# Grafos

1. Considere o grafo $G = (V, A, \mathcal{E})$ definido por $V = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{ab, ac, bc, bd, ca, cd, ce, de, ee\}$ e $\mathcal{E}(ab) = \{a,b\}$, $\mathcal{E}(ac) = \{a,c\}$, $\mathcal{E}(bc) = \{b,c\}$, $\mathcal{E}(bd) = \{b,d\}$, $\mathcal{E}(ca) = \{c,a\}$, $\mathcal{E}(cd) = \{c,d\}$, $\mathcal{E}(ce) = \{c,e\}$, $\mathcal{E}(de) = \{d,e\}$, $\mathcal{E}(ee) = \{e\}$

(a) Represente graficamente o grafo G.

(b) Determine um caminho em G com 10 arestas

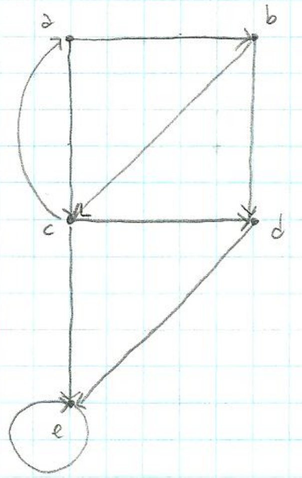
(c) Determine um trilho em G com 6 arestas

(d) Determine um trilho simples em G com 4 arestas

(e) Qual o número de caminhos diferentes de a para e?

(f) Determine um ciclo em G com 1 (respectivamente 2, 3, 4, 5) arestas

a)




b) (e, ed, d, db, b, bc, c, ca, a, ab, b, bc, c, ce, e, ee, e, ed, d, dc, c)

c) (e, ed, d, db, b, bc, c, ca, a, ac, c, cb, b)

d) (e, ed, d, db, b, ba, a, ac, c)

e) infinitos

f) (e, ee, e)

(c, ca, a, ac, c)

(e, ed, d, dc, c, ce, e)

(c, cd, d, db, b, ba, a, ac, c)

(e, ed, d, db, b, ba, a, ac, c, ce, e)

tices têm graus:

2, 2 e 2

3, 3, 3, 3 e 3

1, 2, 2 e 3

2, 5 e 5

a) 
Não tem lacetes nem arestas diferentes entre os mesmos vértices logo o grafo é simples, cada um dos vértices tem grau 2.

b) impossível, não existe nenhum grafo nestas condições, pois a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre par.

c) 

d) impossível, não é possível ter um grafo simples com 3 vértices e tal que a soma dos graus seja 12; se a soma dos graus é 12, então o grafo tem 6 arestas. Como temos apenas 3 vértices, então o grafo teria de ter lacetes ou teria de ter arestas diferentes entre os mesmos vértices e, portanto o grafo não seria simples.

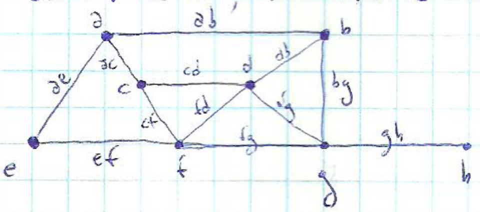
3. Mostre que não existe nenhum grafo simples cujos vértices têm graus

(a) 7, 6, 5, 4, 3, 3 e 2

Seja $v_1, v_2 \ldots v_7$ os vértices de um grafo $G$ simples. Uma vez que $G$ é simples, então, dado um vértice $v_k$, não existem lacetes com extremidades em $v_k$ e para cada $i \in \{1 \ldots 7\} \setminus \{k\}$, existe, no máximo, uma aresta de extremidades $\{v_k, v_i\}$. Logo $gr(v_k) \leq 6$.
Assim, não é possível ter um vértice de grau 7.

(b) 6, 6, 5, 4, 3, 3 e 1

4. Dados dois grafos $G=(V, A, \varepsilon)$ e $G'=(V', A', \varepsilon')$, diz-se que $G'$ é um <u>subgrafo</u> de $G$ se $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$ e $\varepsilon(a) = \varepsilon'(a)$, para cada $a \in A'$.




Verifique se os seguintes grafos são subgrafos de $G$.

(a) $G_1 = (\underbrace{\{a, b, e, f\}}_{V_1}, \underbrace{\{ab, ac, ef\}}_{A_1}, \varepsilon_1)$ onde $\varepsilon_1(ab) = \{a, b\}$, $\varepsilon_1(ae) = \{a, e\}$ e $\varepsilon_1(ef) = \{e, f\}$

(b) $G_2 = (\{a, b, d, g, h\}, \{ab, bg, dg, gh\}, \mathcal{E}_2)$ onde $\mathcal{E}_2(ab) = \{a, b\}$, $\mathcal{E}_2(bg) = \{b, g\}$, $\mathcal{E}_2(dg) = \{d, g\}$ e $\mathcal{E}_2(gh) = \{g, a\}$

(a) $G_1$ é subgrafo de $G$, pois $V_1 \subseteq V$, $A_1 \subseteq A$ e $\mathcal{E}_1(ab) = \mathcal{E}(ab)$, $\mathcal{E}_1(ae) = \mathcal{E}(ae)$, $\mathcal{E}_1(ef) = \mathcal{E}(ef)$

(b) $G_2$ não é subgrafo de $G$, pois $\mathcal{E}_2(gh) = \{g, a\} \neq \{g, h\} = \mathcal{E}(gh)$

5. Cada grafo com n vertices e n-1 arestas é uma arvore. V ou F?

É um grafo com 3 vertices e 2 arestas, mas não é uma arvore pois é um grafo desconexo (além disso, tem ciclos)