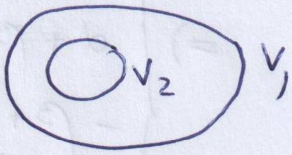
(iii) $V_2=\left\{\begin{pmatrix} b\\0\\0\end{pmatrix}: b\in\mathbb{R}\right\}$

$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x\\y\\0\end{pmatrix}: x,y\in\mathbb{R}\right\}$

Note-se que $V_2 \subseteq V_1$ (pertencem a V_1 os elementos de V_2 que têm a 2ª componente, y, nula)



Assim

$V_2 \cup V_1 = V_1$ que é um subespaço

e logo $V_2 \cup V_1$ é um subespaço

11 a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ (Note-se que: o vector genérico de U_1 é: $\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}$)

(Note-se que: o vector genérico de U_1 é $\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix}$)

b) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$2x+3y=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x$

c) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2/3\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix}x\\-\frac{2}{3}x\\z\end{pmatrix} \in U_1$ (vector genérico)

12 a) $M_1(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\rangle$

b) $M_1(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\rangle$

13 a) $\forall\, p(x) \in P_2 : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

sendo $P_2 = \langle 1, x, x^2 \rangle$

logo somente 2 "vectores", os polinómios $p(x)$ e $q(x)$ não geram P_2.

b) Sim, já que

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\exists \alpha, \beta, \gamma: \; p(x) = \alpha(1 + x^2) + \beta(1 - x + x^2) + \gamma(x - x^2)$

$\Rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = (\alpha + \beta) + (-\beta + \gamma)x + (\alpha + \beta - \gamma)x^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a_0 \\ -\beta + \gamma = a_1 \\ \alpha + \beta - \gamma = a_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & -1 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & -1 & a_2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_0 \\ 0 & -1 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & a_2 - a_1 \end{array}\right) \; (-1) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = a_0 \\ -\beta + \gamma = a_1 \\ \gamma = a_1 - a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = a_0 - \beta \\ \beta = \gamma - a_1 \\ - \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a_0 + a_2 \\ \beta = \cancel{a_1} - a_2 - \cancel{a_1} = -a_2 \\ \gamma = a_1 - a_2 \end{cases}$

(14) – a) >

(15) – não

(16) $\alpha = 2$

$\beta = 0$

(17). a) l.i c) l.d

b) l.d d) l.d

(18). a) l.d 19. a) li

b) ~~l~~. i b) ~~l~~l. i

(24) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2A + B + 0C = 2A + B$

(25) a) $x = (2-\gamma)a + (-1+\gamma)b + \gamma c + 0d$ se $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = (2-\gamma)a + (-1+\gamma)b + \gamma c$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(30)

note-se que se se escrever a matriz

$$\begin{array}{c} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

podemos verificar que a $c(A) = 3$, $\forall a, b, c$ / e logo os vectores x_1, x_2, x_3 são l.i, $\forall a, b, c$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-a$

$-b$

(31) a) ✓

b) —

c) $\alpha = 3$ (os vectores têm que ser vectores de S)

(32) se $a \in T$: $a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tem-se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde se tem $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$

$$\rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y+x \\ 0 & 0 & 0 & t-z+y-x \end{array}\right)$$

e para que $\exists \alpha, \beta, \gamma$, este sistema tem que ser possível e logo $c(A) = c(A|b)$ o que origina que

$$\boxed{t - z + y - x = 0}$$

$$\Rightarrow t = x - y + z$$

Vector genérico de T: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x-y+z \end{pmatrix}$

<u>Observação</u>: Qualquer gralha queiram comunicar-me

Mª Antónia Forjaz maf@math.uminho.pt

Folha 3 – Espaços Vectoriais – Proposta de solução (não de resolução!)

1

2

3 a) $\mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação por um escalar, assim definidas e diferentes das usuais **não** é um espaço vectorial real.

Note-se que não é valida a propriedade:

$$(\alpha+\beta)(x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)$$

já que:

- $(\alpha+\beta)(x_1, x_2) \overset{①}{=} ((\alpha+\beta)x_1, x_2)$ (*)

- $\alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2) \overset{①}{=} (\alpha x_1, x_2) + (\beta x_1, x_2)$

$\overset{②}{=} (\alpha x_1 + \beta x_1, 2x_2)$ (**)

tendo (*) $\neq$ (**)

① def de mult. por um escalar

② " " adição

b) $\mathbb{R}^2$ com as ops de adição e mult. por um escalar assim definidas **não é** um e.v. real.

Note-se que não é valida a propriedade:

$$\alpha[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2)$$

já que:

- $\alpha[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] \overset{①}{=} \alpha(x_1 y_1, x_2 y_2)$

$\overset{②}{=} (\alpha x_1 y_1, \alpha x_2 y_2)$ (*)

- $\alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) \overset{②}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2)$

$\overset{①}{=} (\alpha x_1 \cdot \alpha y_1, \alpha x_2 \alpha y_2)$ (**)

tendo (*) $\neq$ (**)

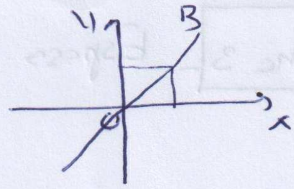
① def de adição de vectores

② " " mult. escalar.

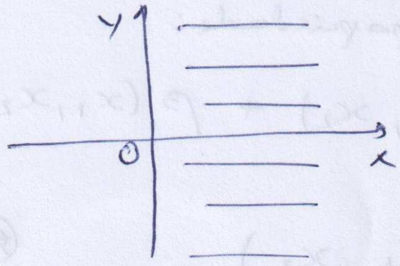
4. a) —

b) $\mathbb{R}^2$ é o plano OXY

B é a bissetriz dos quadrantes ímpares



5. a) 1º e 4º Quadrante



b) E não é subespaço já que não é fechado relativamente à multiplicação por um escalar. Senão vejamos

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in E$, com $x_1 > 0$

se $\alpha < 0$ $\quad \alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \alpha x_2\end{pmatrix}$

tendo $\alpha x_1 < 0$

6. a) A_1 é subespaço de $\mathbb{R}^4$ (note-se que o vector genérico de A_1 é: $\begin{pmatrix}x\\z\\t\\t\end{pmatrix}$)

b) A_2 " " " (" " " " " A_2: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\-x-y-z\end{pmatrix}$)

c) A_3 não é " " " (" " " " " A_3: $\begin{pmatrix}y\\0\\z\\y-z\end{pmatrix}$)

d) A_4 é " " " (" " " " " A_4 é $\begin{pmatrix}x\\y\\x+2y\\x-3y\end{pmatrix}$)

e) A_5 não é " " "

Note-se que: se $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in A_5$ com $xt = yz$ $(*)$

e $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix} \in A_5$ " $x't' = y'z'$ $(**)$

calculando $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\\t+t'\end{pmatrix}$ e nada garante que

$(x+x')(t+t') = (y+y')(t+t')$

já que, realizando as operações se obtem

$\cancel{xt} + xt' + x't + \cancel{x't'} = \cancel{yt} + yt' + y't + \cancel{y't'}$

(...) pois de $(*)$ e $(**)$ tendo-se $xt' + x't = yt' + y't$

7. a) sim é subespaço vect. de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) " " " " " "

c) não (nada garante que a soma de duas matrizes invertíveis seja uma matriz invertível)

d) sim.

8. a) não, é subespaço de P_1 já que a soma de dois polinómios de grau exactamente igual a dois pode não originar um polinómio do grau 2, veja-se que se:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \text{ com } a_2 \neq 0$$

e

$$q(x) = a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2, \quad " \quad a'_2 \neq 0$$

tem-se $p(x) + q(x) = a_0 + a'_0 + (a_1 + a'_1 x) + (a_2 + a'_2)x^2$

podendo ter-se $a_2 + a'_2 = 0$ se $a_2 = -a'_2$.

b) Sim é subespaço.

9. $$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \\ x+2z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : y = 2x+3z,\ t = x+2z \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A \cap B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ já que para que os elementos de A sejam também elementos de B tem que se verificar:

$$\begin{cases} x = 2x + 3z \\ x + 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} — \\ -3z = -z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

10

a) i) de V_3 vem que $x-y=0 \Rightarrow x=y$

$2x+z=0 \Rightarrow z=-2x$

logo $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V_3$ poder-se-á escrever $\begin{pmatrix}x\\x\\-2x\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

ii) de V_2 vem que $\begin{cases} y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-z \\ -2z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

logo $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V_2$, poder-se-á escrever $\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) (i) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$

$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix}a\\-a\\c\end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$

(de $x+y=0$ vem $x=-y$)

Assim se $x \in (V_2 \cap V_4)$ então $x \in V_2$ e $x \in V_2$

ou seja $x = \begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix}a\\-a\\c\end{pmatrix}$ e logo $a=0$
$b=0$

tendo-se $x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donde $V_2 \cap V_4 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ e logo $V_2 \cap V_4$ é subespaço vect de $\mathbb{R}^3$

(ii) $V_3 \cup V_2 = ?$ Note-se que $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in V_3$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in V_2$

$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix}y\\y\\-2y\end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$

e $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \notin V_3 \cup V_2$

já que $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \notin V_3$ (já que as duas primeiras componentes não são iguais!)

e $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \notin V_2$ (já que as duas últimas componentes não são nulas.

$V_3 \cup V_2$ não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.