Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

(Primitivação e Integração)

Miguel Moreira e Miguel Cruz

Conteúdo

1 Primitivação

1.1 Noção de primitiva

Definição 1 *Se f e F são funções definidas no intervalo $[a,b]$, F é diferenciável em todos os pontos de $[a,b]$ e se para todo o $x \in [a,b]$,*

$$F'(x) = f(x),$$

diz-se que F é uma primitiva *de f em $[a,b]$.*

Observação 1 Nestas circunstâncias diz-se que f é **primitivável** em $[a,b]$.

Observação 2 Questões de notação: para denotar a primitiva F de uma função $y = f(x)$ é habitual utilizar a notação, $F(x) = P_x f(x)$, $F(x) = Pf(x)$ ou$F(x) = \int f(x)\,dx$.

Naturalmente $(P_x f(x))' = f(x)$.

Exemplo 1 As funções $F(x) = \sin x$ e $\mathrm{G}(x) = \sin x + 3$ são primitivas de $\cos x$ em $\mathbb{R}$ pois $(\sin x)' = (\sin x + 3)' = \cos x$. ■

Como se pode verificar, se F for uma primitiva de f, também $F + C$ (em que C é uma constante) é uma primitiva de f. Mas será que todas as primitivas de uma dada função diferem entre si de uma constante? O seguinte teorema responde afirmativamente a esta questão (mas só se F for uma primitiva de f **num intervalo**).

Proposição 1 *Sejam F e G duas primitivas de f no* ***intervalo*** *$[a,b]$. Então, $F(x) - G(x) = C$ (em que C é uma constante), isto é, F e G diferem entre si de uma constante.*

Dem. *Reparando que,*

$$\begin{aligned}(F(x) - G(x))' &= F'(x) - G'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

deduz-se que $F - G$ é constante no intervalo $[a,b]$, em resultado de um corolário do teorema de Lagrange. ■.

Função	**Primitiva**
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$x^\alpha, (\alpha \neq -1, x > 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Tabela 1: Tabela de primitivas elementares

Função	**Primitiva**
$\varphi'(x) \sin \varphi(x)$	$-\cos \varphi(x) + C$
$\varphi'(x) \cos \varphi(x)$	$\sin \varphi(x) + C$
$\varphi'(x) \varphi(x)^\alpha, (\alpha \neq -1, \varphi(x) > 0)$	$\frac{[\varphi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$\ln \lvert \varphi(x) \rvert + C$
$\frac{\varphi'(x)}{1+[\varphi(x)]^2}$	$\arctan \varphi(x) + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}$	$\arcsin \varphi(x) + C$

Tabela 2: Tabela de primitivas imediatas

1.2 Algumas primitivas imediatas

Na tabela 1 apresentamos algumas primitivas imediatas.

Reparando que

$$(F(\varphi(x)))' = \varphi'(x) F'(\varphi(x))$$

atendendo à regra de derivação da função composta concluí-se facilmente que $F(\varphi(x))$ é uma primitiva de $\varphi'(x) F'(\varphi(x))$.

Na tabela 2 apresentamos a versão mais geral da tabela 1.

1.3 Propriedades das primitivas

Daqui em diante, tendo em vista simplificar a notação utilizada, a igualdade $Pf(x) = Pg(x)$ deverá ser entendida verificando-se a menos de uma constante, isto é, significando

$$Pf(x) - Pg(x) = C,$$

com $C \in \mathbb{R}$.

Proposição 2 *Sejam f e g funções primitiváveis no intervalo $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, no intervalo $[a, b]$:*

1. $P(f(x) + g(x)) = Pf(x) + Pg(x)$;
2. $P(\alpha f(x)) = \alpha Pf(x)$;

Proposição 3 *Seja f uma função diferenciável no intervalo $[a, b]$. Então, no intervalo $[a, b]$,*

$$P_x f'(x) = f(x) + C.$$

Dem. $(f(x) + C)' = f'(x)$. ■

Proposição 4 *Toda a função contínua num intervalo é primitivável nesse intervalo.*

Dem. *Ver a parte 1 do teorema fundamental do cálculo integral (proposição 21).* ■

1.4 Técnicas de Primitivação

1.4.1 Primitivação por partes

Proposição 5 *Sejam f e g são funções com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Então, neste mesmo intervalo*

$$P(f'(x) g(x)) = f(x) g(x) - P(f(x) g'(x)).$$

Dem. *Da fórmula de derivação do produto,*

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x),$$

resulta

$$f'(x) g(x) = (f(x) g(x))' - f(x) g'(x).$$

Notando que estas funções são todas primitiváveis pois são contínuas (proposição 4), deduz-se

$$\begin{aligned} P(f'(x) g(x)) &= P\left((f(x) g(x))'\right) - P(f(x) g'(x)) \\ &= f(x) g(x) - P(f(x) g'(x)), \end{aligned}$$

tendo em conta algumas das propriedades, já assinaladas, da primitivação. ■

Exemplo 2 Calcule $P\sin^2 x$.

Fazendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin x$, resulta $f(x) = -\cos x$ e $g'(x) = \cos x$. Aplicando a fórmula de primitivação por partes,

$$\begin{aligned} P(\sin x \sin x) &= -\cos x \sin x - P\left(-\cos^2 x\right) \\ &= -\cos x \sin x + P\left(1 - \sin^2 x\right) \\ &= -\cos x \sin x + x - P\sin^2 x. \end{aligned}$$

Então,

$$P\sin^2 x = \frac{-\cos x \sin x + x}{2} + C. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3 Calcule $P\ln x$.

Fazendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \ln x$ resulta $f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Assim,

$$P\ln x = x\ln x - Px\frac{1}{x} = x(\ln x - 1) + C. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4 Calcule Pxe^x.

Fazendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$ resulta $f(x) = e^x$ e $g'(x) = 1$. Assim,

$$Pxe^x = xe^x - P1e^x = e^x(x-1) + C. \qquad \blacksquare$$

1.4.2 Primitivação por mudança de variável (ou substituição)

Comecemos por apresentar a seguinte notação para representar $f(g(t))$:

$$f(g(t)) = f(x)|_{x=g(t)}.$$

Proposição 6 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $x = \varphi(t)$ uma aplicação com derivada contínua e que não se anula. Então,*

$$P_x f(x) = P_t f(\varphi(t))\,\varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Dem. *Claramente $y = f(x)$ e $z = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ são funções primitiváveis no intervalo $[a,b]$ relativamente às variáveis x e t, respectivamente. Seja, $H(t) = P_t f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ e*

$$H\left(\varphi^{-1}(x)\right) = P_t f(\varphi(t))\,\varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

mostremos que $\frac{d\left(H\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)}{dx} = f(x)$. *Da regra de derivação da função composta e da função inversa deduz-se sucessivamente,*

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(H\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)}{dx} &= \left.\frac{d\left(H(t)\right)}{dt}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \frac{d\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{dx} \\
&= f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \left.\frac{1}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\
&= f(x)\,\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

■

Observação 3 Seguidamente apresentamos uma demonstração alternativa da proposição anterior.

Dem. Seja F uma primitiva de f e $H(t) = F(\varphi(t))$. Então

$$\begin{aligned}
H'(t) &= F'_x(\varphi(t))\,\varphi'(t) \\
&= f(\varphi(t))\,\varphi'(t),
\end{aligned}$$

o que mostra que $H(t) = F(\varphi(t))$ é uma primitiva de $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Assim, se em H substituirmos $\varphi(t)$ por x (ou seja fizermos $t = \varphi^{-1}(x)$) obteremos $F(x)$. ■

Observação 4 Utilizando outra notação para representar o conceito de primitiva a fórmula de primitivação por substituição pode ser apresentada da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \left.\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\
&= \left.\int f(\varphi(t))\,\frac{d\varphi}{dt}dt\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5 Calcule $P\frac{1}{(2x+1)^2}$.

Seja $t = 2x+1$, isto é, façamos $x = \varphi(t) = \frac{t-1}{2}$. Da fórmula de primitivação por substituição,

$$\begin{aligned}
P_x\frac{1}{(2x+1)^2} &= \left.P_t\frac{\varphi'(t)}{(2\varphi(t)+1)^2}\right|_{t=2x+1} \\
&= \left.P_t\frac{\frac{1}{2}}{t^2}\right|_{t=2x+1} \\
&= -\frac{1}{2}\,t^{-1}\big|_{2x+1} \\
&= -\frac{1}{2\left(2x+1\right)} + C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6 Calcule $Pe^{\sqrt{2-x}}$.

Façamos $\sqrt{2-x} = t$, isto é, $x = \varphi(t) = 2 - t^2$. Assim, $\varphi'(t) = -2t$ e

$$\begin{aligned} P_x e^{\sqrt{2-x}} &= P_t \varphi'(t)\, e^{\sqrt{2-\varphi(t)}}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= P_t(-2t)\, e^t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= -2Pte^t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= -2\left(e^t(t-1)\right)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= -2\left(e^{\sqrt{2-x}}\left(\sqrt{2-x}-1\right)\right) + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 7 Calcule $P\sqrt{4-x^2}$.

Seja $x = \varphi(t) = 2\sin t$. Então, $\varphi'(t) = 2\cos t$ e

$$\begin{aligned} P_x\sqrt{4-x^2} &= P_t \varphi'(t)\sqrt{4-\varphi(t)^2}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= P_t 2\cos t\sqrt{4-(2\sin t)^2}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= 4P_t\cos^2 t\Big|_{t=\arcsin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} P_t\cos^2 t &= P_t\left(1-\sin^2 t\right) = \\ &= t - \frac{-\cos t\sin t + t}{2} \\ &= \frac{t+\cos t\sin t}{2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_x\sqrt{4-x^2} &= 4\frac{t+\cos t\sin t}{2}\Big|_{t=\arcsin\frac{x}{2}} \\ &= 2\left(\arcsin\frac{x}{2} + \cos\arcsin\frac{x}{2}\sin\arcsin\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\left(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) + C \end{aligned}$$

■

Uma das principais dificuldades na primitivação por substituição reside na escolha da mudança de variável adequada. Em numerosas situações encontram-se estudadas substituições aconselhadas, tais como as que se apresentam na tabela 3, na qual f é uma função racional dos argumentos indicados. A utilização destas substituições permite transformar a função a primitivar numa função racional que pode ser primitivada por decomposição.

Primitiva	Substituição
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$, α raíz de ax^2+bx+c
$Pf\left(e^x\right)$	$x = \ln t$

Tabela 3: Primitivação por substituição

Exemplo 8 Calcule $P\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$.

Notemos que $a > 0$ em $x^2 + c$. Utilizemos por isso a primeira das substituições recomendada na tabela 3,

$$\sqrt{x^2+c} = t + x.$$

Assim, $x = \varphi(t) = \frac{c-t^2}{2t}$ e $\varphi'(t) = -\frac{t^2+c}{2t^2}$ e

$$\begin{aligned} P_x\frac{1}{\sqrt{x^2+c}} &= -P_t\frac{1}{t+\frac{c-t^2}{2t}}\frac{t^2+c}{2t^2}\Bigg|_{t=\sqrt{x^2+c}-x} \\ &= -P_t\frac{1}{t}\Bigg|_{t=\sqrt{x^2+c}-x} \\ &= -\ln\left|\sqrt{x^2+c}-x\right| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 9 Calcule $P\frac{e^x+2e^{-x}}{e^{2x}}$.

Notemos que

$$\frac{e^x+2e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}+2}{e^{3x}}$$

e façamos $x = \varphi(t) = \ln t$. Assim, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ e

$$P_x\frac{e^x+2e^{-x}}{e^{2x}} = P_t\frac{t^2+2}{t^3}\frac{1}{t}\Bigg|_{t=e^x} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 10 Calcule $P\frac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}$.

Notemos que $a > 0$ e que $x^2 - 3x - 2$ tem duas raízes reais distintas pois $b^2 - 4ac > 0$. Podemos recorrer à primeira ou última das substituições assinaladas na tabela 3. Utilizando a primeira das substituições, façamos

$$\sqrt{x^2-3x-2} = t + x.$$

Assim,

$$x = \varphi(t) = -\frac{2+t^2}{3+2t}$$

e

$$\varphi'(t) = -\frac{2t^2+6t-4}{(3+2t)^2}.$$

Resultando,

$$P_x \frac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1} = P_t \frac{1+t-\frac{2+t^2}{3+2t}}{-\frac{2+t^2}{3+2t}-1}\left(-\frac{2t^2+6t-4}{(3+2t)^2}\right)\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad \blacksquare$$

No próximo ponto iremos ver como primitivar funções racionais.

1.4.3 Primitivação por decomposição

A decomposição é uma técnica de primitivação de funções racionais que consiste em decompor em fracções elementares de primitivação imediata ou quase imediata a função racional que se pretende primitivar.

Proposição 7 *Seja $F(x)$ uma função racional. É possível escrever F na forma*

$$F(x) = H(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que H, P e Q representam polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico[1] *Q.*

Dem. *Omitida.* $\blacksquare$

Exemplo 11 Escreva na forma anteriormente indicada a função racional $F(x) = \frac{x^4-3x^2+x}{3x^3+x}$.

Apliquemos o algoritmo da divisão ao quociente F. Facilmente se verifica que

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{3} + \frac{-\frac{10}{3}x+1}{3x^2+1} \\ &= \frac{x}{3} + \frac{-\frac{10}{9}x+\frac{1}{3}}{x^2+\frac{1}{3}}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

[1] um polinómio é mónico se o coeficiente do termo de maior grau é 1.

função	Primitiva
$\frac{a}{(x-r)^k}, k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} a \ln\|(x-k)\| + C, \text{ se } k = 1 \\ \frac{a(x-r)^{-k+1}}{-k+1}, \text{ se } k > 1 \end{cases}$
$\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}$	$\frac{b\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)}{2} + \frac{(b\alpha+d)}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$
$\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}, k > 1,\ k \in \mathbb{N}$	$\frac{b\left(1+t^2\right)^{-k+1}}{2\beta^{2k-2}(1-k)} + \frac{b\alpha+d}{\beta^{2k-1}} \int \frac{1}{(1+t^2)^k}dt,\ t = \frac{x-\alpha}{\beta}$
$\frac{1}{(1+t^2)^k}, k > 1,\ k \in \mathbb{N}$	por partes fazendo, $\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^k}$

Tabela 4: Primitivação por decomposição

Assim, o cálculo da primitiva de F fica reduzido ao cálculo da primitiva elementar do polinómio H e da primitiva da fracção racional P/Q com as características atrás indicadas:

$$\int F(x)\,dx = \int H(x)\,dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Proposição 8 *Sejam P e Q polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico Q. Então P/Q pode decompor-se numa soma de termos elementares dos tipos seguintes:*

1. $\frac{a}{(x-r)^k}$, $a,\ r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $k \geq 1$
2. $\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}$, $\alpha,\ \beta,\ b,\ d \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *e* $k \geq 1$.

Dem. *Omitida.* ■

Desta forma conhecendo as primitivas dos termos elementares $\frac{a}{(x-r)^k}$ e $\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}$ o problema do cálculo de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ fica resolvido. Na tabela 4 apresentamos as primitivas indicadas.

Seguidamente vamos verificar como podemos decompor P/Q.

Proposição 9 *Consideremos o polinómio mónico Q e todas as suas raízes reais r_k $(1 \leq k \leq s)$ e complexas $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \leq l \leq t)$ assim como as respectivas multiplicidades μ_k $(1 \leq k \leq s)$ das raízes reais e da raízes complexas ν_l $(1 \leq l \leq t)$.*

Raízes:	*Multiplicidade:*
r_1	μ_1
$\vdots$	$\vdots$
r_s	μ_s
$c_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i$	ν_1
$\vdots$	$\vdots$
$c_t = \alpha_t \pm \beta_t i$	ν_t

Então o polinómio Q pode ser escrito da seguinte forma,

$$Q(x) = (x - r_1)^{\mu_1} \dots (x - r_s)^{\mu_s} \left((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\right)^{\nu_1} \dots \left((x - \alpha_t)^2 + \beta_t^2\right)^{\nu_t}$$

Dem. *Omitida.* ■

Exemplo 12 Decomponha na forma indicada o polinómio $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Comecemos por observar que as raízes de Q são $r = 1$ e $c = \pm i$, qualquer delas de multiplicidade um. Então,

$$Q(x) = (x - 1)\left(x^2 + 1\right).$$ ■

Proposição 10 *Consideremos a função racional P/Q tal que o grau de P é menor do que o grau do polinómio mónico Q e todas as raízes reais r_k $(1 \leq k \leq s)$ e complexas $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \leq l \leq t)$, **deste último polinómio**, assim como as respectivas multiplicidades μ_k $(1 \leq k \leq s)$ das raízes reais e da raízes complexas ν_l $(1 \leq l \leq t)$. Então,*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{n=1}^{\mu_k} \frac{a_k^{(n)}}{(x - r_k)^n} + \sum_{l=1}^{t} \sum_{m=1}^{\nu_l} \frac{b_l^{(m)} x + d_l^{(m)}}{\left((x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2\right)^m}$$

Dem. *Omitida.* ■

De referir que os coeficientes desconhecidos na decomposição anterior podem ser calculados pelo método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 13 Decomponha da maneira indicada as funções racionais

1. $F_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^3(x-1)}$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^3 (x - 1)} = \frac{a_1}{(x + 1)} + \frac{a_2}{(x + 1)^2} + \frac{a_3}{(x + 1)^3} + \frac{a_4}{(x - 1)}.$$

2. $F_2(x) = \frac{x^3-1}{x(x^2+1)^2}$

$$\frac{x^3-1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{a_1}{x} + \frac{b_1x+d_1}{(x^2+1)} + \frac{b_2x+d_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

3. $F_3(x) = \frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{b_1x+d_1}{(x^2+1)} + \frac{b_2x+d_2}{\left(x^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

4. $F_4(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{x^2+2x-1}{(x-1)\left(x^2+1\right)} \\ &= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{b_1x+d_1}{(x^2+1)}.\end{aligned}$$ ■

Exemplo 14 Decomponha em fracções elementares a função racional

$$F(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$$

e calcule os coeficientes indeterminados.

Do exemplo anterior,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{b_1x+d_1}{(x^2+1)} \\ &= \frac{a_1\left(x^2+1\right)+(x-1)(b_1x+d_1)}{(x-1)\left(x^2+1\right)} \\ &= \frac{(a_1+b_1)x^2+(d_1-b_1)x+(a_1-d_1)}{(x-1)\left(x^2+1\right)}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{l} a_1+b_1=1 \\ d_1-b_1=2 \\ a_1-d_1=-1 \end{array}\right. &\Rightarrow& \left\{\begin{array}{l} a_1=1 \\ b_1=0 \\ d_1=2 \end{array}\right. \\ & &\Rightarrow& \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x^2+1)}\end{aligned}$$ ■

2 O Integral de Riemann

2.1 Partições de intervalos e somas de Riemann

Definição 2 *Seja $[a,b]$ um intervalo com $b > a$.*

1. *Uma **partição**[2] de $[a,b]$ é um conjunto de pontos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

2. *A **norma** da partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é o número (que é sempre maior ou igual a zero),*

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_{j-1}|.$$

3. *Um **refinamento** da partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição Q de $[a,b]$ tal que $P \subseteq Q$. Nesta situação diz-se que Q é **mais fina** do que P.*

Exemplo 15 Sejam $I = [0,1]$, $P = \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 1\}$ e $Q = P \cup \{0.7\}$. P e Q são duas partições de I tais que $\|P\| = 0.5$ e $\|Q\| = 0.3$. Q é um refinamento da partição P pois $P \subseteq Q$. Naturalmente Q é mais fina do que P. ■

Definição 3 *Seja $[a,b]$ um intervalo fechado limitado, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Chama-se **soma de Riemann** de f relativamente à partição P ao número*

$$S(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

com

$$t_j \in [x_{j-1}, x_j] \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo 16 Represente e interprete geometricamente uma soma de Riemann de $f(x) = x^2$ em $[0,1]$ e $P = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

Proposição 11 *Sejam P e Q partições de $[a,b]$ tal que $P \subseteq Q$ então $\|P\| \geq \|Q\|$.*

Dem. *Omitida.* ■

[2] ou *decomposição* de vértices P.

Definição 4 *(Convergência de uma soma de Riemann) Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.* ***Diz-se*** *que a soma de Riemann de f converge para o número $I(f)$ quando $\|P\| \to 0$ se para todo $\delta > 0$ existe uma partição P_δ de $[a, b]$ tal que*

$$P_\delta \subseteq P \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(f) \right| < \delta$$

para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$. Nestas circunstâncias

$$I(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

2.2 Integrabilidade à Riemann

Definição 5 *Seja $[a, b]$ um intervalo com $b > a$. Diz-se que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é* ***integrável à Riemann*** *em $[a, b]$ se f é limitada em $[a, b]$ e se o limite*

$$I(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}),$$

existe. Nestas circunstâncias escreve-se

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

e diz-se que $\int_a^b f(x)\, dx$ é o ***integral definido*** *de f entre a e b.*

Na definição anterior f representa a chamada **função integranda**, x a **variável de integração**, dx o **acréscimo infinitésimal** associado a

$$\lim_{\|P\| \to 0} (x_j - x_{j-1})$$

e a e b os **limites de integração**.

Observação 5 No presente contexto e se nada for dito em contrário a expressão “função integrável” deverá entender-se “função integrável à **Riemann**”.

Exemplo 17 As funções constantes $f(x) = k$, são integráveis à Riemann pois são limitadas, e $f(t_j) = k$ para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ para toda a partição P de $[a, b]$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} k(x_j - x_{j-1}) &= k \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \\ &= k(b - a). \end{aligned}$$

■

O seguinte resultado mostra que todas as funções contínuas são integráveis à Riemann.

Proposição 12 *As funções contínuas em intervalos fechados e limitados* $[a,b]$*, são integráveis à Riemann.*

Dem. Omitida. ∎

O integral de Riemann de uma função positiva entre a e b pode interpretar-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 18 Consideremos a função $f(x) = x$ e o intervalo $[0,1]$. Calculemos $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Consideremos a partição diádica do intervalo indicado,

$$P_n = \{j/2^n : j = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$$

e a soma de Riemann,

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{j=1}^{j=2^n} f\left(\frac{j}{2^n}\right)\left(\frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n}\right) = \sum_{j=1}^{j=2^n} \frac{j}{2^n}\frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{j=1}^{j=2^n} \frac{j}{4^n} \\ &= \frac{1+2+4+\ldots+2^n}{4^n} \\ &= \frac{(1+2^n)\,2^n}{2\times 4^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

∎

3 Propriedades do Integral de Riemman

3.1 Propriedades elementares

Vamos ver agora algumas propriedades importantes do integral de Riemann.

Proposição 13 (Linearidade do Integral) *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f+g$ e αf são integráveis em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

e

$$\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dem. *Deixemos a demonstração da segunda igualdade como exercício e demonstremos a primeira. Comecemos por observar que $f+g$ é limitada em $[a,b]$. Seja $\delta > 0$ e $\delta_1 \le \frac{\delta}{2}$. Existem partições P_{δ_1} e R_{δ_1} tais que*

$$P_{\delta_1} \subseteq P \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(f)\right| < \delta_1 = \frac{\delta}{2}$$

e

$$R_{\delta_1} \subseteq P \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} g(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(g)\right| < \delta_1 = \frac{\delta}{2}$$

para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1,2,\ldots,n$ (porquê?). Consideremos a partição de $[a,b]$, $Q_\delta = P_{\delta_1} \cup R_{\delta_1}$. Então,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} (f(t_j)+g(t_j))(x_j - x_{j-1}) - (I(f)+I(g))\right| &= \\
\left|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(f) + \sum_{j=1}^{n} g(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(g)\right| &\le \\
\left|\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(f)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} g(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(g)\right| &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta
\end{aligned}$$

se $Q_\delta \subseteq P$, para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1,2,\ldots,n$ (porquê?). O que mostra que,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

Proposição 14 *Se f é integrável em $[a,b]$ então f é integrável em todo o subintervalo $[c,d]$ de $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

para todo o $c \in \left]a,b\right[$.

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 15 (Comparação de Integrais) *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

Em particular se $m \le f(x) \le M$,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{2}$$

Dem. *Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então, $h(x) \le 0$ para todo $x \in [a,b]$, com h e a função constante 0 integráveis à Riemann (porquê?). Por outro lado,*

$$S(h,P) \le S(0,P) = 0$$

para toda a partição de P de $[a,b]$. Então,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} h(t_j)(x_j - x_{j-1}) \le 0.$$

Da linearidade do integral (proposição 15), conclui-se

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x)\,dx &= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \le 0, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

como se pretendia. ■

Proposição 16 *Seja f integrável em $[a,b]$, então $|f|$ é integrável em $[a,b]$, e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 17 *Seja f e g integráveis em $[a,b]$, então fg é integrável em $[a,b]$.*

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 18 *Se f é integrável em $[a,b]$ então*

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0$$

para todo o $c \in [a,b]$.

Dem. *Seja $c \in [a,b[$, $h > 0$ tal que $c+h \in [a,b[$ e M o máximo de f em $[a,b]$. Então, das proposições 16 e 15,*

$$\begin{aligned}\left|\int_c^{c+h} f(x)\,dx\right| &\le \int_c^{c+h} |f(x)|\,dx \\ &\le M(c+h-c) \\ &\le Mh.\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$ resulta $\left|\int_c^{c+h} f(x)\,dx\right| \to 0$. Deste facto resulta a tese. Análogamente se demonstra a situação $c = b$. ■

Definição 6 *Seja f integrável em $[a,b]$, então*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta definição pode justificar-se recorrendo à noção de Integral de Riemann e permite generalizar algumas das propriedades já estudadas.

Proposição 19 (Teorema da média) *Seja f contínua em $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{3}$$

Dem. *Naturalmente f é integrável (porquê?). Seja m e M o mínimo e o máximo de f em $[a,b]$, respectivamente. Do **teorema de Bolzano** (porque*

f é contínua) para todo μ entre m e M existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \mu$. Da equação (2) como,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M,$$

fazendo $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ resulta a tese. ■

3.2 Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Comecemos por definir o que se entende por integral indefinido.

Definição 7 *Seja f integrável em $[a,b]$. Então a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*com $x \in [a,b]$ diz-se **integral indefinido** de f.*

Proposição 20 *Seja f integrável em $[a,b]$, então*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

existe e é contínua em $[a,b]$.

Dem. *Seja $\delta > 0$, $x_0 \in [a,b]$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ e $\varepsilon = \frac{\delta}{M}$. Então, recorrendo às propriedades atrás indicadas,*

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right| \\ &= \begin{cases} \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right|, & se\ x_0 \leq x \\ \left| \int_x^{x_0} f(t)\,dt \right|, & se\ x_0 > x \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt, & se\ x_0 \leq x \\ \int_x^{x_0} |f(t)|\,dt, & se\ x_0 > x \end{cases} \\ &\leq M|x - x_0|. \end{aligned}$$

Este facto mostra, como se pretendia, que

$$|x - x_0| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |F(x) - F(x_0)| < \delta.$$ ■

Proposição 21 (Teorema fundamental do Cálculo Integral) *Seja $[a,b]$ um intervalo com $b > a$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Se f é contínua em $[a,b]$ então $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ tem derivada contínua em $[a,b]$ e*

$$\frac{d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)}{dx}=F'(x)=f(x). \tag{4}$$

2. *(Fórmula de Barrow) Se f é contínua em $[a,b]$ e G uma primitiva de f em $[a,b]$. Então*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= G(x)\big|_a^b\\ &= G(b)-G(a).\end{aligned} \tag{5}$$

Dem.

1. *Seja $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Calculemos a razão incremental de F em $x_0\in\,]a,b[$:*

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h}\\ &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h},\end{aligned}$$

das propriedades elementares do integral. Por outro lado, como f é contínua em $[a,b]$, da proposição 19 (teorema da média) existe ξ_h entre x_0 e x_0+h tal que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt &= f(\xi_h)(x_0+h-x_0)\\ &= f(\xi_h)\,h.\end{aligned}$$

Assim, notando que $\xi\to x_0$ quando $h\to 0$, (porquê?),

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi_h)\,h}{h}\\ &= f(x_0).\end{aligned}$$

Este facto demonstra que $F'(x)=f(x)$ e que F' é contínua em $]a,b[$. A demonstração de que $F'(a)=f(a)$ (derivada de F à direita de a) e $F'(b)=f(b)$ (derivada de F à esquerda de b) poderia ser realizada de forma idêntica recorrendo à noção de derivada lateral direita e esquerda respectivamente.

2. *Seja $G(x)$ uma primitiva de f em $[a,b]$. Então, da proposição 1, já que $\int_a^x f(t)\,dt$ também é uma primitiva de f em $[a,b]$,*

$$G(x) - \int_a^x f(t)\,dt = k.$$

Fazendo $x = a$ resulta $G(a) = k$. Assim,

$$G(b) - \int_a^b f(t)\,dt = G(a),$$

o que demonstra a validade da equação (5). ■

Observação 6 É possível enfraquecer ligeiramente as hipóteses do número 2 da proposição 21:

(Fórmula de Barrow) Se F' é integrável em $[a,b]$ então

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(t)\,dt &= F(x)|_a^b \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

A demonstração deste caso pode encontrar-se em [6].

Observação 7 A equação (5) fornece-nos um método de cálculo do integral definido e é conhecida por f**órmula de Barrow** ou **fórmula de Newton-Leibniz**.

Exemplo 19 Seja f é contínua em $[a,b]$, $F(y) = \int_a^y f(t)\,dt$ e $y = g(x)$ uma função diferenciável em $]a,b[$. Calcule, a derivada de

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt,$$

em $]a,b[$.

1. Comecemos por observar que $(H(x))' = (F(g(x)))'$. Pela regra de derivação da função composta

$$(H(x))' = F_y'(g(x))\,g'(x).$$

2. Mas, do número 1 da proposição 21, $F_y'(y) = f(y)$, então

$$(H(x))' = f(g(x))\,g'(x).$$ ■

Exemplo 20 Calcule $\int_0^\pi \sin x dx$. Seja $-\cos x$ uma primitiva de $\sin x$. Então, do número 2 da proposição 21,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x dx &= -\cos x|_0^\pi \\ &= -\cos\pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) - (-1) = 2.\end{aligned}$$

■

3.3 Integração por partes

Proposição 22 (Fórmula de integração por partes) *Sejam f e g diferenciáveis em $[a,b]$ com f' e g' integráveis em $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Dem. *Da regra de derivação do produto,*

$$f'(x)\, g(x) = (f(x)\, g(x))' - f(x)\, g'(x). \tag{6}$$

Tendo presente a fórmula de Barrow, notando que $f(x)\, g(x)$ é uma primitiva de $(f(x)\, g(x))'$ e que os restantes termos da equação anterior são integráveis em $[a,b]$, deduz-se o resultado pretendido, integrando membro a membro a equação (6). ■

Exemplo 21 Calcule $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$.

Seja $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$. Nestas circunstâncias $g'(x) = 1$ e $f(x) = -\cos x$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin x dx &= -x\cos x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1(-\cos x)\, dx \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= \sin x|_0^{\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

■

3.4 Integração por mudança de variável

Proposição 23 (Mudança de variável) *Seja $x = \varphi(t)$ uma função com derivada contínua em $[a,b]$, intervalo fechado e limitado, tal que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Se,*

1. *f for contínua em $\varphi([a,b])$, ou se,*

2. φ for estritamente crescente em $[a,b]$ e f for integrável em $[\varphi(a), \varphi(b)]$, então,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dem. *Demonstremos apenas o primeiro resultado (a demonstração do número 2 pode encontrar-se em [6]). Suponha-se f contínua em $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Seja, $F(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f(\xi)\,d\xi$ uma primitiva de f. Note-se que F é uma primitiva de f em resultado do número 1 da proposição 21. Por outro lado $H(t) = F(\varphi(t))$ é uma primitiva da função contínua $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Assim pela fórmula de Barrow resulta sucessivamente,*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt &= H(b) - H(a) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 22 Calcule $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Seja $x = \varphi(t) = \sin t$ e $\varphi'(t) = \cos t$. Assim, quando $x = 1$ e $x = 0$, $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ e $t = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-(\sin t)^2}}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

4 Algumas aplicações do integral definido

4.1 Cálculo de áreas

A área A, limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ $(a \leq b)$, pode calcular-se recorrendo à seguinte expressão:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Note-se que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - g(t_j)| (x_j - x_{j-1})$$

facto que interpretado geometricamente justifica a afirmação.

Exemplo 23 Cálcule a área limitada pelas curvas $y = \sin x$ e o eixo dos xx entre $x = 0$ e $x = \pi$.

Seja então

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi |\sin x - 0|\, dx = \int_0^\pi \sin x dx \\ &= -\cos \pi + \cos 0 = 2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 24 Cálcule a área limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.Seja então

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left|x - x^2\right| dx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx \\ &= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

4.2 Cálculo de volumes de sólidos de revolução

O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis não negativas) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as rectas $x = a$ e $x = b$ $(a \leq b)$, pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$V = \int_a^b \pi \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$$

Note-se que

$$\int_a^b \pi \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \pi \left|f^2(t_j) - g^2(t_j)\right| (x_j - x_{j-1})$$

facto que interpretado geometricamente justifica a afirmação.

Exemplo 25 Cálcule o volume de uma esfera de raio igual a um.

Seja então $y = \sqrt{1 - x^2}$,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi \left| \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^2 - 0^2 \right| dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2 \right) dx \\ &= \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} \\ &= \pi \frac{4}{3}. \end{aligned}$$ ■

Exemplo 26 Cálcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da superfície limitada pelas curvas $y = kx$ e o eixo dos xx entre $x = 0$ e $x = h$ ($k > 0$ e $h > 0$).

Seja então

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{h} \pi \left| (kx)^2 - 0^2 \right| dx \\ &= \pi k^2 \int_{0}^{h} x^2 dx \\ &= \frac{\pi k^2 h^3}{3}. \end{aligned}$$ ■

4.3 Cálculo do comprimento de linha

O comprimento l da linha associada ao gráfico da função $y = f(x)$ (com derivada contínua) entre $x = a$ e $x = b$ (isto é entre os pontos $(a, f(a))$ e $b, f(b))$, pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido por

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x) \right)^2} dx$$

Note-se que

$$\int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x) \right)^2} dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(t_j) \right)^2} (x_j - x_{j-1})$$

facto que interpretado geometricamente justifica a afirmação.

Exemplo 27 Calcule o perímetro de uma circunferência de raio igual a um.

Seja $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ e $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Então,

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^1 \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx \\ &= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-\sin^2 t}}\cos t dt \\ &= 4\frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $x=\sin t$. ■

5 Integrais Impróprios

A operação de integração pode ser extendida a intervalos não limitados e/ou funções não limitadas recorrendo à noção de **integral impróprio** que podem, assim, ocorrer em duas situações diferentes:

1. quando os limites de integração são infinitos, isto é, quando o intervalo de integração não é limitado (**Integrais impróprios de 1^a espécie**);

2. quando a função integranda é não limitada no intervalo de integração.(**Integrais impróprios de 2^a espécie)**

5.1 Limites de integração infinitos

Definição 8 *Seja f uma função integrável para todo o α sempre que $[a,\alpha]\subset[a,+\infty[$. O* integral impróprio, *da função f em $[a,+\infty]$, é o limite*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe ou converge.

Se $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$ não existir nem for finito diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ não existe ou diverge.

Define-se de maneira análoga,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Exemplo 28 Calculemos $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\arctan x|_0^{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\arctan\alpha\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$
■

Exemplo 29 Calculemos $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty} -x^{-1}\big|_1^{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\alpha^{-1}-(-1)\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$
■

Exemplo 30 Calculemos $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{\alpha\to-\infty}\arctan x|_{\alpha}^{0} + \frac{\pi}{2}\\ &= -\lim_{\alpha\to-\infty}\arctan\alpha + \frac{\pi}{2}\\ &= \pi.\end{aligned}$$
■

Exemplo 31 Mostre que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}\frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\ln|x|\big|_1^{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\ln(\alpha)\\ &= +\infty.\end{aligned}$$
■

Exemplo 32 Estude quanto à convergência o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$. Seja $k = 1$, do exemplo anterior verifica-se que o integral impróprio referido não converge. Suponha-se $k \neq 1$. Então

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx &= \lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right) \Bigg|_1^{\alpha} \\ &= \frac{1}{(1-k)} \lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} \right) - \frac{1}{(1-k)}. \end{aligned}$$

O que mostra que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$ converge, quando $k > 1$, pois $\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} \right) = 0$ e diverge quando $0 \leq k < 1$ pois $\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} \right) = +\infty$. Em resumo,

$$\begin{aligned} k &\leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \text{ diverge e} \\ k &> 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \text{ converge.} \end{aligned} \tag{7}$$

5.2 Funções integrandas não limitadas

Definição 9 *Seja f uma função integrável para todo o α sempre que $[a, \alpha] \subset [a, c[$ e não limitada em $\alpha = c$. O* integral impróprio, *da função f em $[a, c]$, é o limite*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^{\alpha} f(x)\, dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação diz-se que $\int_a^c f(x)\, dx$ existe ou converge.

Se $\lim_{\alpha \to c^-} \int_a^{\alpha} f(x)\, dx$ não existir nem for finito diz-se que $\int_a^c f(x)\, dx$ não existe ou diverge.

Define-se de maneira análoga, $\int_a^b f(x)\, dx$ quando a não limitação de f se verifica em $x = a$, limite inferior de integração, ou $x = c$, pertencente ao interior do intervalo $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{\alpha \to a^+} \int_{\alpha}^b f(x)\, dx, \\ \int_a^b f(x)\, dx &= \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^{\alpha} f(x)\, dx + \lim_{\beta \to c^+} \int_{\beta}^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Exemplo 33 Calculemos $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{\alpha\to 1^-} \int_\alpha^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \\
&= \lim_{\alpha\to 1^-} \left. \frac{-(1-x)^{1/2}}{1/2} \right|_0^\alpha \\
&= -2 \lim_{\alpha\to 1^-} \left. (1-x)^{1/2} \right|_0^\alpha \\
&= -2 \left(\lim_{\alpha\to 1^-} (1-x)^{1/2} - 1 \right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$
■

Exemplo 34 Calculemos $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+} \left. -x^{-1} \right|_\alpha^1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$
■

Exemplo 35 Estude quanto à convergência o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$. Seja $k = 1$, então

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \ln|x|\Big|_\alpha^1 = +\infty$$

O que mostra que $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$ não converge, quando $k = 1$. Suponha-se que $k \neq 1$. Então

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx &= \lim_{\alpha\to 0^+} \left. \left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right) \right|_\alpha^1 \\
&= \frac{1}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)} \lim_{\alpha\to 0^+} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} \right).
\end{aligned}$$

o que mostra que $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$ diverge se $k > 1$ (pois $\lim_{\alpha\to 0^+} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right) = +\infty$) e converge se $0 \leq k < 1$. Em resumo,

$$\begin{aligned}
k &< 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^k}dx \text{ converge e} \\
k &\geq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^k}dx \text{ diverge.} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Exemplo 36 Seja $f(x) = x^{-3/4}$. Mostre que $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e que $\int_0^1 \pi (f(x))^2\,dx$ não converge. Interprete o resultado geometricamente.

Antendendo ao resultado (8) concluí-se imediatamente que $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}}dx$ é convergente e

$$\int_0^1 \pi \left(x^{-3/4}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$$

é divergente. Este facto mostra que a área limitada superiormente pela curva f e inferiormente pelo eixo dos xx, entre $x = 0$ e $x = 1$, é finita enquanto que o volume do sólido de revolução, gerado pela mesma, é infinito. ■

5.3 Critérios de convergência

Antes de apresentarmos alguns importantes critérios de convergência iremos referir a definição de convergência absoluta de um integral impróprio.

Definição 10 *Seja*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

um integral impróprio de 1ª ou de 2ª espécie. Este integral diz-se absolutamente convergente se o integral impróprio

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

convergir.

O seguinte resultado relaciona a convergência absoluta de um integral impróprio com a sua convergência, dita, simples.

Proposição 24 *Seja $\int_a^b f(x)\,dx$ um integral impróprio de 1ª ou de 2ª espécie. Se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ é um integral impróprio convergente então $\int_a^b f(x)\,dx$ também é convergente.*

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 25 (Primeiro critério de comparação) *Sejam $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ dois integrais impróprios, ambos da mesma espécie e relativamente ao mesmo limite de integração, tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in]a,b[$. Então*

1. *$\int_a^b f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ divergente.*

2. $\int_a^b g(x)\,dx$ *convergente* $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ *convergente.*

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 26 (Segundo critério de comparação) *Sejam* $\int_a^b f(x)\,dx$ *e* $\int_a^b g(x)\,dx$ *dois integrais impróprios de 1ª ou de 2ª espécie relativamente ao limite superior* $x = b$ *(respectivamente, limite inferior* $x = a$*) tais que* $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^+$ *(respectivamente,* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^+$*. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ e \ \int_a^b g(x)\,dx$$

são da mesma natureza, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes.

Dem. *Omitida.* ■

Na utilização dos critérios de convergência atrás enunciados os resultados de convergência (7) e (8) são frequentemente utilizados.

Exemplo 37 Estude quanto à convergência o seguinte integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx.$$

Comecemos por observar que $0 \le \frac{1}{x^2(1+e^x)} \le \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1,+\infty[.$ e que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge como vimos anteriormente. Então do primeiro critério de comparação resulta a convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx$. ■

Exemplo 38 Estude quanto à convergência o seguinte integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx.$$

Comecemos por observar que $0 \le \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} \le \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in]0,1]$. Tendo em conta que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge, concluí-se que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ também converge, pelo primeiro critério de comparação. ■

Exemplo 39 Estude quanto à convergência o seguinte integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx.$$

Comecemos por observar que $0 \le \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}, \forall x \in [1,+\infty[$. Tendo em conta que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge, concluí-se que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ também converge pelo primeiro critério de comparação. Da proposição 24 concluí-se a convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$. ■

Exemplo 40 Mostre que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, reparando que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= 1 \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

deduz-se pelo segundo critério de comparação a convergência de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$, já que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ também converge. ■

Exemplo 41 Mostre que $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ e $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, reparando que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} &= \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

deduz-se pelo segundo critério de comparação a convergência de $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$, já que $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ também converge. Note que (8) permite concluír que $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ converge já que

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}.$$ ■

Referências

[1] Apostol, T. M., Calculus, Reverté, 1977;

[2] zenha, Acilina e Jerónimo, M. A., Cálculo Diferencial Integral em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, McGraw-Hill, 1995;

[3] Lima, Elon Lages, Curso de Análise (Vol 1 e 2), IMPA, Projecto Euclides, 1995;

[4] Piskounov, N., Calcul Différentiel et Intégral, MIR, 1976;

[5] Taylor, A. E., Advanced Calculus, Xerox College Publishing, Massachusetts, 1972;

[6] Wade, W. R., An Introduction to Analysis, Prentice Hall, 1995;