introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios da folha autómatos celulares elementares — um

1.

Consideremos o autómato celular elementar cuja evolução temporal é definida pela função booleana ϕ dada por $\phi(x,y,z) = (\neg(x \vee y) \vee z)$. Então, temos que:

$$\begin{array}{ll} \phi(0,0,0) = 1 & \phi(0,0,1) = 1 \\ \phi(0,1,0) = 0 & \phi(0,1,1) = 1 \\ \phi(1,0,0) = 0 & \phi(1,0,1) = 1 \\ \phi(1,1,0) = 0 & \phi(1,1,1) = 1 \end{array}$$

Assim sendo, uma vez que, por definição, o código de Wolfram de ϕ é dado por $\mathsf{N}_\phi = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$, onde os dígitos d_k são dados por

$$\begin{array}{ll} d_0 = \phi(0,0,0) & d_1 = \phi(0,0,1) \\ d_2 = \phi(0,1,0) & d_3 = \phi(0,1,1) \\ d_4 = \phi(1,0,0) & d_5 = \phi(1,0,1) \\ d_6 = \phi(1,1,0) & d_7 = \phi(1,1,1) \end{array}$$

podemos concluir que $\mathsf{N}_\phi = (10101011)_2 = 171$.

2.

Consideremos o autómato celular elementar cuja evolução temporal é definida pela função booleana ϕ, com código de Wolfram N_ϕ, escolhidas condições de fronteira periódicas.

2.1 Vamos começar por mostrar que, se a configuração homogénea C_0 é um ponto fixo de Φ, então N_ϕ é um número par. De facto, se $\Phi(\mathsf{C}_0) = \mathsf{C}_0$, então $d_0 = \phi(0,0,0) = 0$. Assim sendo, uma vez que, por definição, $\mathsf{N}_\phi = (d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0)_2$, podemos concluir que N_ϕ é uma soma de números pares, logo, é um número par.

No sentido contrário, temos que, se N_ϕ é um número par, então $d_0 = \phi(0,0,0) = 0$, pelo que $\Phi(\mathsf{C}_0) = \mathsf{C}_0$, isto é, C_0 é um ponto fixo de Φ.

2.2 Se N_ϕ é um número ímpar, então $d_0 = \phi(0,0,0) = 1$, ou seja, $\Phi(\mathsf{C}_0) = \mathsf{C}_1$. Vejamos então qual a dinâmica da configuração homogénea C_1: se $d_7 = 1$, temos que $\Phi(\mathsf{C}_1) = \mathsf{C}_1$, isto é, C_1 é um ponto fixo, e assim C_0 é um ponto eventualmente fixo. Caso contrário, se $d_7 = 0$, temos $\Phi(\mathsf{C}_1) = \mathsf{C}_0$ e as duas configurações homogéneas formam um 2-ciclo atractor.

3.

Consideremos o autómato celular elementar cuja evolução temporal é definida pela regra ϕ com código de Wolfram $N_\phi = 146$, escolhidas condições de fronteira periódicas. Então, sabendo que $146 = (10010010)_2$ temos que a evolução temporal é descrita por:

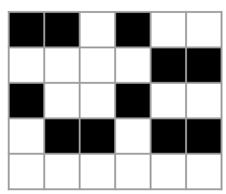
$$\phi(0,0,0) = 0 \qquad \phi(0,0,1) = 1$$
$$\phi(0,1,0) = 0 \qquad \phi(0,1,1) = 0$$
$$\phi(1,0,0) = 1 \qquad \phi(1,0,1) = 0$$
$$\phi(1,1,0) = 0 \qquad \phi(1,1,1) = 1$$

3.1

Consideremos a configuração $C = 110100$. A partir da tabela anterior, tendo em conta condições de fronteira periódicas, temos que

$$\Phi(C) = 000011$$
$$\Phi^2(C) = \Phi(000011) = 100100$$
$$\Phi^3(C) = \Phi(100100) = 011011$$
$$\Phi^4(C) = \Phi(011011) = 000000$$

Graficamente, estes resultados traduzem-se no seguinte diagrama espaço-tempo:

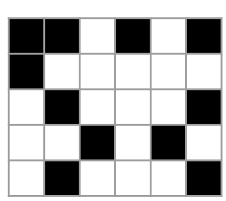


3.2

A dinâmica do sistema a partir da configuração inicial $C = 110101$ é dada por:

$$\Phi(C) = 100000$$
$$\Phi^2(C) = \Phi(100000) = 010001$$
$$\Phi^3(C) = \Phi(010001) = 001010$$
$$\Phi^4(C) = \Phi(001010) = 010001$$

Como podemos observar, a dinâmica do sistema, a partir da configuração inicial $C = 110101$, acaba no 2-ciclo atractor constituído pelas configurações 010001 e 001010. Em termos gráficos, estes resultados traduzem-se no seguinte diagrama espaço-tempo:



4.

Consideremos o autómato celular elementar cuja evolução temporal é definida pela regra ϕ com código de Wolfram $\mathsf{N}_\phi = 53$, escolhidas condições de fronteira periódicas.

4.1 Uma vez que $53 = (d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_2 = (00110101)_2$ podemos concluir que $\phi(0,1,0) = d_2 = 1$.

4.2 Sejam $\mathsf{C}_0, \mathsf{C}_1$ as configurações homogéneas do sistema. Então, sendo $d_0 = 1$, temos que

$$\Phi(\mathsf{C}_0) = \mathsf{C}_1.$$

Por outro lado, uma vez que $d_7 = 0$, temos que

$$\Phi(\mathsf{C}_1) = \mathsf{C}_0.$$

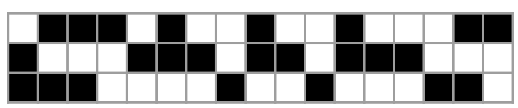
Deste modo, podemos concluir que as configurações homogéneas formam um 2-ciclo para o autómato celular elementar $\mathsf{N}_\phi = 53$.

4.3 Consideremos a configuração $\mathsf{C} = 01110100100100011$. A partir da representação binária de 53, podemos determinar a dinâmica do sistema nos dois instantes seguintes:

$$\Phi(\mathsf{C}) = 10001110110111000$$

$$\Phi^2(\mathsf{C}) = \Phi(10001110110111000) = 11100001001000110$$

Graficamente, estes resultados traduzem-se no seguinte diagrama espaço-tempo:



5.

Consideremos o autómato celular elementar cuja evolução temporal é definida pela regra ϕ, com código de Wolfram $\mathsf{N}_\phi = 238$, escolhidas condições de fronteira nulas.

5.1 Uma vez que $238 = (d_7 d_6 d_5 d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_2 = (11101110)_2$, podemos concluir que $\phi(1,0,1) = d_5 = 1$.

5.2 Sejam $\mathsf{C}_0, \mathsf{C}_1$ as configurações homogéneas do sistema. Uma vez que as condições de fronteira escolhidas são fixas iguais a zero, temos que a dinâmica do sistema a partir da configuração homogénea C_0 é definida pelo dígito $d_0 = 0$, pelo que podemos concluir que C_0 é um ponto fixo. Contudo, relativamente à dinâmica da configuração C_1, são já os três dígitos $d_7 = 1$, $d_6 = 1$ e $d_3 = 1$ que são relevantes para a determinação da configuração do sistema no instante seguinte: temos então que a configuração C_1 é um ponto fixo.

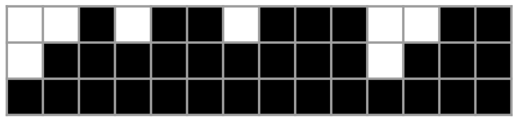
5.3

Consideremos a configuração C = 00101101110011. A partir da representação binária de 238, podemos determinar a dinâmica do sistema nos dois instantes seguintes:

$$\Phi(C) = 01111111110111$$

$$\Phi^2(C) = \Phi(01111111110111) = 11111111111111$$

Graficamente, estes resultados traduzem-se no seguinte diagrama espaço-tempo:



6.

Para desenhar o diagrama de Wuensche vamos primeiramente identificar os atractores do sistema: a partir da tabela de evolução temporal dada, podemos imediatamente concluir que as configurações homogéneas, $C_0 = 00000$ e $C_1 = 11111$, são pontos fixos. Por outro lado, uma vez que

$$\Phi(00001) = 00010 \quad \Phi(00010) = 00100 \quad \Phi(00100) = 01000 \quad \Phi(01000) = 10000 \quad \Phi(10000) = 00001$$

podemos concluir que as configurações 00001, 00010, 00100, 01000 e 10000 formam um 5-ciclo atractor do sistema. De forma análoga, temos também que

$$\Phi(00101) = 01010 \quad \Phi(01010) = 10100 \quad \Phi(10100) = 01001 \quad \Phi(01001) = 10010 \quad \Phi(10010) = 00101$$

pelo que podemos concluir que as configurações 00101, 01010, 10100, 01001 e 10010 formam igualmente um 5-ciclo atractor do sistema. Identificados os atractores do sistema, vamos de seguida identificar quais as configurações que, passado um instante de tempo, se encontram num atractor: como facilmente se retira (da tabela apresentada), não existe qualquer configuração C tal que $\Phi(C) = C_0$ ou $\Phi(C) = C_1$. Relativamente ao primeiro dos 5-ciclos a situação é diferente, uma vez que

$$\Phi(00011) = 00100 \quad \Phi(00110) = 01000 \quad \Phi(01100) = 10000 \quad \Phi(11000) = 00001 \quad \Phi(10001) = 00010$$

sendo fácil de reconhecer que estas são as únicas configurações pertencentes à bacia de atracção deste ciclo (isto é, que não existe nenhuma configuração C tal que $\Phi(C) = 00011$, ou $\Phi(C) = 00110$, ou $\Phi(C) = 01100$, ou $\Phi(C) = 11000$, ou $\Phi(C) = 10001$). Assim sendo, podemos concluir que as restantes igualdades da tabela dada nos mostram a dinâmica de configurações pertencentes à bacia de atracção do segundo 5-ciclo atractor:

$$\Phi(00111) = 01010 \quad \Phi(01110) = 10100 \quad \Phi(11100) = 01001 \quad \Phi(11001) = 10010 \quad \Phi(10011) = 00101$$

$$\Phi(10101) = 01010 \quad \Phi(01011) = 10100 \quad \Phi(10110) = 01001 \quad \Phi(01101) = 10010 \quad \Phi(11010) = 00101$$

e

$$\Phi^2(11011) = \Phi(10101) = 01010$$

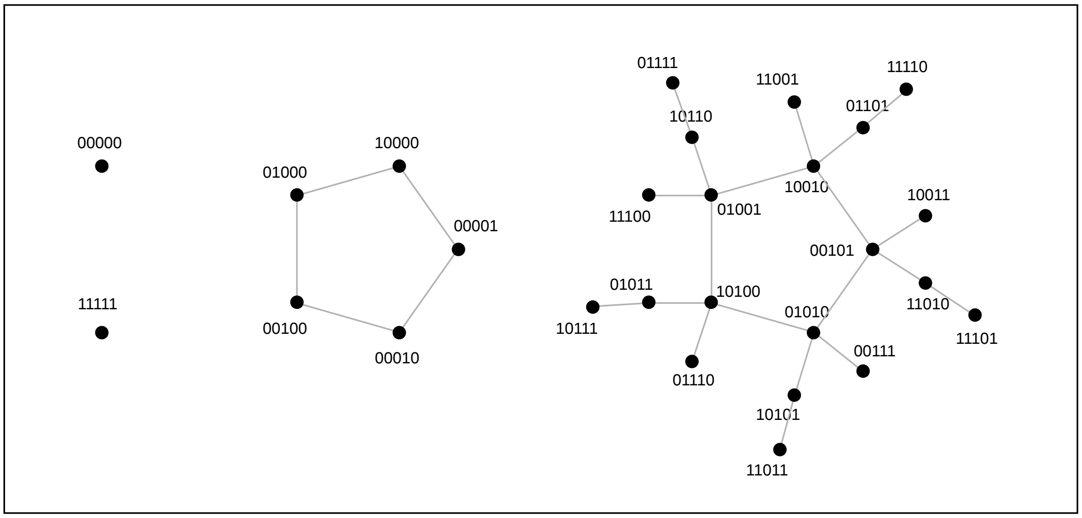
$$\Phi^2(10111) = \Phi(01011) = 10100$$

$$\Phi^2(01111) = \Phi(10110) = 01001$$

$$\Phi^2(11110) = \Phi(01101) = 10010$$

$$\Phi^2(11101) = \Phi(11010) = 00101$$

Deste modo, podemos afirmar que o diagrama de Wuensche correspondente às dinâmicas apresentadas, é dado por



7.

A partir do diagrama de Wuensche (incompleto) apresentado, podemos dizer desde já que o autómato celular elementar em causa tem quatro atractores: dois pontos fixos, as configurações homogéneas C_0 e C_1, um 3-ciclo, formado pelas configurações 100100, 001001 e 010010, e, finalmente, um 6-ciclo, cujas configurações passamos a determinar:

$$\Phi^4(111011) = 000010$$

$$\Phi^4(110111) = 000100$$

$$\Phi^4(101111) = 001000$$

$$\Phi^4(011111) = 010000$$

$$\Phi^4(111110) = 100000$$

$$\Phi^4(111101) = 000001$$