maf@math.uminho.pt
Departamento de Matemática
Universidade do Minho

Folha 3 - Espaços Vectoriais

1. Prove que $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : \forall i = 1, 2\}$, algebrizado com as operações usuais constitui um espaço vectorial real.

2. Prove que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, algebrizado com a adição de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz, é um espaço vectorial real.

3. Averigue se $\mathbb{R}^2$, algebrizado com as operações seguintes, é um espaço vectorial real:

   (a) $\begin{cases} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) : \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \\ k(x_1, x_2) = (kx_1, x_2), \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \forall k \in \mathbb{R}. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2) : \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \\ k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2), \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \forall k \in \mathbb{R}. \end{cases}$

4. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \right\}$$

   (a) Prove que B é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Geometricamente o que representa B?

5. Seja E o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \right\}$$

   (a) Identifique geometricamente E?

   (b) Verifique se E é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

6. Considerando o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, determine quais dos seguintes subconjuntos são seus subespaços vectoriais:

   (a) $A_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = t \right\}$,

   (b) $A_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \right\}$,

   (c) $A_3 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 1, y = 0, z + t = 1 \right\}$,

   (d) $A_4 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = x + 2y, t = x - 3y \right\}$,

   (e) $A_5 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xt = yz \right\}$.

7. Considerando o espaço vectorial $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, das matrizes reais quadradas de ordem 3, determine quais dos seguintes subconjuntos são seus subespaços vectoriais:

   (a) o conjunto de todas as matrizes simétricas,

(b) o conjunto de todas as matrizes diagonais,

(c) o conjunto de todas as matrizes invertíveis,

(d) o conjunto de todas as matrizes triangulares superiores.

8. Seja $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_i \in \mathbb{R}; \forall i = 0, 1, 2\}$, o espaço vectorial real dos polinómios de grau não superior a 2. Determine quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vectoriais de P_2:

   (a) o conjunto dos polinómios de grau exactamente igual a 2,

   (b) o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1.

9. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ considere os subespaços A e B tais que:

$$A =< (1, 2, 0, 1), (-1, 1, 1, 1) >,$$
$$B =< (0, 0, 1, 1), (2, 2, 2, 2) > .$$

   Determine o subespaço$A \cap B$ e diga qual a dimensão deste subespaço.

10. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

$V_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\Big\}$,

$V_2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\Big\}$,

$V_3 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2y + z = 0\Big\}$,

$V_4 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\Big\}$.

   (a) Mostre que

      i. $V_3 = \Big\{(a, a, -2a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\Big\}$,

      ii. $V_2 = \Big\{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\Big\}$,

   (b) Diga, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

      i. $V_2 \cap V_4$,

      ii. $V_3 \cup V_2$,

      iii. $V_2 \cup V_1$.

11. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.

   (a) $U_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\Big\}$,

   (b) $U_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\Big\}$,

   (c) $U_1 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y = 0, z = 0\Big\}$.

12. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços vectoriais de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

   (a) $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : a = 0 \right\}$

   (b) $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}$

13. Seja $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\} : a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, 2\}$, o espaço vectorial real dos polinómios de grau não superior a 2.

   Averigue se os seguintes vectores constituem um conjunto de geradores de P_2, send0:

(a) $p(x) = 1 + 2x + x^2$ e $q(x) = 2 + x^2$;
(b) $p(x) = 1 + x^2, q(x) = 1 - x + x^2$ e $r(x) = x - x^2$.

14. Considere, no espaço vectorial real R^3, os vectores

$$v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (2, 1, -2), u_1 = (-1, 0, 1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (1, 0, 1).$$

Verifique se

(a) (1,-4, 5) é combinação linear de v_1, v_2,
(b) (1, 2, 1) é combinação linear de $v_1, v2$,
(c) (3, 0, 2) é combinação linear de u_1, u_2, u_3,
(d) (0, 2, 1) é combinação linear de u_1, u_2, u_3.

15. Verifique se $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} >$.

16. Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de modo que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} >$

17. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:

(a) $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$,
(b) $\{(1, 0), (0, 1), (2, -2)\}$,
(c) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$,
(d) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (3, 6, 6)\}$.

18. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ são linearmente independentes:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right\}$
(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

19. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:

(a) $\{2x^2 + 1, x^2 + 3, x\}$,
(b) $\{3x + 1, 2x^2 + 1, 2x^2 + 6x + 3\}$,

20. Para os subespaços vectoriais determinados no Exercício 6, calcule uma base e indique a dimensão do respectivo subespaço.

21. Para os subespaços vectoriais determinados no Exercício 7, calcule uma base e indique a dimensão do respectivo subespaço.

22. Para os subespaços vectoriais determinados no Exercício 8, calcule uma base e indique a dimensão do respectivo subespaço.

23. Determine quais dos seguintes conjuntos constituem uma base de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$,

(b) $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$.

24. Escreva a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Considere o vector $x = (1,0,-1)$ e U o subespaço definido por:

$$U =< (1,1,1),(1,2,3),(0,-1,-2),(1,-2,5) >$$

(a) Escreva o vector x como combinação linear dos vectores de U.

(b) Determine uma base de U.

(c) Escreva o vector x como combinação linear dos vectores da base determinada na alínea anterior.

(d) Determine α de modo que o vector $y = (0,2,\alpha)$ seja combinação linear dos vectores da base de U determinada na alínea b).

26. Considere o espaço vectorial real P_3.

(a) Indique uma base do subespaço S de P_3 tal que

$$S =< x^3 + x, x^3 - x, x^2 + x, x^2 - x >$$

(b) Escreva o vector $2x^3 + x^2 - x$ como combinação linear dos vectores da base determinada na alínea anterior.

27. Considere os elementos de R^3, $v_1 = (2,-3,1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,1,-2.$

(a) Determine as coordenadas do vector $(3,2,1)$ relativamente a esta base

28. Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real R^3:

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), \quad v_2 = (1, \alpha, -1), \quad v_3 = (2, \alpha, -3).$$

(a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de R^3.

(b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1,1,2)$ em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

29. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de IR^3. Considere os vectores $v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,1,0)$ e$v_3 = (1,1,1)$.

(a) Mostre que v_1, v_2 e v_3 formam uma base de IR^3.

(b) Exprima os vectores e_1, e_2 e e_3 na base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(c) Determine as coordenadas do vector $u = 3e_1 + 4e_2 - e_3$ na base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

30. Mostre que quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ os vectores de $\mathbb{R}^4$, $x_1 = (1,a,b), x_2 = (0,1,c)$ e $x_3 = (0,0,1)$ são linearmente independentes.

31. Seja $S = \{(-2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Verifique que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
(b) Determine uma base de S.
(c) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $S =< (1, 0, -1), (-1 - 1, \alpha) >$.

32. Seja $T =< (1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1) >.$:

    (a) Determine a forma genérica dos vectores de $\mathbb{R}^4$ que pertencem a T.
    (b) Os vectores $(1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1)$ constituem uma base de T?

33. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços:

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\},$$

$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_{3,4}) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\},$$

$$W_2 =< (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) > .$$

    (a) Diga, justificando, se $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de U.
    (b) Determine uma base de W_1 e uma base de W_2.

34. Mostre que os vectores $(a, b), (c, d)$ são uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se $ad - bc \neq 0$.

35. Para cada uma das alienas seguintes indique se é verdadeira ou falsa a respectiva afirmação.

    (a) Se $V =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$, então $dimV = n$.
    (b) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então o vector nulo não pode escrever-se como combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
    (c) Se $dimV = n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vectores de V linearmente independentes, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.
    (d) Se $V =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$ então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ é uma base de V.
    (e) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ é uma base de V, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 + v_n\}$ também é uma base de V.
    (f) Se $dimV = n$, então quaisquer $n - 1$ vectores de V são linearmente independentes.
    (g) O conjunto $T = \{\alpha v_1 + \beta v_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V\}$ é um subespaço vectorial de V.
    (h) O subespaço $T = \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ tem dimensão 3.

36. Determine a dimensão e indique uma base para o espaço das colunas e para o espaço das linhas de cada uma das seguintes matrizes.

    (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    (c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

37. Determine a dimensão e indique uma base para o núcleo de cada uma das matrizes do exercício 36.

38. Determine uma base e indique a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ formado pelas soluções do sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

39. Resolva o seguinte sistema indeterminado escrevendo a sua solução geral como soma de uma solução particular do sistema do sistema com a solução geral do sistema homogéneo associado.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

40. Determine uma base do espaço das soluções do seguinte sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$