Programação Linear - soluções básicas

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

2 de setembro de 2015

Programação Linear - soluções básicas

antes

- Os vértices do poliedro são importantes, porque existe uma solução óptima de um problema de programação linear que é um vértice $^{(*)}$.

Guião

- Cada vértice corresponde a uma *solução básica* do sistema de equações,
- que resulta de transformar as restrições dos modelos de programação linear em equações.
- As soluções básicas do sistema de equações (vértices) podem ser representadas em quadros.

depois

- Os quadros são usados no algoritmo simplex.
- O algoritmo simplex escolhe a sequência de vértices a explorar.

(*) quando o poliedro tem vértices (o que acontece sempre quando há restrições do tipo ≥ 0) e quando a solução óptima não é ilimitada.

Conteúdo

- Transformação de inequações em equações
- Sistemas de equações
- Soluções básicas do sistema de equações indeterminado
  - Variáveis básicas
  - Variáveis não-básicas
- Correspondência entre soluções básicas e vértices
- Representação do vértice num quadro: *o quadro simplex*
- Soluções básicas (vértices) adjacentes

Modelo de programação linear

- Variáveis de decisão: x_1, x_2.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \\
 & 1x_1 & & & \leq & 30 \\
 & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Vamos transformar as inequações em equações, porque é mais fácil tratar um sistema de equações do que um sistema de inequações.
- Há um método de resolução que usa sistemas de inequações (Fourier-Motzkin) que não iremos ver.

Transformação Inequações → Equações

- Qualquer inequação do tipo $\leq$ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.
- Exemplo:

$$\begin{array}{llll} 3x_1 + 2x_2 & \leq 120, & x_1, x_2 & \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1s_1 & = 120, & x_1, x_2, s_1 & \geq 0 \end{array}$$

- O valor da função linear $3x_1 + 2x_2$ é a quantidade de recurso usado na solução $(x_1, x_2)^t$;
- o valor de s_1 (variável de folga) é a quantidade não usada (ou folga) do recurso disponível (no exemplo, 120).

- Quando, numa solução $\widetilde{x}$, a restrição é obedecida como igualdade (*i.e.*, a variável de folga é nula), diz-se que a *restrição é activa em* $\widetilde{x}$.

Modelo (equivalente) com equações

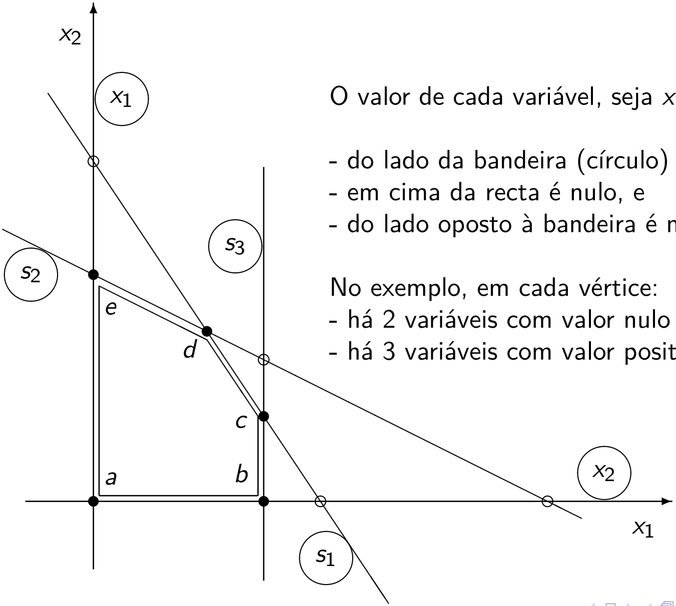
- Variáveis de decisão: x_1, x_2.
- Variáveis de folga: s_1, s_2, s_3.

$$
\begin{array}{rrcrcccrcr}
\max z = & 12x_1 & + & 10x_2 & & & & & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & & = & 120 \\
 & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & & = & 80 \\
 & 1x_1 & & & & & +1s_3 & & = & 30 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Como interpretar graficamente as variáveis?

- um ponto em que $s_1 = 0$ pertence à recta que delimita o sub-espaço definido pela restrição $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.
- um ponto em que $x_1 = 0$ pertence à recta que delimita o sub-espaço definido pela restrição $x_1 \geq 0$.

Representação do domínio com as variáveis de folga

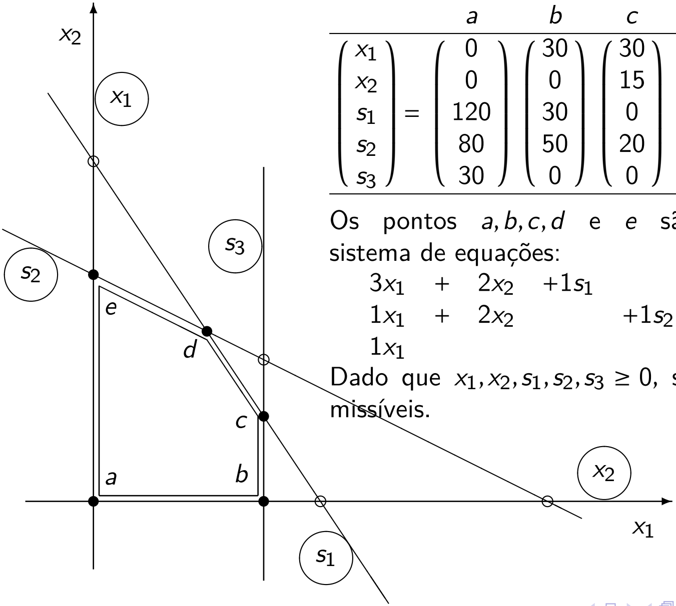


O valor de cada variável, seja x_1, x_2, s_1, s_2 ou s_3 :

- do lado da bandeira (círculo) é positivo,
- em cima da recta é nulo, e
- do lado oposto à bandeira é negativo.

No exemplo, em cada vértice:
- há 2 variáveis com valor nulo
- há 3 variáveis com valor positivo

Representação do domínio: vértices admissíveis

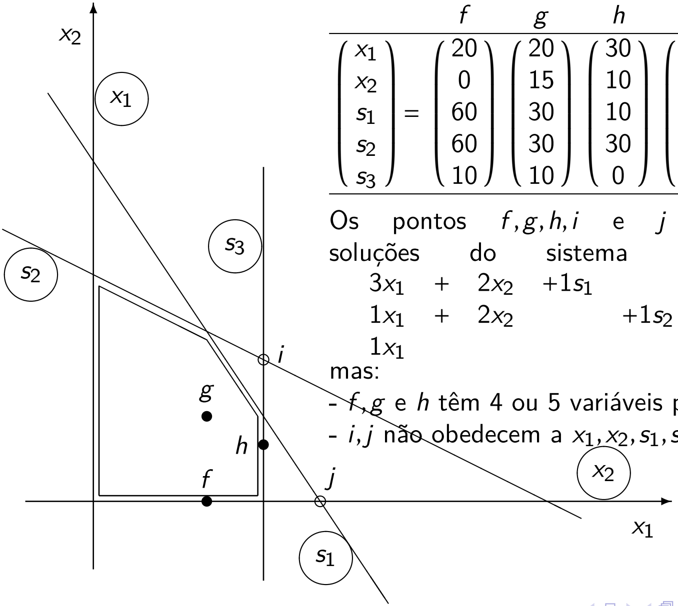


$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Os pontos a, b, c, d e e são soluções do sistema de equações:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\ 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \end{array}$$

Dado que $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$, são soluções admissíveis.



$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & f & g & h & i & j \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Os pontos f, g, h, i e j também são soluções do sistema de equações:

$$
\begin{array}{lllllll}
3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = 120 \\
1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = 80 \\
1x_1 & & & & & +1s_3 & = 30
\end{array}
$$

mas:

- f, g e h têm 4 ou 5 variáveis positivas;
- i, j não obedecem a $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Solução básica do sistema de equações

A região admissível é:

- o conjunto de soluções do sistema de equações $Ax = b$ em que $x \geq 0$,
- sendo $A \in \mathrm{IR}^{m\times n}$, $b \in \mathrm{IR}^{m\times 1}$, $x \in \mathrm{IR}_{+}^{n\times 1}$,$^{(*)}$
- que é tipicamente indeterminado (tem várias soluções).

Algumas soluções designam-se por *soluções básicas*:

Uma *solução básica* resulta de resolver o sistema de equações:

- em ordem a *m variáveis básicas* (correspondentes a um conjunto de *m* colunas linearmente independentes, *a base)*,
- sendo as restantes $n - m$ *variáveis não-básicas* iguais a 0.

- n : número de variáveis (no exemplo, 5)
- m : número de restrições = número de vars básicas (no exemplo, 3)
- $n - m$: número de variáveis não-básicas (no exemplo, 2)

- (*) - vamos assumir que a *característica da matriz* A (número de linhas linearmente independentes) é m, porque se houver linhas linearmente dependentes podemos retirá-las antes.

Exemplo 1

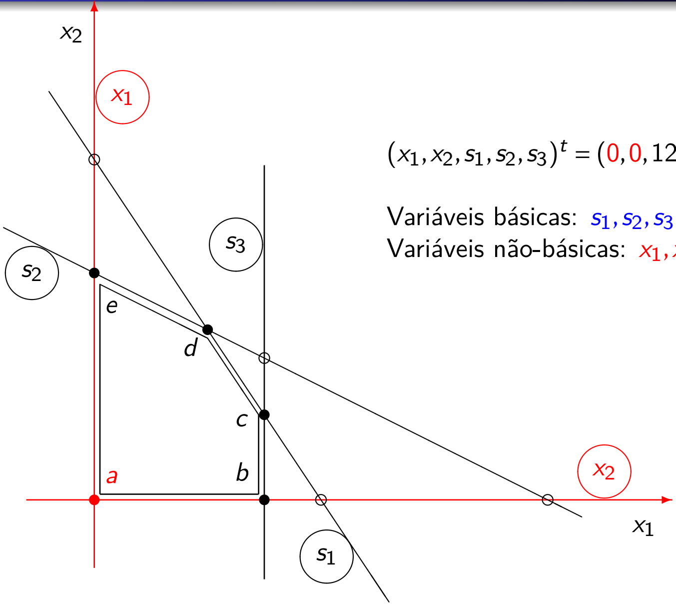
- O sistema de equações:

Vars básicas			Vars não-básicas			
$+1s_1$			$+3x_1$	$+\ 2x_2$	$=$	120
	$+1s_2$		$+1x_1$	$+\ 2x_2$	$=$	80
		$+1s_3$	$+1x_1$		$=$	30

- está resolvido em ordem a s_1, s_2 e s_3 (*variáveis básicas*).
- Sendo x_1 e x_2 (*variáveis não-básicas*) iguais a 0,
- obtém-se a solução básica $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 120, s_2 = 80$ e $s_3 = 30$.

- Esta *solução básica* corresponde ao vértice origem dos eixos, $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (0, 0, 120, 80, 30)^t$.
- A função objectivo é $z = 12x_1 + 10x_2$, e o valor desta solução é 0.

... que corresponde ao vértice $a : (x_1, x_2)^t = (0,0)^t$



$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (0, 0, 120, 80, 30)^t.$

Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3
Variáveis não-básicas: x_1, x_2

Exemplo 2

- Resolvendo o sistema de equações, usando eliminação de Gauss:

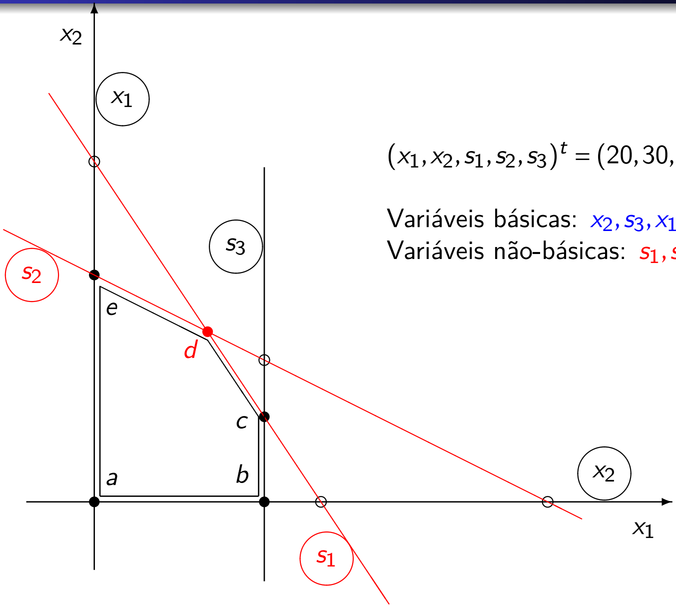
Vars básicas			Vars não-básicas			
$3x_1$	$+2x_2$		$+1s_1$		$=$	120
$1x_1$	$+2x_2$			$+\ 1s_2$	$=$	80
$1x_1$		$+1s_3$			$=$	30

- em ordem a x_1, x_2 e s_3 (variáveis básicas),
- e sendo s_1 e s_2 (variáveis não-básicas) iguais a 0,
- obtém-se a solução básica:

Vars básicas			Vars não-básicas			
$1x_1$			$+\ 0.5\ s_1$	$-\ 0.5\ s_2$	$=$	20
	$1x_2$		$-\ 0.25\ s_1$	$+\ 0.75\ s_2$	$=$	30
		$1s_3$	$-\ 0.5\ s_1$	$+\ 0.5\ s_2$	$=$	10

- $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (20, 30, 0, 0, 10)^t$.
- O valor desta solução é 540 $(= 12 \times 20 + 10 \times 30)$.

... que corresponde ao vértice $d : (x_1, x_2)^t = (20, 30)^t$



$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = (20, 30, 0, 0, 10)^t$.

Variáveis básicas: x_2, s_3, x_1
Variáveis não-básicas: s_1, s_2

Solução básica do sistema de equações (caso geral)

- O problema $\max z = cx$, suj. a $Ax = b, x \geq 0$, para um qualquer conjunto de variáveis básicas, é equivalente a:

$$\begin{array}{lcccc} \max z & = & c_B x_B & +c_N x_N & \\ \text{suj. a} & & B x_B & +\ N x_N & = b \\ & & \multicolumn{2}{c}{x_B, x_N \geq 0} & \end{array}$$

- em que o conjunto de variáveis x é partido em dois subconjuntos:

$$\begin{array}{ll} x_B \in \mathrm{IR}_+^{m\times 1} & : \text{ variáveis básicas,} \\ x_N \in \mathrm{IR}_+^{(n-m)\times 1} & : \text{ variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- o vector de custos c é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} c_B \in \mathrm{IR}^{1\times m} & : \text{ subvector de } c \text{ com os custos das variáveis básicas,} \\ c_N \in \mathrm{IR}^{1\times (n-m)} & : \text{ subvector de } c \text{ com os custos das variáveis não-básicas, e} \end{array}$$

- a matriz A é partida em duas submatrizes:

$$\begin{array}{ll} B \in \mathrm{IR}^{m\times m} & : \text{ submatriz de } A \text{ das variáveis básicas (não-singular),} \\ N \in \mathrm{IR}^{m\times (n-m)} & : \text{ submatriz de } A \text{ das variáveis não-básicas.} \end{array}$$

Resolução do sistema de equações em ordem a x_B

- Pré-multiplicando por B^{-1} as equações do sistema de equações das restrições:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

- obtém-se o valor das variáveis x_B :

$$\begin{aligned}
B^{-1}(Bx_B + Nx_N) &= B^{-1}b \\
x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\
x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N
\end{aligned}$$

- Substituindo o valor de x_B na função objectivo, o valor da função objectivo da solução x_B é:

$$\begin{aligned}
z &= c_Bx_B + c_Nx_N = \\
&= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_Nx_N = \\
&= c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N
\end{aligned}$$

Solução básica ≡ Vértice

Quando $\tilde{x}_N = 0$, a solução do sistema de equações $\tilde{x}$ é uma *solução básica*:

- $\tilde{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
- e tem um valor de função objectivo $\tilde{z} \quad = \quad c_B B^{-1} b$

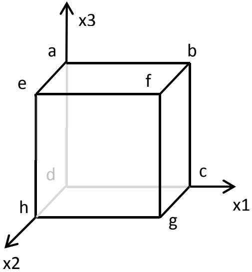
Se $\tilde{x}_B \geq 0$ então $\tilde{x}$ é uma *solução básica admissível*.

Teorema

$\tilde{x}$ é uma solução básica admissível $\iff$ $\tilde{x}$ é um vértice admissível do poliedro $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

Prova: ver esboço de prova no apêndice.

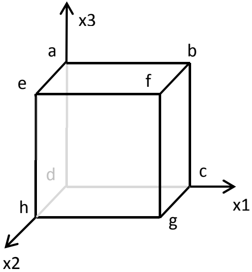
Exemplo: variáveis básicas e não-básicas de um vértice



Região admissível é o cubo:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações $(n = 6, m = 3)$.
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas: espaço com 3 dimensões.
- Quais são as variáveis não-básicas no vértice g?

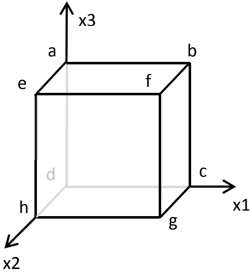


Região admissível é o cubo:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
& x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
& & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações $(n = 6, m = 3)$.
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas: espaço com 3 dimensões.
- Quais são as variáveis não-básicas no vértice g?
- São as variáveis com valor 0 nas 3 faces que definem o vértice g, *i.e.*,

Exemplo: variáveis básicas e não-básicas de um vértice



Região admissível é o cubo:

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & +s_1 & & & = & 1 \\
 & x_2 & & & +s_2 & & = & 1 \\
 & & x_3 & & & +s_3 & = & 1 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

- O sistema de equações tem 6 variáveis e 3 equações $(n = 6, m = 3)$.
- Há $n - m = 3$ variáveis não-básicas: espaço com 3 dimensões.
- Quais são as variáveis não-básicas no vértice g?
- São as variáveis com valor 0 nas 3 faces que definem o vértice g, *i.e.*,
- as variáveis x_3, s_1 e s_2.

Representação do vértice num quadro: *o quadro simplex*

- Cada quadro simplex representa uma solução básica do sistema de equações das restrições, ou seja, um vértice do poliedro.

Linhas do quadro simplex:

- O quadro simplex apresenta as m equações das restrições, e
- a equação da função objectivo, na última linha.

- Exemplo: a função objectivo $z = 12x_1 + 10x_2$ é representada como a equação:

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0$$

O quadro simplex tem uma matriz identidade $I_{m+1,m+1}$ formada:

- pelas m colunas das variáveis básicas, e
- pela coluna de z, a variável que representa a função objectivo.

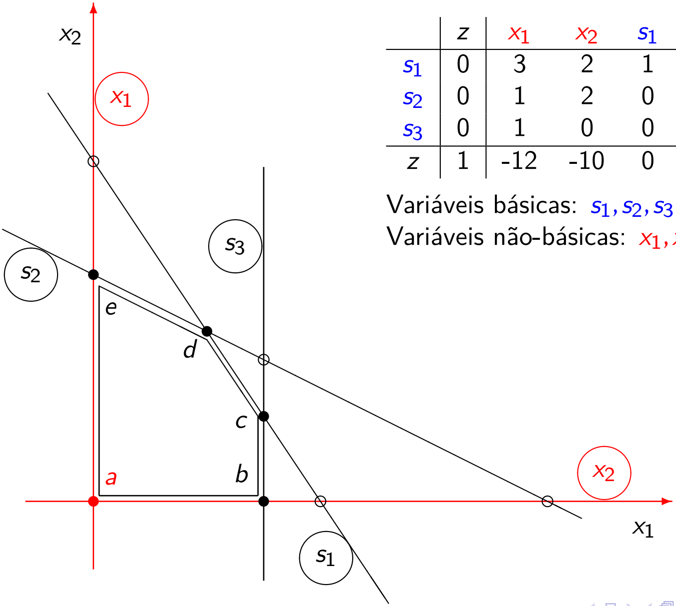
Exemplo

$$
\begin{array}{lrcrcccccl}
\max z & & & & & & & & & \\
& z & -12x_1 & - & 10x_2 & & & & = & 0 \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & +1s_1 & & & = & 120 \\
& & 1x_1 & + & 2x_2 & & +1s_2 & & = & 80 \\
& & 1x_1 & & & & & +1s_3 & = & 30 \\
& & \multicolumn{8}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- As m variáveis básicas e a f. obj. são identificadas na 1.ª coluna.
- Os respectivos valores aparecem na última coluna (lado direito).
- As restantes $(n - m)$ variáveis não-básicas têm valor 0.

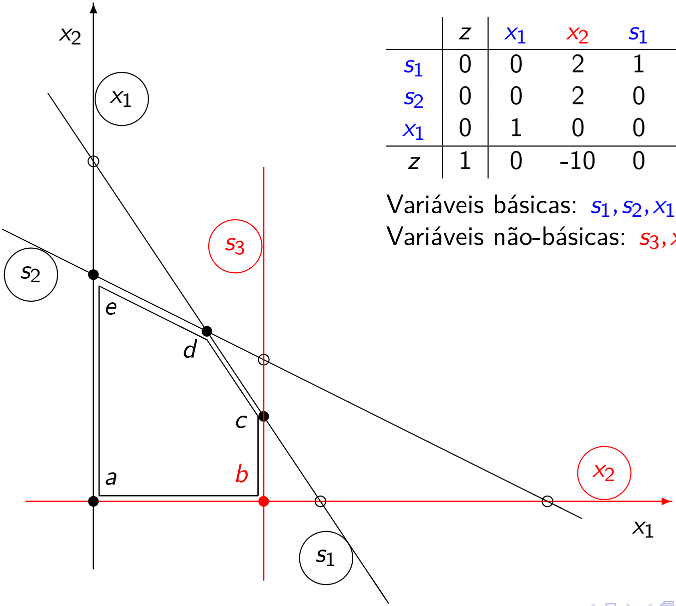
Vértice $a : (x_1, x_2)^t = (0, 0)^t$



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3
Variáveis não-básicas: x_1, x_2

Vértice $b : (x_1, x_2)^t = (30, 0)^t$

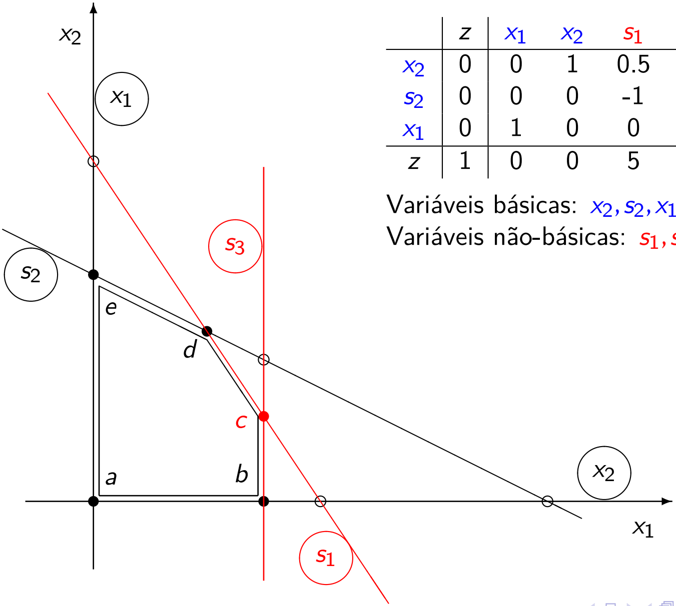


	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

Variáveis básicas: s_1, s_2, x_1

Variáveis não-básicas: s_3, x_2

Vértice $c : (x_1, x_2)^t = (30, 15)^t$

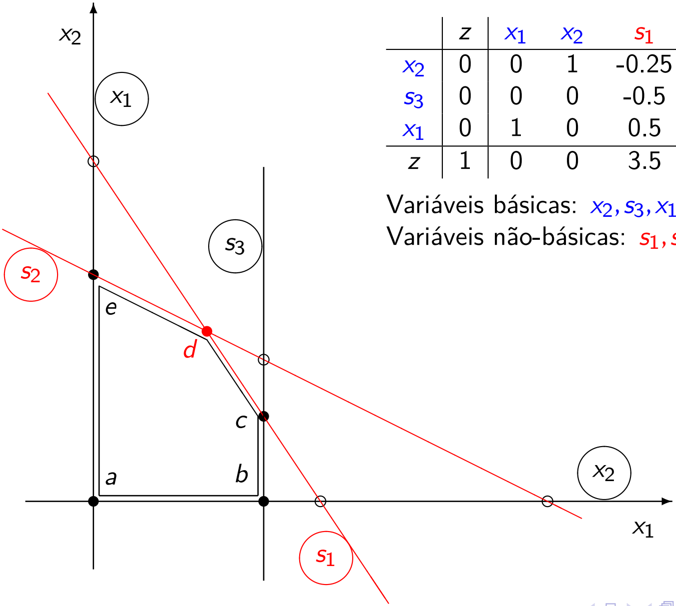


	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

Variáveis básicas: x_2, s_2, x_1

Variáveis não-básicas: s_1, s_3

Vértice $d : (x_1, x_2)^t = (20, 30)^t$



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Variáveis básicas: x_2, s_3, x_1

Variáveis não-básicas: s_1, s_2

Soluções básicas (vértices) adjacentes

Dois vértices são adjacentes, se houver apenas a troca de 2 variáveis:

- uma variável não-básica num vértice é básica no vértice adjacente
- uma variável básica num vértice é não-básica no vértice adjacente

- As restantes vars não-básicas são nulas nos dois vértices adjacentes;

- As restantes vars não-básicas são também nulas ao longo da aresta que une os dois vértices adjacentes, porque os pontos da aresta que une os vértices adjacentes x^1 e x^2 são os pontos x :

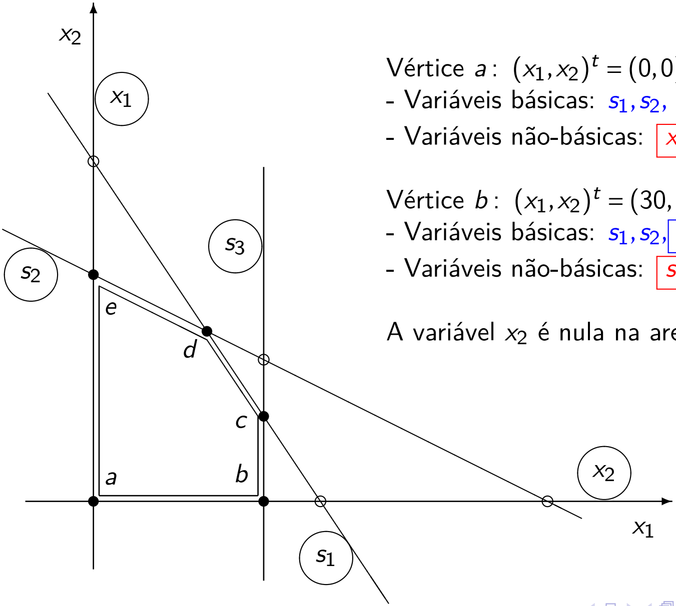
$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2, \; 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Exemplo: na aresta $\overline{ab}$, o valor de $x_2 = 0$:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^t = \lambda \; (0, 0, 120, 80, 30)^t + (1 - \lambda) \; (30, 0, 30, 50, 0)^t, \; 0 \leq \lambda \leq 1$$

(*) - Assumimos que não há degenerescência, caso em que 2 soluções básicas podem corresponder ao mesmo vértice [veremos].

Exemplo 1: o vértice b é adjacente ao vértice a



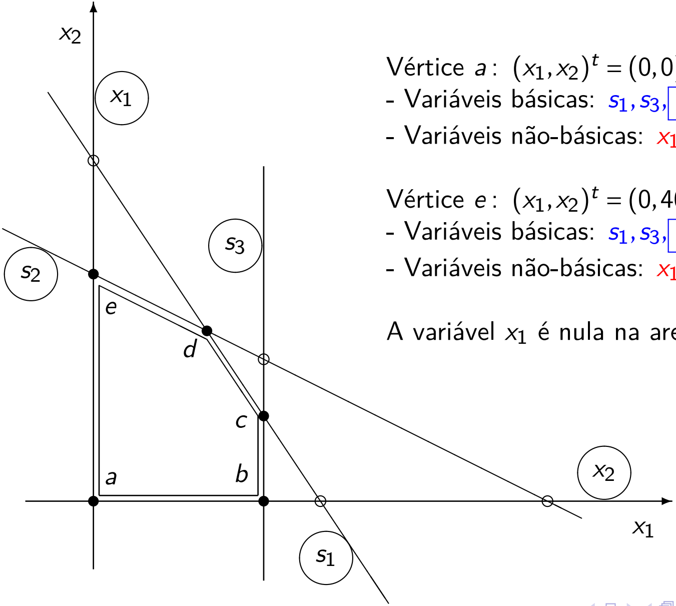
Vértice a: $(x_1, x_2)^t = (0, 0)^t$:

- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{s_3}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{x_1}, x_2$ (iguais a 0)

Vértice b: $(x_1, x_2)^t = (30, 0)^t$:

- Variáveis básicas: $s_1, s_2, \boxed{x_1}$
- Variáveis não-básicas: $\boxed{s_3}, x_2$ (iguais a 0)

A variável x_2 é nula na aresta $\overline{ab}$



Vértice a: $(x_1, x_2)^t = (0, 0)^t$:

- Variáveis básicas: $s_1, s_3, \boxed{s_2}$
- Variáveis não-básicas: $x_1, \boxed{x_2}$ (iguais a 0)

Vértice e: $(x_1, x_2)^t = (0, 40)^t$:

- Variáveis básicas: $s_1, s_3, \boxed{x_2}$
- Variáveis não-básicas: $x_1, \boxed{s_2}$ (iguais a 0)

A variável x_1 é nula na aresta $\overline{ae}$

Pivôs entre soluções básicas (vértices) adjacentes

Pivô:

- mudança de uma solução básica do sistema de equações (vértice) para uma solução básica adjacente:
  - há uma variável não-básica que entra na base (passa a básica)
  - há uma variável básica que sai da base (passa a não-básica)
- do ponto de vista algébrico, o sistema de equações é resolvido em ordem ao novo conjunto de variáveis básicas, usando *eliminação de Gauss.*

Antevisão do *método simplex:*

- o método simplex define as regras para escolher os pivôs, de modo a percorrer uma sequência de vértices admissíveis sucessivamente melhores até atingir a solução óptima.

Conclusão

- Um vértice de um poliedro convexo é caracterizado algebricamente por ser uma solução básica de um sistema de equações.
- Cada quadro simplex representa uma solução básica do sistema de equações das restrições e a função objectivo.
- O quadro simplex fornece toda a informação (algébrica) necessária ao algoritmo simplex.
- O pivô é a mudança de uma solução básica (vértice) para uma solução básica adjacente.
- Veremos o método simplex que define as regras para percorrer uma sequência de vértices admissíveis sucessivamente melhores até atingir a solução óptima.

Resultados de aprendizagem

- Transformar restrições de inequação em restrições de equação através do uso de variáveis de folga.
- Representar graficamente um modelo de programação linear com variáveis de decisão e de folga:
  - identificar os pontos em que as variáveis tomam valores positivos, nulos e negativos;
  - identificar o domínio, e relacioná-lo com a região em que as variáveis tomam valores não-negativos;
  - identificar as variáveis básicas e não-básicas em cada vértice do poliedro.
- Saber identificar o vértice do poliedro que corresponde a uma solução básica de um sistema de equações e vice-versa.
- Saber representar um sistema de equações num quadro simplex:
  - Saber caracterizar o quadro simplex, e saber reconhecer se um quadro simplex é válido (corresponde a um vértice admissível);

Apêndices

O que significa o vector $B^{-1}b$?

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.
- Os elementos de $B^{-1}b$ são as coordenadas do vector b em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$b = B\,(B^{-1}b)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 120 \\ 80 \\ 30 \end{array}} = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_3 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} * \boxed{\begin{array}{c} 20 \\ 30 \\ 10 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 120 \\ 80 \\ 30 \end{array}} = 20 \boxed{\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array}} + 30 \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 0 \end{array}} + 10 \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}}$$

$$b = 20\ \vec{v}_1 + 30\ \vec{v}_2 + 10\ \vec{v}_3$$

- ou seja, é a solução $x_B = B^{-1}b = (x_1, x_2, s_3)^t = (20, 30, 10)^t$.

O que significa o vector $B^{-1}N$?

- Da mesma forma, os elementos das colunas das variáveis não básicas representam as coordenadas das respectivas colunas iniciais em relação à base B.

1. Solução básica ≡ Vértice

$\tilde{x}$ é uma solução básica $\iff$ $\tilde{x}$ é um vértice de $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

Esboço da prova:

($\Rightarrow$) Vamos considerar uma solução básica que não seja um vértice, e pode portanto ser expressa como combinação convexa estrita de 2 pontos x^1 e x^2 de X, ambos com m coordenadas positivas e $(n-m)$ coordenadas nulas. $Ax^1 = Ax^2 = b$, pelo que $A(x^1 - x^2) = 0$, que é uma combinação linear não-nula dos m vectores, pelo que necessariamente $x^1 = x^2$, por causa da independência linear dos m vectores (contradição).

($\Leftarrow$) Vamos supor que a solução $\tilde{x}$ não é uma solução básica; temos m vectores linearmente dependentes, e é possível arranjar 2 pontos admissíveis, e exprimir a solução como combinação convexa estrita desses 2 pontos admissíveis, pelo que a solução não é um vértice. □

Fim