introdução aos sistemas dinâmicos

iteração de funções — parte três

1.

Seja x um ponto fixo de um sistema dinâmico discreto $f : I \to I$, com f diferenciável em x.

1.1 Mostre que se $|f'(x)| < 1$, então x é um ponto fixo atractivo de f.

1.2 Mostre que se $|f'(x)| > 1$, então x é um ponto fixo repulsivo de f.

2.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : [0,1] \to [0,1]$ definido por $f(x) = x\,|x|$. Determine a estabilidade dos seus pontos fixos.

3.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : [0,4] \to [0,4]$ definido por $f(x) = 4x - x^2$. Mostre que todos os seus pontos fixos são repulsivos.

4.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : [-2,2] \to [-2,2]$ definido por $f(x) = x^3 - 3x$. Mostre que todos os seus pontos fixos são repulsivos.

5.

Seja $\{x_1, x_2\}$ um ciclo de período 2 de um sistema dinâmico discreto $f : I \to I$, tal que f^2 é diferenciável em ambos os pontos do ciclo.

5.1 Mostre que se $|(f^2)'(x_1)| < 1$, então $|(f^2)'(x_2)| < 1$.

5.2 Mostre que se $|(f^2)'(x_1)| > 1$, então $|(f^2)'(x_2)| > 1$.

6.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2 - 1$. Determine a estabilidade dos pontos fixos e dos pontos periódicos de período 2 de f.

7.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : [0,1] \to [0,1]$ definido por $f(x) = 3.2x(1-x)$.

7.1 Mostre que ambos os pontos fixos de f são repulsivos.

7.2 Mostre que f tem um ciclo de período 2 e que este é atractivo.

8.

Considere o sistema dinâmico discreto $f : [0,4] \to [0,4]$ definido por $f(x) = 4x - x^2$. Mostre que f tem um ciclo de período 2 e que este é repulsivo.

9.

Considere o sistema dinâmico discreto $\mathcal{S} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

9.1 Mostre que, se $\bar{x}$ é um ponto periódico de período p de $\mathcal{S}$, então $\mathcal{S}^p$ é diferenciável em $\bar{x}$.

9.2 Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{S}$ são repulsivos.

10.

Considere o sistema dinâmico discreto $\mathcal{T} : [0,1] \to [0,\ 1]$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2 - 2x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

10.1 Mostre que, se $\bar{x}$ é um ponto periódico de período p de $\mathcal{T}$, então $\mathcal{T}^p$ é diferenciável em $\bar{x}$.

10.2 Mostre que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{T}$ são repulsivos.