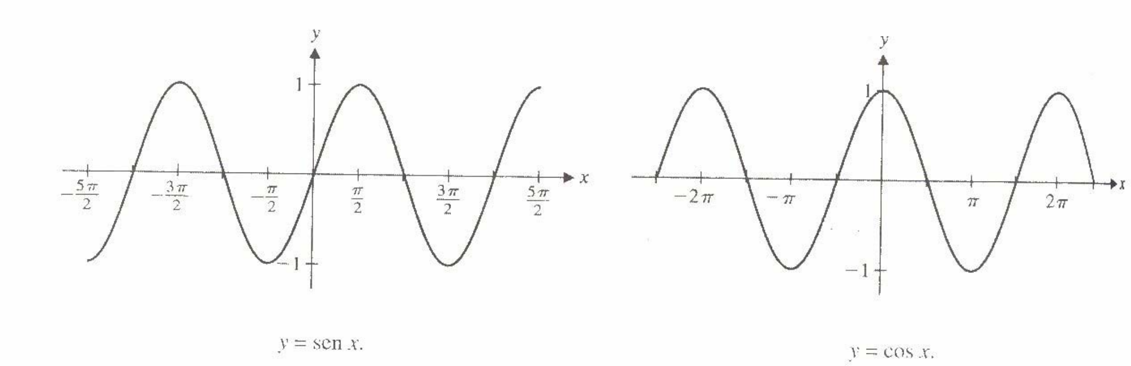
1. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

1.1. Funções trigonométricas inversas

1.1.1. As funções arco-seno e arco-cosseno



Como as funções seno e cosseno não são injectivas em *IR*, só poderemos definir as suas funções inversas, se considerarmos uma restrição injectiva dessas funções.

Definição 1.1: Chama-se **restrição principal da função seno**, à restrição do seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} g: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}.$$

Definição 1.2: Chama-se **arco-seno** à função inversa de g, definida por:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsen}: & [-1.1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \operatorname{arcsen} x \end{array}.$$

Pela definição da função inversa, temos

$$y = arcsen\, x \Leftrightarrow \begin{cases} sen\, y = x \\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

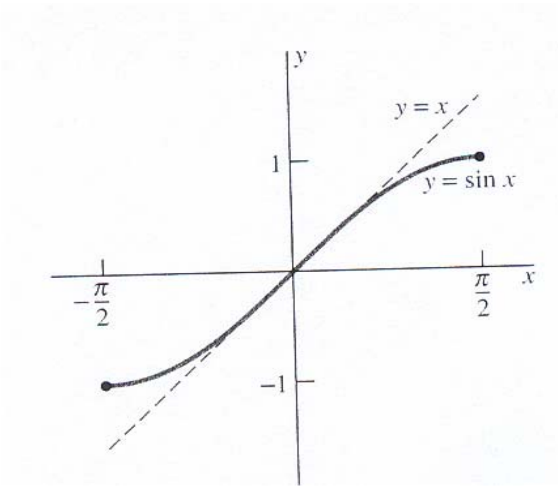


Gráfico da função g

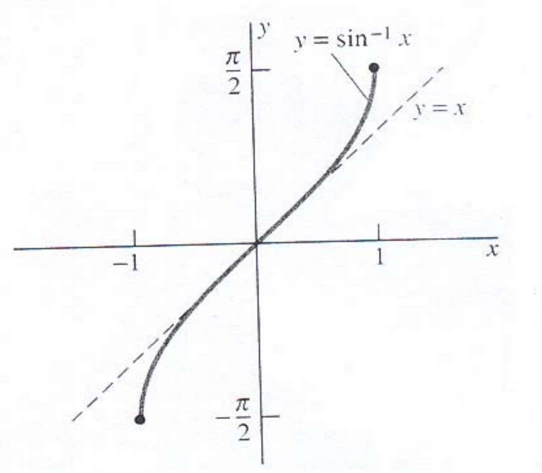


Gráfico da função arco-seno

Nota: A função arco-seno é crescente.

Exemplo 1.3: Calcule $arcsen\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemplo 1.4: Caracterize a função inversa de $f(x) = \dfrac{1}{2} arcsen(3x - 1)$.

Definição 1.5: Chama-se **restrição principal da função cosseno**, à restrição de cosseno ao intervalo $[0, \pi]$, isto é,

$$\begin{array}{llcl} g: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}.$$

Definição 1.6: Chama-se **arco-cosseno** à função inversa de g, definida por:

$$\begin{array}{rccc} \arccos: & [-1.1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos x \end{array}.$$

Pela definição da função inversa, temos

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}.$$

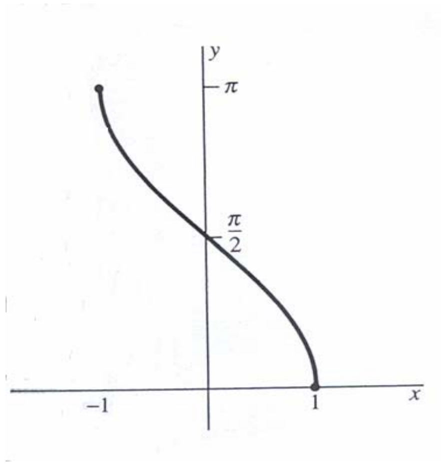


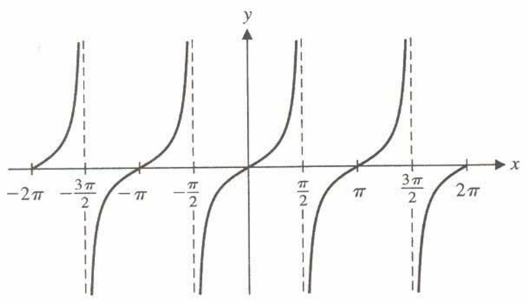
Gráfico da função arco-cosseno

Nota: A função arco-cosseno é decrescente.

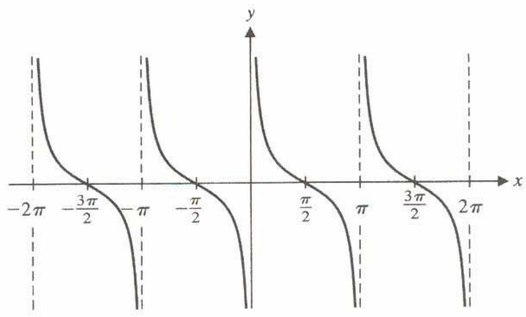
Exemplo 1.7: Calcule $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exemplo 1.8: Caracterize a função inversa de $f(x) = \cos(3x+2) - 1$.

1.1.2. A função arco-tangente



$y = \tan x$.



$y = \cot x$.

Como a função tangente não é injectiva no seu domínio, só poderemos definir a sua função inversa, se considerarmos uma restrição injectiva dessa função.

Definição 1.9: Chama-se **restrição principal da função tangente**, à restrição da tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, isto é,

$$\begin{aligned} g: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\rightarrow IR \\ x &\mapsto tg\, x \end{aligned}$$

Definição 1.10: Chama-se **arco-tangente** à função inversa de g, definida por:

$$\begin{aligned} arctg: IR &\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto arctg\, x \end{aligned} .$$

Por definição, temos $y = arctg\, x \Leftrightarrow \begin{cases} tg\, y = x \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

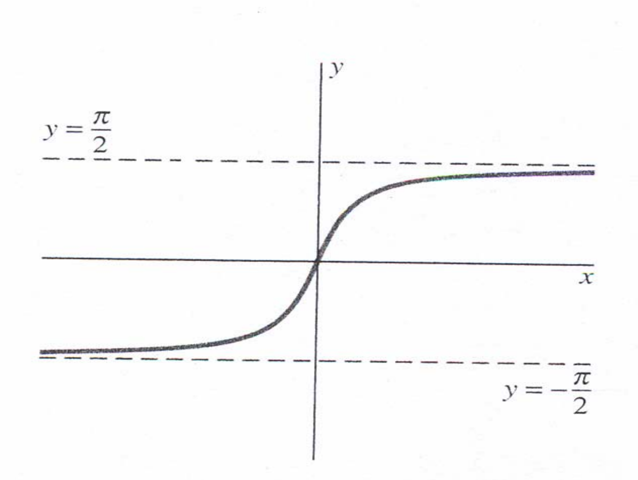


Gráfico da função arco-tangente

Nota: A função arco-tangente é crescente.

Exemplo 1.11: Calcule $arctg\left(-\sqrt{3}\right)$.

Exemplo 1.12: Caracterize a função inversa de $f(x) = tg(x - \pi)$.

1.2. Limites e continuidade

Definição 2.1: Seja $a \in IR$. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x)$ **existe** se e só se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ e for finito.

Definição 2.2: Uma função *f* diz-se **contínua num ponto** *a* se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $f(a)$ está definida;

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Propriedades 2.3:

1. Se f e g são funções contínuas, então também são contínuas as funções:

$$f+g\,,\ f-g\,,\ f\cdot g\,,\ \frac{f}{g}\ \text{com}\ g\neq 0\,,\ f^{n},\ \sqrt[n]{f}\ ,\ \text{com}\ n\in IN\,.$$

2. A restrição de uma função contínua é ainda uma função contínua.

Exercício 2.4: Estude a continuidade no ponto $x=0$ da função

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^{2}-1}{\ln(1-x)} & se \quad x<0\\ \cos x & se \quad x\geq 0\end{cases}.$$

1.3. Derivada de ordem *n*

1.3.1. Definição de derivada.

Definição 3.1: Seja $x_0\in D_f$. Chama-se **derivada de f no ponto x_0**, ao número real $f'(x_0)$ definido por

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Definição 3.2: A **equação da recta tangente** ao gráfico da função f é dada por

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Definição 3.3: A **equação da recta normal** ao gráfico da função f é dada por

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Nota: Efectuando a mudança de variável $h = x - x_0$, obtém-se a definição equivalente:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exercício 3.4: Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$.

1) Calcule, utilizando a definição, a derivada da função f no ponto $(2,1)$.
2) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,1)$.

Definição 3.5: Diz-se que a função f é **diferenciável no ponto** x_0 se_tem derivada finita nesse ponto.

Nota: $f'(x_0)$ existe se e só se $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \in IR$, sendo

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ e } f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exercício 3.6: Seja *f* a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^x+2 & \text{se } x\le 0 \\ 3-x^2 & \text{se } x>0 \end{cases}$$. Determine, caso exista, $f'(0)$.

Definição 3.7: Chama-se **função derivada** a função f' dada por

$$\begin{aligned} f': \quad & D_{f'} \to IR \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$, onde $D_{f'}$ representa o conjunto dos pontos onde f tem derivada finita.

Teorema 3.8: Toda a função diferenciável é contínua.

Se f' é uma função diferenciável, podemos definir a sua derivada. Chama-se **derivada de ordem 2** de *f*, à derivada da função f'.

Notação: f''.

Definição 3.9: Seja *f* uma função *n* vezes diferenciável. Chama-se ***derivada de ordem n*** de *f*, à derivada da função $f^{(n-1)}$ que representa derivada de ordem *n-1* de *f*.

1.3.2. Regras de derivação.

Exemplo 3.10: Calcule a derivada das seguintes funções:

1) $f(x)=e^x \ln^2 x$

2) $f(x)=x^2\cos(3x)$

3) $f(x)=\cos^2 x$

4) $f(x)=\dfrac{(1-tgx)^2}{3}$

5) $f(x)=e^{x}arcsen(2x)$

6) $f(x)=arctg\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+x^{2}\ln x$

7) $f(x)=\dfrac{1}{arctgx}$

8) $f(x)=\arccos\left(\sqrt{x}\right)$

Exemplo 3.11: Determine, usando as regras de derivação, a função derivada de $f(x)=\begin{cases}3x-1 & se \quad x\le 1\\ \dfrac{2}{x} & se \quad x>1\end{cases}$.

1.3.3. Derivada da função composta.

Definição 3.12: Sejam f e g duas funções. Chama-se **função composta de *g* com *f*** à função $g\circ f$ caracterizada por

i) $D_{g\circ f}=\{x\in IR : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}$;

ii) $(g\circ f)(x)=g[f(x)], \qquad \forall x\in D_{g\circ f}$.

Teorema da derivada da função composta:

Se f é diferenciável no ponto x_0 e g é diferenciável em $f(x_0)$, então $g\circ f$ é diferenciável em x_0 e,

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Exercício 3.13: Considere as funções $f(x)=senx$ e $g(x)=2x^3$. Calcule a derivada da função $f\circ g$.

1.3.4. Indeterminações: regra de Cauchy.

O conceito de derivada é também usado para levantar algumas indeterminações.

1.3.4.1. Levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Regra de Cauchy ou regra de L'Hôpital: Sejam c um ponto do intervalo (a,b) e *f*, *g* duas funções diferenciáveis em (a,b), excepto possivelmente em c.

Se

(i) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) | \{c\}$;

(ii) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ seja definido ($\in \overline{IR}$).

Exemplo 3.14: Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\, x}$.

1.3.4.2. Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$.

- Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = \infty$, então $\lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0.\infty$.

Esta indeterminação pode ser transformada numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, escrevendo

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{ou} \qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Exemplo 3.15: Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(x)$.

Exemplo 3.16: Determine $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,tg\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Para as indeterminações do tipo $\infty-\infty$, escreve-se a diferença como uma única fracção.

Exemplo 3.17: Determine $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x-1}-\frac{3-x}{x^2-1}$.

1.4 Derivadas de funções definidas implicitamente.

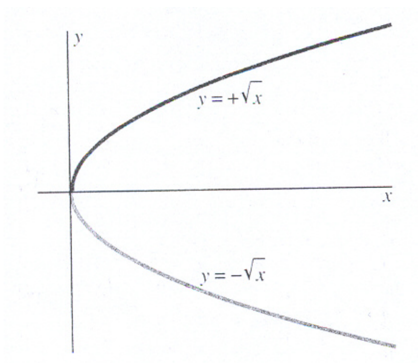
Consideremos a relação $y=x^4\cos x$. Esta relação define *y* explicitamente como uma função de *x*. De facto, podemos escrever $f(x)=x^4\cos x$ sendo *f* uma função, ou seja, *f* satisfaz o teste da recta vertical.

Até agora, as funções que consideramos eram todas definidas desta maneira. No entanto, uma função também pode ser definida implicitamente por uma equação que poderá ser ou não resolvida em relação a *x*.

Além disso, como veremos a seguir, uma equação com duas variáveis *x* e y pode definir implicitamente diferentes funções de *x*.

Consideremos a equação $x - y^2 = 0$. Esta equação não pode ser revolvida de modo a que *y* seja definida como uma função explícita de *x*. De facto, $y = \pm\sqrt{x}$ não representa uma função de *x*. Neste caso, diz-se que $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = -\sqrt{x}$ são definidas **implicitamente** como funções de *x* pela equação original.

O gráfico das funções *f* e g representam o ramo superior e inferior da parábola representada na figura abaixo. A parábola no seu todo, correspondente ao gráfico da equação $x - y^2 = 0$, ou seja $x = y^2$ que não é o gráfico de uma função.



Exercício 4.1: Quantas funções implícitas diferentes são definidas pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Equações como $sen(x+2y)=2x\cos y$ ou $y^4+2y=x^3-2x-3$ podem ser difíceis ou até impossíveis de resolver.

Apesar disso, é sempre possível calcular a derivada de uma função definida implicitamente, usando um processo chamado **diferenciação implícita** que consiste em derivar ambos os membros da equação dada em ordem a *x*.

Notação: $y'(x)$ e $\dfrac{dy}{dx}$ representam a derivada de *y* em ordem a *x*.

Exemplo 4.2: Considere a equação $x^2+y^2=1$. Use o processo de diferenciação implícita para calcular a derivada $y'(x)$.

Resolução: Derivando ambos os membros da equação em ordem a *x*, vem

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=0 \Leftrightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Nota: Em geral, a expressão de $\dfrac{dy}{dx}$ depende da variável *x* mas também de *y*.

Exemplo 4.3: Determine a equação da recta tangente a curva definida por $x^2 + y^2 = 1$, no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercício 4.4: Determine a equação da recta tangente a curva definida por $sen(x + 2y) = 2x\cos y$, no ponto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercício 4.5: Determine a derivada de ordem 2 da função definida implicitamente por $y^4 + 2y = x^3 - 2x - 3$.

Notação: $y^{(n)}$ e $\frac{d^n y}{dx^n}$ representam a derivada de ordem *n* de *y* em ordem a *x*.