Ficha 9 [Testes de hipóteses]

② a) $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$

Erro Tipo I

$= P(X = \{1, 2, 3, 5\} \mid H_0 = p_0)$

$= 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.5$

b) $\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid \overbrace{H_0 \text{ é falsa}}^{H_1 \text{ é verdadeira}})$

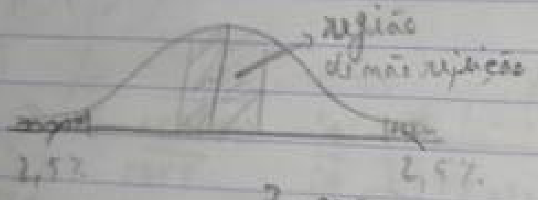
$= P(X = \{4, 6\} \mid H_1 = p_1)$

$= 0.2 + 0.1 = 0.3$

⑩ $\alpha = 0.05 \longrightarrow IC = 95\%$ Depende do valor de prova

$\begin{cases} H_0 : \dots \\ H_1 : \dots \end{cases}$ p-value = ? < 0.05

. H_0 é rejeitada com $\alpha = 0.05$



$z_{0.975} = 1.96$

a) $\alpha = 0.01$ (1%) $1 - 0.025 = 0.975$

Exemplo: Considerando 0.03

$p = 0.03 < 0.05$ Rejeitada

$\underbrace{0.03 < 0.01}_{\text{Falso}}$

. Não sabemos qual é o valor de prova.

Se p-value < 0.01 rejeitamos

p-value > 0.01 não rejeitamos.

Quando é rejeitado o p-Value é menor que o nível de significância

b) p-value = ? < 0.05 < 0.10

$\downarrow$

Rejeitamos H_0

. Como o p-value é menor que o nível de significância 0.05, então p-value < 0.10, rejeitamos assim H_0.

---

(11) p-value = 0.0316

a) $0.0316 > 0.01 \Rightarrow$ Não rejeitamos H_0

b) $0.0316 < 0.05 \Rightarrow$ Rejeitamos H_0

c) $0.0316 < 0.10 \Rightarrow$ Rejeitamos H_0

(12) $\mu_0 = 84.3 \quad \sigma = 8.6 \quad \bar{x} = 87.7 \quad \alpha = 0.01$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 84.3 \\ H_1 : \mu > 84.3 \end{cases}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{87.7 - 84.3}{8.6 / \sqrt{45}} = 2.652$$

plo critico

$Z > \boxed{Z_{1-\alpha}} \Leftrightarrow 2.652 > 2.325$

$\downarrow$

$Z_{1-0.01} = Z_{0.99}$

pertence à região de rejeição

. Logo rejeitamos H_0

p-value

$. P(Z > Z_{obs}) = P(Z > 2.652) = 1 - P(Z \leq 2.652) =$

$= 1 - 0.996 = 4 \times 10^{-3} < 0.01$

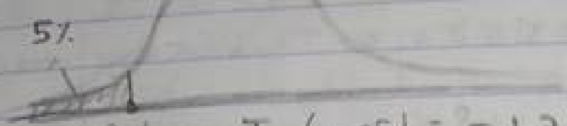
Rejeitamos H_0

(15) $n = 12 < 30$, $\bar{x} = 33.6$ $\quad s = 2.3$

$\alpha = 0.05$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 35 \\ H_1: \mu < 35 \end{cases}$$

Estatística de teste — $T = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{33.6 - 35}{\frac{2.3}{\sqrt{12}}} = -2.10$



Ponto crítico $= T_{11}(0.05) = -1.796$

$T < T_{11}(0.05) = -1.796 < -2.10$

Rejeitamos

Resposta: Há evidência estatística, com um nível de significância 0.05, que podemos rejeitar a $H_0 = \mu = 35$ seg.

(17) $n = 10$ $\quad \alpha = 0.05$ $\quad \mu_A \to$ Antes $\quad \mu_D \to$ Depois

$$\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_D \to \text{não eficaz} \\ H_1: \mu_A > \mu_D \to \text{eficaz} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_A - \mu_D = 0 \Leftarrow (\text{supômos}) \\ H_1: \mu_A - \mu_D > 0 \end{cases}$$

Antes	45	73	46	124	33	57	34	26	17	[illegible]
Depois	36	60	44	119	35	51	29	24	11	[illegible]
D	9	13	2	5	-2	6	5	2	6	6

$$\bar{D}_i = \frac{9 + 13 + 2 + 5 - 2 + 6 + 5 + 2 + 6 + 6}{10} = 5.2$$

$$T = \frac{\bar{D} - (\mu_A - \mu_B)}{\frac{S_D}{\sqrt{10}}} = \frac{5.2 - 0}{\frac{4.077}{\sqrt{10}}} = 4.033 > 1.833$$

$T_9(0.05) = 1.833$

$\in$ região crítica

. Podemos rejeitar a H0 da ineficiência do programa.
Portanto é eficaz.

(19) X: "Teor de nicotina"   . A e B são independentes

	n	$\bar{x}$	s
A	50	2.61	0.12
B	40	2.38	0.14

$\alpha = 0.05$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0.2 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0.2 \end{cases}$$ Teste bilateral

$$Z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} = \frac{(2.61 - 2.38) - 0.2}{\sqrt{\frac{0.12^2}{50} + \frac{0.14^2}{40}}} =$$

$= \underline{1,0756} < 1.96$

$0.975 = 1.96$ (ponto crítico)

. Não rejeitamos.

(22) $n = 54$ $\quad Z = \dfrac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0,1)$

$\hat{p} = \dfrac{25}{54}$

$\pi = p = \dfrac{1}{3}$

$\begin{cases} H_0: \pi = \frac{1}{3} \ (\pi_0) \\ H_1: \pi > \frac{1}{3} \end{cases}$ } Unilateral à direita

$Z = \dfrac{\frac{25}{54} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}{54}}} = \dfrac{\frac{7}{54}}{\sqrt{\dfrac{2/9}{54}}} = \dfrac{7\sqrt{54}}{54\sqrt{\ }} = 2.021$

Pertence à região de rejeição, logo

rejeitamos a H_0. $2.021 > 1.645$

$Z_{0.95} = 1.645$

Ponto crítico

(25)

1990	(1)	371	0.25
1995	(2)	459	0.33

$\gg 30$

$\begin{cases} H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0 \\ H_1: \underbrace{\pi_1 < \pi_2}_{\text{unilateral à esquerda}} \end{cases}$

$Z = \dfrac{(0.25 - 0.33) - 0}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

$= \dfrac{-0.08}{\sqrt{0.294(0.294)\left(\frac{1}{371} + \frac{1}{459}\right)}}$

$p = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} =$

$= \dfrac{\ldots + 151{,}47}{830} = 0.294$

$= -2.5146$

Como $-2.5146 < -1.645$

Rejeitamos H_0

(26) $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq 0.36 \quad (\sigma^2 \\ H_1: \sigma^2 > 0.36 \end{cases}$ $\qquad \alpha = 0.05$, $m = 18$, $s^2 = 0.68$

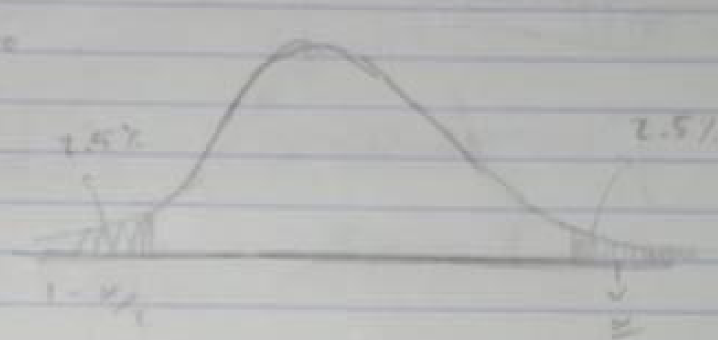
unil. direita

$$Q = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{17 \times 0.68}{0.36} \simeq 32.11 \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\chi_{17}(0.05) = 27.58711$$

$32.11 > \boxed{27.58711}$ Rejeitamos H_0

Ponto crítico



(28) $m_1 = 13$, $m_2 = 16$ | $s_1^2 = 19.2$, $s_2^2 = 3.5$

$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \iff H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

$$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{19.2}{3.5} = \underbrace{5.4857 > F_{12,15}(0.025)}_{\text{Rejeitamos } H_0}$$

$F_{12,15}(0.025) = 2.96$

ANOVA - análise de variâncias

Ficha 10

efeito dos tratamentos é nulo

① a) $\begin{cases} H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C \Leftrightarrow \boxed{\alpha_i = 0}, \forall i \in \{A, B, C\} \\ H_1: \alpha_i \neq 0 \ (\exists i) \end{cases}$

existe pelo menos um tratamento que seja melhor

tratamentos

$SQT = \dfrac{(16.9^2 + 22.1^2 + 17.3^2)}{5_{n_j}} - \dfrac{56.3^2}{15_{N}} = \underline{3.35}$

totais

variância $\cdot$ ($STQ = (3.2^2 + 4.1^2 + \dots + 4.2^2) - \dfrac{56.3^2}{15} = \underline{5.74}$

residuais

$SQR = STQ - SQT = 5.74 - 3.35 = \underline{2.39}$

	A	B	C	
	3.2	4.9	3	
	4.1	4.5	2.9	
$j=5$	3.5	4.5	3.7	
$N = 3 \times 5 = 15$	3	4	3.5	
	3.1	4.2	4.2	
$T_{\cdot j}$	16.9	22.1	17.3	56.3 T

②

A	73	64	67	62	70	336
B	84	80	81	77		322
C	82	79	71	75		307
						965 Total

$SQT = \dfrac{336^2}{5} + \dfrac{322^2 + 307^2}{4} - \dfrac{965^2}{13} = \underline{429.76}$

$STQ = (73^2 + \dots + 75^2) - \dfrac{965^2}{13} = \underline{602.31}$

$SQR = 602.31 - 429.76 = 172.55$

média

1.a) MQT = $\frac{SQT}{2} = \frac{3.35}{2} = 1.675$

g.l.

$F_{2,12}$ (0.05) Ponto crítico = 3.89

g.l. (15-3)

tratamentos, resíduos

. MQR = $\frac{2.39}{15-3} = 0.199$

$\boxed{. F = \frac{MQT}{MQR}} = \frac{1.675}{0.199} = 8.417$

. 8.417 > 3.89 → pertence à região de rejeição

⇓

Rejeitamos Ho (efeitos são diferentes)

b) IC 90% → $\alpha = 0.10$

$(\bar{y}_B - \bar{y}_C) \pm \underbrace{t_{15-3,\,0.05} \cdot \overbrace{\sqrt{0.199}}^{\sqrt{MQR}}}_{} \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}$ ⇔

⇔ $(4.42 - 3.46) \pm 1.782 \cdot \sqrt{0.199}\,\sqrt{2/5} = 0.96 \pm 0.5027$

$\alpha = 0.05$

$\begin{cases} H_0 = \alpha_i = 0 \\ H_1 = \alpha_i \neq 0 \end{cases}$

. MQT = $\frac{SQT}{2} = \frac{429.76}{2} = 214.88$

g.l.

. MQR = $\frac{SQR}{(13-3) \to 10} = \frac{172.55}{10} = 17.255$

$F_{2,10}$ (0.05) Ponto c. = 4.10

. F = $\frac{MQT}{MQR} = \frac{214.88}{17.255} = 12.453 > 4.10$,

rejeitamos Ho, logo há diferenças verdadeiras

⑤ a) $\begin{cases} H_0: \alpha_i = 0 \\ H_1: \alpha_i \neq 0, \exists i \end{cases}$

Blocos		T_i
1	—	56
2	—	28
3	—	48
4	—	24
5	—	44
		200

Mag		T_j
1	—	30
2	—	80
3	—	55
4	—	35

1° $SQT = \frac{30^2 + 80^2 + 55^2 + 35^2}{5} - \frac{200^2}{20} = 310$

$F_1 = \frac{MQT}{MQR}$ $\quad MQT = \frac{310}{3} \simeq 103.33$

$K = 4 - 1$

2°. $STQ = (12^2 + 20^2 + 13^2 + \dots + 14^2 + 6^2) - \frac{200^2}{20} = 518$

3°. $SQB = \frac{56^2 + 28^2 + 48^2 + 24^2 + 44^2}{4} - \frac{200^2}{20} = 184$

$\Downarrow$

$MQB = \frac{184}{4} = 46$

4°. $SQR = 518 - 310 - 184 = 24 \Rightarrow \frac{24}{12} = 2$

g.l. $\underbrace{(k-1)}_{3} \cdot \underbrace{(b-1)}_{4}$

5°. $F_1 = \frac{MQT}{MQR} = \frac{103.33}{2} = 51.67$

(6) $F_{3,12}(0.05) = \boxed{3.49 < 51.67}$

(7°) Rejeitamos H_0 pois há evidência estatística c/ 95% Int. confiança que existe pelo menos 1 tratamento cuja média se afasta dos outros tratamentos.

$$F_2 = \frac{MQB}{MQR} = \frac{46}{2} = 23 \quad , \quad F_{1,12}(0.05) = 3.26 < 23$$

Rejeitamos H_0

// — //

Ficha 11 Teste Qui-Quadrado

(2)

Trimestre	f_i (frequência)	e_i (estimadas)
1°	110	120 2x
2°	57	60 x
3°	53	60 x
4°	80	60 x
Total	300	300

1° 2° 3° 4°

$2x + x + x + x = 300 \Leftrightarrow x = 60 \ (e_i)$

$$\begin{cases} H_0: p_1 = \frac{2}{5}, \ p_2 = \frac{1}{5}, \ p_3 = \frac{1}{5}, \ p_4 = \frac{1}{5} \\ H_1: \exists \text{ um trimestre cuja proporção é diferente do que se supôs} \end{cases}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(110-120)^2}{120} + \frac{(57-60)^2}{60} +$$

$$+ \frac{(53-60)^2}{60} + \frac{(80-60)^2}{60} \simeq 8.47$$

$$\begin{cases} e_i = \overset{300}{n} \times p_i \\ e_4 = 300 \times \frac{1}{5} = 60 \end{cases}$$

Ponto crítico:

$$\chi^2_{3(0.05)} = 7.81473$$

- Portanto, como $Q \simeq 8.47 > \chi^2_3(0.05) = 7.81473$ pertence a região de rejeição $\Rightarrow$ rejeita-se H_0

(4)

N^o	f_i	$p_i = P(x = x_i)$	$e_i = 300 \cdot p_i$
0	19	0.0907	27.21
1	48	0.2177	65.31
2	66	0.2613	78.39
3	74	0.2090	62.7
4	44	0.1254	37.62
5	35	0.0602	18.06
6	10	0.0241	7.23
≥ 7	4	0.0116	3.48
Total	300	1	300

$$\left(p_0 = P(x=0) = \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^0}{0!} = 0.0907 \right)$$

- $Q = \dfrac{(19 - 27.21)^2}{27.21} + \dots + \dfrac{(4 - 3.48)^2}{3.48} \simeq 29.16$

- Ponto crítico: $\chi^2_{6}(0.05) = 12.59$

Como $Q > \chi^2_6(0.05) \Rightarrow$ rejeitamos H_0.

9) nº partículas ⟶ f_i e_i

5-9	1	1.79
10-14	10	11.78
15-19	37	32.45
20-24	36	35.57
25-29	13	15.54
30-34	2	2.68
35-39	1	1.9
	100	

a) . $\bar{x} = \frac{7\times1 + 12\times10 + 17\times37 + 22\times36 + 27\times13 + 32\times2 + 37\times1}{100}$

$= 20$

. $s = \sqrt{\frac{(7-20)^2\times1 + (12-20)^2\times10 + \cdots + (37-20)^2\times1}{99}} =$

$\simeq 5$

. $\underbrace{f_i \leq 5}_{\text{classe } \geq 7}$

. 20% × 8 = 1.6 classes

↳ só pode haver no máximo 20% das classes com $f_i \leq 5$

2.) Todas as classes têm que ter $f_i \geq 1$

. Quando não se verifica alguma destas regras juntam-se classes adjacentes.

$P(X < 9.5) = P\left(\frac{X-20}{5} \leq \frac{9.5-20}{5}\right) = P(Z < -2.1) = 0.0179$