2. Espaços Vectoriais

O conceito de espaço vectorial é fundamental para se desenvolver a teoria sobre a existência e unicidade de solução de um sistema de equações lineares, mais precisamente, o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ algebrizado por uma adição e uma multiplicação por um n.º real.

Seja $n \geq 1$. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ têm a forma de sequências ordenadas de $\underset{=}{n}$ n.os reais:

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Dois elementos $\underset{\sim}{x} = (x_i)$ e $\underset{\sim}{y} = (y_i)$ de $\mathbb{R}^n$ dizem-se <u>iguais</u> se e só se as componentes homólogas são iguais, i.e.,

$$x_i = y_i \quad , i = 1, \ldots, n$$

$\underset{\sim}{0}$ → elt de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são todas nulas

Em $\mathbb{R}^n$ define-se a operação de adição por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

e uma multiplicação por um n.º real por

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são designados vectores do espaço $\mathbb{R}^n$ e $\underset{\sim}{0}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^n$.

Usar-se-á a notação matricial $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ em "vector" coluna

ou $\underset{\sim}{x} = (x_1\ x_2 \ldots x_n)$ em "vector" linha.

Definição (Espaço Vectorial) Seja $\underline{V}$ um conjunto. Diz-se que

V é um espaço vectorial (ou espaço linear) se estão definidas duas operações:
uma designada adição (representa-se por +), que associa a cada par de elementos de V, $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$, o elemento $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y} \in V$;

a outra designada multiplicação por um escalar, que associa a cada nº real α e cada elemento $\underset{\sim}{x}$ de V, o elemento $\alpha \underset{\sim}{x} \in V$.

Estas operações devem satisfazer as propriedades:

(i) $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{x}$, $\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V$

(ii) $\underset{\sim}{x}+(\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{z}) = (\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y})+\underset{\sim}{z}$, $\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z} \in V$

(iii) existe um único elemento em V, representado por $\underset{\sim}{0}$, tal que $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{0}+\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in V$

(iv) para todo $\underset{\sim}{x} \in V$, existe um único elemento em V, representado por $-\underset{\sim}{x}$, tal que, $\underset{\sim}{x} + (-\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0}$

(v) $\alpha(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}) = \alpha\underset{\sim}{x}+\alpha\underset{\sim}{y}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V$

(vi) $(\alpha+\beta)\underset{\sim}{x} = \alpha\underset{\sim}{x}+\beta\underset{\sim}{x}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in V$

(vii) $(\alpha\beta)\underset{\sim}{x} = \alpha(\beta\underset{\sim}{x})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in V$

(viii) $1 . \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in V$

Os elementos de um espaço vectorial designam-se vectores.

Exemplos: Além do já mencionado espaço $\mathbb{R}^n$, existem outros:

- espaço das matrizes reais de ordem $m \times n$ com as operações de adição e multiplicação por um escalar (as propriedades destas operações já estudadas anteriormente correspondem às da definição anterior)
- o conjunto dos polinómios de coeficientes reais e o conjunto das funções reais reais num intervalo de $\mathbb{R}$ (ambos algebrizados com as operações adição e multiplicação por um escalar)

Definição (Subespaço Vectorial): Um subconjunto não vazio $\underset{=}{U}$ de um espaço vectorial real diz-se <u>subespaço vectorial</u> se

(i) $\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y} \in U \quad , \forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in U$

(ii) $\alpha \underset{\sim}{x} \in U \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R} , \forall \underset{\sim}{x} \in U$

Ex. O conjunto dos vectores $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Os conjuntos das funções reais de variável real contínuas e das funções reais de variável real diferenciáveis, são subespaços vectoriais do espaço vectorial das funções reais de variável real.

Definição (Combinação Linear) Sejam $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \dots, \underset{\sim}{x}_m$ vectores de um espaço vectorial real V. Diz-se que $\underset{\sim}{y} \in V$ é combinação linear dos vectores $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \dots, \underset{\sim}{x}_m$ se

$$\underset{\sim}{y} = \alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 + \dots + \alpha_m \underset{\sim}{x}_m \quad \text{com } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$$

Ex.: 1) Considerem-se os vectores $\underset{\sim}{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ do espaço $\mathbb{R}^2$. Tem-se que $\underset{\sim}{y} = 5\underset{\sim}{e}_1 + 7\underset{\sim}{e}_2$

2) O vector $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vectores

$$\underset{\sim}{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \underset{\sim}{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pois } \underset{\sim}{y} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{f}_1 + \frac{7}{2}\underset{\sim}{f}_2$$

Se $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \dots, \underset{\sim}{x}_m$ são vectores de um espaço vectorial real V, então o conjunto $\underset{\sim}{U}$ formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

dem.: $\underset{=}{U}$ é não vazio pois $\underset{\sim}{0} \in V$ e $\underset{\sim}{0}$ é combinação linear de $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \dots, \underset{\sim}{x}_m$, uma vez que se tem sempre, $\underset{\sim}{0} = 0\underset{\sim}{x}_1 + \dots + 0\underset{\sim}{x}_m$

Sejam $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v} \in U$. Então $\underset{\sim}{u} = \alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \dots + \alpha_m \underset{\sim}{x}_m$ e $\underset{\sim}{v} = \beta_1 \underset{\sim}{x}_1 + \dots + \beta_m \underset{\sim}{x}_m$. Note-se que $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v} = (\alpha_1+\beta_1)\underset{\sim}{x}_1 + \dots + (\alpha_m+\beta_m)\underset{\sim}{x}_m$, ou seja, $\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{v}$ é combinação linear de $\underset{\sim}{x}_1, \dots, \underset{\sim}{x}_m$, pelo que, pertence a U. Também $\alpha \underset{\sim}{u} = \alpha(\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \dots + \alpha_m \underset{\sim}{x}_m) = (\alpha\alpha_1)\underset{\sim}{x}_1 + \dots + (\alpha\alpha_m)\underset{\sim}{x}_m$ pertence a $\underset{=}{U}$.

Diz-se que $\underset{=}{U}$ é o espaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \dots, \underset{\sim}{x_m}$.

Ex.: O espaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ é igual a

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} \to$ subespaço de $\mathbb{R}^2$ formado pelos vectores cuja 2.ª componente é nula

Teorema: Se $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$ são vectores de um espaço vectorial V e se $\underset{\sim}{b} \in V$ é uma combinação linear de $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$, então o subespaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$ coincide com o subespaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$ e $\underset{\sim}{b}$.

dem.: Seja U o subespaço de V gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$ e W o subespaço de V " " " $\underset{\sim}{a_1}, \underset{\sim}{a_2}, \dots, \underset{\sim}{a_m}, \underset{\sim}{b}$.

É fácil concluir que $U \subset W$ pois, dado $\underset{\sim}{x} \in U$

$\underset{\sim}{x} = \alpha_1 \underset{\sim}{a_1} + \dots + \alpha_m \underset{\sim}{a_m} = \alpha_1 \underset{\sim}{a_1} + \dots + \alpha_m \underset{\sim}{a_m} + 0\underset{\sim}{b}$ e, portanto, $\underset{\sim}{x} \in W$

Seja $\underset{\sim}{x} \in W$. Então $\underset{\sim}{x} = \alpha_1 \underset{\sim}{a_1} + \dots + \alpha_m \underset{\sim}{a_m} + \alpha_{m+1} \underset{\sim}{b}$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1} \in \mathbb{R}$

Porque, por hipótese, $\underset{\sim}{b}$ é uma combinação linear de $\underset{\sim}{a_1}, \dots, \underset{\sim}{a_m}$, então

$\underset{\sim}{b} = \beta_1 \underset{\sim}{a_1} + \dots + \beta_m \underset{\sim}{a_m}$ com $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$

Logo $\underset{\sim}{x} = (\alpha_1 + \alpha_{m+1}\beta_1)\underset{\sim}{a_1} + \dots + (\alpha_m + \alpha_{m+1}\beta_m)\underset{\sim}{a_m}$ e, portanto, $\underset{\sim}{x} \in U$.

Provou-se assim que, também se tem, $W \subset U$. Assim sendo, $U = W$.

Bases e Dimensão

Definição: Os vectores $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \dots, \underset{\sim}{x_n}$ de um espaço vectorial real V são linearmente independentes (l.i.) se

$$\alpha_1 \underset{\sim}{x_1} + \alpha_2 \underset{\sim}{x_2} + \dots + \alpha_n \underset{\sim}{x_n} = \underset{\sim}{0}$$

apenas se verifica quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Ex.: Os vectores $\underset{\sim}{e}_1$ e $\underset{\sim}{e}_2$ de $\mathbb{R}^2$ anteriormente definidos são linearmente independentes, pois,

$$\alpha_1\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{e}_1}+\alpha_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{e}_2}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$$

Ex.: Os vectores $\underset{\sim}{f}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{f}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{f}_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ não são linearmente independentes. Veja-se que,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\-\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\alpha_3\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_3\\-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=0\\-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Por exemplo, $1\underset{\sim}{f}_1+\frac{3}{2}\underset{\sim}{f}_2-\frac{1}{2}\underset{\sim}{f}_3=\underset{\sim}{0}$, i.e., tem-se uma combinação linear nula dos vectores $\underset{\sim}{f}_1$, $\underset{\sim}{f}_2$ e $\underset{\sim}{f}_3$ sem que os coeficientes sejam todos nulos.
Assim, $\underset{\sim}{f}_1$, $\underset{\sim}{f}_2$, $\underset{\sim}{f}_3$ dizem-se linearmente dependentes.

Teorema: Os vectores $\underset{\sim}{x}_1,\underset{\sim}{x}_2,\dots,\underset{\sim}{x}_n$ de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

dem.: Sejam $\underset{\sim}{x}_1,\underset{\sim}{x}_2,\dots,\underset{\sim}{x}_n$ l.d. (linearmente dependentes)

Então tem-se $\alpha_1\underset{\sim}{x}_1+\dots+\alpha_n\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{0}$ sendo, pelo menos, um dos coeficientes não nulo. Suponhamos, sem perda de generalidade que é α_1. Assim, tem-se,

$$\underset{\sim}{x}_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underset{\sim}{x}_2-\dots-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underset{\sim}{x}_n$$, i.e., $\underset{\sim}{x}_1$ é combinação

combinação linear dos restantes vectores.
Suponhamos agora que, dados os vectores $\underset{\sim}{x}_1,\dots,\underset{\sim}{x}_n$, um deles, por exemplo $\underset{\sim}{x}_1$, é combinação linear dos restantes. Tem-se então

$\underset{\sim}{x}_1=\alpha_2\underset{\sim}{x}_2+\dots+\alpha_n\underset{\sim}{x}_n\Leftrightarrow\underset{\sim}{x}_1-\alpha_2\underset{\sim}{x}_2-\dots-\alpha_n\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{0}$, ou seja, temos uma combinação linear nula, onde pelo menos um dos coeficientes (o de $\underset{\sim}{x}_1$) é diferente de zero. Logo $\underset{\sim}{x}_1,\dots,\underset{\sim}{x}_n$ são linearmente dependentes.

Ex.: (Exemplo anterior) $\underset{\sim}{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{f_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{\sim}{f_3} = 2\underset{\sim}{f_1} + 3\underset{\sim}{f_2}$$

No espaço $\mathbb{R}^2$ foi visto que os vectores $\underset{\sim}{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes (l.i.).
Além disso, qualquer vector de $\mathbb{R}^2$, $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pode ser escrito como combinação linear de $\underset{\sim}{e_1}$ e $\underset{\sim}{e_2}$, i.e.,

$$\underset{\sim}{x} = x_1 \underset{\sim}{e_1} + x_2 \underset{\sim}{e_2}$$

Diz-se então que $\underset{\sim}{e_1}$ e $\underset{\sim}{e_2}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

<u>Definição</u>: Os vectores $\underset{\sim}{x_1}, x_2, \dots, x_m$ de um espaço vectorial V formam uma base de V se são linearmente independentes e geram V.

Se um espaço vectorial V tem uma base com um n.º finito de elementos então todas as bases de V têm o mesmo n.º de elementos. A esse n.º chama-se dimensão do espaço V e representa-se por $\dim(V)$

Ex.: $\dim(\mathbb{R}^m) = m$

Num espaço vectorial de dimensão $\underline{\underline{m}}$, quaisquer $\underline{\underline{m}}$ vectores l.i. formam uma base de V. Também se tem que, quaisquer $\underline{\underline{m+1}}$ vectores do espaço são sempre $\underline{\underline{\text{l.d.}}}$.

Exerc. 2.5: $P_n \to$ conjunto dos polinómios de grau $\leq n$

(i) Sejam p_0 e p_1 elementos de P_n, tais que, $p_0 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ e $p_1 = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$$p_0 + p_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

comutatividade em $\mathbb{R}$ (de "+")

$$= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n = b_0 + a_0 + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n)x^n$$

$$= b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_1 + p_0$$

(ii) Seja também $p_2 = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$. Então,

$$(p_0 + p_1) + p_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

$$= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \dots + ((a_n + b_n) + c_n)x^n$$

$$= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + \dots + (a_n + (b_n + c_n))x^n$$

assoc. em $\mathbb{R}$ (da "+")

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots + (b_n + c_n)x^n$$

$$= p_0 + (p_1 + p_2)$$

(iii) Seja $\underset{\sim}{0} = 0 + 0x + \dots + 0x^n$ o polinómio nulo. Então

$$p_0 + \underset{\sim}{0} = a_0 + 0 + (a_1 + 0)x + \dots + (a_n + 0)x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_0$$

el. neutro da "+" em $\mathbb{R}$

$$\underset{\sim}{0} + p_0 = 0 + a_0 + (0 + a_1)x + \dots + (0 + a_n)x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_0$$

(iv) Seja $-p_0 = -a_0 - a_1 x - \dots - a_n x^n$. Então

$$p_0 + (-p_0) = a_0 + (-a_0) + (a_1 + (-a_1))x + \dots + (a_n + (-a_n))x^n$$

$$= 0 + 0x + \dots + 0x^n = \underset{\sim}{0}$$

el.^{to} simétrico em $\mathbb{R}$ (da "+")

(v) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\alpha(p_0 + p_1) = \alpha((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n) =$$

$$= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)x + \dots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n$$

dist. em $\mathbb{R}$

$$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n + \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \dots + \alpha b_n x^n$$

$$= \alpha p_0 + \alpha p_1$$

(vi) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

$$(\alpha + \beta)p_0 = ((\alpha + \beta)a_0) + ((\alpha + \beta)a_1)x + \dots + ((\alpha + \beta)a_n)x^n$$

$$= \alpha a_0 + \beta a_0 + (\alpha a_1 + \beta a_1)x + \dots + (\alpha a_n + \beta a_n)x^n = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n +$$

$$+ \beta a_0 + \beta a_1 x + \dots + \beta a_n x^n = \alpha p_0 + \beta p_0$$

dist. em $\mathbb{R}$

(vii) $(\alpha\beta)p_0 = (\alpha\beta)a_0 + (\alpha\beta)a_1 x + \dots + (\alpha\beta)a_n x^n$

$= \alpha(\beta a_0) + \alpha(\beta a_1)x + \dots + \alpha(\beta a_n)x^n = \alpha(\beta p_0)$

assoc. da multiplicação em $\mathbb{R}$

(viii) $1 \cdot p_0 = 1 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 x + \dots + 1 \cdot a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_0$

elº neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$

Exerc. 2.6: $C([a,b]) \to$ funções reais de variável real contínuas em $[a,b]$

onde a soma se define, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in [a,b]$

e o produto por um escalar, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in [a,b]$

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

comutatividade de "+" em $\mathbb{R}$

(ii) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) =$

$= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$

assoc. de "+" em $\mathbb{R}$ $\qquad \forall f, g, h \in C([a,b])$

(iii) Seja $\underset{\sim}{0}$ a função nula, i.e., $\underset{\sim}{0} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 0$

$(f + \underset{\sim}{0})(x) = f(x) + \underset{\sim}{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$

elº neutro de "+" em $\mathbb{R}$

$(\underset{\sim}{0} + f)(x) = \underset{\sim}{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$

(iv) $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$

(v) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$

dist. em $\mathbb{R}$ $\qquad = (\alpha f + \alpha g)(x)$

(vii) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha(\beta f)(x)$

assoc. de multiplic. em $\mathbb{R}$

(vi) $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x)$

dist. em $\mathbb{R}$ $\qquad = (\alpha f + \beta f)(x)$

el. neutro mult. em $\mathbb{R}$

(viii) $(1f)(x) = 1 f(x) = f(x)$