



Nome

Número

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

Exercício 1. [4 valores] Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujas funções componentes são as funções definidas por

$$f_1(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2} \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = \frac{\ln y}{x - 2y + 4}$$

- a) Esboce a curva de nível zero, traço no plano XOY , da função f_1 .
- b) Defina e esboce D .
- c) Indique o interior e a aderência de D .

Exercício 2. [2 valores] Calcule se existir, ou explique porque razão não existe, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x+y^3}$.

Exercício 3. [4 valores] Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Mostre que f é uma função contínua.
- b) Calcule $\nabla f(0, 0)$.
- c) Determine $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0)$. Conclua que f não é derivável em $(0, 0)$.

Exercício 4. [2 valores] Considere as funções

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{e} & \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (e^{xyz}, z \sin y^2) & (x, y) &\mapsto x^2 + 2x - y^2 \end{aligned}$$

- a) Calcule a matriz jacobiana de f no ponto $(1, 0, 1)$.
- b) Use a regra da cadeia para obter o gradiente de $g \circ f$ em $(1, 0, 1)$.

As respostas aos exercícios 5, 6 e 7 são dadas na folha de enunciado.

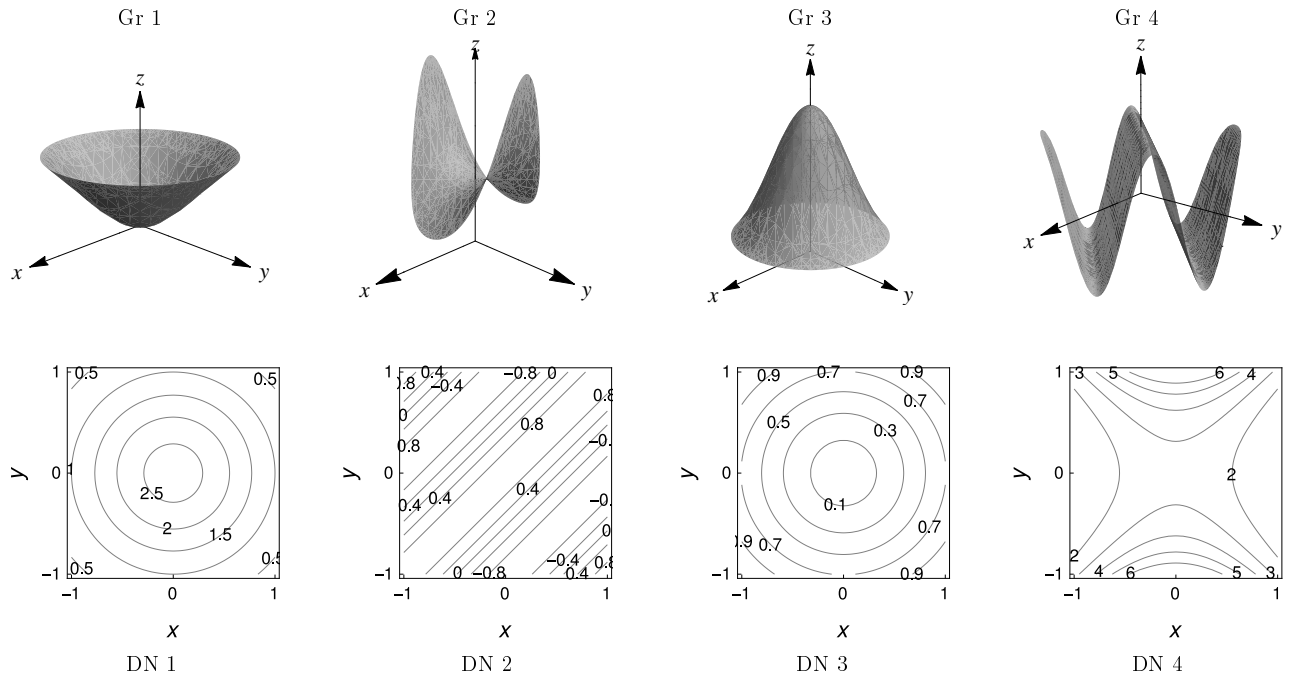
Exercício 5. [4 valores] Indique o valor lógico (verdadeiro ou falso) de cada uma das seguintes afirmações:

- a) O gráfico da função f , definida por $f(x, y) = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 1}$, passa por todos os octantes do referencial;
- b) Se todas as curvas de nível não vazias de f são circunferências concêntricas, então o gráfico de f é uma superfície esférica;
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x}{\sqrt{x+y}}$ não existe;
- d) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$.

Exercício 6. [2 valores] Considere as funções definidas por

$$f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}, \quad g(x, y) = e^{1-x^2+y^2}, \quad h(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) \quad \text{e} \quad t(x, y) = \cos(3x - 3y).$$

Estabeleça as correspondências entre cada uma das expressões algébricas anteriores, a respectiva representação gráfica e o respectivo diagrama de nível.



Exercício 7. [2 valores] Seja f a função cujo esboço gráfico se representa na figura. Quais os sinais de $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$?

