maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Folha 5 - Determinantes

1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 \\ -1 & 9 & 14 \\ -6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $|A|$ e $|B|$.
   (b) Compare $|A|$,$|B|$ e $|AB|$.
   (c) Verifique que A é não singular. Relacione $|A|$ com $|A^{-1}|$.
   (d) Verifique se $\det(A+B) = \det A + \det B$.
   (e) Verifique $\det A^T = \det A$.

2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 6 \\ 5 & -7 & 8 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 & -29 & 25 \\ 3 & 13 & -24 & 13 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \\ 5 & 25 & -35 & 21 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que A, B são não-singulares.
   (b) Compare $|A|$,$|B|$ e $|AB|$.
   (c) Compare $|A|$ com $|A^{-1}|$ e $|B|$ com $|B^{-1}|$.
   (d) Considere $C = B^{-1}AB$. Compare $|C|$ com $|A|$. Que resultado pode conjecturar?

3. Calcule o determinante das matrizes seguintes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $C = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$
   (d) $D = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{pmatrix}$

4. Use o teorema de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}$

5. Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ determine:

   (a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

6. A matriz A diz-se ortogonal se $AA^T = I$. Mostre que, se A é ortogonal então $\det(A) = \pm 1$.

7. Resolva a seguinte equação $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

8. Para que valores de a ($a \in \mathbb{R}$) existe a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

9. Determine quando possível, a matriz adjunta das seguintes matrizes.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. Determine para que valores de k, $k \in \mathbb{R}$, a matriz seguinte não tem inversa

$$\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

11. Mostre que o sistema de equações $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}$ tem uma única solução, para as seguintes matrizes do sistema. Utilize a regra de Cramer para resolver os sistemas.

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

    (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

12. Relativamente às matrizes do exercício 9, determine quando possível, a sua matriz inversa.