Investigação Operacional - Exame

Etapas de um estudo de Investigação Operacional

1º - Definição do problema e recolha de Dados

2º - Formulação de um problema Matemático

3º - Soluções obtidas a partir do modelo

4º - Teste do Modelo

5º - Preparação para a implementação do Modelo

6º - Implementação do Modelo

Modelo de Programação Linear

Conceito Chave: Recursos

↳ Tipo mais comum de problemas desta natureza corresponde a distribuir recursos em actividades

Variáveis -

z - valor da medida de desempenho

x_j - nível de actividade pretendido

c_j - aumento do desempenho resultante do aumento de uma unidade no nível de actividade

b_i - quantidade de recursos i disponíveis para as diferentes actividades

a_{ij} - quantidade de recurso i utilizado por uma unidade de actividade j

x_i - variáveis de decisão $\quad$ c_j, b_i e a_{ij} - parâmetros

Forma Standard

-> maximizar

-> todas as restrições serem de $\leq$ (menor ou igual)

Alguns Conceitos gerais

- Solução Admissível - todas as restrições satisfeitas
- Região admissível - Conjunto de todas as soluções admissíveis
- Solução não admissível - pelo menos uma restrição não é satisfeita
- Solução Óptima - é a solução admissível que conduz ao maior (menor) valor possível no caso da maximização (minimização)
- Solução Admissível em ponto de quebra - solução num canto da região admissível

Redução à forma Padrão

- É necessário converter as restrições de desigualdade em restrições de igualdade

No caso das restrições ($\geq$) -> subtrai-se uma variável de folga

No caso das restrições ($\leq$) -> adiciona-se uma variável de folga

m - número de restrições

n - número total de variáveis (decisão e folga)

$b_i \geq 0$ - caso contrário multiplica-se por -1

↳ Como resolver uma solução do problema de PL na forma padrão?

- Resolver uma solução do problema de PL é preciso resolver o sistema de equações lineares

- m equações e n incógnitas

Base do Sistema

- Variáveis Básicas - as m variáveis correspondentes às colunas

- Variáveis não Básicas - restantes n-m variáveis

- solução básica - atribuindo o valor 0 às n-m variáveis não básicas e determinado uma solução para os restantes m variáveis básicas

Se todas as variáveis básicas da solução básica $x = (x_1, x_2, \ldots 0,)$ são não negativas então x é uma solução básica admissível (SBA)

Solução Básica Degenerada - se alguma variável básica for igual a zero

-> Quantas soluções básicas tem um problema de PL? número de matrizes 3x3 que podem ser extraídas da matriz A com determinante não-nulo $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Teorema Fundamental da Programação linear

Se existe uma solução admissível do problema de PL definido pelas expressões (1) função objectivo, (2) restrições, (3) restrições de não negatividade, então existe uma solução básica admissível e se existe uma solução óptima admissível então existe uma solução óptima admissível então existe uma solução básica admissível.

↳ não é necessário procurar a solução óptima entre todas as soluções admissíveis, mas apenas entre as soluções básicas admissíveis

Método Simplex

Procedimento algébrico para a resolução de problemas de PL → base na interpretação geométrica

Procedimentos

Escolher o ponto (0,0) como ponto de partida

Concluir que o ponto (0,0) não é solução óptima

Max = o que der + valor

Escolher um ponto adjacente (na direcção que tiver maior parâmetro na f.o) Min = o que der - valor

Resolver a intercepção das duas restrições deste novo ponto

Verificar se é ponto óptimo, se for para, senão continua com o mesmo processo

se nenhum dos pontos adjacentes conduzir a uma taxa de crescimento (maximização) melhor então é a solução óptima

Preparação do Método Simplex

Escrever o problema na forma padrão

Ver o nº de variáveis básicas → m (nº de restrições)

ver o nº de variáveis não básicas → n-m (nº de variaveis - nº restrições)

as VNB são iguais a zero

construir o quadro

c_j → coeficientes da f.o

c_B x_B → todos os variáveis $\bar{b}$

coeficiente dos variáveis básicos na f.o ↲ : coeficientes dos variaveis nos restrições → valor dos variáveis básicos

z_j → custo de oportunidade

$c_j - z_j$ → Maximização

$(z_j - c_j)$ → Minimização

enquanto o valor dos custo reduzido for positivo a solução não é óptima

a coluna pivot vai ser a da variável positivo no custo reduzido

calcular os razões (apenas dos positivos) da coluna pivot ($\bar{b}$/valor)

linha pivot → menor razão

trocar a variavel básica com a não básica

no próximo quadro simplex os variáveis básicos têm de forma a matriz identidade

iterativo até encontrar a solução óptima (todos os custos reduzido ≤ 0)

Casos Particulares

Óptimo não finito - não existe nenhuma componente positiva na coluna pivot

Soluções Óptimas Alternativas - quando no quadro simplex óptimo existe alguma variável não básica com custo reduzido nulo ($c_j - z_j = 0$ ou $z_j - c_j = 0$) com pelo menos uma componente positiva

Calcula soluções não básicas alternativas
└ combinação linear das existentes $x^* = \lambda_1 * x_1^* + \lambda_2 * x_2^*$
em que λ_1 e λ_2 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 , \lambda_2 > 0 \end{cases}$

na correspondente coluna do quadro

Degenerescência - empate no critério de saída, obtém-se uma solução degenerada, i.e., com variáveis básicas nulas.

Regra de Bland

1º- Escolher a coluna para entrar na base aquela que tem o menor índice j com custo reduzido positivo

Se existir empate, escolher os quocientes que dão origem ao empate aquele de índice menor

$$\theta = \theta_0 = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{i\,m+1}} \mid x_{i\,m+1} > 0 \right\}$$

Técnica das variáveis Artificiais

Consiste em construir um problema auxiliar introduzindo uma ... variáveis, chamada variável artificial em cada uma das restrições onde não foi possível adicionar uma variável de folga, sendo esta tomada como variável básica para essa equação.

- Método das Duas Fases
- Método das Penalidades

Método das Duas Fases (Restrições = ou ≥)

Reduzir o problema à forma Padrão introduzindo as variáveis de folga
Se não for possível identificar a matriz identidade introduz-se uma variável artificial na restrição mais conveniente

Na 1ª fase:
Min Z' = variável artificial
usa-se o simplex para resolver e determinar uma SBA inicial

Na 2ª fase:
aplica-se o simplex ao problema original para determinar a solução óptima (se existir)

Dualidade

A resolução de um problema constitui a resolução simultânea do outro
O dual do problema Dual é o problema Primal
A relação entre o dual e o primal é recíproca

(ver tabela dual-primal para transformar um problema dual em primal e vice-versa)

Teorema Fraco da dualidade

x^* é admissível para (P) e y^* é admissível para (D) então o valor das funções objectivo correspondem (coincidem).

Teorema Fundamental da Dualidade

- Um problema tem óptimo finito sse existirem soluções admissíveis para os problemas primal-dual
- Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções admissíveis, i.e, é impossível
- ambos os problemas podem ser impossíveis

Variáveis de Decisão Dual no Quadro Óptimo Primal

variáveis de decisão da solução óptima dual -> linha z_j nas colunas correspondentes à base inicial

matriz de restrições ->

valores das variáveis de folga -> simétrico dos elementos da linha dos custos reduzidos nas colunas correspondentes às variáveis de decisão primais. (variáveis da função objectivo no primal)

solução complementar -> a cada solução primal corresponde uma solução dual

solução dual complementar -> num quadro simplex primal todos os custos reduzidos são não positivos a solução dual correspondente é admissível

- Se algum dos problemas não tem óptimo finito, então o outro não possui soluções básicas admissíveis (é impossível)

Resolução do Dual

⚠ Quando as restrições

$\leq$ -> Resolver o primal

$\geq, =$ -> dual, duas fases, Big-M

Colocar o problema na forma padrão para restrição $\leq$ -> multiplica por -1

Construção do Quadro simplex (igual ao primal)

Escolher a linha pivot -> elemento mais negativo

A coluna pivot é a razão mais pequena (variável / $\bar{b}$)

A solução apenas é óptima quando todos os valores de $\bar{b}$ são todos positivos

⚠ - ver se tem óptimo finito - se haver pelo 1 elemento negativo na linha pivot

Escrever a SBNAP e SBAD -> variável de folga multiplicados por -1

$z_j \quad \underbrace{\overset{2^\circ}{\rule{3em}{0.4pt}}}_{x-1} \quad \overset{1^\circ}{\rule{4em}{0.4pt}}$

Restrições Saturadas -> falta aqui definição

Propriedades dos Desvios Complementares

- As variáveis de decisão primais positivas correspondem a variáveis de folga duais nulas
- As restrições de folga duais positivas correspondem a variáveis de decisão primais nulas

... e reciprocamente

→ Colocar as variáveis lado a lado

v decisão primal　　　　v folga dual

v folga primal　　　　v. decisão Dual

Por fim resolver o sistema para descobrir a solução dual

Resolução do Problema Dual: 3 formas

- $u^* = C_B B^{-1}$ → solução dual complementar
- consulta do quadro óptimo
- complementaridade dos slacks

Análise Pós-Optimal

Alteração dos coeficientes na função Objectivo

Caso 1: coeficiente corresponde a uma variável não básica

Fica alterado apenas o custo reduzido corresponde a essa variável n básica: $c_j - z_j$

verificar optimalidade → Aplicar primal

Caso 2: Coeficiente corresponde a uma variável não basica

Todos os custo reduzidos ficam afectados (para todas as colunas recalcular $c_j - z_j$)

Ex: $x_4 = c_4 - z_4 = c_4 - C_{\bar{B}} - 1A_4$

verificar optimalidade

Alterar termos independentes

$\Delta b = [b_{novo}] - [b_{antigo}]$

$x^*_b = [b_{antigo}] + B^{-1} \cdot \Delta b$

↳ negativo - simplex dual

se não houver nenhuma variável para entrar: sistema impossível

Introdução de uma variável

nova coluna $x = B^{-1} \times$ coluna dada

custo reduzido: valor dado $- z$

valor $- [b^{-1}](z) \times$ nova coluna

Introdução de uma restrição

ver se a solução óptima verifica a nova restrição

substituir os valores e ver se é verdadeiro

introduzir no quadro a nova variável de folga (≥ → −)

introduzir nova linha com os coeficientes da restrição.

coluna com a nova variável slack é a coluna identidade

verificar optimalidade

Interpretação Económica

Preços Sombra

- valor da fo - traduz o valor total atribuído aos recursos

Restrições funcionais duais

- custo interno > lucro não é rentável

Restrições de não negatividade

- a valorização unitária não deve ser negativa

Variáveis de folga

- perda de oportunidade da produção de uma parte
- variável de folga positiva ⇒ custo interno > lucro não é viável
- variável de folga nula ⇒ custo interno = lucro → economicamente rentável

Slacks - Interpretação económica

- variável primal positiva → folga dual nula
  - i valorização interna dos recursos deve ser igual ao lucro unitário
- variável folga dual positiva → variável primal nula
  - i os recursos gastos numa actividade é maior do que o lucro unitário
- variável de folga do primal positiva → variável de decisão dual nula
  - i o recurso é abundante
- variável do primal nula → variável de decisão dual positiva
  - i recurso escasso

Análise de sensibilidade

Para custo unitários

- se está na base fica

  $\Delta \rightarrow z_i - \lambda \leq 0$ e resolve-se a inequação
- se está na base

  no quadro óptimo substituímos nas variáveis da base por λ_i, calcula-se o z_j e o c_j e resolve-se o sistema

Para os termos independentes

Vemos qual o bnovo e aplica-se a fórmula $x_b^* = B^{-1} \times b_{novo}$

Para os valores com λ fazemos ≥ 0 e resolve-se

Nota: restrições $\geq$ = multiplicar pelo simétrico

Análise de sensibilidade - solução alternativa

Custos Unitários

Se Problema Minimização

↳ linhas (CB)

valor do custo reduzido associado

$$\text{Limite inferior para } \underline{\Delta c_k} = \max_j \begin{cases} -\dfrac{(z_j - c_j)}{x_{kj} \text{ valor}} & \text{para } x_{kj} \leq 0 \\ -\infty, \text{ se todo } x_j \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\Delta c_k} \leq \Delta c_k \leq \overline{\Delta c_k}$

$c_k + \underline{\Delta c_k} \leq \Delta c_k' \leq c_k + \overline{\Delta c_k}$

$$\text{Limite superior para } \overline{\Delta c_k} = \min_j \begin{cases} \min -\dfrac{(z_j - c_j)}{x_{kj}} & \text{para } x_{kj} > 0 \\ +\infty \text{ se todo o } x_{kj} \leq 0 \end{cases}$$

Se Problema Maximização

$$\text{Limite inferior para } \Delta c_k = \underline{\Delta c_k} = \begin{cases} \max_j \left\{ \dfrac{c_j - z_j}{x_{kj}} \right\} & \text{para } x_{kj} > 0 \\ -\infty \text{ se todo o } x_{kj} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Limite superior para } \Delta c_k = \overline{\Delta c_k} = \begin{cases} \min_j \left\{ \dfrac{c_j - z_j}{x_{kj}} \right\} & \text{para } x_{kj} < 0 \\ +\infty \text{ se todo } x_{kj} \geq 0 \end{cases}$$

↳ coluna Para coeficientes b → valor de b = valor na restrição

valor de b

$$\text{Limite inferior para } \underline{\Delta b_k} = \begin{cases} \max_i \left\{ \dfrac{-x_{B_i}^*}{b_{ik}} \right\} & \text{para } b_{ik} > 0 \\ -\infty \text{ para todo } b_{ik} \leq 0 \end{cases}$$

b_{ik} → valor

bx = índice x das variáveis de folga

↑ atenção à restrição → $\geq \times (-1)$

$\underline{\Delta c_k} \leq \Delta c_k \leq \overline{\Delta c_k}$

$c_k + \underline{\Delta c_k} \leq \Delta c_k' \leq c_k + \overline{\Delta c_k}$

$$\text{Limite superior para } \overline{\Delta b_k} = \begin{cases} \min_i \left\{ \dfrac{-x_{B_i}^*}{b_{ik}} \right\} & \text{para } b_{ik} < 0 \\ +\infty \text{ se todo } b_{ik} \geq 0 \end{cases}$$

Problema de transportes

Problema Equilibrado

oferta total = procura total

Quando a oferta é superior à procura total

→ adiciona-se um destino fictício

Quando a oferta for inferior à procura total

→ adiciona uma origem fictícia

Para encontrar a solução básica inicial.

→ 3 métodos:

Método do Canto Noroeste

- Começa na variável x11 e depois escolhe-se a ~~~~ linha ou a coluna e vai-se fazendo conforme

- Ir retirando o valor total e ver o que sobra na procura e na oferta

Método de Vogel

Método do Custo Mínimo