Capítulo 1

Indução e Recursão Estruturais

Exemplo 1: Seja C o menor[1] subconjunto de $\mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \in C$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $n+2 \in C$.

Exemplos de elementos de C são: 0, 2, 4. De facto:

- 0 é um elemento de C, por C satisfazer 1.;
- sabendo que $0 \in C$, por C satisfazer 2., segue $0+2=2 \in C$;
- sabendo que $2 \in C$, por C satisfazer 2., segue $2+2=4 \in C$.

Adiante (e como é fácil de intuir), mostraremos que C é o conjunto dos números pares.

Esta forma de definir o conjunto C é um caso particular das chamadas *definições indutivas de conjuntos*, um mecanismo muito útil para definir conjuntos (e de uso frequente em Ciências de Computação), que apresentaremos de seguida.

Definição 2: Sejam X um conjunto e B um subconjunto não vazio de X. Seja O um conjunto de *operações em* X (*i.e.*, funções do tipo $X^n \longrightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$). Um subconjunto I de X tal que

i) $B \subseteq I$ e

ii) I é *fechado* para as operações de O (*i.e.*, as operações de O quando aplicadas a elementos de I produzem elementos de I ou, por outras palavras, para cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O e para cada $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $f(x_1, ..., x_n) \in I$)

é chamado um *conjunto indutivo, sobre* X*, de base* B e *conjunto de operações* O.

Observação 3: Admitamos as suposições da definição anterior. Então:

[1] Dizemos que um conjunto A é mais pequeno que um conjunto B quando $A \subseteq B$

i) X é um conjunto indutivo para qualquer O;

ii) B é um conjunto indutivo quando $O = \emptyset$.

Donde podemos concluir que, em geral, os subconjuntos indutivos de um conjunto, para uma dada base e um dado conjunto de operações, não são únicos, pois X e B são ambos conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações $\emptyset$.

Definição 4: Sejam X um conjunto, B um subconjunto não vazio de X e O um conjunto de *operações* em X. O mais pequeno conjunto indutivo, sobre X, de base B e conjunto de operações O é chamado o *conjunto definido indutivamente* (ou *conjunto gerado*) por O em B. Chamaremos ao par (B, O) uma *definição indutiva sobre* o conjunto suporte X.

Exercício 5: Explicite X, B e O no caso do conjunto definido indutivamente no exemplo inicial.

Observação 6: Nas condições da definição anterior, demonstra-se que o conjunto G gerado por O em B é a interseção de todos os conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações O. Alternativamente, demonstra-se que os elementos de G são exatamente os objetos que podem ser obtidos a partir de B, aplicando um número finito de operações de O.

Definição 7:

1. Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos e chamaremos *letras* aos elementos de um alfabeto.
2. Dado um alfabeto A, chamaremos *palavra* (ou *string*) *sobre* o alfabeto A a uma sequência finita de letras de A. A notação A^* representará o conjunto de todas as palvras sobre A.
3. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ.
4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras $a_1, a_2, ..., a_n$ de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1a_2...a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i-ésima letra (para $1 \leq i \leq n$) é a_i.
5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras. (Em particular, a única palavra de comprimento 0 é ϵ.)
6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.

7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (*i.e.*, a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).
8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo 8: Seja A o alfabeto $\{0, s, +, \times, (,)\}$. Consideremos a linguagem E em A (E para *expressões*), definida indutivamente pelas seguintes *regras*:

1. $0 \in E$;
2. $e \in E \Rightarrow s(e) \in E$, para todo $e \in A^*$;
3. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 + e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$;
4. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 \times e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$.

Por exemplo, as palavras 0, $s(0)$, (0×0), $(s(0) + (0 \times 0))$ pertencem a E. De facto:

- $0 \in E$, pela regra 1.;
- de $0 \in E$, pela regra 2., segue $s(0)$;
- de $0 \in E$, pela regra 4., segue (0×0);
- de $s(0) \in E$ e (0×0), pela regra 3., segue $(s(0) + (0 \times 0))$.

Já as palavras sobre A $+(00)$ e $s0$ não pertencem a E. Note-se que nenhuma palavra de E tem a letra + como primeira letra e nenhuma palavra de E, com exceção da palavra 0, tem 0 como última letra.

Definição 9: Seja (B, O) uma definição indutiva sobre um conjunto suporte X de um conjunto I e seja $e \in X$. Uma *sequência de formação* de e é uma sequência finita de elementos de X na qual:

1. o último elemento é e;
2. cada elemento pertence a B ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma operação de O.

Na representação de uma sequência de formação, habitualmente, usaremos vírgulas a separar os elementos da sequência.

Exemplo 10: Retomemos o exemplo anterior. A sequência de palavras

$$0, s(0), (0 \times 0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê? Esta sequência de formação representa o essencial da justificação que apresentámos no Exemplo 8 para provar que $(s(0) + (0 \times 0))$ é uma palavra da linguagem E.

Proposição 11: Seja I um conjunto definido indutivamente, sobre um conjunto X, e seja $e \in X$. Então, e é um dos elementos de I se e somente se e admite uma sequência de formação.

Observação 12: Retomemos o Exemplo 10. A sequência de formação de $(s(0)+(0\times 0))$ que aí apresentamos não é única. Por exemplo,

$$0, (0 \times 0), s(0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é também uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê?

Na verdade, quando um objeto tem uma sequência de formação, esse objeto admite uma infinidade de sequências de formação. Por exemplo, no caso anterior, podemos aumentar o comprimento da sequência acima, tanto quanto queiramos, adicionando 0's no início da sequência.

Observação 13: A demonstração da Proposição 11, em particular, requer a ferramenta de *indução estrutural*, que estudaremos de seguida.

Teorema 14 (Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva): Considere-se uma definição indutiva (B, O) de um conjunto I sobre X e seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in I$. Se:

1. para todo $b \in B$, $P(b)$ é verdadeira;
2. para cada operação $f : X^n \to X$ de O, para todo $e_1, ..., e_n \in I$, se $P(e_1), \ldots P(e_n)$ são verdadeiras, então $P(f(e_1, \ldots, e_n))$ é verdadeira;

então para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira.

Dem.: Seja $Y = \{e \in I : P(e) \text{ é verdadeira}\}$. Então Y é um conjunto indutivo pois contém B e é fechado para as operações de O. Logo, como I é o mais pequeno dos conjuntos indutivos, $I \subseteq Y$. Como da definição de Y se tem também $Y \subseteq I$, segue que $Y = I$ e, portanto, para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira. □

Observação 15:

1. A cada definição indutiva de um conjunto I está associado um princípio de indução estrutural.

2. O usual Princípio de indução sobre os naturais é o princípio de indução estrutural associado à seguinte caracterização indutiva de $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ é o menor subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:
   (a) $1 \in \mathbb{N}$;
   (b) para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 16: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a $n \in C$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k + 2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in C$.

Consideremos a propriedade $P(n)$, relativa a $n \in C$, dada por "n é par". Provemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in C$. Pelo Princípio de indução estrutural para C, basta mostrarmos as duas condições acima descritas.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k + 2$ é também par e, portanto, $P(k + 2)$ é verdadeira. Provámos, assim, a condição 2 do Princípio de indução estrutural para C.

Para mostar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta ainda demonstrar que C contém o conjunto dos números pares. Para tal, pode provar-se, por indução em $\mathbb{N}_0$, que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)

Exemplo 17: O Princípio de indução estrutural associado à linguagem de expressões E do Exemplo 8 é o seguinte:

Seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in E$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(e)$, então $P(s(e))$, para todo $e \in E$;
3. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 + e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;
4. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 \times e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

então $P(e)$, para todo $e \in E$.

Exemplo 18: Consideremos de novo a linguagem de expressões E do Exemplo 8 e consideremos a função $np : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada expressão de E faz corresponder o número de ocorrências de parênteses nessa expressão. Esta função pode ser definida por *recursão estrutural em* E do seguinte modo:

1. $np(0) = 0$;
2. para todo $e \in E$, $np(s(e)) = 2 + np(e)$;
3. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$;
4. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

Notemos que, nos casos relativos às regras indutivas de E (os casos 2, 3 e 4), a caracterização da imagem é feita em termos da imagem da *subexpressão direta* (caso 2) ou das imagens das *subexpressões diretas* (casos 3 e 4).

Mostremos, agora, uma das propriedades das expressões de E relativa à função np. Designadamente, mostremos que, para todo $e \in E$, $np(e)$ é par. A prova será feita com recurso ao Princípio de indução estrutural para E, descrito no exemplo anterior.

Para cada $e \in E$, seja $P(e)$ a afirmação "$np(e)$ é par".

1. $P(0)$ é a afirmação "$np(0)$ é par". Ora, $np(0) = 0$, que, evidentemente, é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $e \in E$ e suponhamos que $P(e)$ é válida (a hipótese de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e)$ é par. Queremos provar que $P(s(e))$ é válida, i.e., que $np(s(e))$ é par. Ora, $np(s(e)) = 2 + np(e)$. Sendo $np(e)$ par, por H.I., e sendo a soma de dois pares um par, é óbvio que também $np(s(e))$ é par. Logo, podemos deduzir que $P(s(e))$ é válida.
3. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (as hipóteses de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e_1)$ é par, assim como $np(e_2)$. Queremos provar que $P((e_1 + e_2))$ é válida, i.e., que $np(e_1 + e_2)$ é par. Note-se que $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Por H.I., sabemos que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Como a soma de pares é também par, é claro que $np((e_1 + e_2))$ é par. Assim, pode-se concluir que $P((e_1 + e_2))$ é válida.
4. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (H.I.). Logo, $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Queremos mostrar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida, ou seja, que $np(e_1 \times e_2)$ é par. Temos que $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Ora, sabemos, por H.I., que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Consequentemente, $np((e_1 \times e_2))$ é par. Assim, podemos afirmar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida.

Mostramos assim que as condições 1, 2, 3 e 4 do Princípio de indução estrutural para E são válidas. Logo, por esse Princípio, conclui-se que $P(e)$ é verdadeira para todo o $e \in E$, ou seja, que $np(e)$ é par para todo o $e \in E$.

Exemplo 19: A definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 também permite a definição de funções por recursão estrutural. Por exemplo, existe uma e uma só função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$;
2. para todo $n \in C$, $f(n + 2) = 1 + f(n)$.

Acerca desta função, pode provar-se, com recurso ao Princípio de indução para C (ver Exemplo 1), que, para todo $n \in C$, $f(n) = \frac{n}{2}$. (Exercício.)

Observação 20: Ao contrário do que sucede em relação ao *Princípio de indução estrutural*, nem todas as definições indutivas têm um *Princípio de recursão estrutural* associado. Este princípio é válido apenas para as chamadas *definições indutivas deterministas*, classe na qual se inserem as definições indutivas de C e E, que vimos nos Exemplos 1 e 8, e que se caracterizam por permitirem *decomposições únicas* dos seus elementos.

Vejamos um exemplo de uma definição indutiva não-determinista e de problemas que surgiriam com um hipotético Princípio de recursão estrutural associado.

Tomemos a definição indutiva de C do Exemplo 1 e acrescentemos-lhe, agora, a regra:

3. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $2 \times n \in C$.

Simultaneamente, às condições que definem a função f, no exemplo anterior, acrescentemos, agora, a seguinte condição associada à regra que acabámos de introduzir:

3. para todo $n \in C$, $f(2n) = 2 + f(n)$.

O Princípio de recursão estrutural associado asseguraria que esta condição, juntamente com as condições 1 e 2 do exemplo anterior, definiriam uma função.

Mas, por exemplo, qual seria a imagem de 4 por f?

Por um lado, $f(4) = f(2 \times 2) = 2 + f(2) = 2 + f(2 + 0) = 2 + 1 + f(0) = 3 + 0 = 3$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 3 e usando a condição 3 na segunda igualdade).

Por outro lado, $f(4) = f(2+2) = 1+f(2) = 1+1 = 2$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 2 e usando a condição 2 na segunda igualdade).

Teríamos, portanto, duas imagens distintas para 4, o que é impossível. Consequentemente, o Princípio de recursão estrutural não pode ser válido para esta definição indutiva.

Capítulo 2

Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Notação 21: Normalmente, usaremos CP para abreviar Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

2.1 Sintaxe

Definição 22: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\perp, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Exemplo 23: As sequências de símbolos $\perp p_{20})$ e (p_1) (ambas de comprimento 3) são palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$. A sequência de símbolos p_1 (de comprimento 1) é também uma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$, sendo diferente da palavra (p_1).

Definição 24: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \Box \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$.

Exemplo 25: A palavra $((\neg \perp) \wedge (p_6 \to p_0))$ é uma fórmula do CP. Por exemplo,

$$\perp, (\neg \perp), p_6, p_0, (p_6 \to p_0), ((\neg \perp) \wedge (p_6 \to p_0))$$

é uma sua sequência de formação.

As palavras $\perp p_{20})$ e (p_1) não são fórmulas do CP. De facto, nenhuma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$ de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Exercício 26: Particularize o conceito de sequência de formação apresentado na Definição 9 ao caso da definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$.

Notação 27: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são muitas vezes omitidos. Por exemplo, a palavra $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$ será utilizada como uma representação da fórmula $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp)$. Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Teorema 28 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se:

a) $P(\perp)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Basta particularizar o Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva ao caso da definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$. □

Observação 29: Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP*.

Observação 30: A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é determinista e, por esta razão, admite um princípio de recursão estrutural. Uma aplicação deste princípio para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP*.

Definição 31: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\perp) = \emptyset$;

b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi\Box\psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 32:

$$\begin{aligned} & var(p_1 \to (\neg p_2 \vee \perp)) \\ = \; & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \perp) \\ = \; & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\perp) \\ = \; & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\ = \; & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = \; & \{p_1, p_2\}. \end{aligned}$$

Definição 33: A função as que a cada fórmula φ faz corresponder um elemento de $\acute{A}rvores(\mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\})$[1], ao qual chamamos a *árvore sintática* ou a *árvore de parsing* de φ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

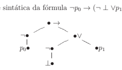
a) $as(\varphi) = \bullet\varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $as(\neg\varphi) = \begin{array}{c} \bullet\neg \\ | \\ as(\varphi) \end{array}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $as(\varphi\Box\psi) = \begin{array}{ccc} & \bullet\Box & \\ \swarrow & & \searrow \\ as(\varphi) & & as(\psi) \end{array}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

[1] Dado um conjunto X, a notação $\acute{A}rvores(X)$ representará o conjunto das árvores (finitas) cujos nodos estão anotados com um elemento de X. Observe que, na representação de árvores sintáticas, utilizamos uma orientação inversa àquela que é vulgarmente utilizada na representação da árvores, onde os *descendentes diretos* de um nodo são representados abaixo do nodo.

Exemplo 34: A árvore sintática da fórmula $\neg p_0 \to (\neg \perp \vee p_1)$ é:



Definição 35: A função $cl : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $cl(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $cl(\varphi\Box\psi) = 1 + máximo(cl(\varphi), cl(\psi))$[2], para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dada uma fórmula φ, chamaremos a $cl(\varphi)$ a *complexidade lógica* ou o *rank* de φ.

Exemplo 36:

$$\begin{aligned} & cl(p_0 \to (\neg p_1 \vee \perp)) \\ = \; & 1 + máximo(cl(p_0), cl(\neg p_1 \vee \perp)) \\ = \; & 1 + máximo(0, 1 + máximo(cl(\neg p_1), cl(\perp))) \\ = \; & 1 + 1 + máximo(cl(\neg p_1), cl(\perp)) \\ = \; & 2 + máximo(1 + cl(p_1), 0) \\ = \; & 2 + 1 + cl(p_1) \\ = \; & 3 + 0 \\ = \; & 3 \end{aligned}$$

Definição 37: A função $alt : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, que a cada fórmula φ faz corresponder a altura da sua árvore sintática[3], é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $alt(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $alt(\neg\varphi) = 1 + alt(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $alt(\varphi\Box\psi) = 1 + máximo(alt(\varphi), alt(\psi))$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dada uma fórmula φ, chamaremos a $alt(\varphi)$ a *altura* de φ.

[2] *máximo* denota a função que a cada par de números naturais faz corresponder o máximo destes números.

[3] Um *ramo* de uma árvore é uma sequência de nodos desde a sua *raiz* até uma das suas *folhas* e a *altura de uma árvore* é dada pelo comprimento máximo dos seus ramos.

Exemplo 38: Verifique que, para a fórmula φ do exemplo anterior, $alt(\varphi) - 1 = cl(\varphi)$. De facto, esta igualdade é válida para qualquer fórmula do CP, como se demonstra de seguida, com recurso ao Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade "$cl(\varphi) = alt(\varphi) - 1$", para $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) Seja $\psi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}$. Então, aplicando as definições de cl e de alt, $cl(\psi) = 0$ e $alt(\psi) = 1$. Donde, $cl(\psi) = 0 = alt(\psi) - 1$. Assim, demonstramos que $P(\psi)$ é válida, para todo $\psi \in \{\perp\} \cup \mathcal{V}^{CP}$.

b) Seja $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Queremos demonstrar que $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$.) Suponhamos que $P(\psi)$ é válida, *i.e.*, suponhamos que $cl(\psi) = alt(\psi) - 1$ (HI). Pelas definições de cl e alt, respetivamente, temos que i) $cl(\neg\psi) = 1 + cl(\psi)$ e ii) $alt(\neg\psi) = 1 + alt(\psi)$. Assim,

$$cl(\neg\psi) \underset{\text{i)}}{=} 1 + cl(\psi) \underset{\text{HI}}{=} 1 + alt(\psi) - 1 \underset{\text{ii)}}{=} alt(\neg\psi) - 1,$$

Portanto, $cl(\neg\psi) = alt(\neg\psi) - 1$, pelo que $P(\neg\psi)$ é válida.

c) Sejam $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. (Queremos demonstrar que: $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1\Box\psi_2)$.) Neste caso as hipóteses de indução são $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, *i.e.*, $cl(\psi_1) = alt(\psi_1) - 1$ e $cl(\psi_2) = alt(\psi_2) - 1$ (HI). Então, i) $cl(\psi_1\Box\psi_2) = 1 + máximo(cl(\psi_1), cl(\psi_2))$ e ii) $alt(\psi_1\Box\psi_2) = 1 + máximo(alt(\psi_1), alt(\psi_2))$, aplicando as respetivas definições. Assim,

$$cl(\psi_1\Box\psi_2) \overset{\text{i)}}{=} 1 + máximo(cl(\psi_1), cl(\psi_2)) \overset{\text{HI}}{=} 1 + máximo(alt(\psi_1) - 1, alt(\psi_2) - 1)$$

$$= 1 + máximo(alt(\psi_1), alt(\psi_2)) - 1 \underset{\text{ii)}}{=} alt(\psi_1\Box\psi_2) - 1.$$

Portanto, $cl(\psi_1\Box\psi_2) = alt(\psi_1\Box\psi_2) - 1$, pelo que $P(\psi_1\Box\psi_2)$ é válida.

De **a)**, **b)** e **c)**, pelo Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP, $P(\varphi)$ é válida para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 39: Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1\Box\varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p]\Box\varphi_2[\psi/p]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 40:

a)
$$\begin{aligned} & (\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = \; & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = \; & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1/p_2]) \\ = \; & \neg p_1 \to ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp) \end{aligned}$$

b) Verifique que $(\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_0] = (\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))$. Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue (observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))$).

Proposição 41: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) □

Definição 42: A função $subf : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $subf(\varphi\Box\psi) = \{\varphi\Box\psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Exemplo 43:

$$\begin{aligned} & subf(\neg p_1 \to p_2) \\ = \; & \{\neg p_1 \to p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\ = \; & \{\neg p_1 \to p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\ = \; & \{\neg p_1 \to p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = \; & \{\neg p_1 \to p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}. \end{aligned}$$

Proposição 44: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\psi = \varphi$;

b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg\psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1;

c) existe um conetivo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e existem fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1\Box\psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2.

Dem.: Por análise de casos em ψ.

Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$. Então,

$$\begin{array}{ll} & \varphi \text{ subfórmula de } \psi \\ \text{sse} & \varphi \in subf(\psi) \\ \text{sse} & \varphi \in \{\psi\} \\ \text{sse} & \varphi = \psi. \end{array}$$

Assim, supondo que φ é uma subfórmula de ψ, teremos que a condição **a)** é satisfeita. Reciprocamente, uma vez que $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$, as condições **b)** e **c)** não são satisfeitas, pelo que teremos que ter $\varphi = \psi$, donde, pela sequência de equivalências anterior, segue que φ é uma subfórmula de ψ.

Restantes casos (caso $\psi = \neg\psi_1$, para algum $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, e caso $\psi = \psi_1\Box\psi_2$, para algum $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para alguns $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$): exercício. □

2.2 Semântica

Definição 45: Os *valores lógicos* do CP são 1 e 0. Estes valores são habitualmente chamados *verdadeiro* e *falso*, respetivamente, sendo também notados por **V** e **F**, respetivamente.

Definição 46: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $v(\varphi \wedge \psi) = mínimo(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $v(\varphi \vee \psi) = máximo(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição 47: Sejam v uma valoração e φ, ψ fórmulas do CP. Então,

1. se $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e se $v(\varphi) = 0$, então $v(\neg\varphi) = 1$;

2. se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \to \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$;
3. se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \to \psi) = 0$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;
4. se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \to \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;
5. se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 0$, $v(\varphi \to \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$.

Dem.: Imediata, a partir da definição de valoração. □

Proposição 48: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. □

Definição 49: O *valor lógico de uma fórmula* φ *para uma valoração* v *é* $v(\varphi)$.

Exemplo 50: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$. Então:

a) por definição de valoração,

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 1 \text{ e } v_1(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 0 \text{ ou } v_1(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases} .$$

Assim, como $v_1(p_1 \vee p_2) = máximo(v_1(p_1), v_1(p_2)) = máximo(0, 0) = 0$, segue que $v_1(\varphi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) por definição de valoração,

$$v_1(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_1(\neg p_1) = v_1(p_1 \to \perp) \\ 0 & \text{se } v_1(\neg p_1) \neq v_1(p_1 \to \perp) \end{cases} .$$

Assim, como $v_1(\neg p_1) = 1 - v_1(p_1) = 1$ e $v_1(p_1 \to \perp) = 1$, segue que $v_1(\psi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.)

Proposição 51: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade: para todo $p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.

b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in var(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$. Assim, como $p' \in var(p')$, temos $v_1(p') = v_2(p')$. Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$. Então, como $var(\varphi_i) \subseteq var(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi_i)$ $(i \in \{1, 2\})$ e, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_i) = v_2(\varphi_i)$ $(i \in \{1, 2\})$.

Assim, $v_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = mínimo(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = mínimo(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é verdadeira.

d) Exercício: demonstrar as restantes condições necessárias à aplicação do Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP. □

Definição 52:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.
2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

Notação 53: A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia e a notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo 54:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e:
   (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \to \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.
   (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \to \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.
2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:

(a) caso $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = mínimo(0, v(\neg\varphi)) = 0$.

(b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = mínimo(v(\varphi), 0) = 0$.

3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \to p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem são contradições. (Porquê?)

Proposição 55: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. □

Observação 56: Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição e, analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia. Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Observação 57: Pela Proposição 51, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\#var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ), o que pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue. Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ. Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo 58: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$. Da tabela de verdade para φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \to \neg p_2$	$p_2 \to p_1$	$(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$.

Teorema 59 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ, do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p' = p \\ v(p') & \text{se } p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. □

Exemplo 60: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg\psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 61: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo 62: Para toda a fórmula φ,$\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to \perp)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \to \perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1. Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 63: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde, pela definição de valoração, $v(\varphi \leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. (Exercício: mostrar 2 e 3.) □

Corolário 64: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$.
Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. □

Proposição 65: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$
(*associatividade*)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$
(*comutatitvidade*)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$
(*idempotência*)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$$
(*elemento neutro*)

$$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp \qquad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$
(*elemento absorvente*)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$
(*distributividade*)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$
(*leis de De Morgan*)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$$
(*lei da dupla negação*)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \qquad \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp \qquad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$
(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Dem.: Exercício. □

Notação 66: Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através

da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção é tambem uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Teorema 67 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ se e só se para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$, *i.e.*, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a propriedade: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Por definição de substituição, $\perp[\varphi_1/p] = \perp = \perp[\varphi_2/p]$. Assim, como a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, $\perp \Leftrightarrow \perp$, ou equivalentemente $\perp[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \perp[\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\perp)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.
Seja v uma valoração. Então:

$$\begin{array}{lll} & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) & \\ = & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) & \text{(definição de substituição)} \\ = & 1 - v(\psi_1[\varphi_1/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ = & 1 - v(\psi_1[\varphi_2/p]) & (*) \\ = & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ = & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) & \text{(definição de substituição).} \end{array}$$

onde a igualdade assinalada com (*) é consequência da HI, pois da HI, por definição de $\Leftrightarrow$, segue que $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, para toda a valoração v, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

d) Para completar a prova, falta mostar que, para $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \Box \psi_2)$. (Exercício.)

□

Exemplo 68: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Justificações

(1) Lei de De Morgan.
(2) Dada uma variável proposicional $p \notin var(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi \vee \psi$ e $(p \vee \psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula.

Definição 69: Seja $X \subseteq \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos. X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ estão em X.

Proposição 70: Os conjuntos de conetivos $\{\to, \neg\}$, $\{\to, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\to, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

a) $f(\perp) = \neg(p_0 \to p_0)$;

b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $f(\varphi \to \psi) = f(\varphi) \to f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \to f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \to \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \to f(\psi)) \to \neg(f(\psi) \to f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\to, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício.

Do lema anterior concluimos de imediato que $\{\to, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos, pois, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$— tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão no conjunto $\{\to, \neg\}$. □

Exemplo 71: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp) = \neg(\neg p_1 \to \neg p_2) \to \neg(p_0 \to p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\to, \neg\}$.

Definição 72: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 73: Fórmulas do CP das formas

i) $(l_{11} \vee ... \vee l_{1m_1}) \wedge ... \wedge (l_{n1} \vee ... \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge ... \wedge l_{1m_1}) \vee ... \vee (l_{n1} \wedge ... \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, pertencem a $\mathbb{N}$, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 74:

a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.

d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 75: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma formal normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.
Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$, $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Exemplo 76: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0$. Então:

i)
$$\begin{array}{ll} & \varphi \\ \Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0 \end{array}$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)
$$\begin{array}{lll} & \varphi & \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 & \text{por } \mathbf{i)} \\ \Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), & \end{array}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 77: Consideremos de novo a Proposição 75 e a sua demonstração. Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ, pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ. Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d, logicamente equivalente a φ, a partir da tabela de verdade de φ.

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma taotologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.

- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ[4]. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha i →	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } j \in \{1, \ldots, n\})$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$ [5]

Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ. (Exercício.)

Exemplo 78: Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ. A tabela de verdade de φ é:

[4] Note-se que uma fórmula que não é tautologia nem é contradição terá que ter pelo menos uma variável proposicional. (Exercício)

[5] Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0.

	p_1	p_2	p_3	$\perp$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \perp$	ψ	φ
linha 1 →	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 →	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 →	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1, a 2 e a 6. Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 79: Seja v uma valoração.

1. Dizemos que v *satisfaz uma fórmula do CP* φ , e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$. Quando v *não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$, escrevemos $v \not\models \varphi$).
2. Dizemos que v *satisfaz um conjunto de fórmulas do CP* Γ, e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ. Quando v *não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 80: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula);
5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula).

Observação 81: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que, para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

Definição 82: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando existe alguma valoração que satisfaz Γ.

2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

Exemplo 83:

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0, mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também consistente.

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.
Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3. Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição 84: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. □

Definição 85: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjnunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, *i.e.*, quando existe alguma valoração v t.q. $v \models \Gamma$ e $v \not\models \varphi$.

Observação 86: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se existe alguma valoração v tal que, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 87:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:

   (a) $\Gamma \models p_1$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)

   (b) $\Gamma \models p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)

   (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)

   (d) $\Gamma \not\models p_3$. (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)

   (e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg p_2$. (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)

   (f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3)$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)

2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}, \{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2.

Proposição 88: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.
Dem.: Suponhamos que φ é uma tautologia. Então, para toda a valoração v, $v \models \varphi$ e, assim, de imediato, a implicação "$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$" é verdadeira, pelo que, $\emptyset \models \varphi$.
Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária. Pretendemos mostrar que $v(\varphi) = 1$. Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (Observação 81). Assim, da suposição, segue $v \models \varphi$, ou seja, $v(\varphi) = 1$. □

Observação 89: Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?) Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ.

Notação 90: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula. Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ, escrevemos:

a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;

c) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 91: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ. Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ. Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

c) Exercício.

d) ⇒) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ (*). Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$ (**). Logo, de (*) e (**), por definição de valoração, $v(\psi) = 1$.

⇐) Exercício.

e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ (*) e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$ (**). Logo, de (*) e (**), por definição de valoração, $v(\psi) = 1$. □

Proposição 92: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. □

Proposição 93 (Redução ao absurdo): Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

⇒) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ (*). Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com (*). Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

⇐) Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, seguiria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. □