Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Exame :: 23 de junho de 2017

Nome

Número

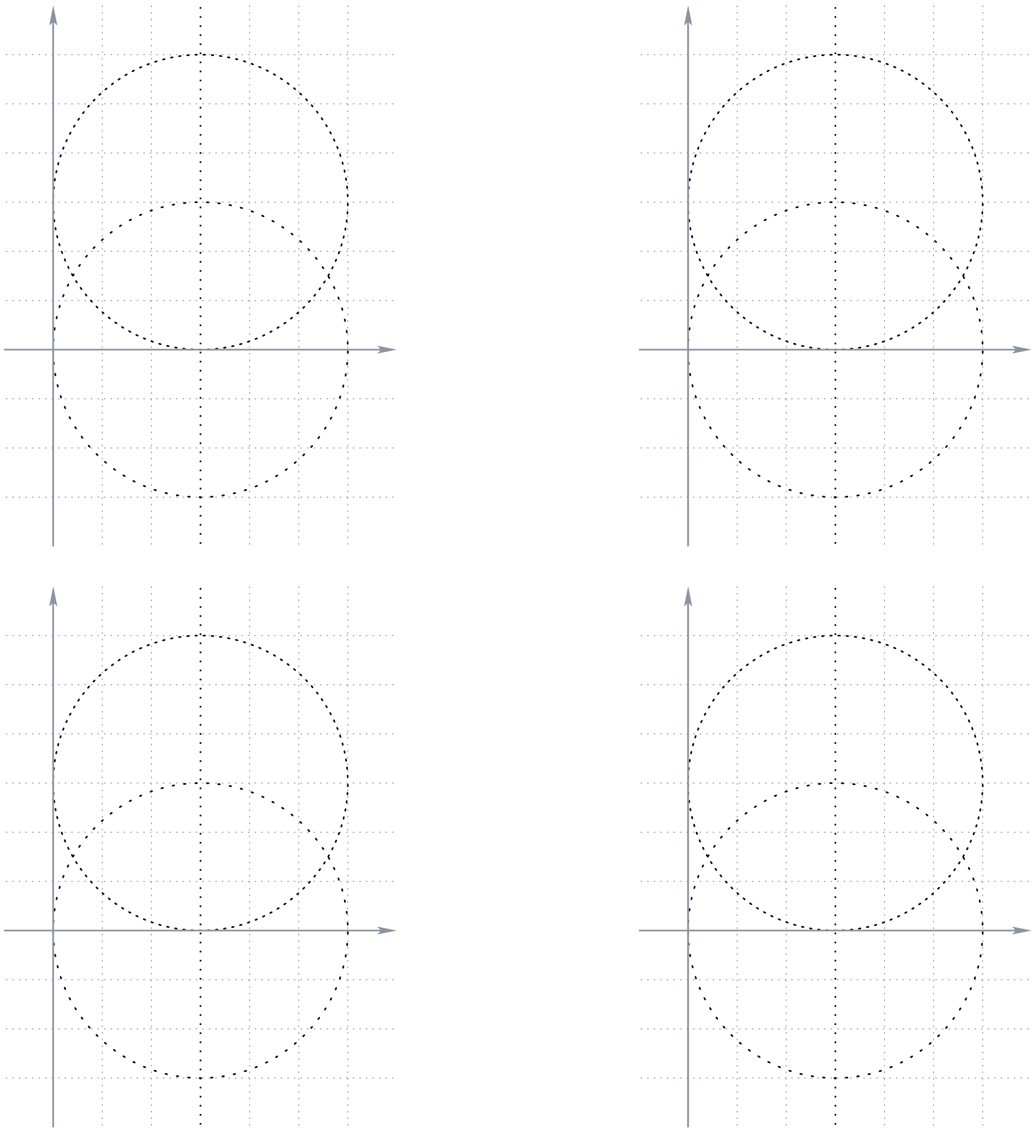
Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

As respostas ao exercício 1 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 1. [1,5 valores] Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-3)^2 < 9 \text{ e } (x-3)^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3\}.$$

a) Apresente esboços do conjunto A, do seu interior, da sua aderência e da sua fronteira;



b) Indique, justificando, se A é ou não um conjunto fechado.

Exercício 2. [1,5 valores] Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{(x+y^2)^2}$.

Exercício 3. [5 valores] Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+4y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

a) Mostre que f é uma função contínua.

b) Calcule $\nabla f(0,0)$ e $Df((0,0);(1,1))$.

c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

Exercício 4. [2 valores] Seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a função definida por $g(x,y)=(e^{x^2y},\ln(3x^4y^2+1))$ e $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ a função definida por $f(x,y)=(2x+4y,5x+6y,4x+2y)$. Determine a matriz jacobiana de $f\circ g$ no ponto $(1,1)$.

Exercício 5. [4 valores] Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^3+x^2-y^2$.

a) Determine e classifique os pontos críticos de f.

b) Justifique que f tem extremos absolutos na região $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ e determine-os.

c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,1)$.

Exercício 6. [3 valores] Considere uma região $\mathcal{R}$ cuja área é dada por

$$I=\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydx+\int_1^2\int_{-(x-2)^2}^{(x-2)^2} dydx.$$

a) Faça um esboço da região $\mathcal{R}$.

b) Inverta a ordem de integração em I.

c) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

Exercício 7. [2 valores] Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro octante limitada pelo cilindro de equação $x^2+y^2=4$ e pelo parabolóide de equação $z=1+x^2+y^2$. Calcule

$$\iiint_{\mathcal{R}}\sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y,z).$$

Exercício 8. [1 valor] Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ cujas curvas de nível são circunferências centradas no ponto $(0,1)$. Considerando o conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+(y-1)^2=1\}$ onde f não admite pontos críticos, indique, caso existam, os pontos extremantes de $f_{|S}$.