Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise
2016/2017

Folha 6

Exercício 6.1 Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto crítico.

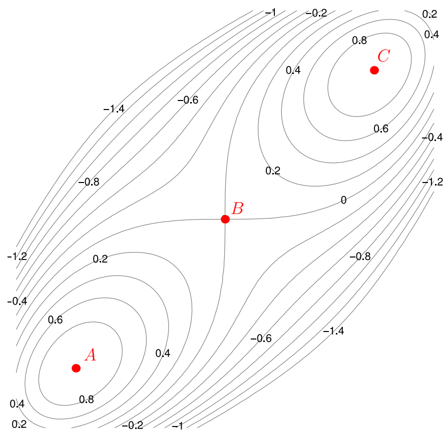
a) $f(x,y) = x^2 + y^4$;

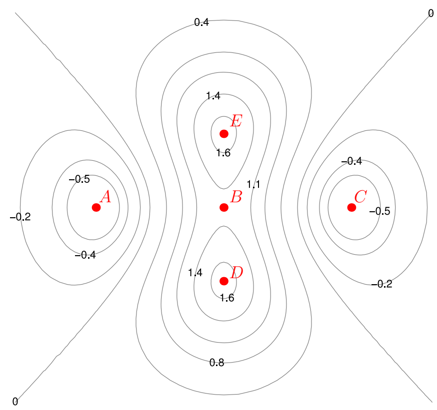
b) $f(x,y) = 2 - x - y^2$;

c) $f(x,y) = xy$;

d) $f(x,y) = x^2y^2$.

Exercício 6.2 Em cada uma das figuras são apresentadas curvas de nível de uma função, relativamente à qual os pontos assinalados são pontos críticos. Conjeture sobre a natureza de cada um desses pontos críticos.





Exercício 6.3 Determine os pontos críticos de cada uma das funções dadas e determine se se está perante um maximizante local, minimizante local ou um ponto de sela:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$;

b) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2$;

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$;

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$;

e) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$;

f) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

g) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$;

h) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$;

i) $f(x,y) = y + x \operatorname{sen} y$;

j) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ (analise apenas os pontos críticos $(0,0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ e $(0, \sqrt{\pi})$);

k) $f(x,y) = e^x \cos y$;

l) $f(x,y) = xy\,(1 - x - y)$;

m) $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$;

n) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

o) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$;

p) $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$;

q) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$;

r) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4$;

s) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$.

Exercício 6.4 Para cada uma das funções f que verificam as condições enunciadas, classifique o ponto crítico (x_0, y_0) ou refira se as informações prestadas são insuficientes para essa classificação:

a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$;

b) $f_{xx}(x_0, y_0) = -3$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -8$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 2$;

c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$;

d) $f_{xx}(x_0, y_0) = 25$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 8$ e $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$.

Exercício 6.5 Determine os extremos das funções f definidas a seguir, vinculados pelas condições indicadas:

a) $f(x, y) = \ln(xy)$ e $2x + 3y = 5$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$;

c) $f(x, y) = xy$ e $x^2 + y^2 = 4$;

d) $f(x, y) = xy$ e $x + y = 1$;

e) $f(x, y) = x^3 + y^3$ e $x^2 + y^2 = 1$;

f) $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$;

g) $f(x, y) = 2x + y$ e $x^2 + 4y^2 = 1$;

h) $f(x, y) = xy$ e $9x^2 + y^2 = 4$;

i) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ e $2x + 3y + 4z = 12$;

j) $f(x, y, z) = z$ e $x^2 + y^2 = 5 - z$, $x + y + z = 1$;

k) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

l) $f(x, y, z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$;

m) $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$, $x + y - z = 0$ e $x^2 + 2z^2 = 1$.

Exercício 6.6 Determine o mínimo e o máximo valor absoluto da função f tal que $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ no retângulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Exercício 6.7 Encontre o mínimo e o máximo valor absoluto da função f no disco definido pela inequação $x^2 + y^2 \leq 1$, sendo f definida por:

a) $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^4$;

b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Exercício 6.8 Determine os três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

Exercício 6.9 Determine os três números positivos cujo produto é 8 e cuja soma é mínima.

Exercício 6.10 Determine três números positivos cuja soma é 13 e tais que a soma dos seus quadrados é mínima.

Exercício 6.11 Determine o ponto do plano definido pela equação $2x - y + z = 1$ mais próximo do ponto de coordenadas $(-4, 1, 3)$.

Exercício 6.12 Considere a elipse definida pela equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$. Determine os pontos de ordenada mínima e de ordenada máxima na elipse.

Exercício 6.13 Determine a distância do ponto de coordenadas $(1, 2, 0)$ ao cone definido pela equação $z^2 = x^2 + y^2$.

Exercício 6.14 Determine o ponto pertencente ao plano definido pela equação $2x - y + 2z = 20$ que se encontra mais próximo da origem.

Exercício 6.15 Mostre que um paralelepípedo de volume 27 unidades cúbicas, possui superfície mínima se for um cubo.

Exercício 6.16 Mostre que um paralelepípedo de superfície 24 unidades quadradas, possui volume mínimo se for um cubo.