Notação: u' significa $\dfrac{du}{dt}$.

1. Determine os pontos de equilíbrio, classifique-os e represente os diagramas de fase dos seguintes sistemas de EDOs não-lineares. Considere apenas $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_0^+$ e $t \in \mathbb{R}_0^+$:

   (a) $\begin{cases} x' = x^2 + 2y \\ y' = -x - y \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x' = x(8 - 4x - y) \\ y' = y(3 - 3x - y) \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x' = x(4 - 2x - 2y) \\ y' = y(9 - 6x - 3y) \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x' = x(4 - 2x - y) \\ y' = y(9 - 3x - 3y) \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x' = x(1 - 2x - y) \\ y' = y(-2 + 6x) \end{cases}$

2. Interprete as soluções das alíneas $(c), (d)$ e (e) do exercício anterior, no caso em que os sistemas representam a evolução no tempo $t \in \mathbb{R}_0^+$ de um sistema populacional, onde $x(t)$ e $y(t)$ denotam o número de indivíduos (no instante t) de duas espécies em competição.

3. Considere o sistema
$$\begin{cases} x' = kx(1 - ay) \\ y' = y(bx - s), \end{cases}$$
onde todos os parâmetros são positivos.

   (a) Usando
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx - s)}{kx(1 - ay)}$$
mostre que
$$\ln y - ay + \frac{s}{k}\ln x - \frac{bx}{k} = C(x, y), \quad \text{com } C \text{ constante ao longo das curvas integrais.}$$

   (b) Usando alínea anterior, represente graficamente as soluções do sistema dado com $k = a = 1, b = 2, s = 4$.

4. Considere um sistema que representa o movimento de uma partícula de massa m num potencial $V(x)$:
$$\begin{cases} x' = y \\ my' = -ky - \dfrac{dV}{dx} \end{cases}$$

   (a) Se $m = 1$, $k = 0$ (i.e. o sistema é conservativo) e $V(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, determine os pontos de equilíbrio do sistema, represente graficamente o espaço de fase e descreva o movimento da partícula.

   (b) Repita o exercício da alínea anterior para o caso dissipativo com $k = 1$.

5. Considere o sistema dinâmico associado ao pêndulo mecânico:
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky - \sin x \end{cases}$$

   (a) Se $k = 0$ (i.e. o caso do pêndulo livre), determine os pontos de equilíbrio do sistema, represente graficamente o espaço de fase e descreva o movimento do pêndulo.

   (b) Repita o exercício da alínea anterior para o caso do sistema amortecido com $k = 1$.