Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise
2016/2017

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Folha 8

Exercício 8.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\ d(x,y,z)$ com $\mathcal{D}=[0,2]^3$;

b) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x+y}\ dV$, com $\mathcal{D}=[0,1]^3$;

c) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} xy\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}$;

d) $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\ dV$, com $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 3\}$.

Exercício 8.2 Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z=a-x^2-y^2$, com $a>0$, e pelo plano XOY.

Exercício 8.3 Apresente um integral triplo que expresse o volume do elipsoide definido pela equação $4x^2+4y^2+z^2=16$.

Exercício 8.4 Faça um esboço da região de integração e reescreva o integral com ordem de integração $dx\,dy\,dz$:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)\ dz\,dy\,dx$.

Exercício 8.5 Calcule, mudando eventualmente a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_1^3 \operatorname{sen} y^2\ dz\,dy\,dx.$$

Exercício 8.6 Considerando $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y\geq 0,\ \sqrt{x+y}+1\leq z\leq 2\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\,d(x,y,z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}.\\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2,v^2,w)\end{array}$$

Exercício 8.7 Considere o conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x + 2y + z \le 2,\ 0 \le x + y - z \le \tfrac{\pi}{4},\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

a) Calcule o volume de $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{x+2y+z}\, d(x,y,z)$.

Exercício 8.8 Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Exercício 8.9 Seja $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\ 2 \le z \le 3\right\}$. Use coordenadas cilíndricas para determinar

$$\iiint_{\mathcal{D}} z e^{x^2+y^2}\ d(x,y,z).$$

Exercício 8.10 Seja $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 4 - (x^2+y^2)\right\}$. Calcule, usando coordenadas cilíndricas,

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x+y)\, d(x,y,z).$$

Exercício 8.11 Seja $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2 + y^2 \le 9\right\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.

Exercício 8.12 Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ e à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exercício 8.13 Considere a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas condições $1 \le \rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{3}$.

a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} d(x,y,z)$.

Exercício 8.14 Calcule o volume de $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 6,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 4 - y^2\right\}$.

Exercício 8.15 Calcule o volume das regiões limitadas

a) pelas superfícies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;

b) pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 12 - x^2 - y^2$;

c) pelo plano $x = 1$ e pelo parabolóide $y^2 + z^2 = 4x$;

d) pelo plano $x = 9$ e pelo parabolóide elíptico $4y^2 + 9z^2 = 4x$;

e) pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelas superfícies cilíndricas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Exercício 8.16 Calcule o volume da esfera em $\mathbb{R}^4$ de raio $r > 0$.