Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

ANÁLISE
Licenciatura em Engenharia Informática
Folha3-2013/14

Vetores: revisões

Exercício 3.1 Seja θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Qual o efeito produzido no produto escalar(interno) dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quando se aumenta cada uma das seguintes quantidades:

a) $||\vec{v}||$?

b) θ?

Exercício 3.2 Considere, em $\mathbb{R}^2$, o vetor $\vec{u}$ definido por $4\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$.

a) Defina um vetor paralelo a $\vec{u}$.

b) defina um vetor perpendicular a $\vec{u}$.

Exercício 3.3 Encontre o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabendo que $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ e $\vec{v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$.

Exercício 3.4 Defina o plano que satisfaz as seguintes condições:

a) perpendicular ao vector $\vec{u} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$ e que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 0, 2)$.

b) paralelo ao plano definido por $2x+4y-3z = 1$ e que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 0, -1)$.

c) que passa pelos pontos de coordenadas $(1, 6, -2)$, $(-2, 3, 1)$ e $(-4, 0, 2)$.

d) que passa pelo ponto de coordenadas $(1, 2, -3)$ e tem a direção dos vetores $\vec{u} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ e $\vec{v} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$.

Derivadas Parciais

Exercício 3.5 Calcule cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

quando

a) $f(x, y) = xy^2$;

b) $f(x, y) = x^2 - 3y$.

Exercício 3.6 Calcule as derivadas parciais, de primeira ordem, para cada uma das funções reais definidas por:

a) $f(x, y) = y^2 e^{3x}$;

b) $f(x, y) = yx^{\frac{1}{3}}$;

c) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 y}{z}$

d) $f(x, y, z) = \cos(xy^2) + \dfrac{1}{z}$.

Exercício 3.7 Mostre que:

a) $f(x,y) = e^{yx} \Rightarrow xf_x = yf_y$;

b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+xy) \Rightarrow xf_x + yf_y = 2$;

c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z} \Rightarrow f_x + f_y + f_z = 1$.

Exercício 3.8 Calcule o declive das retas tangentes, respetivamente nas direções de xx' e de yy', ao gráfico da função f definida por

$$f(x,y) = -\frac{x}{2} - y^2 + \frac{1}{4}$$

no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 1, -1)$.

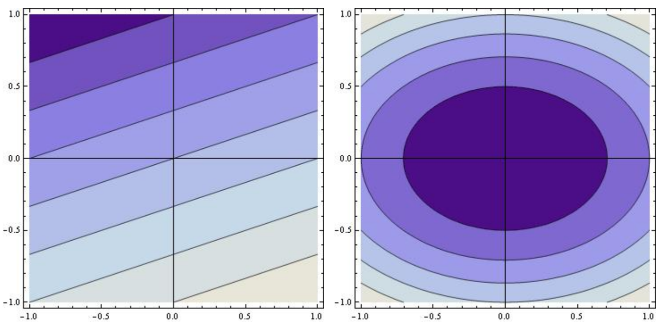
Exercício 3.9 A área de um paralelogramo com lados adjacentes a e b e ângulo por eles formado θ pode calcular-se a partir de $A(a,b,\theta) = ab \operatorname{sen} \theta$.

a) Calcule a taxa de variação de A, em relação a b, quando $(a,b,\theta) = (10, 20, \frac{\pi}{6})$;

b) Calcule a taxa de variação de A, em relação a θ, quando $(a,b,\theta) = (10, 20, \frac{\pi}{6})$.

Exercício 3.10 O diagrama de nível para uma função f, no qual os níveis mais elevados têm a cor mais clara, é apresentado em cada uma das seguintes figuras.

Qual o sinal de f_x e de f_y (para uma série de pontos à sua escolha)?



Exercício 3.11 Em cada um dos casos que se segue, apresente um possível diagrama de nível para a função f (real de duas variáveis reais) tal que

a) $f_x > 0$ e $f_y > 0$;

b) $f_x < 0$ e $f_y > 0$;

c) $f_x > 0$ e $f_y < 0$;

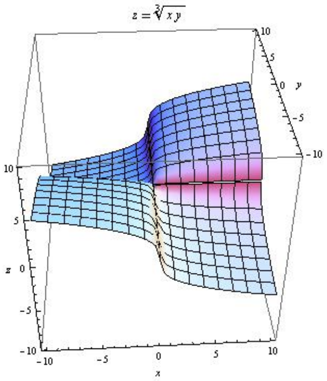
d) $f_x < 0$ e $f_y < 0$.

Exercício 3.12 Mostre que existem as derivadas parciais, $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$, da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+x^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mas observe que f não é contínua em $(0,0)$.

Exercício 3.13 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$.



a) Calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

b) Verifique que não se pode falar em plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0, 0)$.

Exercício 3.14 Para cada uma das funções f que se seguem, determine o planos tangente ao gráfico no ponto indicado:

a) $f(x, y) = xy$, $P = (0, 0, 0)$;

b) $f(x, y) = e^{-x} \cos y$, $P = (0, 0, 1)$;

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$, $P = (0, 1, 0)$;

d) $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$, $P = (1, 0, 2)$.

Exercício 3.15 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = y + x \operatorname{sen}(\pi y)$, e a sua curva de nível $\frac{5}{4}$, isto é:

$$N_{\frac{5}{4}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \frac{5}{4} \right\}.$$

a) Verifique se o ponto $(\sqrt{2}, \frac{1}{4})$ pertence à curva de nível $N_{\frac{5}{4}}$.

b) Determine um vetor normal à curva de nível $N_{\frac{5}{4}}$ no ponto $(\sqrt{2}, \frac{1}{4})$.

c) Determine a reta normal e a reta tangente à curva de nível $N_{\frac{5}{4}}$ no ponto $(\sqrt{2}, \frac{1}{4})$.

Exercício 3.16 Determine a equação da reta normal à superfície S, definida pela equação $xyz = 12$, no ponto $(2, -2, -3)$.

Exercício 3.17 Para cada uma das superfícies definidas a seguir, defina -se existirem- o plano tangente e a reta normal no ponto indicado.

a) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $P = (5, 13, -12)$;

b) $xy^2 + 3x - z^2 = 4$, $P = (2, 1, -2)$;

c) $xy - z = 0$, $P = (-2, -3, 6)$.

Derivadas de ordem superior

Exercício 3.18 Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

a) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$;

b) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$;

c) $f(x, y, z) = \cos(xyz)$;

d) $f(x, y, z) = y^2 \log x + xe^{xz}$.

Exercício 3.19 Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

a) $f_x(x,y) = 2x^3$, $f_y(x,y) = yx^2 + x$;

b) $f_x(x,y) = x \operatorname{sen} y$, $f_y(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

Exercício 3.20 Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Determine f_x e f_y.

b) Calcule $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$.

c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

Exercício 3.21 Determine o ângulo formado pelo plano XOY e o plano tangente ao elipsóide definido pela equação

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

no ponto $(2,2,1)$.

Derivadas Direcionais; Gradiente

Exercício 3.22 Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3xy + y^2$.

a) Indique a taxa de variação de f no ponto $(2,3)$ e na direção de $\vec{v} = (3,-1)$;

Exercício 3.23 Considere a função definida por $f(x,y) = x\operatorname{sen}(xy)$.

a) Determine a derivada direcional de f num ponto (a,b) segundo um vetor $\vec{v} = (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 3.24 A temperatura de um certo gás num ponto do espaço de coordenadas (x,y,z) é dada pela função G definida por:

$$G(x,y,z) = x^2 - 5xy + y^2 z.$$

a) Qual é a taxa de variação da temperatura partindo do ponto $(1,2,3)$ e seguindo a direcção do vetor $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$?

Exercício 3.25 Justifique que a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2y^3$, é diferenciável em todos os pontos do seu domínio e, para $P = (-1,2)$ apresente um vetor que:

a) indique a direção e o sentido de maior crescimento de f partindo de P;

b) indique a direção e o sentido de menor crescimento de f partindo de P;

c) indique uma direção e um sentido segundo o qual a taxa de variação de f, partindo de P, é nula.

Exercício 3.26 A temperatura, em graus Celsius, num ponto de coordenadas (x,y) (medidos em centímetros) sobre uma superfície de uma placa de metal é dada por $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$.

a) Qual a temperatura no ponto da placa de coordenadas $(2,1)$?

b) Faça um esboço da curva constituída pelos pontos da placa a onde a temperatura é igual à temperatura no ponto $(2,1)$.

c) Partindo de $(2,1)$, em que direcção cresce mais rapidamente a temperatura? Qual a taxa de crescimento?

Derivada

Exercício 3.27 Considere a função

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\,\mathrm{sen}(xy) \end{array}.$$

a) Estando no ponto (a,b), apresente um vetor que indique a direção e o sentido de maior crescimento de f.

b) Calcule a derivada de f num ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

Exercício 3.28 Calcule a derivada de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos a onde essa está definida:

a) $f(x,y) = (xy, e^{x+y})$;

b) $f(x,y) = (\ln(x^2+y^2), \cos(xy))$;

c) $f(x,y,z) = (zx^2, -ye^z)$.

Regra da Cadeia

Exercício 3.29 Use a "regra da cadeia"de uma só variável independente para calcular $w'(t)$, sendo

$$w(x,y) = x^2y - y^2, \quad \text{com} \quad x = x(t) = \mathrm{sen}\, t \text{ e } y = y(t) = e^t.$$

Exercício 3.30 Use a "regra da cadeia"de várias variáveis para calcular f_s e f_t, sendo

$$f(x,y) = 2xy, \quad \text{com} \quad x = x(s,t) = s^2 + t^2 \text{ e } y = y(s,t) = \frac{s}{t}.$$

Exercício 3.31 Determine z_u e z_v quando:

a) $z = xe^{-y} + ye^{-x}$, com $x = u\,\mathrm{sen}\, v$, $y = v\cos u$;

b) $z = xe^y$, com $x = \ln u$, $y = v$;

c) $z = xe^y$, com $x = u^2+v^2$, $y = u^2 - v^2$.

Exercício 3.32 Determine w_s e w_t quando:

a) $w = xyz$, com $x = s+t$, $y = s-t$, $z = st^2$;

b) $z = x\cos(yz)$, com $x = s^2$, $y = t^2+s$, $z = s-2t$.

Exercício 3.33 Considere uma função z de duas variáveis reais, (x,y), para a qual, não sendo conhecida a expressão designatória $z(x,y)$, sabe-se que é válida a seguinte igualdade

$$3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz = 5$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $z = z(x,y)$.

Calcule z_x e z_y.

Exercício 3.34 Em cada uma das alíneas que se segue, diferencie implicitamente para calcular as derivadas parciais de primeira ordem, z_x e z_y, da função z.

a) $x^2+y^2+z^2 = 25$;

b) $z = e^x\,\mathrm{sen}(y+z)$;

c) $x\ln y + y^2z + z^2 = 8$.

Exercício 3.35 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla F(2,3) = (-1,2)$. Determine:

a) $f'(2)$, sendo $f(x) = F(x, x+1)$;

b) $f'(1)$, sendo $f(x) = F(2x, -x^2+4)$.

Exercício 3.36 Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(2,3,0) = (-1,2,3)$. Determine:

a) $g_x(1,2)$ e $g_y(1,2)$, sendo $g(x,y) = G\left(yx, x+y, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}y)\right)$;

b) $g_x(0,-1)$ e $g_y(0,-1)$, sendo $g(x,y) = G\left(-2ye^x, -3y + y^3x^2, x\cos(\frac{\pi}{2}y)\right)$.