



Exercício 3.1 Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínios:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{|x|}{x}$$

$$\text{b) } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2} - 1$$

$$\text{c) } f: ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x-1}{x+1}$$

Exercício 3.2 Considere as seguintes funções:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2$$

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x$$

$$i(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in ]-1, 2] \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus ]-1, 2] \end{cases}$$

a) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.

b) Determine  $f([-1, 1])$ ,  $i([-1, 0])$ ,  $i([-1, 3])$ ,  $f^{-1}(\{1\})$ ,  $h^{-1}(\{0\})$  e  $g^{-1}([-1, 3])$ .

Exercício 3.3 Sejam  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por

$$f(x) = \sin x - x \quad \text{e} \quad g(x) = 2\sqrt{x}.$$

Caracterize a função  $f \circ g$ .

Exercício 3.4 Para a função  $h$  dada indique duas funções  $f$  e  $g$ , diferentes da identidade, tais que  $h = f \circ g$ :

$$\text{a) } h(x) = \sin\left(\frac{5}{x^2-4}\right);$$

$$\text{b) } h(x) = \cos(x^2 + 2) + \frac{1}{x^2+2};$$

$$\text{c) } h(x) = \sqrt{x-1} - 2x + 2.$$

Exercício 3.5 Considere a função  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \longmapsto x|x|$$

Justifique que  $f$  é invertível e determine a sua inversa.

Exercício 3.6 Considere a função  $f: [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- a)  $f([0, 3]) = [-2, 1]$ ;
- b) existe  $x \in [1, 3]$  tal que  $f(x) = -1$ ;
- c) não existe  $x \in [-3, 0]$  tal que  $f(x) = 2$ .

Exercício 3.7 Considere a função  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Esboce o gráfico da função  $g$  definida por:

$$x \longmapsto |x|$$

- a)  $g(x) = f(x) + 2, x \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $g(x) = f(x + 2), x \in \mathbb{R}$ ;
- c)  $g(x) = 2f(x), x \in \mathbb{R}$ ;
- d)  $g(x) = f(2x), x \in \mathbb{R}$ ;
- e)  $g(x) = \max\{f(x), 2\}, x \in \mathbb{R}$ ;
- f)  $g(x) = \min\{f(x), 1\}, x \in \mathbb{R}$ .

Exercício 3.8 Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a) a função  $f: [0, 1] \cup [2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$  é estritamente crescente;
- b) a função  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $\frac{\pi}{2}$ ;  

$$x \longmapsto \sin(4x)$$
- c) a função  $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  é minorada mas não é majorada.  

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$