MÉTODOS NUMÉRICOS EI

Exercícios para MATLAB - *toolbox de otimização* 2011/2012

`fminsearch`

1.1 Resolva o problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)$$

com $f(x_1,x_2)=\max\{|x_1|,|x_2-1|\}$. Como aproximação inicial considere o ponto $(1,1)$.

1.2 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)\equiv \max\{x_1^2+x_2^4,(2-x_1)^2+(2-x_2)^2,2e^{-x_1+x_2}\}.$$

A partir da aproximação inicial $x=(1,-0.1)^T$, calcule a solução, usando o método mais adequado. Repita o processo com a seguinte aproximação inicial $x=(2,2)^T$.

Resolva novamente o problema a partir de $x=(-10,-10)^T$.

Com qual das aproximações iniciais o processo exigiu menos cálculos da função objectivo?

1.3 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\equiv n\left(\max_{1\le i\le n} x_i\right)-\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Para $n=2$ e a partir da aproximação inicial $x_i=i-(\frac{n}{2}+0.5)$, $i=1,\ldots,n$, calcule a solução.

Repita a resolução considerando agora $n=5$ e TolX$=10^{-20}$. Resolva ainda acrescentando a opção MaxFunEvals=10000. Acrescente ainda a opção MaxIter=10000. Comente os resultados.

1.4 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\equiv \prod_{i=1}^{n} x_i-\left(\min_{1\le i\le n} x_i\right).$$

Para $n=2$ e a partir da aproximação inicial $x_i=i-(\frac{n}{2}+0.5)$, $i=1,\ldots,n$, calcule a solução.

Repita a resolução considerando agora $n=5$ e MaxFunEvals$=5000$.

1.5 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)\equiv \max\left\{x_1^2+x_2^2,\ x_1^2+x_2^2+\omega(-4x_1-x_2+4),\ x_1^2+x_2^2+\omega(-x_1-2x_2+6)\right\}.$$

A partir da aproximação inicial $x=(-1,5)^T$, calcule a solução, usando o método mais adequado e considerando $\omega=500$. A partir da mesma aproximação inicial, volte a resolver o problema, mas agora fazendo $\omega=1000$.

Repita mais uma vez considerando $\omega=1500$.

Para que valor de ω, o processo iterativo é mais eficiente?

1.6 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x\in\mathbb{R}^4} f(x)\equiv \max_{1\le i\le 21} |u_i(x)|$$

em que

$$u_i(x)=x_4-(x_1t_i^2+x_2t_i+x_3)^2-\sqrt{t_i}$$

para $1\le i\le 21$.

A partir da aproximação inicial $x_i=1$, $i=1,\ldots,4$, calcule a solução, usando o método mais adequado e os seguintes valores $t_i=0.25+0.75(i-1)/20$, $i=1,\ldots,21$.

Repita o processo mas agora considere os seguintes parâmetros $t_i=0.2i$, $i=1,\ldots,21$.

`fminunc`

2.1 Resolva o problema *Aluffi-Pentini*,

$$\min_x f(x) \equiv 0.25x_1^4 - 0.5x_1^2 + 0.1x_1 + 0.5x_2^2,$$

considerando o valor inicial $(-1, 0.5)$,

(a) usando o método quasi-Newton sem fornecer as primeiras derivadas da função objectivo.

(b) usando o método quasi-Newton com procura unidimensional, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo.

(c) usando o método de Newton com regiões de confiança, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo.

(d) usando o método de Newton com regiões de confiança, fornecendo as primeiras e segundas derivadas da função objectivo.

2.2 No planeamento da produção de dois produtos, uma determinada companhia espera obter lucros iguais a P:

$$P(x_1, x_2) = \alpha_1(1 - e^{-\beta_1 x_1}) + \alpha_2(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \alpha_3(1 - e^{-\beta_3 x_1 x_2}) - x_1 - x_2,$$

em que x_1 é a quantia gasta para produzir e promover o produto 1, x_2 é a quantia gasta para produzir e promover o produto 2 e os α_i e β_i são constantes definidas. P, x_1 e x_2 estão em unidades de 10^5 euros. Calcule o lucro máximo para as seguintes condições:

$$\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 1,\ \beta_1 = 1.2,\ \beta_2 = 1.5,\ \text{ e } \beta_3 = 1.$$

(a) Resolva o problema usando o método quasi-Newton sem fornecer as primeiras derivadas da função objectivo. Considere a aproximação inicial $(1, 1)$.

(b) Resolva o problema usando o método quasi-Newton com procura unidimensional, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo. Considere a aproximação inicial da alínea anterior.

(c) Resolva novamente o problema mas seleccione agora o método de Newton com regiões de confiança.

2.3 Suponha que pretendia representar um número positivo A na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3, x_4. Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de optimização sem restrições em função das três variáveis x_1, x_2 e x_3.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses factores. Na paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0001$.

2.4 Resolva o problema *Epistatic Michalewicz*

$$\min_x f(x) \equiv -\sum_{i=1}^{n} \sin(y_i) \left(\sin\left(\frac{i y_i^2}{\pi}\right)\right)^{2m}$$

$$y_i = \begin{cases} x_i \cos(\theta) - x_{i+1}\sin(\theta), & i = 1, 3, 5, \ldots, < n \\ x_i \sin(\theta) + x_{i+1}\cos(\theta), & i = 2, 4, 6, \ldots, < n \\ x_i & i = n \end{cases}$$

pelo método quasi-Newton (sem fornecer derivadas) para $n = 5$ e para $n = 10$. Considere $\theta = \frac{\pi}{6}$, $m = 10$ e o valor inicial

$$x^{(1)} = \begin{cases} 2, & i = 1, 3, 5, \ldots, \leq n \\ 1, & i = 2, 4, 6, \ldots, \leq n \end{cases}$$

2.5 Considere o problema *Griewank*

$$\min_x f(x) \equiv 1 + \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right).$$

Resolva-o pelo método quasi-Newton com fórmula DFP para $n = 10$ e $n = 25$. Considere o valor inicial $x^{(1)} = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

`fmincon`

3.1 Resolva o problema em MATLAB

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{sujeito a} & 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0 \\ & 0 \le x_i, i = 1, 2, 3 \end{array}$$

com $x^1 = (2, 2, 2)^T$.

3.2 Resolva o seguinte problema em MATLAB

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & (x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 \\ \text{sujeito a} & 6x_2 + 4x_3 - x_1^3 - 3 \ge 0 \\ & 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & 0 \le x_i, i = 1, 2, 3 \end{array}$$

com $x^1 = (0.1, 0.7, 0.2)^T$.

3.3 Resolva o seguinte problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} f(x) \equiv -x_1$$

sujeito a

$$x_2 - x_1^3 \ge 0$$
$$x_1^2 - x_2 \ge 0$$
$$-x_1^3 + x_2 - x_3^2 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_4^2 = 0$$

usando o método SQP com procura unidimensional do MATLAB, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo e das restrições. Tome $x^1 = (10, 10, 10, 10)^T$.

3.4 Uma empresa pretende iniciar a produção e venda de 3 novos tipos de secretária, A, B e C com preços de venda por unidade respectivamente de p_1, p_2 e p_3. É possível disponibilizar, mensalmente, 150 horas/máquina e 280 horas de mão-de-obra.

As relações entre o nível de produção $x_i (i = 1, 2, 3)$ (de cada tipo de secretária) e os preços de venda são as seguintes:

$$x_1 = 18 - p_1; \quad x_2 = 9 + \frac{1}{3}p_1 + p_2; \quad x_3 = 13 - p_3.$$

Os consumos por unidade produzida são

Tipo	Horas/máquina	Mão-de-obra(horas)
A	0.3	0.4
B	0.4	1
C	0.6	0.7

Neste problema também são conhecidos os preços unitários de produção, que são respectivamente 5, 12 e 9 unidades monetárias.

Calcule o plano óptimo de produção (x_1, x_2, x_3 e lucro máximo) e respectivos preços de venda, sem fornecer as derivadas das funções envolvidas no modelo usando o método da Programação Quadrática Sequencial.

Considere a aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)^{(1)} = (10, 10, 10, 100, 100, 100)^T$.

3.5 Uma empresa pretende abrir um novo supermercado numa região com 3 cidades localizadas nas coordenadas $(-1, 3)$, $(1, 3)$ e $(0, 4)$. O número de habitantes de cada cidade é, respectivamente, 60 mil, 20 mil e 30 mil.

As Câmaras Municipais das cidades não permitem que se localize o supermercado dentro de uma zona delimitada por um raio de 0.5 Km a partir do centro de cada uma das cidades (use a distância ao quadrado), com o propósito de evitar congestionamentos nos centros.

Pretende-se conhecer a melhor localização do supermercado (x_1, x_2) de forma a atrair um maior número de clientes das 3 cidades. Adoptando um perfil gravitacional, supõe-se que o supermercado tem uma capacidade de atrair clientes que é proporcional à população (use 60 em vez de 60000, etc.) e inversamente proporcional à soma de 1 com o quadrado da distância que o separa dos clientes.

Use o MATLAB sem fornecer as derivadas das funções envolvidas no modelo. Considere a aproximação inicial $(1, 1)$.