Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2011/12

Teste de frequência — 18 de Junho de 2012
13h00
Salas 2202, 2203, 2204, 2205

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **10** questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos do **Método A** só devem responder às questões 7, 8, 9 e 10, devendo entregar o teste ao fim de uma hora.*
- *Os alunos do **Método B** devem responder a todas as questões, devendo entregar o teste ao fim de duas horas e meia.*

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

Parte 1 — Método B

Questão 1 Sejam dadas as seguintes funções:

$$f = [\underline{True}\ , \neg \cdot \pi_2]$$
$$g = [k\ , \mathsf{succ} \cdot \pi_1]$$

onde $\neg :: Bool \to Bool$ é o operador booleano de negação e k é uma função arbitrária. Identifique, justificando, qual o tipo mais geral das expressões $[f\ , g]$ e $\langle f, g \rangle$.

Questão 2 Mostre que a expressão $[i_{11}\ , i_{22}] \cdot (\langle f, h \rangle + \langle g, k \rangle)$, onde $i_{11} = i_1 \times i_1$ e $i_{22} = i_2 \times i_2$, simplifica em $\langle f + g, h + k \rangle$.

Questão 3 Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h) \tag{1}$$

Questão 4 O conceito genérico de catamorfismo $(|g|)$ gerado pelo gene g é captado pela propriedade universal

$$k = (|g|) \quad \equiv \quad k \cdot in = g \cdot (\mathsf{F}\, k)$$

Mostre que:

$$(|f \cdot g|) \quad = \quad f \cdot (|g \cdot \mathsf{F}\, f|) \tag{2}$$

Questão 5 Considere a função seguinte

$$rd\ [\,] = 0$$
$$rd\ (c : l) = (digitToInt\ c) * 10 \uparrow (\mathsf{length}\ l) + rd\ l$$

que converte em números palavras que designam números, por exemplo, rd "1024" $= 1024$. Esta função é ineficiente por causa da invocação de length no caso recursivo, que degrada a sua *performance*. Para resolver esse problema, redefinem-se rd e length por forma a formarem um sistema de recursividade múltipla,

$$rd = g \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \cdot \mathsf{out}$$
$$len = i \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \cdot \mathsf{out}$$

para $\mathsf{F}f = id + id \times f$, onde

$$g = [\underline{0}\ , h]$$
$$h\ (c, (n, k)) = (digitToInt\ c) * 10 \uparrow k + n$$
$$i = [\underline{0}\ , j]$$
$$j\ (c, (n, k)) = 1 + k$$

Mostre que $rdlen = \langle rd, len\rangle$ é a função

$$rdlen\ [\,] = (0, 0)$$
$$rdlen\ (c : l) = ((digitToInt\ c) * 10 \uparrow k + n, 1 + k)\ \mathbf{where}\ (n, k) = rdlen\ l$$

em que a referida ineficiência já não existe.

Questão 6 Considere o hilomorfismo

$$f = [\![[g\ , h], (p \to i_1, i_2 \cdot k)]\!]$$

Represente f sob a forma de diagrama e mostre que f satisfaz a propriedade seguinte:

$$f = p \to g, h \cdot f \cdot k \tag{3}$$

Parte 2 — Métodos A + B

Questão 7 Demonstre a propriedade

$$\overline{f \cdot g} \quad = \quad \overline{f \cdot ap} \cdot \overline{g} \tag{4}$$

Questão 8 Mostre que o anamorfismo de números naturais

$$f \quad = \quad [\!((id + \pi_2) \cdot \mathsf{out})\!] \tag{5}$$

— em que $\mathsf{out} \cdot [nil\ , cons] = id$, para $nil\ \_ = [\,]$ e $cons = \widehat{(:)}$ — é o catamorfismo de listas

$$f \quad = \quad (\![[\underline{0}\ , \mathsf{succ} \cdot \pi_2]]\!) \tag{6}$$

para $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.

Questão 9 Considere o catamorfismo

$$
\begin{array}{l}
unzp :: \mathsf{LTree}\ (a, b) \rightarrow (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ b) \\
unzp = (\!|\langle \mathsf{in} \cdot (\pi_1 + \pi_1 \times \pi_1), \mathsf{in} \cdot (\pi_2 + \pi_2 \times \pi_2)\rangle|\!)
\end{array}
$$

que divide uma árvore de pares num par de árvores. Mostre, por absorção-cata, que a seguinte propriedade de cancelamento se verifica:

$$\pi_1 \cdot unzp \quad = \quad \mathsf{LTree}\ \pi_1 \tag{7}$$

Questão 10 Demonstre a lei *identidade-*$\bullet$

$$u \bullet f \quad = \quad f \quad = \quad f \bullet u$$

válida em qualquer mónade.
