Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Licenciatura em Engenharia Informática

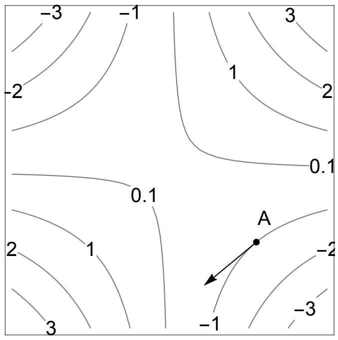
2º Teste :: 11 de junho de 2015

Nome ______________________ Número __________

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.
As respostas ao Exercício 1 são dadas nesta folha.

Exercício 1. [5 valores] Indique o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:

a) Na figura seguinte estão representados alguns conjuntos de nível de uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
O vetor aplicado em A poderá corresponder a $\nabla f(A)$;



b) Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ atinge um mínimo local em P, então P também é ponto de mínimo local de g, definida por $g(x, y) = f(x, y) + 5$.

c) Se $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$, $\mathcal{S} = [0, 1] \times [0, 1]$ e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é um função integrável em $\mathcal{R}$, então $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA = 2 \iint_{\mathcal{S}} f(x, y)\, dA.$

d) O integral triplo $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 \int_4^5 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ calcula-se sobre o paralelepípedo definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq x \leq 1, \; 2 \leq y \leq 3, \; 4 \leq z \leq 5\}.$$

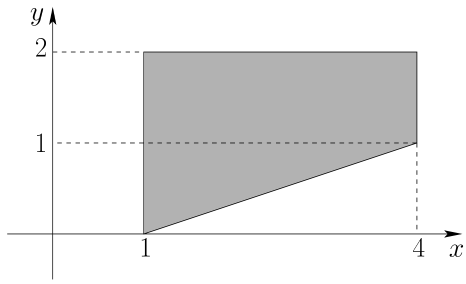
e) Se $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$, para uma determinada curva fechada $\mathcal{C}$, então $\boldsymbol{F}$ é um campo de gradientes.

Exercício 2. [2 valores] Encontre os pontos da elipse definida pela equação $2x^2 + y^2 = 1$ cuja reta tangente não interseta a reta definida pela equação $y = 4x - 4$.

Exercício 3. [3 valores] Identifique e classifique os pontos críticos da função definida por

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 + 2.$$

Exercício 4. [1 valor] Considere a região plana $\mathcal{R}$, sombreada na figura.
Apresente um único integral duplo que represente a área de $\mathcal{R}$.



Exercício 5. [2 valores] Considere o integral duplo $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\frac{4-y}{2}} f(x, y)\, dx\, dy$.

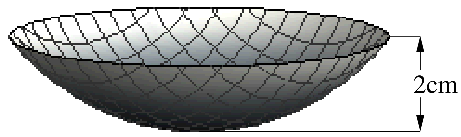
a) Esboce a região de integração.

b) Reescreva o integral, mudando a ordem de integração.

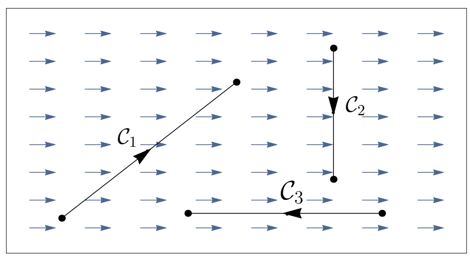
Exercício 6. [3 valores] Considere a figura (taça esférica) relativa a uma secção de uma superfície esférica.
Sabendo que a superfície esférica tem de raio 5cm:

a) Exprima o volume desta taça, usando um integral triplo, definindo convenientemente a região de integração;

b) Calcule o volume da taça, usando um sistema de coordenadas apropriado.



Exercício 7. [1 valor] Considere um campo vetorial $\boldsymbol{F}$, esboçado na figura onde também se representam as trajetórias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.
Ordene, por ordem crescente, os integrais de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ e $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.



Exercício 8. [3 valores] Sejam $\boldsymbol{F}$ um campo vetorial definido por $\boldsymbol{F}(x, y) = (x + y, y)$ e $\mathcal{C}$ uma curva cujo traço é o quarto da circunferência de raio 1 e centro na origem que vai do ponto $(1, 0)$ até ao ponto $(0, 1)$.

Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.