introdução aos sistemas dinâmicos

sistemas de edos lineares, homogéneas e autónomas — parte um

1.

Escreva a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$$

2.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

2.1 Encontre a sua solução geral, procurando escrever as constantes arbitrárias em função dos valores que a solução toma no instante inicial, isto é, $(x_\circ, y_\circ) = (x(0), y(0))$.

2.2 Caracterize, em função de $(x_\circ, y_\circ)$, as soluções que se aproximam da solução de equilíbrio /ponto fixo $(0, 0)$, quando o tempo cresce para infinito.

2.3 Determine o valor da solução para $t = 1.24$, sabendo que $(x_\circ, y_\circ) = (1, 1)$.

3.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -3x - 5y \end{cases}$$

3.1 Encontre a sua solução geral, procurando escrever as constantes arbitrárias em função dos valores que a solução toma no instante inicial, isto é, $(x_\circ, y_\circ) = (x(0), y(0))$.

3.2 Caracterize, em função de $(x_\circ, y_\circ)$, as soluções que se aproximam da solução de equilíbrio /ponto fixo $(0, 0)$, quando o tempo cresce para infinito.

4.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

Encontre a sua solução geral, procurando escrever as constantes arbitrárias em função dos valores que a solução toma no instante inicial, isto é, $(x_\circ, y_\circ) = (x(0), y(0))$.

5.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

5.1
Encontre a sua solução geral, procurando escrever as constantes arbitrárias em função dos valores que a solução toma no instante inicial, isto é, $(x_\circ, y_\circ) = (x(0), y(0))$.

5.2
Mostre que, qualquer que seja $(x_\circ, y_\circ)$, a evolução do sistema é sempre no sentido de se aproximar da solução de equilíbrio/ponto fixo.

6.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + 5y \end{cases}$$

Encontre a sua solução geral, procurando escrever as constantes arbitrárias em função dos valores que a solução toma no instante inicial, isto é, $(x_\circ, y_\circ) = (x(0), y(0))$.