Derivadas

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se* **derivável em** $\boldsymbol{x_0} \in X \cap X'$ *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$.

Ao valor real d *chama-se* **derivada de f em** $\boldsymbol{x_0}$ *e escreve-se* $f'(x_0) = d$ *ou* $Df(x_0) = d$.

Nota

Observe-se que, considerando h *tal que* $x_0 + h \in \mathrm{Dom}\, \mathrm{f}$, *e fazendo a mudança de variável* $x = x_0 + h$, *obtemos que*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável em* $c \in X \cap X'$, *a reta de equação* $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ *designa-se por* **reta tangente ao gráfico de** $\boldsymbol{f}$ *em* $(c, f(c))$.

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável em* $c \in X \cap X'$, *chama-se* **reta normal ao gráfico de** $\boldsymbol{f}$ *em* $(c, f(c))$ *à reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de* f *nesse ponto.*

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se* **derivável** *se* f *for derivável em todos os pontos de* X.

A função $\begin{array}{rccc} f' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ *diz-se a* **função derivada de f**.

Teorema

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função,* $x_0 \in X \cap X'$. *Se* f *é derivável em* x_0 *então* f *é contínua em* x_0.

Corolário

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável. Então* f *é contínua.*

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se*

- **derivável à direita em** $\boldsymbol{x_0} \in X \cap X'_+$ *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$. *Ao valor real* d *chama-se* **derivada à direita de f em** $\boldsymbol{x_0}$ *e escreve-se* $f'(x_0^+) = d$;

- **derivável à esquerda em** $\boldsymbol{x_0} \in X \cap X'_-$ *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$. *Ao valor real* d *chama-se* **derivada à esquerda de f em** $\boldsymbol{x_0}$ *e escreve-se* $f'(x_0^-) = d$.

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função,* $x_0 \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. *Então*

$$f \text{ derivável em } x_0 \iff \left|\begin{array}{l} \text{existem } f'(x_0^+) \text{ e } f'(x_0^-) \\ \text{e} \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-). \end{array}\right.$$

Regras de derivação

Proposição

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis em* $x_0 \in X \cap X'$. *Então:*

- $f + g$ *é derivável em* x_0 *e*
- *dado* $\lambda \in \mathbb{R}$, λf *é derivável em* x_0 *e*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0);$$

- fg *é derivável em* x_0 *e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

- *se* $g(x_0) \neq 0$ *então* $\dfrac{f}{g}$ *é derivável em* x_0 *e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Teorema

Sejam X, Y *subconjuntos de* $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções,* $c \in X \cap X'$, $f(c) \in Y'$. *Suponhamos que* f *é derivável em* c *e que* g *é derivável em* $f(c)$. *Então* $g \circ f$ *é derivável em* c *e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Teorema

Sejam X *e* Y *subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$ *uma função bijetiva e suponhamos que:*

- f *é derivável em* $c \in X \cap X'$;
- $f'(c) \neq 0$;
- f^{-1} *é contínua em* $f(c)$.

Então f^{-1} *é derivável em* $f(c)$. *Além disso,* $\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$.

Derivadas das funções exponenciais e logarítmos

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivadas das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas

$$\operatorname{sen}' x = \cos x \qquad \cos' x = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x \qquad \operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\sec' x = \sec x \ \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \ \operatorname{th} x \qquad \operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \ \operatorname{coth} x$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas e das funções hiperbólicas inversas

$$\text{arcsen}'\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{arccos}'\, x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{arctg}'\, x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{arcotg}'\, x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{arcsec}'\, x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{arcosec}'\, x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argsh}'\, x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{argch}'\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{argth}'\, x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{argcoth}'\, x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{argsech}'\, x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{argcosech}'\, x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

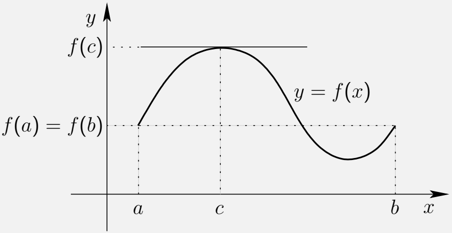
Alguns teoremas envolvendo derivadas

Teorema

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $c \in X \cap X'$. *Se* c *é um ponto de extremo de* f *então* $f'(c) = 0$.

Teorema (de Rolle)

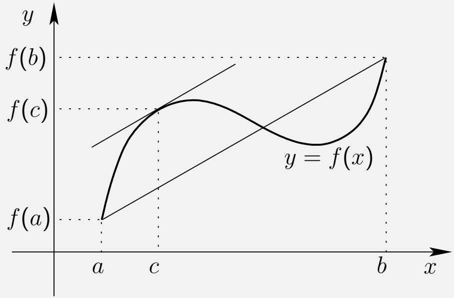
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a,b[$ *e tal que* $f(a) = f(b)$. *Então existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.



Teorema (de Lagrange)

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a,b[$. *Então*

$$\exists\, c \in \,]a,b[\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Corolário

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a,b[$. *Se* $f'(x) = 0$ *para todo o* $x \in]a,b[$ *então* f *é constante.*

Corolário

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a,b[$.

- *Se* $f'(x) > 0$ *para todo o* $x \in]a,b[$ *então* f *é estritamente crescente.*
- *Se* $f'(x) < 0$ *para todo o* $x \in]a,b[$ *então* f *é estritamente decrescente.*

Teorema (de Cauchy)

Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas, deriváveis em* $]a,b[$. *Então*

$$\exists\, c \in]a,b[\qquad [f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Teorema (de Darboux)

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável. Então*

$$f'([a,b]) \text{ contém o intervalo fechado de extremos } f'(a) \text{ e } f'(b).$$

Corolário

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável tal que* $f'(a)f'(b) < 0$. *Então existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Corolário

Sejam I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável. Então* $f'(I)$ *é um intervalo.*

Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam a, b *números reais,* $a < b$, $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis.* *Seja* $c \in \{a, b\}$ *e suponhamos que* $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ *e que existe* $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Então existe $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nota

A Regra de l'Hôpital é também válida:

- *quando se calcula o limite quando* $x \to +\infty$ *ou quando* $x \to -\infty$*;*
- *considerando, no teorema anterior,*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = +\infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = -\infty$$

  e tomando $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Derivadas de ordem superior

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $c \in X' \cap X$*. Diz-se que* f *é* **duas vezes derivável em** $\boldsymbol{c}$, *ou que* f *tem* **derivada de 2ª ordem em** $\boldsymbol{c}$ *ou que* f *tem* **segunda derivada em** $\boldsymbol{c}$ *se*

$$\exists\, \delta > 0 \;\; g = f'_{|X \cap]c-\delta, c+\delta[} \text{ é derivável em } c.$$

Representa-se a segunda derivada de f *em* c *por* $f''(c)$ *ou* $f^{(2)}(c)$.

Diz-se que f **tem derivada de 2ª ordem** *se* f *é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que* $X \subseteq X'$*).*

À função $\begin{array}{rccc} f'' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f''(x) \end{array}$ *chama-se* **função segunda derivada de** $\boldsymbol{f}$.

Nota

Indutivamente define-se **derivada de ordem n de f em c** *e a* **função derivada de ordem n de f**.
Denota-se a derivada de f de ordem n por $f^{(n)}$ ou $D^n f$.
Convenciona-se que $f^{(0)} = f$.

Teorema

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite segunda derivada em $c \in X \cap X'$. Suponhamos que $f'(c) = 0$. Então, se $f''(c) > 0$, c é um ponto de mínimo local de f e se $f''(c) < 0$, c é um ponto de máximo local de f.