

NOME:

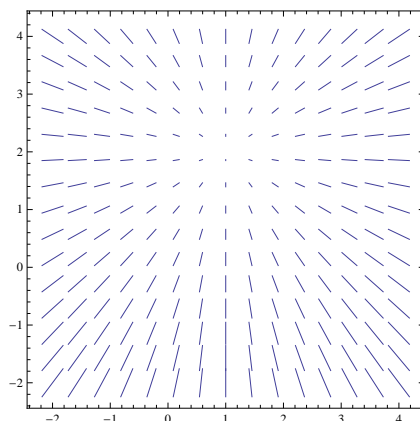
NÚMERO:

Parte I (5 valores) Cada resposta correcta tem cotação 1 valor. Cada resposta errada desconta 0.3 valores.

1. A função $y(t) = t \ln(2t)$ é solução da EDO $y' - \frac{1}{t}y = a$

- ☐ se $a = 1$
☐ se $a = 2$
☐ y não é solução para nenhum dos valores anteriores.

2. O campo de direcções



corresponde à EDO

- ☐ $y' = \frac{y-3}{t+1}$
☐ $y' = 4;$
☐ $y' = t.$

3. A mudança de variável $u = y^2 + t$ transforma a EDO $y' = \frac{ty^2 + t^2 - 1}{2y}$

- ☐ na EDO $u' = tu - 1$
☐ na EDO $u' = tu$
☐ na EDO $u' = 2tu$

4. A solução geral da EDO $y'' + 16y = e^t$

- ☐ é $y(t) = \frac{1}{17}e^t + C_1e^{4t} + C_2e^{-4t}$, com C_1, C_2 constantes.
☐ é $y(t) = \frac{1}{17}e^t + C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$, com C_1, C_2 constantes.
☐ não é nenhuma das indicadas acima.

5. Suponha-se que $y_1(t) = \ln(t+1)$ e $y_2(t) = \cos t$ são soluções de uma EDO linear homogénea de ordem 2. A solução dessa EDO verificando $y(0) = -2$ e $y'(0) = 0$

- ☐ é $y(t) = \ln(t+1) + \cos t$
☐ é $y(t) = -2 \cos t$
☐ é $y(t) = \ln(t+1) - 2 \cos t$

Parte II

6. (3,5 valores) A taxa de desintegração de átomos de Carbono-14 (C^{14}) é proporcional ao número de átomos presentes em cada instante. O processo de datação de fósseis e gravuras rupestres através do C^{14} baseia-se na propriedade de que metade dos átomos iniciais se desintegram ao fim de 5600 anos, aproximadamente. Determine a idade de algumas das gravuras rupestres do Vale do Côa sabendo que estas contém $1/12$ da quantidade inicial de C^{14} .

7. (3,5 valores) Considere o problema de CI:

$$\begin{cases} y' &= ty^2 + t^2 \\ y(-2) &= 1 \end{cases}$$

Sejam y a solução do problema anterior e y_k a aproximação de $y(t_k)$ calculada usando o método de Euler com passo 0.2, isto é, tal que $t_k = -2 + 0.2k$.

- (a) Indique a fórmula de recorrência que define, para este problema, y_{k+1} em função de t_k e y_k :

$$y_{k+1} =$$

- (b) Use a fórmula encontrada para completar o quadro abaixo e obter uma aproximação de $y(-1)$. Represente aproximadamente os valores obtidos.

t_k	y_k
-2	
-1.8	
-1.6	
-1.4	
-1.2	
-1	

8. (4 valores) Determine os pontos de equilíbrio do seguinte sistema indicando o tipo de estabilidade:

$$\begin{cases} x' &= x^2 + 2y \\ y' &= -x - y \end{cases}$$

9. (4 valores)

(a) Verifique que a série de Fourier de senos da função

$$f(x) = -1, \quad 0 < x < \pi$$

é a série trigonométrica:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{-4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x$$

(b) Indique a solução formal do problema da corda vibrante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin 2x + \sin 6x, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -1, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$