introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios caos

1.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $\mathcal{S} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x-1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Como sabemos, ver um exercício anterior, dado um qualquer ponto $x \in [0,1]$, temos que a representação binária de $\mathcal{S}(x)$ corresponde ao deslocamento para a esquerda da representação binária de x, ou seja, se $x = (0.d_1d_2d_3\ldots)_2$, então $\mathcal{S}(x) = (0.d_2d_3\ldots)_2$.

1.1

Pela sua definição, facilmente se percebe que $\mathcal{S}$ não é diferenciável (não é contínua) num ponto, a saber $(0.1)_2$. Assim sendo, podemos retirar que $\mathcal{S}$ só não é diferenciável num ponto cuja imagem por $\mathcal{S}^2$ é um ponto fixo. Por outro lado, como a imagem por $\mathcal{S}$ dos intervalos $(0,1/2)$ e $(1/2,1)$ é o intervalo $(0,1)$, podemos concluir que a aplicação $\mathcal{S}^2$ não é diferenciável em três pontos, a saber $(0.d_1d_2)_2$, com d_1, d_2 quaisquer, excepto ambos nulos. Deste modo, podemos dizer que $\mathcal{S}^2$ só não é diferenciável em pontos cuja imagem por $\mathcal{S}^3$ é um ponto fixo. O mesmo tipo de argumentos permite-nos afirmar que a aplicação $\mathcal{S}^n$ não é diferenciável em pontos com representação binária $(0.d_1\ldots d_n)_2$, com $d_1,\ldots,d_n$ quaisquer, excepto todos nulos. Assim sendo, podemos dizer que $\mathcal{S}^n$ só não é diferenciável em pontos cuja imagem por $\mathcal{S}^{n+1}$ é um ponto fixo e concluir que $\mathcal{S}^n$ é diferenciável nos pontos periódicos de período n de $\mathcal{S}$.
Seja $\bar{x}$ um ponto periódico, de período n de $\mathcal{S}$. Então, temos que

$$|(\mathcal{S}^n)'(\bar{x})| = |\mathcal{S}'(\bar{x}) \times \mathcal{S}'\big(\mathcal{S}(\bar{x})\big) \times \cdots \times \mathcal{S}'\big(\mathcal{S}^{n-1}(\bar{x})\big)| = 2^n > 1,$$

pelo que $\bar{x}$ é um ponto periódico repulsivo. Pela arbitrariedade de $\bar{x}$, podemos concluir que todos os pontos periódicos de $\mathcal{S}$ são repulsivos.

1.2

Mostrar que Per($\mathcal{S}$) é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$ corresponde a verificar que tão perto quanto queiramos de um ponto de $[0,1]$ existe sempre um elemento de Per($\mathcal{S}$).
Seja $\varepsilon = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um qualquer número positivo, tão pequeno quanto queiramos. Então, para qualquer $x = (0.d_1d_2d_3\ldots)_2 \in [0,1]$, consideremos o ponto $\bar{x} = (0.\overline{d_1\ldots d_{n+1}})_2 \in$ Per($\mathcal{S}$). Vamos mostrar que a distância entre estes pontos é inferior a ε:

$$\begin{aligned} |x-\bar{x}| &= |(d_1-d_1)\times\frac{1}{2} + \cdots + (d_{n+1}-d_{n+1})\times\frac{1}{2^{n+1}} + (d_{n+2}-d_1)\times\frac{1}{2^{n+2}} + \ldots| \\ &= |(d_{n+2}-d_1)\times\frac{1}{2^{n+2}} + \ldots| \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim sendo, podemos concluir que Per($\mathcal{S}$) é um conjunto denso em $[0,1]$.

1.3

Sabendo já que o conjunto dos pontos periódicos repulsivos de $\mathcal{S}$ é denso em $[0,1]$, basta mostrar que $\mathcal{S}$ tem sensibilidade às condições iniciais em $[0,1]$.

Seja $x = (0.d_1 d_2 \dots)_2$ um qualquer ponto do intervalo $[0,1]$ cuja representação binária não seja finita e seja $\delta = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um número positivo arbitrariamente pequeno. Então, $\bar{x} = (0.d_1 \dots d_{n+1})_2$ é um ponto do intervalo $[0,1]$ cuja distância a x é inferior a δ e tal que $\mathcal{S}^k(\bar{x}) = 0$, para todo $k > n+1$. Deste modo, uma vez que, por hipótese, existe $m > n+1$, tal que $d_m = 1$, podemos imediatamente concluir que $|\mathcal{S}^m(x) - \mathcal{S}^m(\bar{x})| = |\mathcal{S}^m(x)| \geq 1/2 > 1/4$. Caso a representação binária de $x \in [0,1]$ seja finita, por outras palavras, se $x = (0.d_1 \dots d_k)_2$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então vamos escolher o ponto $\bar{x} = (0.d_1 \dots d_{n+1}\bar{1})_2$. De facto, facilmente se mostra que, não só a distância entre estes pontos é inferior a $\delta = 2^{-n}$, como também que, para $m > k+1$, se tem $|\mathcal{S}^m(x) - \mathcal{S}^m(\bar{x})| = |\mathcal{S}^m(\bar{x})| = 1/2 > 1/4$. Fica assim provado que $\mathcal{S}$ tem sensibilidade às condições iniciais em $[0,1]$, pelo que podemos concluir que $\mathcal{S}$ tem caos no intervalo $[0,1]$.

2.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $\mathcal{T} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{se } 0 \leq x < 1/2\,; \\ 2 - 2\,x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

2.1

Por definição, facilmente se reconhece que $\mathcal{T}$ não é diferenciável em $x = 1/2$. Por outras palavras, a aplicação $\mathcal{T}$ é diferenciável em todo o intervalo $[0,1]$, excepto num ponto eventualmente fixo de $\mathcal{T}$. Por outro lado, como a imagem por $\mathcal{T}$ dos intervalos $(0,1/2)$ e $(1/2,1)$ é o intervalo $(0,1)$, podemos concluir que a aplicação $\mathcal{T}^2$ é diferenciável em todo o intervalo $[0,1]$ excepto em três pontos eventualmente fixos de $\mathcal{T}$. O mesmo tipo de argumentos permite-nos afirmar que $\mathcal{T}^n$ é uma aplicação diferenciável em todo o intervalo $[0,1]$, excepto em $2^n - 1$ pontos eventualmente fixos de $\mathcal{T}$, pelo que podemos concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a aplicação $\mathcal{T}^n$ é diferenciável nos pontos periódicos de período n de $\mathcal{T}$. Deste modo, uma vez que $|\mathcal{T}'(x)| = 2$, em todos os pontos onde essa derivada existe, se $\bar{x}$ é um ponto periódico, de período n de $\mathcal{T}$, temos que

$$|\big(\mathcal{T}^n\big)'(\bar{x})| \;=\; |\mathcal{T}'(\bar{x}) \times \mathcal{T}'\big(\mathcal{T}(\bar{x})\big) \times \cdots \times \mathcal{T}'\big(\mathcal{T}^{n-1}(\bar{x})\big)\,| = 2^n > 1,$$

pelo que $\bar{x}$ é um ponto periódico repulsivo. Pela arbitrariedade de $\bar{x}$, podemos concluir que todos os pontos periódicos de $\mathcal{T}$ são repulsivos.

2.2

Seja $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$ o conjunto dos pontos periódicos de $\mathcal{T}$. Mostrar que $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$ corresponde a verificar que tão perto quanto queiramos de um ponto de $[0,1]$ existe um elemento de $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos os 2^n subintervalos

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \subset [0,\,1], \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

Pela definição de $\mathcal{T}$, temos que $\mathcal{T}^n(I_{k,n}) = [0,\,1]$, pelo que podemos afirmar que, em cada um desses intervalos, existe pelo menos um ponto $\bar{x}$ tal que $\mathcal{T}^n(\bar{x}) = \bar{x}$, ou seja, todo o intervalo $I_{k,n}$ contém, pelo menos, um ponto periódico de $\mathcal{T}$. Vejamos então agora como provar que $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$.

Seja $\varepsilon = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um qualquer número positivo, tão pequeno quanto queiramos, e seja x um qualquer ponto do intervalo $[0,1]$. Ora, uma vez que

$$\bigcup_{k=0}^{2^{n+1}-1} I_{k,n+1} = [0,\ 1], \tag{1}$$

temos que o ponto x pertence a um dos intervalos $I_{k,n+1}$. Assim sendo, uma vez que a largura dos subintervalos $I_{k,n+1}$ é

$$\left|\frac{k+1}{2^{n+1}} - \frac{k}{2^{n+1}}\right| = 2^{-(n+1)},$$

podemos concluir que a distância entre quaisquer dois pontos de $I_{k,n+1}$ é inferior ou igual a $2^{-(n+1)}$. Consequentemente, a distância do ponto x a um ponto periódico de $\mathcal{T}$ é seguramente inferior a ε e assim temos que $\mathrm{Per}(\mathcal{T})$ é um conjunto denso em $[0,1]$.

2.3

Pela alínea anterior, sabemos que o conjunto dos pontos periódicos repulsivos de $\mathcal{T}$ é denso em $[0,1]$, bastando então mostrar que $\mathcal{T}$ tem sensibilidade às condições iniciais no intervalo $[0,1]$.
Seja x um qualquer ponto do intervalo $[0,1]$ e seja $\delta = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um número arbitrariamente pequeno. Como sabemos, por (1), o ponto x pertence a um dos subintervalos $I_{k,n+1}$. Recordemos que $\mathcal{T}^{n+1}$ é uma aplicação tal que $\mathcal{T}^{n+1}(I_{k,n+1}) = [0,1]$, sendo 0 e 1 nos extremos do subintervalo. Dado $x \in I_{k,n+1}$, vamos escolher um ponto x', um dos extremos do subintervalo $I_{k,n+1}$, da seguinte forma: se $\mathcal{T}^{n+1}(x) \leq 1/2$, então vamos escolher para x' o extremo de $I_{k,n+1}$ cuja imagem por $\mathcal{T}^{n+1}$ é igual a 1. Desse modo, temos que os pontos x e x' satisfazem:

$$|x - x'| < \delta \qquad \text{e} \qquad |\mathcal{T}^{n+1}(x) - \mathcal{T}^{n+1}(x')| \geq 1/2 > 1/4.$$

Em alternativa, isto é, se $\mathcal{T}^{n+1}(x) > 1/2$, vamos escolher para x' o extremo do subintervalo $I_{k,n+1}$ tal que $\mathcal{T}^{n+1}(x') = 0$. Desse modo, fica assegurado que

$$|x - x'| < \delta \qquad \text{e} \qquad |\mathcal{T}^{n+1}(x) - \mathcal{T}^{n+1}(x')| > 1/2 > 1/4.$$

Fica assim provado que $\mathcal{T}$ tem sensibilidade às condições iniciais em $[0,1]$, pelo que podemos concluir que $\mathcal{T}$ tem caos no intervalo $[0,1]$.

3.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 3\,x & \text{se } x < 1/2\,; \\ 3 - 3\,x & \text{se } x \geq 1/2 \end{cases}$$

e denotemos por $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos cuja órbita por f permanece no intervalo $[0,1]$.

3.1

Como facilmente se percebe, se desenharmos o gráfico de f, o conjunto dos pontos cuja imagem por f pertence ao intervalo $[0,1]$ é agora a união de dois subintervalos

$$\mathrm{C}_1 = I_{0,1} \cup I_{1,1} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Uma vez que $f(I_{0,1}) = f(I_{1,1}) = [0,1]$, temos que o conjunto dos pontos cuja imagem por f^2 pertence ao intervalo $[0,1]$ é a união de quatro subintervalos

$$\mathsf{C}_2 = I_{0,2} \cup I_{1,2} \cup I_{2,2} \cup I_{3,2} = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1].$$

Generalizando, vamos poder afirmar que o conjunto dos pontos cuja imagem por f^n pertence ao intervalo $[0,1]$ é a união dos 2^n subintervalos

$$\mathsf{C}_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} I_{k,n}$$

Deste modo, uma vez que $\mathsf{C}_n \subset \mathsf{C}_{n+1}$, temos que o conjunto dos pontos cujas órbitas permanecem no intervalo $[0,1]$ pode ser dado por

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{C}_n.$$

nota: *$\mathcal{C}$ chama-se conjunto de Cantor, para recordar o matemático Georg Cantor (1845–1918) que o concebeu; pelas suas características muito estranhas, trata-se de um conjunto de pontos cuja dimensão é superior ao valor zero, atribuído aos vulgares conjuntos de pontos; por isso, diz-se que $\mathcal{C}$ é um conjunto fractal.*

A caracterização dos pontos do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ fica mais simples se considerarmos a representação de base 3 dos pontos do intervalo $[0,1]$. De facto, se, dado $x \in [0,1]$, escrevermos

$$x = (0.d_1 d_2 \ldots)_3$$

verifica-se facilmente que $x \in \mathsf{C}_1$ se é possível escrever a sua representação de base 3 com o primeiro dígito diferente de um, isto é, com $d_1 \neq 1$. De igual modo, teremos $x \in \mathsf{C}_2$ se é possível escrever a sua representação de base 3 com $d_2 \neq 1$. Deste modo, a caracterização dos pontos do conjunto de Cantor fica estabelecida como aqueles pontos do intervalo $[0,1]$ cuja representação de base 3 é possível apenas com os dígitos 0 e 2.

3.2

Uma vez que f^n, com $n \in \mathbb{N}$, é diferenciável em todos os pontos do intervalo, excepto em pontos cuja imagem por f^n está fora do intervalo $[0,1]$, podemos concluir que f é diferenciável nos pontos fixos e que f^n é diferenciável nos pontos periódicos, de período n, de f. Desse modo, se $\bar{x}$ é um ponto fixo de f, temos que

$$|f'(\bar{x})| = 3 > 1,$$

donde podermos afirmar que $\bar{x}$ é um ponto fixo repulsivo de f. De igual modo, se $\bar{x}$ é um ponto periódico, de período n, de f, temos que

$$|(f^n)'(\bar{x})| = |f'(\bar{x}) \times f'\big(f(\bar{x})\big) \times \cdots \times f'\big(f^{n-1}(\bar{x})\big)| = 3^n > 1,$$

donde podermos afirmar que $\bar{x}$ é um ponto periódico repulsivo de f.

3.3

Seja x um qualquer ponto do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ e seja $\varepsilon = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um número arbitrariamente pequeno. Ora, pela definição, podemos dizer que $x \in \mathsf{C}_{n+1}$, e ainda, que x pertence a um dos subintervalos $I_{k,n+1}$. Significa isso que, para todo $x' \in I_{k,n+1}$, se tem

$$|x - x'| \leq 2^{n+1} < 2^n = \varepsilon.$$

Deste modo, uma vez que $f(I_{k,n+1}) = [0,1]$, sabemos que existe uma solução de $f^{n+1}(x') = x'$ nesse intervalo e assim podemos concluir imediatamente que existe um ponto periódico de f cuja distância a x é inferior a ε. Por outras palavras, que o conjunto Per(f) dos pontos periódicos de f é um conjunto denso em $\mathcal{C}$.

3.4

Pela alínea anterior, sabemos que o conjunto dos pontos periódicos repulsivos de f é denso em $\mathcal{C}$, pelo que nos falta mostrar que f tem sensibilidade às condições iniciais em $\mathcal{C}$.
Seja x um qualquer ponto de $\mathcal{C}$ e seja $\delta = 2^{-n}$, com $n \in \mathbb{N}$, um número arbitrariamente pequeno. Ora, pela definição, podemos dizer que $x \in \mathsf{C}_{n+1}$, ou seja, que $x \in I_{k,n+1}$, para algum k. Mas, sendo f^{n+1} uma função invertível em $I_{k,n+1}$ tal que $f^{n+1}(I_{k,n+1}) = [0,1]$, sabemos de antemão que f^{n+1} toma os valores 0 e 1 nos extremos do subintervalo. Assim sendo, vamos escolher um ponto x', um dos extremos do subintervalo $I_{k,n+1}$, da seguinte forma: se $f^{n+1}(x) \leq 1/2$, então vamos escolher para x' o extremo de $I_{k,n+1}$ cuja imagem por f^{n+1} é igual a 1. Desse modo, podemos concluir que os pontos x e x' satisfazem simultaneamente ambas as seguintes condições:

$$|x - x'| < \delta \qquad \text{e} \qquad |f^{n+1}(x) - f^{n+1}(x')| \geq 1/2 > 1/4.$$

Em alternativa, isto é, se $f^{n+1}(x) > 1/2$, vamos escolher para x' o extremo do subintervalo $I_{k,n+1}$ tal que $f^{n+1}(x') = 0$. Desse modo, temos que

$$|x - x'| < \delta \qquad \text{e} \qquad |f^{n+1}(x) - f^{n+1}(x')| > 1/2 > 1/4.$$

Fica assim provado que f tem sensibilidade às condições iniciais em $\mathcal{C}$, pelo que podemos concluir que f tem caos em $\mathcal{C}$.