

# Mecânica Quântica

Ricardo Mendes Ribeiro

8 de Abril de 2011

# Mecânica Quântica

## Ondas de Matéria

1. Utilizando a relatividade ( $p^2 = 2mE_c + \frac{E_c^2}{c^2}$ ) nos três últimos casos e a física clássica ( $p^2 = 2mE_c$ ) no primeiro, determine o comprimento de onda de um electrão que:
- (a) se move a 1000 km/h
  - (b) se move com uma energia cinética de 10 keV (televisão a preto e branco)
  - (c) se move com uma energia cinética de 30 keV (microscópio electrónico)
  - (d) se move com uma energia cinética de 15 GeV (acelerador de partículas)

**R:** <sup>1</sup>

2. Uma bala de massa 40 g desloca-se a 1000 m/s.
- (a) Que comprimento de onda se pode associar a essa bala?
  - (b) Porque razão a natureza ondulatória da partícula não se revela através de fenómenos de difracção?

**R:** <sup>2</sup>

3. O comprimento de onda da linha amarela do espectro do sódio é 5890 Å. A que energia cinética um electrão tem o mesmo comprimento de onda de Broglie? Assuma a aproximação clássica. ( $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ )

**R:** <sup>3</sup>

4. Um electrão e um fóton têm ambos um comprimento de onda de 2.0 Å. Assuma que o electrão não tem uma velocidade relativística.
- (a) Quais são os seus momentos?
  - (b) Quais são as suas energias cinéticas totais?
  - (c) Compare a energia cinética do electrão com a do fóton.

**R:** <sup>4</sup>

5. Uma dada partícula não-relativística desloca-se três vezes mais rapidamente que um electrão. A razão entre os comprimentos de onda de De Broglie da partícula e do electrão, é de  $1.813 \times 10^{-4}$ . Identifique a partícula.

**R:** <sup>5</sup>

6. Um neutrão térmico tem uma energia cinética média de  $\frac{3}{2}k_B T$  em que  $T$  é a temperatura ambiente (300 K) e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Tais neutrões estão em equilíbrio com o meio.

- (a) Qual a energia cinética em eV do neutrão térmico?
- (b) Qual é o comprimento de onda de De Broglie?

**R:** <sup>6</sup>

7. Uma partícula movendo-se com uma energia cinética igual à sua energia em repouso tem um comprimento de onda de De Broglie de  $1.7898 \times 10^{-6}$  Å. Se a energia cinética duplicar qual será o novo comprimento de onda de De Broglie?

**R:** <sup>7</sup>

8. O acelerador de 50 GeV da Universidade de Stanford fornece um feixe de electrões relativístico, de comprimento de onda muito pequeno, adequado ao estudo dos detalhes finos da estrutura nuclear através de experiências de “scattering”. Qual é este comprimento de onda e como é que se compara com o tamanho médio do núcleo?

**R:** <sup>8</sup>

## Função de Onda

9. Considere um electrão descrito pela função de onda

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x)}{x}$$

- (a) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o electrão no ponto  $x = 0$ .
- (b) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o electrão no ponto  $x = 5$ .

**R:** <sup>9</sup>

10. Considere uma partícula numa caixa rígida (ou um poço de potencial infinito) a uma dimensão, com um tamanho  $a$ . A solução da equação de Schrödinger independente do tempo para este caso é:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

em que  $A$  é uma constante de normalização.

- (a) Qual é o valor da constante de normalização  $A$ ? ( $\int \sin^2(kx)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k} \sin(2kx)$ )
- (b) Qual é a probabilidade de encontrar a partícula na posição  $x = a/2$ , para cada  $n$ ?
- (c) Use as relações de De Broglie e a aproximação clássica para determinar a expressão da energia cinética da partícula.

**R:** <sup>10</sup>

11. A probabilidade de uma partícula de energia  $E$  incidir numa barreira de potencial de valor  $U > E$  e a atravessar é dada por

$$P = e^{-2\alpha L}$$

em que  $L$  é o comprimento da barreira e

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(U - E)}{\hbar^2}}$$

Qual é a probabilidade de um electrão de 0.5 eV de energia atravessar uma barreira de potencial de 3 eV e 1 nm de espessura?

**R:** <sup>11</sup>

## Princípio de Incerteza

12. Pretende medir-se a velocidade de um electrão confinado num cubo de 5 nm de lado. Determine o mínimo valor da velocidade que corresponde a uma precisão de 0.1%.

**R:** <sup>12</sup>

13. Para uma partícula livre, o princípio de incerteza pode ser escrito como

$$\Delta\lambda\Delta x = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Se  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-7}$  para um fotão, qual o correspondente valor de  $\Delta x$  para

- (a)  $\lambda = 5.00 \times 10^{-4} \text{ \AA}$  (raio gama)
- (b)  $\lambda = 5.00 \text{ \AA}$  (raio x)
- (c)  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  (luz)

**R:** <sup>13</sup>

14. Considere um feixe laser de  $800 \pm 5 \text{ nm}$ . Pode-se provar que

$$\Delta\lambda\Delta t = \frac{\lambda^2}{4\pi c}$$

Determine a duração do pulso laser em fs.

**R:** <sup>14</sup>

15. Numa repetição da experiência de Thomson para medir a razão  $e/m$  de um electrão, um feixe de electrões com  $10^4 \text{ eV}$  é colimado por passagem por uma fenda com  $0.50 \text{ mm}$ . Porque é que as características de feixe dos electrões que saem da fenda não são destruídas por efeitos de difracção dos electrões na fenda?
16. Mostre que se a incerteza na localização de uma partícula é igual ao seu comprimento de onda de De Broglie, então a incerteza na sua velocidade é aproximadamente  $\frac{1}{10}$  da sua velocidade.

17. A velocidade de um positrão foi medida como  $v_x = (4.00 \pm 0.18) \times 10^5$  m/s,  $v_y = (0.34 \pm 0.12) \times 10^5$  m/s e  $v_z = (1.41 \pm 0.08) \times 10^5$  m/s. Dentro de que volume mínimo estava localizado o positrão quando foi feita a medida?

**R:** <sup>15</sup>

18. O tempo de vida de um estado excitado de um núcleo é cerca de  $10^{-12}$  s. Qual é a incerteza na energia do fóton gama emitido pelo núcleo?

**R:** <sup>16</sup>

19. Um átomo num estado excitado tem um tempo de vida de  $1.2 \times 10^{-8}$  s; num segundo estado excitado o tempo de vida é de  $2.3 \times 10^{-8}$  s. Qual é a incerteza em energia dos fótons emitidos quando o átomo transita entre os dois estados referidos.

**R:** <sup>17</sup>

20. O núcleo atómico tem um tamanho típico de  $10^{-14}$  m e frequentemente emitem electrões de energia 1 a 10 MeV. No início do desenvolvimento da física nuclear, pensava-se que os electrões residiam dentro do núcleo. Utilize o princípio de incerteza de Heisenberg para mostrar que electrões com as referidas energias não podem estar contidos dentro do núcleo.

## Sobreposição de Estados

21. Um protão encontra-se no estado de spin descrito por

$$|\Psi\rangle = 0.5 |\uparrow\rangle + 0.866 |\downarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de, ao efectuar uma medida, encontrar o protão no estado  $|\uparrow\rangle$  e qual a probabilidade de o encontrar no estado  $|\downarrow\rangle$ ?

**R:** <sup>18</sup>

22. Uma determinada partícula está num estado quântico definido pela função de onda

$$|\Psi\rangle = 0.1 |\leftarrow\rangle + 0.3i |\uparrow\rangle + 0.5 |\rightarrow\rangle - 0.4 |\downarrow\rangle + a |\leftrightarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de a partícula, ao se efectuar uma medida, ficar no estado  $|\leftrightarrow\rangle$ ?

**R:** <sup>19</sup>

23. Se tivermos duas partículas em que uma pode estar nos estados  $|A\rangle$  ou  $|B\rangle$ , e a segunda pode estar nos estados  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$ ,  $|\leftarrow\rangle$  ou  $|\rightarrow\rangle$ , quais são os estados possíveis das duas partículas entrelaçadas?

**R:** <sup>20</sup>

24. Considere um trio de partículas que podem, cada uma, estar num estado  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . A sua função de onda é descrita por:

$$|\Psi\rangle = 0.1 |000\rangle + 0.3535(1+i) |001\rangle + 0.2 |010\rangle - 0.1 |100\rangle + 0.5 |011\rangle - 0.361 |101\rangle + 0.55 |111\rangle$$

- (a) Qual é o estado mais provável, após uma medida?
- (b) Se fizer 200 medidas em 200 sistemas idênticos a este, quantas vezes espera obter o estado  $|010\rangle$ ?
- (c) Se fizer 20 medidas no mesmo sistema, quantas vezes espera obter o estado  $|010\rangle$ ?
- (d) Qual é a probabilidade de, ao medir apenas a primeira das três partículas, a encontrar no estado  $|0\rangle$ ?
- (e) Há alguma combinação de medidas que nunca aconteça?

**R:** <sup>21</sup>

## Transições

25. Os níveis energéticos do átomo de hidrogénio podem ser descritos pela fórmula:

$$E = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

Ou, substituindo os valores:

$$E = (-13.6 \text{ eV}) \frac{1}{n^2}$$

Determine as energias de transição do estado fundamental para os três estados seguintes.

**R:** <sup>22</sup>

26. Os níveis energéticos de um poço de potencial infinito são dados por

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

em que  $a$  é a largura do poço, e  $n$  é um inteiro.

Determine as frequências emitidas quando um electrão transita dos estados em que  $n = 4$  para  $n = 3$  e  $n = 2$ , assumindo que  $a = 1 \text{ nm}$ .

**R:** <sup>23</sup>

27. Num oscilador harmónico os níveis de energia obtidos são particularmente simples:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

em que  $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$  é igual à frequência de oscilação de um oscilador clássico com as mesmas características.

Os níveis são portanto igualmente espaçados.

Qual a frequência de transição entre dois estados adjacentes se se duplica a massa da partícula?

**R:** <sup>24</sup>

## Corpo negro

28. Determine o comprimento de onda correspondente ao máximo de intensidade do espectro de um corpo negro cuja temperatura absoluta é de  $10^6$  K.

**R:** <sup>25</sup>

29. O poder emissivo de um corpo negro, em equilíbrio térmico num recinto onde se fez vácuo, é máximo para a radiação de comprimento de onda  $\lambda = 100$  Å. Calcule a temperatura do recinto.

**R:** <sup>26</sup>

30. Supondo que a superfície da Terra permanece a uma temperatura constante e que a Terra pode ser considerada como um corpo negro em equilíbrio térmico, determine a sua temperatura. Considere  $T_{Sol} = 5800$  K,  $R_{Sol} = 7 \times 10^8$  m,  $D_{Terra-Sol} = 1.3 \times 10^{11}$  m.

**R:** <sup>27</sup>

31. Numa noite quente e escura de verão ( $T = 320$  K) quer manter-se o mais fresco possível, para reduzir a transpiração. Podendo escolher entre duas paredes, uma preta e outra branca (ambas à mesma temperatura), qual das duas escolheria para ficar próximo dela?

32. Duas pedras, uma preta e outra branca são retiradas de um forno ao mesmo tempo e à mesma temperatura, e são deixadas a arrefecer longe uma da outra, num lugar em que todos os mecanismos de arrefecimento são desprezáveis excepto por radiação. Assumindo a mesma forma e a mesma capacidade calorífica, qual delas arrefece mais depressa?

33. Considere a lei de Wien. Assuma que temos um corpo negro irradiando a 2500 K. Calcule o comprimento de onda em Å em que a radiação emitida é máxima. Este comprimento de onda está na parte visível do espectro?

**R:** <sup>28</sup>

# Soluções

## Notes

- <sup>1</sup> $2.62 \times 10^{-6} \text{ m}, 1.22 \times 10^{-11} \text{ m}, 6.24 \times 10^{-12} \text{ m}, 8.3 \times 10^{-17} \text{ m}$   
<sup>2</sup> $1.6 \times 10^{-35}$   
<sup>3</sup> $4.34 \times 10^{-6} \text{ eV}$   
<sup>4</sup> $P_f = P_e = 3.315 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}; E_f = 9.95 \times 10^{-16} \text{ J}; E_e = 6.03 \times 10^{-18} \text{ J}$   
<sup>5</sup>neutrão  
<sup>6</sup> $0.03 \text{ eV}; 1.467 \times 10^{-10} \text{ m}$   
<sup>7</sup> $1.096 \times 10^{-6} \text{ \AA}$   
<sup>8</sup> $2.5 \times 10^{-17} \text{ m}$   
<sup>9</sup> $\frac{1}{\pi^2}; 0.00372$   
<sup>10</sup> $A = \sqrt{\frac{2}{a}}; P = \frac{2}{n\pi} \sin^2(n\pi/2); E_c = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$   
<sup>11</sup> $8 \times 10^{-8}$  (colocar as casas decimais todas!)  
<sup>12</sup> $1.13 \times 10^7 \text{ m/s}$   
<sup>13</sup> $397.9 \text{ \AA}; 3.979 \times 10^6 \text{ \AA}; 3.979 \times 10^9$   
<sup>14</sup> $16.98 \text{ fs}$   
<sup>15</sup> $1.40 \times 10^4 \text{ \AA}^3$   
<sup>16</sup> $5.28 \times 10^{-23} \text{ J}$   
<sup>17</sup> $4.17 \times 10^{-8} \text{ eV}$   
<sup>18</sup> $P_{\uparrow} = 0.25; P_{\downarrow} = 0.75$   
<sup>19</sup> $0.49$   
<sup>20</sup> $|A \uparrow\rangle, |A \downarrow\rangle, |A \leftarrow\rangle, |A \rightarrow\rangle, |B \uparrow\rangle, |B \downarrow\rangle, |B \leftarrow\rangle, |B \rightarrow\rangle$   
<sup>21</sup> $|111\rangle; 8; 20 \text{ ou zero}; 0.55; \text{sim: } |110\rangle$   
<sup>22</sup> $10.2 \text{ eV}; 12.1 \text{ eV}; 12.75 \text{ eV}$   
<sup>23</sup> $f_{4-3} = 6.38 \times 10^{14} \text{ Hz}, f_{4-2} = 1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}$   
<sup>24</sup> $\omega'_c = \omega_c/\sqrt{2}$   
<sup>25</sup> $2.898 \text{ nm}$   
<sup>26</sup> $289.8 \times 10^3 \text{ K}$   
<sup>27</sup> $300.9 \text{ K}$   
<sup>28</sup> $1.1592 \times 10^{-6} \text{ m}; \text{n\~{a}o, est\~{a} no infra-vermelho.}$