Programação Linear - definição matricial

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

21 de abril de 2015

Programação Linear - definição matricial

antes

- O algoritmo Simplex determina como seleccionar o elemento pivô para passar de uma base para uma base adjacente melhor.

Guião

- Vamos definir a operação matricial que permite passar de um quadro (base) inicial para qualquer outro quadro (base) final,
- o que é equivalente a efectuar o conjunto dos pivôs que conduzem ao quadro final,
- correspondente a dada escolha prévia de variáveis básicas (base).

depois

- Em análise de sensibilidade, usaremos a definição matricial para analisar os efeitos que a variação de dados no quadro inicial têm sobre o quadro óptimo.

Conteúdo

- Sistema de equações e soluções básicas (revisão)
- Definição matricial do problema de programação linear
- Resolução matricial
- Apêndice
  - Significado dos vectores $B^{-1}b$ e $B^{-1}A_j$
  - Implementação computacional do método simplex
  - Operações com matrizes: exemplos

Sistema de equações e soluções básicas (revisão)

- O problema $\max z = cx$, suj. a $Ax = b, x \geq 0$, para uma qualquer escolha de um conjunto de variáveis básicas, é equivalente a:

$$\begin{array}{lclll} \max z & = & c_B x_B & + c_N x_N & \\ \text{suj. a} & & B x_B & + \; N x_N & = b \\ & & x_B, x_N \geq 0 & & \end{array}$$

- em que o conjunto de variáveis x é partido em dois subconjuntos:

$$\begin{array}{ll} x_B \in \mathrm{IR}_+^{m\times 1} & : \text{ variáveis básicas,} \\ x_N \in \mathrm{IR}_+^{(n-m)\times 1} & : \text{ variáveis não-básicas,} \end{array}$$

- o vector de custos c é partido em dois subvectores:

$$\begin{array}{ll} c_B \in \mathrm{IR}^{1\times m} & : \text{ subvector de } c \text{ com os custos das variáveis básicas,} \\ c_N \in \mathrm{IR}^{1\times(n-m)} & : \text{ subvector de } c \text{ com os custos das variáveis não-básicas, e} \end{array}$$

- a matriz A é partida em duas submatrizes:

$$\begin{array}{ll} B \in \mathrm{IR}^{m\times m} & : \text{ submatriz de } A \text{ das variáveis básicas (não-singular),} \\ N \in \mathrm{IR}^{m\times(n-m)} & : \text{ submatriz de } A \text{ das variáveis não-básicas.} \end{array}$$

Resolvendo o sistema de equações em ordem a x_B,

- ou seja, pré-multiplicando a equação das restrições por B^{-1} :

$$\begin{aligned} B^{-1}(Bx_B + Nx_N) &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

- Substituindo o valor de x_B na função objectivo, o valor da função objectivo da solução x_B é:

$$\begin{aligned} z &= c_B x_B + c_N x_N = \\ &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = \\ &= c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N \end{aligned}$$

Quando $\tilde{x}_N = 0$, a solução do sistema de equações $\tilde{x}$ é uma *solução básica*:

- $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_B \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$
- e tem um valor de função objectivo $\tilde{z} = c_B B^{-1}b$

Se $\tilde{x}_B \geq 0$ então $\tilde{x}$ é uma *solução básica admissível*.

Problema de PL e representação matricial

<table>
<tr><th>Geral</th><th>Exemplo</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{ll} max & cx \\ & Ax + Is = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

</td><td>

$$\begin{array}{lrcl} \text{max} & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 & & \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 & = & 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 & = & 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad\quad + s_3 & = & 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array}$$

</td><td>

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

</td></tr>
</table>

A resolução mostrada no diapositivo anterior pode ser representada em quadros, como se segue.

Resolução do sist. de equações: representação matricial - i

- Para resolver o sistema de equações $[\ A \mid I\ ] * [\ x \mid s\ ]^t = b$, do quadro simplex, em ordem às variáveis básicas do conjunto x_B, a que correspondem:
  - a matriz B, que é a submatriz de $[\ A \mid I\ ]$ com as colunas das variáveis básicas; e
  - o vector c_B, com os coeficientes do vector c das mesmas variáveis,
- é necessário obter:
  - a matriz identidade I nas posições da matriz B,
  - o vector nulo na linha da função objectivo.
- Pré-multiplicar pela matriz da esquerda ($\in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$) faz isso.

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} B \\ \hline -c_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline \tilde{0} \end{array}\right]$$

- A regra de multiplicação de matrizes partidas (em submatrizes) é semelhante à da multiplicação de matrizes.

- Pré-multiplicando o Quadro Inicial, obtém-se o Quadro Final.

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
B^{-1} & \tilde{0} \\
\hline
c_B B^{-1} & 1 \\
\hline
\end{array}
*
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
A & I & b \\
\hline
-c & \tilde{0} & 0 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
=
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\
\hline
c_B B^{-1} A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1} b \\
\hline
\end{array}
$$

- Nota: tal como vimos no diapositivo anterior, nas posições que a matriz B ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.

Exemplo

- Dado o Quadro Inicial:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas $x_B = \{x_3, s_2, x_2\}$, *i.e.*, obter um Quadro Final em que essas variáveis são básicas,
- a matriz B e o vector c_B são os abaixo apresentados, e permitem calcular a matriz B^{-1} e o vector $c_B B^{-1}$:

$$B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^{-1} = \begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{ccc} 10 & 0 & 20 \end{array} \qquad c_B B^{-1} = \begin{array}{ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}$$

Exemplo

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
-1/2 & 1 & -3/2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
5 & 0 & 15 & 1
\end{array}\right]
*
\begin{array}{c|cccc|ccc|c}
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
s_1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 40 \\
s_2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\
s_3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \\
\hline
z & 1 & -30 & -20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
=
$$

$$
=
\begin{array}{c|cccc|ccc|c}
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
x_3 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 10 \\
s_2 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -3/2 & 100 \\
x_2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \\
\hline
z & 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 500
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c}
B^{-1} & \tilde{0} \\
\hline
c_B B^{-1} & 1
\end{array}\right]
*
\left[\begin{array}{c|c|c}
A & I & b \\
\hline
-c & \tilde{0} & 0
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c|c}
B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\
\hline
c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b
\end{array}\right]
$$

Notas

- Quando escolhemos um conjunto qualquer de variáveis básicas, não há garantia de os elementos de $B^{-1}b$, de $c_B B^{-1}$ e de $c_B B^{-1} A - c$ serem todos não-negativos.
- Se algum elemento do vector $B^{-1}b$ for negativo, a resolução dá um vértice não-admissível.
- Se algum elemento dos vectores $c_B B^{-1}$ ou $c_B B^{-1} A - c$ for negativo, a resolução dá um vértice que não é óptimo.

No exemplo anterior, o Quadro Final é a solução óptima, porque se sabia de antemão quais eram as variáveis básicas da solução óptima.

Apêndice

O que significa o vector $B^{-1}b$?

- Qualquer vector de um espaço vectorial pode ser representado como uma combinação linear dos vectores da base.
- Os elementos de $B^{-1}b$ são as coordenadas do vector b em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$b = B\,(B^{-1}b)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 40 \\ 150 \\ 20 \end{array}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} \end{array} * \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ 100 \\ 20 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 40 \\ 150 \\ 20 \end{array}} = 10 \boxed{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}} + 100 \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}} + 20 \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}}$$

$$b = 10\ \vec{v}_1 + 100\ \vec{v}_2 + 20\ \vec{v}_3$$

- ou seja, é a solução $x_B = B^{-1}b = (x_3, s_2, x_2)^t = (10, 100, 20)^t$.

O que significa $B^{-1}A_j$?

- Seja A_j uma coluna da matriz $[A \mid I] = [A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n \mid I]$.
- Os elementos de $B^{-1}A_j$ são as coordenadas do vector A_j em relação à base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$.
- Exemplo:

$$A_1 = B\,(B^{-1}A_1)$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}} = -1/2 \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} - 3/2 \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} + 2 \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}}$$

$$A_2 1 = -1/2\ \vec{v}_1 - 3/2\ \vec{v}_2 + 2\ \vec{v}_3$$

Implementação computacional do método simplex

- Os *solvers* de programação linear usam a representação matricial.
- A matriz B^{-1} e as matrizes do quadro inicial (A, b, c) são suficientes para calcular todos os elementos de qualquer quadro simplex.
- A matriz B^{-1} é actualizada em cada iteração, e
- guardada na forma de uma factorização, por exemplo, LU.

Algoritmo simplex primal (maximização)

1. (Calcular custos reduzidos das variáveis não-básicas)
   Calcular $c_B B^{-1} A_j - c_j, \forall j \in N$.
2. (Testar optimalidade)
   Se $c_B B^{-1} A_j - c_j \geq 0, \forall j \in N$, a solução é óptima. Senão,
3. (Seleccionar coluna pivot)
   coluna pivot $k : c_B B^{-1} A_k - c_k = \min_{j \in N}\{c_B B^{-1} A_j - c_j\}$
4. Calcular lado direito $B^{-1} b$ e coluna pivot $B^{-1} A_k$.
5. (Verificar se solução óptima é ilimitada)
   Se todos os elementos de $B^{-1} A_k \leq 0$, a solução é ilimitada. Senão,
6. (Seleccionar linha pivot)
   linha pivot $l : (B^{-1} b)_l / (B^{-1} A_k)_l = \min_i \{(B^{-1} b)_i / (B^{-1} A_k)_i\}$.
7. Actualizar a matriz B^{-1}, e voltar ao passo 1.

Justificação

Economia de espaço:

- A matriz A é tipicamente uma matriz dispersa. A percentagem de elementos não-zero de A pode ser 5% ou 10%.
- Há estruturas de dados para representar matrizes dispersas que permitem grandes economias de espaço.

Eficiência computacional:

- A multiplicação de matrizes dispersas só envolve os cálculos com os elementos diferentes de 0.
- A única coluna que é calculada numa iteração é a coluna da variável que sai da base; as outras são ignoradas.
- A coluna de uma variável pode nunca ser calculada durante a resolução; basta que a variável nunca se torne básica.

Operações com matrizes: exemplos

- Soma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+10 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Fim