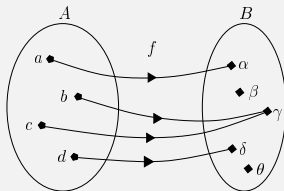


Generalidades sobre funções

Definição

Chamamos **função** a dois conjuntos não vazios, X e Y , munidos de uma lei de formação ou regra de correspondência, f , que a cada elemento x de X associa um único elemento $f(x)$ de Y . Em geral denotamos a função por $f : X \longrightarrow Y$.

Usa-se a notação $x \longmapsto f(x)$ para indicar que o elemento x é enviado por f em $f(x)$ ou que f faz corresponder a x o elemento $f(x)$.



Definição

Dados os conjuntos X e Y e a função $f : X \longrightarrow Y$, designa-se:

- o conjunto X por **domínio** da função e denota-se por $\text{Dom}(f)$;
- o conjunto $f(X) = \text{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\}$ por **contradomínio** ou **imagem** da função;
- os elementos x de X por **objetos**;
- os elementos $f(x)$ tais que $x \in X$ por **imagens**;
- o conjunto $\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ por **gráfico** de f .

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, A um subconjunto de X , B um subconjunto de Y , denomina-se por:

- **imagem de A por f ou $f(A)$** o conjunto $\{f(x) : x \in A\}$;
- **imagem recíproca de B por f ou $f^{-1}(B)$** o conjunto $\{x \in X : f(x) \in B\}$.

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se:

- **injetiva** se $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$;
- **sobrejetiva** se $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$;
- **bijetiva** se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Funções reais de variável real

Definição

Chamamos **função real de variável real** a uma função $f : X \longrightarrow Y$, em que X e Y são subconjuntos não vazios de \mathbb{R} .

Definição

Define-se $\text{Id}_X : X \longrightarrow X$ e designa-se **função identidade (em X)**, a função tal que $\text{Id}_X(x) = x, \forall x \in X$.

Definição

Dado um subconjunto X , não vazio, de \mathbb{R} , diz-se que X é **simétrico relativamente a 0** se $X = -X = \{-x : x \in X\}$.

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Diz-se que:

- **f é uma função par** se

X é simétrico relativamente a 0 e $\forall x \in X \ f(-x) = f(x)$.

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Diz-se que:

- **f é uma função ímpar se**

X é simétrico relativamente a 0 e $\forall x \in X \ f(-x) = -f(x)$.

Definição

Dadas duas funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se

- **soma de f e g :**

$$\begin{aligned} f + g : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

- **produto de f e g :**

$$\begin{aligned} fg : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)g(x) \end{aligned}$$

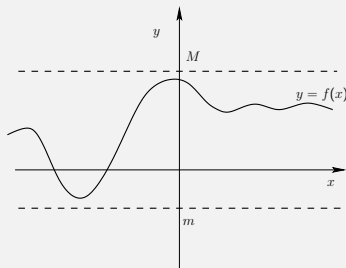
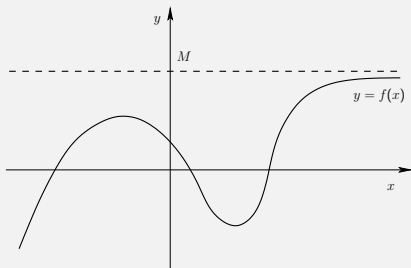
- **quociente de f e g (supondo que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$):**

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, diz-se que

- f é **majorada** se $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad f(x) \leq M$;
- f é **minorada** se $\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in X \quad m \leq f(x)$;
- f é **limitada** se f é majorada e minorada.



Definição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ diz-se

- **estritamente crescente** se

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

- **crescente** se $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$

- **estritamente decrescente** se

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

- **decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$

- **monótona** se for crescente ou decrescente;

- **estritamente monótona** se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Um ponto $x_0 \in X$ diz-se

- um **ponto de máximo local** ou **maximizante local** de f se

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \quad f(x) \leq f(x_0)$$

e $f(x_0)$ diz-se **máximo local** de f ;

- um **ponto de mínimo local** ou **minimizante local** de f se

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \quad f(x_0) \leq f(x)$$

e $f(x_0)$ diz-se **mínimo local** de f ;

- **um ponto de máximo local estrito de f se**

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$$

e $f(x_0)$ diz-se máximo local estrito de f ;

- **um ponto de mínimo local estrito de f se**

$$\exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X \setminus \{x_0\} \quad f(x_0) < f(x)$$

e $f(x_0)$ diz-se mínimo local estrito de f ;

- *um ponto de máximo absoluto ou maximizante absoluto de f se*

$$\forall x \in X \quad f(x) \leq f(x_0),$$

e $f(x_0)$ diz-se máximo absoluto de f ;

- *um ponto de mínimo absoluto ou minimizante absoluto de f) se*

$$\forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x),$$

e $f(x_0)$ diz-se mínimo absoluto de f ;

- *um ponto de extremo (local ou absoluto) se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou absoluto) de f .*

Definição

Dadas duas funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow W$, define-se a **função g composta com f** (escreve-se $g \circ f$) do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : & X & \longrightarrow & W \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ & \xrightarrow{g \circ f} & & & \end{array}$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$, uma função $g : Y \longrightarrow X$ diz-se **inversa de f** se $f \circ g = \text{Id}_Y$ e $g \circ f = \text{Id}_X$. Uma função que admite inversa diz-se **invertível**.

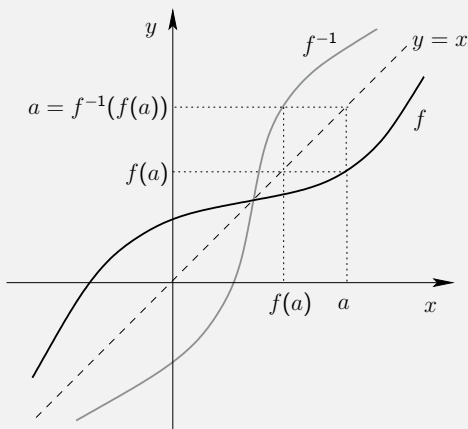
Nota

Facilmente se verifica que se $f : X \longrightarrow Y$ é invertível, a sua inversa é única. Podemos então denotar a função inversa de f por $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Observe-se que f^{-1} é invertível e que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposição

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se e só se é bijetiva.

A partir de uma representação gráfica da função f podemos obter uma representação gráfica de f^{-1} , procedendo como se indica na figura seguinte:



Nota

Se uma função $f : X \longrightarrow Y$ real de variável real é injetiva mas não sobrejetiva, é usual falar da inversa de f . Na realidade, cometemos um abuso de notação, chamando ainda f à função bijetiva que se obtém substituindo Y pelo contradomínio de f .

Definição

*Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : A \longrightarrow Y$, funções tais que $A \subseteq X$ e $g(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. A função g diz-se uma **restrição** de f e denota-se $g = f|_A$. A função f diz-se um **prolongamento** de g .*