# CAP. I - ESTUDO DE FUNÇÕES COM VÁRIAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES.

## 1. Breves noções topológicas em $\Re^n$

### 1.1 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos x e y $\in \Re^n$, $x=(x_1,x_2,...x_n)$ e $y=(y_1,y_2,...y_n)$ chama-se distância de x a y:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...(x_n-y_n)^2}$$

A distância de x a y também se representa por $\|x-y\|$, pois representa a norma do vector x-y.

### 1.2 Interior, exterior e fronteira

Seja X um subconjunto de $\Re^n$.

Um ponto **a** diz-se **interior** a **X** sse existir uma bola de centro em **a**, contida em **X**.

Um ponto **a** diz-se **exterior** a **X** sse existir uma bola de centro em **a**, contida no complementar de **X**.

Obs.: $X^c=\Re^n \mid X$

Um ponto **a** diz-se **fronteiro** a **X** sse qualquer bola de centro em **a**, contiver pelo menos um ponto de **X** e contiver pelo menos um ponto do complementar de **X**.

Chama-se, respectivamente, **interior**, **exterior** e **fronteira** de **X** ao conjunto dos pontos interiores, exteriores e fronteiros de **X** e representam-se respectivamente, por: **int(X)**, **ext(X)** e **front (X)**. Estes conjuntos são disjuntos e a sua união é o universo considerado.

$$\mathrm{int}(X) \cup \mathrm{ext}(X) \cup \mathrm{front}(X) = \Re^n$$

## 1.3 Conjunto aberto e conjunto fechado.

O conjunto **X** diz-se **aberto** sse for igual ao seu interior.

Chama-se **fecho** ou **aderência** de X à união do interior de X com a sua fronteira e representa-se por $\overline{X}$.

O conjunto **X** diz-se **fechado** sse for igual ao seu fecho. Daqui resulta que **X** é fechado sse o seu complementar for aberto.

## 1.4 Ponto de acumulação e ponto isolado.

Um ponto **a** diz-se ponto de **acumulação de X** sse qualquer bola de centro em **a** contiver infinitos elementos de **X**. Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de **X**, chama-se derivado de **X** e representa-se por **X´.**

Um ponto **a** diz-se **ponto isolado** de **X** sse existir uma bola de centro em **a**, cuja intersecção com **X** for apenas o próprio ponto **a**.

## 1.5 Conjunto limitado, conjunto compacto

Um conjunto **X** diz-se **limitado** sse existir uma bola que o contenha.

Um subconjunto **X** de $\Re^n$ diz-se **compacto** sse for **limitado** e **fechado**.

NOTA: Estas noções são importantes, porque só se poderá definir limite duma função num ponto de acumulação do seu domínio e só se poderá definir derivada duma função num ponto interior ao domínio.

## 2. Definição. Domínios.

**Def.2.1** Seja D$\subset \Re^n$, e $f$ (X) uma correspondência entre os elementos de D e o conjunto (ou subconjunto de) $\Re$ .

Diz-se que *f*(X) é uma aplicação de D$\subset \Re^n$ em $\Re$ se para cada elemento de D, $(x_1, x_2, ..., x_n)$existir um elemento y$\in \Re$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$.

**Def.2.2** Chama-se domínio de existência da função z=*f*(x,y) ao conjunto dos pares ordenados (x,y) para os quais a função está definida.

**Exemplos:**

a) *f*(x,y)=ln(x+y) é uma aplicação de $\Re^2$ em $\Re$, com domínio, $Df = \{(x, y) \in \Re^2 : x + y > o\} = \{(x, y) \in \Re^2 : y > -x\}$

b) $f$(x,y)=$\sqrt{1-x^2-y^2}$ é uma aplicação de $\Re^2$ em $\Re$, com domínio, $Df = \{(x,y) \in \Re^2 : 1-x^2-y^2 \geq o\}$.

Então D$f$ = $\{(x,y) \in \Re^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

## 3. Continuidade

Uma função $f$(x,y) é continua no ponto $(x_0, y_0)$ se $f$(x,y) está definida $(x_0, y_0)$ e $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

## 4. Crescimento parcial e crescimento total de uma função *f*(x,y). Derivadas parciais.

Consideremos uma função $f$(X): D$\subset \Re^2 \to \Re$

- Chama-se **crescimento parcial** de $f$(X) em relação a **x**,

$$\boxed{\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}$$

- Chama-se **crescimento parcial** de $f$(X) em relação a **y**,

$$\boxed{\Delta_y f = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}$$

- Chama-se **crescimento total** de $f$(X):

$$\boxed{\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}$$

<u>**Obs.**</u> geralmente $\Delta f \neq \Delta_x f + \Delta_y f$

<u>**Exercício**</u>**:** Determine os crescimentos total e parciais da função $f$(x,y)= xy no ponto (2,3) com $\Delta x = 0.1$ e $\Delta y = 0.2$

## Derivadas parciais

As derivadas parciais de uma função *f(*x,y) num **ponto a**, representam as taxas de variação de *f(*x,y) em a, segundo a direcção do eixo dos xx e dos yy, respectivamente.

Chama-se derivada parcial de *f*(X) em relação a x ($\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $f'_x(x,y)$) ao limite quando $\Delta x \to 0$ de $\Delta_x f / \Delta x$:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}}$$

Analogamente, a derivada em ordem a y é dada por:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}}$$

**Exemplo:** Calcule por definição as derivadas parciais da função *f*(x,y)=yln(x).

Podemos no entanto usar as regras de derivação conhecidas das funções reais de variável real. Note-se que ao derivar parcialmente em ordem a uma das variáveis se consideram as restantes variáveis como se fossem constantes.

**Exercício:** Calcule as derivadas parciais da função $f(x,y) = x^2 \cdot sen^2(y)$.