Ex 1.

$f(x,y,z) = 2x + 3y + z^2$

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2, 3, 2z)$

$Dg((1,2);(1,0)) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,2), \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,2), \frac{\partial g_3}{\partial x}(1,2) \right) = (3, 0, 1)$

$Dg((1,2);(0,1)) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}(1,2), \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,2), \frac{\partial g_3}{\partial y}(1,2) \right) = (0, 2, -1)$

$$Jg(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,2) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(1,2) = \nabla f(g(1,2)) \cdot Jg(1,2) = \nabla f(0,1,2)\, Jg(1,2)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} = (10, 2)$$

Obs. O gradiente foi interpretado ora como vetor ora como matriz linha, como habitual.

Ex2.

$$\left.\begin{array}{l}f \text{ é uma função contínua} \\ A \text{ é um conjunto fechado e limitado}\end{array}\right\} \Rightarrow f|_A \text{ atinge mínimo e máximo.}$$

$\nabla f(x,y) = (4x+2, 2y)$

O ponto crítico de f, $(-1/2, 0)$, não pertence a A.

Seja $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = x^2+y^2$.

$A = \Sigma_1^g$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ $\therefore$ não existem singularidades em A.

Método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = \lambda x \\ y = \lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

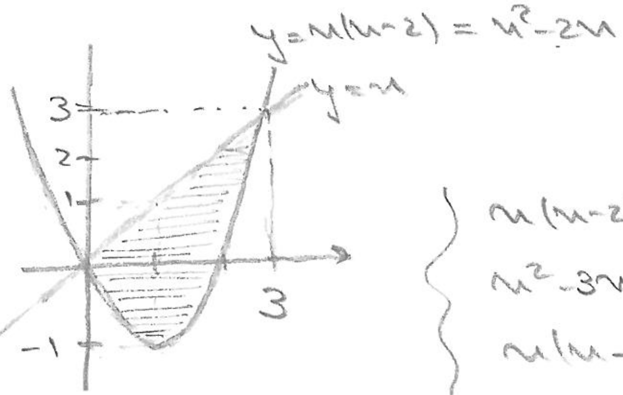
. As soluções do sistema são $(x,y,\lambda) \in \{(-1,0,1), (1,0,3)\}$

(x,y)	$f(x,y)$	
$(-1,0)$	0	mínimo de $f\vert_A$
$(1,0)$	4	máximo de $f\vert_A$

Ex. 3

$x = 1 \pm \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y+1} \Rightarrow (x-1)^2 = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x(x-2)$



$$\begin{cases} x(x-2) = x \\ x^2 - 3x = 0 \\ x(x-3) = 0 \\ x = 0 \vee x = 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{0} \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{3} \int_{y}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{0}^{3} \int_{x^2-2x}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ex. 4

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z \leq 2 - x^2 - y^2,\ z \geq y\}$

$$Vol(D) = \iiint_D d(x,y,z)$$

usando coordenadas cilíndricas:

$z = 2 - x^2 - y^2 \rightarrow z = 2 - r^2$

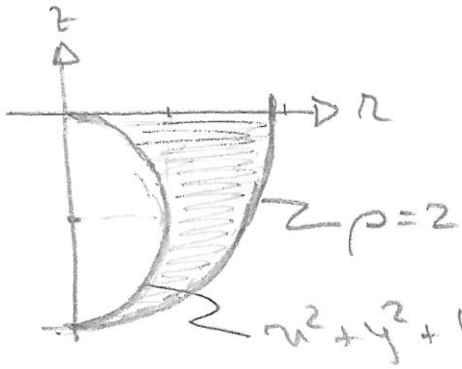
$z = y \rightarrow z = r \operatorname{sen}\theta$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r\operatorname{sen}\theta}^{2-r^2} r\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^1 r \int_0^{2\pi} (2 - r^2 - r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r(2-r^2)\,dr + \cancel{\int_0^1 r^2 \underbrace{\left[\cos\theta\right]_0^{2\pi}}_{=0}}\,dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

Ex 5.



$\rho = 2$

$x^2+y^2+(z+1)^2=1 \rightarrow \rho^2 \sin^2\varphi + (\rho\cos\varphi+1)^2 = 1$

$\rho^2 + 2\rho\cos\varphi = 0$

$\rho(\rho+2\cos\varphi) = 0$

$\rho = 0 \vee \rho = -2\cos\varphi$

$$\mathrm{Vol}(S') = \iiint_{S'} d(x,y,z)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{-2\cos\varphi}^{2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\varphi \left[\rho^3\right]_{-2\cos\varphi}^{2} d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{3} \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin\varphi + \sin\varphi\cos^3\varphi) \, d\varphi$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[\cos\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\pi}{3}\left[\cos^4\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$$

As respostas aos Exercícios 6 e 7 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 6. [3 valores] Complete os espaços identificados com $\square$ de modo a obter proposições verdadeiras:

a) Se $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathscr{C}^1$ tal que $f(1,1)=0$ e $\nabla f(1,1)=(1,2)$ então a reta cuja equação é $y=\square x+\square$ é tangente à curva de equação $f(x,y)=0$;

$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

b) Se $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathscr{C}^2$ tal que $\nabla f(1,1,2)=(0,0,0)$ e tal que

$$\mathrm{Hess} f(1,1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{bmatrix}$$ qualquer nº negativo

então $(1,1,2)$ é ponto de sela;

c) $$\int_0^2 \int_0^{2\pi} r\, d\theta dr = \boxed{4} \int_{-2}^{0} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dxdy;$$

Exercício 7. [2 valores] Seja $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$, e $f:\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$. Indique justificando se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) A função f tem mínimo e máximo;

Verdadeira

f é contínua e $\mathcal{D}$ é fechado e limitado.

b) Se f se anula em todos os pontos da fronteira de $\mathcal{D}$ então f tem pelo menos um ponto crítico no interior de $\mathcal{D}$;

Verdadeira

→ se f é a função nula, então todos os pontos de $\mathcal{D}$ são pontos críticos.

→ se f não é a função nula, então f atinge mínimo ou máximo no interior de $\mathcal{D}$.

c) Se ∇f nunca se anula em pontos da fronteira de $\mathcal{D}$ então existe um ponto $P=(u,v)$ na fronteira de $\mathcal{D}$ tal que os vetores (u,v) e $\nabla f(u,v)$ têm a mesma direção;

Verdadeira

$\mathcal{D}$ é fechada e limitada; invocar o método dos multiplicadores de Lagrange.

d) O ponto P referido na alínea anterior, se existir, é único.

Falso

Existem pelo menos dois pontos nas condições da alínea anterior.