Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise
2014/2015

Folha 9

Exercício 9.1 Faça um esboço das curvas planas descritas pelas seguintes parametrizações:

a) $\boldsymbol{c}(t) = (2t-1, t+2, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $\boldsymbol{c}(t) = (-t, 2t, 1/t)$, $1 \leq t \leq 3$;

c) $x(t) = \operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

d) $x(t) = 2 \operatorname{sen} t$, $y(t) = 4 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

e) $x(t) = t^2$, $y(t) = 4t^2 + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 9.2 Encontre uma parametrização do tipo $x(t) = \operatorname{sen} f(t)$, $y(t) = \cos f(t)$, com $t \in]0,1[$, que descreva, um número infinito de vezes, a circunferência de raio 1 centrada na origem.

Exercício 9.3 Calcule os vetores velocidade para cada uma das curvas definidas por:

a) $\boldsymbol{c}(t) = \big(6t, 3t^2, t^3\big)$, $t \in \mathbb{R}$;

b) $\boldsymbol{c}(t) = \big(\operatorname{sen}(3t), \cos(3t), 2\sqrt{t^3}\big)$, $t \in \mathbb{R}_0^+$;

c) $\boldsymbol{r}(t) = \big(\cos^2 t, 3t - t^3, t\big)$, $t \in \mathbb{R}$;

d) $\boldsymbol{r}(t) = \big(4e^t, 6t^4, \cos t\big)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 9.4 Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto dado:

a) $\big(\operatorname{sen}(3t), \cos(3t), 2t^{5/2}\big)$, $t = 1$;

b) $\big(\cos^2 t, 3t - t^3, t\big)$, $t = 0$.

Exercício 9.5 Suponha que uma partícula seguindo a curva $\boldsymbol{c}(t)$ sai "disparada" no instante $t = t_0$. Calcule a posição que a partícula ocupará no instante $t = t_1$.

a) $\boldsymbol{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, onde $t_0 = 2$ e $t_1 = 3$;

b) $\boldsymbol{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, onde $t_0 = 1$ e $t_1 = 2$;

Exercício 9.6 Duas partículas iniciam, no instante $t = 0$, duas trajetórias: uma delas ao longo da curva definida por $x(t) = 2t + 6$, $y(t) = 5 - 4t$, $t \geq 0$ e a outra ao longo da curva definida por $x(t) = 3 - 5\cos(\pi t)$, $y(t) = 1 + \operatorname{sen}(\pi t)$, $t \geq 0$.

a) Tais trajetórias são concorrentes?

b) As partículas colidem?

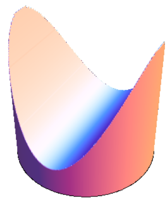
Exercício 9.7 Determine os integrais de linha $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} f\, ds$, quando:

a) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $\boldsymbol{c} : t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

b) $f(x,y,z) = yz$ e $\boldsymbol{c} : t \mapsto (t, 3t, 2t)$, $t \in [1,3]$.

Exercício 9.8 Determine o comprimento do gráfico da função $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \ln x$.

Exercício 9.9 Determine o comprimento do caminho $\boldsymbol{c} : t \mapsto (t^2, t, 3),\ t \in [0, 1]$.



Exercício 9.10 Determine a área da face lateral do "cilindro" que se apresenta na figura, sabendo que essa face é definida pelas condições $x^2 + y^2 = 4$ e $0 \leq z \leq 1 + x^2$.

Exercício 9.11 Calcule o integral de linha $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} x^2\, dx + xy\, dy$ ao longo da curva $\boldsymbol{c}(t) = (t^2, t)$, $t \in [-1, 1]$.

Exercício 9.12 Calcule o integral de linha $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} x\, dx + y\, dy + z\, dz$ ao longo da hélice $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercício 9.13 Considere a função real $f(x, y, z) = xe^y \cos(\pi z)$.

a) Calcule $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

b) Determine $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, onde $\boldsymbol{c}(t) = (3\cos^4 t, 5\operatorname{sen}^7 t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Exercício 9.14 Considere o campo de vetores $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})$.

a) Verifique que $\boldsymbol{F}$ é um campo de gradientes.

b) Determine o integral de linha de $\boldsymbol{F}$ ao longo de qualquer caminho de classe $\mathscr{C}^1$ que una o ponto $(1, 0, 1)$ ao ponto $(0, 1, 0)$.

Exercício 9.15 Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.

a) Justifique que área$(B) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} -ydx + xdy$ onde $\boldsymbol{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\boldsymbol{c}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$ e calcule essa área.

b) Calcule a área de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$.

Exercício 9.16 Calcule os seguintes integrais de linha recorrendo eventualmente ao teorema de Green.

a) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} x\, dx + xy\, dy$ onde $\boldsymbol{c}(t) = (t, |t|)$, $-1 \leq t \leq 1$.

b) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} -y\, dx + x\, dy$ onde $\boldsymbol{c}$ é uma curva seccionalmente de classe $\mathscr{C}^1$, fechada, simples, positivamente orientada e cuja imagem é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

c) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} (x^4 - y^3)\, dx + (x^3 + y^5)\, dy$ onde $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} 4x^3y^3\, dx + (3x^4y^2 + 5x)\, dy$ onde $\boldsymbol{c}$ é uma curva seccionalmente de classe $\mathscr{C}^1$, fechada, simples, positivamente orientada e cuja imagem é a fronteira do quadrado de vértices $(-1, 0)$,$(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Exercício 9.17 Recorrendo a integrais de linha, determine a área dos seguintes subconjuntos B de $\mathbb{R}^2$:

a) B é limitado pela curva dada por $\boldsymbol{c}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $a, b > 0$.

b) B é a região limitada pela elipse de equação $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.