Regras de **I***ntrodução* | *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\not\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\to I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\psi}\to E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\wedge\psi}\wedge I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{array}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{array}}{\psi}\wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\not\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\neg I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}\neg E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee_2 I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\vee\psi\end{array}\quad\begin{array}{c}\not\varphi\\ \vdots\\ \sigma\end{array}\quad\begin{array}{c}\not\psi\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\vee E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\not\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}\quad\begin{array}{c}\not\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\leftrightarrow I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\psi}\leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}\quad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\varphi}\leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\not\neg\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}(RAA) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}(\bot)$$

Definição 104: Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula* φ *a partir de um conjunto de fórmulas* Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.

Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula* φ quando φ é a conclusão de D e todas as hipóteses de D estão canceladas. A uma derivação de φ chamaremos também uma *demonstração* de φ.

Definição 106: Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática* de Γ (notação: $\Gamma\vdash\varphi$) quando existe uma derivação de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Escreveremos $\Gamma\nvdash\varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Definição 107: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash\varphi$) quando existe uma demonstração de φ. Escreveremos $\nvdash\varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Definição 109: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma\vdash\bot$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma\nvdash\bot$, ou seja, quando não existem derivações de $\bot$ a partir de Γ).

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma\subseteq\mathcal{F}^{CP}$,

se $\Gamma\vdash\varphi$, então $\Gamma\models\varphi$.

Observação 115: O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas. De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma\not\models\varphi\Longrightarrow\Gamma\nvdash\varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Proposição 117: Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Teorema 118 (Completude): Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma\subseteq\mathcal{F}^{CP}$,

se $\Gamma\models\varphi$, então $\Gamma\vdash\varphi$.

Teorema 119 (Adequação): Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma\subset\mathcal{F}^{CP}$,

$\Gamma\vdash\varphi$ se e só se $\Gamma\models\varphi$.

Corolário 120: Para todo $\varphi\in\mathcal{F}^{CP}$, φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.

Exemplo 123: O terno $L_{Arit}=(\{0,s,+,\times\},\{=,<\},\mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(s)=1$, $\mathcal{N}(+)=2$, $\mathcal{N}(\times)=2$, $\mathcal{N}(=)=2$ e $\mathcal{N}(<)=2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética.*

Definição 127: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x\in\mathcal{V}$, $x\in\mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c\in\mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n\geq 1$,

$$t_1\in\mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n\in\mathcal{T}_L \implies f(t_1,...,t_n)\in\mathcal{T}_L,\text{ para todo } t_1,...,t_n\in(\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo* L ou, abreviadamente, L-*termos* .

Definição 137: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t num L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

a) $y[t/x]=\begin{cases} t, & se\ \ y=x\\ y, & se\ \ y\neq x\end{cases}$, para todo $y\in\mathcal{V}$;

b) $c[t/x]=c$, para todo $c\in\mathcal{C}$;

c) $f(t_1,...,t_n)[t/x]=f(t_1[t/x],...,t_n[t/x])$, para todo $f\in\mathcal{F}$ de aridade $n\geq 1$ e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$.

Definição 140: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma $R(t_1,...,t_n)$, onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1,...,t_n$ são L-termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo* L ou, abreviadamente, uma L-*fórmula atómica.* O conjunto das L-fórmulas atómicas é notado por At_L.

Definição 143: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi\in\mathcal{F}_L$, para todo $\varphi\in At_L$;

b) $\bot\in\mathcal{F}_L$;

c) $\varphi\in\mathcal{F}_L\implies(\neg\varphi)\in\mathcal{F}_L$, para todo $\varphi\in(\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi\in\mathcal{F}_L$ e $\psi\in\mathcal{F}_L\implies(\varphi\Box\psi)\in\mathcal{F}_L$, para todo $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi,\psi\in(\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi\in\mathcal{F}_L\implies(Qx\,\varphi)\in\mathcal{F}_L$, para todo $Q\in\{\exists,\forall\}$, para todo $x\in\mathcal{V}$ e para todo $\varphi\in(\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo* L ou, abreviadamente, L-*fórmulas.*

Definição 152: Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q\in\{\exists,\forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada.*

Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Definição 158: Uma variável x diz-se *substituível* (*sem captura de variáveis*) por um L-termo t numa L-fórmula φ quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y\notin VAR(t)$.

Observação 159: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L-formula φ ou t é um L-termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ.

Definição 163: Uma L-fórmula φ diz-se uma L-*sentença*, ou uma L-*fórmula fechada*, quando $LIV(\varphi)=\emptyset$.

Exemplo 170: As funções $\begin{array}{rcl} a_0:\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0\\ x & \mapsto & 0\end{array}$ e $\begin{array}{rcl} a^{ind}:\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0\\ x_i & \mapsto & i\end{array}$ são atribuições em E_{Arit}.

Definição 171: O *valor de um* L-*termo* t *numa* L-*estrutura* $E=(D,\overline{\ \ })$ *para uma atribuição* a em E é notado por $t[a]_E$ ou, simplesmente, por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), e é o elemento de D definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $x[a]=a(x)$, para todo $x\in\mathcal{V}$;

b) $c[a]=\overline{c}$, para todo $c\in\mathcal{C}$;

c) $f(t_1,...,t_n)[a]=\overline{f}(t_1[a],...,t_n[a])$ para todo $f\in\mathcal{F}$ de aridade $n\geq 1$ e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$.

Proposição 177: Sejam t_0 e t_1 L-termos e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então, $t_0[t_1/x][a]=t_0[a\binom{x}{t_1[a]}]$.

Definição 178: O *valor lógico de uma* L-*fórmula* φ *numa* L-*estrutura* $E=(D,\overline{\ \ })$ *para uma atribuição* a em E, é notado por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) e é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0,1\}$ definido, por recursão em φ, do seguinte modo:

a) $\bot\,[a]=0$;

b) $R(t_1,...,t_n)[a]=1$ sse $(t_1[a],...,t_n[a])\in\overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1,...,t_n\in\mathcal{T}_L$;

c) $(\neg\varphi_1)[a]=1-\varphi_1[a]$, para todo $\varphi_1\in\mathcal{F}_L$;

d) $(\varphi_1\wedge\varphi_2)[a]=min(\varphi_1[a],\varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

e) $(\varphi_1\vee\varphi_2)[a]=max(\varphi_1[a],\varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

f) $(\varphi_1\to\varphi_2)[a]=0$ sse $\varphi_1[a]=1$ e $\varphi_2[a]=0$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

g) $(\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2)[a]=1$ sse $\varphi_1[a]=\varphi_2[a]$, para todo $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_L$;

h) $(\exists x\varphi_1)[a]=\textit{máximo}\{\varphi_1[a\binom{x}{d}]:d\in D\}$, para todo $x\in\mathcal{V},\varphi_1\in\mathcal{F}_L$;

i) $(\forall x\varphi_1)[a]=\textit{mínimo}\{\varphi_1[a\binom{x}{d}]:d\in D\}$, para todo $x\in\mathcal{V},\varphi_1\in\mathcal{F}_L$.

Proposição 179: Para quaisquer L-estrutura E, atribuição a em E, L-fórmula φ e variável x,

a) $(\exists x\varphi)[a] = 1$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $\varphi[a\binom{x}{d}] = 1$;

b) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$;

c) $(\forall x\varphi)[a] = 1$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 1$;

d) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse existe $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$.

Definição 182: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em a. *Em* E, dizemos que a *satisfaz uma* L*-fórmula* φ, escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$. Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando a não satisfaz φ.

Proposição 183: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então:

a) $E \models \exists x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$;

b) $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$, para todo $d \in dom(E)$;

c) $E \not\models \exists x\varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$, para todo $d \in dom(E)$;

d) $E \not\models \forall x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

Proposição 184: Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura E. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in LIV(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Definição 186: Uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Proposição 188: Seja E uma L-estrutura. Se φ é uma L-sentença, então $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Definição 189: Uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L-estrutura. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação 190: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Definição 192: Uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *i.e.*, quando para para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Proposição 194: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$. As seguintes afirmações são verdadeiras.

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ b) $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

c) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$ d) $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ f) $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$, mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$

h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$, mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

i) $\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ j) $\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

k) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$

l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Definição 195: Chamaremos *instanciação (de variáveis proposicionais com* L*-fórmulas)* a uma função do tipo $\mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$. Cada instanciação i determina uma função do tipo $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$ que satisfaz as seguintes condições[2]:

a) $i(\bot) = \bot$;

b) $i(\neg\varphi) = \neg i(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $i(\varphi \square \psi) = i(\varphi) \square i(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 196: Uma L-fórmula ψ é uma *instância* de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional quando existe alguma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$.

Teorema 198 (Teorema da Instanciação): Se φ é uma tautologia do Cálculo Proposicional, então toda a instância de φ é universalmente válida.

Observação 200: Como seria de esperar, nem todas as fórmulas universalmente válidas são instâncias de tautologias. Por exemplo, vimos no Exemplo 191 que a fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida e esta fórmula não é instância de qualquer tautologia (esta fórmula é apenas instância de variáveis proposicionais, que não são tautologias).

Definição 201: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que o par (E, a) *realiza* Γ ou que (E, a) *satisfaz* Γ quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$. Diremos que (E, a) é uma *realização* de Γ quando (E, a) realiza Γ.

Definição 203: Um conjunto Γ de L-fórmulas diz-se *realizável* ou *satisfazível* ou *semanticamente consistente* quando existe alguma realização de Γ. Caso contrário, Γ diz-se *irrealizável* ou *insatisfazível* ou *semanticamente inconsistente.*

Definição 205: Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que E é um *modelo* de Γ, escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E, (E, a) realiza Γ. Caso contrário, diremos que E *não é modelo* de Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma$.

Proposição 207: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças, E uma L-estrutura . Então, E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E, (E, a) realiza Γ.

Definição 208: Uma L-fórmula φ diz-se uma *consequência semântica* de um conjunto de L-fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se (E, a) realiza Γ, então $E \models \varphi[a]$.