

1. (5 valores) Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe(m):

- (a) conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}$  com  $\text{int}A = \text{int}B$  e  $\overline{A} \neq \overline{B}$ ;
- (b) um conjunto numerável  $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tal que  $A \cap [-\pi, \pi]$  seja finito;
- (c) uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ e } \text{CD}_f = ] - 1, +\infty[ ;$$
- (d) uma função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\mathbb{R}) = \{1, \pi\}$ ;
- (e) funções  $f, g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 g(x) dx$  e  $f(x) \neq g(x), \forall x \in [0, 2]$ .

2. (5 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

- (a) o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : |x - 8| = 3|x|\}$  possui mínimo e máximo;
- (b) a função  $h(x) = \frac{x}{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pode ser estendida com continuidade ao ponto 0;
- (c) se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $2x^3 + 3x^2 + 1$  é o seu polinómio de Taylor de terceira ordem em torno do ponto 1 então  $3x^2 + 1$  é o correspondente polinómio de Taylor de segunda ordem;
- (d) se  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  é derivável;
- (e) se  $f'(x) = 12x^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $f(0) = 1$  então  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ .

3. (2 valores) Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1 + 2x^3}{x^2}$ .

4. (2 valores) Esboce a região plana  $\mathcal{A}$  que é limitada pelas curvas de equações  $y = \text{ch } x$  e  $y = \text{ch } 2$ .

- (a) Determine a área de  $\mathcal{A}$ .
- (b) Determine o comprimento da linha que limita a região  $\mathcal{A}$  (note que tal linha é constituída por um segmento de recta e um arco de curva).

5. (2 valores) Calcule apenas uma das seguintes primitivas:

- (a)  $\int e^{x-2e^x} dx$ ; ou  $\int \frac{1}{x + x \log^2 x} dx$ ; (b)  $\int \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)^2} dx$ .

6. (2 valores) Calcule apenas um dos seguintes integrais:

- (a)  $\int_0^1 x \arctg x^2 dx$ ; (b)  $\int_{-1}^0 \text{sen } \sqrt{x+1} dx$ .

7. (2 valores) Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \frac{1}{x^2} \int_{\text{sen } x}^{\text{sen } x^3} f(t) dt$ .

- (a) Justifique que  $F$  é derivável e determine  $F'$ .
- (b) Suponha que  $f$  é uma função ímpar e mostre que  $F$  é uma função par.