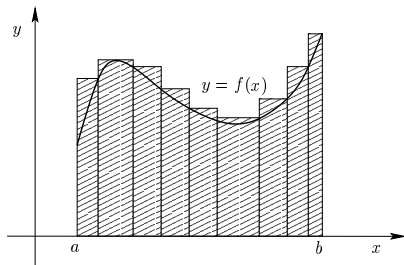
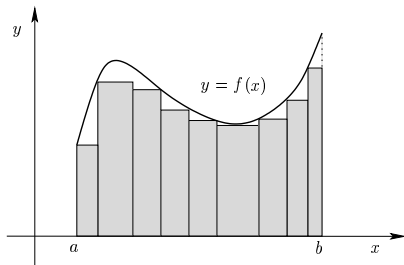


# Integral de Riemann

Vamos considerar funções  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  limitadas, isto é,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta.$$



$s(f, P)$  – área a cheio

$S(f, P)$  – área a tracejado

## Definição

Dado um intervalo  $[a, b]$ , seja  $\Upsilon = \{\text{partições de } [a, b]\}$ .

Define-se integral superior de  $f$  do seguinte modo:

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf_{P \in \Upsilon} \{S(f, P)\}.$$

Define-se integral inferior de  $f$  do seguinte modo:

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup_{P \in \Upsilon} \{s(f, P)\}.$$

## Definição

Dados um intervalo  $[a, b]$  e uma função  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  diz-se **integrável em  $[a, b]$**  se

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx.$$

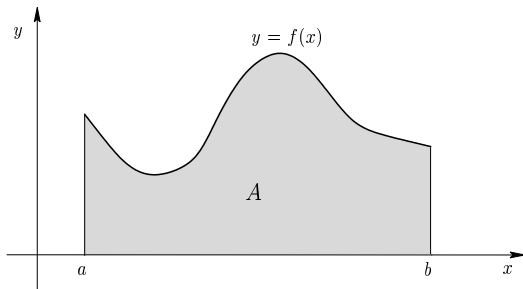
A este valor comum chama-se *integral de  $f$*  (ou *integral definido de  $f$* ) e denota-se por

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_a^b f.$$

## Interpretação geométrica do integral de Riemann:

Dada uma função  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  não negativa, integrável, seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



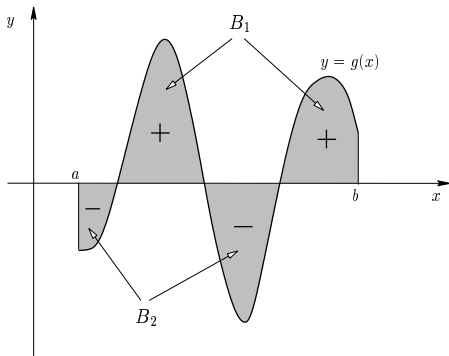
Chamamos **área de A** ao valor do integral de  $f$  em  $[a, b]$ , isto é,

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x) dx.$$

Seja agora  $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Sejam

$$B_1 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) > 0, 0 < y \leq g(x)\},$$

$$B_2 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) < 0, g(x) \leq y < 0\}.$$



$$\text{área de } B_1 - \text{área de } B_2 = \int_a^b f(x) dx$$

# Propriedades do integral definido

## Proposição

Sejam  $[a, b]$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis. Então:

1) Se  $c \in ]a, b[$ , então  $f|_{[a, c]}$  e  $f|_{[c, b]}$  são integráveis e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

2) Para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \cdot f$  é integrável e

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx;$$

3)  $f + g$  é integrável e

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

## Propriedades do integral definido

**4)** Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo o  $x \in [a, b]$  então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Em particular, se  $f(x) \geq 0$  para todo o  $x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0;$$

**5)**  $|f|$  é integrável e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

**6)**  $f \cdot g$  é integrável.

## Proposição

Sejam  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $c \in ]a, b[$  e suponhamos que  $f|_{[a, c]}$  e  $f|_{[c, b]}$  são integráveis. Então  $f$  é integrável e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

## Teorema

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $f$  é integrável.

## Nota

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função descontínua apenas num número finito de pontos. Então  $f$  é integrável.

## Teorema

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e monótona. Então  $f$  é integrável.



## Nota

**Convenção:** *Por uma questão de comodidade, não queremos estar preocupados com o facto do extremo superior de integração ser ou não maior ou igual ao extremo inferior. Assim, convencionou-se que, se  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável,*

$$\forall c, d \in [a, b] : c \leq d \quad \int_d^c f(x) dx = - \int_c^d f(x) dx.$$

*As propriedades do integral definido apresentadas anteriormente mantêm-se válidas após esta generalização.*

# Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então

$$\forall x \in [a, b] \quad f|_{[a, x]} \text{ é integrável.}$$

Seja

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

## Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)

*Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Suponhamos que  $f$  é contínua em  $c \in [a, b]$ . Então a função  $F$  é derivável em  $c$  e  $F'(c) = f(c)$ .*

## Corolário

*Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $f$  admite primitiva.*

## Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)

Sejam  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e  $F$  uma primitiva de  $f$ . Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

### Nota

O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo justifica a utilização do símbolo  $\int f(x) dx$  para denotar o conjunto das primitivas de uma função  $f$ .

**Notação:** Nas condições do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, se  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , denota-se

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{Notação}}{=} F(b) - F(a).$$

## Teorema

Sejam  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis tais que  $f'$  e  $g'$  são integráveis. Então é válida a

**fórmula de integração por partes no integral definido**

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[ f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

## Proposição

Sejam  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite primitiva,  
 $\varphi : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável tal que  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ .  
Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

## Corolário

Sejam  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite primitiva,  
 $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  uma função bijectiva, derivável. Então

$$\forall y \in [a, b] \quad \int_a^y f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

## Teorema (Integração por mudança de variável)

Sejam  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável,  $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  uma função bijectiva com derivada nunca nula no intervalo  $]c, d[$ . Então é válida a seguinte

**fórmula de integração por substituição no integral definido**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

## Teorema (do Valor Médio para Integrais)

Seja  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então

$$\exists c \in ]a, b[ \quad \int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a).$$