Programação Linear - Solução Gráfica

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

5 de fevereiro de 2015

Programação Linear - Solução Gráfica

antes

- Um modelo de programação linear tem restrições, que descrevem as soluções admissíveis do problema,
- e uma função objectivo, que associa um valor a cada solução admissível.

Guião

- Para um exemplo, vamos representar o modelo de programação linear (restrições e função objectivo) no plano cartesiano

  (o conjunto de soluções admissíveis é sempre um poliedro convexo).
- Depois, vamos identificar a solução óptima graficamente

  (há sempre um vértice do poliedro que é uma solução óptima $^{(*)}$).

depois

- Esta caracterização está na base da estratégia do algoritmo *Simplex*, que apenas explora vértices.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre quando há restrições do tipo ≥ 0) e quando a solução óptima não é ilimitada.

Conteúdo

Enunciado de um problema

- Uma empresa produz 2 tipos de artigos: Artigo 1 e Artigo 2.
- A produção destes artigos requer 3 tipos de recursos:
  - Material
  - Mão de Obra
  - Tempo-Máquina
- Objectivo: determinar o **plano de produção diário** (solução admissível) que **maximiza o lucro total** (com o valor óptimo).
- A quantidade disponível de cada recurso, o consumo de recursos por cada artigo produzido e o lucro líquido de cada artigo são:

	Artigo 1	Artigo 2	Quantidade disponível
Material	3 [unid./art.]	2 [unid./art.]	120 [unid./dia]
Tempo-Homem	1 [h.hom./art.]	2 [h.hom./art.]	80 [h.hom./dia]
Tempo-Máquina	1 [h.maq./art.]	0 [h.maq./art.]	30 [h.maq/dia]
Lucro Unitário	12 [U.M./art.]	10 [U.M./art.]	

Construção do modelo: elementos do modelos

Variáveis de decisão (incógnitas associadas às decisões admissíveis):

- x_1 : quantidade de artigos de tipo 1 a fabricar diariamente [art./dia]
- x_2 : quantidade de artigos de tipo 2 a fabricar diariamente [art./dia]

Parâmetros (dados do sistema que não podem ser alterados):

- quantidade disponível de cada recurso;
- lucro unitário dos artigos;
- consumo de recursos por cada artigo (coeficientes tecnológicos)

Construção do modelo: restrições e função objectivo

Restrições:

- função linear $3x_1 + 2x_2$: qtd. de material usada diariamente [unid./dia]
- restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 120$: apenas são admissíveis as soluções que não excedam a disponibilidade diária de material [unid./dia]
- as outras restrições são semelhantes.
- Todas as variáveis têm restrições de não-negatividade $(x_1, x_2 \geq 0)$.$^{(*)}$

Função objectivo:

- função objectivo $12x_1 + 10x_2$: lucro diário [U.M./dia]

(*) o caso em que as variáveis podem ser positivas ou negativas (s/ restrição de sinal) está tratado nos diapositivos TransformaçõesBásicas.

Modelo de programação linear

- Função objectivo:

$$\max z = 12x_1 + 10x_2$$

- Restrições:

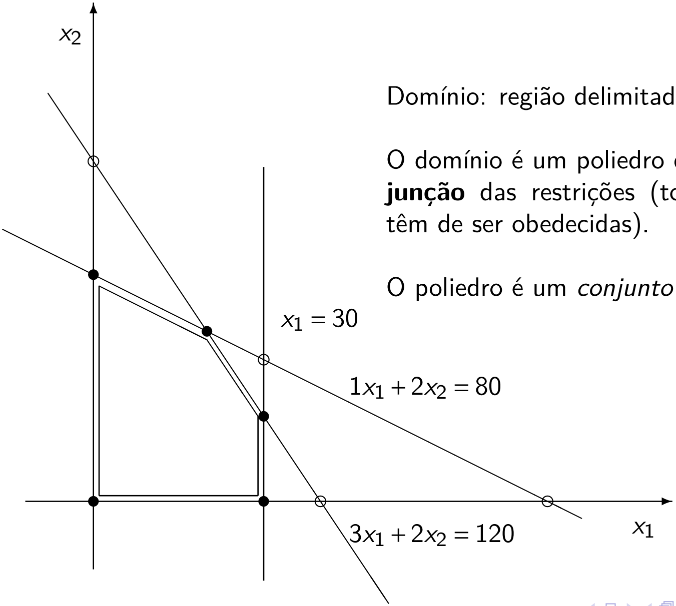
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\ 1x_1 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma geral

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ \text{suj. a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathrm{I\!R}^{m \times n}, b \in \mathrm{I\!R}^{m \times 1}, c \in \mathrm{I\!R}^{1 \times n}, x \in \mathrm{I\!R}_+^{n \times 1}$.

Domínio: conjunto de *soluções admissíveis* do problema



Domínio: região delimitada a duplo traço.

O domínio é um poliedro definido pela **conjunção** das restrições (todas as restrições têm de ser obedecidas).

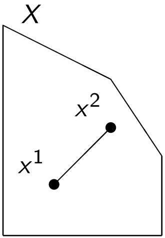
O poliedro é um *conjunto convexo.*

Conjuntos convexos

Definição:

Um *conjunto X é convexo*, se, dados 2 quaisquer pontos de X, designados por x^1 e x^2, todos os pontos do segmento que os une também pertencerem a X:

$$\forall x^1, x^2 \in X,\ x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X,\ 0 \le \lambda \le 1.$$



A *combinação convexa* dos pontos $x^1, x^2 \in X$ é o conjunto de pontos do segmento:

$$\{x : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,\ 0 \le \lambda \le 1\}$$

Restrições lineares e conjuntos convexos

Teorema

O conjunto de soluções $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ *de um problema de programação linear é um conjunto convexo.*

Prova: dados 2 pontos quaisquer $x^1, x^2 \in X$ (obedecem às restrições), todos os pontos x da sua combinação convexa também obedecem:

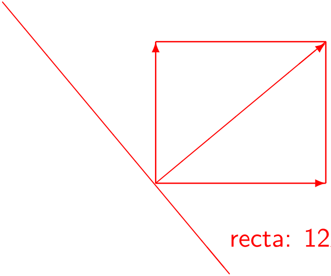
i.e., dados $x^1, x^2 : Ax^1 \leq b, x^1 \geq 0$ e $Ax^2 \leq b, x^2 \geq 0$,
todos os pontos $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \;\; 0 \leq \lambda \leq 1$, também obedecem:

$$\begin{array}{rcrl}
\lambda A x^1 & \leq & \lambda b & \text{(válido, porque } \lambda \geq 0\text{)} \\
(1-\lambda)Ax^2 & \leq & (1-\lambda)b & \text{(válido, porque } 1-\lambda \geq 0\text{)} \\
\hline
\lambda A x^1 + (1-\lambda)Ax^2 & \leq & \lambda b + (1-\lambda)b & \\
 & & & \\
A[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] & \leq & b & \\
Ax & \leq & b &
\end{array}$$

O mesmo se pode mostrar para as restrições $x^1 \geq 0$ e $x^2 \geq 0$ $\square$

Função objectivo e vector gradiente

- O *gradiente da função objectivo*, $\vec{c} = \nabla \mathbf{z} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}$, é o vector que indica a direcção em que a função objectivo aumenta mais por unidade de espaço.
- O vector gradiente $\vec{c}$ é perpendicular à recta $cx = \tilde{z}$, qualquer que seja o valor da constante $\tilde{z}$.
- Exemplo: $z = cx = 12x_1 + 10x_2 \rightarrow \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^t = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

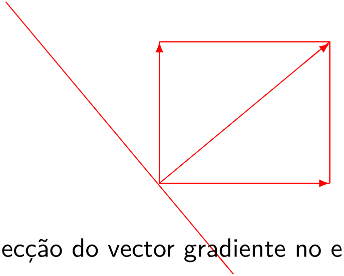


$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

recta: $12x_1 + 10x_2 = \tilde{z}$

Vector gradiente: notas

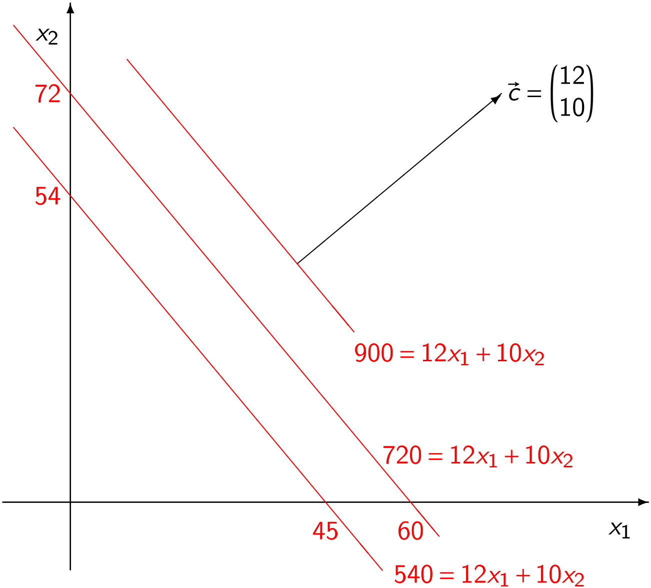
- A função objectivo também aumenta nas direcções que fazem um ângulo agudo com o gradiente: o aumento é dado pela *projecção* do gradiente nessa direcção.



$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

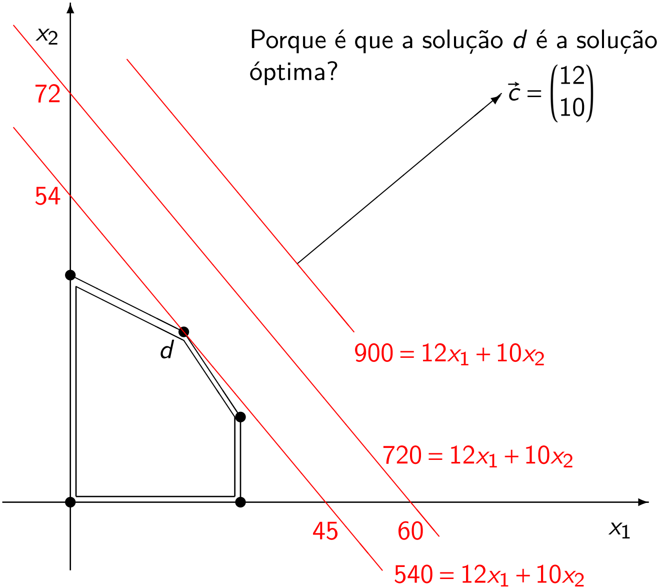
- A projecção do vector gradiente no eixo de x_1 é o vector $(12, 0)^t$.
- O aumento de z por unidade de aumento de x_1 é 12, $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 12$.
- A projecção do vector gradiente no eixo de x_2 é o vector $(0, 10)^t$.
- A projecção do vector gradiente na direcção da recta vermelha (ortogonal ao gradiente) é o vector nulo ($\Rightarrow$ o valor da função objectivo não varia quando nos deslocamos em cima da recta).

Exemplo: rectas com igual valor de função objectivo



Exemplo: solução óptima

Porque é que a solução d é a solução óptima?



Discussão: a solução óptima é sempre um vértice?

- Um vértice pode ser a solução óptima.
- E os pontos de uma aresta (na generalidade, de uma face do poliedro) podem ser?
- E um ponto no interior do domínio pode ser um ponto óptimo?

$\therefore$ Existe **sempre** um vértice que é uma solução óptima.

- Os vértices são pontos extremos do poliedro.

Definição:

Um ponto extremo de um poliedro X é um ponto x que não pode ser expresso como uma combinação convexa estrita (*i.e.*, $0 < \lambda < 1$) de outros 2 pontos do poliedro.

$$\nexists \lambda \in (0,1) \;\; : x = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2, \forall x^1, x^2 \in X, x \neq x^1, x \neq x^2.$$

Caracterização da solução óptima

Teorema

Se o domínio tiver um vértice e a solução óptima tiver um valor finito, então existe um vértice (ponto extremo) que é uma solução óptima.

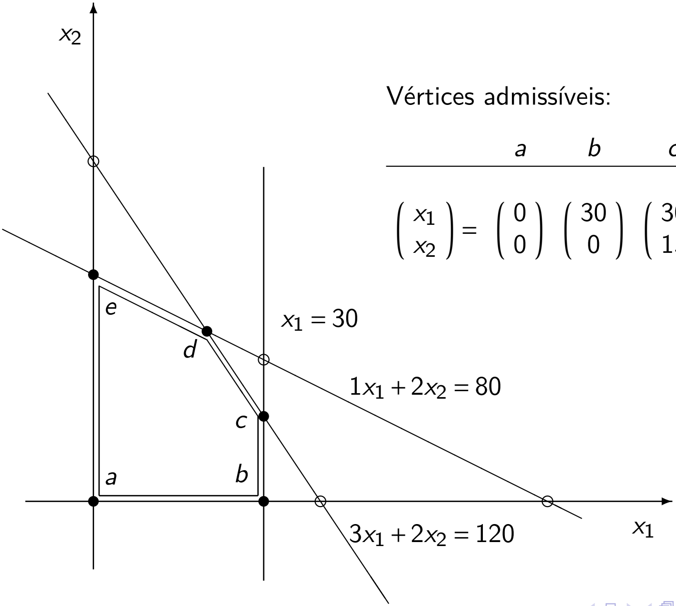
Prova: ver apêndice.

Se 2, ou mais vértices, forem soluções óptimas, os pontos da combinação convexa desses vértices (aresta, ou face) são também soluções óptimas.

Uma (má) estratégia de resolução: enumeração de vértices

- Como há um vértice que é uma solução óptima, é possível determinar a solução óptima enumerando todos os vértices.
- As coordenadas de cada vértice podem ser determinadas através da intersecção de rectas, e o respectivo valor da função objectivo também pode ser calculado.
- A dificuldade é que é necessário enumerar $\binom{n+m}{n}$ vértices, as combinações de $n+m$ restrições (que incluem as restrições de não-negatividade) n a n.
- O esforço de cálculo é muito grande.
- O método simplex é um algoritmo mais eficiente.

Solução gráfica: vértices como intersecção de rectas



Vértices admissíveis:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Conclusão

- Problemas com 2 ou 3 variáveis de decisão podem ser resolvidos graficamente.
- O conjunto de soluções admissíveis de um modelo de programação linear é um poliedro convexo.
- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução óptima de um problema de programação linear que é um vértice.
- Para problemas com um maior número de variáveis de decisão, é necessário usar álgebra para caracterizar um vértice.

Resultados de aprendizagem

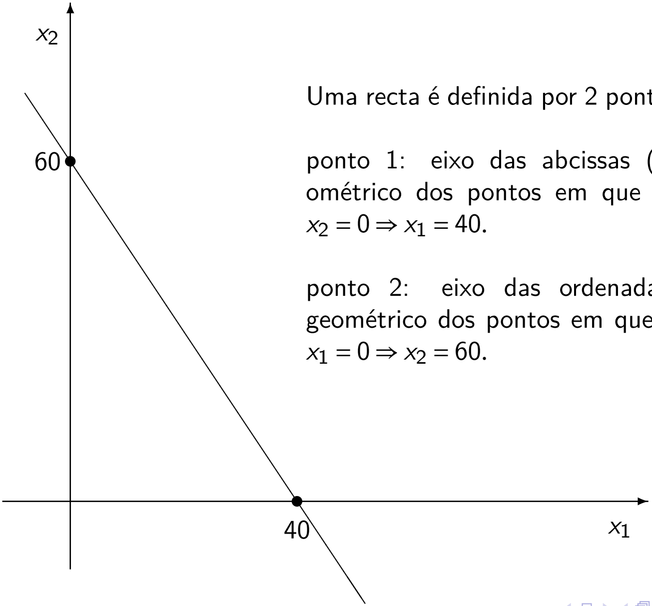
- Representar graficamente um modelo de programação linear com duas variáveis de decisão.
  - representar as restrições no plano;
  - identificar o conjunto de soluções admissíveis;
  - representar o gradiente da função objectivo.
- Descrever as propriedades do modelos de programação linear
  - caracterizar o domínio gerado por um conjunto de restrições lineares;
  - caracterizar vértices (pontos extremos) do poliedro;
  - distinguir os pontos do domínio que podem ser soluções óptimas.
- Resolver graficamente um problema de programação linear com duas variáveis de decisão.
  - identificar uma solução óptima;
  - determinar as suas coordenadas através da intersecção de rectas;
  - calcular o valor da função objectivo da solução óptima.

Apêndices

Representação gráfica do domínio

- Representação de uma restrição no plano cartesiano
  - Representação da recta que delimita a restrição
  - Identificação do sub-espaço que corresponde à restrição

Representação da recta: $3x1 + 2x2 = 120$

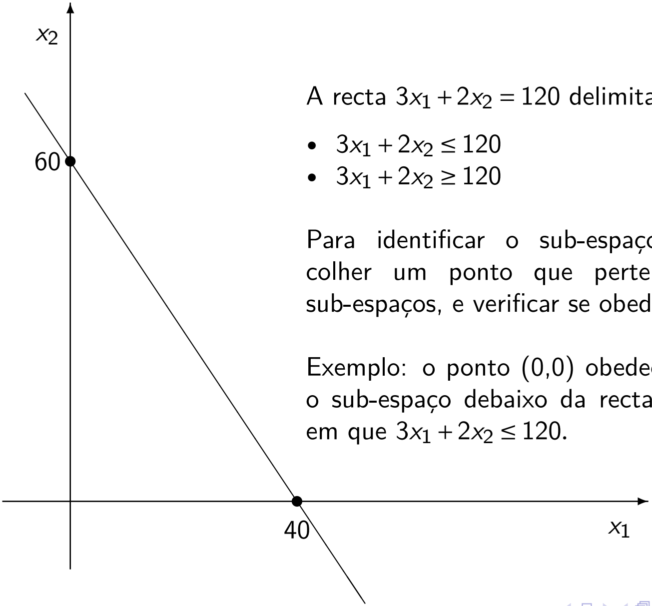


Uma recta é definida por 2 pontos, por exemplo:

ponto 1: eixo das abcissas $(x_1) \equiv$ lugar geométrico dos pontos em que $x_2 = 0$: quando $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 40$.

ponto 2: eixo das ordenadas $(x_2) \equiv$ lugar geométrico dos pontos em que $x_1 = 0$: quando $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 60$.

Identificação do sub-espaço definido por $3x_1 + 2x_2 \leq 120$



A recta $3x_1 + 2x_2 = 120$ delimita 2 sub-espaços:

- $3x_1 + 2x_2 \leq 120$
- $3x_1 + 2x_2 \geq 120$

Para identificar o sub-espaço desejado, escolher um ponto que pertença a um dos sub-espaços, e verificar se obedece à restrição.

Exemplo: o ponto (0,0) obedece à restrição $\Rightarrow$ o sub-espaço debaixo da recta é o sub-espaço em que $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.

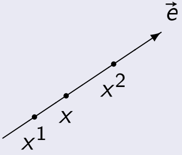
Caracterização da solução óptima

Teorema

Se o domínio tiver um vértice e a solução óptima tiver um valor finito, então existe um vértice (ponto extremo) que é uma solução óptima.

Prova: vamos supor que era um ponto x não-extremo. Se x for um ponto interior do domínio, podemos escolher pontos x_1 e x_2 na direcção do vector gradiente $\vec{c}$ ($\vec{c} \neq \vec{0}$), pelo que $cx^1 < cx < cx^2$, e x não é óptimo. Se x pertencer a uma aresta (face), seja $\vec{e}$ a projecção do vector gradiente $\vec{c}(\vec{c} \neq \vec{0})$ na aresta (face) como na figura.

Se $\vec{e} \neq \vec{0}$, aplica-se o mesmo de cima. Se $\vec{e} = \vec{0}$, então $\vec{c}$ é ortogonal à face (aresta) definida pelos 3 pontos, e $cx^1 = cx = cx^2$; todos os pontos da face têm o mesmo valor de função objectivo, incluindo os vértices.



□

Fim