Cálculo I — LEI

Teste 1A — 8 de Novembro de 2006

1. Seja $C = A \cup B$, onde A e B são dados por

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ 2 < |\, x-1\,| \leq 3\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |\, 3x+6 \,| = 9\}.$$

   (a) Verifique que $C = \{-5, 1\} \cup [-2, -1[\,\cup\,]3, 4]$.

   - Para A, partir de $2 < |\, x-1\,| \leq 3 \iff 2 < x-1 \leq 3 \ \vee\ -3 \leq x-1 < -2$, e obter $A = [-2,-1[\,\cup\,]3,4]$.
   - Para B, partir de $|3x+6| = 9 \iff 3x+6 = 9 \ \vee\ 3x+6 = -9$, e obter $B = \{-5, 1\}$.

   (b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo do conjunto C.

   Majorantes: $[4, +\infty[$; $\sup C = 4$; Minorantes: $]-\infty, -5]$; $\inf C = -5$.

   (c) Diga, justificando, se C é aberto ou fechado.

   C não é aberto porque $\operatorname{int} C =]-2,-1[\cup]3,4[$, logo $\operatorname{int} C \neq C$.
   C não é fechado porque $\overline{C} = \{-5, 1\} \cup [-2,-1] \cup [3,4]$, logo $\overline{C} \neq C$.

   (d) Determine a fronteira, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de C.

   $\operatorname{fr} C = \{-5, -2, -1, 1, 3, 4\}$; $C' = [-2,-1] \cup [3,4]$; Pontos isolados: $\{-5, 1\}$.

2. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: se D é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que assume os valores 1 e 3, então f também assume o valor 2.

   Falsa. Considere-se $D = [0,1] \cup [2,3]$, $f(x) = 1$ se $x \in [0,1]$ e $f(x) = 3$, $x \in [2,3]$.

3. Determine $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}\ , \text{ indeterminação do tipo } \frac{0}{0}\,.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\ , \text{ novamente indeterminação do tipo } \frac{0}{0}\,.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\operatorname{sen} x + x\cos x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = 0\,.$$

Logo, o limite proposto vale 0.

Cálculo I — LEI

Teste 1B — 8 de Novembro de 2006

---

1. Seja $D = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : |x| < 1\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \pi\}$.

   (a) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo do conjunto D.

   (b) Diga, justificando, se D é fechado ou aberto.

   (c) Apresente, quando possível, pontos a e b tais que

$$a \in D \text{ mas } a \notin \mathrm{fr} D \quad \text{e} \quad b \in D' \text{ mas } b \notin D\,.$$

2. Dê exemplo ou justifique porque não existe uma função contínua $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f([0,2]) = \{1,2\}$.

3. Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$.

1. Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| = |2x|\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge |2x+1| \leq 5\}.$$

   (a) Mostre que $A \cup B =]0,2] \cup \{-1, 3\}$.

   (b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo de $A \cup B$.

   (c) Determine $\operatorname{int}(A \cup B)$, $\overline{A \cup B}$, $\operatorname{fr}(A \cup B)$, $(A \cup B)'$ e o conjunto dos pontos isolados de $A \cup B$.

2. Dê exemplo ou justifique porque não existe uma função contínua $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ que assume os valores 1 e π mas não assume o valor 2.

3. Determine $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}$.

1. Seja $R = P \cup Q$, onde

$$P = \{x \in \mathbb{R} : \, |2x+1| = 5\} \quad \text{e} \quad Q = \{x \in \mathbb{R} : \, x \geq 0 \, \wedge \, |x+4| \geq 6\}.$$

   (a) Verifique que $R = \{-3\} \cup [2, +\infty[$.

   (b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo e o ínfimo do conjunto R.

   (c) Apresente, quando possível, pontos a, b e c tais que

$$a \in R \text{ mas } a \notin \operatorname{int} R, \quad b \in \overline{R} \text{ mas } b \notin \operatorname{fr} R \quad \text{e} \quad c \in R \text{ mas } c \notin R'.$$

2. Dê exemplo ou justifique porque não existem funções contínuas $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

3. Determine $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{x^2}$.