Correção do Teste 1 – 2010/2011

Grupo I

Exercício 1

$|3x-2|\leq 1 \iff -1\leq 3x-2\leq 1 \iff 1\leq 3x\leq 3$

$\iff \frac{1}{3}\leq x\leq 1$

$\{x\in \mathbb{R} : |3x-2|\leq 1\} = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

Exercício 2

$A=\left\{\frac{1}{n} : n\in \mathbb{N}\right\}$, $\mathring{A}=\emptyset$, $\bar{A}=A\cup\{0\}$,

$\operatorname{fr}A=\{0\}$

Exercício 3

Possivelmente já se podia usar o polinómio de Taylor ou a Regra de l'Hôpital.

Sem utilizar a Regra de l'Hôpital.

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Então

$$1 - \cos(2x) = 2\operatorname{sen}^2 x$$

e

$$1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$

Exercício 4 $f: [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 2 - \frac{1}{1-x}$$

f é contínua, decrescente, $f(0)=1$ e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 - \frac{1}{0^+} = -\infty.$$

EXERCÍCIO 5

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$

$$f''(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos^2 x - e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x$$

GRUPO II

EXERCÍCIO 6

$$f: [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - \cos x$$ é uma função contínua.

$f(0) = -1 < 0$, $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$.

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy

$$\exists c \in]0, \pi/2[\quad f(c) = 0,$$

isto é,

$$\exists c \in]0, \pi/2[\quad c = \cos c.$$

Como $f'(x) = 1 - \operatorname{sen} x \geq 0$, $\forall x \in [0, \pi/2]$, a função f é crescente. Então, no intervalo $[0, \pi/2]$, f tem no máximo um zero. Assim, a equação

$$x = \cos x$$

tem <u>exatamente</u> uma solução no intervalo $[0, \pi/2]$.

<u>Exercício 7</u>

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| \quad \text{é contínua em } x = 0.$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, f não é derivável em $x = 0$

Exercícios 8, 9: Não demos a matéria

Exercício 10

$e^x - 6e^{-x} = 5 \iff y - \frac{6}{y} = 5$, fazendo $y = e^x$

$$y - \frac{6}{y} = 5 \iff y^2 - 6 - 5y = 0$$

$$\iff y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} \iff y = 6 \vee y = -1$$

$e^x = 6 \iff x = \ln 6$

$e^x = -1$ não tem solução.

Então

$$e^x - 6e^{-x} = 5 \iff x = \ln 6.$$