3. Sistemas de Equações Lineares

Considere-se o sistema seguinte de $\underline{\underline{m}}$ equações lineares nas $\underline{\underline{n}}$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Em notação abreviada $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ onde

$A = (a_{ij}) \rightarrow$ matriz dos coeficientes

$a_{ij} \rightarrow$ coeficiente na i-ésima equação da incógnita x_j

$\underset{\sim}{x} = (x_j) \rightarrow$ vector das incógnitas

$\underset{\sim}{b} = (b_i) \rightarrow$ vector dos termos independentes

Se $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$ (vector nulo), o sistema diz-se homogéneo $(A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0})$

Um sistema homogéneo tem sempre solução, dita solução trivial, $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$.

Ex. 1: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -2x_2 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ O sistema tem uma só solução

Ex. 2: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x_2 = 1/2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ x_1 = -1/4 \end{cases}$

Tem-se, por um lado, $x_1 = x_2$, por outro lado, $x_2 = 1/2$ e $x_1 = -1/4$. Logo, o sistema não tem solução.

Ex. 3: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

Qualquer vector da forma $\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ com $x_2 \in \mathbb{R}$ é solução do sistema, donde tem uma infinidade de soluções.

Definição: Um sistema de equações lineares diz-se <u>possível</u> se tem uma ou mais soluções. Diz-se <u>impossível</u> caso contrário.

Definição: Um sistema de equações lineares possível diz-se <u>determinado</u> se tiver uma só solução e <u>indeterminado</u> se tiver mais do que uma solução.

Ex. 1 → Sistema possível determinado
Ex. 2 → " impossível
Ex. 3 → " possível indeterminado

Existência e Unicidade de Solução

As condições a apresentar para que um sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tenha solução fazem uso do conceito de <u>Característica de uma matriz</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matriz de ordem $m \times n$

↓ ↓ ↓

as colunas podem ser consideradas como vectores de $\mathbb{R}^m$ → geram um subespaço de $\mathbb{R}^m$ e a dimensão desse subespaço é o n.º máximo de colunas <u>linearmente independentes</u> (l.i.) de A.

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designe-se por $R(A)$ o subespaço gerado pelas colunas de A. A dimensão de $R(A)$ chama-se <u>característica de A</u> e denota-se por $c(A)$.

Analogamente, podemos considerar as linhas de A como vectores de $\mathbb{R}^n$. Geram assim um subespaço de $\mathbb{R}^n$, que se representa por $R(A^T)$, que coincide com o espaço gerado pelas colunas da matriz transposta de A.

Definição: As seguintes operações são designadas por operações elementares sobre linhas (colunas) de uma matriz:

O_1: Troca de duas linhas (colunas)

O_2: multiplicação de todos os elementos de uma linha (coluna) por um número diferente de zero

O_3: Substituição de uma linha pela sua soma com outra multiplicada por um número.

Teorema: Seja $\underset{=}{A}$ uma matriz. O número máximo de linhas (colunas) linearmente independentes de $\underset{=}{A}$ não se altera se sobre $\underset{=}{A}$ se realizarem operações elementares sobre linhas (colunas).

Teorema: Seja $\underset{=}{A}$ uma matriz. O número máximo de linhas linearmente independentes coincide com o número máximo de colunas linearmente independentes.

Teorema: Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz. O número máximo de linhas linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas linearmente independentes.

Dem.: (construção de um processo de cálculo da característica de uma matriz)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matriz de ordem $m \times n$ não nula

Começamos por mostrar que se realizarmos sobre $\underline{A}$ operações elementares é possível transformá-la numa matriz da forma:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$, $\alpha_{ii} \neq 0$, $i=1,\dots,k$ $(k \leq n)$

podendo deixar de existir as linhas de zeros

Provaremos depois que esta matriz tem característica $\underline{\underline{k}}$.

* Note-se que esta matriz resulta da matriz $\underline{\underline{A}}$ por operações elementares, pelo que, o n.º máximo de linhas $\underline{\underline{l.i.}}$, i.e., a característica é a mesma de A.

Se $a_{11} = 0$, por troca de linhas ou colunas leva-se à posição $(1,1)$ um el.^to de A não nulo. Como $A \neq O_{m \times n}$ esse el.^to existe.

A matriz $\underline{\underline{A}}$ é depois transformada na matriz

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$ onde $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$

$(i=2,\dots,m\,;\; j=2,\dots,n)$

Isto é, cada linha $\underline{\underline{i}}$ de $\underline{\underline{A}}$ é substituída pela sua diferença com a 1.ª linha multiplicada por a_{i1}/a_{11} $(a_{11} \neq 0)$

Se $a_{22}^{(1)} = 0$, por troca de linhas ou colunas coloca-se na posição $(2,2)$ um el.^{to} não nulo que se encontre no bloco
$$\begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Se não existir, a matriz $A^{(1)}$ terá a forma da matriz em $(*)$ com $k=1$.

Se $a_{22}^{(1)} \neq 0$, a matriz $A^{(1)}$ é depois transformada na matriz

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

onde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \left(\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{2j}^{(1)}$

$i = 3, \ldots, n$; $j = 3, \ldots, n$

I.e., a linha i $(i \geq 3)$ de $A^{(1)}$ é substituída pela sua diferença com a 2.ª linha multiplicada por $a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$

O processo repete-se até se obter uma matriz

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

podendo não existir as linhas de zeros $(k = n)$

Então $A^{(k)}$ tem a forma da matriz dada em $(*)$

Vamos agora mostrar que as 1.^{as} $\underline{\underline{k}}$ linhas são $\underline{\underline{l.i.}}$

De, $\beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{kk}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{kn}^{(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, conclui-se
$$\begin{cases} \beta_1 a_{11} = 0 \\ \beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22}^{(1)} = 0 \\ \cdots \\ \beta_1 a_{1k} + \cdots + \beta_k a_{kk}^{(k-1)} = 0 \end{cases}$$

Como $a_{11} \neq 0$, da 1.ª equação obtém-se $\beta_1 = 0$. Substituindo na 2.ª equação vem $\beta_2 = 0$ (pois $a_{22}^{(1)} \neq 0$) ... até à equação k onde se obtém $\beta_k = 0$.
Tem-se que $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0$ é a única solução do sistema.

Logo, as 1.as $\underline{\underline{k}}$ linhas de $A^{(k)}$ são l.i. e não há mais do que $\underline{\underline{k}}$ porque então seria incluída pelo menos uma linha nula.

De modo análogo se prova que as primeiras $\underline{\underline{k}}$ colunas de $A^{(k)}$ são l.i.. Para provar que não há mais do que $\underline{\underline{k}}$ colunas l.i. considere-se de novo $A^{(k)}$

Substituindo cada coluna i $(i \geq 2)$ pela sua diferença com a 1.a coluna multiplicada por a_{1i}/a_{11}, obtém-se

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{km}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Depois, substitui-se cada coluna i $(i \geq 3)$ pela sua diferença com a 2.a coluna multiplicada por $a_{2i}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, e assim sucessivamente. Obtém-se a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e que, portanto, não tem mais do que $\underline{\underline{k}}$ colunas l.i.

Como foi obtida de $A^{(k)}$ por operações elementares sobre colunas, então também o n.º máximo de colunas l.i. de $A^{(k)}$ é $\underline{\underline{k}}$.

Uma vez que $A^{(k)}$ também é obtida de A por operações elementares, então o n.º máximo de colunas l.i. de A é $\underline{\underline{k}}$, assim como o n.º máximo de linhas l.i..

Conclusão: Se uma matriz tiver a forma em (*) com $a_{ii} \neq 0$ $(i=1,\dots,k)$, então a sua característica é $\underline{\underline{k}}$; Dada uma matriz não nula, para calcular a sua característica pode-se reduzi-la à forma (*) por meio de operações elementares

Exemplo: Calcular a característica da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tem-se,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A matriz dada tem característica 2.

Conforme visto, o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ pode representar-se

matricialmente da forma $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ designada Matriz Ampliada do Sistema

(matriz de ordem $m \times (n+1)$)

Abreviadamente, (Ab), $\underbrace{A = (a_{ij})}_{\text{matriz simples do sistema}}$ e $\underset{\sim}{b} = (b_i)$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

Condições para que o Sistema tenha solução:

Observe-se que este pode ser escrito na forma

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem solução se e só se $\underset{\sim}{b}$ é combinação linear das colunas de A

Recordar o Teorema:

Se $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m$ são vectores de um espaço vectorial V e se $\underset{\sim}{b} \in V$ é combinação linear de $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m$, então o subespaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \dots, \underset{\sim}{a}_m$ coincide com o que é gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m, \underset{\sim}{b}$.

Assim, o espaço gerado pelas colunas de A, $\boxed{R(A)}$, coincide com o espaço gerado pelas colunas de (Ab), $\boxed{R(Ab)}$. Tem-se, então,

Teorema: O sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem solução sse $C(A) = C(Ab)$
característica

NOTA: Se $\underset{=}{A}$ é uma matriz de ordem $m \times m$ e $C(A) = m$, o sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem sempre solução $\forall \underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^m$