

Teste 2 - resolução

Parte I (8 valores)

Obs.: As justificações aqui apresentadas são extensas, no intuito de permitir ao aluno uma total compreensão dos raciocínios envolvidos. Na correcção das provas não é exigido ao aluno este nível de detalhe, bastando-lhe referir os conceitos envolvidos e como se relacionam.

1. Duas fontes laser com a mesma potência, emitem luz de cor diferente: verde (532 nm) e vermelha (633 nm). Por unidade de tempo, o laser verde emite
 - 1.1 ☐ maior ☒ a mesma ☐ menor quantidade de energia que o laser vermelho.
 - 1.2 ☒ maior ☐ a mesma ☐ menor quantidade de energia luminosa que o laser vermelho.
 - 1.3 ☐ maior ☐ o mesmo ☒ menor número de fotões que o laser vermelho.

- 1.1 A potência da fonte laser é a quantidade de energia (radiante) que emite por unidade de tempo (fluxo radiante). As duas fontes têm a mesma potência, ou seja, por unidade de tempo emitem a mesma energia.

$$P = \Phi_e = \frac{Q_e}{\Delta t}$$

- 1.2 O fluxo luminoso emitido (energia luminosa emitida por unidade de tempo) por uma fonte é a parte do fluxo radiante emitido que gera uma resposta visual:

$$\Phi_v = \frac{Q_v}{\Delta t}; \quad \Phi_v(\lambda) = 685 \times V(\lambda) \times \Phi_e(\lambda)$$

Uma vez que o fluxo radiante Φ_e é o mesmo, e que a resposta visual, quantificada pelo factor $V(\lambda)$ (eficiencia luminosa), é maior para o verde que para o vermelho, o fluxo luminoso do laser verde é superior ao do laser vermelho.

- 1.3 O número de fotões emitidos por cada laser obtém-se dividindo a energia emitida pela energia dos fotões correspondentes. A energia de um fotão está directamente relacionada com a frequência da radiação: $E_f = hf$, e a relação entre a frequência e o comprimento de onda (no vazio) é dada por $\lambda f = c$. Uma vez que a energia de cada fotão verde (maior f) é superior à do vermelho, à mesma quantidade de energia Q_e emitida corresponde menor número de fotões verdes.

$$N_f = \frac{Q_e}{E_f}; \quad E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

2. Coloca-se um objecto real a 4 cm de um espelho esférico côncavo de 20 cm de raio. A imagem formada será

<input type="checkbox"/> real	<input type="checkbox"/> virtual
<input type="checkbox"/> direita	<input type="checkbox"/> invertida
<input type="checkbox"/> maior que o objecto	<input type="checkbox"/> menor que o objecto



$$M_t = -\frac{s_i}{s_o}; \quad \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}; \quad f = \frac{R}{2}$$

Com $R = +20$ cm (espelho côncavo: $R > 0$) e $s_o = 4$ cm, resulta:

$$s_i = -20/3 \text{ cm}; \quad M_t = 5/3$$

$$\begin{cases} s_i < 0 & \text{A imagem é virtual} \\ M_t > 0 & \text{A imagem é direita} \\ |M_t| > 1 & \text{A imagem é maior que o objecto} \end{cases}$$

De acordo com a notação seguida nesta UC, a equação que relaciona as posições do objecto e da imagem correspondente é a mesma para espelhos e lentes esféricas:

$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}$$

onde f indica a posição dos focos.

No caso dos espelhos esféricos,

$$f = \frac{R}{2}$$

onde $|R|$ é o raio de curvatura do espelho. O sinal de R depende da concavidade do espelho: $R < 0$ para um espelho convexo e $R > 0$ para um espelho côncavo.

A orientação e dimensão relativas da imagem é dada pela ampliação transversa

$$M_t = -\frac{s_i}{s_o}$$

Da equação dos espelhos esféricos resulta

$$s_i = \frac{f s_o}{s_o - f} \quad \text{e} \quad M_t = -\frac{s_i}{s_o} = \frac{f}{f - s_o}$$

Para um espelho côncavo: $f > 0$, e portanto:

$$s_o > 0 \text{ (objecto real)} \rightarrow |M_t| > 1 \text{ (imagem maior que o objecto)}$$

$$s_o < f \rightarrow s_i < 0 \text{ (imagem virtual)} \quad \text{e} \quad M_t > 0 \text{ (imagem direita)}$$

3. Fazendo incidir um feixe de radiação monocromática, de comprimento de onda λ , sobre determinado fotocátodo, verifica-se que é gerada uma corrente de fotoelectrões.

3.1 A função de trabalho do material deste fotocátodo é seguramente ☐ inferior a hc/λ

3.2 Aumentando a intensidade do feixe incidente, a energia cinética dos fotoelectrões emitidos ☐ mantém-se

3.3 Com radiação de menor comprimento de onda, os fotoelectrões serão emitidos com uma energia cinética ☐ superior

Cada fotão da radiação incidente pode excitar um electrão do fotocátodo cedendo-lhe toda a sua energia. A energia de um fotão de radiação de comprimento de onda λ é

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

- 3.1 A função de trabalho do material do fotocátodo, w , é a energia necessária para remover um electrão do material, correspondendo pois ao limiar de energia de excitação dos electrões para que se verifique uma fotocorrente.

Uma vez que há fotocorrente, a energia transferida para os electrões terá de ser superior à função de trabalho do fotocátodo, isto é,

$$\frac{hc}{\lambda} > w$$

- 3.2 Um electrão excitado perde parte da energia recebida para se libertar do material. A energia excedente corresponde à energia cinética dos fotoelectrões:

$$E_c = hf - w$$

A intensidade de um feixe define a quantidade de energia radiante propagada por unidade de ângulo sólido, por unidade de tempo. A energia radiante quantifica-se em termos de fotões. No caso de radiação monocromática, todos os fotões transportam a mesma energia $E_f = hf$, e a energia radiante é determinada pelo número de fotões envolvidos.

Um aumento da intensidade do feixe incidente (da mesma radiação monocromática) corresponde a um aumento do número de fotões incidentes, que se traduz num aumento do número de electrões excitados, por unidade de tempo. Contudo, uma vez que a energia de cada fotão se mantém (λ é o mesmo), a energia cinética dos fotoelectrões emitidos também se manterá.

- 3.3 A energia de um fotão é inversamente proporcional ao seu comprimento de onda. Portanto, com radiação de menor comprimento de onda os electrões são mais excitados, traduzindo-se num aumento da energia cinética dos fotoelectrões.

. Resumindo:

- maior intensidade da radiação incidente (do mesmo comprimento de onda) → mais electrões excitados
- maior frequência (menor comprimento de onda) da radiação incidente → electrões mais excitados

4. (V/F) A profundidade de campo na fotografia depende da escolha do diafragma. Uma diminuição do diâmetro do diafragma.

- ☐ aumenta a profundidade de campo.
- ☐ reduz a profundidade de campo.
- ☐ aumenta a difracção nos bordos do sistema óptico.
- ☐ aumenta a resolução da imagem.
- ☐ reduz as aberrações esféricas da lente.

O diafragma regula a amplitude angular dos raios mais marginais que incidem na lente contribuindo para a formação da imagem, isto é, regula a abertura numérica do sistema:

$$AN = \frac{D}{2f} = \frac{1}{2k},$$

onde $k = f/D$.

Com a mesma lente, quanto menor for o diâmetro D do diafragma maior é o valor do número k , e menor é a abertura numérica do sistema.

Profundidade de campo — gama de distâncias em torno do plano de focagem em que se obtém imagem com nitidez aceitável: é maior para maiores valores do número $k = \frac{f}{D}$.

Para a mesma lente (mesmo f) a profundidade de campo é tanto maior quanto menor for o diâmetro D do diafragma.

O tamanho do disco de difracção,

$$d = 1,22 \frac{\lambda}{AN} = 2,44 \lambda \times \frac{f}{D} = 2,44 \lambda \times k$$

é proporcional ao número $k = \frac{f}{D}$.

Para a mesma lente, a dimensão do disco de difracção (de Airy) aumenta com a diminuição de D .

Para valores de D abaixo de determinado limite, o disco de Airy toma dimensões perceptíveis, diminuindo a resolução da imagem.

Em lentes e espelhos esféricos, raios periféricos (raios incidentes em zonas mais afastadas do eixo óptico) e raios paraxiais (raios que incidem próximo do eixo) provenientes do mesmo ponto-objecto, convergem para pontos diferentes. Este efeito dá origem às aberrações esféricas da imagem.

A diminuição do diâmetro do diafragma elimina os raios mais periféricos, reduzindo aquele efeito.

Obs.: Estritamente falando, a equação de Gauss apenas é válida na aproximação paraxial, isto é, para raios de pequena amplitude angular, que incidem na lente junto ao seu eixo óptico.

Parte II (12 valores)

1. O máximo da distribuição espectral do fluxo radiante emitido por determinado corpo cinza ocorre para o comprimento de onda de $10,6 \mu\text{m}$ (na região do infravermelho). A temperatura do corpo é aumentada até que o fluxo total emitido se torne três vezes maior. Determine:

- 1.1 as temperaturas inicial e final do corpo;
- 1.2 a nova posição do máximo da distribuição espectral.

O fluxo radiante, Φ , emitido por um corpo por unidade de área, é a excitância (poder emissivo ou emitância) radiante, M , do corpo.

1.1 O espectro de emissão de um corpo cinza é idêntico ao de um corpo negro à mesma temperatura ($M_\lambda(T) = \varepsilon M_\lambda^{bb}(T)$), exibindo um pico de emissão para um determinado comprimento de onda cujo valor, $\lambda_{\text{máx}}$, apenas depende da temperatura T do corpo.

À temperatura inicial, T_1 , o pico de emissão do corpo ocorre para o comprimento de onda de $10,6 \mu\text{m}$, portanto, da lei de Wien,

$$T_1 = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{10,6 \times 10^{-6}} = 273 \text{ K}$$

↙ Pico da emitância espectral

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{b}{T}$$

$$b = 2,897\,769 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Lei de Wien

A temperatura do corpo é aumentada até que o fluxo total emitido se torne três vezes maior, isto é, a temperatura final do corpo, T_2 , é tal que $\Phi(T_2) = 3 \times \Phi(T_1)$. Ora, pela lei de Stefan-Boltzmann,

$$\frac{\Phi(T_2)}{\Phi(T_1)} = \frac{M(T_2)}{M(T_1)} = \frac{T_2^4}{T_1^4}$$

$\Phi = A \times M$, com A a área da superfície emissora do corpo

Portanto

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 3 \Leftrightarrow T_2 = 359 \text{ K}$$

Corpo cinza - a mesma emissividade para todos os comprimentos de onda: $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$

$$M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda = \varepsilon \sigma T^4$$

1.2 De novo pela lei de Wien, o comprimento de onda para o qual se verifica o pico de emissão do corpo à temperatura final T_2 é:

$$\lambda_{\text{máx},2} = \frac{b}{T_2} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{359} = 8,07 \times 10^{-6} \text{ m} = 8,07 \mu\text{m}$$

2. Um feixe de raios paralelos incide no topo de um cilindro de vidro ($n_2 = 1,56$) com um ângulo de incidência de 45° .

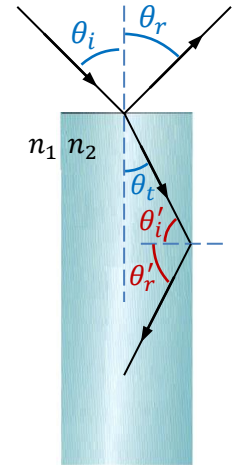
2.1 Que acontece ao feixe nesta interface? Faça um esboço ilustrativo.

2.2 Determine a direcção do feixe refractado.

2.3 Que acontece ao feixe refractado quando incide na superfície lateral do cilindro? Faça um esboço ilustrativo. Represente todos os ângulos envolvidos, indicando o seu valor.

2.1 Na interface ar—vidro ($n_{ar} < n_{vidro}$) há reflexão e refacção, portanto parte do feixe incidente é reflectida e parte é transmitida (refractada).

Na figura: $\theta_i = 45^\circ$ é o ângulo de incidência,
 $\theta_r = \theta_i$ é o ângulo de reflexão
 θ_t é o ângulo de transmissão



2.2 A direcção do feixe transmitido é dada pela lei de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Na interface ar-vidro, $\theta_1 = \theta_i = 45^\circ$ e $\theta_2 = \theta_t$:

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \Leftrightarrow \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \Leftrightarrow \sin \theta_t = \frac{1}{1,56} \sin 45^\circ \Leftrightarrow \theta_t = 27^\circ$$

2.2 Na interface vidro—ar há reflexão mas, dado que $n_{vidro} > n_{ar}$, poderá ou não haver refacção, dependendo do valor do ângulo de incidência ser ou não inferior ao ângulo crítico da interface:

$$\sin \theta_c = \frac{n_{ar}}{n_{vidro}} \Leftrightarrow \sin \theta_c = \frac{1}{1,56} \Leftrightarrow \theta_c = 39,7^\circ$$

O feixe transmitido incide na superfície lateral do cilindro com um ângulo de incidência $\theta'_i = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$, portanto $\theta'_i > \theta_c$, pelo que não haverá refacção: todo o feixe incidente na superfície lateral do cilindro é reflectido – dá-se uma reflexão interna total.

Pela lei da reflexão, $\theta'_r = \theta'_i = 63^\circ$

Ao tentar determinar o ângulo de transmissão na interface vidro—ar, pela lei de Snell com $\theta_1 = \theta'_i$ e $\theta_2 = \theta'_t = 63^\circ$, obtém-se:

$$n_1 \sin \theta'_t = n_2 \sin \theta'_i \Leftrightarrow \sin \theta'_t = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta'_i = 1,56 \times \sin 63^\circ \Leftrightarrow \sin \theta'_t = 1,39$$

o que é claramente impossível, indicando a ausência de transmissão do feixe.

3. Uma lente esférica convexo-côncava ($n_l = 1.5$) tem raios de curvatura 20.0 cm e 40.0 cm, e 60 mm de diâmetro. Um objecto encontra-se a uma distância de 30 cm da lente. Determine:

- 3.1 a distância focal da lente;
- 3.2 a posição da imagem formada pela lente;
- 3.3 a ampliação da imagem;
- 3.4 o diâmetro do foco da lente (para luz paralela de comprimento de onda $\lambda = 550$ nm).

3.1 f : distância focal da lente.

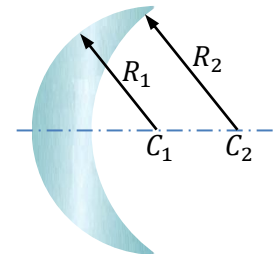
Para lentes esféricas delgadas:

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$n_{lm} = \frac{n_l}{n_m} = 1.5 \rightarrow \text{meio: ar}$$

$$R_1 = +20.0 \text{ cm} \rightarrow \text{ambos os centros de curvatura no espaço imagem}$$

$$R_2 = +40.0 \text{ cm}$$



$$\frac{1}{f} = (1.5 - 1) \left(\frac{1}{20.0} - \frac{1}{40.0} \right) = \frac{0.5}{40} = \frac{1}{80} \Leftrightarrow f = 80 \text{ cm}$$

3.2 Equação de Gauss:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

Objecto a 30 cm da lente: $s_o = 30 \text{ cm}$:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{80} - \frac{1}{30} \Leftrightarrow s_i = -48 \text{ cm}$$

A imagem situa-se a 48 cm da lente, do lado do objecto (imagem virtual)

3.3 Ampliação transversa:

$$M_t = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{f}{s_o - f}$$

$$M_t = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{-48}{30} = 1.6$$

A imagem é 1.6 vezes maior que o objecto.

3.4 A imagem do feixe (ponto onde o feixe focaliza) é um disco de Airy.

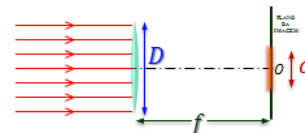
Diâmetro da lente: $D = 60 \text{ mm} = 6.0 \text{ cm}$

Comprimento de onda da luz incidente: $\lambda = 550 \text{ nm}$

$$d = 32.5 \times \lambda = 17.9 \mu\text{m}$$

Lente de diâmetro D e distância focal f

Diâmetro do disco central brilhante (disco de Airy):



$$d = 1.22 \frac{\lambda}{\text{AN}} = 1.22 \times 2 \frac{\lambda}{D/f}$$



4. Um feixe de luz monocromática de comprimento de onda λ incide sobre vidro ($n_2 = 1.6$) com uma camada de água e sabão de espessura $d = 0.10$ mm e índice de refração $n_1 = 1,33$. Considere incidência normal.

4.1 Determine a diferença de fase dos raios reflectidos nas interfaces I e II.

4.2 Para que valores de λ se observará interferência (parcialmente) destrutiva dos dois feixes?

4.1 Em incidência normal: $\theta_t = \theta_i = 0$. Os pontos A e C coincidem.

O percurso dos raios r_1 e r_2 no ar é o mesmo. Ambos sofrem uma inversão de fase na reflexão. Portanto, a diferença de fase dos raios corresponde simplesmente ao percurso óptico do raio r_2 na película de água e sabão:

i. de A a B: o percurso óptico do raio r_2 é $n_1 \times \overline{AB} = n_1 d$;

ii. de B a C: o percurso óptico do raio r_2 é $n_1 \times \overline{BC} = n_1 d$.

Os raios r_1 e r_2 incidem na lente com uma diferença de fase $\delta = 2n_1 d$

4.2 Observa-se interferência (parcialmente) destrutiva dos dois feixes quando os raios se encontram em oposição de fase, isto é, quando

$$\delta = m\lambda + \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

A interferência destrutiva ocorre para comprimentos de onda λ que obedecem à relação

$$2n_1 d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ou seja, para os valores de λ

$$\lambda = \frac{4n_1 d}{2m + 1} = \frac{532 \mu\text{m}}{2m + 1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Explicitamente para os quatro primeiros valores:

$$\lambda = 532 \mu\text{m}, \quad \frac{532}{3} \mu\text{m}, \quad \frac{532}{5} \mu\text{m}, \quad \frac{532}{7} \mu\text{m}, \quad \dots$$

$$(\lambda = 532 \mu\text{m}, \lambda = 177 \mu\text{m}, \lambda = 106 \mu\text{m}, \lambda = 76 \mu\text{m}, \dots)$$

