1. Suponha que a temperatura T de um objecto, ao longo do tempo t, num ambiente com temperatura constante T_0 é dada pela chamada *Lei de Newton do arrefecimento*:

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_0, \text{ onde } k > 0.$$

   (a) Um computador trabalha à temperatura de 70^oC numa sala com temperatura constante de 20^oC. O computador é desligado a uma hora desconhecida, mas às 18h a sua temperatura é de 50^oC e passado uma hora é de 40^oC. A que horas foi desligado o computador?

   (b) Após a ocorrência de um assassinato, a temperatura do corpo foi medida às 8h tendo-se registado 28^oC e, passado uma hora, registou-se 26^oC. Sabendo que a temperatura do meio ambiente se manteve, aproximadamente, nos 24^oC, a que horas aconteceu o crime?

2. A técnica de datação de objectos através do Carbono 14 baseia-se na propriedade de metade dos átomos iniciais de C14 se desintegrar ao fim de 5600 anos, sendo a taxa de desintegração proporcional ao número de átomos existente em cada instante.

   (a) No castelo de Winchester, em Inglaterra, existe uma mesa que muitos gostariam que tivesse sido a "Távola Redonda" do Rei Artur.

      i. Se a mesa datar da época do Rei Artur, que teria vivido cerca de 500DC, qual a percentagem de C14 original presente na mesa actualmente?

      ii. Em 1976 a mesa foi analisada usando a técnica do C14 tendo sido encontrada 91.6% da quantidade original de C14. De quando data a mesa?

   (b) Determine a idade de algumas das gravuras rupestres do Vale do Côa sabendo que estas contém cerca de 1/12 da quantidade inicial de C14.

3. Diz-se que uma população P verifica a Lei de Malthus se a variação da população depende proporcionalmente do número de indivíduos presentes, isto é, se P verifica a equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad k > 0.$$

   (a) Mostre que a expressão de p é dada por $P(t) = P_0 e^{kt}$, onde P_0 é a população existente em $t = 0$. O que acontece à solução quando $t \to \infty$?

   (b) Suponha que, num determinado instante, a Lourinhã continha uma população de P_0 dinossauros e que passado um século, o número de dinossauros era $\frac{3}{2}P_0$. Determine o tempo necessário para o número de dinossauros triplicar, supondo que nesse período a população satisfez a Lei de Malthus.

   (c) Suponha que uma população de duplica o seu tamanho nos primeiros 100 dias e triplica o seu tamanho nos primeiros 200 dias. Mostre que esta população não pode satisfazer a lei de Malthus.

4. Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante γ então

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - \gamma.$$

   Determine o estado estacionário do sistema e discuta o comportamento assimptótico das restantes soluções.

5. Outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N^2$$

   Determine as soluções da equação. Note que as soluções não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito.

6. Um modelo frequente da dinâmica populacional é dado pela *equação logística*:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(1 - N/N_{max})$$

   onde a constante positiva N_{max} é a população máxima permitida num dado meio limitado. Observe-se que se $N << N_{max}$ então $\frac{dN}{dt} \sim \lambda N$ e que $\frac{dN}{dt} \to 0$ quando $N \to N_{max}$.

(a) Seja $x(t) = N(t)/N_{max}$ a "população relativa". Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(1-x)$$

(b) Determine as soluções de equilíbrio da equação anterior.

(c) Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0,1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x_0} - 1)e^{-\lambda t}}$$

(d) Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.

7. Um reactor nuclear converte Urânio 238 em Plutónio 239. Cerca de 0.043% da quantidade inicial de Plutónio produzida no reactor desintegra-se passados 15 anos. Sabendo que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade de Plutónio presente, calcule o tempo que demoram a ser desintegrados metade dos seus átomos.

8. Considere um tanque com 300 litros de água onde estão dissolvidos 50 quilos de sal. É-lhe adicionada uma solução, a uma taxa de 3 litros por minuto, que contem 200 g de sal por litro. Simultaneamente, a solução resultante desta mistura é bombeada para um outro tanque à mesma taxa de 3 litros/min. Calcule a quantidade de sal presente no tanque passados 50 minutos.