Folha 7

Exercício 7.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$;

c) $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x-1|\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^2 |(x-1)(3x-2)|\,dx$;

e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$;

f) $\displaystyle\int_{-5}^{0} 2x\sqrt{4-x}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$;

i) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,e^{x^2}\,dx$;

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$;

k) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\,dx$;

l) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \sqrt{|x|}\,dx$;

m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, com
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{se} \quad 1 < x \le 2; \end{cases}$$

n) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$, com
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ -x & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Exercício 7.2 Dado $a \in \mathbb{R}^+$, seja $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que:

a) se f é par então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;

b) se f é ímpar então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Exercício 7.3 Dados $a < b \in \mathbb{R}$, mostre que se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então existe $c \in \,]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Exercício 7.4 Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida por:

a) $\displaystyle F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$;

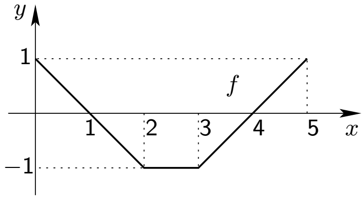
c) $\displaystyle F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercício 7.5 Sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para $x \ge 0$, calcule f em cada um dos seguintes casos:

a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$;

b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4$.

Exercício 7.6 Considere $F : \left[0, \sqrt{5}\,\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$, onde a função $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ é aquela cujo gráfico está representado na figura. Determine $F\left(\sqrt{3}\right)$ e $F'\left(\sqrt{3}\right)$.



Exercício 7.7 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau 2 tal que $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

Exercício 7.8 Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

a) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável;
b) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não integrável;
c) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não primitivável;
d) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável mas não derivável;
e) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável mas não primitivável;
f) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável tal que $|f|$ seja integrável.

Exercício 7.9 Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

a) $x = 1, \quad x = 4, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0;$
b) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4;$
c) $x = 0, \quad x = 2, \quad x^2 + (y-2)^2 = 4, \quad x^2 + (y+2)^2 = 4;$
d) $x = 0, \quad x = \pi/2, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x;$
e) $x = -1, \quad y = |x|, \quad y = 2x, \quad x = 1;$
f) $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x);$
g) $y = -x^2 + \dfrac{7}{2}, \quad y = x^2 - 1;$
h) $y = 0, \quad x = -\log 2, \quad x = \log 2, \quad y = \operatorname{sh} x.$

Exercício 7.10 Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área de cada uma das seguintes regiões:

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ \wedge\ -x \le y \le x^2\right\};$
b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \le 4 \ \wedge\ 0 \le y \le x\right\};$
c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\right\};$
d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le x + 1\right\};$
e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 2 \ \wedge\ 0 \le y \le e^x \ \wedge\ 0 \le y \le e^{-x}\right\};$
f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ \wedge\ 0 \le y \le x^2 \ \wedge\ 0 \le y \le 2 - x\right\};$
g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0 \ \wedge\ y \ge x^2 - 2x \ \wedge\ y \le 4\right\};$
h) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 3 \ \wedge\ y \ge x^2 - 4x + 3 \ \wedge\ y \le -x^2 + 5x - 4\right\}.$

Exercício 7.11 Determine o comprimento da curva definida pelas equações apresentadas, entre os pontos a e b indicados:

a) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $a = (1, \frac{2}{3})$, $b = (8, \frac{8}{3})$;
b) $y = 5 - \sqrt{x^3}$, $a = (1,4)$, $b = (4,-3)$;
c) $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1$, $a = (-1,7)$, $b = (-8,25)$;
d) $y + \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$, $a = (-2, \frac{67}{24})$, $b = (-3, \frac{109}{12})$.