Cálculo I — LEI

Primeira chamada — 17 de Janeiro de 2007

1. (5 valores) Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

   (a) um número irracional no intervalo $[-2,-1]$;

   (b) um subconjunto de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ numerável e limitado;

   (c) uma função (basta o gráfico) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com contradomínio $\mathbb{R}$ e tal que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0;$$

   (d) uma função $f\colon [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua apenas no ponto 1;

   (e) uma função contínua $g\colon [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^5 g(t)\,dt = -5$ e $\displaystyle\int_0^5 |g(t)|\,dt \neq 5$.

2. (5 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

   (a) o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-2| < |x+4|\}$ pode ser escrito na forma $]-1,+\infty[$;

   (b) o conjunto $\left\{2 - \dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 1\}$ possui ínfimo e máximo;

   (c) existe $z \in]\pi, 2\pi[$ tal que $\cos z = \operatorname{sen} z + \pi/4$;

   (d) se $f\colon [\pi, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável então f é integrável;

   (e) a área da região $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 2\pi \ \wedge \ \cos x \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$ é igual a π.

3. (2 valores) Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^2}$.

4. (2 valores) Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas até à terceira ordem e cujo polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 1 é $P_{2,1}(x)=4x^2+2x+5$.

   (a) Determine o correspondente polinómio de Taylor de ordem 3, sabendo que $f'''(1)=12$.

   (b) Seja $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a primitiva de f tal que $F(1)=2$. Determine o polinómio de Taylor de F de ordem 2 em torno de 1.

5. (4 valores) Calcule apenas uma das primitivas (a) e (b) e apenas um dos integrais (c) e (d):

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^x(1+\operatorname{arctg} e^x)}{1+e^{2x}}\,dx;$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)\,(x+1)^2}\,dx;$

   (c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,\log(\log x)\,dx;$ (d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}\,dx.$

6. (2 valor) Seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua e considere-se $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrável e tal que $g(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$. Prove que

$$\exists\, c\in[a,b]\ :\ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$