Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

1. **Lei do arrefecimento de Newton** (1643-1727). É habital chamar-se lei do arrefecimento de Newton à seguinte afirmação: a taxa de variação da diferença de temperatura entre um determinado objeto e o meio onde está inserido é proporcional a essa diferença de temperatura.

   A lei do arrefecimento de Newton fornece um modelo simplificado para o fenómeno da variação da temperatura de um corpo por perda de calor para o meio ambiente, em que consideramos as seguintes hipóteses:

   - a temperatura $T(t)$ é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;
   - a temperatura T_m do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
   - o fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

   $$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m),$$

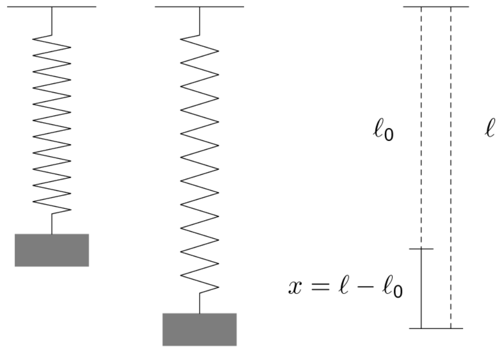
     onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo.

   Justifique que $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, sendo T_0 a temperatura inicial do corpo.

2. Robert Hooke $(1638 - 1703)$ foi o físico e matemático britânico que primeiro enunciou a lei do movimento de uma mola: a força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o elongamento ℓ da mola e a sua posição de equilíbrio ℓ_0. A constante de proporcionalidade é hoje chamada constante de Hooke da mola. Consideremos então uma mola e coloquemos um corpo de massa m na sua extremidade (ver figura). Naturalmente que a presença do corpo vai esticar um pouco a nossa mola até atingir a sua posição de equilíbrio, com um elongamento que vamos designar por ℓ_0.

   De seguida, vamos retirar o sistema da sua posição de equilíbrio, puxando o corpo um pouco para baixo, até uma posição correspondente a um elongamento ℓ da mola. A lei de Hooke estabelece que a força exercida no corpo pela mola é proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio, portanto, que

   $$F = -k(\ell - \ell_0) = -kx.$$



O sinal no lado direito da igualdade reflete a ideia que a força exercida pela mola tende a levar o corpo na direção da posição de equilíbrio, ou seja, a contrariar a sua posição.

A segunda lei do movimento de Newton diz-nos então que a posição do corpo, relativamente à posição de quilíbrio, vai evoluir de acordo com a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Habitualmente escreve-se esta igualdade da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

com $\omega^2 = k/m$ uma constante do sistema, dependente da constante de Hooke da mola e da massa do corpo nela pendurado. Assim sendo, esta vai ser uma equação diferencial que descreve a evolução temporal da posição de um qualquer corpo de massa m, neste caso, como todos sabemos, um movimento oscilatório, para cima e para baixo, pendurado numa mola de constante de Hooke k.

Mostre que a posição do corpo ao longo do tempo é descrita pela função

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\text{sen}\,(\omega t),$$

com x_0 e v_0 a posição e a velocidade iniciais, respetivamente, do corpo.

3. Determine uma função f e uma função g que verifiquem, respectivamente:

$$\begin{cases} f'(t) = t \\ f(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'(t) = -\dfrac{1}{t} \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

Desenhe os gráficos das funções obtidas. Qual a relação entre a tangente ao gráfico de f e a tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1)$?

4. Suponha-se que a aceleração de um automóvel é dada, em m/s^2, pela seguinte função de tempo
$$a(t) = 2t.$$
Se no instante $t = 0$ o automóvel inicia a sua marcha, determine a distância percorrida pelo automóvel em 5 segundos.

5. Existe alguma função y tal que $y' = y$? E tal que $y' = ky$, com k constante?

6. Existe alguma função y tal que $y'' = -y$? E tal que $y'' = -ky$, com k uma constante positiva?

7. Determine se a função y indicada é solução da equação diferencial em todos os pontos de $\mathbb{R}$.
   (a) $y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}, \qquad y'' + 2y' + y = 0$
   (b) $y(t) = 1, \qquad y'' + 2y' + y = 0$
   (c) $y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad y''' + y'' + y' + y = 0.$

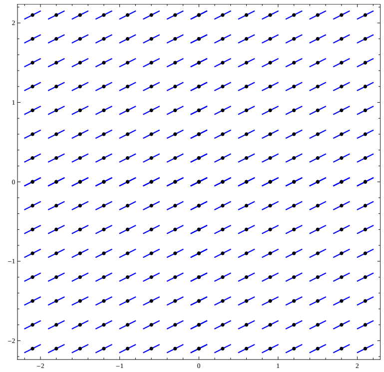
8. Verifique se a função $f(x) = \log x$, $x \in \mathbb{R}^+$ é uma solução maximal da equação
$$xy'' + y' = 0$$
Pode indicar uma solução de tal equação no intervalo $]-\infty, 0[$?

9. **Tempo de semi-vida**. Os materiais radioativos desintegram-se proporcionalmente à quantidade de massa presente, segundo uma constante de desintegração $k > 0$ que depende do material. Se $m(t)$ representa a massa no tempo t (t em anos), m verifica então:
$$m'(t) = -km(t).$$
   (a) Justifique que $m(t) = c_0 e^{-kt}$ sendo c_0 a massa inicial do material radioativo.
   (b) Verifique que o tempo $t_{1/2}$ necessário para o material se reduzir à metade do material inicial é exatamente
$$t_{1/2} = \left(\frac{1}{k}\right) \log 2.$$
   Este tempo é chamado *tempo de semi-vida*.
   (c) Calcule o tempo de semi-vida do rádio sabendo que a constante de desintegração do rádio é $4,28 \times 10^{-4}$ por ano.

10. Esboce aproximadamente o campo de direções das seguintes equações:

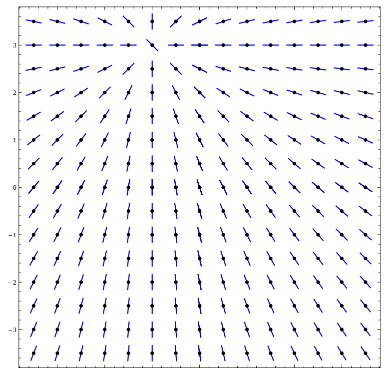
(a) $y' = 4$ (b) $y' = y$ (c) $y' = -x$ (d) $y' = -y$.

11. (a) O campo de direções tangentes



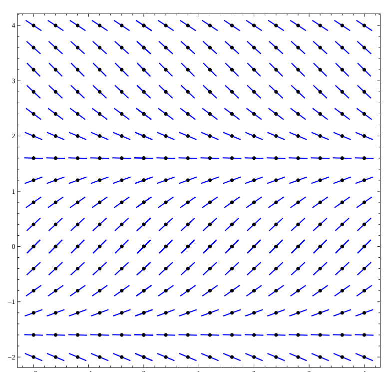
corresponde à equação: ☐ $y' = -1/2$ ☐ $y' = 1/2$ ☐ $y' = 2$

(b) O campo de direções tangentes



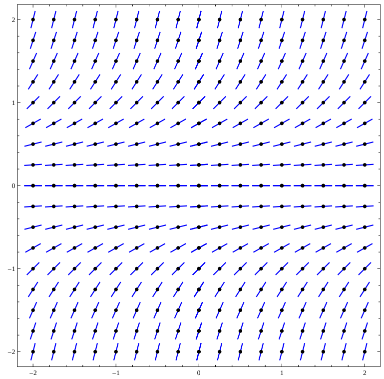
corresponde à equação: ☐ $y' = \dfrac{y-3}{t+1}$ ☐ $y' = 4$ ☐ $y' = t$

(c) O campo de direções tangentes



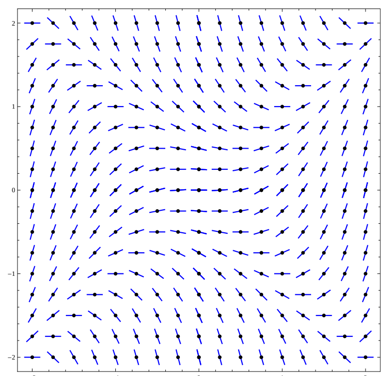
corresponde à equação: ☐ $y' = \cos y$ ☐ $y' = \operatorname{sen} y$ ☐ $y' = 1$

(d) O campo de direções tangentes



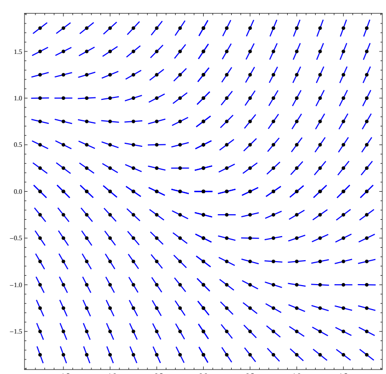
corresponde à equação: $\square$ $y' = t$ $\square$ $y' = y^2$ $\square$ $y' = 0$

(e) O campo de direções tangentes



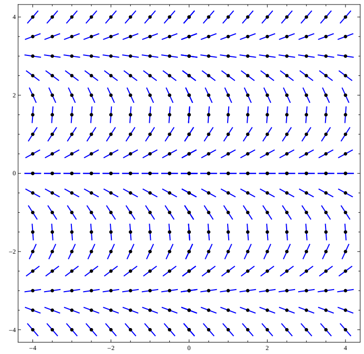
corresponde à equação: $\square$ $y' = -y^2$ $\square$ $y' = x^2 + y^2$ $\square$ $y' = x^2 - y^2$

(f) O campo de direções tangentes



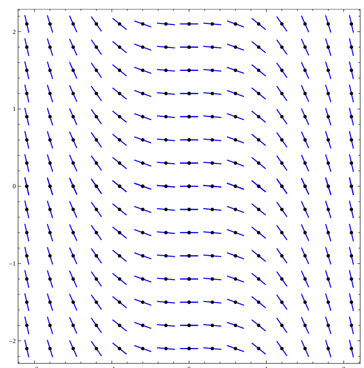
corresponde à equação: $\square$ $y' = y - \operatorname{sen} x$ $\square$ $y' = y + \cos x$ $\square$ $y' = y + \operatorname{sen} x$

(g) O campo de direções tangentes



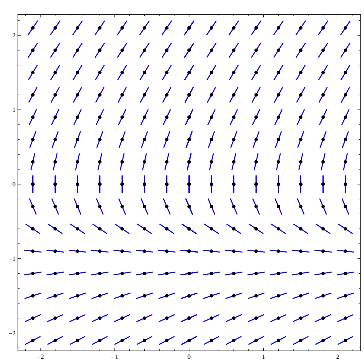
corresponde à equação: $\square$ $y' = \text{tg } y$ $\square$ $y' = -\text{tg } y$ $\square$ $y' = \text{tg } t$

(h) O campo de direções tangentes



corresponde à equação: $\square$ $y' = -y^2$ $\square$ $y' = -x^2$ $\square$ $y' = x^2$

(i) O campo de direções tangentes



corresponde à equação: $\square$ $y' = 1 - 1/y$ $\square$ $y' = 1 + 1/y$ $\square$ $y' = 1 + 1/t$