Universidade do Minho

Ano Letivo 2015/16

Caderno de Exercícios Propostos

Modelos Estocásticos de Investigação Operacional

1. *Processos Estocásticos e Programação Dinâmica Estocástica*
2. *Teoria de Filas de Espera*
3. *Gestão de Stocks ou Inventários*

1. Exercícios de Processos Estocásticos e de Programação Dinâmica Estocástica

Exercício 1.1: Cadeias de Markov ergódicas?

Das seguintes matrizes de probabilidades de transição, diga quais delas correspondem a processos Markovianos ergódicos. Para as restantes, identifique os estados recorrentes, transientes e absorventes.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & .8 & .2 \\ .4 & .6 & 0 \\ .3 & .5 & .2 \end{bmatrix} \qquad P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .6 \\ .4 & .2 & .4 \\ 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} .2 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .7 \\ .5 & .4 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_5 = \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 & .7 \\ .4 & .1 & .3 & .2 \\ .6 & .1 & .2 & .1 \\ .2 & 0 & 0 & .8 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.2: Cadeia de Markov ergódica

Um mecânico reparador que trabalha numa mina pode estar ocupado ou livre. Se estiver correntemente ocupado, a probabilidade de ainda estar ocupado passados 5 minutos é 0.5. Se estiver correntemente livre, a probabilidade de ainda estar livre passados 5 minutos é 0.9.

Defina estágios, estados e a matriz de probabilidades de transição (P).

Com base na análise das transições possíveis, calcule a probabilidade de encontrar o mecânico livre após 10 minutos de o ter encontrado ocupado. Depois determine a matriz P^2 e verifique que a probabilidade calculada anteriormente corresponde a um dos elementos desta matriz.

Determine também P^4 e P^8, e calcule uma estimativa da proporção limite do tempo durante o qual o mecânico estará ocupado. Confirme o resultado obtido através do cálculo do vetor de probabilidade limite.

Exercício 1.3: Cadeia de Markov ergódica

No início de cada dia de trabalho, uma dada máquina pode estar avariada ou em condições de funcionar. Se estiver a funcionar, há uma probabilidade de 0.05 de ficar na condição de avariada no início do dia seguinte. Se estiver avariada (no início de um dado dia), há a garantia de que vai ser arranjada nesse mesmo dia e estará por certo em condições de funcionar no início do dia seguinte.

Se a máquina estiver a funcionar na segunda-feira, qual a probabilidade de estar avariada no início da quarta-feira? E, em média, que fração de tempo passará a máquina avariada ao longo de cada mês?

Suponha agora que a máquina, se estiver avariada no início de um dado dia, demorará 1 ou 2 dias até ser arranjada, com probabilidades 0.7 e 0.3, respetivamente. (Em qualquer dos casos, considere que ficará sempre em condições de funcionar só no início do dia a seguir ao dia em que fica arranjada). Nestas condições, estime a nova fração de tempo que a máquina permanecerá avariada ao longo de cada mês.

Exercício 1.4: Cadeia de Markov ergódica

Uma costureira trabalha exclusivamente numa fase do processo de fabrico numa determinada empresa de confeção de vestuário. Esta fase tem um tempo de processamento de exatamente ½ hora por peça.

A cada ½ hora, um mensageiro passa pela mesa da costureira, recolhe todas as peças de roupa já prontas, e deixa novas peças para serem costuradas. O número de peças de roupa inacabada transportadas na altura da passagem é incerto: 30% das vezes o mensageiro não transporta peça alguma; 50% das vezes, transporta uma peça; 20% das vezes, transporta duas peças. O mensageiro é instruído a deixar à costureira o máximo possível das peças que transporta, sem que, no entanto, permita a acumulação de mais do que três peças de roupa na sua mesa. (Qualquer excesso deverá ser entregue a outra costureira.)

Determine a percentagem de vezes (ou de tempo) em que a costureira fica sem peça alguma para costurar, considerando que todas as peças de roupa que se encontram na sua mesa de trabalho no final de um dia de trabalho serão processadas no dia seguinte. *(R: 14.21% do tempo; Ver Anexo 1.1 pg.6)*

Exercício 1.5: Cadeia de Markov com estados absorventes

Uma empresa realiza regularmente um programa de formação profissional em duas fases distintas. A primeira fase consiste em 3 semanas de aulas teóricas. A segunda fase, também com a duração de 3 semanas, consiste numa aprendizagem prática sob a direção de supervisores especializados.

Pelas experiências anteriores, a empresa espera que somente 60% dos candidatos à fase teórica sejam posteriormente admitidos à fase prática, sendo os restantes eliminados definitivamente do programa de formação. Dos que fazem a parte prática, 70% conseguem obter (de imediato) o diploma final, enquanto 10% são levados a repetir a respetiva parte prática, e os restantes são eliminados definitivamente do programa de formação.

Atualmente, a empresa está a formar um total de 66 candidatos, distribuídos pela fase teórica (45) e pela fase prática (21). Deste total, qual o número esperado de candidatos que alguma vez obterão o diploma final? *(R: 37.353 diplomados; Ver Anexo 1.2 pg.7)*

Exercício 1.6: Problema de decisão, n.º finito de estágios

Uma companhia de exploração petrolífera planeia o seu programa de perfurações em determinado campo petrolífero. Existem cinco possíveis localizações para perfuração, numeradas de 1 a 5 que, a serem selecionadas, o são por ordem numérica.

Se se executar um furo e se for encontrado petróleo, esse furo é considerado um "sucesso"; ao invés, se não for encontrado petróleo, esse furo é considerado um "insucesso". Caso o furo não seja executado, ele é considerado um "insucesso".

Estudos geológicos indicam que a probabilidade genérica de se encontrar petróleo no campo petrolífero é de 0.1. Mas, como é natural que as perfurações em que se encontra petróleo estejam concentradas por regiões, a companhia decide basear a sua política na hipótese de que se qualquer furo provar ser um "sucesso", há uma probabilidade de 0.5 de o furo seguinte ser também um "sucesso", se executado.

O custo de cada perfuração é de 1 U.M., e a contribuição ilíquida esperada (U.M.) de cada furo é:

Furo n.º	1	2	3	4	5
Contribuição ilíquida:	5	4	6	9	5

Que política deve a companhia usar, por forma a maximizar a esperança do lucro líquido total?

Exercício 1.7: Problema de decisão, n.º finito de estágios

Um comerciante lança encomendas para aquisição de um determinado tipo de máquina no início de um mês, e recebe-a no início do mês seguinte. Não lhe é possível armazenar nem encomendar mais do que uma máquina de cada vez.

O custo de uma máquina é 8 U.M., o preço de venda é 10 U.M., e há um custo de posse de inventário de 1 U.M. por máquina, por mês completo.

Se o comerciante faz uma encomenda, mas posteriormente verifica que, devido à restrição do stock máximo, a não pode receber, então sofre uma penalização de 1 U.M..

Ele estima a probabilidade de fazer uma venda em cada um dos próximos quatro meses, desde que tenha stock disponível, como sendo:

Jan	Fev	Mar	Abr
0.7	0.6	0.6	0.4

O comerciante sente-se inseguro quanto a vendas para além dos quatro meses, e decide valorizar o stock no princípio de maio em 7 U.M. por unidade.

Recomende ao comerciante uma política de encomendas a seguir ao longo dos meses, supondo que ele tem uma máquina em stock no princípio de janeiro.

Exercício 1.8: Incerteza nas contribuições, mas certeza nos estados obtidos

Uma empresa da área alimentar compra diariamente 4 paletes de leite do dia a um fornecedor local, a um preço de 1 UM por palete. A empresa possui 3 supermercados, nos quais vende o leite por 2 UM cada palete. Infelizmente para a empresa, a procura por este produto é incerta (*ver tabela abaixo*), sendo que todo o leite não vendido num determinado dia poderá ser retomado pelo fornecedor, mas a um preço 50% inferior ao preço de aquisição, ou seja, a 0.5 UM por palete.

O problema da empresa consiste em determinar que alocação deve ser feita das 4 paletes de leite pelos 3 supermercados, de forma a maximizar a esperança do lucro obtido diariamente. Que alocação será de recomendar?

	Procura diária (paletes)	Probabilidade
Supermercado 1	1	0.60
	2	0
	3	0.40
Supermercado 2	1	0.50
	2	0.10
	3	0.40
Supermercado 3	1	0.40
	2	0.30
	3	0.30

Exercício 1.9: Problema de decisão, número indeterminado de estágios

O programa de privatizações do governo vai continuar com mais três OPV's sobre a 100Pó, ÉDoZé e PoTecom, durante os próximos três meses: 100Pó em maio, ÉDoZé em junho e PoTecom em julho.

O Sr. Grilo possui 1000 UM que pretende aplicar. Em relação a qualquer uma das companhias em processo de privatização, o Sr. Grilo pode não fazer qualquer oferta de compra, tentar comprar 500 UM, ou tentar comprar 1000 UM de ações.

Caso o Sr. Grilo não consiga (ou não tente) investir em ações, pode ainda investir na última novidade com benefícios fiscais, os PPU's - Planos Poupança em Universidades. Estes últimos podem ser adquiridos em múltiplos de 100 UM, e o respetivo ganho esperado ao fim de um ano ronda os 60% do capital investido.

Atendendo a que o governo procura encorajar os pequenos investidores e pretende dispersar o capital em bolsa, uma oferta de compra de 1000 UM de ações tem maior probabilidade de ser rejeitada do que uma oferta de compra de 500 UM de ações.

Caso o Sr. Grilo venha a adquirir efetivamente qualquer número de ações, ele pretende manter estas pelo menos durante um ano para assim ter direito a receber o(s) respetivo(s) prémio(s) de fidelidade.

De acordo com o enunciado anterior, e atendendo aos dados constantes na tabela seguinte, determine a melhor política de investimentos a aconselhar ao Sr. Grilo. Identifique claramente todas as hipóteses consideradas.

	Ganho esperado	Probabilidade de aceitação	
Empresa	(1 ano, incl. prémio fidelidade)	Oferta: 500 UM	Oferta: 1000 UM
100Pó	40%	0.8	0.6
ÉDoZé	100%	0.3	0.25
PoTecom	50%	0.6	0.5

Exercício 1.10: Problema de decisão, número indeterminado de estágios

Os concorrentes a um concurso de televisão são convidados a submeter-se a quatro provas, segundo uma ordem específica. As regras são as seguintes:

Em cada estágio, o concorrente pode optar por jogar ou ficar de fora. Se o concorrente joga e é bem-sucedido, mas não em qualquer outro caso, ganha um prémio dado por:

Prova n.º	1	2	3	4
Prémio	2	5	15	75

Se o concorrente joga e falha, perde qualquer prémio monetário que tenha ganho na prova anterior, e perde ainda o direito de participar na prova seguinte.

A probabilidade de ser bem-sucedido nas diversas provas é:

Prova n.º	1	2	3	4
Probabilidade de sucesso	0.8	0.5	0.3	0.2

Que política deverá o concorrente utilizar?

Exercício 1.11: N.º indeterminado de estágios, sem alternativas

Uma estação geradora hidroelétrica necessita que 2 milhões de acres-pés de água sejam libertados no final de cada mês, para funcionar na sua capacidade máxima.

A água para a estação é armazenada num reservatório, para o qual a alimentação é de 0, 1, 2 ou 3 milhões de acres-pés por mês, com probabilidades 1/6, 1/3, 1/3 e 1/6, respetivamente.

Se a quantidade de água disponível exceder a capacidade do reservatório, que é de 3 milhões de acres-pés, o excedente é libertado através de canais de drenagem, e, portanto, eliminado.

Se a quantidade de água disponível em qualquer mês for inferior a 2 milhões de acres-pés, são utilizados geradores de emergência, alimentados a *diesel*, por forma a manter o fornecimento normal de energia.

Atendendo a que são necessários 200 mil U.M. de *diesel* por cada milhão de acres-pés de água insuficiente, determine a esperança dos custos mensais neste combustível, a longo prazo.

(N.B. 1acre=4047m2, 1ft=0.3048m, 1 acre-ft=1233.5m3)

Exercício 1.12: Problema de decisão, n.º indeterminado de estágios

O serviço de manutenção de uma fábrica toma as seguintes formas: serviço de rotina, executado a intervalos de tempo regulares; reparação de emergência, necessária sempre que há avaria.

O gestor da fábrica recebe orçamentos para contratos de manutenção de duas companhias (A e B).

Ambas as companhias se propõem cobrar uma taxa fixa anual de 52 U.M. para manutenção de rotina.

As reparações de emergência são cobradas como serviços extraordinários, e o gestor pode decidir ter a manutenção de rotina e as reparações de emergência apoiadas por diferentes companhias.

No princípio de qualquer semana, a fábrica pode estar em funcionamento ou parada devido a avaria.

Se a fábrica estiver em funcionamento no início de uma semana, estará ainda em funcionamento no início da semana seguinte, com uma probabilidade de 0.7 se a companhia A for responsável pela manutenção de rotina, e 0.9 se o mesmo trabalho for realizado pela companhia B.

Se a fábrica estiver parada por avaria, no início de uma semana, continuará parada no início da semana seguinte com uma probabilidade de 0.5 e 0.3, se o trabalho de reparação de emergência for executado pela companhia A e B, respetivamente.

A fábrica sofre custos de 10 U.M. sempre que a máquina está avariada no princípio de uma semana, tendo estado em funcionamento na semana anterior, ou quando não é reparada, tendo estado parada na semana anterior.

A companhia A propõe cobrar 2 U.M. por reparação de emergência, enquanto a companhia B propõe cobrar 6 U.M pelo mesmo tipo de reparação.

Que companhia deve o gestor da fábrica selecionar para fazer cada um dos tipos de reparação, se se pretender minimizar a esperança dos custos a longo prazo?

(Sugestão: considere que as mudanças de estado ocorrem apenas no início de cada semana.)

ANEXO 1.1

Resolução do Exercício 1.3 (Costureiras)

(?) Defina estágios:

(?) Defina estados:

(?) Defina Matriz de Transição, P=

Os cálculos seguintes talvez lhe sejam úteis:

1.000	0.000	0.000	Estado inicial ou número inicial

	0.800	0.200	0.000	1.000		0.541	0.303	0.156		0.489	0.313	0.198		0.477	0.315	0.208
P =	0.300	0.500	0.200	1.000	P6 =	0.455	0.319	0.226	P11 =	0.469	0.317	0.214	P16 =	0.473	0.316	0.211
	0.000	0.300	0.700	1.000		0.351	0.338	0.311		0.445	0.321	0.234		0.467	0.317	0.216
	0.800	0.200	0.000			0.541	0.303	0.156		0.489	0.313	0.198		0.477	0.315	0.208
	0.700	0.260	0.040			0.524	0.307	0.170		0.485	0.314	0.201		0.476	0.315	0.208
P2 =	0.390	0.370	0.240		P7 =	0.460	0.318	0.222	P12 =	0.471	0.316	0.213	P17 =	0.473	0.316	0.211
	0.090	0.360	0.550			0.382	0.333	0.285		0.453	0.320	0.228		0.469	0.317	0.214
	0.700	0.260	0.040			0.524	0.307	0.170		0.485	0.314	0.201		0.476	0.315	0.208
	0.638	0.282	0.080			0.511	0.309	0.180		0.482	0.314	0.204		0.476	0.315	0.209
P3 =	0.423	0.335	0.242		P8 =	0.463	0.318	0.219	P13 =	0.471	0.316	0.212	P18 =	0.473	0.316	0.211
	0.180	0.363	0.457			0.405	0.328	0.266		0.458	0.319	0.223		0.470	0.316	0.213
	0.638	0.282	0.080			0.511	0.309	0.180		0.482	0.314	0.204		0.476	0.315	0.209
	0.595	0.293	0.112			0.501	0.311	0.188		0.480	0.315	0.205		0.475	0.316	0.209
P4 =	0.439	0.325	0.236		P9 =	0.466	0.317	0.217	P14 =	0.472	0.316	0.212	P19 =	0.473	0.316	0.211
	0.253	0.355	0.393			0.423	0.325	0.252		0.462	0.318	0.220		0.471	0.316	0.213
	0.595	0.293	0.112			0.501	0.311	0.188		0.480	0.315	0.205		0.475	0.316	0.209
	0.564	0.299	0.137			0.494	0.312	0.194		0.478	0.315	0.207		0.475	0.316	0.210
P5 =	0.449	0.321	0.230		P10 =	0.468	0.317	0.215	P15 =	0.472	0.316	0.212	P20 =	0.473	0.316	0.211
	0.309	0.346	0.346			0.436	0.323	0.241		0.465	0.317	0.218		0.472	0.316	0.212
	0.564	0.299	0.137			0.494	0.312	0.194		0.478	0.315	0.207		0.475	0.316	0.210

(?) Conclusões:

ANEXO 1.2

Resolução do Exercício 1.4 (Empresa de Formação Profissional)

(?) Defina estágios:

(?) Defina estados:

(?) Defina Matriz de Transição, P=

Os cálculos seguintes talvez lhe sejam úteis:

	1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000
P =	0.400	0.000	0.600	0.000	P6 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P11 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P16 =	0.533	0.000	0.000	0.467
	0.200	0.000	0.100	0.700		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
	1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000
P2 =	0.520	0.000	0.060	0.420	P7 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P12 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P17 =	0.533	0.000	0.000	0.467
	0.220	0.000	0.010	0.770		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
	1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000
P3 =	0.532	0.000	0.006	0.462	P8 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P13 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P18 =	0.533	0.000	0.000	0.467
	0.222	0.000	0.001	0.777		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
	1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000
P4 =	0.533	0.000	0.001	0.466	P9 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P14 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P19 =	0.533	0.000	0.000	0.467
	0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000
	1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000		1.000	0.000	0.000	0.000
P5 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P10 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P15 =	0.533	0.000	0.000	0.467	P20 =	0.533	0.000	0.000	0.467
	0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778		0.222	0.000	0.000	0.778
	0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000		0.000	0.000	0.000	1.000

0	15/22	7/22	0	times	1.000	0.000	0.000	0.000	=	0.434	0.000	0.000	0.566
					0.533	0.000	0.000	0.467					
					0.222	0.000	0.000	0.778					
					0.000	0.000	0.000	1.000					

(?) Conclusões:

2. Exercícios de Filas de Espera

Exercício 2.1 (*M/M/1*)

Num supermercado, o modelo de chegadas segue aproximadamente uma distribuição de Poisson com uma taxa média de 10 clientes por hora. O tempo médio que leva a listar e calcular o total das compras do cliente na (única) caixa é 4.5 minutos, e pode dizer-se que esse tempo segue uma distribuição exponencial negativa. Nestas condições, determine:

a) A probabilidade de a caixa estar ocupada;
b) A probabilidade de se formar uma fila;
c) A probabilidade de o número de pessoas na fila exceder cinco;
d) O comprimento médio da fila, e o número médio de clientes no sistema;
e) O tempo médio de espera de um cliente (na fila), e no sistema (fila+caixa).
f) Se, pela aplicação das técnicas de estudo do trabalho, o valor médio do tempo de serviço for reduzido para 4 minutos, quanto tempo deverão, em média, esperar os clientes no sistema, e qual a probabilidade de um cliente ter que esperar mais do que 10 minutos para ser atendido?

Exercício 2.2 (*M/M/1*, decisão)

Um operador foi contratado para reparar máquinas que avariam a uma taxa média de três por hora. As avarias seguem uma distribuição no tempo que pode ser considerada do tipo Poissoniana. O tempo não produtivo em qualquer máquina está avaliado como um custo aproximado de 5 U.M. por hora.

Dispõe-se de dois métodos de reparação. O método A é um método lento que custa 3 U.M./hora e que permite reparar uma máquina num tempo exponencialmente distribuído com média igual a 15 minutos. O método B é semelhante ao anterior mas mais rápido, custa 5 U.M./hora e permite reparar uma máquina num tempo médio de apenas 10 minutos.

Supondo que o operador estará habilitado a usar qualquer um dos dois métodos de reparação, qual deles lhe recomenda que implemente?

Exercício 2.3 (*M/M/1* e *M/M/2 equivalente*, análise crítica e decisão)

O serviço de urgência dum pequeno hospital tem permanentemente um médico de serviço, o qual despende em média 20 minutos por cada tratamento. A variabilidade do tempo do médico é proporcional a esta média, podendo assumir-se como sendo exponencialmente distribuído. Os doentes chegam ao serviço de urgência a uma taxa média de 2.4 por hora, segundo uma distribuição de Poisson.

a) Determine (em médias) que fração do tempo do médico é gasta a prestar serviço de urgência, e quanto tempo tem de esperar um doente antes que seja atendido.

Sabe-se agora que o hospital pretende melhorar o seu nível de serviço nas urgências através da contratação de um segundo médico (sistema *M/M/2*) ou, em alternativa, de um enfermeiro para assistir o médico já existente. No segundo caso, o enfermeiro permitiria formar uma equipa médica (*M/M/1*) capaz de reduzir o tempo médio de atendimento para apenas 10 minutos (ou seja, metade do tempo médio atual).

b) Para cada uma destas duas alternativas, refaça os cálculos que efetuou na alínea a), e use-os como argumento para sugerir ao diretor do hospital a decisão mais favorável à sua pretensão.

c) Tente justificar por que motivo o tempo médio de espera no sistema *M/M/2* (1ª alternativa) é menor do que o tempo médio de espera no sistema de equipa *M/M/1* (2ª alternativa), não obstante as taxas médias de chegada e de serviço serem iguais nos dois casos.

Exercício 2.4 (*M/M/S*, análise crítica e decisão)

Uma moderna estação de correios pretende dimensionar e reorganizar o seu atendimento ao público, pretendendo, no entanto, manter o mesmo esquema de atendimento em que todos os funcionários atendem todo o tipo de clientes, pedidos de informação, reclamações, aquisição de selos, vales postais, etc.

Para isso, recolheu-se informação sobre o número de chegadas de clientes e tempos de atendimento, num intervalo prefixado de 10 minutos. Um tratamento estatístico permitiu concluir que as chegadas são satisfatoriamente representadas por um processo Poissoniano de taxa 15.6 chegadas por período de 10 minutos. Um tratamento idêntico permitiu concluir que os tempos de serviço seguem uma distribuição exponencial negativa com média igual a 66.24 segundos.

a) Atualmente, a estação funciona com 2 servidores. Nestas condições, analise o desempenho do sistema de espera calculando nomeadamente a intensidade de tráfego, as taxas de atividade e inatividade do sistema, bem como as quatro medidas de desempenho das relações de Little (L, L_q, W e W_q).

b) Sabendo que o custo de cada funcionário é de 7.5 €/hora, e supondo que o custo de espera dos utentes é, em média, igual ao custo dos funcionários, que recomendação se pode fazer relativamente ao número ótimo de servidores (S^*) no atendimento ao público?

c) Faça uma análise de sensibilidade da solução indicada na alínea anterior, determinando a gama de valores admissíveis do custo de espera dos utentes para a qual a mesma recomendação prevalece. Teça os comentários que achar oportunos.

(*) Adaptado de "*L. Valadares Tavares et al., Investigação Operacional, McGraw-Hill, 1996*".

Exercício 2.5 (*M/M/S/(N)*, otimização)

Numa grande instalação fabril existem 25 máquinas idênticas que avariam a uma taxa de 2 avarias por hora de funcionamento e máquina. O tempo médio de reparação é de 6 minutos. Pretende-se determinar o número ótimo de mecânicos reparadores, admitindo que o custo de inatividade de uma máquina é 100 € enquanto o custo horário de um mecânico é 10 €.

(*) Retirado de "*L. Valadares Tavares et al., Investigação Operacional, McGraw-Hill, 1996*".

Exercício 2.6 (*M/M/1[K]*, decisão)

Um porto que recebe navios tem uma única estação de descarga (móvel) a qual permite descarregar, em média, 5 navios por dia. O porto tem um cais que permite a acostagem de apenas 2 navios, pelo que, quando o cais está ocupado, navios adicionais que pretendam acostar são desviados para outro porto, acarretando um custo de 80 mil euros por navio desviado. A imobilização de navios no porto tem um custo de 48 mil euros por navio por dia.

As chegadas de navios podem ser consideradas Poissonianas, com uma taxa de 3 navios/dia, sendo os tempos de descarga exponenciais negativos.

a) Qual a probabilidade de um navio ter que ser desviado para outro porto?

b) Avalie a viabilidade económica de ampliar o cais de modo a poder receber 3 navios, considerando que a essa ampliação corresponde um encargo adicional de 5 mil euros por dia.

(*) Retirado de "*L. Valadares Tavares et al., Investigação Operacional, McGraw-Hill, 1996*".

Exercício 2.7 (Método analítico *vs.* Simulação de filas)

Um porto tem um cais capaz de servir navios de carga. Os navios chegam ao cais segundo uma distribuição de média 12 horas e desvio padrão de 8 horas.

Se um tempo médio de descarga de z horas for mantido, o custo semanal de operação do equipamento de descarga é de $(113400/z)$ U.M..

O tempo atual de descarga é de 10 horas, com um desvio padrão de 5 horas, e pensa-se que a variabilidade do tempo de descarga é proporcional ao tempo médio de descarga.

São pagas indemnizações pelas autoridades portuárias aos armadores, se os barcos forem mantidos à espera antes da carga, a uma taxa de 100 U.M. por barco por hora de espera.

Determine o tempo ótimo de descarga, considerando cada uma das seguintes aproximações:

a) *M/M/1*;

b) *D/M/1*;

c) *M/D/1*;

d) *D/D/1*;

e) *Vários* $E_k/E_l/1$.

f) Compare os resultados obtidos para os diferentes sistemas admitidos.

Exercício 2.8 (Rede de filas Poissonianas)

Considere um serviço composto por uma a três tarefas distintas (1, 2 e 3), representado pela figura em baixo. Cada tarefa pode ser realizada por um ou mais servidores (estatisticamente iguais).

Os pedidos mais frequentes (γ_1=1.5 pedidos/u.tempo) requerem a realização da tarefa 1 uma única vez, da tarefa 2 pelo menos uma vez, e, eventualmente, da tarefa 3 uma ou mais vezes.

Os pedidos menos frequentes (γ_3=0.5 pedidos/u.tempo) requerem a realização da tarefa 3 pelo menos uma vez, e eventualmente da tarefa 2 uma ou mais vezes.

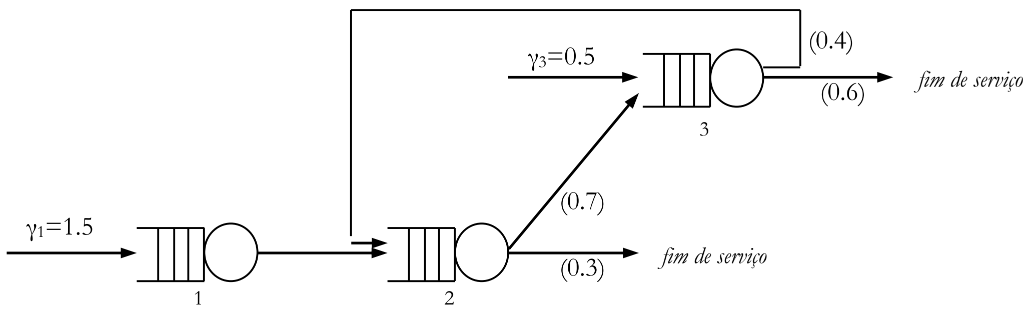
As eventualidades das transições estão representadas pelos valores das respetivas probabilidades, entre parênteses.

O tempo médio de execução de cada um dos servidores das tarefas 1, 2 e 3 é de 0.5, 0.5 e 1.25 unidades de tempo, respetivamente. Considere que todos estes tempos são exponencialmente distribuídos. Considere também que as taxas dos pedidos são Poissonianas.

a) Determine a taxa líquida de pedidos de cada tarefa.

b) Dimensione o sistema em termos do número mínimo de servidores necessários para realizar cada uma das tarefas, de forma a não ter, em cada caso, taxas de ocupação superiores a 85%.

c) Considerando esses números mínimos de servidores, estime os tempos globais médios de espera e atendimento de cada um dos tipos de pedidos (mais frequentes e menos frequentes).



3. Exercícios de Gestão de Inventários

Exercício 3.1: Quantidade Económica de Encomenda (QEE) c/ desconto de quantidade

Uma empresa deve comprar 2400 unidades de um artigo por ano. Esta procura é conhecida e fixa.

A compra deste artigo ao fornecedor poderá beneficiar de um desconto de quantidade. Assim, até 500 unidades o custo unitário é de 1000 €, mas acima desta quantidade é de 925 €. (sobre toda a quantidade adquirida de cada vez que se encomenda).

O custo de posse ou de existência mensal, expresso como percentagem do valor de cada unidade, é de 2%, e o custo (fixo) de passagem de encomenda é de 35000 € por encomenda (incluindo o custo de transporte, cargas e descargas, documentação, etc.).

a) Determine a quantidade económica de encomenda a adquirir.

b) Se o custo de passagem de encomenda puder ser reduzido para 10000 € por encomenda, qual será o novo valor da QEE?

c) Se o desconto de quantidade só ocorrer acima das 3000 unidades, qual será a nova quantidade económica de compra?

Exercício 3.2: QEE c/ desconto de quantidade

O preço unitário de um artigo é orçamentado por um fornecedor como sendo de 17.5 € para encomendas inferiores a 750 unidades, e de 16 € para encomendas superiores.

A utilização anual do artigo é de 720 unidades, e a taxa anual de posse de inventário é igual a 26% do preço de compra. O custo fixo de encomenda está estimado em 500 € por encomenda.

a) Que economia anual é possível obter pela adoção de quantidades de encomenda iguais a 750 unidades (em vez de se optar por comprar quantidades menores, sem desconto no preço de compra)? *[R: 850 €/ano]*

b) A que nível teria de descer a utilização anual do artigo para que essa economia não se concretizasse? *[R: 353 unidades/ano]*

c) Se os custos de passagem de encomenda puderem ser reduzidos para 200 U.M., que efeito se obtém nos custos totais para o nível de utilização atual? *[R: -288 €/ano, QEE=750]*

Exercício 3.3: QEE, produtos independentes com restrição global comum (mét. Lagrange)

Considere uma situação de inventário com vários artigos, em que é imposta uma limitação na área de armazenagem disponível.

a) Para a situação descrita, determine as expressões ótimas para as quantidades de encomenda a adotar para cada artigo, e para o consequente custo variável de operação.

b) Para os dados especificados na tabela abaixo, e considerando uma taxa de juro de posse de stock de 20% ao ano, e uma limitação de 2000 m² de área disponível, determine uma solução numérica para o problema.

c) Que variação sofreu o custo variável de operação determinado na alínea anterior, em relação ao custo da solução não condicionada para o problema?

Artigo	Valor unitário (K€)	Custo por encomenda (K€)	Procura anual (unidades)	Área ocupada por unidade (m²)
1	5	2	1000	10
2	7	3	1500	8
3	3	2	2000	9

Exercício 3.4: QEE, produtos independentes com restrição global comum

Um retalhista pretende comercializar dois tipos de câmaras fotográficas digitais, relativamente às quais a tabela seguinte indica alguma informação relevante:

	Câmara 1		Câmara 2
Vendas mensais esperadas (unidades)	300		200
Preço unitário de compra (€)	440 (1)	400 (2)	340
Custo anual de posse (em % do preço)	30%		25%
Custo por encomenda (€)	7000		4000

Notas: (1) Para quantidades inferiores a 500 unidades.

(2) Para quantidades não inferiores a 500 unidades.

Supondo que as vendas irão ser realizadas contínua e uniformemente, e que o retalhista não está interessado em incorrer em situações de quebra de inventário:

a) Diga quantas câmaras deverá o retalhista encomendar de cada vez de forma a minimizar os seus custos totais de operação. Com que periodicidade deverá ele lançar os respetivos pedidos de encomenda ao seu fornecedor? (N.B. Considere que as encomendas são independentes para os dois produtos.)

[R: Câmara 1: 648 u./enc., 2.16 meses e 3888.5 UM/ano. Câmara 2: 457 u./enc., 2.4 meses, 2020 UM/ano.]

b) Responda novamente às questões da alínea anterior, agora para o caso em que o retalhista não pretenda ter, em qualquer instante, um valor de inventário total superior a 200 mil €.

[R: $q_j^{*c} = \sqrt{\frac{2A_jC_{3j}}{(i-2\lambda)b}}$ e $\sum_j q_j b_j = V_{\max}$ Resulta: $\lambda \cong -0.509...(não\ \ conv.)$ Fazendo $i = 30\%$ (ambos produtos), obtém-se facilmente $\lambda \cong -0.51$, logo $q_1^{*c} = 295$ e $q_2^{*c} = 207$]

Exercício 3.5: Política e modelo Nível de Encomenda; distribuição discreta (histograma)

O responsável pela gestão de stocks de uma determinada fábrica, pretende implementar uma política de nível de encomenda para gerir o stock final de um produto comercializado pela empresa.

A estrutura de custos por ele considerada é apresentada na tabela seguinte:

C_1 (€/unidade/semana)	C_2 (€/unidade em atraso)	C_3 (€/encomenda)
150	450	605

O prazo de entrega do produto é de uma semana e a procura semanal, de acordo com dados históricos da empresa, pode ser descrita pela seguinte distribuição:

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P(D=x)	0.01	0.03	0.05	0.1	0.16	0.3	0.16	0.1	0.05	0.03	0.01

(Obs.: A distribuição é simétrica!)

Considere que a quantidade ótima de encomenda (QEE) é de 11 unidades.

a) Determine o nível de encomenda que deve ser adotado pelo responsável da gestão de stocks. Qual o valor esperado do custo total?

b) Confirma que a quantidade de encomenda que considerou é ótima? Justifique.

Exercício 3.6: Nível de encomenda; Histograma; diferentes objetivos primários

O inventário de um artigo, de custo 5 euros por unidade, deve ser controlado utilizando uma política de nível de encomenda.

A procura anual é estimada em 1200 artigos, com uma distribuição da procura durante o prazo de entrega indicada na tabela seguinte.

Procura no Prazo de Entrega	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
p(x)	.01	.02	.03	.05	.08	.11	.13	.14	.13	.11	.08	.05	.03	.02	.01

(Obs.: A distribuição é simétrica!)

Se a taxa anual de posse de inventário for 30% do preço de compra, e o custo de passagem de encomenda for de 14.10 euros, determine os parâmetros da referida política nos seguintes casos:

CASO 1. A gestão especifica que o artigo não deve sofrer quebra de inventário mais do que uma vez por ano.

CASO 2. Estudos indicam que cada vez que há quebra, se verifica um custo fixo de 4 euros.

CASO 3. Estudos indicam que se verifica um custo de 1 euro por cada artigo em atraso.

<u>Exercício 3.7: Nível de encomenda; distribuição uniforme</u>

Considere um sistema de stocks gerido por uma política de nível de encomenda para um artigo cujo custo unitário é de 15 euros. A procura média anual para esse artigo é de 25 mil unidades. Da análise dos valores da procura durante o prazo de entrega, o responsável pela gestão acha que qualquer valor entre 3500 e 4500 unidades é igualmente provável. O custo de posse de stock do artigo é de 10% do custo do artigo, por unidade ao ano, e o custo de uma encomenda em atraso é de 2.5 euros por artigo. Os custos fixos de encomenda de um lote são de 300 euros.

a) Determine a quantidade fixa de encomenda e o nível de encomenda que minimizam o valor esperado dos custos globais de operação.

b) Determine o valor desse custo.

c) Determine o valor esperado de situações de quebra que vão ocorrer anualmente.

<u>Exercício 3.8: Nível de encomenda; distribuição normal</u>

Uma empresa pretende implementar uma política de controlo de stocks para um dos produtos que comercializa.

O prazo de entrega deste produto é de 3 meses (aproximadamente constante) e a procura no prazo de entrega pode ser descrita por uma distribuição normal com média de 1250 e desvio padrão 46 unidades.

O custo anual de existência de stock é de 0.1 U.M./artigo, o custo de quebra de stock é de 0.2 U.M./artigo e o custo de passagem de encomenda é de 10 U.M..

Sabendo que a empresa pretende adotar uma política de nível de encomenda para este produto, determine:

a) A quantidade ótima de encomenda.

b) O nível de encomenda.

c) O custo variável de operação e o número esperado de artigos em quebra por ano.

Exercício 3.9: Nível de encomenda

O responsável pela gestão de stocks de uma determinada fábrica, pretende implementar uma política de nível de encomenda para gerir o stock final dos dois principais produtos (A e B) comercializados pela empresa.

A estrutura de custos por ele considerada é apresentada na seguinte tabela:

Produto	C_1 (€/unidade/mês)	C_3 (€/encomenda)
A	5	100
B	10	300

Os prazos de entrega de ambos os produtos são constantes e iguais a uma semana.

A procura semanal do produto A pode ser descrita por uma distribuição Uniforme entre o valor mínimo 100 e o valor máximo 200. Para o mesmo período de tempo, a procura do produto B pode ser descrita por uma distribuição Normal de média 250 e desvio padrão 50 unidades.

Em relação ao produto A, pretende-se que não ocorram mais de três quebras de stock por ano. Quanto ao produto B, pretende-se minimizar os respetivos custos totais de operação, estimando-se um custo de 20 U.M para cada unidade em atraso por falta de inventário.

Por motivos relacionados com a gestão da produção, a quantidade de encomenda é fixa, sendo igual a 120 e 240 unidades para os produtos A e B, respetivamente.

a) Determine, para o produto A, o nível de encomenda que deve ser adotado pelo responsável da gestão de stocks.

b) Determine, para o produto B, o menor valor esperado que pode tomar o custo total.

<u>Obs.: Considere que as quantidades de encomenda indicadas são ótimas e que um mês tem, sempre e exatamente, quatro semanas.</u>

Exercício 3.10: Política e modelo de Ciclo de Encomenda, distribuição normal

Um determinado artigo comprado a um fornecedor, deve ser controlado por uma política de ciclo de encomenda, considerando-se as hipóteses de o intervalo de revisão ser alternativamente de uma, duas, três ou quatro semanas.

A procura média por dia segue uma distribuição normal, de média 100 e desvio padrão 10 unidades.

O prazo de entrega é constante e igual a 7 dias, e o sistema opera 5 dias por semana durante 48 semanas produtivas ao ano.

O preço unitário do artigo é 5 U.M. na compra, e a taxa de posse anual é 25% deste preço.

Se uma revisão custar 10 U.M. e o custo de passagem de encomenda for 6.50 U.M., quais são os parâmetros mais adequados a adotar para a política, se for permitida, em média, uma quebra de stock em cada dois anos?

Exercício 3.11: Política Nível de Encomenda *vs.* Política Ciclo de Encomenda

A procura mensal para determinado artigo pode ser modelada por uma distribuição Normal de média 100 e desvio padrão 10 unidades.

O prazo de entrega é de um mês, o custo de existência é de 12 €/ano, o custo de quebra de stock é de 20 € por cada artigo em atraso e o custo de encomenda é de 50 €.

Compare, em termos do custo total de operação e do nível de serviço proporcionado, as seguintes políticas alternativas de controlo de stocks para este artigo:

Política A – Nível de encomenda com S = 110 e q = 100;

Política B – Ciclo de encomenda com S = 220 e t = 1 mês.

Exercício 3.12: *Newsboy Problem*, distribuição normal

Um supermercado deve decidir quantas unidades de pão de forma deve comprar diariamente. A procura pode ser considerada como Normalmente distribuída com média 300 e desvio padrão 50 unidades.

Cada unidade custa ao supermercado 19 U.M. e vende-se por 25 U.M.. As unidades não vendidas no próprio dia são vendidas a um fabricante de pão ralado a um preço de 15 U.M..

a) Determine quantas unidades de pão de forma devem ser compradas diariamente pelo supermercado.

b) Para o valor determinado na alínea anterior, qual o valor esperado de vendas perdidas?

Exercício 3.13: *Newsboy Problem*, distribuição uniforme

O Sr. Pomar tem uma frutaria. Atento às novas exigências dos seus clientes, decidiu importar do Extremo Oriente um fruto exótico, ainda não comercializado pela concorrência. O fruto em causa, depois de chegado à frutaria, permanece em condições de ser vendido durante duas semanas.

O preço que o Sr. Pomar terá de pagar por unidade é de 10 €. Cada unidade não vendida é comprada ao Sr. Pomar ao fim de duas semanas pela empresa de sumos de pacote *Cento e um por Cento* a um preço de 1 €. De acordo com a sua experiência de novidades exóticas, o Sr. Pomar acha que valores da procura entre 300 e 800 unidades são igualmente prováveis (e que valores menores que 300 e maiores que 800 têm probabilidade de ocorrência igual a 0).

O preço de venda na frutaria é de 16 € por unidade.

a) Qual a quantidade que o Sr. Pomar deve encomendar de forma a maximizar a esperança do seu lucro?

b) Para a quantidade determinada na alínea anterior, qual a esperança do lucro?

Exercício 3.14: *Newsboy Problem*, distribuição uniforme

Um dos maiores partidos políticos Iraquianos de origem xiita, está a preparar para Bagdad o seu primeiro comício pré-eleitoral. Para que o comício seja um sucesso, a secção do partido de duas cidades do Sul, Kerbala e Najaf, oferece transporte gratuito aos participantes. Contatou para o efeito a empresa de camionagem Al-Going, que, para praticar o preço de 10 doláres por pessoa e garantir os lugares pretendidos, exige que se faça uma reserva de lugares com alguns dias de antecedência.

O partido teve alguma dificuldade em estimar o número de participantes que recorreriam ao transporte posto à disposição, mas depois de algumas diligências considerou que valores entre 3000 e 4000 teriam igual probabilidade. Caso os lugares reservados sejam insuficientes o partido poderá recorrer à empresa Al-Wanna-Go que não exige reserva prévia, mas pratica preços por viagem 50% superiores à primeira.

Ajude o partido xiita a definir quantos lugares devem ser reservados na empresa Going.

Exercício 3.15: *Newsboy Problem*, histograma

Um restaurante tem um prato especial, muito apreciado e servido apenas aos domingos. O restaurante é um tremendo sucesso, mas atualmente o seu gerente debate-se com um problema que pretende resolver: o número de refeições deste prato que habitualmente confeciona é muitas vezes insuficiente, enquanto em outras ocasiões é excessivo.

Como o gerente coloca a "qualidade acima de tudo", não guarda as refeições (ou melhor, os seus principais ingredientes) que sobram de uma semana para a seguinte. Assim, todos os ingredientes que sobram são vendidas a um outro restaurante próximo com um desconto considerável face ao preço de custo.

O número de refeições solicitadas no passado foram as seguintes:

Nº de refeições solicitadas nos últimos 40 domingos	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº de ocorrências	1	2	4	5	8	6	5	4	3	2

Custo de confeção: 10 euros.

Preço de venda no restaurante: 30 euros.

Preço de venda das unidades em sobra: 6 euros.

Quantas refeições deverá o restaurante confecionar semanalmente?