



Exercício 4.1 Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um gráfico possível de g , em cada um dos seguintes casos:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$;
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$, $D_g = [-1, 4]$;
c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 4$, $D_g =]-1, 4[$, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty$.

Exercício 4.2 Calcule os limites que se seguem:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$
b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x + 2}$ i) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x}{1 - \cos x}$ p) $\lim_{x \rightarrow 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{|\sin x|}$ q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cos x)$
d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sin 3x}$ r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x - 7}$
e) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x + 3|}{x + 3}$ l) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ s) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(2x) + x^2 \cos(5x))$
f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}$ t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 2x + 1}{-3x + 1}$
g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ u) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 10}{x^4 - 2x + 4}$

Exercício 4.3 Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e determine o seu valor.

Exercício 4.4 Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$

- a) Diga, justificando, se f é contínua em π .
b) Indique dois pontos do domínio onde f seja descontínua.

Exercício 4.5 Determine o conjunto dos pontos em que cada uma das seguintes funções é contínua:

- a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$ d) $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercício 4.6 Em cada alínea, apresente uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo conjunto dos pontos de continuidade é:

- a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) $[0, 1]$; e) $\{0\}$;
 b) \emptyset ; d) \mathbb{Z} ; f) $]0, 1[$.

Exercício 4.7 Estude a continuidade das funções definidas por:

- a) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
 b) $g(x) = \begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ d) $k(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercício 4.8 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a & \text{se } x \leq 1, \\ 1 - ax & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua.

Exercício 4.9 Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

- a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;
 b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;
 c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Exercício 4.10 Seja, $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Verifique que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

Exercício 4.11 Para cada uma das funções polinomiais definidas a seguir, encontre $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algum $x \in]z, z + 1[$:

- a) $f(x) = x^3 - x + 3$;
 b) $f(x) = x^5 + x + 1$;
 c) $f(x) = -2x^3 + 10x - 1$.

Exercício 4.12 Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

- a) $x = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
 b) $x = -\ln x$, $x \in]0, 1]$;
 c) $2 + x = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.13 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

- a) Mostre que f possui um *ponto fixo*, isto é, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$.
 b) Dê exemplo de uma função contínua, $f : [0, 1[\longrightarrow]0, 1[$, sem ponto fixo.

Exercício 4.14 Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

- a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;
 b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e descontínua tal que f^2 e f^3 sejam contínuas;
 c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que $g(x) = f(x) + \sin x$ é contínua.

Exercício 4.15 Considere a função $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

Exercício 4.16 Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

- a) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua então $g \circ f$ não é contínua;
- b) se $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada;
- c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\ln(x^3) = x$;
- d) se $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que $0 \leq f(x) \leq 2$ para todo $x \in [0, 1]$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 2c$;
- e) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo;
- f) uma função $f : [0, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;
- g) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua num ponto a , então f também é contínua em a .

Exercício 4.17 Em cada uma das alíneas esboce, se possível, o gráfico de uma função f definida em $[0, 1]$ e satisfazendo as condições dadas:

- a) f contínua em $[0, 1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1;
- b) f contínua em $[0, 1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo;
- c) f contínua em $]0, 1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$;
- d) f contínua em $[0, 1]$ assume os valores -1 e 1 mas não assume o valor 0;
- e) f contínua em $[0, 1]$ com valor mínimo 1 e valor máximo 1;
- f) f contínua em $[0, 1]$, não constante, não assume valores inteiros;
- g) f contínua em $[0, 1]$ não assume valores racionais;
- h) f contínua em $[0, 1]$ assume um valor máximo, um valor mínimo e todos os valores intermédios;
- i) f contínua em $[0, 1]$ assume apenas dois valores distintos;
- j) f contínua em $]0, 1[$ assume apenas três valores distintos;
- k) f não contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado;
- l) f não contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado;
- m) f contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo não limitado;
- n) f não contínua em $[0, 1]$ tem por imagem o intervalo $[0, +\infty[$;
- o) f não contínua em $[0, 1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.