Ficha n.º 3: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Exercício 3.1. Calcule a característica de cada uma das matrizes

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercício 3.2. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vectores de

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determine um subconjunto F de E de vectores linearmente independentes que gerem U.

Exercício 3.3. Resolva os sistemas seguintes por substituição inversa.

a)

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ \qquad\qquad 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ \quad -3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ \qquad 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ \qquad\quad -7x_4 = -7 \end{cases}.$$

Exercício 3.4. Use eliminação Gaussiana para resolver os sistemas

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 1.5 \\ x_1 - x_2 = 0.25 \end{cases} .$$

b)

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

c)

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_2 + x_4 = 4 \\ 2x_3 + x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_4 = 1 \end{cases} .$$

Exercício 3.5. Resolva o sistema tridiagonal

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.25 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0.50 \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 0.75 \\ -x_3 + 4x_4 - x_5 = 0.50 \\ -x_4 + 4x_5 = 0.25 \end{cases} .$$

Exercício 3.6. Calcule a inversa das seguintes matrizes.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad (a \neq 0 \ ou \ c \neq 0).$$

c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} .$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

e)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Exercício 3.7. Calcule a inversa da matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 3.8. Determine para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o sistema seguinte tem solução e nesses casos calcule-a.

$$\begin{cases} \lambda\, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda\, x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda\, x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

Exercício 3.9. Resolva os seguintes sistemas indeterminados escrevendo a sua solução geral como soma duma solução particular do sistema com a solução geral do sistema homogéneo "associado".

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}.$$

b)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = -3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 16x_4 = -15 \end{cases}.$$

Exercício 3.10. Resolva os seguintes sistemas homogéneos.

a)

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

b)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Exercício 3.11. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções do sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Exercício 3.12. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Exercício 3.13. Determine uma base e a dimensão do núcleo das matrizes

a)

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 0\\ -2 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2 & -2\\ 1 & -2 & -3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$