

6.

Exercício 6.1

a)

`PontoCritico[x^2 + y^4, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de mínimo.

b)

`PontoCritico[2 - x - y^2, {x, y}]`

Não tem pontos críticos.

c)

`PontoCritico[x y, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

d)

`PontoCritico[x^2 y^2, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, y\}$ é ponto de mínimo.

O ponto crítico $\{x, 0\}$ é ponto de mínimo.

Exercício 6.3

a)

`PontoCritico[x^2 - y^2 + x y, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

b)

`PontoCritico[x y - x^2 - y^2, {x, y}]`

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de máximo.

c)

PontoCritico[$x^2 + y^2 + 2xy$, { x , y }]

O ponto crítico $\{x, -x\}$ é ponto de mínimo.

d)

PontoCritico[$x^2 + y^2 + 3xy$, { x , y }]

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

e)

PontoCritico[**Exp**[$1 + x^2 - y^2$], { x , y }]

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

f)

PontoCritico[$2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$, { x , y }]

O ponto crítico $\left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{-1, -2\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{-1, 2\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de mínimo.

g)

PontoCritico[$x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$, { x , y }]

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

h)

PontoCritico[$3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$, { x , y }]

O ponto crítico $\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$ é ponto de mínimo.

i)

f[x _, y _] = $y + x \sin[y]$;

O ponto crítico $\{-1, 2k\pi\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{1, \pi + 2k\pi\}$ é ponto de sela.

j)

$$f[x_, y_] = \text{Cos}[x^2 + y^2];$$

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$ é ponto de mínimo.

O ponto crítico $\{0, \sqrt{\pi}\}$ é ponto de mínimo.

k)

$$\text{PontoCritico}[\text{Exp}[x] \text{Cos}[y], \{x, y\}]$$

Não tem pontos críticos.

l)

$$\text{PontoCritico}[xy(1-x-y), \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, 1\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{1, 0\}$ é ponto de sela.

m)

$$\text{PontoCritico}[(x-y)(xy-1), \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{-1, -1\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{1, 1\}$ é ponto de sela.

n)

$$\text{PontoCritico}[xy + 1/x + 1/y, \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{1, 1\}$ é ponto de mínimo.

o)

$$\text{PontoCritico}[(x+y)(xy+1), \{x, y\}]$$

O ponto crítico $\{-1, 1\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{1, -1\}$ é ponto de sela.

p)

PontoCritico[($x^2 + 3y^2$) **Exp**[$1 - x^2 - y^2$], { x, y }]

O ponto crítico $\{-1, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, -1\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{0, 0\}$ é ponto de mínimo.

O ponto crítico $\{0, 1\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{1, 0\}$ é ponto de sela.

q)

PontoCritico[$x^2 + y^2 + z^2 + xy$, { x, y, z }]

O ponto crítico $\{0, 0, 0\}$ é ponto de mínimo.

r)

PontoCritico[$x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4$, { x, y, z }]

O ponto crítico $\{0, 0, 0\}$ é ponto de máximo.

O ponto crítico $\{0, 0, \frac{2}{3}\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, \frac{2}{3}, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, 0, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\}$ é ponto de sela.

O ponto crítico $\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ é ponto de mínimo.

s)

PontoCritico[**Exp**[**x**² + **y**² + **z**²], {**x**, **y**, **z**}]

O ponto crítico {0, 0, 0} é ponto de mínimo.

Exercício 6.5

a)

MaxMin[**Log**[**x y**], 2 **x** + 3 **y**, 5, {**x**, **y**}]

O máximo é $\text{Log}\left[\frac{25}{24}\right]$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right\}$. Não tem mínimo.

b)

MaxMin[**x**² + **y**², **x**/2 + **y**/3, 1, {**x**, **y**}]

O mínimo é $\frac{36}{13}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right\}$. Não tem máximo.

c)

MaxMin[**x y**, **x**² + **y**², 4, {**x**, **y**}]

O máximo é 2 e é atingido nos pontos do conjunto $\{ \{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, \{\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \}$.

O mínimo é -2 e é atingido nos pontos do conjunto $\{ \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \}$.

d)

MaxMin[**x y**, **x** + **y**, 1, {**x**, **y**}]

O máximo é $\frac{1}{4}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Não tem mínimo.

e)

MaxMin[**x**³ + **y**³, **x**² + **y**², 1, {**x**, **y**}]

O máximo é 1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{ \{0, 1\}, \{1, 0\} \}$.

O mínimo é -1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{ \{-1, 0\}, \{0, -1\} \}$.

f)

MaxMin[**x**² - **y**², **x**² + **y**², 1, {**x**, **y**}]

O máximo é 1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{ \{-1, 0\}, \{1, 0\} \}$.

O mínimo é -1 e é atingido nos pontos do conjunto $\{ \{0, -1\}, \{0, 1\} \}$.

g)

$$\text{MaxMin}[2x + y, x^2 + 4y^2, 1, \{x, y\}]$$

O máximo é $\frac{\sqrt{17}}{2}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{2\sqrt{17}}\right\}$.

O mínimo é $-\frac{\sqrt{17}}{2}$ e é atingido no ponto $\left\{-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{2\sqrt{17}}\right\}$.

h)

$$\text{MaxMin}[xy, 9x^2 + y^2, 4, \{x, y\}]$$

O máximo é $\frac{2}{3}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right\}\right\}$.

O mínimo é $-\frac{2}{3}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right\}\right\}$.

i)

$$\text{MaxMin}[4x^2 + y^2 + 5z^2, 2x + 3y + 4z, 12, \{x, y, z\}]$$

O mínimo é $\frac{120}{11}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{5}{11}, \frac{30}{11}, \frac{8}{11}\right\}$; não tem máximo.

j)

$$\text{MaxMin}[z, x^2 + y^2 + z, 5, x + y + z, 1, \{x, y, z\}]$$

O máximo é 3 e é atingido no ponto $\{-1, -1, 3\}$.

O mínimo é -3 e é atingido no ponto $\{2, 2, -3\}$.

k)

$$\text{MaxMin}[x + 3y + 5z, x^2 + y^2 + z^2, 1, \{x, y, z\}]$$

O máximo é $\sqrt{35}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\right\}$.

O mínimo é $-\sqrt{35}$ e é atingido no ponto $\left\{-\frac{1}{\sqrt{35}}, -\frac{3}{\sqrt{35}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right\}$.

l)

$$\text{MaxMin}[x + 2y, x + y + z, 1, y^2 + z^2, 4, \{x, y, z\}]$$

O máximo é $1 + 2\sqrt{2}$ e é atingido no ponto $\{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

O mínimo é $1 - 2\sqrt{2}$ e é atingido no ponto $\{1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

m)

$$\text{MaxMin}[3x - y - 3z, x + y - z, 0, x^2 + 2z^2, 1, \{x, y, z\}]$$

O máximo é $2\sqrt{6}$ e é atingido $\left\{\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}$

O mínimo é $-2\sqrt{6}$ e é atingido $\left\{\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}$

Exercício 6.6

O mínimo é 0 e é atingido em todos os pontos do

conjunto $\{(x, y) \in [0, 2\pi]^2 : y = x + \frac{\pi}{2} \vee y = \frac{3\pi}{2} - x \vee y = x - \frac{3\pi}{2} \vee y = \frac{7\pi}{2} - x\}$.

O máximo é 2 e é atingido nos pontos $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 2\pi), (\frac{3\pi}{2}, \pi)$.

Exercício 6.7

a)

O mínimo é 0 e é atingido em $(0, 0)$.

O máximo é 1 e é atingido em todos os pontos da fronteira.

b)

O mínimo é 0 e é atingido em $(0, 0)$.

O máximo é $\frac{3}{2}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Exercício 6.8

$$\text{MaxMin}[xyz, x + y + z, 100, \{x, y, z\}]$$

O máximo é $\frac{1\,000\,000}{27}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right\}$.

Exercício 6.9

$$\text{MaxMin}[x + y + z, xyz, 8, \{x, y, z\}]$$

O mínimo é 6 e é atingido no ponto $\{2, 2, 2\}$.

Exercício 6.10

$$\text{MaxMin}[x^2 + y^2 + z^2, x + y + z, 13, \{x, y, z\}]$$

O mínimo é $\frac{169}{3}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right\}$.

Exercício 6.11

$$\text{MaxMin}[(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2, 2x - y + z, 1, \{x, y, z\}]$$

O mínimo é $\frac{49}{6}$ e é atingido no ponto $\left\{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right\}$.

Exercício 6.12

$$\text{MaxMin}[y, 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y, 0, \{x, y\}]$$

O máximo é $\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{10}(10 - 3\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{5})\right\}$.

O mínimo é $\frac{1}{2}(-2 - \sqrt{5})$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{1}{10}(10 + 3\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{5})\right\}$.

Exercício 6.13

$$\text{MaxMin}[(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2, x^2 + y^2 - z^2, 0, \{x, y, z\}]$$

O máximo é $\frac{5}{2}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\right\}$.

O mínimo é $\frac{5}{2}$ e é atingido nos pontos do conjunto $\left\{\left\{\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\right\}$.

Exercício 6.14

$$\text{MaxMin}[x^2 + y^2 + z^2, 2x - y + 2z, 20, \{x, y, z\}]$$

O mínimo é $\frac{400}{9}$ e é atingido no ponto $\left\{\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right\}$.

Exercício 6.15

`MaxMin[2 x y + 2 y z + 2 x z, x y z, 27, {x, y, z}]`

O mínimo é 54 e é atingido no ponto {3, 3, 3}.

Exercício 6.16

`MaxMin[x y z, 2 x y + 2 y z + 2 x z, 24, {x, y, z}]`

O máximo é 8 e é atingido no ponto {2, 2, 2}.

O mínimo é -8 e é atingido no ponto {-2, -2, -2}.