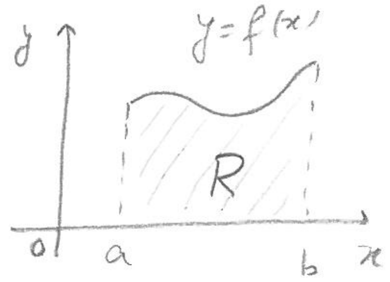
INTEGRAIS MÚLTIPLOS

LISA SANTOS

INTEGRAL DUPLO

Recordem a interpretação geométrica do integral definido de uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, integrável e não negativa:

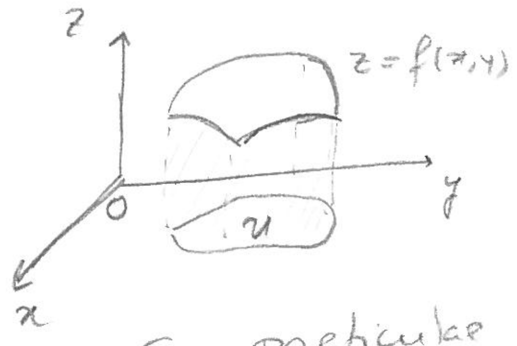


$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área}\,(R)$$

Em particular

$$\int_a^b 1\,dx = \text{Área}\,([a,b]\times[0,1]) = b-a$$
$$= \text{Comprimento}\,([a,b])$$

Analogamente, se $\mathcal{U}$ for um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função integrável, então



$$\iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\,d(x,y) = \text{Volume}\,(\mathcal{U})$$

Em particular

$$\iint_{\mathcal{U}} 1\,d(x,y) = \text{Área}\,(\mathcal{U})$$

Sem entrar em detalhes sobre a definição de integral duplo, é intuitivo perceber que o seu cálculo nos será útil no cálculo de volumes e de áreas

Vejamos como calculá-los. Começamos pelo caso simples em que $\mathcal{U} =]a,b[\times]c,d[$. (9)

Trabalharemos apenas com funções suficientemente bem comportadas. Para estas funções,

$$\iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy,$$

isto é, o cálculo do integral $\iint_{\mathcal{U}} f(x,y) d(x,y)$ não depende da ordem que escolhermos para o calcular. Mais precisamente, podemos calcular $\int_c^d f(x,y)\,dy$, considerando a variável x fixa e calculamos, de seguida, o integral entre a e b da função de x assim obtida, em ordem a x. Ou podemos fixar a variável y, calculando $\int_a^b f(x,y)\,dx$, em ordem a x, integrando de seguida a função obtida, entre c e d, em ordem a y.

<u>Exemplo</u>

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} x y^3 \, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^2 x y^3 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 (4x - 0)\, dx = 2x^2\Big]_0^1 = 2$$

$$\shortparallel$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 x y^3 dx \right) dy$$

$$\shortparallel$$

$$\int_0^2 \left[\frac{x^2 y^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$\shortparallel$$

$$\int_0^2 \left(\frac{y^3}{2} - 0 \right) dx = \frac{y^4}{8}\Big]_0^2 = 2$$

Futuramente omitiremos os parênteses, uma vez que a ordem de integração fica claramendeterminada pela indicação $dx\,dy$ (primeiro integra-se em ordem a x e depois em ordem a y) ou $dy\,dx$ (primeiro integra-se em ordem a y e depois em ordem a x).

Suponhamos que o domínio $\mathcal{U}$ em que estamos a integrar se escreve

$$\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

Então

$$\iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Se $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

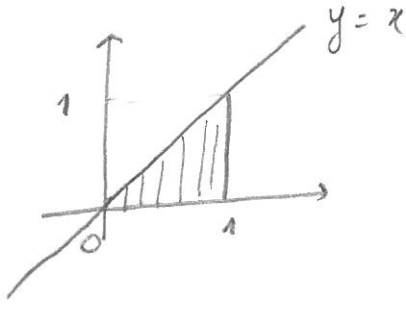
então

$$\iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy.$$

A escolha de ordem de integração será feita em função do domínio $\mathcal{U}$ de integração e/ou da expressão analítica da função

Exemplo

Seja $\mathcal{U} = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$



$$\iint_{\mathcal{U}} x y^2\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^x x y^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^4}{3}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$\iint_{\mathcal{U}} x y^2\, d(x,y) = \int_0^1 \int_y^1 x y^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right) dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

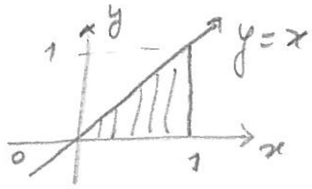
MUDANÇA DE VARIÁVEL EM INTEGRAIS DUPLOS

Seja $\mathcal{V}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ uma bijeção derivável. Seja $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Então

$$\boxed{\iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\, d(x,y) = \iint_{\mathcal{V}} |\det J_{(u,v)} \phi|\, f(\phi(u,v))\, d(u,v)}$$

Exemplo

Seja $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$



$$\iint_{\mathcal{U}} (x+y)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^x (x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

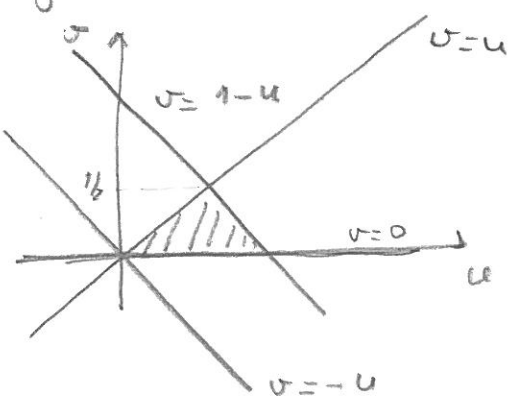
Seja
$$\phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$$
$$(u,v) \longmapsto (u+v,\ u-v)$$
, isto é, ϕ é

Conhecemos a mudança de variável $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$.

Para determinar $\mathcal{V}$:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le u+v \le 1 \\ 0 \le u-v \le u+v \end{cases} \begin{cases} -u \le v \wedge v \le 1-u \\ v \le u \wedge v \ge 0 \end{cases}$$

No sistema de eixos Ouv, representemos o conjunto $\mathcal{V}$:



$$\phi(u,v) = (u+v,\ u-v)$$

$$J_{(u,v)}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_{(u,v)}\phi| = |-2| = 2$$

$$f(\phi(u,v)) = f(u+v,\ u-v) = (u+v) + (u-v)$$
$$= 2u$$

$$\iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\,d(x,y) = \iint_{\mathcal{V}} |\det J_{(u,v)}\phi|\, f(\phi(u,v))\,d(u,v)$$

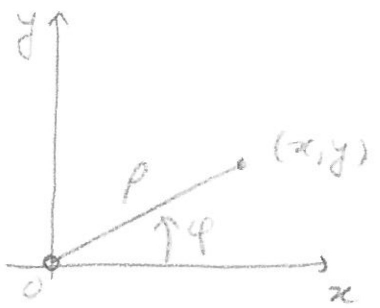
$$= \iint_{\mathcal{V}} 2 \cdot 2u\, d(u,v) = \int_0^{1/2} \int_v^{1-v} 4u\,du\,dv$$

$$= \int_0^{1/2} \left[2u^2\right]_{u=v}^{u=1-v} dv = \int_0^{1/2} \left(2(1-v)^2 - 2v^2\right) dv$$

$$= \int_0^{1/2} (2-4v)\,dv = \left. 2v - 2v^2 \right]_0^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

NOTA:
$\rho = \rho_0 \leftrightarrow$ circunferência de centro em $(0,0)$ e raio ρ
$\varphi = \varphi_0 \leftrightarrow$ semirreta com origem em $(0,0)$ e declive $\operatorname{tg}\varphi_0$

COORDENADAS POLARES



$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$0 < \rho < +\infty,\quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

$$\phi : \overbrace{\mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[}^{\mathcal{V}} \longrightarrow \overbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}}^{\mathcal{U}}$$

$$(\rho, \varphi) \longmapsto (\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi)$$

ϕ é uma bijeção entre $\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

A precaução que tomamos, ao considerar o domínio e o contradomínio de ϕ abertos, não é necessária, uma vez que no cálculo de integrais, considerar ou omitir $\varphi = 0$ em $\mathcal{V}$, ou considerar ou omitir $y = 0$ em $\mathcal{U}$, não altera o valor do integral. Assim, habitualmente, definimos

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$(\rho, \varphi) \longmapsto (\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi)$$

(Note-se que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, se $x \neq 0$)

Seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, como

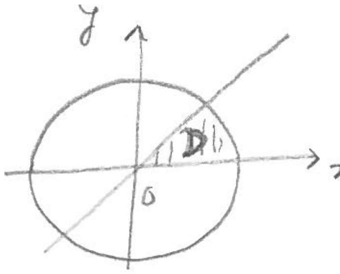
$$|\det J_{(\rho,\varphi)} \Phi| = \left| \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\rho\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \right| = \rho(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = \rho,$$

$$\iint_D f(x,y)\, d(x,y) = \iint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\, f(\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi)\, d(\rho,\varphi).$$

Exemplo

Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Calcule $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y)$.



$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 \leq 1 \\ 0 \leq \rho\cos\varphi \leq \rho\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ \cos\varphi \geq 0 \ \wedge\ \cos\varphi \leq \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \end{cases}$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\, d\varphi = \left. \frac{\varphi}{3} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}$$

INTEGRAIS TRIPLOS

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^3$ e $f: U \to \mathbb{R}$ uma função integrável, positiva. Então

$\iiint_U f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ representa o "hiper"-volume abaixo do gráfico de f, $G_r f$. Recordem que

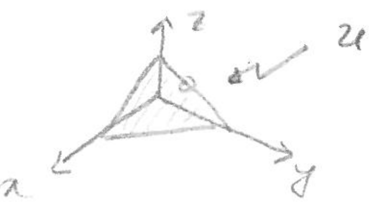
$$G_r f = \{(x,y,z,\omega) \in U \times \mathbb{R} : \omega = f(x,y,z)\}$$

é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, não sendo, portanto, possível representá-lo. Mesmo a região $\mathcal{U}$, um subconjunto do $\mathbb{R}^3$, pode ser difícil de esboçar. Por isso representamos frequentemente os conjuntos que se obtêm da intersecção de $\mathcal{U}$ com planos paralelos aos planos coordenados.

O que dissemos em relação ao cálculo de integrais duplos é imediatamente generalizável para os integrais triplos.

Exemplo

Seja $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x+y+z \leq 1\}$ e calcule $\iiint_{\mathcal{U}} xy \, d(x,y,z)$



Variação total de x:

Note-se que $0 \leq x \leq 1$

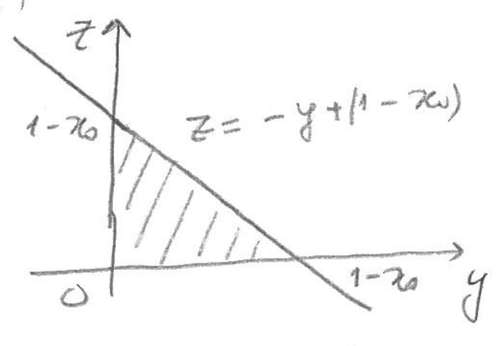
Fixando $x_0 \in [0,1]$, denotemos

$$\mathcal{U}_{x_0} = \mathcal{U} \cap \{(x_0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\}$$

O conjunto $\mathcal{U}_{x_0}$ é a intersecção de $\mathcal{U}$ com o plano $x = x_0$, isto é,

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{(x_0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, y+z \leq 1-x_0\}$$

Representemo-lo no plano $x = x_0$:



Então temos

$0 \leq y \leq 1 - x_0$

$0 \leq z \leq 1 - x_0 - y$

sendo x_0 um ponto arbitrário do intervalo $[0,1]$.

Então

$$\iiint_{\mathcal{U}} xy \, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xy \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[xyz \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (xy - x^2 y - xy^2) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{xy^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6} \left(3x(1-x)^2 - 3x^2(1-x)^2 - 2x(1-x)^3 \right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x) \, dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{60}$$

MUDANÇA DE VARIÁVEL EM INTEGRAIS TRIPLOS

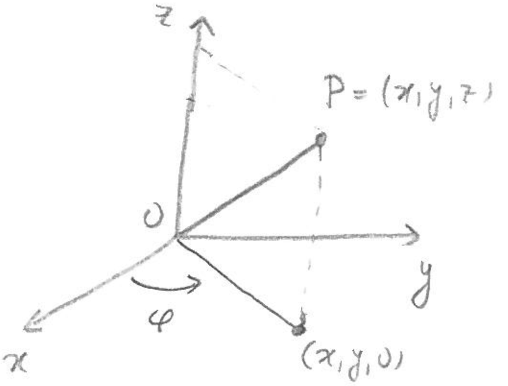
Seja V um aberto de $\mathbb{R}^3$ e $\phi : V \to \mathcal{U}$ uma bijeção derivável. Seja $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

Então

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{U}} f(x,y,z) \, d(x,y,z) = \iiint_V \left| \det J_{(u,v,w)} \phi \right| f(\phi(u,v,w)) \, d(u,v,w)}$$

Há duas mudanças de variável particularmente importantes, as mudanças de variável para coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas.

Coordenadas cilíndricas



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} \quad \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$\rho = \rho_0 \longleftrightarrow$ cilindro com eixo Oz e raio ρ_0

$\varphi = \varphi_0 \longleftrightarrow$ semiplano que contém o eixo Oz e que faz um ângulo φ com o plano Oxz

$z = z_0 \longleftrightarrow$ plano paralelo ao plano Oxy.

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$(\rho,\varphi,z) \longmapsto (\rho\cos\varphi,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z)$$

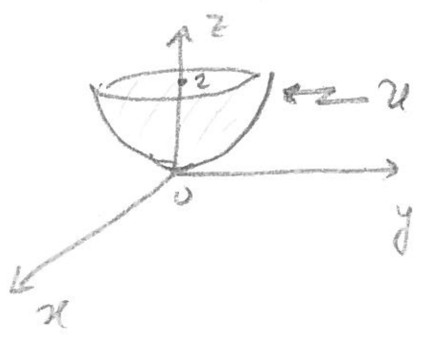
$$J_{(\rho,\varphi,z)}\phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mathrm{sen}\,\varphi & 0 \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\det J_{(\rho,\varphi,z)}\phi\right| = \rho\cos^2\varphi + \rho\,\mathrm{sen}^2\varphi = \rho$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \iiint_{\phi^{-1}(D)} \rho\, f(\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi, z)\,d(\rho,\varphi,z)$$

Exemplo

$$\mathcal{U} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x^2+y^2 \leq z \ , \ 0 \leq z \leq 2 \}$$



$$\iiint_{\mathcal{U}} x\,d(x,y,z)$$

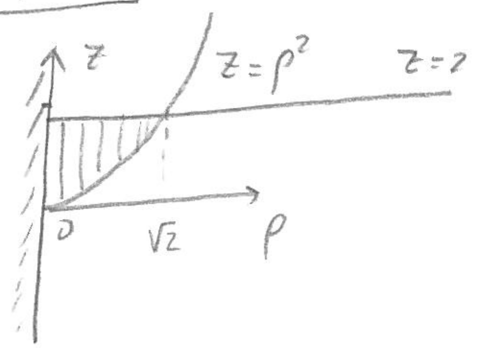
$$\begin{cases} 0\le z\le 2 \\ 0\le x^2+y^2\le z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le z\le 2 \\ 0\le \rho^2\le z \end{cases}$$

Como a variável φ não aparece nas desigualdades que definem U em coordenadas cilíndricas, podemos afirmar que

$$0\le\varphi\le 2\pi$$

(Se conseguirmos decidir qual a variação total de φ na determinação dos limites de integração em coordenadas polares, podemos representar o corte do domínio pelo semi-plano $\varphi=\varphi_0$, como exemplificamos a seguir)

$\boxed{\varphi=\varphi_0}$



Então

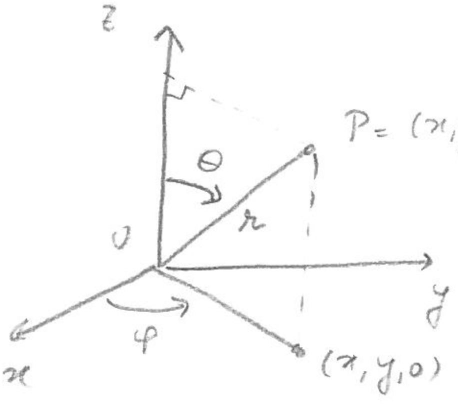
$$\iiint_U x\,d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\rho^2} \rho\cdot\rho\cos\varphi\,dz\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\Big[\rho^2\cos\varphi\, z\Big]_{z=0}^{z=\rho^2} d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^4\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{\rho^5}{5}\cos\varphi\Big]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{2\sqrt{2}}{5}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \Big[-\frac{2\sqrt{2}}{5}\,\mathrm{sen}\,\varphi\Big]_0^{2\pi} = 0$$

Coordenadas esféricas



$x = r\, sen\theta \cos\varphi$

$y = r\, sen\theta\, sen\varphi$

$z = r\cos\theta$

NOTA: $r\, sen\varphi = \rho$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$r = r_0 \longleftrightarrow$ Esfera de centro em $(0,0,0)$ e raio r_0

$\theta = \theta_0 \longleftrightarrow$ semi-cone com vértice na origem e ângulo θ_0

$\varphi = \varphi_0 \longleftrightarrow$ semiplano contendo vertical definido pelo eixo Oz e ângulo φ_0 com o plano Oxz

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \varphi, \theta) \longmapsto (r\, sen\theta\cos\varphi,\ r\, sen\theta\, sen\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$J_{(r,\varphi,\theta)}\phi = \begin{pmatrix} sen\theta\cos\varphi & r\, sen\theta\, sen\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ sen\theta\, sen\varphi & -r\, sen\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\, sen\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\, sen\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_{(r,\varphi,\theta)}\phi = -\cos\theta\,(-r^2 sen\theta\cos\theta\, sen^2\varphi - r^2 sen\theta\cos\theta\cos^2\varphi)$$

$$- r\, sen\theta\,(-r\, sen^2\theta\cos^2\varphi - r\, sen^2\theta\, sen^2\varphi)$$

$$= r^2 sen\theta\cos^2\theta\,(sen^2\varphi + \cos^2\varphi) + r^2 sen^3\theta\,(\cos^2\varphi + sen^2\varphi)$$

$$= r^2 sen\theta\cos^2\theta + r^2 sen^3\theta = r^2 sen\theta\,(\cos^2\theta + sen^2\theta)$$

$$= r^2 sen^2\theta$$

Então

$$\iiint_D f(x,y,z)\, d(x,y,z) =$$

$$= \iiint_{\phi^{-1}(D)} r^2 \operatorname{sen}\theta \, f(r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta)\, d(r,\theta,\varphi)$$

Exemplo

Calcule o volume de

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le z^2\}$$

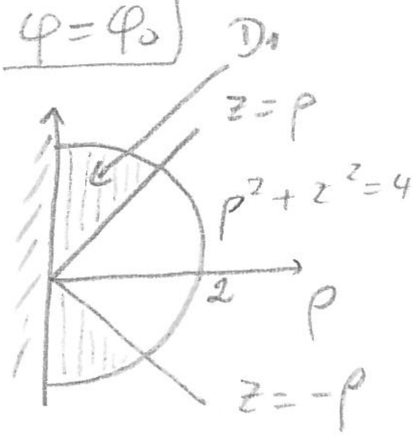
utilizando coordenadas esféricas.

NOTA: É mais fácil escrever as inequações em coordenadas cilíndricas, para fazer o esboço.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 4 \\ x^2+y^2\le z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2+z^2\le 4 \\ \rho^2\le z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2+z^2\le 4 \\ 0\le \rho\le |z| \end{cases}$$

Variação do φ: $0\le\varphi\le 2\pi$

$\boxed{\varphi=\varphi_0}$



$$\text{Volume}(D) = \iiint_D 1\, d(x,y,z)$$

$$= 2\iiint_{D_1} 1\, d(x,y,z)$$

$$\rho^2+z^2\le 4 \iff r^2\le 4 \iff 0\le r\le 2$$

Coordenadas esféricas: $0\le\theta\le\pi/4$, $0\le r\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$

$$\text{Volume } D = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \left.\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_{r=0}^{r=2} d\theta\, d\varphi = \frac{16}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} d\varphi$$

$$= \frac{16}{3}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right]2\pi = \frac{16}{3}(2-\sqrt{2})\pi.$$