I. DETERMINANTES

O determinante de uma matriz quadrada é um número.

Podem ser usados para discutir e resolver sistemas de equações lineares e para calcular valores próprios de matrizes (cap. V)

Definição: (existem outras definições) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$.
O determinante de $\underline{\underline{A}}$ representa-se por $\det(A)$ ou $|A|$ e é definido por:

- se $n=1$, i.e., $A=(a_{11})$ então $\det(A)=a_{11}$
- se $n>1$ então

$$\boxed{\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_{1n})}$$

onde M_{1j} denota a matriz de ordem $n-1$ que resulta de $\underline{\underline{A}}$ retirando-lhe a 1ª linha e a coluna j.

Ex.: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ $\quad \det(A)=1\times(-4)-2\times 3=-4-6=-10$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad \det(B)=1\times\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}-1\times\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}+0\times\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$=1\times(2\times(-2)-1\times 0)-1\times(-1\times(-2)-1\times 3)$$

$$=-4+1=-3$$

Definição: Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$ e M_{ij} a matriz de ordem $\underline{\underline{n-1}}$ que se obtém de $\underline{\underline{A}}$ retirando-lhe a linha $\underline{\underline{i}}$ e a coluna $\underline{\underline{j}}$.

Chama-se <u>menor do elemento a_{ij} de A</u> ao $\boxed{\det(M_{ij})}$ e

chama-se <u>complemento algébrico do elemento a_{ij} de A</u> a $\boxed{(-1)^{i+j}\det(M_{ij})}$

Ex.: O complemento algébrico do elemento $\underline{\underline{2}}$ (1ª linha, 2ª coluna) da matriz $\underline{\underline{A}}$ acima é $(-1)^{1+2}\times\det(3)=-3$

O complemento algébrico do el.^to $\underline{\underline{3}}$ (3ª linha, 1ª coluna) na matriz B acima é $(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=(-1)^4\times(1\times 1-0\times 2)=1$

NOTA: Pela definição, o determinante de uma matriz é calculado através de um desenvolvimento envolvendo os elementos da 1ª linha e respectivos complementos algébricos. Contudo, o determinante também pode ser obtido com um desenvolvimento semelhante ao longo de qualquer coluna ou linha da matriz.

Teorema (de Laplace): Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$. Então,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(M_{kj}) \qquad (1 \leq k \leq n)$$

ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det(M_{il}) \qquad (1 \leq l \leq n)$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

desenvolvimento ao longo da 2ª coluna

$$\det(A) = (-1)^{1+2} 2 \times \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 5 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \times 8 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \times (4 \times 9 - 7 \times 6) + 5 (1 \times 9 - 7 \times 3) - 8 (1 \times 6 - 3 \times 4)$$

$$= -2 \times (-6) + 5 \times (-12) - 8 \times (-6) = 12 - 60 + 48$$

$$= 0$$

Propriedades

Teorema: Se D é uma matriz diagonal de ordem $\underline{\underline{n}}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$
então $\det(D) = d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n$.
Consequentemente, $\det(I_n) = 1$.

Teorema: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz triangular de ordem $\underline{\underline{n}}$. Então

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$$

Teorema: Seja A uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$. Então $\det(A^T) = \det(A)$

Teorema: Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz $\underline{\underline{A}}$ são nulos então $\det(A) = 0$.

Teorema: Se $\underline{\underline{B}}$ resulta de $\underline{\underline{A}}$ por multiplicação dos elementos de uma linha ou coluna de A por um número $\underline{\underline{\alpha}}$, então
$\det(B) = \alpha \det(A)$.

Teorema: Se $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Teorema: Se $\underline{\underline{B}}$ resulta de $\underline{\underline{A}}$ por troca de duas linhas ou duas colunas então $\det(B) = -\det(A)$.

Teorema: Se A é uma matriz quadrada com duas linhas ou duas colunas iguais, $\det(A) = 0$.

Teorema: Seja A uma matriz de ordem n. Se a matriz B resulta de A adicionando a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna), então $\det(B) = \det(A)$.

Teorema: Sejam A e B matrizes de ordem n. Então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

A operação elementar que consiste em substituir uma linha pela sua soma com outra linha multiplicada por um número não altera o valor do determinante de uma matriz.

A operação elementar que consiste em trocar duas linhas altera o valor do determinante trocando-lhe apenas o sinal.

$\downarrow$

Realizando uma sequência finita destas duas operações elementares, de modo a transformar A numa matriz $U = (u_{ij})$ triangular superior, então,

$$\det(A) = (-1)^{l} \underbrace{u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}}_{\det(U)}$$

onde l = n.º de trocas de linhas efectuadas

$\downarrow$

O processo de Eliminação de Gauss pode ser usado para calcular o valor do determinante de uma matriz.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ calcular $\det(A)$ pelo <u>Teorema de Laplace</u>:

$$\det(A) = 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \times \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \times 4 - 2 \times (-1) - (0 \times 4 - 2 \times 1) + (-1 \times (-1) - 3 \times 4) + (2 \times 4 - (1) \times (-1)) = 18$$

Calcular det(A) usando Eliminação Gaussiana:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix}$$

pelo que, $\det(A) = 1 \times 1 \times 4 \times \frac{9}{2} = 18$

Teorema: Seja $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ um sistema de $\underline{n}$ equações em $\underline{n}$ incógnitas. Então,

(i) Se $\det(A) \neq 0$, o sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem solução única

(ii) Se $\det(A) \neq 0$, a solução $\underset{\sim}{x} = (x_i)$ pode ser obtida de

$$x_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det(A)}, \quad (i = 1, \dots, n)$$ (Regra de Cramer)

onde $A^{(i)}$ denota a matriz que resulta de A substituindo a coluna i pelo vector $\underset{\sim}{b}$ dos termos independentes.

Ex: Resolver $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 3/2 \\ x_1 - x_2 = 1/4 \end{cases}$ pela Regra de Cramer.

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ então $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & 2 & 1 \\ 1/4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$

Tem-se, $\det(A) = 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1$

$\det(A^{(1)}) = 1 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 1/4 & -1 \end{pmatrix} = 1 + (-3/2 - 2/4) = 1 - 2 = -1$

$\det(A^{(2)}) = 1 \det\begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = -1/4 + (1 - 3/2) = -1/4 - 1/2 = -3/4$

$\det(A^{(3)}) = 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix} + 1 \times \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1/2 + 3/2 + 1 \times (-2) = 0$

Logo, $x_1 = \frac{-1}{-1} = 1$, $x_2 = \frac{-3/4}{-1} = \frac{3}{4}$ e $x_3 = \frac{0}{-1} = 0$

Definição: Seja $\underline{A}$ uma matriz de ordem $\underline{n}$. Seja A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A. A transposta da matriz quadrada de ordem $\underline{n}$ cujo elemento na posição (i,j) é A_{ij}, chama-se matriz adjunta de A e representa-se por $Adj(A)$, i.e.,

$$Adj(A) = (A_{ij})^T$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -1 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema: Seja A uma matriz de ordem $\underline{n}$. Então,

(i) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$

(ii) Se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Ex: Calcular A^{-1} da matriz $\underline{A}$ do exemplo anterior, pelo método da adjunta.

$$\det(A) = (-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -(-9) = 9 \quad \text{logo } A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & -1/9 \\ 1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & -1 & -2/9 \end{pmatrix}$$