Ficha n.º 2: ESPAÇOS VECTORIAIS

Exercício 2.1. Calcule

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.2. Sendo

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dado

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

calcule α_1 e α_2 tal que $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$.

Exercício 2.3. Sendo

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dado

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

calcule α_1, α_2 e α_3 tal que $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$.

Exercício 2.4. Prove o Teorema 2.1.

Exercício 2.5. Verifique que o conjunto P_n dos polinómios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais, algebrizado por meio da adição de polinómios e da multiplicação de um polinómio por um número real é um espaço vectorial real.

Exercício 2.6. Considere o conjunto $C([a,b])$ das funções reais de variável real contínuas em $[a,b]$. Se $f, g \in C([a,b])$ considere definida a soma $f+g$ por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in [a,b].$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in C([a,b])$ considere αf definida por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \qquad x \in [a,b].$$

Prove que $C([a,b])$ é um espaço vectorial real.

Exercício 2.7. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 = x_2 \,\}.$$

a) Prove que $\mathcal{B}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

b) Geometricamente o que representa $\mathcal{B}$?

Exercício 2.8. Seja $\mathcal{E}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathcal{E} = \{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0 \}.$$

a) Identifique geometricamente $\mathcal{E}$?

b) Verifique se $\mathcal{E}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 2.9. Prove que o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vectores de $\mathbb{R}^3$ cuja terceira componente é nula,

$$\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0 \},$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2.10. Prove que o subconjunto de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formado pelas matrizes simétricas de ordem 2 é um subespaço vectorial.

Exercício 2.11. Identifique o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.12. Identifique o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.13. Considere os vectores de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Escreva

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

como combinação linear de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$.

b) Mostre que $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ são linearmente independentes.

c) Verifique que qualquer vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$.

Exercício 2.14. Verifique se são linearmente independentes os vectores de $\mathbb{R}^3$ apresentados em seguida. No caso de serem linearmente dependentes escreva um deles como combinação linear dos restantes.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.15. Prove que qualquer conjunto de vectores de um espaço vectorial que contenha o vector nulo é linearmente dependente.

Exercício 2.16. Prove que os vectores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2.17. Verifique que as matrizes

$$I_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; I_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; I_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

formam um báse de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Qual a dimensão de $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Exercício 2.18. Prove que

$$1, x, x^2, \ldots, x^n,$$

constituem uma base do espaço P_n dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a n. Qual a dimensão de P_n ?

Exercício 2.19. Verifique que as funções definidas em $[a, b]$ por

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \; \ldots, \quad f_n(x) = x^n,$$

formam um conjunto de $n+1$ vectores linearmente independentes do espaço $C([a, b])$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Qual a dimensão de $C([a, b])$?

Exercício 2.20. Determine uma base e a dimensão do subespaço $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ apresentado no Exercício 2.7.

Exercício 2.21. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \}.$$

Exercício 2.22. Apresente uma base e indique a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formado pelas matrizes:

a) Simétricas de ordem 2.

b) Triangulares superiores de ordem 2.

c) Diagonais de ordem 2.

Exercício 2.23. Prove que num espaço de dimensão finita n $(n > 1)$ qualquer vector do espaço é escrito de maneira única como combinação linear dos vectores duma dada base do espaço.

(Observação: Os coeficientes da combinação linear são chamados as coordenadas do vector em relação a essa base.)

Exercício 2.24. *a)* Determine as coordenadas do vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

em relação à base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Verifique que os vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de vector $\mathbf{x}$, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

Exercício 2.25. *a)* No espaço P_2 dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2, determine as coordenadas de

$$p(x) = 1 - 4x + 2x^2.$$

b) Verifique que os polinómios definidos por

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1 - x, \quad p_3(x) = 1 - x^2,$$

constituem uma base de P_2. Determine as coordenadas do polinómio p, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

Exercício 2.26. *a)* Mostre que os vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

constituem um sistema de geradores de $\mathbb{R}^2$.

b) Retire vectores, entre os dados, para obter uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 2.27. Mostre que os vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formam uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 = x_3 \}.$$

Qual a dimensão de $\mathcal{U}$?