Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

2.º teste de Análise
Engenharia Informática
22.06.2013

Duração: 2 horas.
Responda à Parte I e à Parte II em folhas de teste separadas.

As respostas às questões colocadas devem ser **todas cuidadosamente justificadas.**

Parte I

Exercício 1. Considere a função f, real de duas variáveis reais, definida por $f(x,y) = 8xy - \frac{1}{4}(x+y)^4$.

a) [1,5 valores] Mostre que os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são os únicos pontos críticos de f.

b) [1,5 valores] Classifique os pontos críticos de f.

Exercício 2. [3 valores] Seja $g(x,y) = x^2y$.
Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos da função g, sujeita à restrição definida por $x^2 + y^2 = 3$.

Exercício 3. Considere o integral duplo

$$I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} dy\,dx + \int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{x+1}} dy\,dx.$$

a) [1,5 valores] Esboce o domínio de integração.

b) [1,5 valores] Reescreva I, invertendo a ordem de integração.

c) [1,5 valores] Calcule I.

Parte II

Exercício 4. Considere $\mathcal{S} = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

a) [2 valores] No sistema de coordenadas cartesianas, complete a seguinte igualdade (de modo a obter uma proposição verdadeira):

$$\iiint_{\mathcal{S}} x\, d(x,y,z) = \int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots}\int_{\dots}^{\dots} \dots d\dots d\dots d\dots$$

b) [2,5 valores] Calcule o integral $\displaystyle\iiint_{\mathcal{S}} x\, d(x,y,z)$, usando um sistema de coordenadas que considere apropriado.

Exercício 5. Considere o campo vetorial $\vec{F}$, definido por $\vec{F}(x,y) = (4xy, 2x^2)$.

a) [2,5 valores] Verifique se $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo e, no caso afirmativo, encontre uma sua função potencial.

b) [2,5 valores] Calcule $\displaystyle\int_c \vec{F}\cdot ds$, em que c é a linha definida por $y = \boxed{x^2}$ desde o ponto de coordenadas $(0,0)$ até ao ponto de coordenadas $(1,1)$.