser aproximada, em torno de cada ponto, por um polinómio p, que pode ser escolhido de tal modo que f e p, juntamente com as respetivas derivadas até certa ordem, assumam o mesmo valor em determinado ponto, fixado *a priori*.

5.1 Definição de série de potências

Sendo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ constantes e x uma variável, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

designa-se por *série de potências de x* .

Substituindo a variável x por uma constante obtém-se uma série numérica que pode ser convergente ou divergente.

Dada uma série de potências, o problema fundamental é pois o de determinar os valores de x para os quais a série numérica resultante dessa substituição é convergente.

5.1 Definição de série de potências

Exemplos

1. *Qualquer série de potências de x converge para $x = 0$, uma vez que, neste caso, a série reduz-se ao primeiro termo.*

2. *A série de potências*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$$

não converge para mais nenhum valor de x além de $x = 0$.

Exemplos

3. *A série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge para todos os valores reais de x.

Para ver que assim acontece, apliquemos o critério de D'Alembert à série dos módulos. Obtemos

$$\lim_n \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_n |x| \frac{1}{n+1} = 0.$$

e concluímos que a série é absolutamente convergente qualquer que seja x.

5.2 Raio e intervalo de convergência

Teorema

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge para $x = x_0 \neq 0$, então converge absolutamente para todos os valores de x tais que $|x| < |x_0|$.

Observações

1. *A convergência da série em algum ponto $x = x_0 \neq 0$ implica a convergência absoluta para*

$$x \in \left]-x_0, x_0\right[\text{, se } x_0 > 0, \qquad ou \qquad x \in \left]x_0, -x_0\right[\text{, se } x_0 < 0,$$

   ou seja, o conjunto de valores de x em que a série é convergente tem de ser um intervalo centrado em $x = 0$.

2. *Se a série não converge para $x = x_0 \neq 0$, então não converge para qualquer valor x_1 tal que*

$$|x_1| > |x_0|,$$

   como resulta do teorema anterior.

5.2 Raio e intervalo de convergência

Corolario

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *, é verdadeira uma e uma só das seguintes afirmações:*

a) *a série converge apenas para* $x = 0$*.*

b) *a série converge absolutamente para todos os valores de* x*.*

c) *a série converge absolutamente para todos os valores de* x *em algum intervalo aberto* $]-R, R[$ *e diverge para* $x < -R$ *e* $x > R$*.*
Neste caso, nos pontos $x = R$ *e* $x = -R$ *a série pode ser absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.*

5.2 Raio e intervalo de convergência

Definição

O número real positivo R *e o intervalo* $]-R, R[$ *designam-se por raio de convergência e intervalo de convergência da série de potências* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*, respetivamente.*

De acordo com o teorema apresentado, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ deve ser de uma das formas:

a) um ponto isolado $x = 0$ (intervalo degenerado $[0, 0]$), sendo $R = 0$;

b) a reta real $]-\infty, +\infty[$, sendo $R = +\infty$;

c) um intervalo centrado em 0,

$$[-R, R], \quad [-R, R[, \quad]-R, R] \quad \text{ou} \quad]-R, R[.$$

5.2 Raio e intervalo de convergência

O raio de convergência, R, pode usualmente ser determinado aplicando o critério de D'Alembert (ou da razão) à série de potências.

Se

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| = \left(\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) |x| \qquad \text{existe,}$$

então a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para x tal

$$\left(\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) |x| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\ell}$$

onde $\ell = \displaystyle\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. A série diverge se $|x| > \dfrac{1}{\ell}$.

5.2 Raio e intervalo de convergência

Assim, se

$$\ell = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{existe} \quad \text{ou} \quad \ell = +\infty$$

a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

(Note-se que se $\ell = 0$, então $R = +\infty$ e se $\ell = +\infty$, então $R = 0$.)

Os pontos $x = -R$ e $x = R$ têm de ser estudados separadamente.

5.2 Raio e intervalo de convergência

Para além das séries de potências de x estamos também interessados em séries de potências de $(x-c)$, isto é, séries da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

Fazendo uma mudança de variável dada por

$$X = x - c,$$

obtém-se, a partir da série anterior, uma série de potências de X ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n,$$

à qual se podem aplicar os resultados apresentados.

5.2 Raio e intervalo de convergência

Assim, o intervalo de convergência da série de potências de $x - c$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n,$$

deve ser de uma das formas:

a) um ponto isolado $x = c$ (intervalo degenerado $[c, c]$), sendo $R = 0$;

b) a reta real $]-\infty, +\infty[$, sendo $R = +\infty$;

c) um intervalo centrado em c,

$$[c-R, R+c], \quad [c-R, c+R[, \quad]c-R, c+R] \quad \text{ou} \quad]c-R, R+c[.$$

5.3 Polinómio de Taylor

Dada uma função $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I, que é n vezes derivável no ponto $a \in I$, existem as constantes

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a)$$

com as quais podemos construir o polinómio

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

ou ainda

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

a que se chama polinómio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a.

No caso particular de ser $a = 0$, o polinómio de Taylor também costuma designar-se por polinómio de MacLaurin de ordem n da função f .

5.3 Polinómio de Taylor

Derivando sucessivamente, vem

$$
\begin{aligned}
P'_{n,a}(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \tfrac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} \\
P''_{n,a}(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a) + \tfrac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{(n-2)} \\
& \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
P^{(n-1)}_{n,a}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a) \\
P^{(n)}_{n,a}(x) &= f^{(n)}(a)
\end{aligned}
$$

e as restantes derivadas são identicamente nulas.

Em particular, no ponto a tem-se

$$P_{n,a}(a) = f(a), \quad P'_{n,a}(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Dizemos que f e $P_{n,a}$ possuem um contato de ordem n no ponto a.

5.3 Polinómio de Taylor

Pode mostrar-se que não existe outro polinómio de grau $\leq n$ que, juntamente com as suas derivadas até à ordem n, verifique condições como as que figuram acima. De facto, vale o seguinte resultado.

Teorema

[Unicidade do Polinómio de Taylor]

O polinómio $P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n cujas derivadas no ponto a, desde a ordem 0 até à ordem n, coincidem com as correspondentes derivadas de f no ponto a.

Exemplos

[Polinómio de Taylor de algumas funções]

Determinemos o polinómio de Taylor com a ordem indicada, em torno do ponto $a = 0$ *(polinómio de MacLaurin), para cada uma das seguintes funções;*

1. $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ *(ordem n);*

   Como

   $$f^{(k)}(x) = e^x,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

   vem em particular

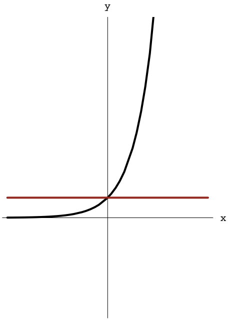
   $$f^{(k)}(0) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\,,$$

   donde

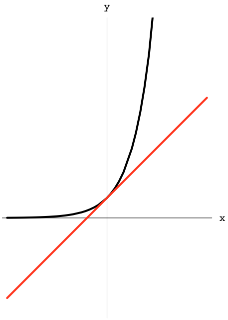
   $$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Exemplos

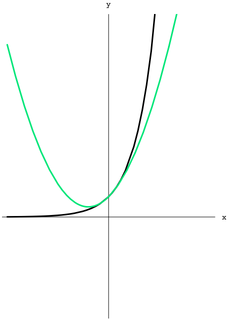
Nas figuras seguintes estão representados os polinómios de ordens $0, 1, 2, 3, 4, 5$.



função f
polinómio $P_{0,0}$

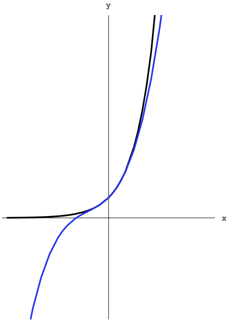


função f
polinómio $P_{1,0}$

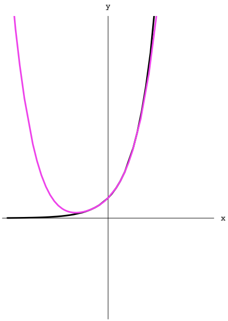


função f
polinómio $P_{2,0}$

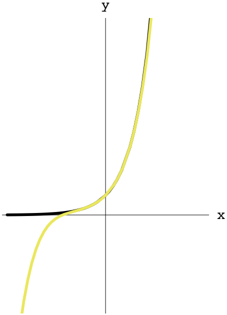
Exemplos



função f
polinómio $P_{3,0}$



função f
polinómio $P_{4,0}$



função f
polinómio $P_{5,0}$

Exemplos

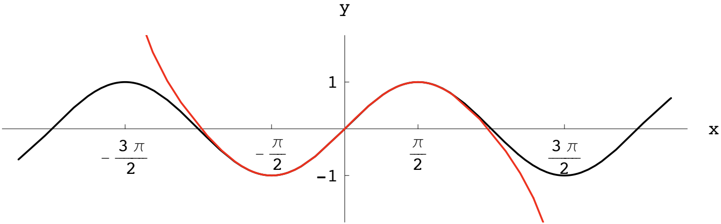
2. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}$ *(ordem $2n+1$);*

tem-se

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \textit{para} \quad k = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \\ 1 & \textit{para} \quad k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -1 & \textit{para} \quad k = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

e consequentemente

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ;$$

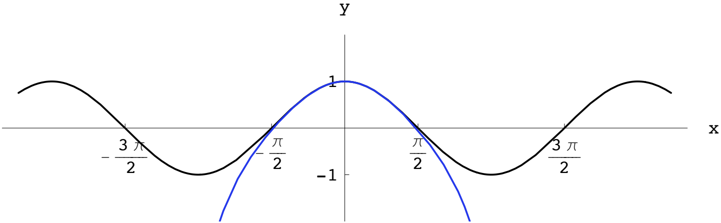


Função seno (preto) e polinómio de MacLaurin de grau 3 (vermelho).

Exemplos

3. $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ *(ordem 2n);*
   com uma resolução muito semelhante à do exemplo 2., sai

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ;$$



Função cosseno (preto) e polinómio de MacLaurin de grau 2 (azul).

Aproximação de funções

Já sabemos que, sendo f derivável num ponto a, então para x próximo de a, a função f pode ser aproximada pelo polinómio de grau ≤ 1 que define a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, ou seja, pelo polinómio $f(a) + f'(a)(x - a)$. Vamos agora melhorar esta aproximação. Mais concretamente, vamos ver que uma função f que é n vezes derivável em a pode ser aproximada, numa vizinhança de a, pelo seu polinómio de Taylor de ordem n em torno do ponto a.

O resultado fundamental sobre a aproximação de funções por intermédio do polinómio de Taylor é apresentado no teorema seguinte.

Aproximação de funções

Teorema

[Fórmula de Taylor infinitesimal]

Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$. Então:

i) *para todo $x \in I$, tem-se*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

onde $P_{n,a}$ é o polinómio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a e $R_{n,a}$ é uma função tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0;$$

ii) *$P_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n que obedece a uma decomposição como a de i) para f, com $R_{n,a}$ verificando a condição em i) de pequenez.*

Aproximação de funções

A função $R_{n,a} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$ designa-se por *resto de Taylor* de ordem n da função f em torno do ponto a . À expressão

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \qquad \text{com} \qquad \lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

chama-se fórmula de Taylor de ordem n para a função f em torno do ponto a .

Observação

A segunda condição do diapositivo anterior exprime o facto de o resto de Taylor tender para 0 *mais rapidamente do que* $(x-a)^n$ *tende para* 0 *e, portanto, muito mais rapidamente do que* x *tende para* a*.*

O polinómio de Taylor $P_{n,a}$ *pode ser utilizado para aproximar a função* f *na vizinhança do ponto* a*. A precisão de tal aproximação depende da ordem* n *do polinómio: quanto mais elevada for a ordem do polinómio melhor será a aproximação considerada.*

Para cada x *numa vizinhança de* a*, ao tomarmos* $f(x)$ *aproximado pelo correspondente valor* $P_{n,a}(x)$*, o erro cometido é dado pela diferença entre o valor exato e o valor aproximado, ou seja, por*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x),$$

que é pequeno no sentido da segunda condição referida.

Estimativa do erro

No contexto da aproximação de funções por polinómios através da fórmula de Taylor, torna-se fundamental fornecer uma estimativa para o erro cometido. Ter-se-á $R_{n,a}(x)$ positivo ou negativo, consoante o valor aproximado é menor ou maior do que o valor exato mas, em geral, apenas nos interessa estimar a grandeza

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|\,.$$

Teorema

[Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange]
Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função* $n+1$ *vezes derivável no intervalo aberto* I *e* a *um ponto de* I*. Então, para cada* $x \in I \setminus \{a\}$*, existe* $c_x \in \,]a, x[$ *ou* $c_x \in \,]x, a[$ *tal que*

$$f(x) = P_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Estimativa do erro

Observação

A última parcela da fórmula no teorema define o chamado resto de Lagrange. A equação é conhecida por fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

A fórmula apresentada é essencial para controlar a precisão de qualquer aproximação polinomial através da fórmula de Taylor, porque permite obter uma estimativa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo correspondente polinómio de Taylor com uma certa ordem. De facto,

$$|R_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1},$$

onde M representa o máximo de $|f^{(n+1)}|$ no intervalo de extremos a e x, desde que exista.

5.4 Série de Taylor

Uma vez que os valores de f e das suas n derivadas coincidem com os valores do polinómio de Taylor e das suas primeiras n derivadas, no ponto $x = a$, é de esperar que, à medida que n cresce, o polinómio de Taylor de grau n proporcione melhores aproximações para a função f, pelo menos em algum intervalo centrado no ponto $x = a$. Esta questão levanta o problema de encontrar os valores de x para os quais os polinómios de Taylor convergem para $f(x)$ quando $n \to \infty$.

5.4 Série de Taylor

Por outras palavras, para que valores de x se verifica

$$f(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Esta série de potências é chamada série de Taylor para a função f, no ponto $x = a$.

No caso particular de ser $a = 0$, a série de Taylor também costuma designar-se por série de MacLaurin da função f .

A fórmula de Taylor de ordem n para a função f em torno do ponto a expressa $f(x)$ como soma do polinómio de Taylor de ordem n em torno do ponto $x = a$ e do resto de ordem n

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Conclui-se assim o resultado que se segue.

Teorema

A igualdade

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

verifica-se se e só se

$$\lim_{n} R_{n,a}(x) = 0.$$