



Exercício 4.1 Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

- a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (x, y)$ ;
- b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$ ;
- c)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(x, y) = (xye^{xy}, x \sin y, 5xy^2)$ ;
- d)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$ ;
- e)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y, z) = (x + y + e^z, x^2y)$ .

Exercício 4.2 Considere as funções

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y + z, x^2yz, xyz) \quad (x, y, z) \mapsto (xy, yz, 2x, xyz)$$

- a) Calcule  $Df((-1, 0, -1); (2, 3, -1))$  e  $Dg((-1, 0, -1); (2, 3, -1))$ .
- b) Calcule  $Df(-1, 0, 1)$  e  $Dg(-1, 0, 1)$ .

Exercício 4.3 Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (3x, x + 2y)$$

- a) Calcule a matriz jacobiana de  $f$ .
- b) Justifique que a função  $f$  é derivável.
- c) Calcule a derivada da função  $f$  no ponto  $(1, 2)$ ; compare a função  $Df(1, 2)$  com a função  $f$ .
- d) Dado  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , calcule  $Df(x_0, y_0)$ .

Exercício 4.4 Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \mapsto (2x^2, 3y, 2xy)$$

- a) Calcule a matriz jacobiana de  $f$ .
- b) Justifique que a função  $f$  é derivável e calcule a derivada da função  $f$  no ponto  $(1, 1)$ .
- c) Determine  $Df(1, 1)(2, 3)$ .

Exercício 4.5 Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções e averigue em que casos as derivadas mistas são iguais.

- a)  $f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ;
- b)  $f(x, y) = \cos(xy^2)$ ;
- c)  $f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$ ;
- d)  $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$ .

Exercício 4.6 Mostre que a função  $g(x, t) = 2 + e^{-t} \sin x$ , satisfaz a equação do calor  $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ .

Exercício 4.7 Verifique que  $f_{xzw} = f_{zwx}$  para  $f(x, y, z, w) = e^{xyz} \sin(xw)$ .

Exercício 4.8 Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

- a)  $f_x(x, y) = 2x^3$ ,  $f_y(x, y) = yx^2 + x$ ;
- b)  $f_x(x, y) = x \sin y$ ,  $f_y(x, y) = y \sin x$ .

Exercício 4.9 Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Determine  $f_x$  e  $f_y$ .
- b) Calcule  $f_{xy}(0, 0)$  e  $f_{yx}(0, 0)$ .
- c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

Exercício 4.10 Considere as funções

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \mapsto xy \quad (x, y) \mapsto \sin(xy) \quad (x, y) \mapsto e^x$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}. \\ (x, y, z) \mapsto x^2y + y^2z \quad (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

Determine  $Dh(x, y)$ .

Exercício 4.11 Considere a função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

$$(x, y, z) \mapsto x^2y - xz$$

- a) Calcule  $Df(1, 0, 0)(1, 2, 2)$ .
  - b) Determine  $a$  de modo que a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenha derivada nula.
- $$t \mapsto f(at^2, at, t^3)$$

Exercício 4.12 Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Considere a função  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x, y) = f(xy)$ . Mostre que  $x \frac{\partial F}{\partial x} = y \frac{\partial F}{\partial y}$ .

Exercício 4.13 Calcule:

- a)  $\frac{du}{dt}$ , onde  $u = \ln\left(\sin \frac{x}{y}\right)$  e  $x = 3t^2$ ,  $y = \sqrt{1+t^2}$ ;
- b)  $\frac{\partial w}{\partial p}$  e  $\frac{\partial w}{\partial q}$ , onde  $w = r^2 + s^2$  e  $r = pq^2$ ,  $s = p^2 \sin q$ ;
- c)  $\frac{\partial z}{\partial s}$  e  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , onde  $z = x^2 \sin y$  e  $x = s^2 + t^2$ ,  $y = 2st$ .

Exercício 4.14 Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções duas vezes deriváveis e seja

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x+y) + g(x-y)$$

Verifique que  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ .