31/10/13 Resolução do teste 1, 2013

$\boxed{\int u' \cos(u)\, dt = \operatorname{sen}(u)}$

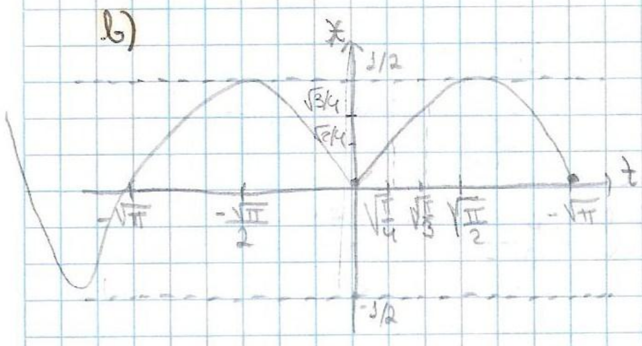
1) $x' = t\cos(t^2)$, $x(0) = 0$

a) $x' = t\cos(t^2) \Rightarrow x = \int t \cos(t^2)\, dt$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t^2) + c$

$x(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Logo, $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t^2)}$

b)



2) $f(t) = e^{2t}$ solução.
Por exemplo, $x' = 2e^{2t}$ ou $x' = 2x$.

3) $t x \frac{dx}{dt} = 2t^2 + 3x^2$, $t \neq 0$

a) $t x x' = 2t^2 + 3x^2 \Rightarrow x' = 2\frac{t}{x} + 3\underbrace{\frac{x}{t}}_{u}$

Mudança de variável : $\boxed{u = \frac{x}{t}}$

$u = \frac{x}{t} \Rightarrow u = x\left(\frac{1}{t}\right)$
$\Rightarrow u' = x'\frac{1}{t} + x\left(\frac{1}{t}\right)'$
$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x}$

$\Rightarrow u' + \frac{1}{t^2}x = \frac{1}{t}x'$

↗

$x' = t u' + \frac{1}{t} x \Rightarrow \boxed{x' = t u' + u}$

Substituindo na equação: $t u' + u = 2\frac{1}{u} + 3u \Rightarrow \boxed{t u' = \frac{2}{u} + 2u}$

b) $t u' = \frac{2}{u} + 2u$ ← EDO de 1ª ordem Separável

$\boxed{\int \frac{v'}{v} \, dt = \ln v}$

$t u' = \frac{2}{u} + 2u \Rightarrow \frac{u'}{\frac{2}{u} + 2u} = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{u . u'}{1 + u^2} = \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{u . u'}{1 + u^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \int \frac{2u . u' \, dt}{1 + u^2} du = \int \frac{1}{t} \, dt$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \ln(1 + u^2) = \ln t + c$

$\Rightarrow \ln (1 + u^2)^{1/4} = \ln t + c$

$\Rightarrow e^{\ln (1+u^2)^{1/4}} = e^{\ln t + c}$

$\Rightarrow (1 + u^2)^{1/4} = ct$

$\Rightarrow 1 + u^2 = c^4 t^4$

$\Rightarrow u = \pm \sqrt{c^4 t^4 - 1}$

c) $\Rightarrow \boxed{x = \pm t \sqrt{c^4 t^4 - 1}}$

- Intervalo maximal: $c^4 t^4 - 1 \geq 0 \Rightarrow t^4 \geq \frac{1}{c^4}$

$\Rightarrow t \geq \sqrt[4]{\frac{1}{c^4}} \lor t \leq -\sqrt[4]{\frac{1}{c^4}}$

Então, o intervalo maximal para cada $c \neq 0$:

$\left]-\infty, -\sqrt[4]{\frac{1}{c^4}}\right] \cup \left[\sqrt[4]{\frac{1}{c^4}}, +\infty\right[$

4) Ver aulas anteriores.

5) $f(t) = e^t + 2e^{-t}$

Logo, a equação característica tem soluções $m = 1$ e $m = -1$ e então é dada por: $(m-1)(m+1) = 0 \Rightarrow \boxed{m^2 - 1 = 0}$

Daqui conclui-se que a EDO é: $\boxed{x'' - x = 0}$

6) Soluções: Ver pág. 134 do livro de J. Robinson

a) $x_H(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$

b) $x_p(t) = -6t - 1$

c) $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - 6t - 1$

7) Ver aulas anteriores.