| | | |
|---|---|---|
| 10/11/2010<br>$1^o$ teste | 8201N2 - Cálculo 1 | LEI |

1. *(2 valores)* Escreva o conjunto
$$\{x \in \mathbb{R} \quad : \quad |3x-2| \leq 1\}$$
na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

$$[1/3, 1] \,.$$

2. *(2 valores)* Determine o interior, a aderência e a fronteira do conjunto
$$A = \{1/n \quad : \quad n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{int} A = \emptyset \qquad\qquad \overline{A} = \mathrm{fr} A = A \cup \{0\} \,.$$

3. *(2 valores)* Calcule o seguinte limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \,.$$

4. *(2 valores)* Dê exemplo de uma função $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ contínua com valor máximo 1 e sem valor mínimo.

$$f(x) = 1 - x \,.$$

5. *(2 valores)* Calcule a primeira e a segunda derivadas da função $f(x) = e^{\sin(x)}$.

$$f'(x) = \cos(x) e^{\sin(x)} \qquad\qquad f''(x) = \left(\cos^2(x) - \sin(x)\right) e^{\sin(x)} \,.$$

6. *(2 valores)* Mostre que a equação
$$x = \cos(x)$$
possui uma única solução no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Uma solução de $x = \cos(x)$ é um zero da função contínua $f(x) = \cos(x) - x$. A função $f(x)$ é positiva em 0, pois $\cos(0) - 0 = 1$, e negativa em $\pi/2$, pois $\cos(\pi/2) - \pi/2 = \pi/2$, logo, pelo teorema de Bolzano, existe pelo menos um ponto $c \in (0, \pi/2)$ onde $f(c) = 0$. Este zero é único porque a função $f$ é injetiva neste intervalo, sendo a sua derivada $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$ para todos os $x \in (0, \pi/2)$.

7. *(2 valores)* Dê exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não seja derivável em $x = 0$.

$$f(x) = |x| \,.$$

8. *(2 valores)* Calcule o polinómio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $a = 0$. Use o polinómio encontrado para estimar o valor de $\cos(0.1)$.

O polinómio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $a = 0$ é

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \,.$$

A fórmula de Taylor com resto de Lagrange diz que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_{4,0}(x) \qquad \text{com} \qquad |R_{4,0}(x)| = \left| \frac{\sin(c)}{5!} x^5 \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

Portanto,

$$\cos(0.1) \simeq 1 - \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-4}}{24} \pm 0.0000001 \simeq 0.9950042 \pm 0.0000001$$

9. *(2 valores)* Calcule o valor de $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})$.

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3} \,.$$

10. *(2 valores)* Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $e^x - 6e^{-x} = 5$.

Se multiplicamos por $e^x > 0$ obtemos a equação equivalente

$$(e^x)^2 - 6 = 5e^x \,,$$

ou seja,

$$(e^x - 6)(e^x + 1) = 0 \,.$$

Sendo os exponenciais positivos, a única solução é $e^x = 6$, ou seja, $x = \log 6$.

| 13/01/2011 <br> 2$^o$ teste | 8201N2 - Cálculo 1 | LEI |
|---|---|---|

1. *(2 valores)* Determine uma primitiva da função

$$f(x) = x \cdot \cos(x^2 - 7)$$

Uma primitiva de $f(x) = x\cos(x^2 - 7)$ é a função

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2 - 7)$$

2. *(2 valores)* Calcule

$$\int \sqrt{2x+1}dx$$

Se $y = 2x + 1$, e portanto $dy = 2dx$,

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{3}\,y^{3/2} + C = \frac{1}{3}\,(2x+1)^{3/2} + C$$

desde que $2x + 1 \geq 0$.

3. *(2 valores)* Calcule

$$\int_{-1}^{3} |x-1|\,dx$$

$$\int_{-1}^{3} |x-1|\,dx = 4$$

4. *(2 valores)* Determine o polinómio de Taylor de grau 2 centrado em $x = 1$ da função $f(x)$ definida pelo integral

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

se $x > 0$.

$f(1) = 0$. $f'(x) = 1/x$, portanto $f'(1) = 1$ e $f''(1) = -1$. O polinómio de Taylor de grau 2 centrado em $x = 1$ da função $f(x)$ é

$$P_{2,1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

5. *(2 valores)* Determine a função $f$ tal que $f''(x) = e^{2x} + 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ e $f(0) = 1$.

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x (e^{2t}+1)dt = x + \frac{1}{2}\,e^{2x}$$

donde

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)\,dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\,e^{2x}\,.$$

6. *(2 valores)* Calcule

$$\int_1^e \log(x)\,dx$$

$$\int_1^e \log(x)\,dx = [x\log(x)]_1^e - \int_1^e dx = 1$$

7. *(2 valores)* Calcule

$$\int \frac{dx}{x(1-x)}$$

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \log|x| - \log|1-x| + C = \log\left|\frac{x}{1-x}\right| + C$$

8. *(2 valores)* Calcule a derivada de

$$F(x) = \int_3^{\sin(x)} e^{-\pi t^2}\,dt$$

$$F'(x) = \cos(x)\,e^{-\pi\sin^2(x)}$$

9. *(2 valores)* Calcule a área da região limitada pelas curvas de equações

$$y = -x^3 \qquad \text{e} \qquad y = 4x(1-x)$$

As curvas intersectam-se em $x = 0$ e $x = 2$. A área da região limitada pelas duas curvas é

$$\int_0^2 (4x(1-x) + x^3)dx = \left[2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

10. *(2 valores)* Dê exemplo de uma função integrável mas não derivável.

$$f(x) = |x|$$