UNIVERSIDADE DO MINHO		6 de fevereiro de 2012
	Álgebra Linear	
	Exame de Recurso - **A**	
LEI		Duração: 2 horas

Nome: ____ **Nº:** __________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, com $b \in \mathbb{R}$, e $AC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ então $A(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & b \end{pmatrix}$. V F

b) A matriz, de ordem n, $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = i^2 + j^2$ é uma matriz simétrica. V F

c) Se $A = \begin{pmatrix} x & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $AB^T = 0$. V F

2. **a)** A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k-3 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}$ tem característica 2 para qualquer valor real, não nulo, k. V F

b) A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ tem determinante nulo, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$. V F

c) Sendo A e B matrizes de ordem $n > 1$ invertíveis e $AB = I_n$, tem-se $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$. V F

3. Sejam $\mathbf{x} = (1,1,1)$, $\mathbf{y} = (1,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,0,1)$ e $\mathbf{w} = (0,1,1)$ quatro vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ geram um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$. V F

b) $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. V F

c) Existem reais α, β e γ, tais que, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} + \gamma\mathbf{z} = \mathbf{w}$. V F

4. Seja f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, tal que, $f((-1,3)) = (-1,2,1)$ e $f((-2,3)) = (3,3,3)$.

a) $f((1,0)) = (-2,-5,-4)$. V F

b) $f((0,0)) = (1,1,1)$. V F

c) A matriz da aplicação linear f é de ordem 3×2. V F

II

Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

considere o sistema $AX = \mathbf{b}$, de variáveis x, y, z, cuja matriz ampliada é $[A|\mathbf{b}]$.

a) Complete de modo a obter afirmações verdadeiras.

i) O sistema $AX = \mathbf{b}$ é impossível se e só se . . . .

ii) O sistema $AX = \mathbf{b}$ é possível e indeterminado se e só se . . . .
. . . .
. .

iii) O sistema $AX = \mathbf{b}$ é possível e determinado se e só se . . . .
. . . .

b) Considere o sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$, para $\alpha = 7$, e determine o seu conjunto solução.

III

Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) : \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

a) Mostre que S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule, justificando, a dimensão de S.

c) Considere $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$. Verifique se B é uma base de S.

d) Averigúe se o vector $(1, 2, 3)$ pertence ao subespaço gerado pelos vectores $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 0)$.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Escreva o polinómio característico da matriz A.

b) Verifique, justificando, que $\lambda = 1$ é valor próprio de A.

c) Calcule os restantes valores próprios da matriz A.

d) Considere o valor próprio $\lambda = 1$ e calcule o respectivo subespaço próprio.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f((1,1)) = (1,2,1), \quad f((-1,1)) = (-1,0,3).$$

a) Determine $f((1,0))$ e $f((0,1))$ e indique, justificando, qual a matriz da aplicação linear f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

b) Determine $f((x,y))$ com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Determine $Nuc(f)$ e classifique, justificando, f quanto à injectividade.

4. Seja P uma matriz quadrada de ordem n, invertível, e seja $T : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por

$$T(A) = P^{-1}AP, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

Cotação:

I	II	III - 1	III - 2	III - 3	III - 4
3	1.5+1	1+1+1+1	1+1+1+1.5	2+1+1.5	1.5
3	2.5	4	4.5	4.5	1.5