ISD **Folha 11** **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**

Dezembro 2014

1. Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostre que:
   (a) Se f e g são funções pares então fg é uma função par.
   (b) Se f e g são funções ímpares então fg é uma função par.
   (c) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então fg é uma função ímpar.

2. Determine as extensões par e ímpar 2π-periódicas de cada uma das funções $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ dadas por:
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
   (c) $f(x) = \sin(2x)$

3. Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções:
   (a) $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$, f 2-periódica.
   (b) $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$, f π-periódica.

4. Determine a série de Fourier de senos de:
   (a) $f(x) = -1, \quad 0 < x < 1$.
   (b) $f(x) = x(\pi - x), \quad 0 < x < \pi$.

5. Determine a série de Fourier de co-senos de:
   (a) $f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi$.
   (b) $f(x) = e^x, \quad 0 < x < 1$.

6. Consider a função
$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$
   (a) Determine e represente graficamente a série de Fourier de f.
   (b) Mostre que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

7. Consider a função
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$
   (a) Determine e represente graficamente a série de Fourier de f.
   (b) Mostre que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

8. Considere as funções $\phi_n, \psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\phi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$ e $\psi_m(x) = \cos(\frac{m\pi x}{L}), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad L > 0$.
   (a) Mostre que ϕ_n e ψ_m são funções periódicas determinando o seu período.
   (b) Mostre que ϕ_n e ψ_m são funções ortogonais em $[-L, L]$ i.e. que
$$\int_{-L}^{L} \phi_n(x)\psi_m(x) = 0$$

9. Considere $f \in [-L, L] \to \mathbb{R}$ integrável e $2L-$periódica. Mostre que:
   (a) Se f é par, então a sua série de Fourier é uma série de co-senos.
   (b) Se f é ímpar, então a sua série de Fourier é uma série de senos.