Capítulo 1

Matrizes

1.1 Apontamentos sobre Matrizes

1.1def

(a) [[produto cartesiano de dois conjuntos]] Sejam A e B conjuntos. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A \times B$, ao conjunto

$$\{(a,b)|a \in A, b \in B\}.$$

(b) [[produto cartesiano de um número finito de conjuntos]] Sejam $n \in \mathbb{N}$ e os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, ao conjunto

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n, \}.$$

(c) [[potência cartesiana de um conjunto]] Sejam $n \in \mathbb{N}$ e X um conjunto. Chama-se potência cartesiana de ordem n do conjunto X, que se representa por X^n, ao conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\},$$

identificando-se X^1 com X.

1.2exe Explicite $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^3$.

res $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)|z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\}$.

1.3def (a) ⟦matriz, tipo de uma matriz, matriz real, matriz complexa⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função com domínio $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2|i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dizendo-se que é uma matriz real ou complexa, respectivamente.

(b) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais do tipo $m \times n$.

(c) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes complexas do tipo $m \times n$.

1.4obs (a) É possível considerar matrizes cujos elementos não são nem números reais, nem números complexos (*e.g.*, polinómios), mas neste curso apenas aqueles casos são os com interesse.

(b) Quando não é relevante destinguir o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), usa-se o símbolo $\mathbb{K}$, tendo-se a seguinte definição:

1.5def ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$, independentemente de serem reais ou complexas.

1.6def ⟦escalar⟧ Chama-se escalar a um elemento de $\mathbb{K}$.

$\boxed{1.7\text{def}}$ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) $[\![$elemento de uma matriz$]\!]$ Chama-se elemento da linha i e da coluna j da matriz A, que se representa por $a_{i,j}$ ou $(A)_{i,j}$, a $A(i, j)$. (Se não houver ambiguidade relativamente ao índice da linha e ao índice da coluna representa-se por a_{ij} ou $(A)_{ij}$.)

(b) $[\![$linha de uma matriz$]\!]$ Chama-se linha i da matriz A, que se representa por $\ell_{i,A}$, a $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. (Se não houver ambiguidade relativamente à matriz representa-se por ℓ_i.)

(c) $[\![$coluna de uma matriz$]\!]$ Chama-se coluna j da matriz A, que se representa por $c_{j,A}$, a $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. (Se não houver ambiguidade relativamente à matriz representa-se por c_j.)

$\boxed{1.8\text{obs}}$ (a) Regra geral usam-se letras maiúsculas para representar matrizes.

(b) Representa-se por $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{K}$.

(c) A letra "i" aparece neste curso quer como a unidade imaginária dos números complexos, quer como a letra usual para representar a linha de uma matriz. No entanto, o contexto será sempre suficiente para identificar o significado correcto.

(d) Quando se está perante matrizes do conjunto $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$, o contexto será suficiente para distinguir se se está a fazer referência à matriz ou ao único elemento que a constitui.

1.9exe Dê um exemplo de uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

res $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -4 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

1.10exe Explicite a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = j - i$.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.11exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique a segunda linha da matriz A.

(c) Indique a terceira coluna da matriz A.

res (a) $a_{23} = 7$.

(b) $\ell_2 = (5, 6, 7, 8)$.

(c) $c_3 = (3, 7)$.

1.12def Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦matriz coluna⟧ Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) ⟦matriz linha⟧ Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

1.13obs É habitual representar matrizes linha e matrizes coluna por letras minúsculas e os seus elementos apenas com um índice. Assim, e usando esta notação, as formas da matriz coluna x com m linhas e da matriz linha y com n colunas são:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

1.14exe (a) Dê um exemplo de uma matriz coluna complexa com 2 elementos.

(b) Dê um exemplo de uma matriz linha real com 3 elementos.

(c) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "Há matrizes que são simultaneamente matrizes linha e matrizes coluna".

res (a) $p = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Proposição verdadeira pois as matrizes que pertencem ao conjunto $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$ são matrizes linha pois só têm uma coluna e são matrizes coluna pois só têm uma linha.

1.15def Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦matriz rectangular⟧ Diz-se que A é uma matriz rectangular se $m \neq n$.

(b) ⟦matriz quadrada, ordem de uma matriz⟧ Diz-se que A é uma matriz quadrada se $m = n$, dizendo-se neste caso que A é uma matriz de ordem n.

1.16exe (a) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz rectangular."

(b) Dê um exemplo de uma matriz real de ordem 2.

res (a) A proposição é verdadeira pois o número de linhas da matriz, que é 2, é diferente do número de colunas da matriz, que é 3.

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1.17def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦diagonal principal ou diagonal de uma matriz⟧ Chama-se diagonal principal da matriz A ou diagonal da matriz A ao elemento $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ de $\mathbb{K}^n$.

(b) ⟦diagonal secundária de uma matriz⟧ Chama-se diagonal secundária da matriz A ao elemento $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$ de $\mathbb{K}^n$.

(c) ⟦matriz diagonal⟧ A diz-se uma matriz diagonal se $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(d) ⟦matriz escalar⟧ A diz-se uma matriz escalar se é uma matriz diagonal com $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$.

(e) ⟦matriz triangular superior⟧ A diz-se uma matriz triangular superior se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(f) ⟦matriz triangular inferior⟧ A diz-se uma matriz triangular inferior se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

1.18obs (a) As definições anteriores só se aplicam a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz diagonal se todos os elementos fora da diagonal são zeros.

(c) A é uma matriz triangular superior se todos os elementos "abaixo" da diagonal são zeros.

(d) A é uma matriz triangular inferior se todos os elementos "acima" da diagonal são zeros.

1.19exe (a) Dê um exemplo de uma matriz diagonal de ordem 4.

(b) Dê um exemplo de uma matriz escalar de ordem 3.

(c) Dê um exemplo de uma matriz triangular superior de ordem 2.

(d) Dê um exemplo de uma matriz triangular inferior de ordem 3 e indique a sua diagonal principal e diagonal secundária.

(e) Dê um exemplo de uma matriz simultaneamente triangular superior e triangular inferior de ordem 2.

res (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.20def (a) ⟦matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$⟧ Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou por $\underline{0}$ se não houver ambuiguidade relativamente ao tipo.

(b) ⟦matriz identidade, I_n, I⟧ Chama-se matriz identidade à matriz escalar cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou por I se não houver ambuiguidade relativamente à ordem.

1.21exe (a) Indique a matriz nula do tipo 2×4.

(b) Indique a matriz identidade de ordem 3.

res (a) $0_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.22def ⟦matrizes iguais⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\boxed{1.23\text{obs}}$ Usa-se esta definição em algumas demonstrações relativas a matrizes.

$\boxed{1.24\text{def}}$ ⟦soma de matrizes⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se soma das matrizes A e B à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, escrevendo-se $Z = A + B$.

$\boxed{1.25\text{def}}$ ⟦produto de uma matriz por um escalar⟧ Sejam a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$. Chama-se produto da matriz A pelo escalar α à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = \alpha a_{ij}$, escrevendo-se $Z = \alpha A$.

$\boxed{1.26\text{obs}}$

(a) Só se pode somar matrizes do mesmos tipo.

(b) É sempre possível multiplicar uma matriz por um escalar.

(c) Seja a matriz A. Então, em vez de $(-1)A$ escreve-se $-A$.

(d) Sejam as matrizes A e B do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a alínea anterior, em vez de $A+(-B)$ escreve-se $A-B$.

(e) A matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes.

$\boxed{1.27\text{exe}}$ Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $A + B$.

(b) Calcule $2A$.

(c) Calcule $\frac{1}{2}A - 3B$.

$\boxed{\text{res}}$

(a) $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) $2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$.

(c) $\frac{1}{2}A - 3B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19/2 & 1 & -11/2 \\ -3 & 7/2 & -8 \end{bmatrix}$.

1.28teo

(a) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + B = B + A$.

(b) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (A + B) + C = A + (B + C)$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + 0_{m\times n} = A$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A + (-A) = 0_{m\times n}$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(h) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : 1A = A$.

dem

(a) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
(A + B)_{ij} &= (A)_{ij} + (B)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= (B)_{ij} + (A)_{ij} && \text{pela propriedade comutativa dos escalares}\\
&= (B + A)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

(b) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $(A+B)+C$ e $A + (B + C)$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
((A + B) + C)_{ij} &= (A + B)_{ij} + (C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= ((A)_{ij} + (B)_{ij}) + (C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= (A)_{ij} + ((B)_{ij} + (C)_{ij}) && \text{pela propriedade associativa dos escalares}\\
&= (A)_{ij} + (B + C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$ são iguais.

(c) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A + 0_{m\times n}$ e A são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(A+0)_{ij} &= (A)_{ij} + (0_{m\times n})_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= (A)_{ij} + 0 && \text{por definição de matriz nula}\\
&= (A)_{ij} && \text{0 é o elemento neutro da soma de escalares,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

(d) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(A+(-A))_{ij} &= (A)_{ij} + (-A)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes}\\
&= (A)_{ij} - (A)_{ij} && \text{por } \boxed{\text{1.26obs}} \text{ (c)}\\
&= 0 && \text{pois são escalares simétricos,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A + (-A)$ e $0_{m\times n}$ são iguais.

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Exercício.

(h) Exercício.

$\boxed{\text{1.29def}}$ ⟦produto ou multiplicação de matrizes⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Chama-se produto ou multiplicação da matriz A pela matriz B à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, escrevendo-se $Z = AB$.

$\boxed{\text{1.30obs}}$ (a) Só se pode efectuar a multiplicação da matriz A pela matriz B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Neste caso, o número de linhas da matriz resultante é igual ao número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz resultante é igual ao número de colunas da matriz B. Em notação simplificada, tem-se: $A_{m\times n}B_{n\times p} = Z_{m\times p}$.

(b) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$. Então, como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação AB. Por exemplo o elemento $(AB)_{23}$ obtém-se considerando $\ell_{2,A}$ e $c_{2,B}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ \boxed{2 \quad 1} \\ * & * \end{bmatrix}}_{A=[a_{ij}]\in\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & 4 & * \\ * & * & 5 & * \end{bmatrix}}_{B=[b_{ij}]\in\mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \boxed{9} & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{AB\in\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})}$$

$$(AB)_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2\times 4 + 1\times 5 = 9.$$

1.31exe Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Efectue, se possível, as seguintes operações:

(a) AB.

(b) BA.

(c) BI_3.

(d) I_2B.

res (a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação AB, tendo-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Como o número de colunas da matriz B, que é 3, é diferente do número de linhas da matriz A, que é 2, não é possível efectuar a operação BA.

(c) Como o número de colunas da matriz B é igual ao número de linhas da matriz I_3, é possível efectuar a operação BI_3, tendo-se

$$BI_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Como o número de colunas da matriz I_2 é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação I_2B, tendo-se

$$I_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.32teo

(a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K}) : (AB)C = A(BC)$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : (A+B)C = AC + BC$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : A(B+C) = AB + AC$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : I_m A = A I_n = A$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

dem Exercício.

1.33obs

(a) A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

(b) Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo. Então, tem-se que a expressão $A + B + C$ não resulta ambígua devido à propriedade associativa da soma de matrizes.

(c) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Então, tem-se que a expressão ABC não resulta ambígua devido à propriedade associativa da multiplicação de matrizes, fazendo sentido a seguinte definição:

1.34def ⟦potência de uma matriz⟧ Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada. Chama-se p-ésima potência da matriz A, que se representa por A^p, a $\prod_{k=1}^{p} A$.

1.35obs A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

1.36def ⟦matrizes comutáveis⟧ Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

1.37exe Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Então, simplifique a expressão $(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2$.

res $(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2 = (A+B)(A+B) - (A-B)(A+B) - 2B^2 = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - AB + BA + B^2 - 2B^2 = 2BA$.

1.38exe Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule A^3.

res Como A é uma matriz quadrada, é possível determinar A^3, tendo-se

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: como a multiplicação de matrizes é associativa, também se tem $A^3 = A(AA)$.

1.39obs Não se define a operação "divisão de matrizes".

1.40def [[matriz invertível ou não-singular, matriz não-invertível ou singular]] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma matriz invertível ou não-singular se existir uma matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AZ = ZA = I_n$. Caso contrário, diz-se que A é uma matriz não-invertível ou singular.

1.41teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que é uma matriz invertível. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

dem Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$
\begin{aligned}
AX &= I_n \overset{(1)}{=} XA,\\
AY &\overset{(2)}{=} I_n = YA.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
X &= XI_n && \text{I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= X(AY) && \text{por (2)}\\
&= (XA)Y && \text{a multiplicação de matrizes é associativa}\\
&= I_nY && \text{por (1)}\\
&= Y, && \text{I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes,}
\end{aligned}
$$

i.e., existe uma única matriz que satisfaz a condição de invertibilidade.

1.42def [[matriz inversa]] Seja A uma matriz de ordem n invertível. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

1.43teo Sejam A e B duas matrizes quadrada da mesma ordem. Então, $AB = I \Rightarrow A^{-1} = B$.

1.44obs

(a) Se A é a matriz inversa da matriz B, então B é a matriz inversa da matriz A.

(b) Sejam A e B duas matrizes quadrada da mesma ordem. Então, $AB = I \Leftrightarrow BA = I$. Assim, basta verificar $AB = I$ ou $BA = I$ para se concluir que as matrizes A e B são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

1.45teo

(a) Seja A uma matriz invertível. Então, A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Sejam $A, B\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

dem

(a) Como A é uma matriz invertível, tem-se que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Logo, A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(b) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$AA^{-1} \stackrel{(1)}{=} I_n = AA^{-1},$$

$$BB^{-1} = I_n \stackrel{(2)}{=} BB^{-1},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} && \text{a multiplicação de matrizes é associativa}\\
&= AI_nA^{-1} && \text{por (2)}\\
&= AA^{-1} && I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= I_n, && \text{por (1)}
\end{aligned}$$

pelo que AB é invertível com $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ uma vez que a inversa de uma matriz é única.

1.46obs (a) Há matrizes quadradas que não admitem inversa.

(b) Apresenta-se no final deste capítulo uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método geral para cálcular inversas.

1.47exe Sejam as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

res (a) $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) As matrizes são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

(c) Sim, pois $AB = BA = I_2$.

1.48def [[matriz transposta]] Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se transposta da matriz A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $z_{ij} = a_{ji}$, escrevendo-se $Z = A^T$.

1.49obs (a) É sempre possível calcular a matriz transposta de uma matriz.

(b) Calcular a transposta de uma matriz corresponde a trocar linhas com colunas.

1.50exe Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^T.

(b) Calcule $\frac{AA^T}{u^Tu}$.

res (a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\frac{AA^T}{u^Tu} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -2 \\ -2 & 5/2 \end{bmatrix}$.

Nota: relembrar 1.8obs (d).

$\boxed{1.51\text{teo}}$ (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \left(A^T\right)^T = A$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (A+B)^T = A^T + B^T$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : (\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) : (AB)^T = B^T A^T$.

(e) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

$\boxed{\text{dem}}$ (a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Exercício.

(d) Como, por definição da transposta de uma matriz e da multiplicação de matrizes, as matrizes $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são do tipo $p \times m$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\left((AB)^T\right)_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{pela definição de matriz transposta} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk}(B)_{ki} && \text{pela definição de produto de matrizes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (B)_{ki}(A)_{jk} && \text{pela propriedade comutativa dos escalares} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} && \text{pela definição de matriz transposta} \\
&= (B^T A^T)_{ij}, && \text{pela definição de produto de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são iguais.

(e) Exercício.

$\boxed{1.52\text{def}}$ ⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

1.53exe Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

1.54def ⟦matriz ortogonal⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma matriz ortogonal se $AA^T = A^TA = I_n$.

1.55obs Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

1.56exe Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

res Como

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $AA^T = I_2$, tem-se que A é uma matriz ortogonal.

1.57obs Recorde: seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Chama-se conjugado de z, que se representa por $\overline{z}$, a $a - bi \in \mathbb{C}$.

1.58def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

(a) ⟦matriz conjugada⟧ Chama-se matriz conjugada de A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $z_{ij} = \overline{a}_{ij}$, escrevendo-se $Z = \overline{A}$.

(b) ⟦matriz transconjugada⟧ Chama-se matriz transconjugada de A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $z_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (onde $\overline{a}_{ji}$ representa o conjugado de a_{ji}), escrevendo-se $Z = A^H$.

1.59obs (a) É sempre possível calcular a matriz conjugada e a matriz transconjugada de uma matriz.

(b) Calcular a matriz conjugada de uma matriz corresponde a conjugar os seus elementos.

(c) Calcular a matriz transconjugada de uma matriz corresponde a conjugar os seus elementos e a trocar depois linhas com colunas.

1.60exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine A^T, $\overline{A}$ e A^H.

res $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-i & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}$, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2+i & -i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2+i & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

1.61teo (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) : \left(A^H\right)^H = A$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) : (A+B)^H = A^H + B^H$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) : (\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}) : (AB)^H = B^H A^H$.

(e) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) : \left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$.

dem Exercício.

1.62def ⟦matriz hermítica⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Diz-se que A é uma matriz hermítica se $A = A^H$.

1.63exe Dê um exemplo de uma matriz hermítica de ordem 3.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2 \\ 1+i & 2 & 3+2i \\ 2 & 3-2i & 1 \end{bmatrix}$.

1.64def ⟦matriz unitária⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Diz-se que A é uma matriz unitária se $AA^H = A^H A = I_n$.

1.65obs Se A é uma matriz unitária, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^H$.

1.66exe Verifique que a matriz $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -i \end{bmatrix}$ é unitária.

res Como

$$\begin{aligned} AA^H &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $AA^H = I_2$, tem-se que A é uma matriz unitária.

1.67def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦linha nula⟧ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$.

(b) ⟦coluna nula⟧ Diz-se que c_j é uma coluna nula da matriz A se $a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0$.

(c) ⟦pivô⟧ Chama-se pivô ao elemento diferente de zero mais à esquerda de uma linha não-nula.

(d) ⟦coluna pivô⟧ Chama-se coluna pivô a uma coluna da matriz se existe um elemento pivô nessa coluna.

1.68exe Considere a matriz $A = [a_{ij} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$ dada por $A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&2&0&0&0 \\ 0&3&0&4&0 \end{bmatrix}$. Identifique os pivôs e colunas pivô da matriz A.

res Pivôs: a_{15}, a_{22} e a_{32}.

Colunas pivô: c_2 e c_5.

1.69def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) ⟦matriz em escada⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada se o número de elementos nulos que precedem o pivô aumenta de linha para linha até que, possivelmente, sobrem apenas linhas nulas.

(b) ⟦matriz em escada reduzida⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada reduzida se é uma matriz em escada, se todos os pivôs são iguais a um e se estes são os únicos elementos não-nulos nas colunas pivô.

1.70exe Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em escada e em escada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

res Matrizes em escada: A, B, C, F, G, H, u.

Matrizes em escada reduzida: A, C, F, H, u.

$\boxed{\text{1.71def}}$ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ e $\beta \in \mathbb{K}$.

(a) ⟦operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz⟧ Dá-se o nome de operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A, que se representa por $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$, à troca de duas linhas.

(b) ⟦operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz⟧ Dá-se o nome de operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A, que se representa por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$, à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo.

(c) ⟦operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz⟧ Dá-se o nome de operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A, que se representa por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_j$, à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha.

$\boxed{\text{1.72obs}}$ Na definição anterior apenas se consideram operações sobre linhas, apesar de também ser possível definir operações sobre colunas. Fazendo este curso apenas faz referência a operações elementares sobre linhas, estas passarão a ser referenciadas apenas por "operações elementares".

$\boxed{\text{1.73def}}$ ⟦matrizes equivalentes, $A \longleftrightarrow B$⟧ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A e B são matrizes equivalentes, escrevendo-se $A \longleftrightarrow B$, se se pode obter uma a partir da outra através duma sequência (finita) de operações elementares com linhas.

1.74exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0&2&4&0\\1&1&0&2\\2&2&0&5\end{bmatrix}$. Efectue a seguinte sequência de operações na matriz A: $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2,\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1,\ \ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3,\ \ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2$ e $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2$.

res

$$\begin{bmatrix} 0&2&4&0\\1&1&0&2\\2&2&0&5\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1&1&0&2\\0&2&4&0\\2&2&0&5\end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1&1&0&2\\0&2&4&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&2&4&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2} \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{1.75\text{teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

$\boxed{1.76\text{obs}}$ Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

$\boxed{1.77\text{def}}$ Seja A uma matriz.

(a) $[\![\mathrm{fe}(A)]\!]$ Representa-se por $\mathrm{fe}(A)$ o conjunto das matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

(b) $[\![\mathrm{fer}(A)]\!]$ Representa-se por $\mathrm{fer}(A)$ a única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

$\boxed{1.78\text{obs}}$ Seja A uma matriz.

(a) Note-se que $\mathrm{fe}(A)$ é um conjunto de matrizes e que $\mathrm{fer}(A)$ é uma matriz.

(b) Em $\boxed{1.79\text{obs}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar um elemento de $\mathrm{fe}(A)$ e em $\boxed{1.80\text{obs}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar $\mathrm{fer}(A)$.

$\boxed{\text{1.79obs}}$ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina um elemento de $\text{fe}(A)$:

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ **então**

$k \leftarrow \min\{q \in \{i+1, \ldots, m\} | a_{qj} \neq 0\}$

$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$

fimse

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i+1$ **até** m **fazer**

$\ell_p \leftarrow \ell_p - \dfrac{a_{pj}}{a_{ij}}\ell_i$

fimpara

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i+1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$

ir para o Passo 2

fimse

$\boxed{\text{1.80obs}}$ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina fer(A):

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

determinar $A' = [a'_{ij}] \in \text{fe}(A)$

$i \leftarrow$ índice da última linha não-nula da matriz A'

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

Passo 2 [colocar elemento pivô a um]

se $a'_{ij} \neq 1$ **então**

$\ell'_i \leftarrow \dfrac{1}{a'_{ij}}\ell'_i$

fimse

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ **até** $i-1$ **fazer**

$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$

fimpara

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**

terminar

senão

$i \leftarrow$ índice da linha anterior com elemento pivô

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

ir para o Passo 2

fimse

$\boxed{1.81\text{exe}}$ Seja a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Determine um elemento de $\text{fe}(A)$ e $\text{fer}(A)$.

$\boxed{\text{res}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A' \in \text{fe}(A)}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow -\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\substack{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 3\ell_3}]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{fer}(A)}.$$

1.82def [[matriz elementar]] Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

1.83exe A partir de I_4, determine as matrizes elementares obtidas através das seguintes operações elementares:

(a) $\ell_2 \leftrightarrow \ell_4$.

(b) $\ell_3 \leftarrow 2\ell_3$.

(c) $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$.

res (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow 2\ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{1.84\text{teo}}$ As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

$\boxed{1.85\text{teo}}$ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tais que $A \longleftrightarrow B$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $B = E_1E_2\cdots E_kA$.

$\boxed{1.86\text{teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $\text{fer}(A) = E_1E_2\cdots E_kA$.

$\boxed{1.87\text{teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então, A é invertível se e só se A é o produto de matrizes elementares.

$\boxed{1.88\text{obs}}$ (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então, A é invertível se e só se $\text{fer}(A) = I_n$.

(b) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Então, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$I_n = E_k\cdots E_2E_1A,$$

pelo que

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}I_n,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} A^{-1} &= I_n\left(E_k^{-1}\right)^{-1}\cdots\left(E_2^{-1}\right)^{-1}\left(E_1^{-1}\right)^{-1} \\ &= E_k\cdots E_2E_1I_n, \end{aligned}$$

i.e., A^{-1} obtém-se a partir de I_n através das mesmas operações elementares que transformam A em I_n.

$\boxed{1.89\text{exe}}$ Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ é invertível e determine a sua inversa.

$\boxed{\text{res}}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{I_3|A^{-1}}.$$

Assim, A é uma matriz invertível pois $\mathrm{fer}(A) = I_3$ com $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Calcule-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_3$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2 Exercícios sobre Matrizes

$\boxed{1.1\text{exe}}$ Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & i \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique as matrizes rectangulares e o seu tipo.

(b) Indique as matrizes quadradas e a sua ordem.

(c) Indique as matrizes linha.

(d) Indique as matrizes coluna.

(e) Indique as matrizes diagonais.

(f) Indique as matrizes escalares.

(g) Indique as matrizes triangulares superiores.

(h) Indique as matrizes triangulares inferiores.

$\boxed{1.2\text{exe}}$ Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ b_{ij} = i - j,$$

$$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i < j, \\ (-1)^{i+1} & \text{se} \quad i = j, \\ 1 & \text{se} \quad i > j, \end{cases} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efectuando as operações nesses casos:

(a) $A + 2B$.

(b) $A - C$.

(c) AC.

(d) CA.

(e) C^3.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2}$.

(g) $(CBA^TC)^2$.

(h) uu^T.

(i) u^Tu.

(j) u^TA^TBu.

$\boxed{1.3\text{exe}}$ Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{C}$, para que a matriz $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{smallmatrix}\right]$ seja simétrica.

$\boxed{1.4\text{exe}}$ Indique quais das seguintes matrizes são ortogonais:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

$\boxed{1.5\text{exe}}$ Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{C}$, para que a matriz $T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & a & b \\ 1 & c & i \\ 2i & -i & 3 \end{smallmatrix}\right]$ seja hermítica.

$\boxed{1.6\text{exe}}$ Mostre que $B = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4i \\ -4 & 3i \end{smallmatrix}\right]$ é uma matriz unitária.

$\boxed{1.7\text{exe}}$ Considere a matriz $D = \left[\begin{smallmatrix} i & 0 & 2i \\ 2 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Mostre que está bem definida a expressão $\overline{D}D^HDD^T$ e determine o seu valor.

$\boxed{1.8\text{exe}}$ Mostre que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

$\boxed{1.9\text{exe}}$ Mostre que se A e B são matrizes comutáveis e B é uma matriz invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$.

$\boxed{1.10\text{exe}}$ Sejam A e B matrizes comutáveis e invertíveis. Então, mostre que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

1.11exe Uma matriz real e quadrada A diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que, dada qualquer matriz real e quadrada B, a matriz $B - B^T$ é anti-simétrica.

1.12exe Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais ainda é uma matriz ortogonal.

1.13exe Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Então, mostre que $(I - A)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k$.

1.14exe Determine, para cada uma das seguintes matrizes, uma matriz equivalente que seja uma matriz em escada e a matriz equivalente que seja uma matriz em escada reduzida.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1.15exe Calcule, se possível, as matrizes inversas das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{1.16exe}}$ Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$.

1.3 Soluções dos Exercícios sobre Matrizes

1.1sol

(a) $A_{2\times 3}$, $c_{3\times 1}$, $D_{3\times 2}$, $E_{1\times 4}$.

(b) B — ordem 2, F — ordem 2, g — ordem 1, H — ordem 2.

(c) e, g.

(d) c, g.

(e) B, g, H.

(f) g, H.

(g) B, F, g, H.

(h) B, g, H.

1.2sol

(a) $A+2B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) a expressão $A-C$ não está bem definida.

(c) a expressão AC não está bem definida.

(d) $CA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(g) $(CBA^TC)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(h) $uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) $u^Tu = [\,5\,]$.

(j) $u^TA^TBu = [\,-2\,]$.

1.3sol $a=1$, $b=2$, $c=3$.

1.4sol A e C.

1.5sol $a=1$, $b=-2i$, $c\in\mathbb{R}$.

$\boxed{1.7\text{sol}}$ $\overline{D}D^H DD^T = \begin{bmatrix} 29 & -20i \\ 20i & 29 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.14\text{sol}}$ Nota: associada a cada matriz não-nula, existe uma infinidade de matrizes que lhe são equivalentes e que estão na forma em escada. As soluções que a seguir se apresentam, resultam da aplicação do algoritmo apresentado em $\boxed{1.79\text{obs}}$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(A), \text{fer}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(B), \text{fer}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \text{fe}(C), \text{fer}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(D), \text{fer}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(E), \text{fer}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(F), \text{fer}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(g) $G \in \text{fe}(G), \text{fer}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(x), \text{fer}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.15\text{sol}}$ (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) A matriz B é singular.

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{1.16\text{sol}}$ $X = CB - A$.