Topologia da reta real

A identificação entre os números reais e os pontos de uma reta, designada por *reta real*, permite obter uma representação geométrica dos números reais, muito útil na compreensão e visualização de diversos conceitos envolvendo números reais.

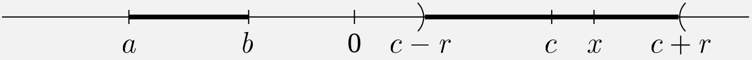
A associação que a cada número real faz corresponder um e um só ponto da reta, permite também usar uma linguagem geométrica, em que *"ponto"* passará a significar *"número real"*,

dizer que "$x < y$" será dizer que "x está à esquerda de y"

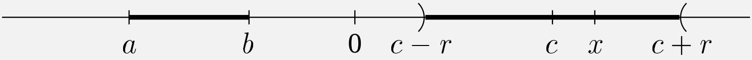
e, dados

$x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ representará a distância do ponto x ao ponto y.

Nesta representação, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, o intervalo $[x, y]$ será representado pelo segmento de reta cujos extremos são os pontos x e y.



- Na Figura os pontos a e b representam números reais (identificados também por a e b) tais que $a < b < 0$, uma vez que a está à esquerda de b, estando este, por sua vez, à esquerda de zero.
- O segmento de reta de extremos a e b, marcado com traço mais carregado , representa o intervalo $[a, b]$.



- Representado está também um ponto c e o intervalo aberto centrado em c e de raio (semi-amplitude) $r > 0$, ou seja, o intervalo $]c-r, c+r[$.
  Este intervalo é o lugar geométrico dos pontos da reta, cuja distância a c é menor do que r ou, dito de forma equivalente, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-c| < r\}$.

Definição

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. *Diz-se que* a *é*

- **majorante de** X *se* $\forall x \in X \qquad x \leq a$;
- **minorante de** X *se* $\forall x \in X \qquad a \leq x$;
- **máximo de** X *se* a *é majorante de* X e $a \in X$. *Representa-se* $a = \max X$;
- **mínimo de** X *se* a *é minorante de* X e $a \in X$. *Representa-se* $a = \min X$.

Nota

Observe-se que, se a *é majorante de* X, *qualquer elemento maior do que* a *é também majorante de* X. *Analogamente, se* a *é minorante de* X, *qualquer elemento menor do que* a *é minorante de* X.

Definição

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **majorado** *ou* **limitado superiormente**, *respetivamente* **minorado** *ou* **limitado inferiormente**, *se possui algum majorante, respetivamente minorante. Se X é simultaneamente majorado e minorado diz-se* **limitado**.

Definição

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **supremo de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se $a = \sup X$, se verifica as duas condições seguintes:*

1. $\forall x \in X \quad x \leq a \qquad$ *(a é majorante de X);*
2. *se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X,\ x \leq b$, então $a \leq b \qquad$ (a é o menor dos majorantes).*

Definição

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **ínfimo de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se $a = \inf X$, se verifica as duas condições seguintes:*

1. $\forall\, x \in X \quad a \leq x \qquad$ *(a é minorante de X);*
2. *se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\;\forall\, x \in X,\; b \leq x$, então $\;b \leq a \qquad$ (a é o maior dos minorantes).*

Exemplo

Consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 0 \leq x < 3\}$.
X é limitado: 0 é minorante e 3 é majorante de X.
O mínimo de X é 0, logo $\inf X = 0$.
$\sup X = 3$ *(porquê?) e X não tem máximo.*

Definição

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $y \in \mathbb{R}$ diz-se:

- **ponto interior de X** *se*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \qquad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\; \subseteq X$$

- **ponto aderente a X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\; \cap X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação de X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \big(\,]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\setminus \{y\} \big) \cap\; X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação à direita, de X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y,\, y+\varepsilon[\, \cap\, X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação à esquerda, de X** *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad]y-\varepsilon,\, y[\, \cap\, X \neq \emptyset$$

- **ponto isolado de X** *se pertencer a X mas não for ponto de acumulação de X, isto é,*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \qquad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\, \cap\, X = \{y\}$$

- **ponto de fronteira de X** *se for ponto aderente a X e a $\mathbb{R} \setminus X$, isto é,*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\, \cap\, X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad]y-\varepsilon,\, y+\varepsilon[\, \cap\, (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$$

Definição

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. *Designa-se:*

- **interior de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* $\operatorname{Int} X$ *ou* $\overset{\circ}{X}$, *o conjunto dos ponto interiores de* X*;*
- **aderência de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* $\operatorname{Ad} X$ *ou* $\overline{X}$, *o conjunto dos pontos aderentes a* X*;*
- **derivado de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* X', *o conjunto dos pontos de acumulação de* X.
  X'_+ *representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita e* X'_- *representa o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda, de* X*;*
- **fronteira de $\boldsymbol{X}$** *e representa-se por* $\operatorname{fr} X$ *ou* ∂X, *o conjunto dos pontos de fronteira de* X.

Exemplo

Considerando o conjunto $A = [-1,\, 1[\cup \{2\} \cup \big([3,\, 4] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)$*, tem-se:*

$\mathring{A} =]-1,\, 1[$;

$\overline{A} = [-1,\, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4]$;

$A'_{-} =]-1,\, 1] \cup]3,\, 4]$;

$A'_{+} = [-1,\, 1[\cup [3,\, 4[$;

$A' = A'_{-} \cup A'_{+} = [-1,\, 1] \cup [3,\, 4]$;

$\mathrm{fr}\, A = \{-1, 1, 2\} \cup [3,\, 4]$.

Definição

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ diz-se:

- **aberto** *se coincidir com o seu interior;*
- **fechado** *se coincidir com a sua aderência.*

Proposição

Um conjunto X é aberto se e só se o seu complementar, $\mathbb{R} \setminus X$, for fechado.