

## Folha 6 - Valores e Vectores Próprios

---

1. Considere a seguinte matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  e diga quais dos seguintes vectores

$$(i) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

são vectores próprios de  $A$ . Em caso afirmativo indique o valor próprio correspondente.

2. Verifique que se  $\lambda = 3$  é valor próprio da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

Em caso afirmativo indique um vector próprio associado.

3. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Para cada uma das matrizes anteriores, determine os seus valores próprios, e respectivas multiplicidades algébricas.
  - (b) Determine os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios, determinados na alínea anterior.
  - (c) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios anteriores. Qual a dimensão dos subespaços?
4. Seja  $A$  uma matriz quadrada. Mostre que  $A$  e  $A^T$  têm os mesmos valores próprios.
5. Considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $A + 5I = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
- (a) Determine os valores próprios e os vectores próprios da matriz  $A$ .
  - (b) Determine os valores próprios e os vectores próprios da matriz  $A + 5I$ .
  - (c) Compare os resultados que obteve nas alíneas a) e b).
6. Se  $\lambda$  é um valor próprio de uma matriz invertível  $A$ .  
Prove que  $\lambda \neq 0$  e  $\lambda^{-1}$  é valor próprio de  $A^{-1}$ .
7. Considere que a matriz  $A$  tem um vector próprio  $v$  associado a um valor próprio  $\lambda$ . Mostre que  $v$  também é um vector próprio de  $A^2$  associado ao valor próprio  $\lambda^2$ .

8. Mostre que as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  são semelhantes.
9. Determine  $a, b$  e  $c$  de modo que a matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$  tenha  $-1, 0$  e  $1$  como valores próprios.
10. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 3 e  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4$  e  $\lambda_3 = 6$  os seus valores próprios. Considere a matriz  $B = A^2 - I$ .
- (a) Averigue que as matrizes  $A$  e  $B$  são comutáveis.
- (b) Determine os valores próprios da matriz  $B$ .
11. Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  e  $f_A$ , a aplicação linear definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) A matriz  $A$  é invertível sse  $Ax = 0$  tem apenas a solução trivial.
- (b) A matriz  $A$  é invertível sse  $\det(A) \neq 0$ .
- (c) A matriz  $A$  é invertível sse a aplicação  $f_A$  é injectiva.
- (d) A matriz  $A$  é invertível sse  $0 \notin \lambda(A)$ .
12. (a) Prove que matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.
- (b) Verifique que as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  têm os mesmos valores próprios mas não são semelhantes.
13. Estude para cada alínea o resultado traduzido pelo teorema seguinte:
- "A dimensão de um subespaço próprio  $U_\lambda$ , não excede a multiplicidade algébrica de  $\lambda$ ".*

(a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$