Exame de Métodos Numéricos

2^a Chamada (3 horas) - 26 de Janeiro de 2007

Licenciaturas em Engenharia Civil e Mecânica

Universidade do Minho, Escola de Engenharia, Departamento de Produção e Sistemas

Apresente e justifique todos os cálculos e decisões que tiver de efectuar

1. Uma das soluções para os resíduos de material nuclear é colocá-los em barris especiais que serão mais tarde depositados no fundo do oceano. Se os recipientes permanecerem intactos, a contaminação do ambiente circundante é mínima. Resolvendo as equações de movimento para os barris à medida que eles descem na água, chega-se à seguinte relação entre a velocidade de impacto, v, e a profundidade da água, D:
$$D = \frac{1}{k^2 g}\left[W(W-B)\ln\left(1+\frac{kv}{W-B}\right) - Wkv\right],$$
em que W é o peso dos barris, B é a sua flutuabilidade, g é a constante gravitacional e k é o coeficiente de atrito. A flutuabilidade dos barris pode ser determinada através do seu volume, sendo igual a 470. O coeficiente de atrito é determinado experimentalmente e é dado por $k = 0.08$. A constante gravitacional é $g = 32$ e o peso dos barris $W = 527$.
   (a) Determine a velocidade de impacto v usando o método da secante, quando os barris são lançados numa zona cuja profundidade é $D = -300$. Utilize como aproximações iniciais $v_1 = 40$ e $v_2 = 45$, e no critério de paragem $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.05$ ou $n_{\max} = 2$.
   (b) Através de experiências, mostrou-se que os barris se danificam se a velocidade de impacto com o fundo do oceano for superior a 40. Na situação da alínea anterior, haverá risco de contaminação?

2. Considere seguinte sistema de equações lineares:
$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$
Analisando as condições suficientes de convergência do método de Gauss-Seidel, baseadas na matriz A, o que poderá concluir acerca da convergência do método aplicado ao sistema?

3. O consumo de gás natural sofre uma redução significativa durante os meses de Verão. Na tabela seguinte estão registados alguns valores recolhidos ao longo do ano de 2006.

mês	1	3	4	6	9	12
consumo de gás	20.0	7.5	6.5	7.0	10.0	A

   (a) Estime o consumo de gás no mês de Maio, utilizando um polinómio interpolador de Newton de grau 2.
   (b) Uma companhia de gás sugeriu um modelo do tipo
$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$$
para estimar o consumo de gás em qualquer altura do ano. No sentido dos mínimos quadrados e considerando a amostra de 6 pontos,
      i. comece por apresentar o sistema de equações lineares que deve construir para calcular os parâmetros c_1 e c_2, em função de A;
      ii. considerando $A = 15.0$ apresente o modelo sugerido.

4. Considere o problema de determinação da deformação de uma viga, suportada nas extremidades, devido a uma carga uniforme ao longo do seu comprimento L. Num modelo simples, a deformação $u(x)$ é função da posição x ao longo da viga, satisfazendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned} &-u'' + pu = qx(L-x), \quad 0 < x < L \\ &u(0) = u(L) = 0 \end{aligned}$$

em que p é uma constante que depende das propriedades do material e q depende também dessas propriedades bem como da carga colocada na viga. Considere $p = 7 \times 10^{-2}$, $q = 4 \times 10^{-3}$ e $L = 10$.

(a) Calcule estimativas da deformação da viga utilizando um passo $h = 2.5$.

(b) Com base nos valores calculados na alínea anterior, estime a máxima deformação da viga e sua localização.

5. O último periélio (ponto mais próximo do Sol na órbita dum planeta) do cometa Halley aconteceu a 9 de Fevereiro de 1986. As componentes da sua posição e velocidade nessa data (instante inicial) foram:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0.325514, -0.459460, 0.166229) \\ (x', y', z') &= (-9.096111, -6.916686, -1.305721) \end{aligned}$$

em que a posição é medida em unidades astronómicas (distância média da terra ao sol) e o tempo em anos. As equações do movimento são:

$$\begin{cases} x''(t) = -\dfrac{\pi^2 x}{r^2} \\ y''(t) = -\dfrac{\pi^2 y}{r^2} \\ z''(t) = -\dfrac{\pi^2 z}{r^2} \end{cases}$$

em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sendo as perturbações planetárias negligenciadas. **Formule** este problema **sem o resolver**, num sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Caracterize todas as equações do novo sistema, identificando todas as variáveis envolvidas e as condições auxiliares.

6. O cálculo da entalpia, H $(J\,mol^{-1})$, para um determinado composto, pode ser realizado através do seguinte integral

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^{T_f} C_p(T)\, dT$$

onde os limites inferior e superior do integral são, respectivamente, a temperatura de referência e a temperatura final para a qual se pretende calcular a entalpia. Para o Azoto (supondo comportamento de gás ideal), a variação da capacidade calorífica, $C_p(T)$ $(J\,mol^{-1}\,K^{-1})$, com a temperatura T (K), é dada por:

$$C_p(T) = 31.150 - 1.356 \times 10^{-2} T + 2.679 \times 10^{-5} T^2 - 1.168 \times 10^{-8} T^3.$$

Considere a temperatura de referência $T_{ref} = 273.0$.

(a) Estime o valor da entalpia do Azoto para $T_f = 278$, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.15×10^{-4}.

(b) Considerando o mesmo espaçamento h usado na alínea anterior, calcule, usando a fórmula de integração numérica mais adequada, o seguinte integral:

$$\int_{T_{ref}}^{T_f - h} C_p(T)\, dT$$

NOTA: use $h = 1$ caso não tenha resolvido a alínea anterior.

(c) Comente a precisão do valor calculado na alínea anterior.

FIM