LEI **Exercícios extra sobre EDPs** **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**

Dezembro 2013

Notação: u_{xx} significa $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1. Considere a EDP $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Escreva a EDP nas coordenadas $s = x, \ \ t = x - y$.
   (b) Determine a solução geral da EDP.

2. Considere a equação de onda
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$
com $(x, t) \in \mathbb{R}^2, \ \ u \in C^2(\mathbb{R})$.
   (a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct)$ é solução da EDP, com $f \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrária.
   (b) Fazendo a substituição de variável $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, mostre que a solução geral da equação de onda é dada por
$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$
   onde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrárias.

3. Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostre que:
   (a) Se f e g são funções pares então fg é uma função par.
   (b) Se f e g são funções ímpares então fg é uma função par.
   (c) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então fg é uma função ímpar.

4. Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções:
   (a) $f(x) = |x|, \ \ -1 < x < 1$, f 2-periódica.
   (b) $f(x) = x, \ \ -\pi < x < \pi$, f π-periódica.

5. Determine as extensões par e ímpar 2π-periódicas de cada uma das funções $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ dadas por:
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
   (c) $f(x) = \sin(2x)$

6. Determine a série de Fourier de senos de:
   (a) $f(x) = -1, \ \ 0 < x < 1$
   (b) $f(x) = x(\pi - x), \ \ 0 < x < \pi$

7. Determine a série de Fourier de co-senos de:
   (a) $f(x) = \pi - x, \ \ 0 < x < \pi$
   (b) $f(x) = e^x, \ \ 0 < x < 1$

8. Consider a função
$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$
   (a) Determine e represente graficamente a série de Fourier de f.
   (b) Mostre que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

9. Consider a função
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
   (a) Determine e represente graficamente a série de Fourier de f.
   (b) Mostre que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

10. Considere as funções $\phi_n, \psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\psi_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $\;n, m \in \mathbb{N}, \quad L > 0$.
   (a) Mostre que ϕ_n e ψ_m são funções periódicas determinando o seu período.
   (b) Mostre que ϕ_n e ψ_m são funções ortogonais em $[-L, L]$ i.e. que
$$\int_{-L}^{L} \phi_n(x)\psi_m(x) = 0$$

11. Considere $f \in C(\mathbb{R})$ $2L-$periódica. Mostre que:
   (a) Se f é par, então a sua série de Fourier é uma série de co-senos.
   (b) Se f é ímpar, então a sua série de Fourier é uma série de senos.

12. Considere o problema misto para a equação de difusão (problema da condução do calor):
$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{1}$$
   onde $f \in C(\mathbb{R})$. Usando o formulário, determine a solução formal do problema com $\alpha^2 = 3, \quad L = \pi$ e
   (a) $f(x) = \sin x - 6\sin(4x)$
   (b) $f(x) = \sin x - 7\sin(3x) + 5\sin(5x)$
   (c) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin(nx)$
   (d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

13. Considere o problema misto para a equação de onda (problema da corda vibrante):
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{2}$$
   onde $f, g \in C(\mathbb{R})$. Usando o formulário, determine a solução formal do problema com $c = 3, \quad L = \pi$ e
   (a) $f(x) = 3\sin(2x) + 12\sin(3x); \quad g(x) = 0$
   (b) $f(x) = 0; \quad g(x) = -2\sin(3x) + 9\sin(7x) - \sin(10x)$
   (c) $f(x) = 6\sin(2x) + 2\sin(6x); \quad g(x) = 11\sin(9x) - 14\sin(15x)$
   (d) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin(nx); \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$
   (e) $f(x) = 0; \quad g(x) = x(\pi - x)$

14. Usando o método da separação de variáveis deduza a solução formal dos seguintes problemas:
   (a)
$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L,\ f \in C(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3}$$

(b)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L,\ f \in C(\mathbb{R}). \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L,\ g \in C(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{4}$$

15. Resolva o problema (4) com $c = 2, \quad L = 1, \quad f(x) = \cos^2(\pi x); \quad g(x) = \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)$.

16. Usando o método de separação de variáveis, mostre que o problema de Dirichlet num rectângulo

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, & 0 \leq x \leq a \\ u(0,y) = f(y), & 0 \leq y \leq b \\ u(a,y) = g(y), & 0 \leq y \leq b \end{cases} \tag{5}$$

onde $f, g \in C(\mathbb{R})$, tem soluções dadas por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi y}{b})}{\sinh(\frac{n\pi a}{b})} \left[\beta_n \sinh(\frac{n\pi x}{b}) - \alpha_n \sinh(\frac{n\pi}{b})(x-a)\right]$$

com

$$\alpha_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy, \qquad \beta_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy.$$

17. Determine a solução do problema (5) para $a = b = \pi$, $f(y) = y(\pi - y)$ e $g(y) = 0$.

18. Mostre que o problema de Neumann num rectângulo

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0, & 0 \leq x \leq a \\ u_x(0,y) = 0, & 0 \leq y \leq b \\ u_x(a,y) = f(y), & 0 \leq y \leq b \end{cases} \tag{6}$$

onde $f, g \in C(\mathbb{R})$, tem soluções

$$u_n(x,y) = c_n \cosh(\frac{n\pi x}{b})\cos(\frac{n\pi y}{b}),\ n \in \mathbb{N},$$

e deduza a solução formal do problema dado.