

Nome: _____ Número: _____ TP: _____

IMPORTANTE: A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. Nos exercícios de escolha múltipla, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores. A cotação do último exercício é 2 valores. Nos restantes exercícios a cotação de cada alínea é 0,75 valores.

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ A correspondência $A \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z}, & A \text{ finito} \\ \emptyset, & A \text{ infinito} \end{cases}$ define uma função $f: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

☐ ☐ A correspondência $X \mapsto \begin{cases} \emptyset, & X \subseteq \{1, 2\} \\ \mathbb{N}, & \{1, 2\} \subsetneq X \end{cases}$ define uma função $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

II. Considere as funções $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ e $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(m) = \begin{cases} \frac{m}{2}, & m \text{ par} \\ -m^2, & m \text{ ímpar} \end{cases}$ e $g(n) = 2n$.

(a) A imagem inversa de $\{\frac{1}{2}, -4\}$ por f é:

(b) Tem-se $f(\{1, 2\}) =$

(c) A função composta $g \circ f$ é dada por:

(Na alínea (c) indique em particular o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere a função $f: \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(p, q) = \frac{p}{q}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ f é injectiva.

☐ ☐ f é sobrejectiva.

IV. Considere os conjuntos $A = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid 1 \in X, 2 \notin X\}$ e $B = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid 2 \in X, 1 \notin X\}$. Indique a função inversa da função $f: A \rightarrow B$ dada por $f(X) = (X \setminus \{1\}) \cup \{2\}$.

V. Considere a relação $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$ em $A = \{1, 2, 3\}$.

(a) A menor relação reflexiva em A que contém R é

(b) A menor relação simétrica em A que contém R é

(c) A menor relação transitiva em A que contém R é

VI. Seja \sim a relação de equivalência em $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ definida por

$$X \sim Y \Leftrightarrow X \text{ e } Y \text{ têm o mesmo número de elementos.}$$

Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(a) $[\emptyset] =$

(b) $[\{1, 2\}] =$

(c) $[\{2, 3\}] =$

VII. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ Existe uma relação de equivalência \sim em A tal que $A/\sim = \{\{a, c, e\}, \{b\}, \{d\}\}$.

☐ ☐ Existe uma relação de equivalência \sim em A tal que $A/\sim = \{\{a, c, e\}, \{b\}\}$.

☐ ☐ Existe uma relação de equivalência em A tal que $[b] = \{b, d\}$.

☐ ☐ Existe uma relação de equivalência em A tal que $[b] = \{a, c, e\}$.

☐ ☐ Existe uma relação de equivalência em A tal que $[b] = \{a, b, c\}$ e $[c] = \{c, d\}$.

VIII. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$ em que

$$\preceq = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (1, 5), (2, 5)\}.$$

(a) Indique o diagrama de Hasse de $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$:

(b) Indique os minorantes de $\{1, 5\}$:

(c) Indique os elementos minimais de $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \preceq)$:

IX. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe um grafo cujos vértices têm graus 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20. |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe um grafo conexo com pelo menos dois vértices tal que cada caminho fechado simples não trivial é um ciclo. |

X. Mostre por indução que para todo o número natural $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$