

Folha 6 - Aplicações Lineares

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação definida por:

$$f(x, y, z) = (x - 2z, 0, -2x + 4z)$$

Mostre que f é uma aplicação linear.

2. Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vectoriais reais, são aplicações lineares:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, x)$.
- (b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (x^2, y^2)$.
- (c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = (x + 1, y + 1)$.
- (d) $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $t(x, y) = (x + 2y, x - y, y)$.
- (e) $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $r(x, y, z) = (x, y, 0)$.
- (f) $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $s(x, y, z) = (yz, 2x)$.
- (g) $m : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $m(ax^2 + bx + c) = (1, a + b - c)$.
- (h) $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $n(a, b) = 5a - 2b$.

3. Considere os espaços vectoriais reais \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 .

Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por:

$$g_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - k, k + 1, 2a_1 + a_3),$$

para qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$.

Determine o conjunto dos valores de k para os quais g_k é aplicação linear.

4. Sendo $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que $f(v_1) = 1$ e $f(v_2) = -1$, determine $f(3v_1 - 5v_2)$.
5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $f(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$.

- (a) Quais dos seguintes vectores pertencem ao núcleo de f : $u = (5, 10)$, $v = (3, 2)$, $w = (1, 1)$.
- (b) Quais dos seguintes vectores pertencem ao espaço imagem de f : $u = (1, -4)$, $v = (5, 0)$, $w = (-3, 12)$.

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (z, x - z, 0, y - z)$.

- (a) Determine Nuc_f e uma sua base.
- (b) Determine $\text{Im}(f)$ e uma sua base.

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + 2y, 2x - y, -x)$.

- (a) Determine $f(1, 1)$.
- (b) Escreva a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3).
- (c) Usando a alínea anterior, determine a imagem, por meio de f , de $(1, 1)$.

8. Sendo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$g(1, 0, 0) = (2, -1), g(0, 1, 0) = (0, 1), g(0, 0, 1) = (3, 1)$$

Determine a matriz da aplicação linear g (relativamente às bases canónicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2).

9. Represente-se por $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de \mathbb{R}^3 .

Seja $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$h(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3$$

$$h(e_2 + e_3) = e_1$$

$$h(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3.$$

(a) Calcule $h(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$.

(b) Escreva a matriz da aplicação linear h (relativamente à base canónicas de \mathbb{R}^3).

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida pela seguinte matriz, em relação as bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine a imagem, por meio da aplicação linear f , do elemento genérico de \mathbb{R}^3 .

11. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1, 0, 0) = (2, 3, -2)$$

$$f(1, 1, 0) = (4, 1, 4)$$

$$f(1, 1, 1) = (5, 1, -7)$$

(a) Escreva a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3).

(b) Determine a imagem, por meio de f , de (x, y, z) .

12. Para cada uma das aplicações lineares seguintes, determine o núcleo e a sua dimensão.

Deduza qual o valor da característica da aplicação e classifique a aplicação quanto à sua injectividade e/ou sobrejectividade.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(e_1) = (1, -1, 2)$$

$$f(e_2) = (-2, 5, 3)$$

$$f(e_3) = (-7, 16, 7)$$

$$f(e_4) = (-3, 6, 1).$$

(b) $g : P_3 \rightarrow P_3$ que a cada polinómio $P \in P_3$ associa o polinómio $x^2 P'' + P'$.

(c) h é a aplicação linear cuja representação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por:

$$f(1, 1, 1) = (3, 3, 0), \quad f(-1, 1, 0) = (0, -6, 12), \quad f(1, 0, 0) = (0, 2, 4)$$

- (a) Determine para $f(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 - (b) Determine o subespaço Nuc_f e uma sua base.
 - (c) Diga qual a dimensão de Im_f .
 - (d) Indique uma base para Im_f .
 - (e) Classifique f .
14. Determine a expressão geral da imagem um elemento de \mathbb{R}^4 , por meio da uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, que verifique as seguintes condições:

$$\dim Nuc_f = 1, \quad f(1, 0, 0, 0) = (-2, 0, 1, 3), \quad f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 2, 3)$$

15. Seja θ_k a aplicação linear cuja representação matricial é

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-2 & 1 \\ 2 & 8 & k \\ k+1 & 2k & -k-1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Diga para que valores de k a aplicação linear θ_k injectiva.