2º TESTE DE CÁLCULO I

LEI 14/01/2012

CORREÇÃO

Exercício 1

a) $f'(x) = 5x^4 + 15x^2 - 20 = 0 \iff 5(x^4 + 3x^2 - 4) = 0$

$\iff x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \iff x^2 = -4$ (impossível) $\vee\ x^2 = 1$

$\iff x = 1 \ \vee\ x = -1$

b) Por um Corolário do Teorema de Rolle, entre dois zeros consecutivos de f', existe no máximo um zero de f (estamos em condições de aplicar o teorema pois quer f quer f' são contínuas, por serem funções polinomiais). Assim,

- existe no máximo um zero de f no intervalo $]-\infty,-1]$
- " " " " " " " " $]-1,1[$
- " " " " " " " " $[1,+\infty[$
- " " "

Exercício 2

Seja $Y = e^{2x}$. Então, como $e^{-2x} = \dfrac{1}{e^{2x}} = \dfrac{1}{Y}$, temos

$Y - \dfrac{6}{Y} + 1 = 0 \iff Y^2 + Y - 6 = 0 \iff Y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\iff Y = -3 \ \vee\ Y = 2$

Então $e^{2x} = -3$ (impossível)

ou $e^{2x} = 2 \iff 2x = \ln 2 \iff x = \frac{1}{2}\ln 2$

A única solução da equação é $x = \frac{1}{2}\ln 2$.

Exercício 3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sh}x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x-x}{x\operatorname{sh}x}\qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x}\qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+x\operatorname{sh}x}=\frac{0}{2}=0$$

Exercício 4

$f(x)=e^{x^2}$ $\qquad f(0)=e^0=1$

$f'(x)=2xe^{x^2}$ $\qquad f'(0)=0$

$f''(x)=2e^{x^2}+2x\cdot 2xe^{x^2}$ $\qquad f''(0)=2e^0+0=2$

$f'''(x)=2\cdot 2xe^{x^2}+8xe^{x^2}+4x^2\cdot 2xe^{x^2}$ $\qquad f'''(0)=0$

$$P_{3,0}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$=1+x^2$$

Exercício 5

$$\int x^2\operatorname{sen}(x^3)\,dx=\frac{1}{3}\int 3x^2\operatorname{sen}(x^3)\,dx=-\frac{1}{3}\cos(x^3)+C$$

$F(x)=-\frac{1}{3}\cos(x^3)+C$

$2=F(0)=-\frac{1}{3}\cos 0+C \iff C=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

Então a primitiva de $f(x)=x^2\operatorname{sen}(x^3)$ que passa no ponto $(0,2)$ é $F(x)=-\frac{1}{3}\cos(x^3)+\frac{7}{3}$

Cálculo I

Segundo teste 12/01/2012

Grupo II

6. $\int x \operatorname{arcsen}(x)\, dx$

Fazemos a seguinte substituição

$x = \operatorname{sen} t \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$dx = \cos t\, dt$

Logo

$$\int x \operatorname{arcsen} x\, dx = \int \operatorname{sen} t \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} t) \cos t\, dt$$

$$= \int t \cos t \operatorname{sen} t\, dt$$

Vamos agora aplicar o método da primitivação por partes

Fazemos $f' = \cos t \operatorname{sen} t \Rightarrow f = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}$

$g = t \Rightarrow g' = 1$

$$\int t \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t - \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\, dt$$

$$= \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 t\, dt = (*)$$

Usamos a fórmula $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

$$(*) = \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt =$$

$$= \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{4}\int 1-\cos(2t)\, dt =$$

$$= \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\int 2\cos(2t)\, dt\right) =$$

$$= \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

Usando agora o facto de:

$\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t$

$(**) = \frac{t}{2}\,sen^2 t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\,sent\,cost + c \quad , c \in \mathbb{R} \quad (***)$

Voltando à variável x $\quad (x = sent \Rightarrow t = arcsen\,x)$
o integral fica:

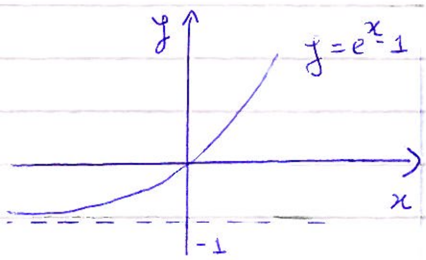
$(***) = \frac{x^2}{2}\,arcsen\,x - \frac{1}{4}\,arcsen\,x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Observando que se tem $\cos(arcsen\,x) = \sqrt{1-x^2}$

Conclusão:

$$\int x\,arcsen\,x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) arcsen\,x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\,dx$



Observando que

$$|e^x - 1| = \begin{cases} -e^x + 1 & se \quad x < 0 \\ e^x - 1 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

temos:

$$\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\,dx = \int_{-1}^{0} -e^x + 1\,dx + \int_{0}^{1} e^x - 1\,dx$$

$$= \left[-e^x + x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - x\right]_{0}^{1} =$$

$$= \cancel{-1} + 0 + e^{-1} + \cancel{1} + e - 1 - 1 + 0 =$$

$$= \frac{1}{e} + e - 2$$

8. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-x}\,dx$

Fazemos $P(x) = 3x - 2$ e $Q(x) = x^2 - x$

Como grau(P) < grau(Q), não é necessário dividir os polinómios.

Temos $Q(x) = x(x-1)$ e esta é a decomposição de Q em factores irredutíveis

Vamos encontrar A e B tais que

$$\frac{3x-2}{x^2-2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Então $3x - 2 = A(x-1) + Bx$

$x=0 \Rightarrow -2=-A \Leftrightarrow A=2$

$x=1 \Rightarrow 1 = B \quad B=1$

Logo: $\dfrac{3x-2}{x^2-x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

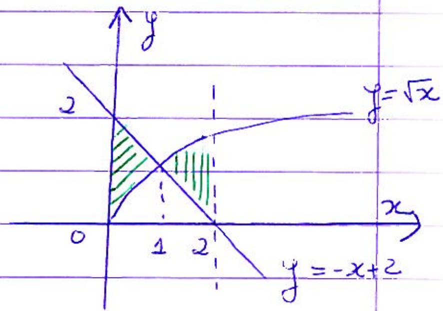
$$\int \frac{3x-2}{x^2-x}\,dx = \int \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}\,dx = 2\ln|x| + \ln|x-1| + C$$
$C \in \mathbb{R}$

9. $F(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \frac{e^t}{t}\,dt$

A função $g(t) = \dfrac{e^t}{t}$ é contínua logo tem primitiva

Seja $G(t)$ uma primitiva de $g(t)$.
Pelo teorema fundamental do cálculo temos
$F(x) = G(\ln x) - G(1)$
Usando a regra da cadeia, vem
$$F'(x) = (G(\ln x) - G(1))' =$$
$$= (\ln x)'\, G'(\ln x) = \frac{1}{x} g(\ln x) =$$
$$= \frac{1}{x} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} =$$
$$= \frac{1}{x}\frac{x}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$$

10. $x=0,\ x=2,\ y=\sqrt{x},\ y=-x+2$



Começamos por calcular o ponto de intersecção das curvas
$y=\sqrt{x}$ e $y=-x+2$
$\sqrt{x} = -x+2 \Rightarrow x = (-x+2)^2$
$\Leftrightarrow x = x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$
$\Leftrightarrow x=1 \vee x=4$
Voltando à equação original apenas $x=1$ é de facto solução (note que a expressão só está definida quando $x \geq 0$ e $-x+2 \geq 0$ isto é $x \in [0,2]$)
Temos então que
$$\text{área} = \int_0^1 -x+2-\sqrt{x}\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}+x-2\,dx =$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 =$$
$$= -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3/2} + \frac{2^{3/2}}{3/2} + \frac{4}{2} - 4 - \frac{1}{3/2} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}$$