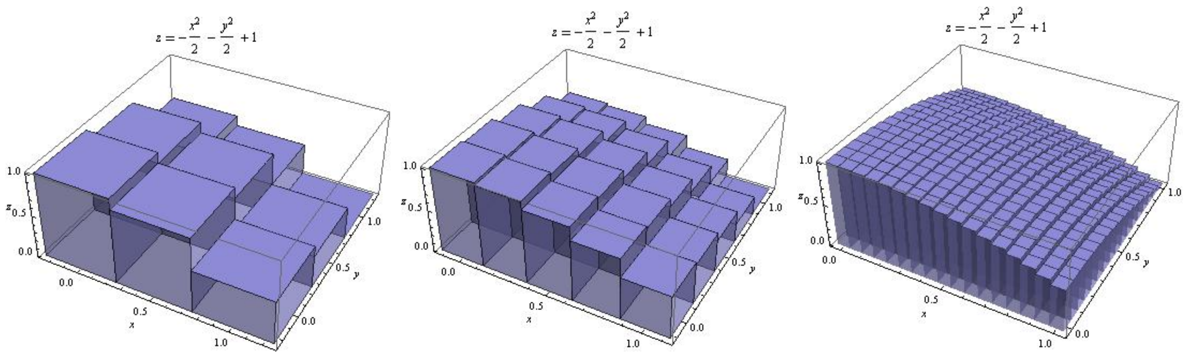
Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$: Integrais duplos

Exercício 5.1 Encontre aproximações várias (atente-se nas representações gráficas que se seguem) -por defeito e por excesso- para o volume do sólido limitado pelo parabolóide definido por $z = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$, pelos planos verticais definidos por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ e ainda pela região quadrada definida por $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$.



Exercício 5.2 Os valores tomados por f, função real de duas variáveis reais definida em $\mathcal{R} = [1, 1.2] \times [2, 2.4]$, são os da tabela seguinte

	1.0	1.1	1.2
2.0	5	7	10
2.2	4	6	8
2.4	3	5	4

Nestas condições,

a) encontre somas, superior e inferior, de Riemann para $\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA$, para $\Delta x = 0.1$ e $\Delta y = 0.2$.

b) encontre um valor médio para f em $\mathcal{R}$.

Exercício 5.3 Seja $\mathcal{R}$ um retângulo cujos vértices estão em $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$ e $(0, 4)$. Seja ainda f definida, em $\mathcal{R}$, por $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

a) Sem subdividir $\mathcal{R}$, encontre um limite superior e outro inferior para $\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA$.

b) Estime $\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA$, particionando $\mathcal{R}$ em quatro subretângulos à sua escolha e tomando f o seu máximo e o seu mínimo em cada um dos subretângulos.

Exercício 5.4 Se f definir a densidade da poluição, em microgramas por metro quadrado, quais as unidades em que estará definido e qual a interpretação prática do $\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA$?

Exercício 5.5 Seja $\mathcal{U}$ o círculo unitário centrado na origem. Sejam também $\mathcal{D}$ o semicírculo direito de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ o semicírculo inferior de $\mathcal{U}$. Sem efetuar quaisquer cálculos indique, justificando, qual o sinal de

a) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} dA$ **b)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{B}} dA$ **c)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} 5x\,dA$ **d)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{B}} 5x\,dA$

e) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} 5x\,dA$ **f)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} (y^3+y^5)\,dA$ **g)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{B}} (y^3+y^5)\,dA$ **h)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (y^3+y^5)\,dA$

i) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{B}} (y-y^3)\,dA$ **j)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} (y-y^3)\,dA$ **k)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} \operatorname{sen} y\,dA$ **l)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} \cos y\,dA$

m) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} e^x\,dA$ **n)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} xe^x\,dA$ **o)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{U}} xy^2\,dA$ **p)** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{B}} x\cos y\,dA$

Exercício 5.6 Foi deixado, numa mina abandonada, um monte de terra com 15 metros de altura e assente numa região plana. Admita que o plano do chão é o plano XOY e que a origem está exatamente por baixo do topo do monte; admita ainda que o semieixo positivo dos ZZ' aponta (a partir do chão) para cima.

Sabendo que a secção plana, de altura z (entre 0 e 15), está definida por $x^2+y^2=15-z$.

a) Que equação define o contorno da base do monte?

b) Qual a área ocupada pela base do monte?

c) Que equação define a secção do monte a $10m$?

d) Imagine o monte seccionado horizontalmente. Qual a área, $A(z)$, da secção de altura z?

e) Calcule e interprete $\displaystyle\int_0^{15} A(z)\,dz$.

Exercício 5.7 Ache o volume do sólido definido no exercício 5.1

Exercício 5.8 Calcule os seguintes integrais (simples):

a) $\displaystyle\int_0^x (2x-y)\,dy$ **b)** $\displaystyle\int_1^{2y} \frac{y}{x}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\,dy$ **d)** $\displaystyle\int_{e^y}^{y} ye^{-\frac{y}{x}}\,dy$

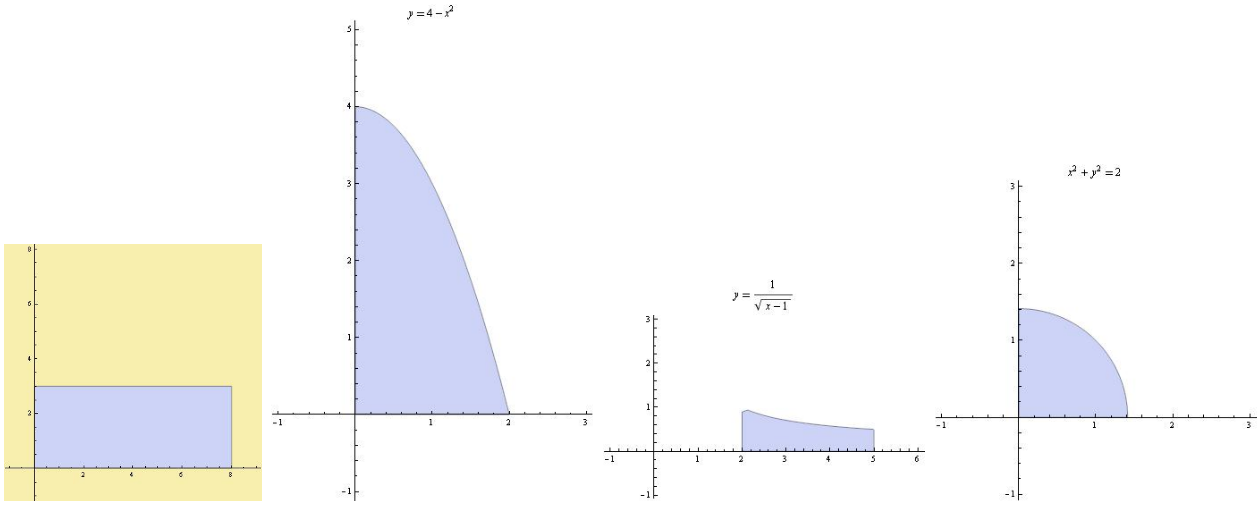
Exercício 5.9 Calcule,iteradamente, os seguintes integrais duplos:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (x+y)\,dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} (x^2-y^2)\,dA$ **c)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dA$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dA$ **e)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dA$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \theta r\,drd\theta$

g) $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_0^{\frac{1}{x}} y\,dA$ **h)** $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{xy}\,dxdy$

Exercício 5.10 Use um integral duplo para calcular as áreas das regiões sombreadas



Exercício 5.11 Esboce a região de integração e troque a ordem de integração

a) $\displaystyle\int_0^4\int_0^y f(x,y)\,dA$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} g(x,y)\,dA$ **c)** $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 h(x,y)\,dA$

Exercício 5.12 Esboce a região de integração, troque a ordem de integração e verifique que ambas as ordens conduzem à mesma área

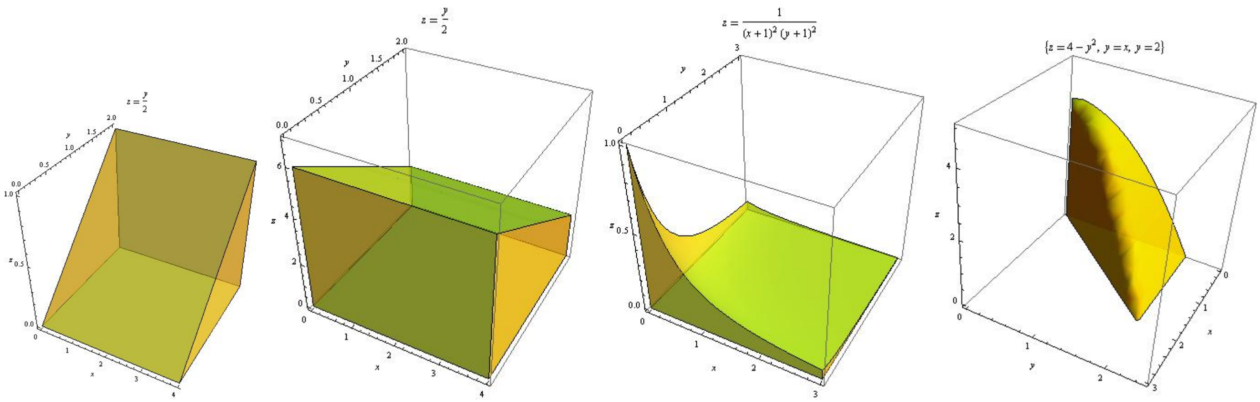
a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-{}^2}}^{\sqrt{1-{}^2}} dxdy$ **c)** $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dydx + \int_2^4\int_0^{4-x} dydx$

Exercício 5.13 Verdade ou Falsidade?

a) $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy?$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dydx = \int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dxdy?$

Exercício 5.14 Use um integral duplo para calcular os volumes dos seguintes sólidos



Exercício 5.15 Escreva um integral duplo para o cálculo do volume do sólido limitado pelos gráficos definidos pelas seguintes equações

a) $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$ e situado no 1º octante.

b) $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$.

c) $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ e situado no 1º octante.

d) $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 4$ e situado no 1º octante.

Exercício 5.16 Use coordenadas polares para descrever as seguintes regiões e calcule as áreas sombreadas, usando integrais duplos: