Cálculo– Época de recurso – Proposta de correção

LEIA ATENTAMENTE

- Se pretende realizar **P2** deve responder às questões **6**, **8**, **9**, **10** e **11**.

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

P_2 — 20 valores

6. (5 valores)

Indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

(a) Se f é contínua e $G(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} f(t)\,dt$ então $G'(x) = f(\ln x)$.

Falso. Considere-se a função auxiliar definida para $x \geq 1$ por

$$F(x) = \int_1^{\ln x} f(t)\,dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $F'(x) = f(x)$. Ora, $G(x) = F(\ln x)$, logo, pela derivada da função composta

$$G'(x) = [G(x)]' = [F(\ln x)]' = (\ln x)' F'(\ln x) = \frac{1}{x} f(\ln x) \neq f(\ln x).$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Verdade. A representação gráfica da curva definida por $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ é o arco da circunferência de centro $(0,0)$, raio $r = 1$ que está acima do eixo dos xx. Assim, o valor do integral do lado direito é a medida da área limitada pela curva anterior e o eixo horizontal, isto é, a área do semicírculo: $\dfrac{1}{2}\pi\, r^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Se f é contínua e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ então $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente.

Falso. Por exemplo, a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ verifica $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e, no entanto, o integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

é divergente.

(d) Se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente então $\lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 0$

Falso. Considere-se, por exemplo, a série geométrica $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (de razão $r = \frac{1}{2} < 1$) que é convergente.

Esta série tem por soma

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2 \neq 0.$$

(e) Se $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(x-1)^n$, $x \in \mathbb{R}$, então $f^{(300)}(1) = \dfrac{1}{300!}$.

Falso. Se f admite expansão em série de potências de $x-1$, então essa é a sua série de Taylor em torno de $a = 1$. Assim,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}(1)\frac{(x-1)^n}{n!}$$

com $f^{(n)}(1)$ a derivada de ordem n no ponto $a = 1$. Donde se conclui que $f^{(n)}(1) = 1$. Em particular, para $n = 300$ vem $f^{(300)}(1) = 1$.

7. (3 valores)

Obtenha uma estimativa para $\int_0^9 f(x)\,dx$ quando de f se conhecem os valores a seguir tabelados:

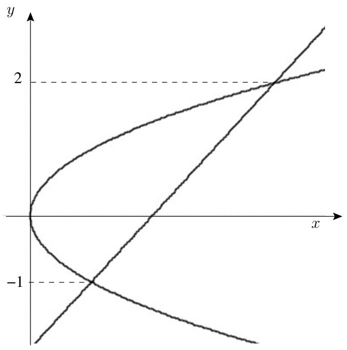
x	0	3	6	9
$f(x)$	32	22	15	11

Usando, por exemplo, somas de Riemann "à esquerda" com 3 subintervalos de igual amplitude $\Delta = 3$ vem

$$\int_0^9 f(x)\,dx \approx f(0)\times(3-0)+f(3)\times(6-3)+f(6)\times(9-6) = 3\times(32+22+15) = 207.$$

8. (3 valores)

Integrando em ordem a y, calcule a área da região limitada por $x=y^2$ e $y=x-2$.



Considere-se a representação gráfica ao lado. Os pontos de interseção das curvas obtêm-se resolvendo a igualdade $y^2 = y+2$: $y=-1$ ou $y=2$. Assim, a medida da área da região limitada por $x=y^2$ e $y=x-2$ é

$$\int_{-1}^{2}\left[(y+2)-y^2\right]\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right|_{-1}^{2}$$
$$= 2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2-\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}.$$

9. (2 valores)

Quando f é uma função de classe C^1 e positiva no intervalo $[a,b]$, prova-se que a medida da área da superfície gerada pela rotação da curva definida por $y=f(x)$, entre $x=a$ e $x=b$, em torno do eixo das abcissas pode ser calculado por

$$S=\int_a^b 2\pi\, f(x)\,\sqrt{1+[f(x)]^2}\,dx.$$

Determine a medida área da superfície gerada pela rotação da curva definida por $y=\sqrt{x^2-1}$, com $1\le x\le 2$.

Com $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ tem-se $\sqrt{1+[f(x)]^2}=|x|=x$ pois $x\in[1,2]$. Então

$$S=\int_1^2 2\pi\,\sqrt{x^2-1}\,x\,dx = \pi\int_1^2 2x\,(x^2-1)^{1/2}\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{2}{3}(x^2-1)^{3/2}\right|_1^2 = 2\pi\sqrt{3}.$$

10. (4 valores)

Considere a série $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\cdots+\ln\frac{n}{n+1}+\ldots$

(a) Defina o termo geral da sucessão geradora da série.

O termo geral da sucessão geradora da série é $u_n=\ln\frac{n}{n+1}$.

(b) Indique o termo de ordem 5 da sucessão das somas parciais.

A sucessão das somas parciais é

$$s_1=u_1=\ln\frac{1}{2}$$
$$s_2=u_1+u_2=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)=\ln\frac{1}{3}$$
$$s_3=u_1+u_2+u_3=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)=\ln\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\ln\frac{1}{n+1}.$$

Em particular, para $n=5$, $s_5=\ln\frac{1}{6}$.

(c) Estude a natureza da série.

Atendendo à alínea anterior, tem-se $s_n = \ln \dfrac{1}{n+1}$. Por definição, a soma da série é calculada por

$$\lim_n s_n = \lim_n \left(\ln \frac{1}{n+1} \right) \longrightarrow -\infty$$

como este limite não existe não existe, a série diverge.

11. (3 valores)

Escreva a função definida por $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ na forma de uma série de potências, incluindo um domínio apropriado.

Observe-se, por exemplo, que

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \dfrac{x}{3}}$$

Ora $\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ é a soma de uma série geométrica de razão $r = \frac{x}{3}$, desde que $\left|\dfrac{x}{3}\right| < 1$, isto é,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}, \qquad \text{com } \left|\frac{x}{3}\right| < 1.$$

Assim,

$$f(x) = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}, \qquad |x| < 3.$$