introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios de sistemas de edos lineares, homogéneas e autónomas — parte um

1.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$$

2.

2.1 A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = 2C_2 \\ y_\circ = C_1 + C_2 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = x_\circ \, e^{2t} \\ y(t) = (y_\circ - x_\circ/2)\, e^{-2t} + \frac{1}{2} x_\circ \, e^{2t} \end{cases}$$

2.2

As soluções que se aproximam da solução de equilíbrio /ponto fixo $(0,0)$, quando o tempo cresce para infinito são aquelas tais que $x_\circ = 0$.

2.3

A partir da expressão para a solução geral do sistema, temos que, se $(x_\circ, y_\circ) = (1,1)$, então

$$\begin{cases} x(1.24) = e^{2\times 1.24} = 11.9413 \\ y(1.24) = 0.5\, e^{-2\times 1.24} + 0.5\, e^{2\times 1.24} = 6.0125 \end{cases}$$

3.

3.1

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \, e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \, e^{-t} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 \, e^{-2t} - 4C_2 \, e^{-t} \\ y(t) = C_1 \, e^{-2t} + 3C_2 \, e^{-t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = -C_1 - 4C_2 \\ y_\circ = C_1 + 3C_2 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = -(3x_\circ + 4y_\circ)\, e^{-2t} + 4(x_\circ + y_\circ)\, e^{-t} \\ y(t) = (3x_\circ + 4y_\circ)\, e^{-2t} - 3(x_\circ + y_\circ)\, e^{-t} \end{cases}$$

3.2

A partir da solução geral do sistema de equações podemos concluir que, para quaisquer $x_\circ$ e $y_\circ$, o sistema terá a sua evolução no sentido de se aproximar da solução de equilíbrio/ponto fixo.

4.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\, \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -2C_1 - C_2\, \mathrm{e}^t \\ y(t) = C_1 + C_2\, \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = -2C_1 - C_2 \\ y_\circ = C_1 + C_2 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = 2(x_\circ + y_\circ) - (x_\circ + 2y_\circ)\, \mathrm{e}^t \\ y(t) = -(x_\circ + y_\circ) + (x_\circ + 2y_\circ)\, \mathrm{e}^t \end{cases}$$

5.

5.1 A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio, $\lambda = -1$, de multiplicidade 2. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio λ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, sabemos que a segunda solução particular do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = t\, \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde este último vector é solução de

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = -1$. Assim sendo, podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\left(t\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2(2t\,\mathrm{e}^{-t} - \,\mathrm{e}^{-t}) \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = 2C_1 - C_2 \\ y_\circ = C_1 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = x_\circ\,\mathrm{e}^{-t} - (2x_\circ - 4y_\circ)\,t\,\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = y_\circ\,\mathrm{e}^{-t} - (x_\circ - 2y_\circ)\,t\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

5.2

Pelas expressões da solução geral do sistema verifica-se facilmente que

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \end{cases}$$

qualquer que seja $(x_\circ, y_\circ)$.

6.

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + \mathrm{i} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\big(\mathrm{e}^{2t}\cos t\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big) + C_2\big(\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\cos t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1(-3\mathrm{e}^{2t}\cos t - \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t) + C_2(-3\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t + \mathrm{e}^{2t}\cos t) \\ y(t) = 2C_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + 2C_2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_\circ, y_\circ)$, temos que

$$\begin{cases} x_\circ = -3C_1 + C_2 \\ y_\circ = 2C_1 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = x_\circ(\mathrm{e}^{2t}\cos t - 3\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t) - 5y_\circ\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t \\ y(t) = 2x_\circ\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t + y_\circ(\mathrm{e}^{2t}\cos t + 3\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,t) \end{cases}$$