Ficha n.º 1: MATRIZES

Exercício 1.1. Dê exemplo de uma matriz

a) quadrada de ordem 3.

b) rectangular de ordem 2×4.

c) rectangular de ordem 5×3.

d) linha de ordem 1×6.

e) coluna de ordem 2×1.

Exercício 1.2. Em cada caso escreva por extenso a matriz quadrada de ordem 3 cujos elementos são dados por

a)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}.$$

b)

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & se\ i = j \\ -1 & se\ |i-j| = 1 \\ 0 & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}.$$

Exercício 1.3. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

escreva a matriz $B = (b_{ij})$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \lambda & se\ i = j \\ a_{ij} & se\ i \neq j \end{cases}.$$

Exercício 1.4. Quais os elementos que constituem a diagonal de cada **uma das seguintes** matrizes ?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.5. Determine a, b e c de modo que as matrizes

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 0 \\ 0 & 0.8 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & b & 0 \\ a & 0.8 & c \end{pmatrix}$$

sejam iguais.

Exercício 1.6. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Calcule:

a) $A + D$.

b) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

c) BC.

d) CA.

e) AF.

f) CF.

g) AD e DA.
(Observação: Note que D comuta com A.)

h) EA e AE.
(Observação: Note que E se obtém de I_3 trocando entre si a segunda e a terceira linhas (ou colunas). Note o "efeito" em A que corresponde à multiplicação à esquerda (ou à direita) por E.)

i) $B - \lambda I_2$ e $A - \lambda I_3$, onde λ representa um número.
(Observação: Compare B e $B - \lambda I_2$. Compare A e $A - \lambda I_3$.)

j) $B\mathbf{u}$.
(Observação: Note que $\mathbf{u}$ é solução do sistema $B\mathbf{u} = \mathbf{v}$.)

k) $C\mathbf{x}$.
(Observação: Note que se tem $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sem que $C = O$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.)

Exercício 1.7. Simplifique a expressão seguinte onde A, B e C representam matrizes quadradas com a mesma ordem,

$$A(B + C) + B(CA)(A + B)C.$$

Exercício 1.8. Desenvolva a expressão $(A+B)^3$ no caso de:

a) A e B serem matrizes de ordem n quaisquer.

b) A e B serem comutáveis.

Exercício 1.9. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determine

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exercício 1.10. Exprima a seguinte equação matricial como um sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.11. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine uma matriz B quadrada de ordem 2, não nula, tal que $AB = O$. (Observação: Note que não existe uma lei do cancelamento do produto.)

b) Dê exemplo de matrizes não nulas X e Y tais que $AX = AY$ mas $X \neq Y$. (Observação: Quer dizer que $AX = AY$ não implica $X = Y$ ou $A = O$. Uma consequência de não se verificar uma lei de cancelamento do produto.)

Exercício 1.12. Dê exemplos de uma matriz simétrica de ordem 2 e de uma matriz simétrica de ordem 4.

Exercício 1.13. Calcule a transposta da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.14. A respeito das matrizes apresentadas no Exercício 1.6 calcule:

a) AC^T.

b) C^TB.

c) $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$.

d) $\mathbf{u}\,\mathbf{v}^T$.

e) $\mathbf{y}\,\mathbf{y}^T$.

f) $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$.

g) $\mathbf{u}^T B\,\mathbf{u}$ e $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$.
(Observação: Note que $\mathbf{u}^T B\,\mathbf{u}$ e $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$ são números.)

Exercício 1.15. Seja A uma matriz simétrica. Prove que P^TAP é simétrica.

Exercício 1.16. Verifique que a inversa de

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é igual a

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.17. Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

d)
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e)
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.18. Dada a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Use a definição para calcular a inversa verificando que a matriz M é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$.

b) Conclua que:

(i) Se a matriz M tem uma fila de zeros (linha ou coluna) então não é invertível.

(ii) Se a matriz M tem uma fila que é múltipla de outra então não é invertível.

(iii) Dê exemplo de uma matriz não invertível.

Exercício 1.19. Sejam A e B matrizes invertíveis.

a) Mostre que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$.

b) Se além disso $A + B$ é invertível verifique que $A^{-1} + B^{-1}$ é invertível sendo

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

Exercício 1.20. Prove que se A é uma matriz invertível então

a) $AB = O \quad \Longrightarrow \quad B = O.$

b) $AX = AY \quad \Longrightarrow \quad X = Y.$

(Observação: Compare este exercício com o Exercício 1.11.)

Exercício 1.21. Verifique que as matrizes seguintes são ortogonais.

a)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

b)

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.22. Prove que o produto de duas matrizes ortogonais **é ainda uma matriz** ortogonal.

Exercício 1.23. Justifique que a inversa duma matriz ortogonal é **uma matriz ortogonal**.

Exercício 1.24. Dê exemplo de uma matriz diagonal de ordem 5.

Exercício 1.25. Dê exemplos de matrizes triangulares inferiores de **ordem 2 e de ordem** 3.

Exercício 1.26. Dê exemplos de matrizes triangulares superiores de **ordem 2 e de ordem** 3.

Exercício 1.27. *a)* Prove que a matriz diagonal de ordem 2

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

é invertível se e só se $d_{11} \neq 0$ e $d_{22} \neq 0$, tendo-se então

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} \end{pmatrix}.$$

b) Generalize o resultado da alínea anterior.