UNIVERSIDADE DO MINHO — 23 de Janeiro de 2009

Álgebra Linear

2º Teste - A

LEI — Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. Para cada resposta **incorrectamente assinalada** *desconta-se* 20% *do seu valor.*

1. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) A matriz A tem um valor próprio duplo. V F

b) Tem-se $|A - 3I_3| = 0$. V F

c) Existe $x \in \mathbb{R}^3,\ x \neq 0$, tal que $Ax = 3x$. V F

d) O vector $(0, 0, 3)$ é solução do sistema homogéneo cuja matriz dos coeficientes é $A - 3I$. V F

2. Sendo A e B duas matrizes $n \times n$ invertíveis quaisquer, tais que $n > 1$ e $AB = I_n$, tem-se

a) $|A| = 1$ e $|B| = 1$. V F

b) $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$. V F

c) $|A| = \dfrac{1}{|B|}$. V F

d) $|2(AB)^T| = 2|AB|$. V F

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$. V F

b) A matriz A é diagonalizável. V F

c) Se A for a matriz de uma aplicação linear f, definida relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$, tem-se $f(x, y, z) = (x + y + z, y - z, -y + z)$. V F

d) Se A for a matriz de uma aplicação linear f, definida relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$, então f é injectiva. V F

4. Seja (e_1, e_2, e_3, e_4) a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Se f é a aplicação linear definida em $\mathbb{R}^4$ por $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_2 - 3e_3$, $f(e_3) = e_1$ e $f(e_4) = e_4$, então

a) $f(e_1 + 2e_2 - e_3 + 3e_4) = 0$. V F

b) $f(1, 1, 1, 1) = (2, 2, -3, 4)$. V F

c) $\dim\,(\mathrm{Im}(f)) = 4$. V F

d) não existe um vector $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. V F

(v.s.f.f.)

II

Responda à questão deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Considere a matriz A definida por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$$

Mostre que o determinante de A é igual a zero para qualquer valor real de a, b e c.

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcule os valores próprios da matriz A.
Indique o valor das respectivas multiplicidades algébricas.

b) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio de maior módulo determinado na alínea anterior.
Indique o valor da multiplicidade geométrica desse valor próprio.

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z)$$

a) Mostre que a aplicação f é linear.

b) Determine a matriz da aplicação linear f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

c) Determine o núcleo da aplicação e a sua dimensão.

d) Verifique se a aplicação é sobrejectiva.

4. Sejam λ_1 e λ_2 valores próprios distintos de uma matriz A. Mostre que, se u_1 é um vector próprio associado a λ_1 e u_2 é um vector próprio associado a λ_2, então u_1 e u_2 são vectores linearmente independentes.

Cotações	Parte I	Parte II - 1	Parte II - 2	Parte II - 3	Parte II - 4
	8	2	1.5 + 2	1.5+1+1.5+1	1.5