Quádricas

Quádrica: superfície de $\mathbb{R}^3$ que admite uma equação da forma

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0\,,$$

com $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}xy, a_{13}, a_{23}, b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$.

Considerando

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},\ B=[b_1\ \ b_2\ \ b_3] \text{ e } X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

a equação anterior é equivalente a $X^TAX+BX+c=0$.

A matriz A é simétrica real, logo, existem matrizes reais 3×3, Q, ortogonal e D, diagonal, tais que $A = QDQ^T$. Fazendo a mudança de variáveis definida por $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^T X$ obtém-se a equação da quádrica (relativamente a um novo sistema de eixos com a mesma origem e em que os eixos coordenados são definidos pelas colunas de Q)

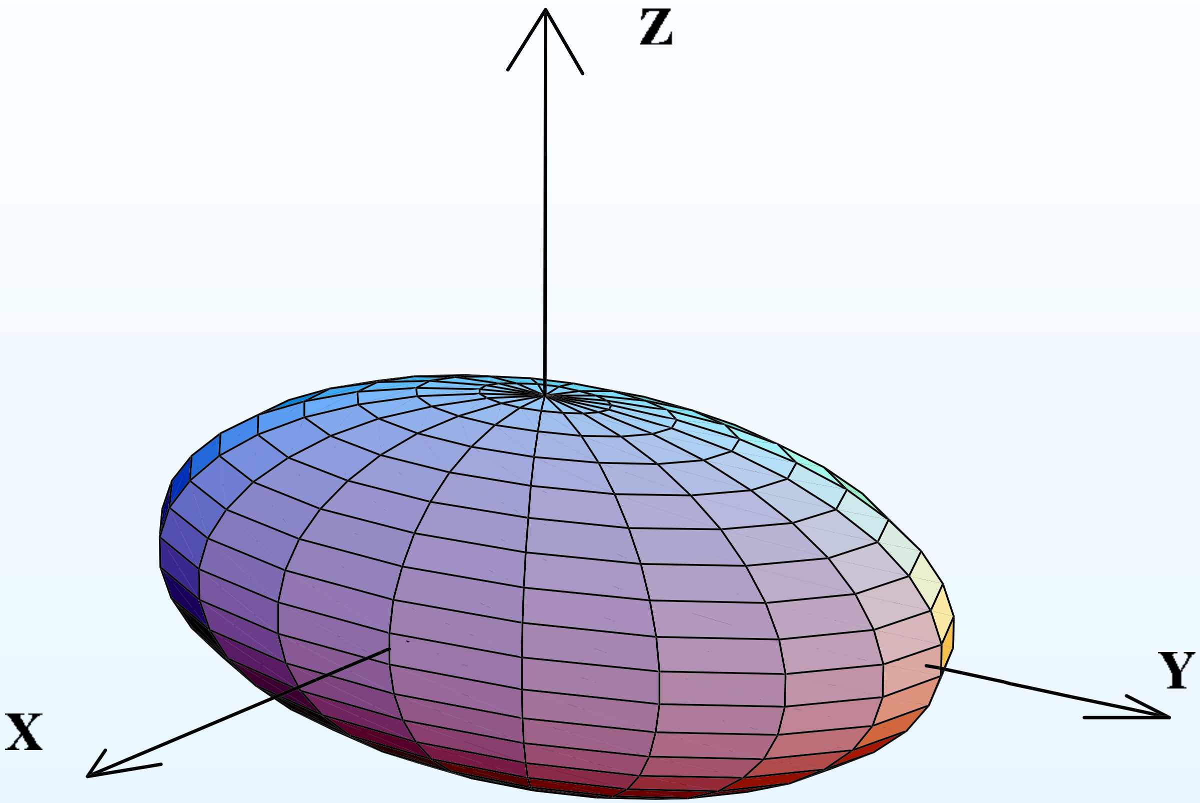
$$(X')^T D X' + BQX' + c = 0\,.$$

Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ os elementos diagonais de D, ou seja, os valores próprios de A, esta equação é

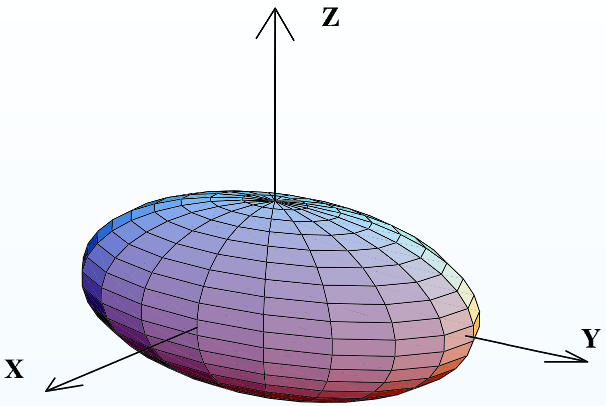
$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + d_1 x' + d_2 y' + d_3 z' + c = 0\,.$$

Completando quadrados (isto é, fazendo uma translação do sistema de eixos) elimina-se o maior número possível de termos de grau 1, obtendo-se uma equação da quádrica na forma reduzida.

Elipsóide



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



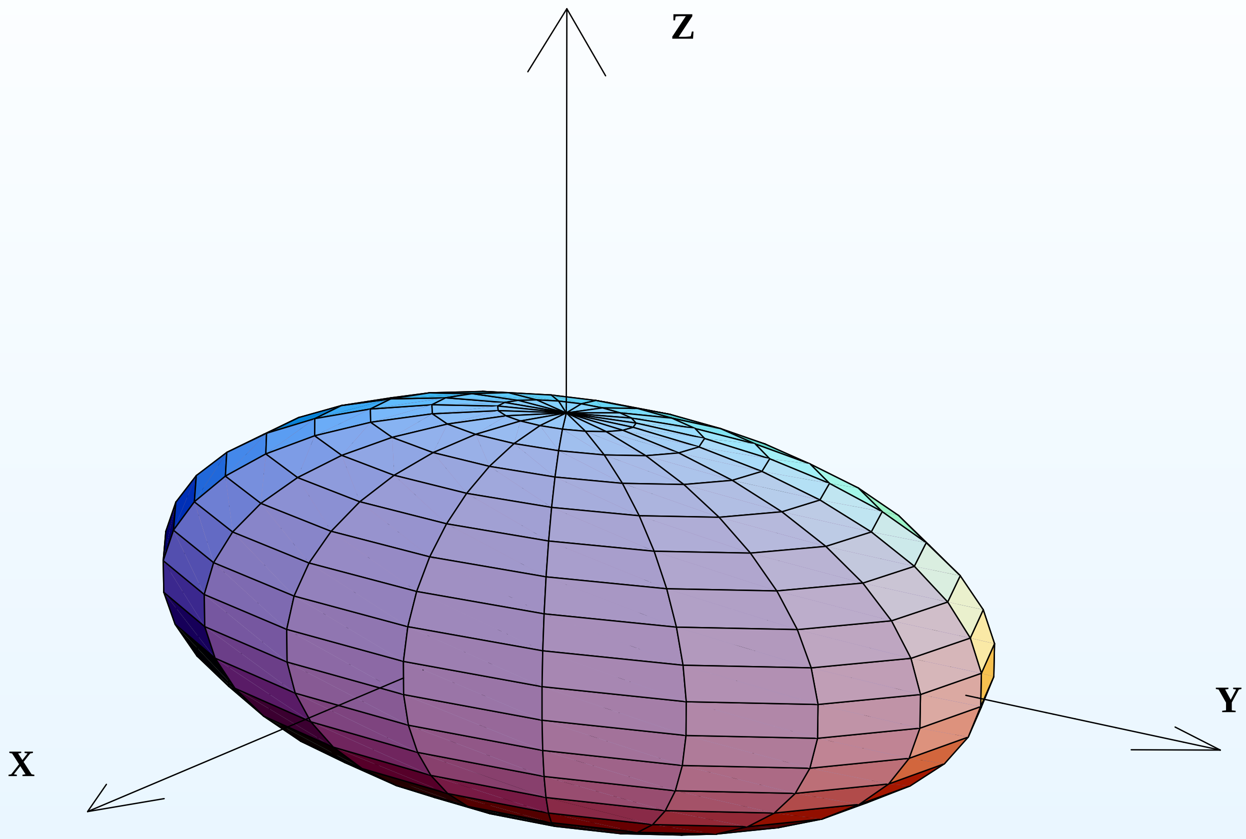
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Características:

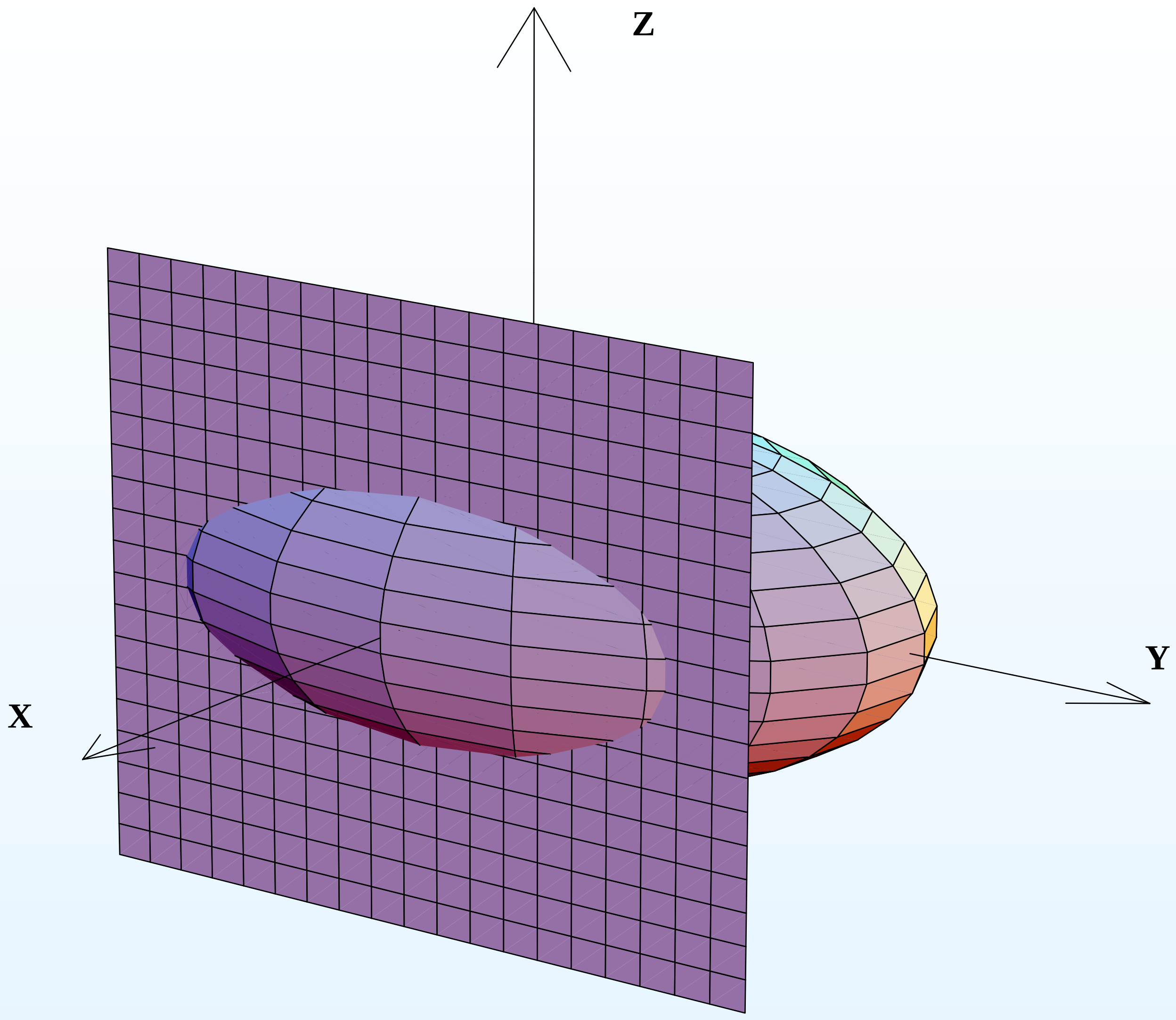
● É simétrica relativamente a cada um dos planos coordenados e relativamente à origem.

● A sua intersecção com um plano paralelo a qualquer um dos planos coordenados é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

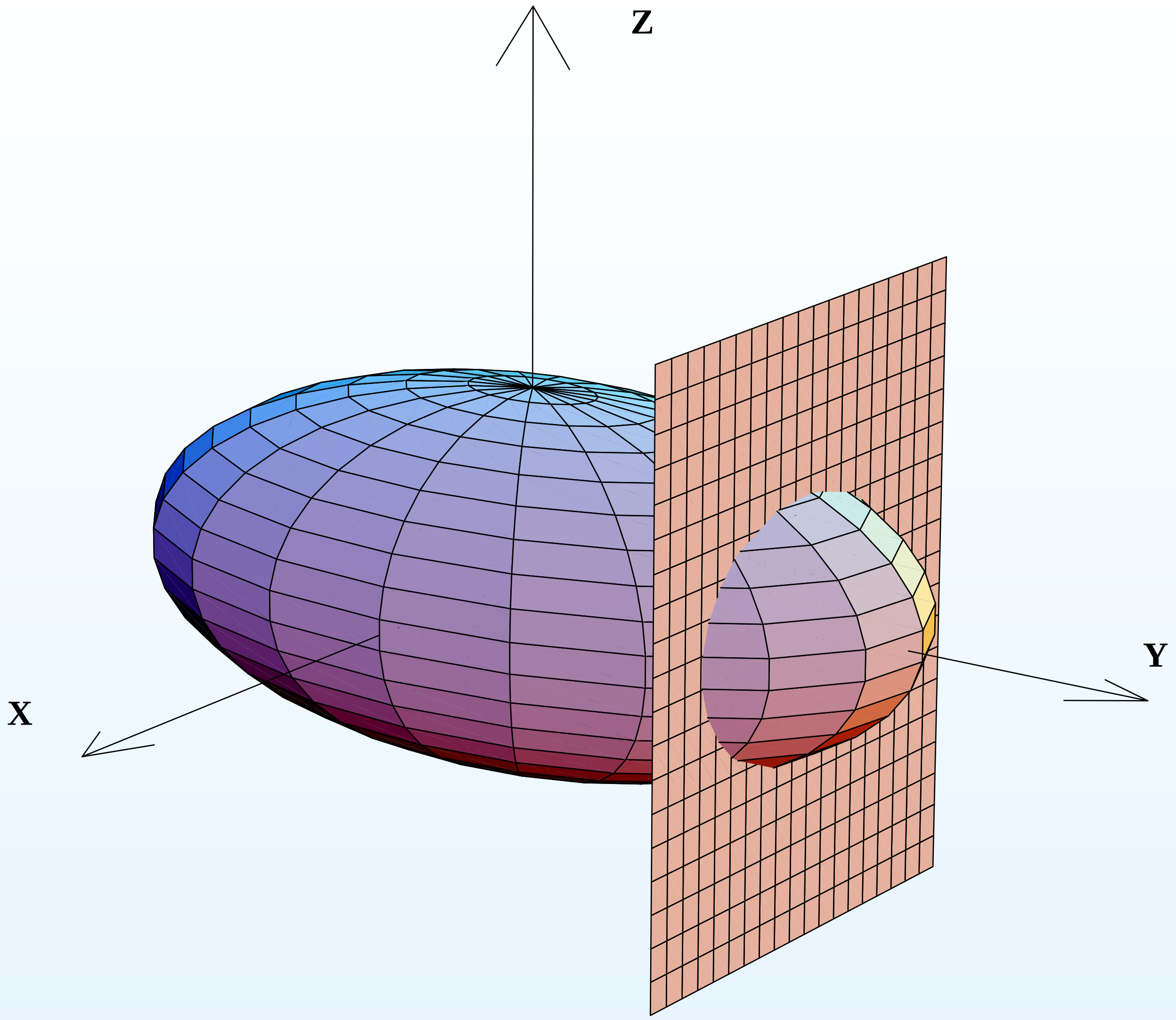
● Se $a = b = c$ o elipsóide é uma superfície esférica de centro na origem e raio a.



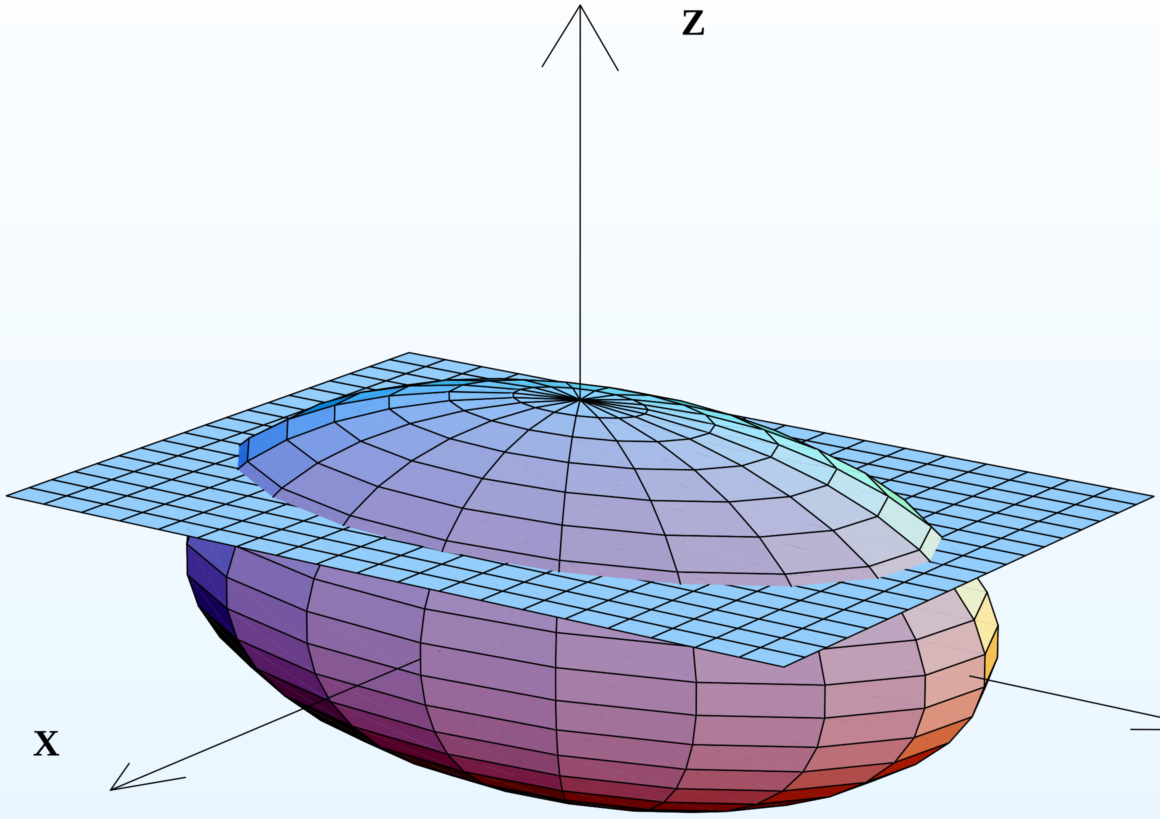
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{9} = 1$$



$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{9}=1 \ \wedge \ x=3$$

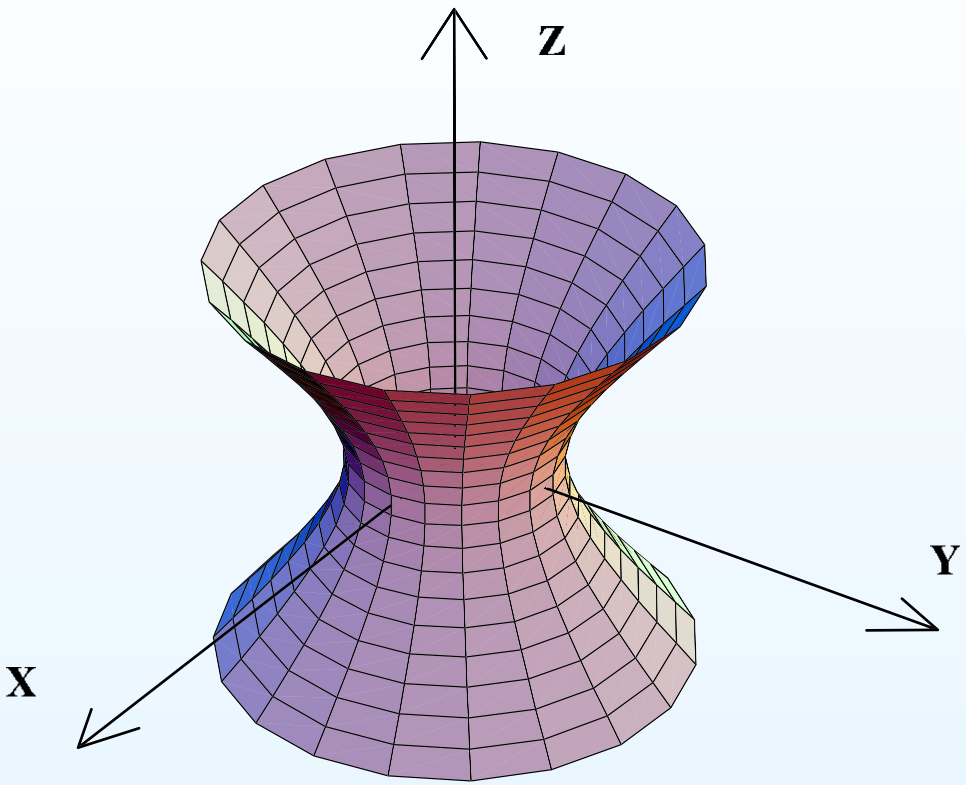


$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{9} = 1 \ \wedge \ y = 5$$

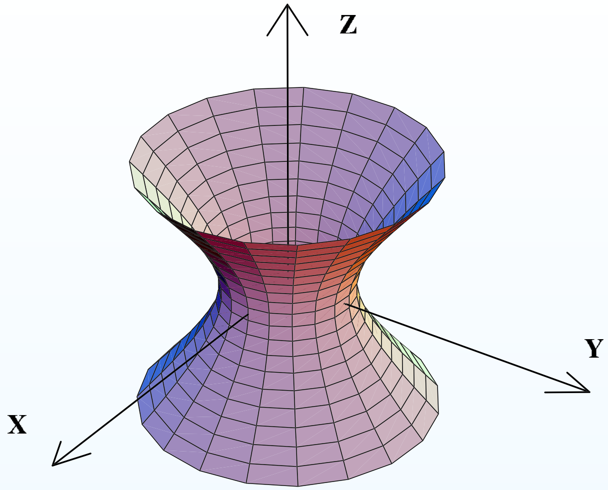


$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{9}=1 \ \wedge \ z=\frac{3}{2}$$

Hiperbolóide de uma folha



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



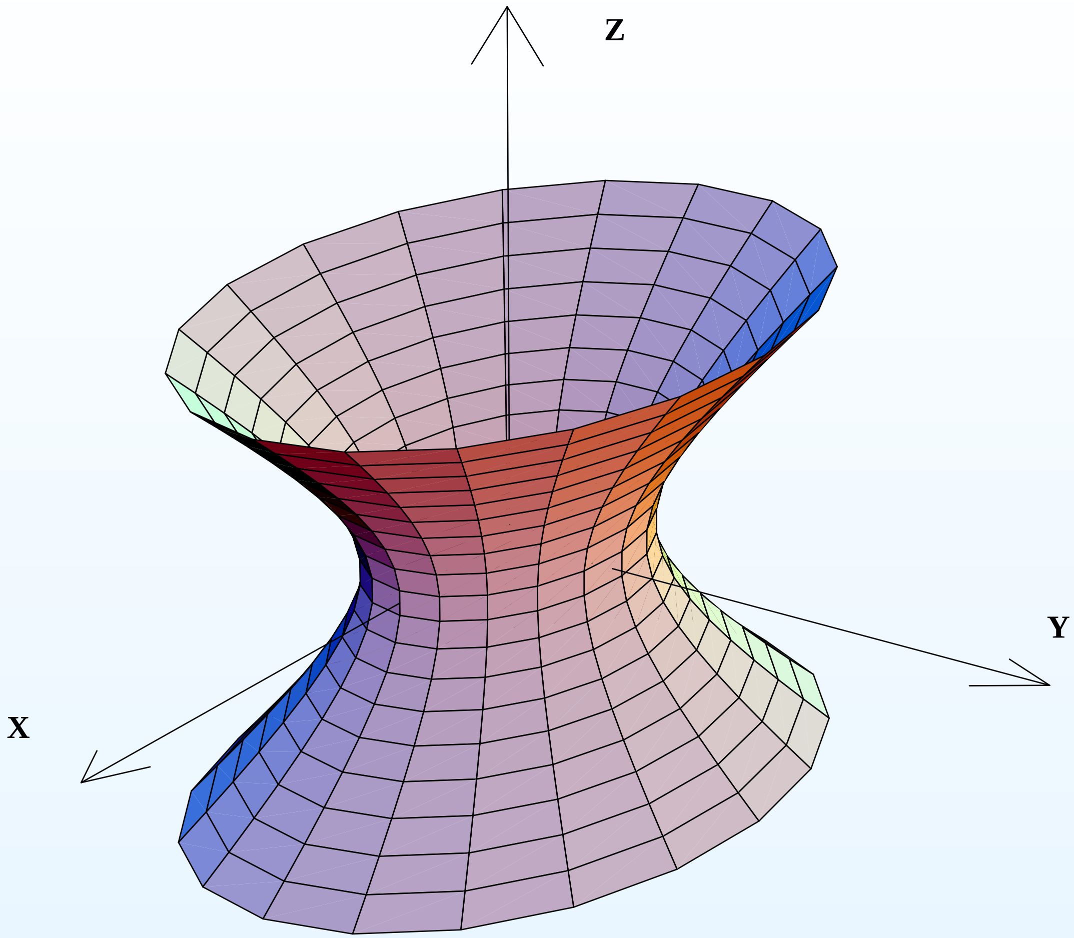
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Características:

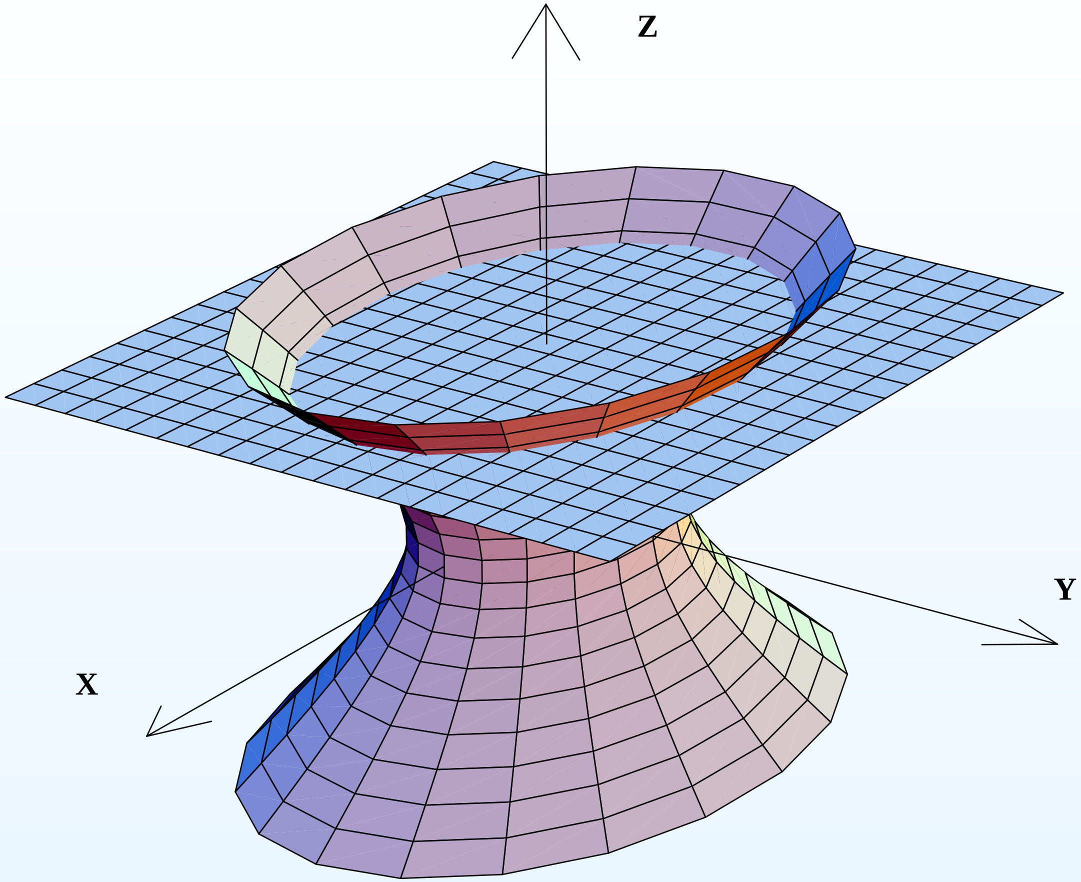
● É simétrica relativamente a cada um dos planos coordenados e relativamente à origem.

● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano XOY é uma elipse.

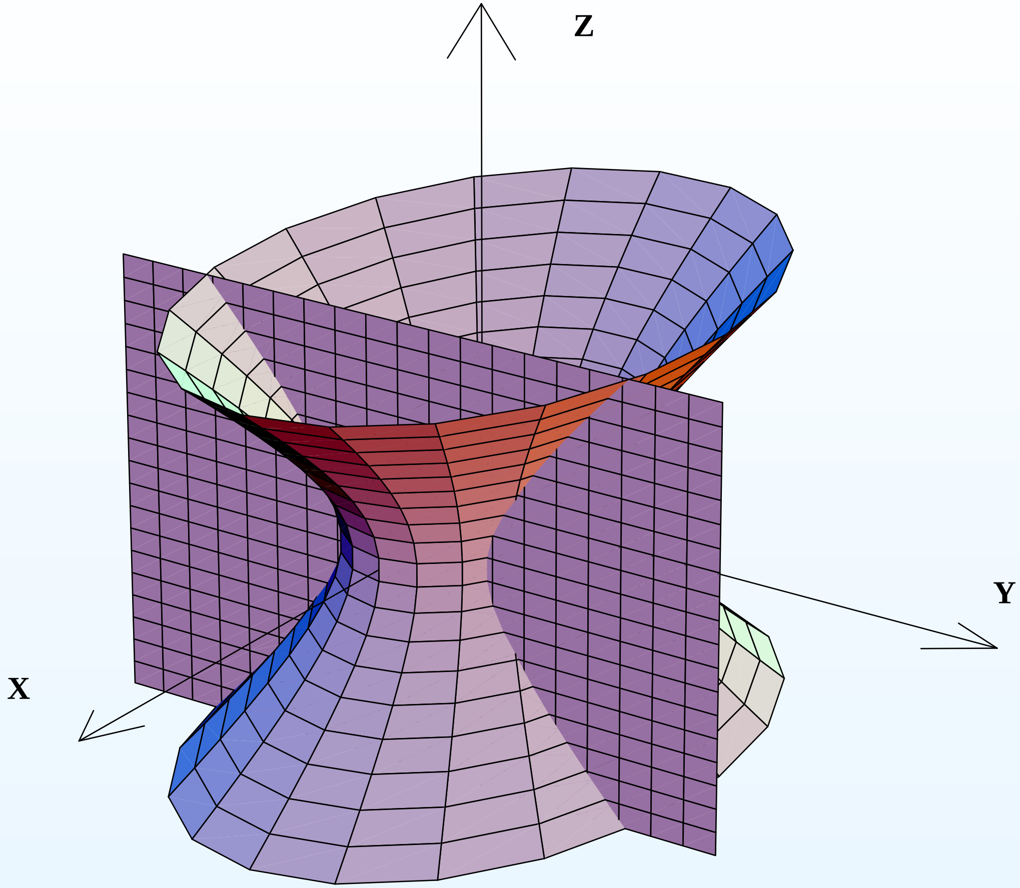
● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ ou XOZ é uma hipérbole ou duas rectas concorrentes.



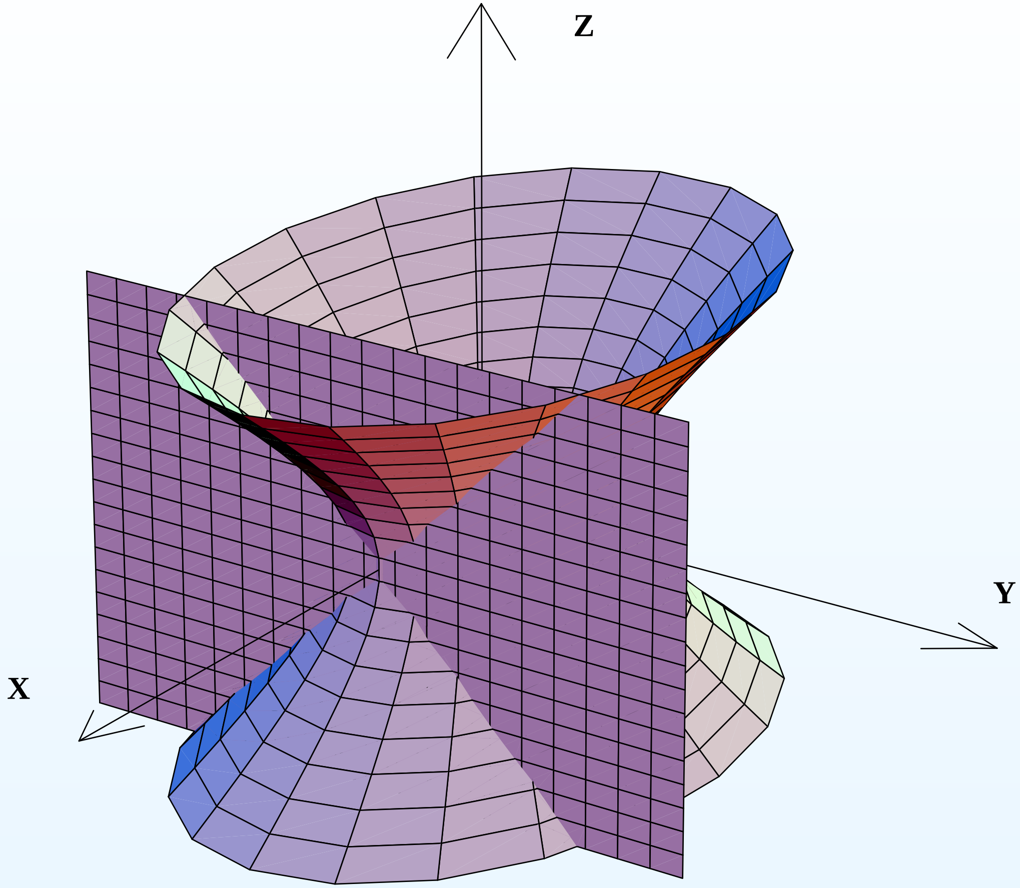
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1 \ \wedge \ z=3$$

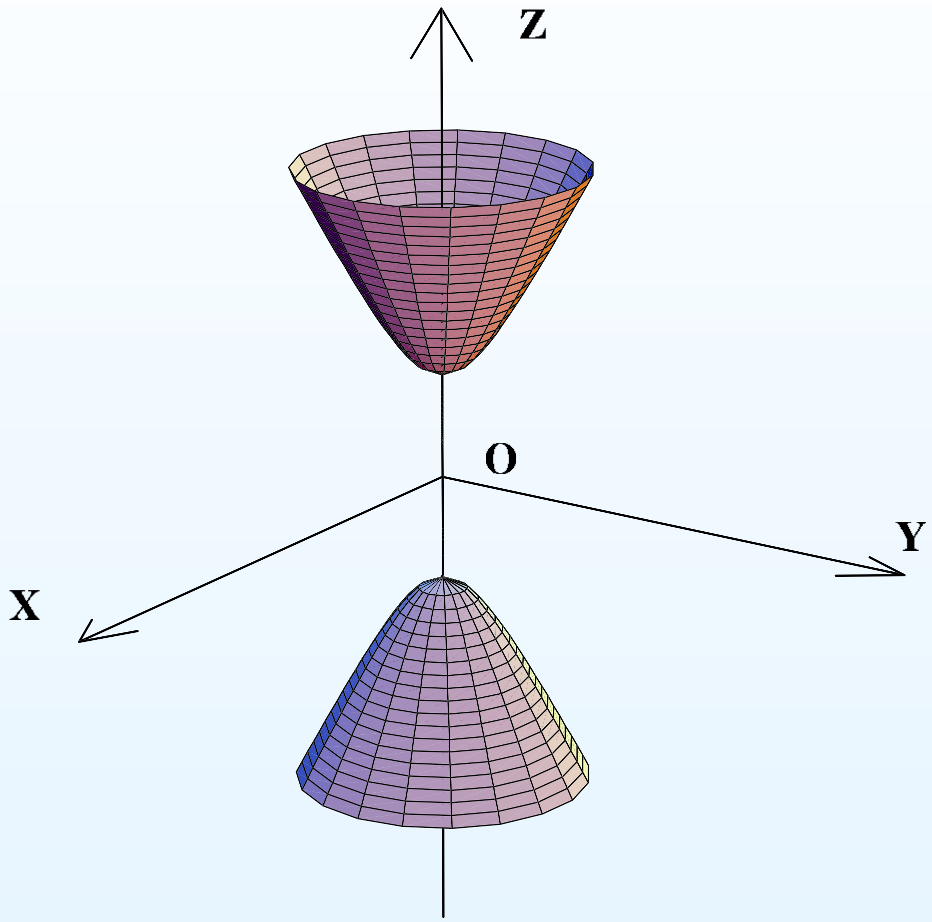


$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \;\wedge\; x = 2$$

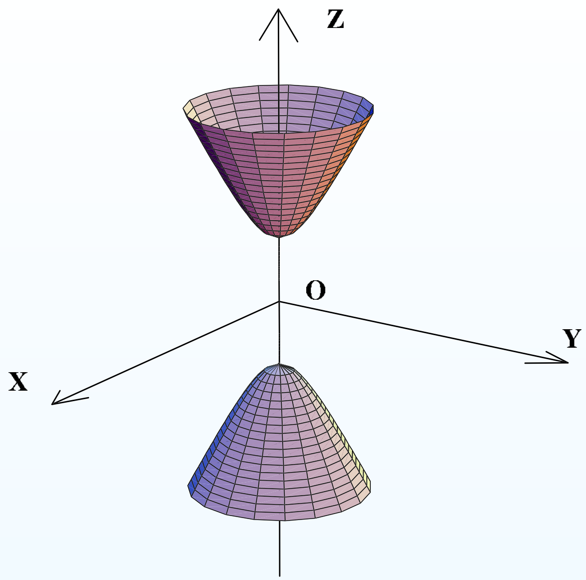


$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1 \ \wedge \ x=3$$

Hiperbolóide de duas folhas



$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



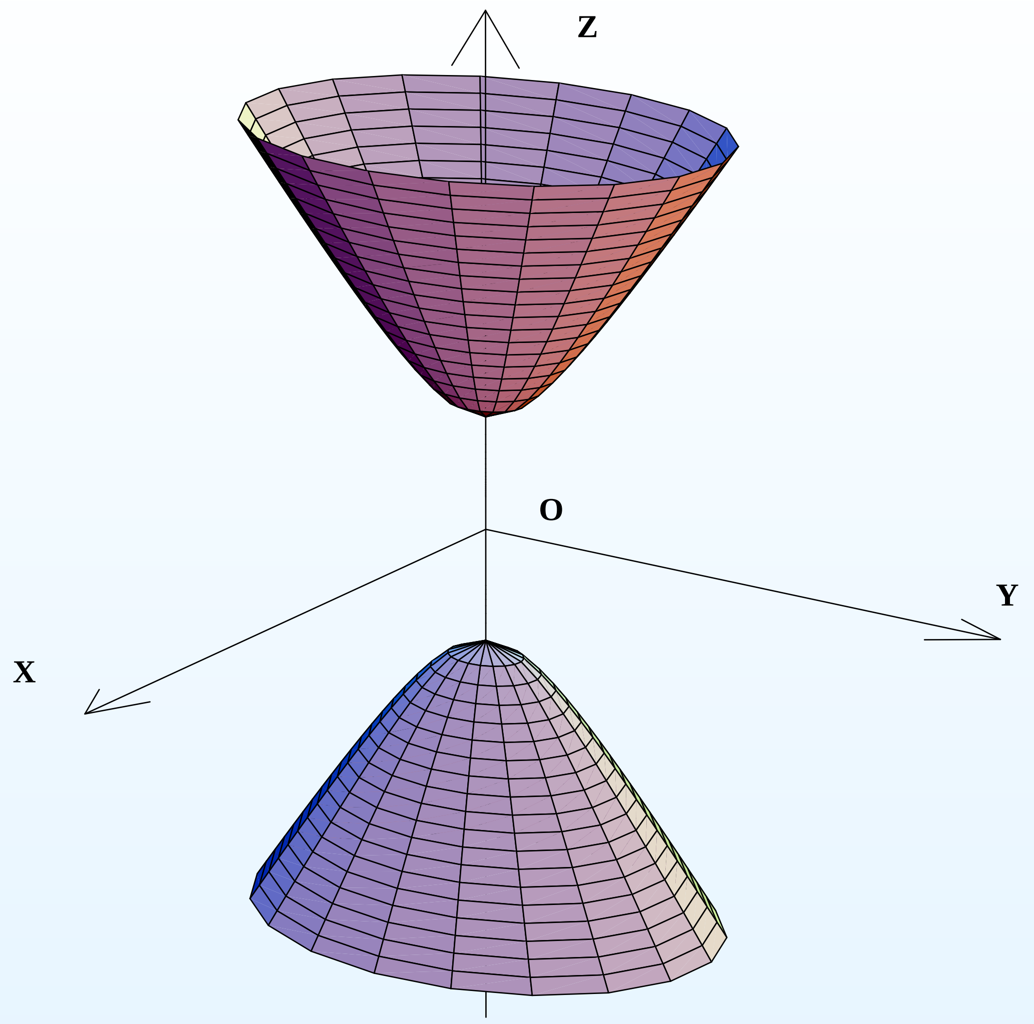
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Características:

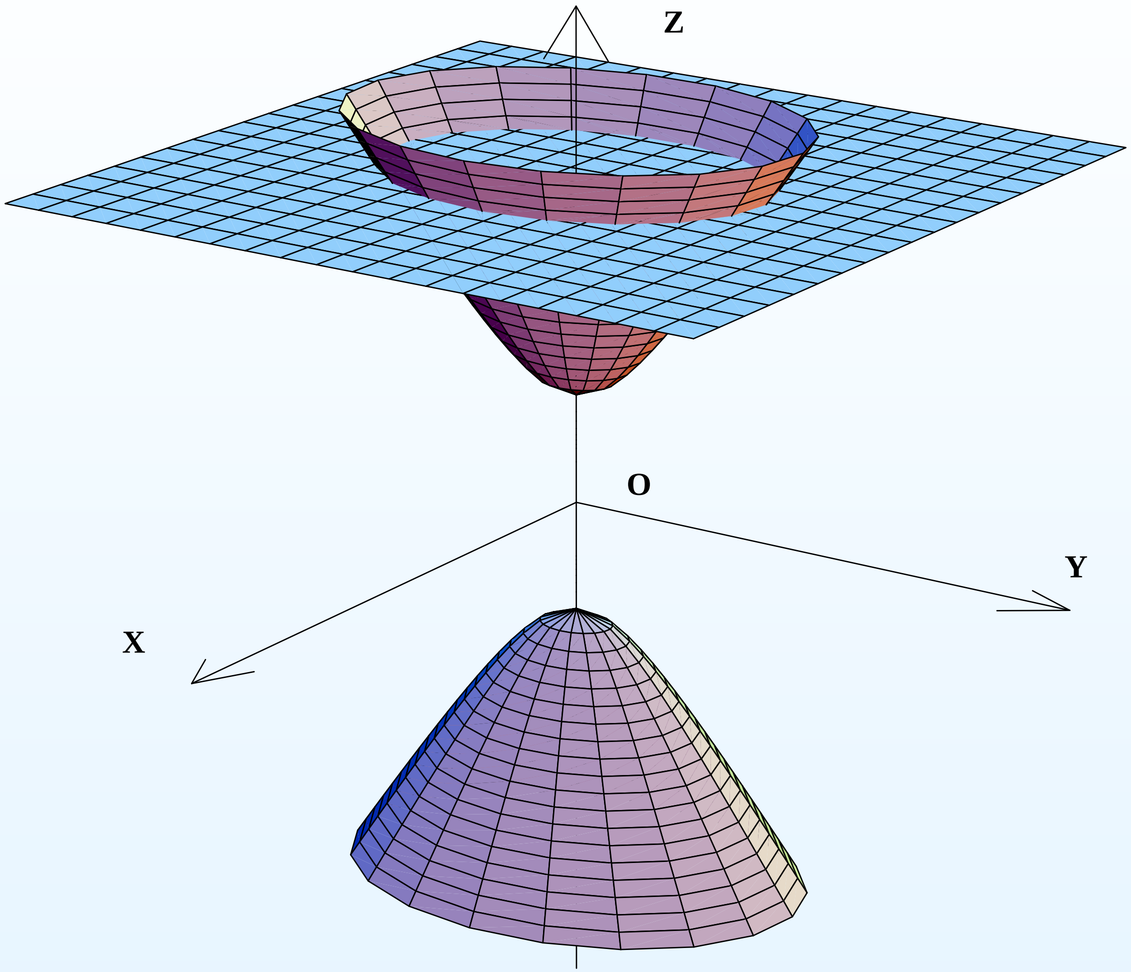
● É simétrica relativamente a cada um dos planos coordenados e relativamente à origem.

● A sua intersecção com um plano paralelo a XOY é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

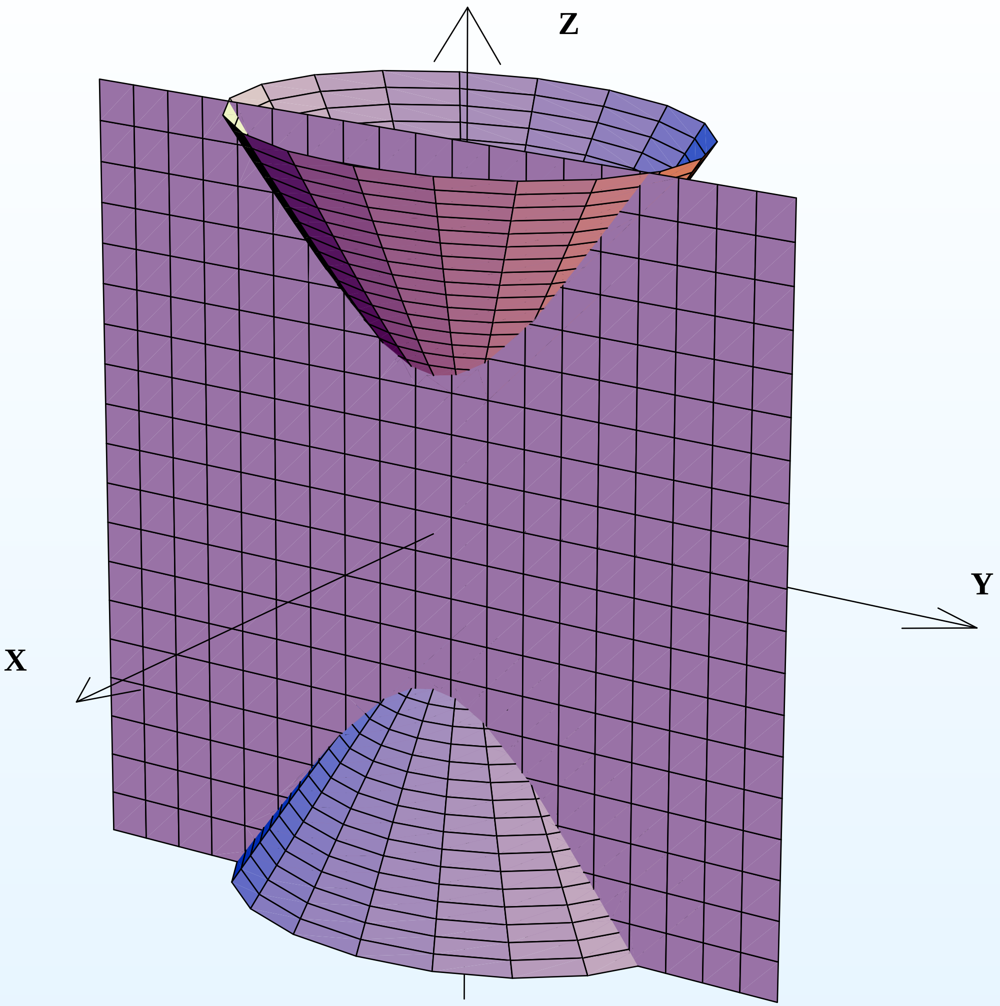
● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ ou XOZ é uma hipérbole.



$$-x^2 - \frac{y^2}{\frac{16}{9}} + \frac{z^2}{4} = 1$$

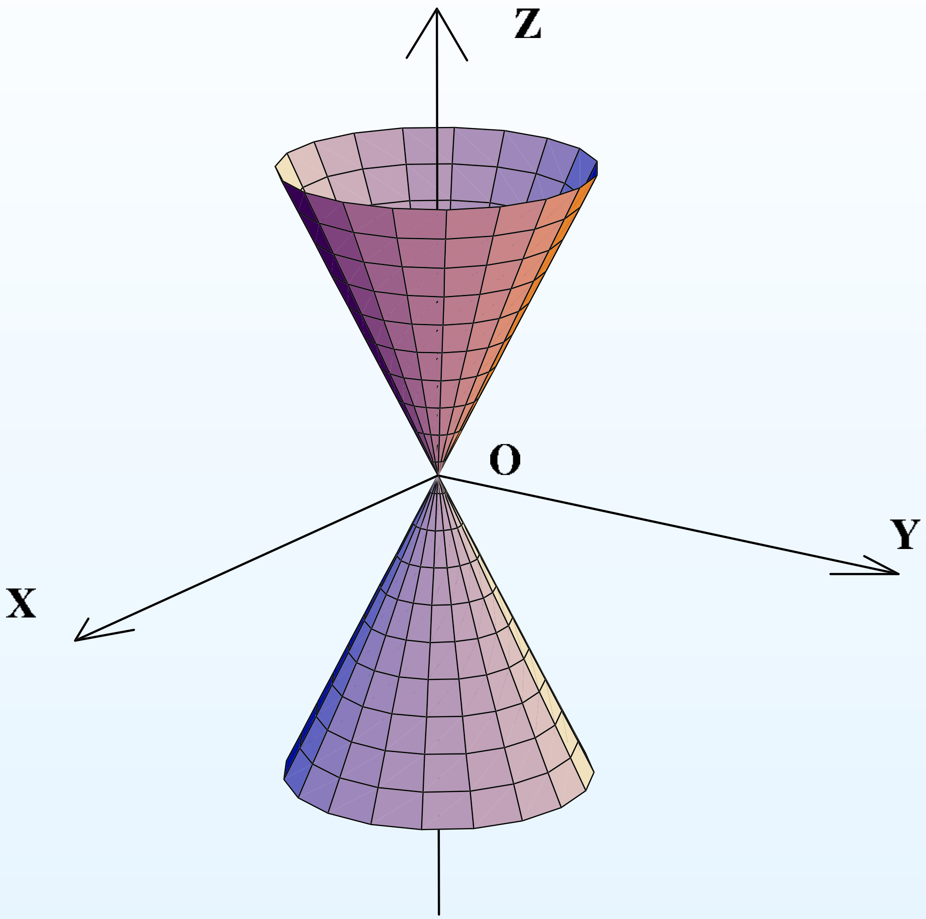


$$-x^2 - \frac{y^2}{\frac{16}{9}} + \frac{z^2}{4} = 1 \ \wedge \ z = 6$$

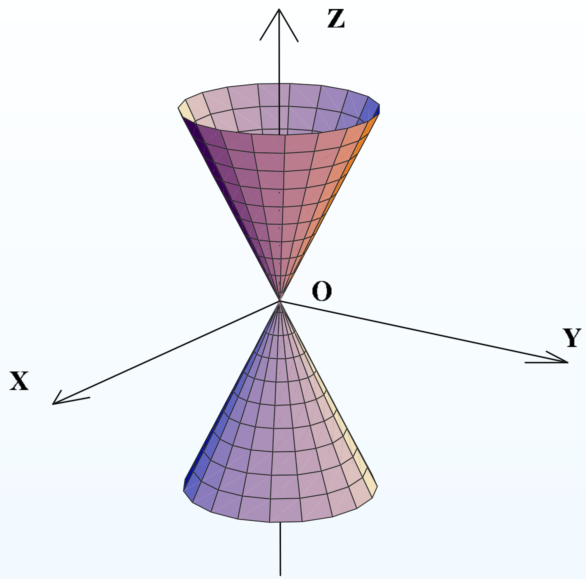


$$-x^2 - \frac{y^2}{\frac{16}{9}} + \frac{z^2}{4} = 1 \ \wedge \ x = 1$$

Cone elíptico



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Características:

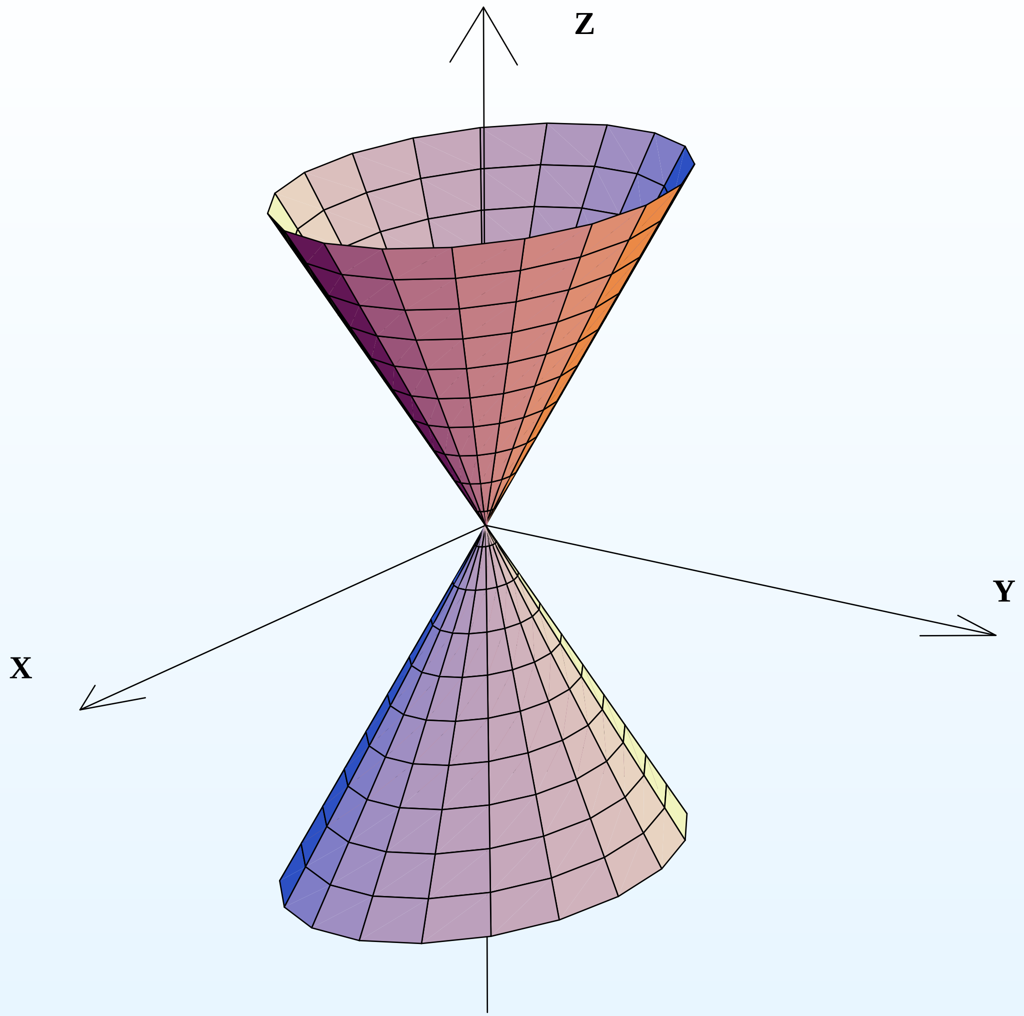
● É simétrica relativamente a cada um dos planos coordenados e relativamente à origem.

● A sua intersecção com um plano estritamente paralelo ao plano XOY é uma elipse.

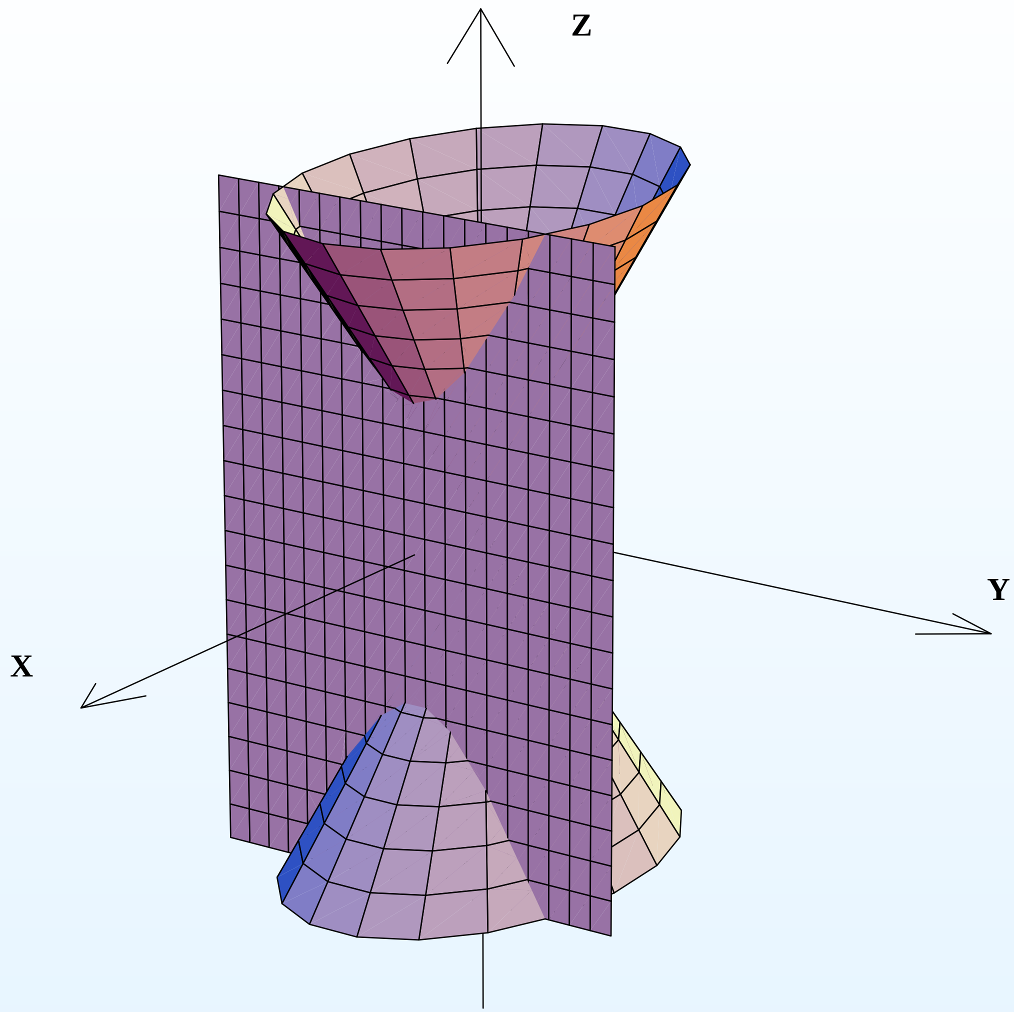
● A sua intersecção com o plano XOY é um ponto.

● A sua intersecção com um plano estritamente paralelo ao plano YOZ ou XOZ é uma hipérbole.

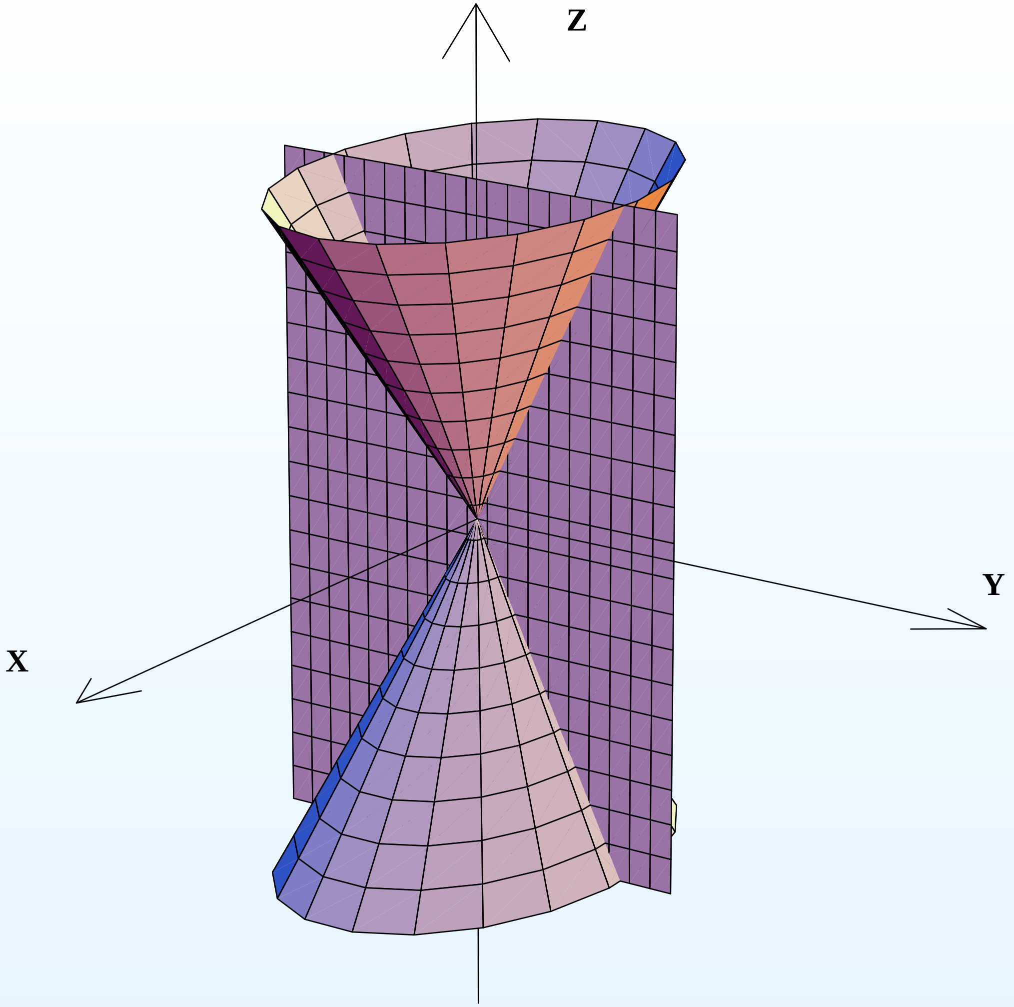
● A sua intersecção com o plano XOZ ou com o plano YOZ é constituída por 2 rectas que passam na origem.



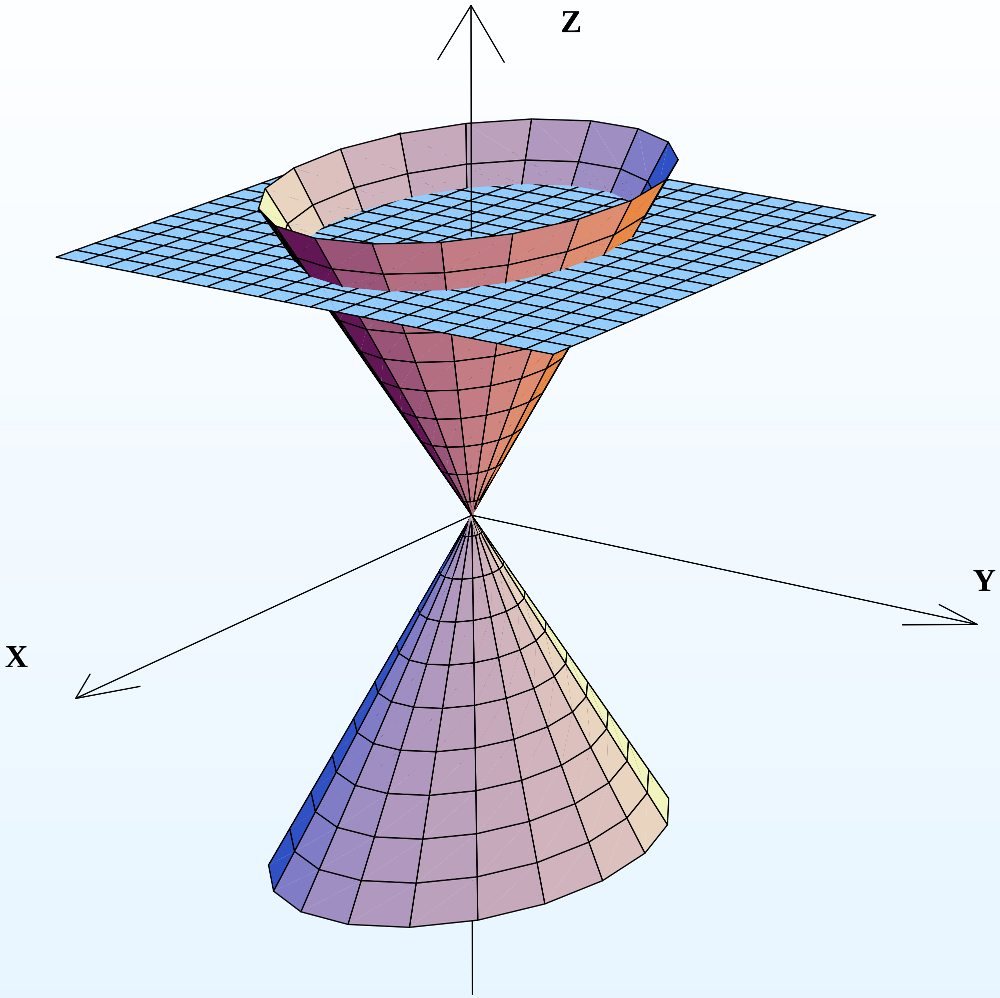
$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$$



$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \;\wedge\; x = 2$$

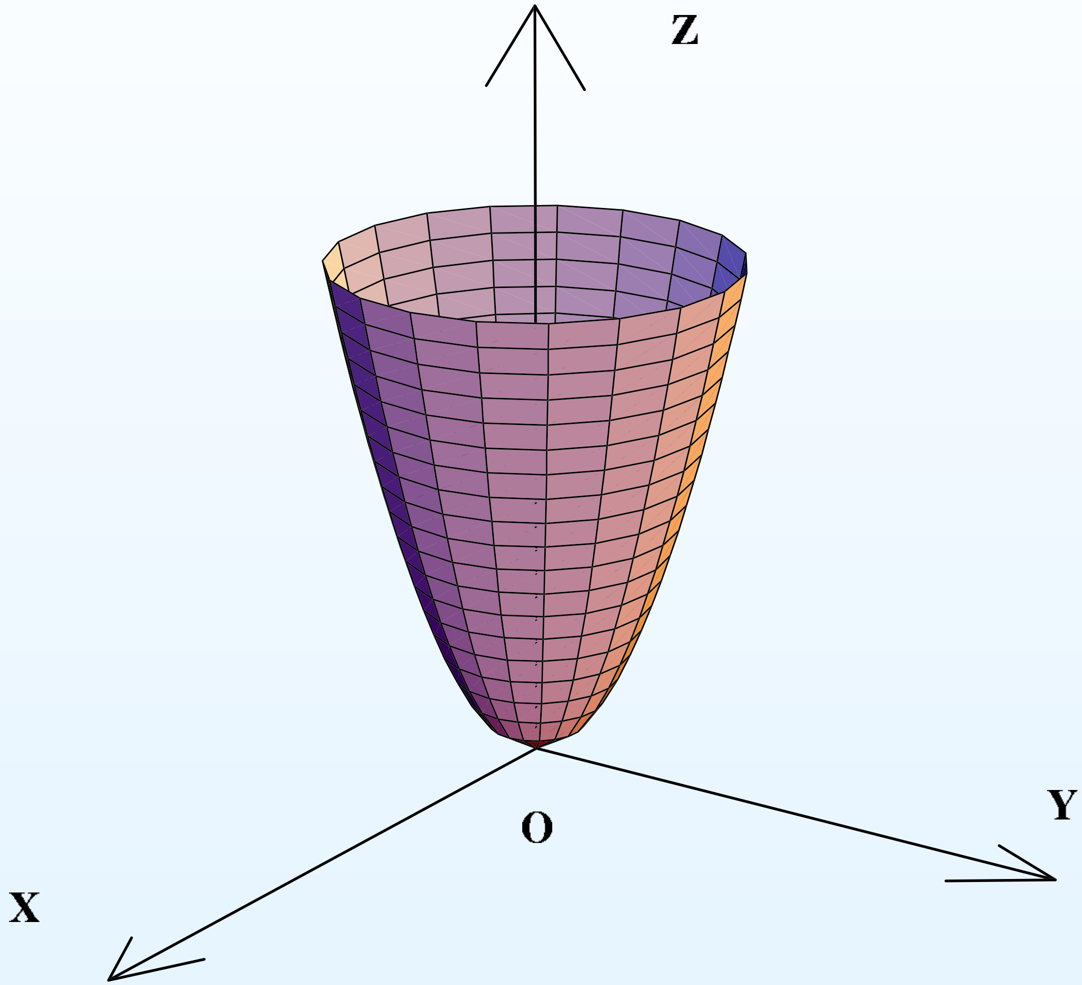


$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \ \wedge \ x = 0$$

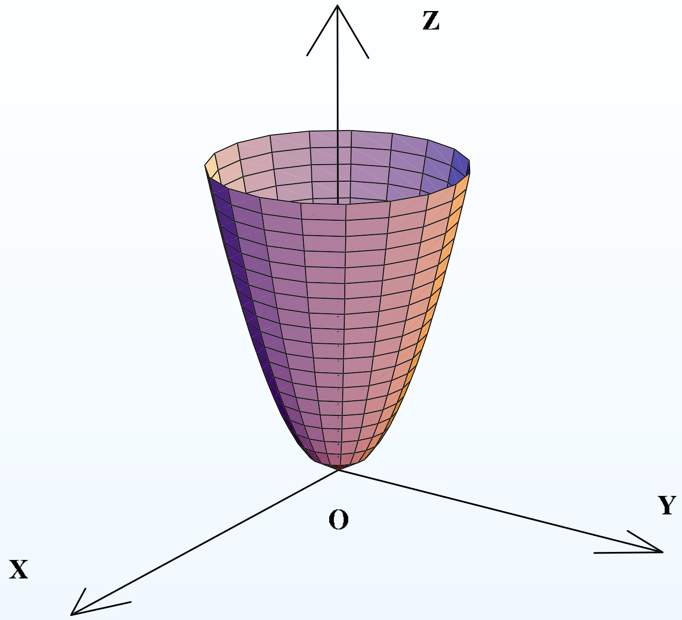


$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \ \wedge \ z = 5$$

Parabolóide elíptico



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz\,, \qquad \text{com } p > 0$$



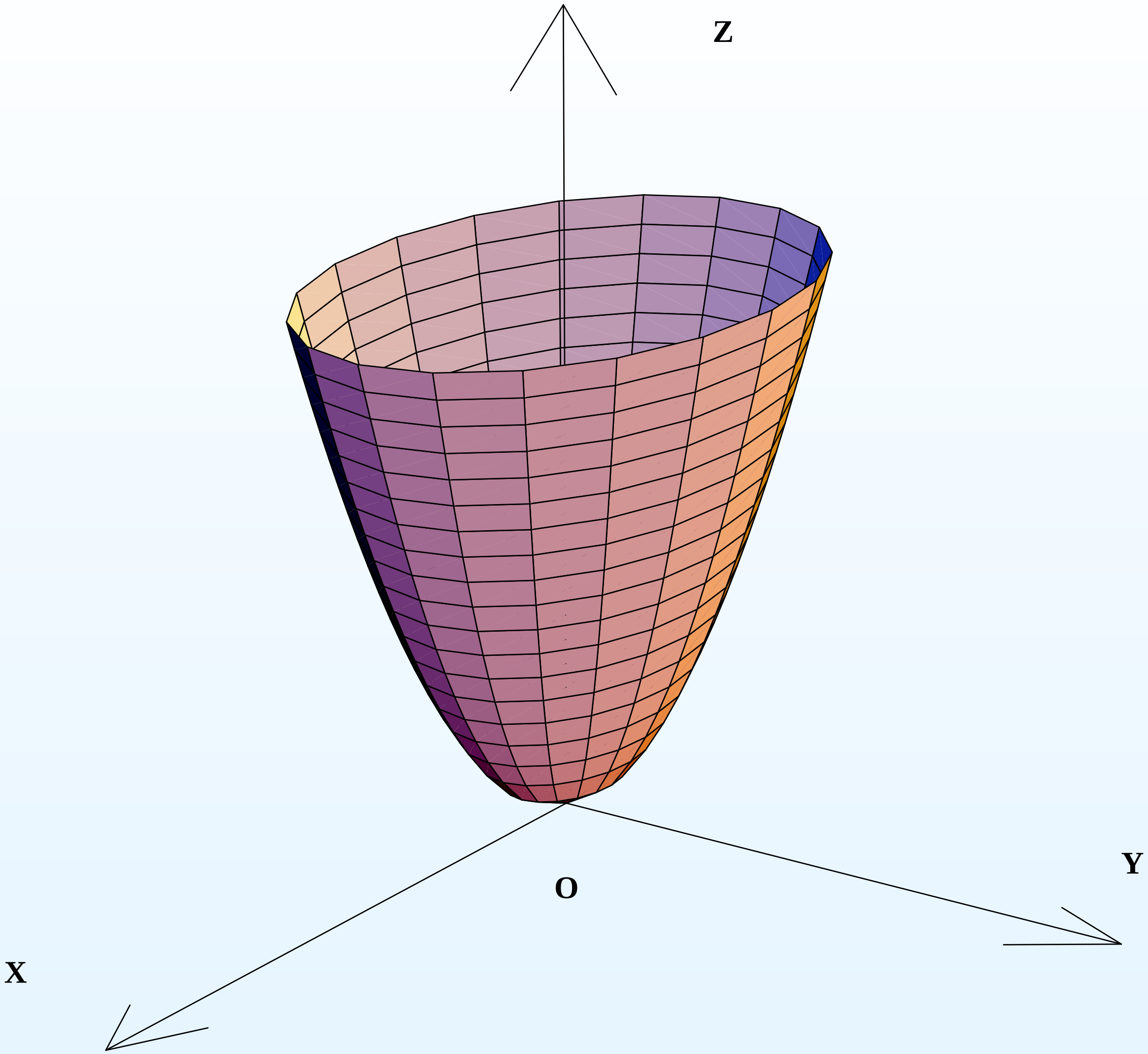
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz\,, \qquad \text{com } p > 0$$

Características:

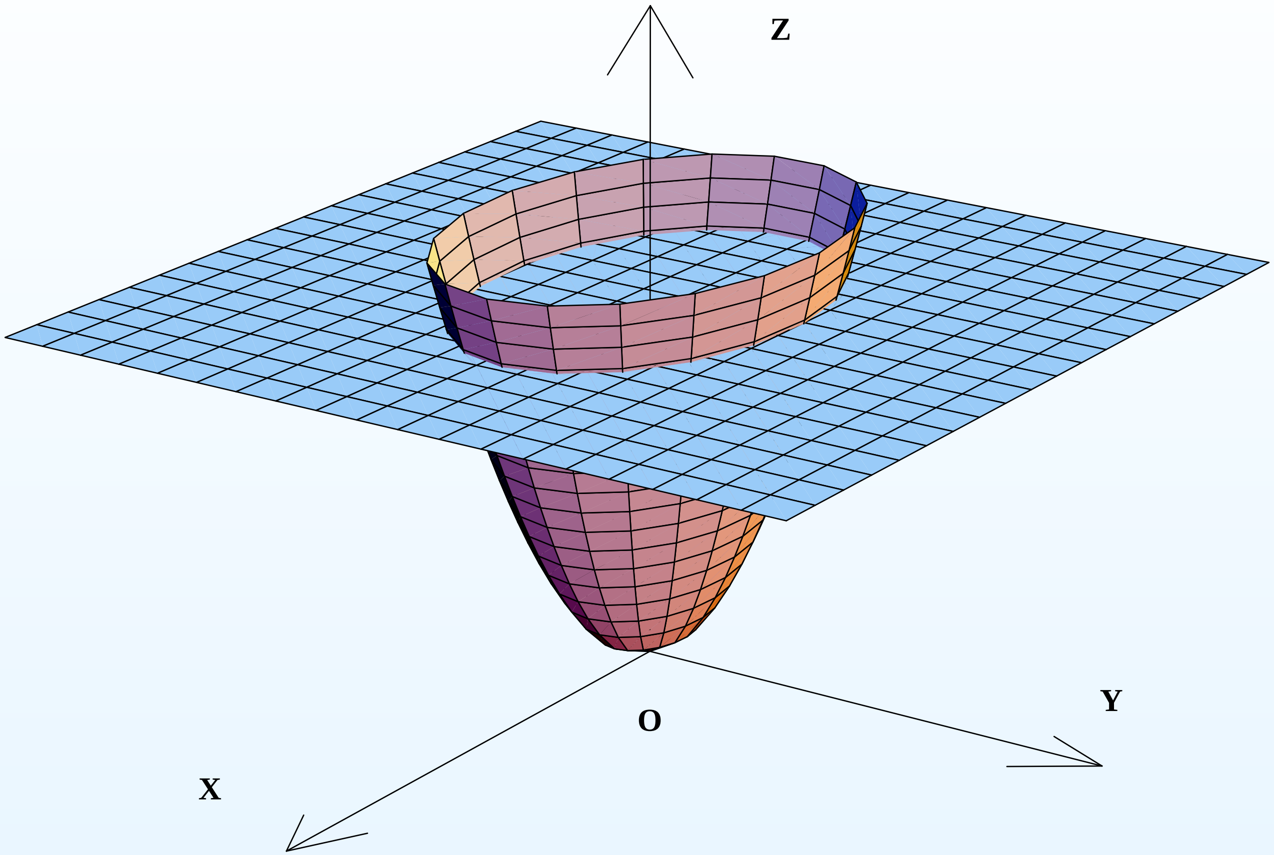
• É simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ.

• A sua intersecção com um plano paralelo a XOY é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

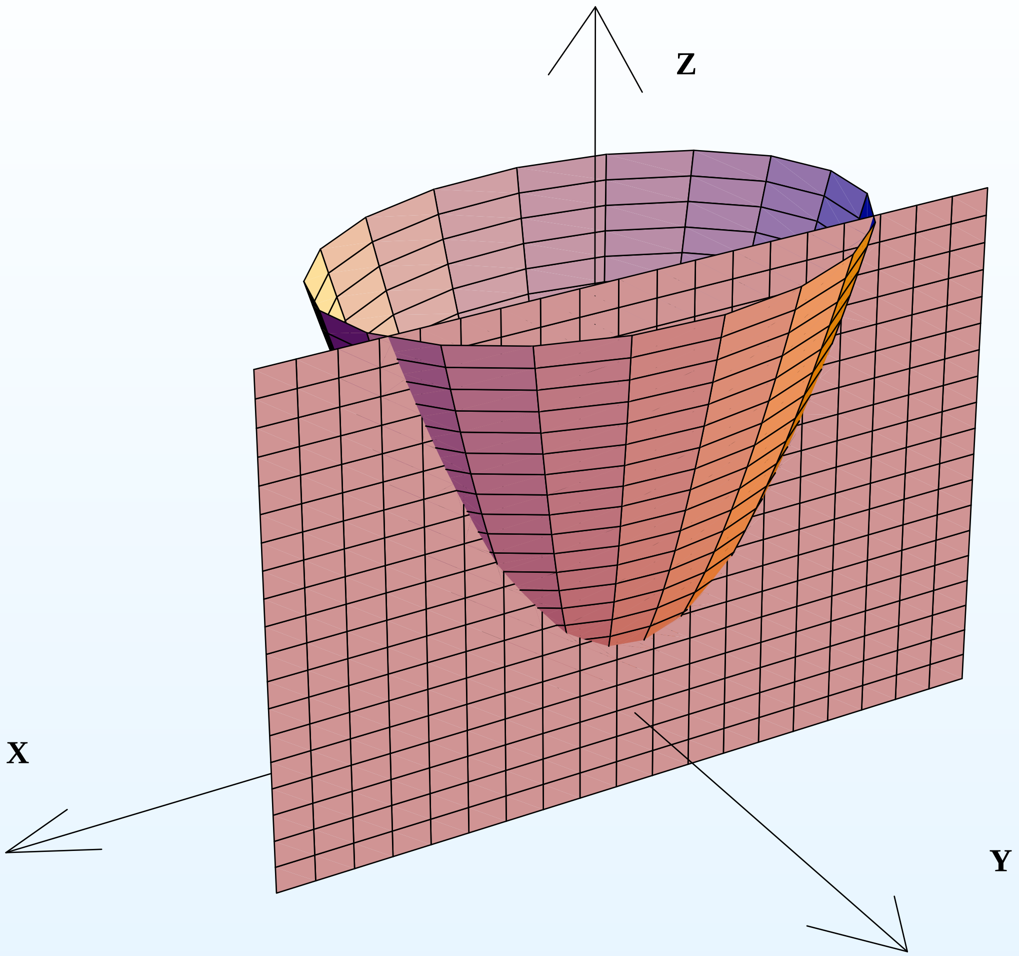
• A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ ou XOZ é uma parábola.



$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 = z$$

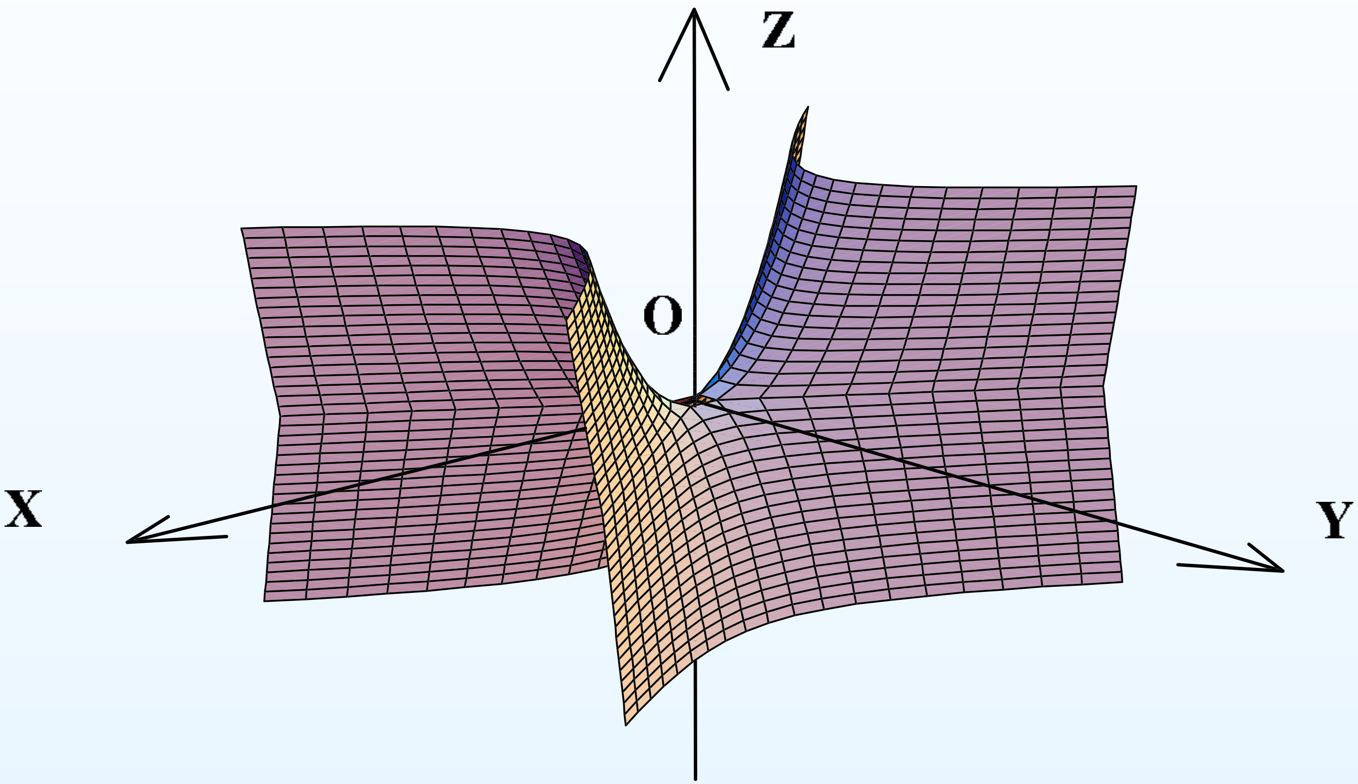


$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 = z \ \wedge \ z = 5$$

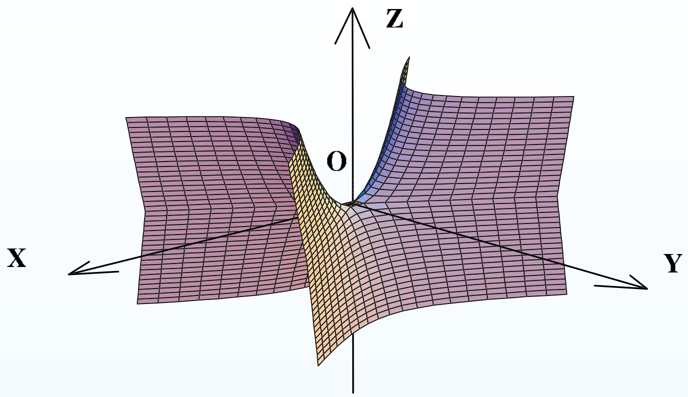


$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} + y^2 = z \;\wedge\; y = 1$$

Parabolóide hiperbólico



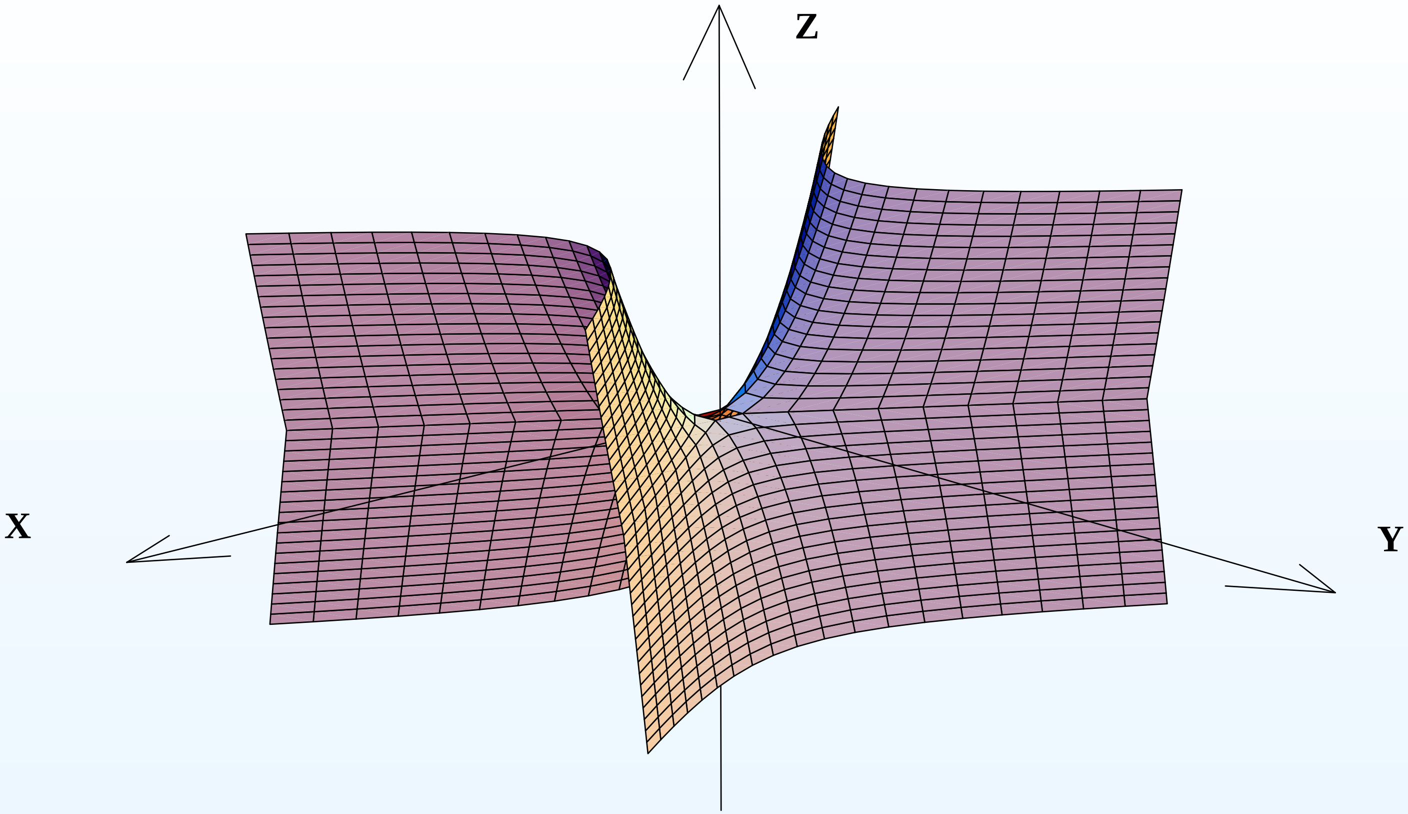
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz\,, \qquad \text{com } p > 0$$



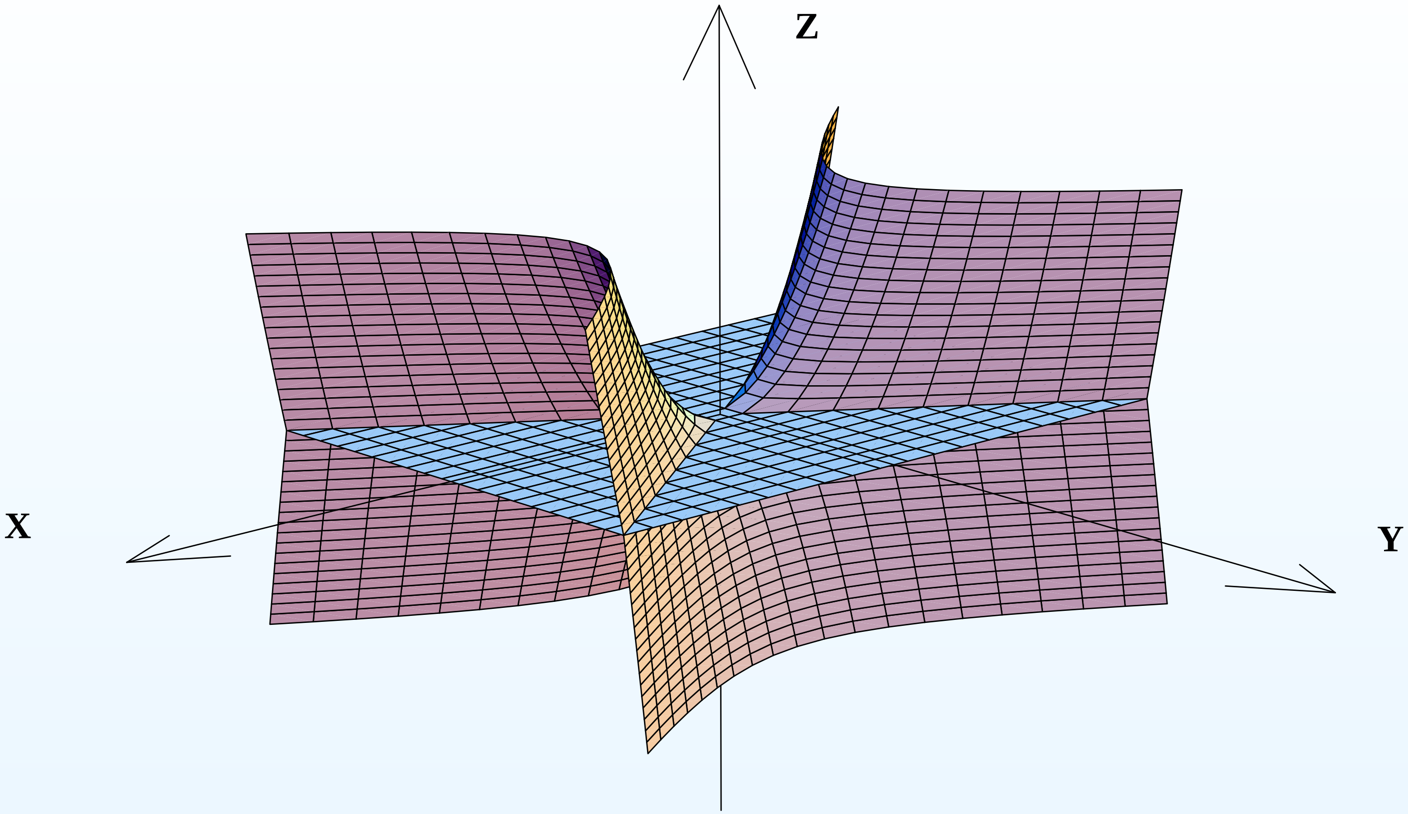
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz\,, \qquad \text{com } p > 0$$

Características:

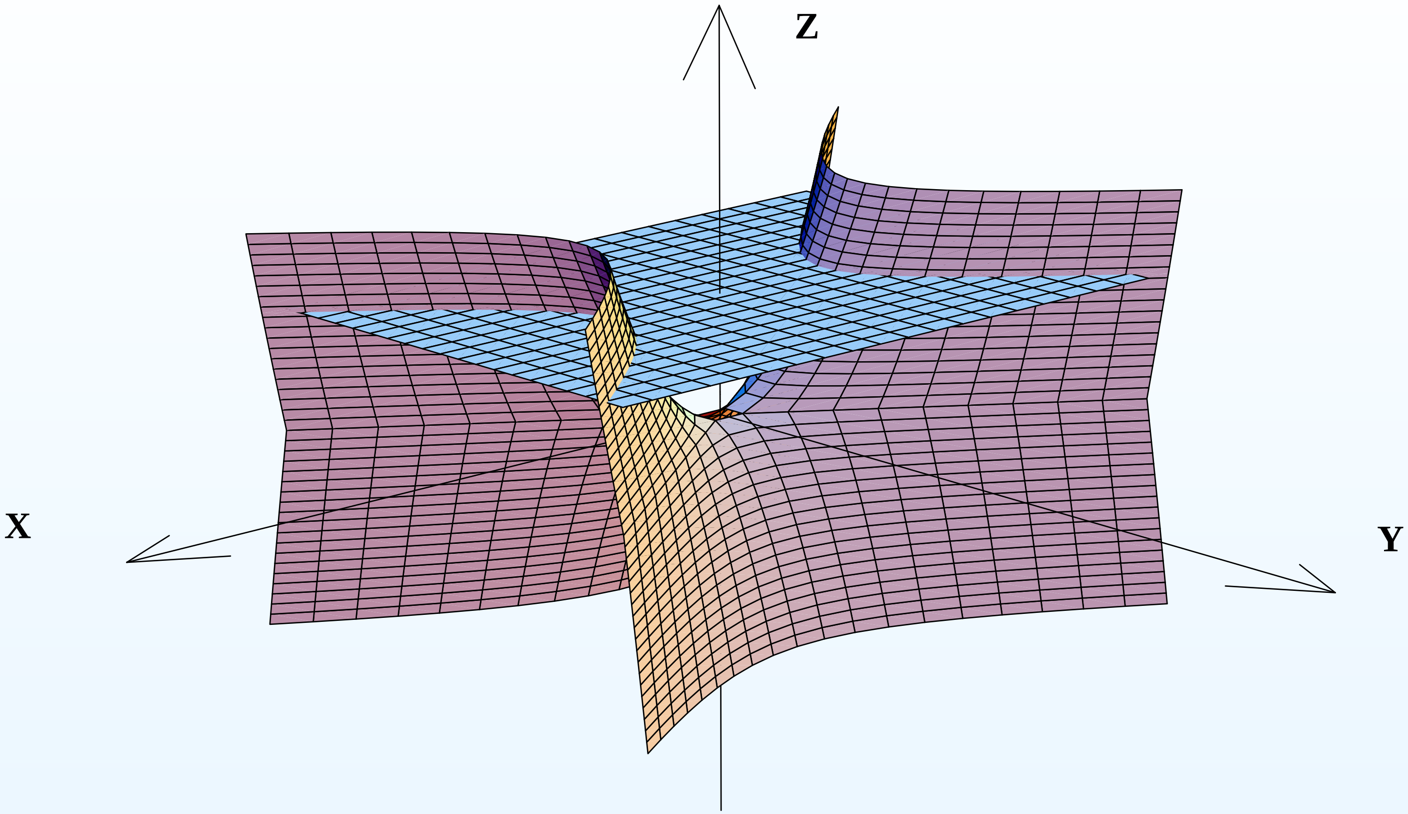
- É simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ.
- A sua intersecção com um plano estritamente paralelo ao plano XOY é uma hipérbole.
- A sua intersecção com o plano XOY é constituída por 2 rectas que passam na origem.
- A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ ou XOZ é uma parábola.



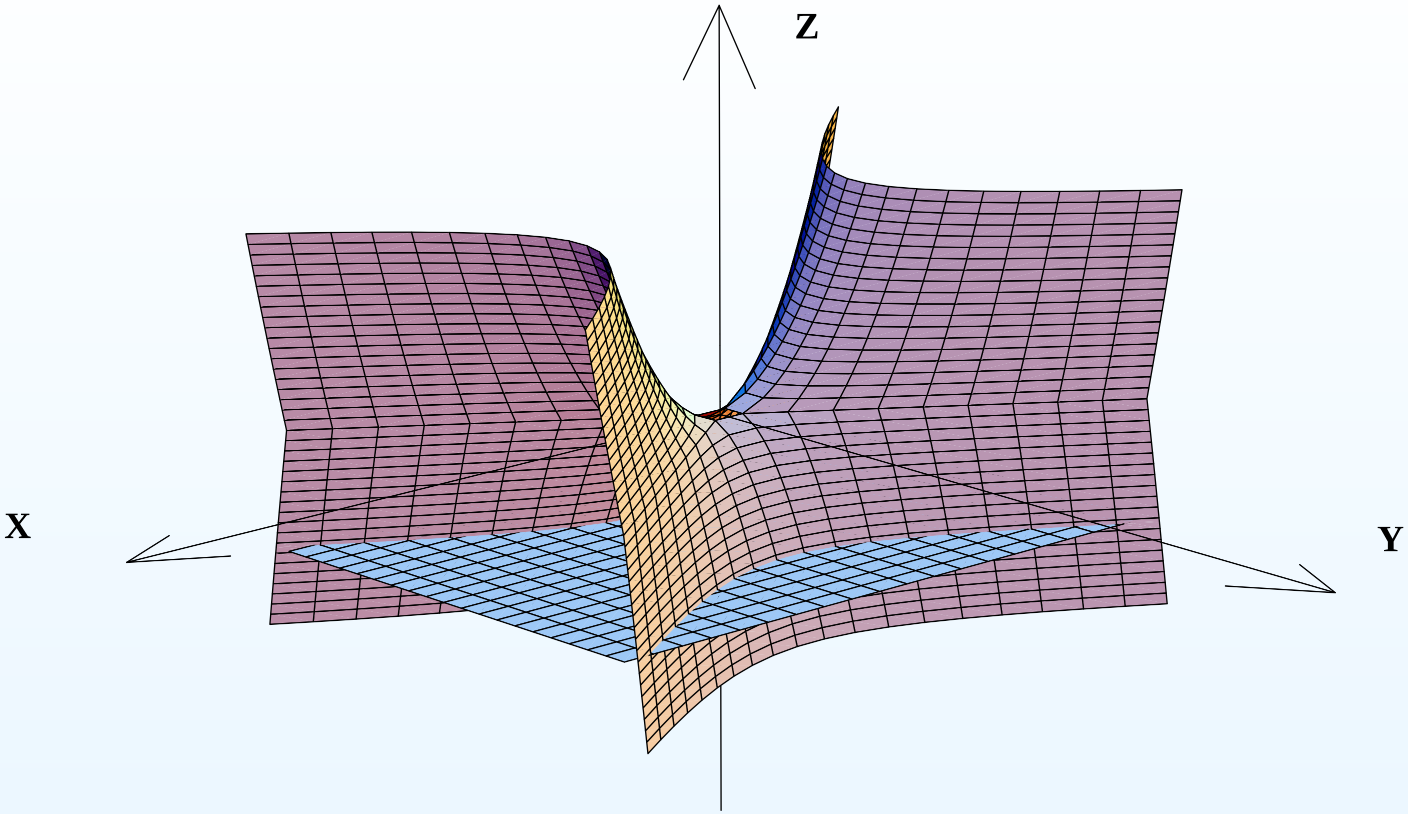
$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z$$



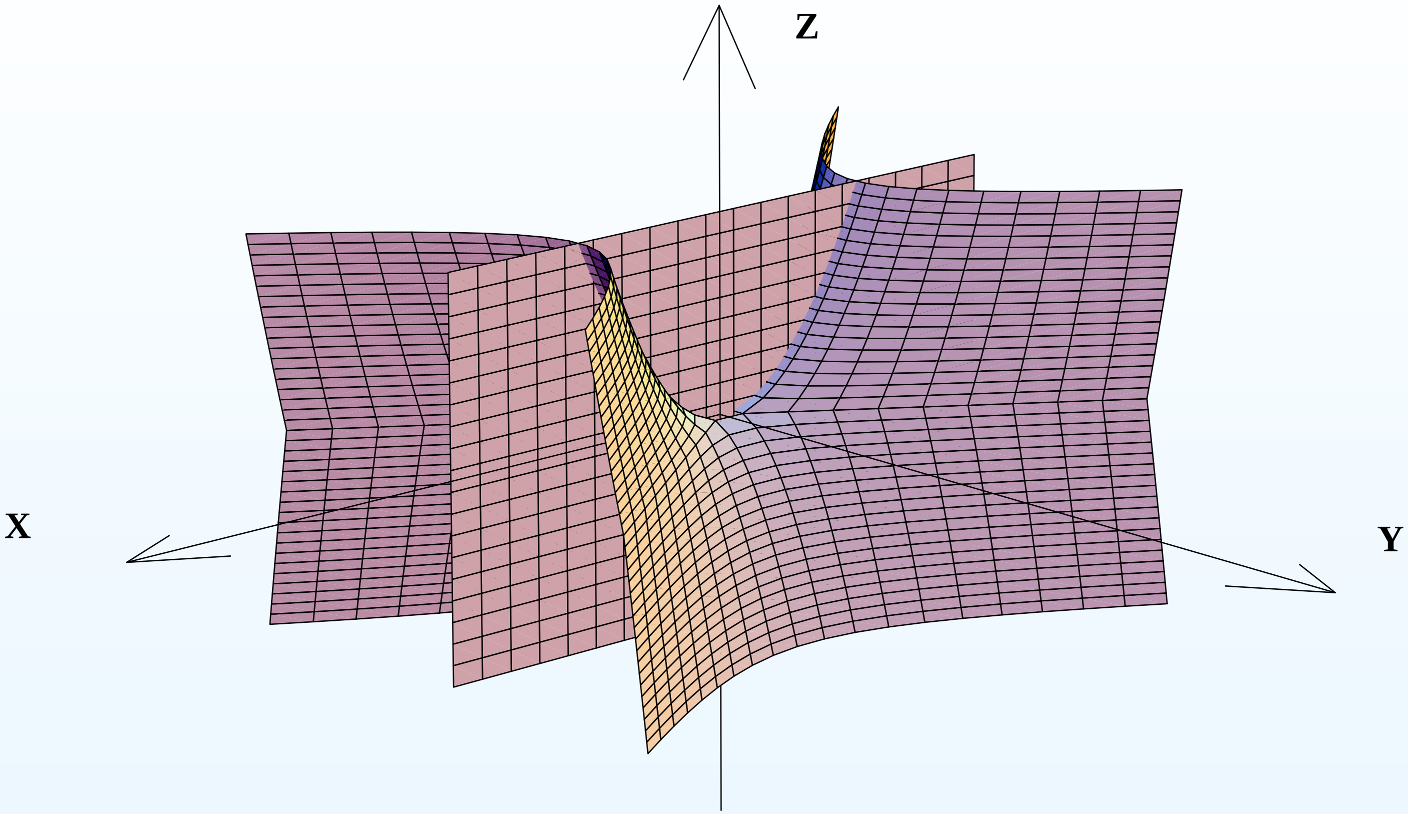
$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \ \wedge \ z = 0$$



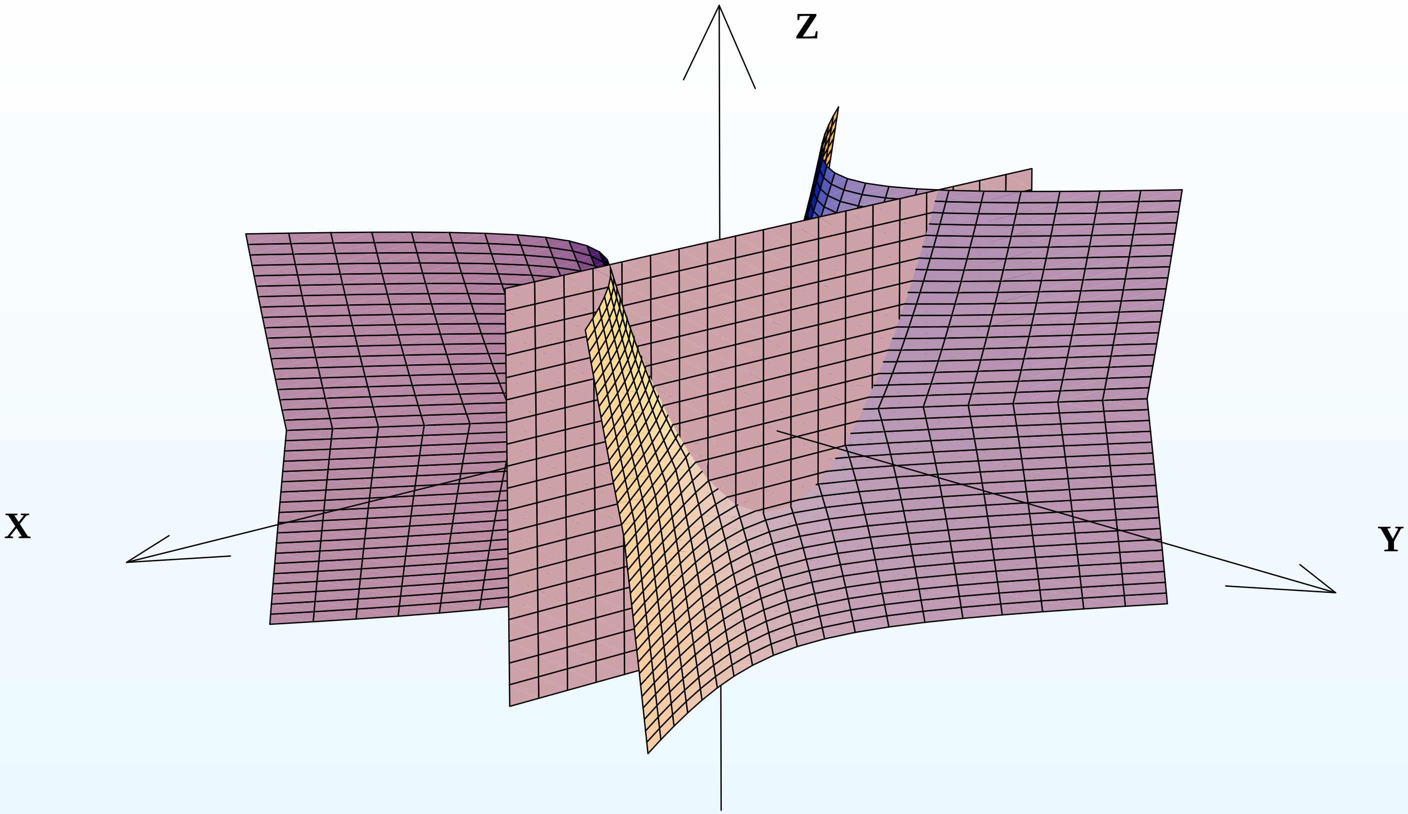
$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \ \wedge \ z = \frac{3}{2}$$



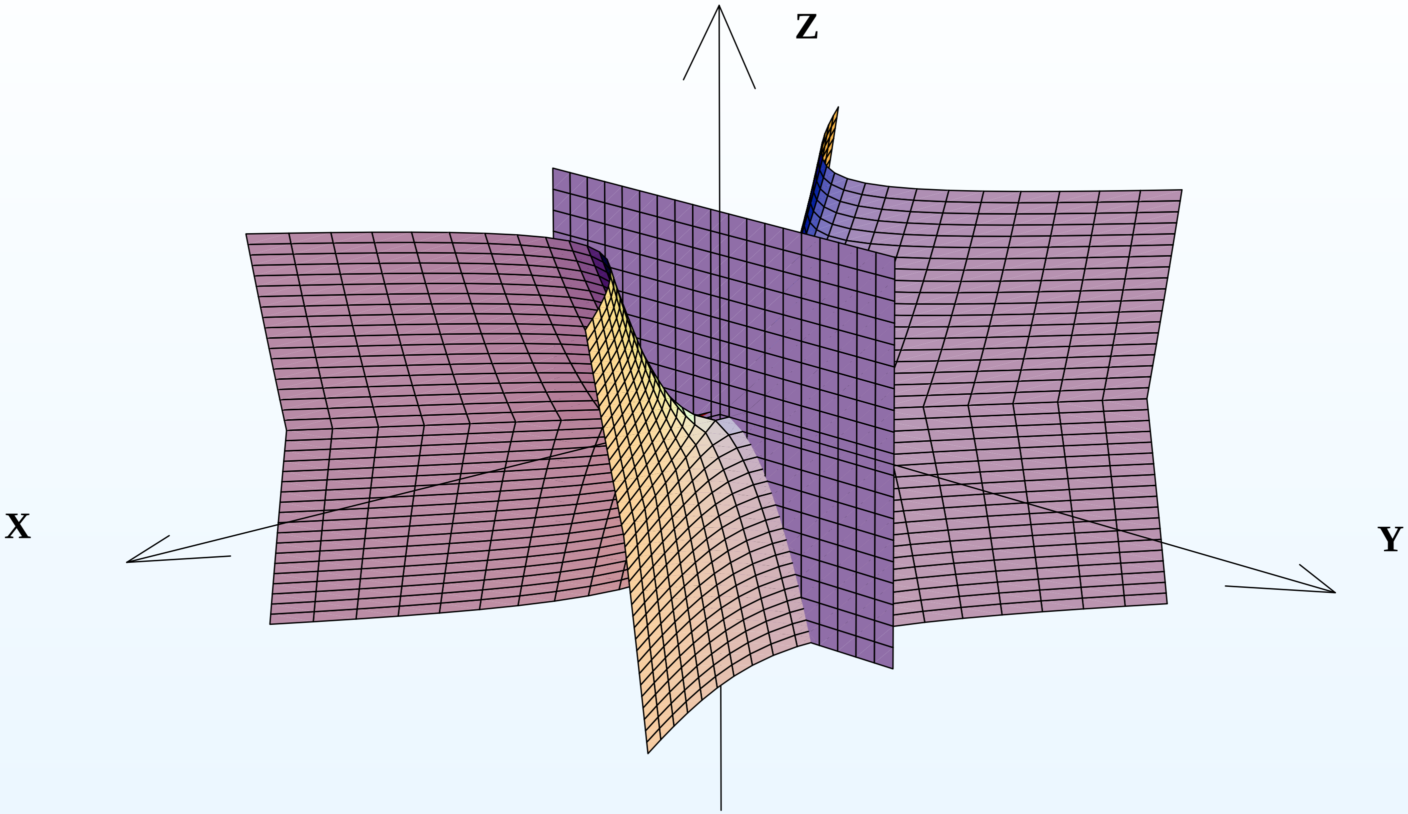
$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \ \wedge \ z = -\frac{3}{2}$$



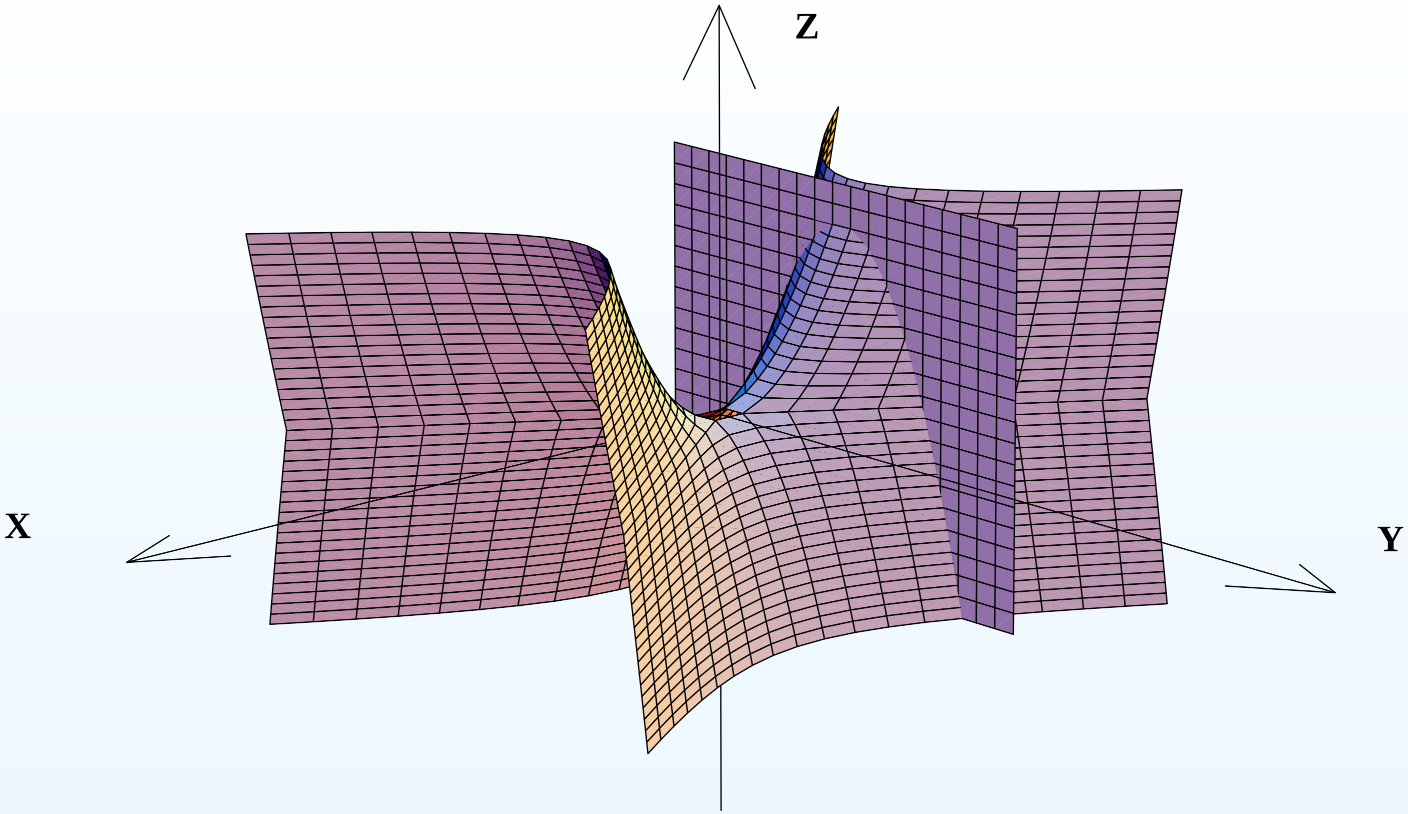
$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \;\wedge\; y = 0$$



$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \ \wedge \ y = 1$$

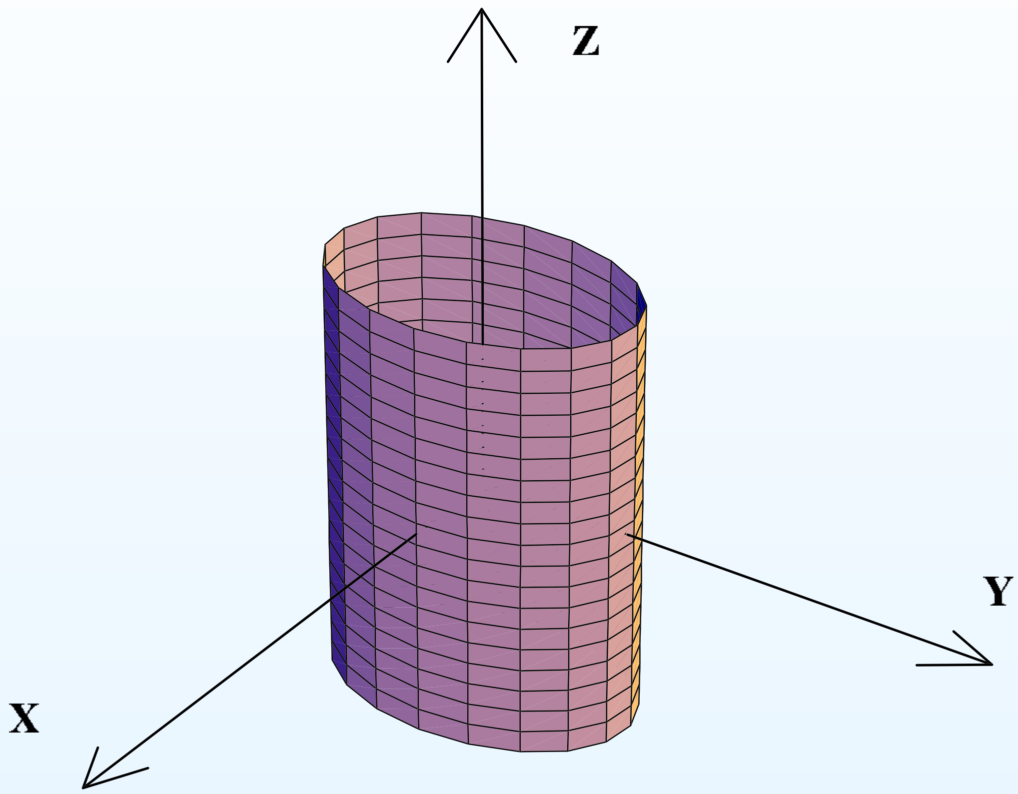


$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \ \wedge \ x = 0$$

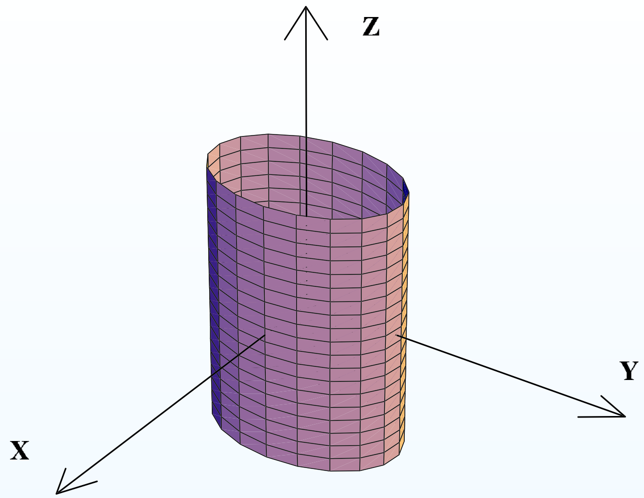


$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 2z \ \wedge \ x = -2$$

Cilindro elíptico



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



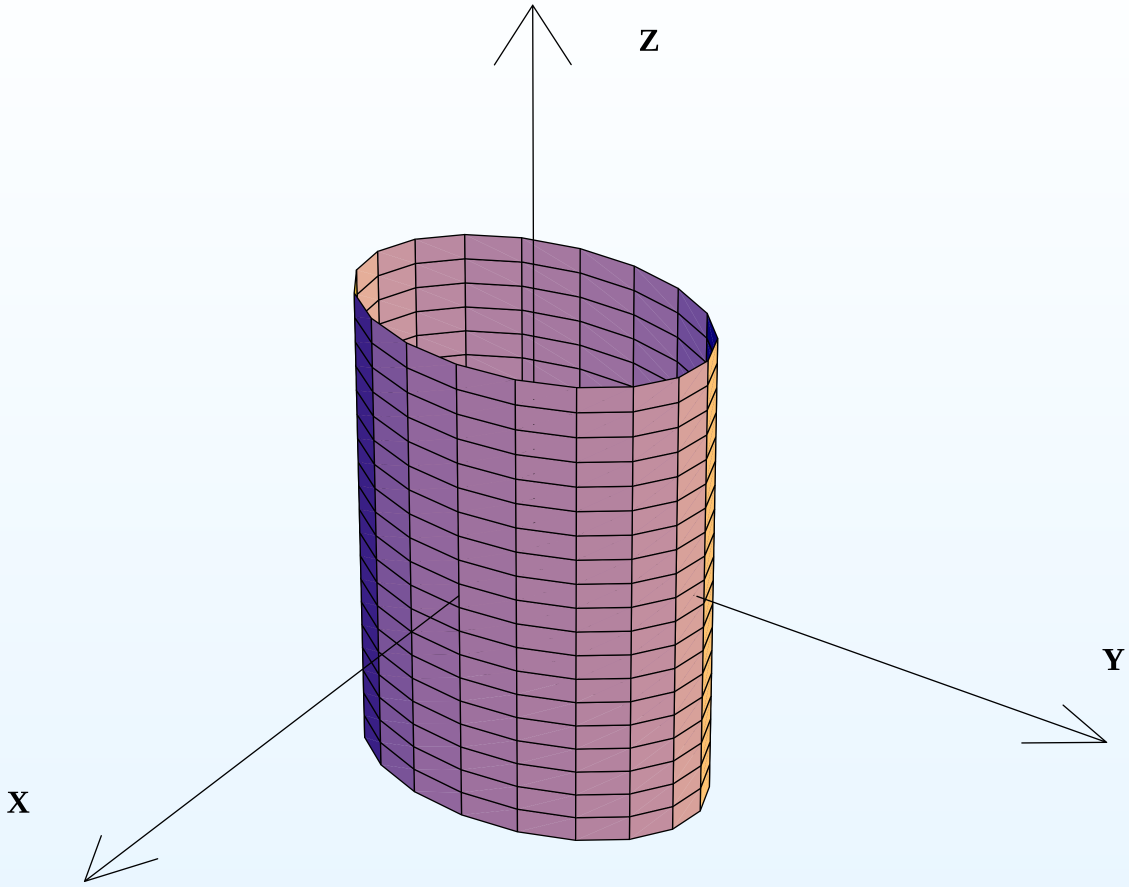
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Características:

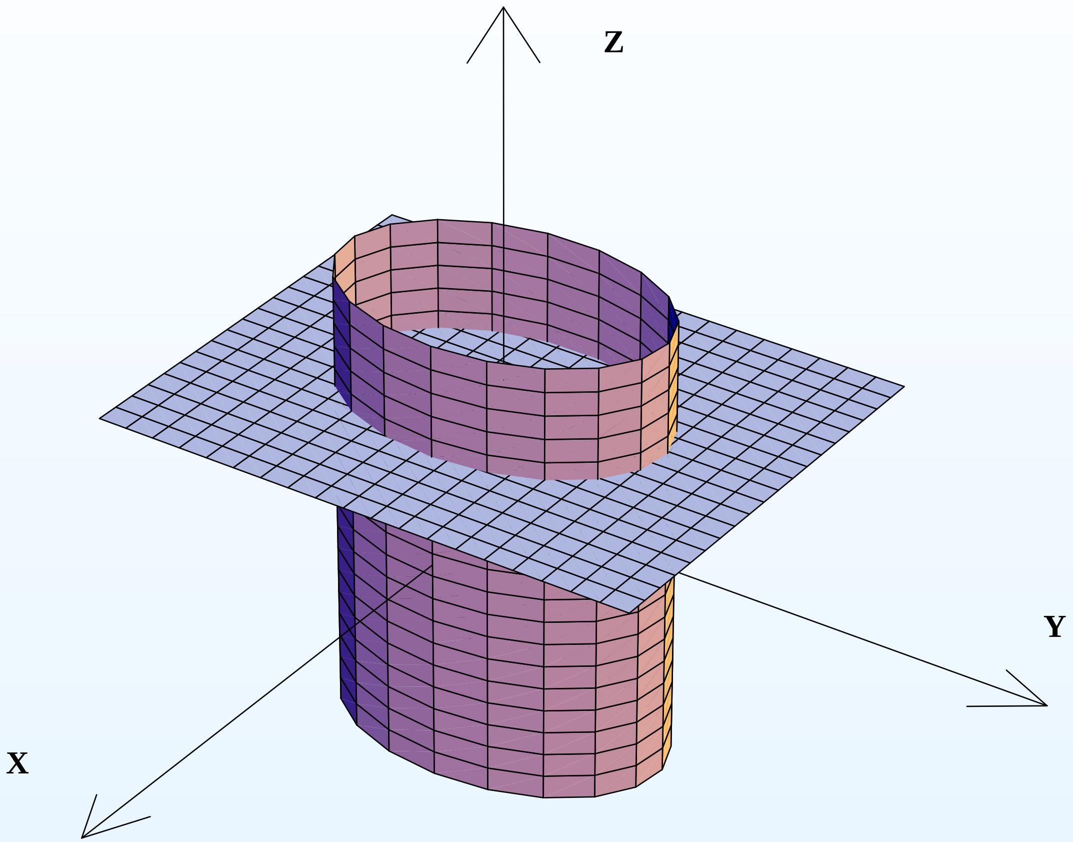
● É simétrica relativamente aos planos coordenados e à origem.

● A sua intersecção com um plano paralelo a XOY é uma elipse.

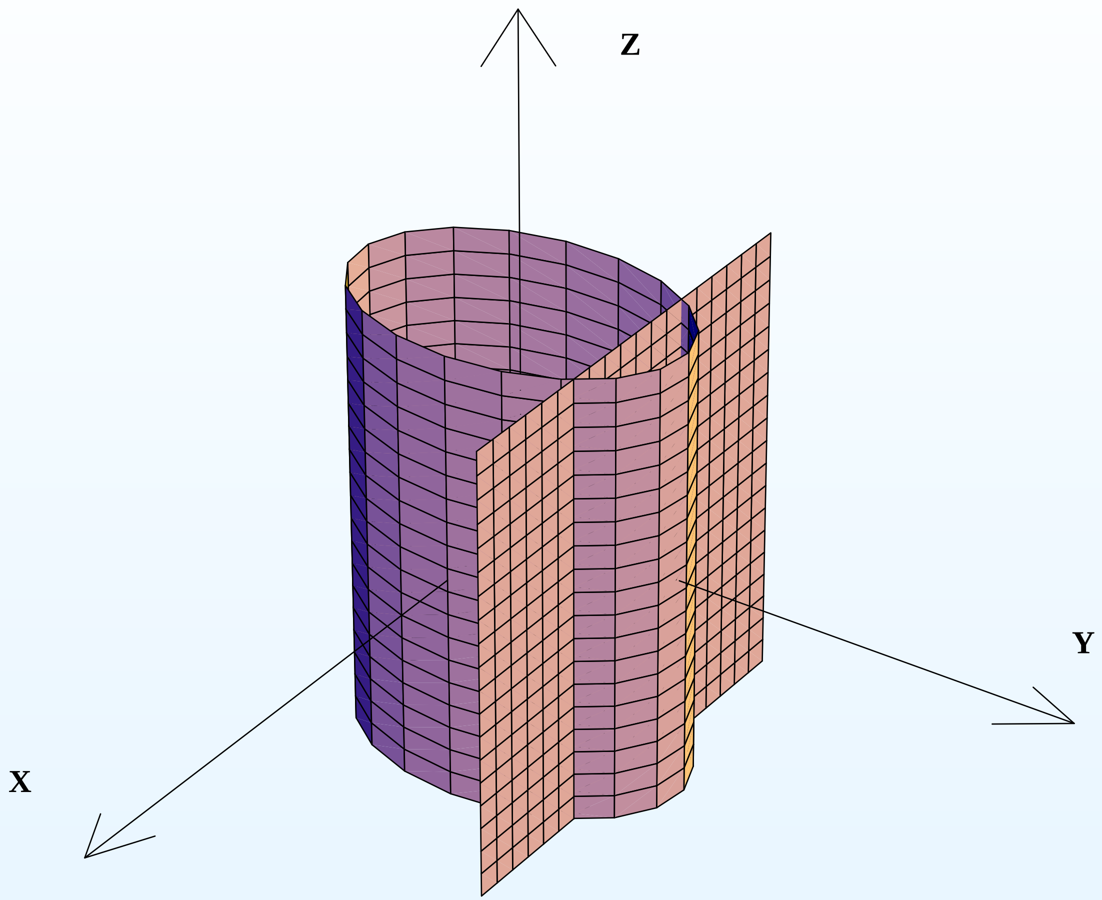
● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ ou paralelo a XOZ é o vazio, uma recta ou duas rectas.



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

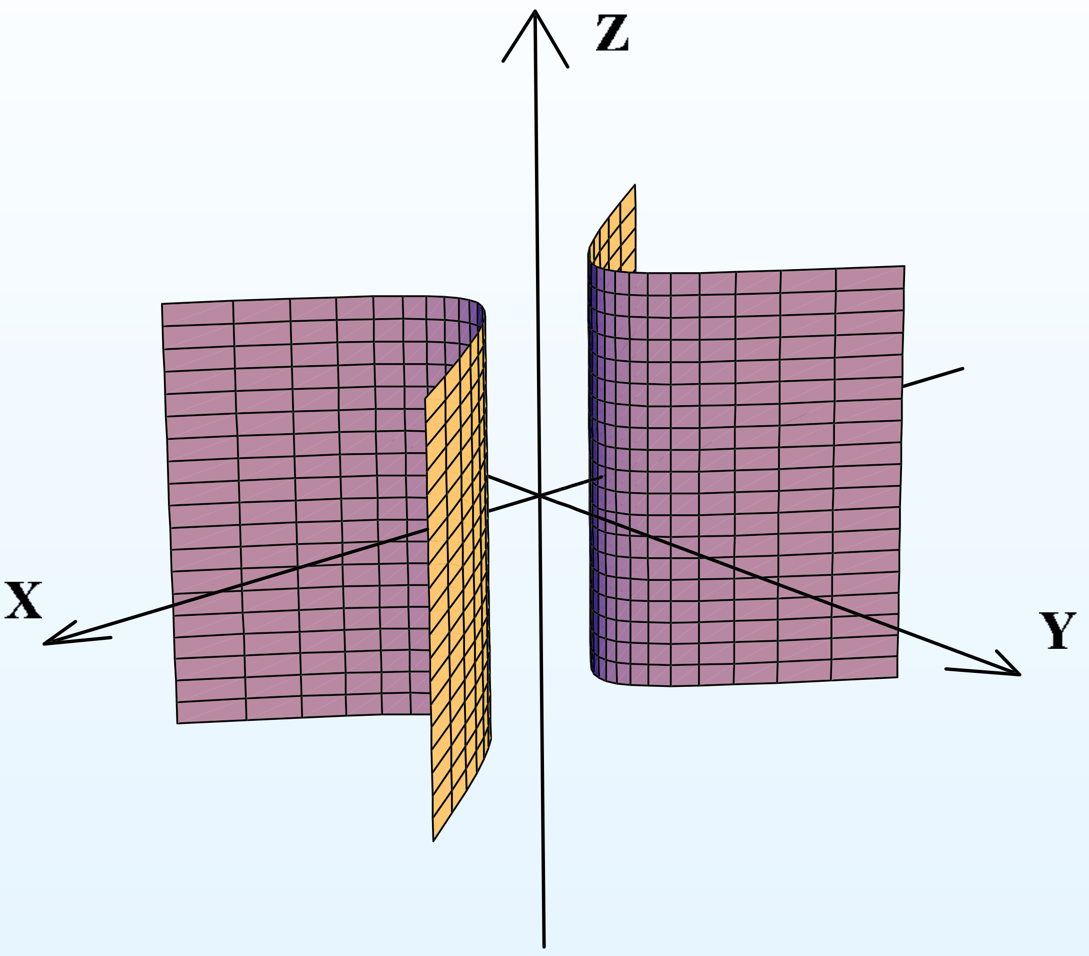


$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \;\wedge\; z=2$$

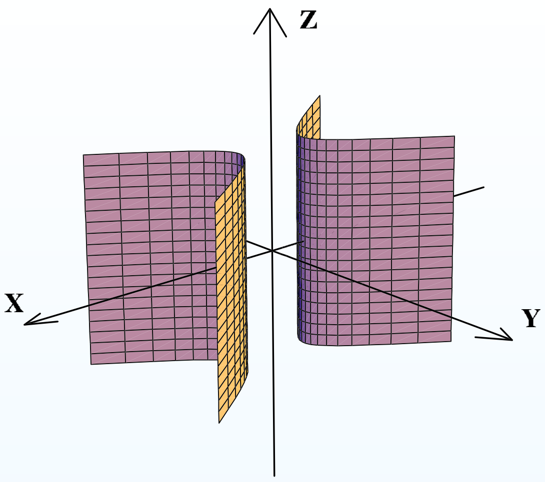


$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \ \wedge \ y = 2$$

Cilindro hiperbólico



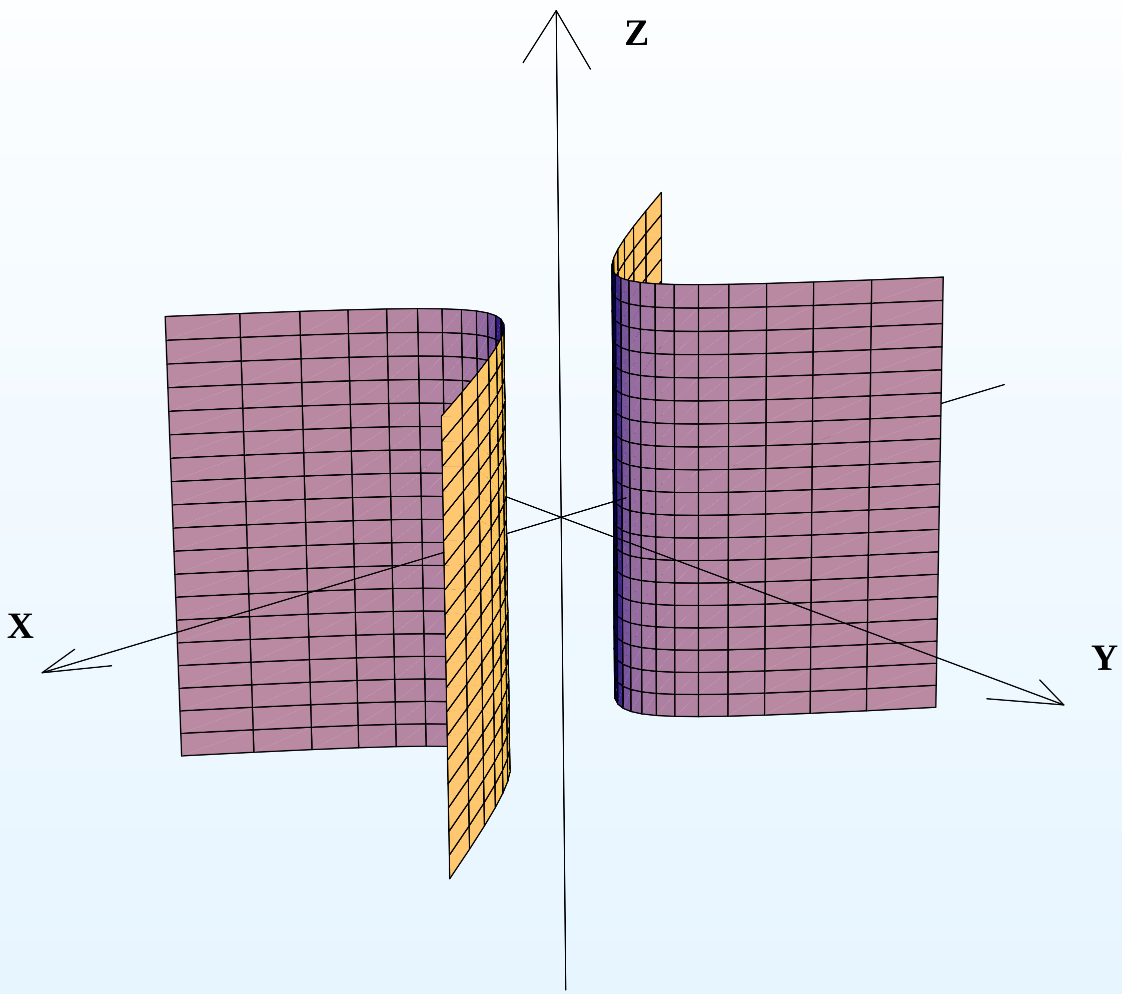
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



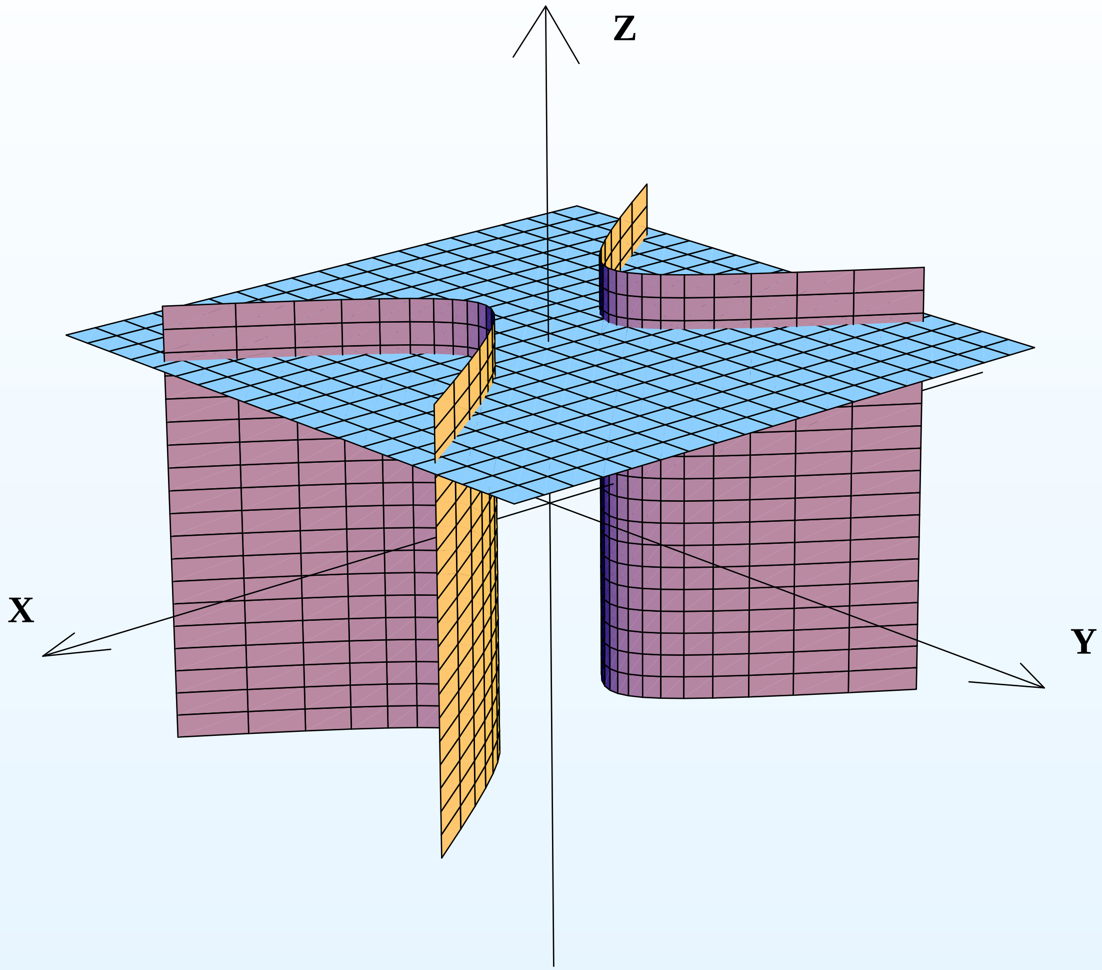
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Características:

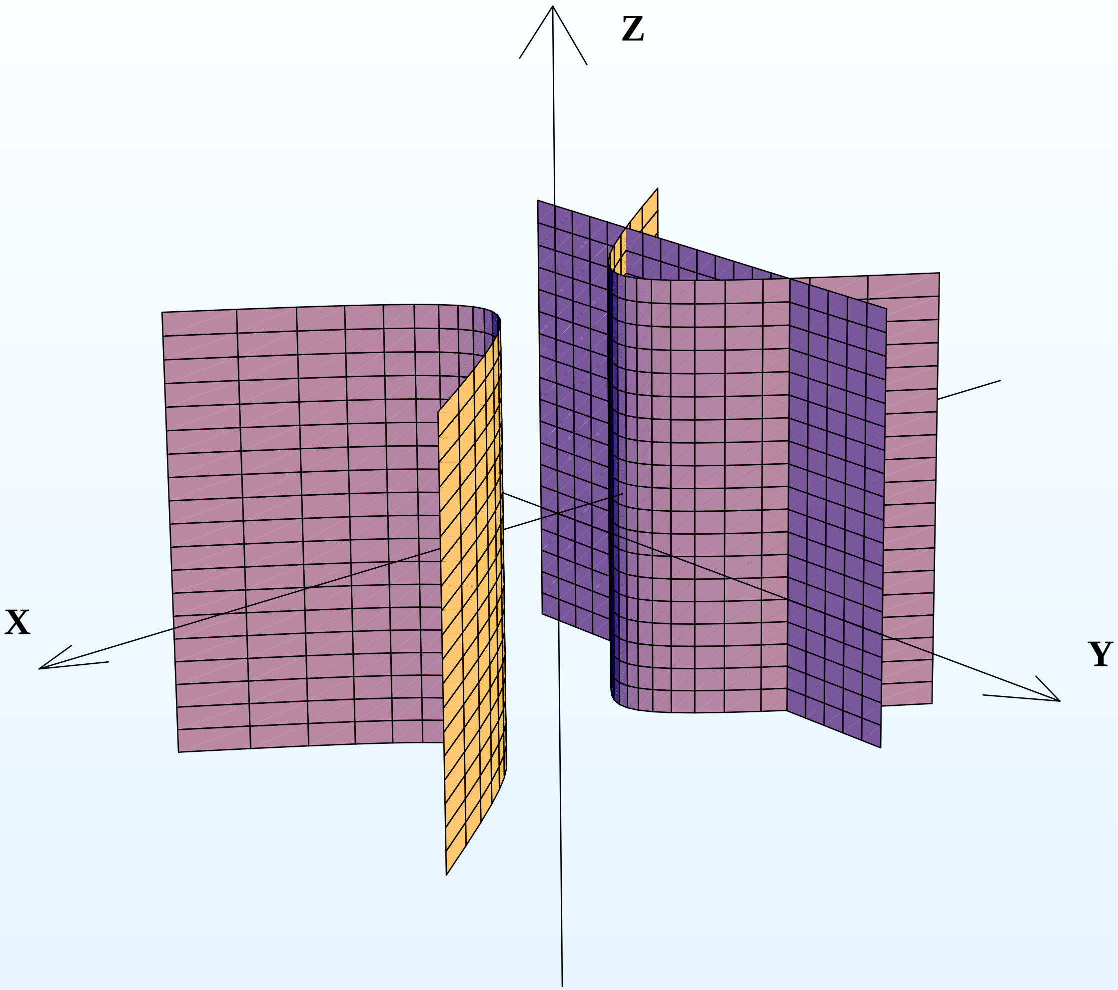
- É simétrica relativamente aos planos coordenados e à origem.
- A sua intersecção com um plano paralelo ao plano XOY é uma hipérbole.
- A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ é o vazio, uma recta ou duas rectas.
- A sua intersecção com um plano paralelo ao plano XOZ é constituída por duas rectas.



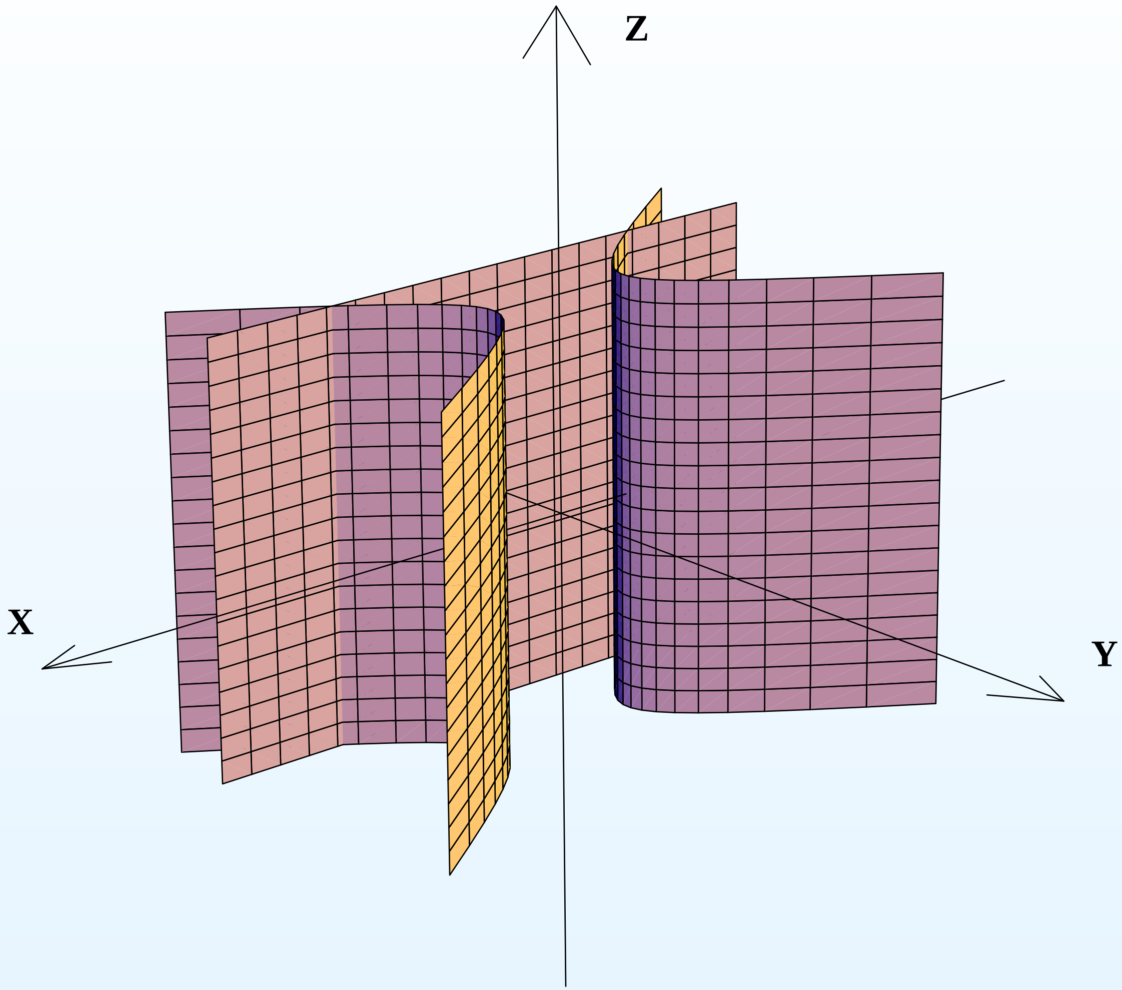
$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - y^2 = 1$$



$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - y^2 = 1 \ \wedge \ z = 3$$

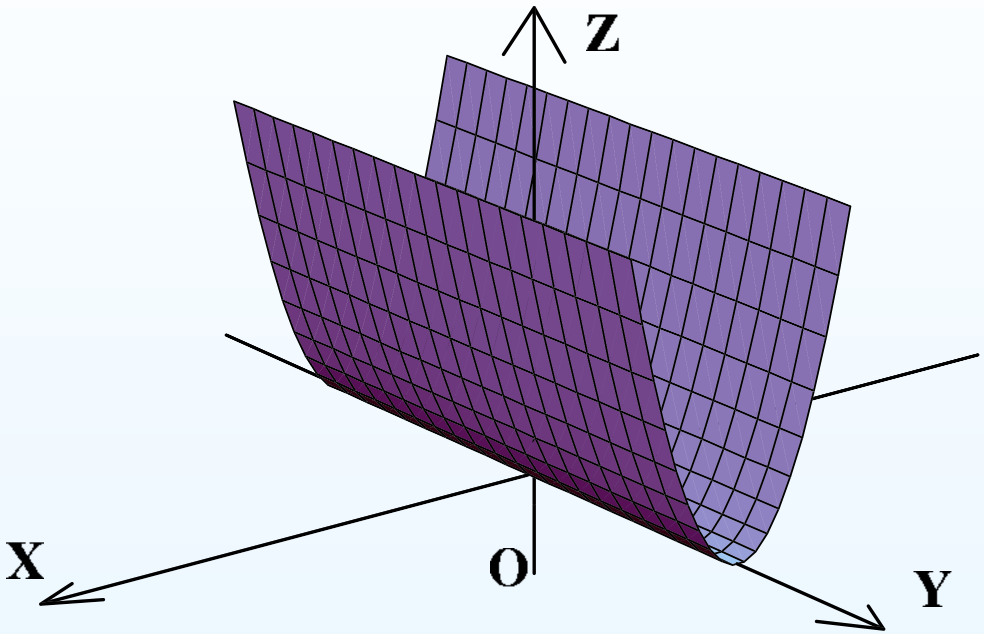


$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - y^2 = 1 \;\wedge\; x = -\frac{7}{2}$$

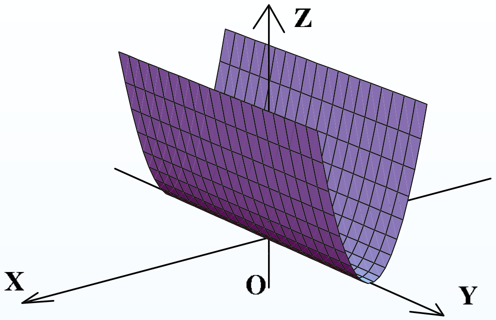


$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - y^2 = 1 \ \wedge \ y = -2$$

Cilindro parabólico



$$z = ax^2\,, \quad \text{com } a > 0$$



$$z = ax^2 \,, \quad \text{com } a > 0$$

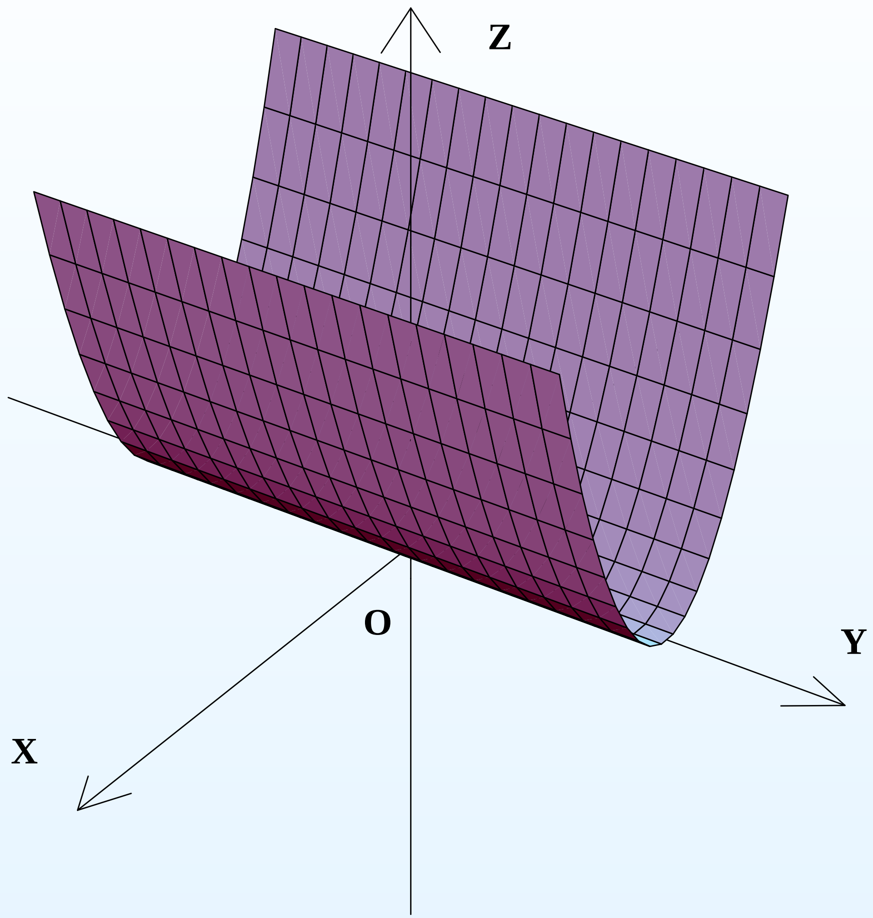
Características:

● É simétrica relativamente aos planos coordenados YOZ e XOZ.

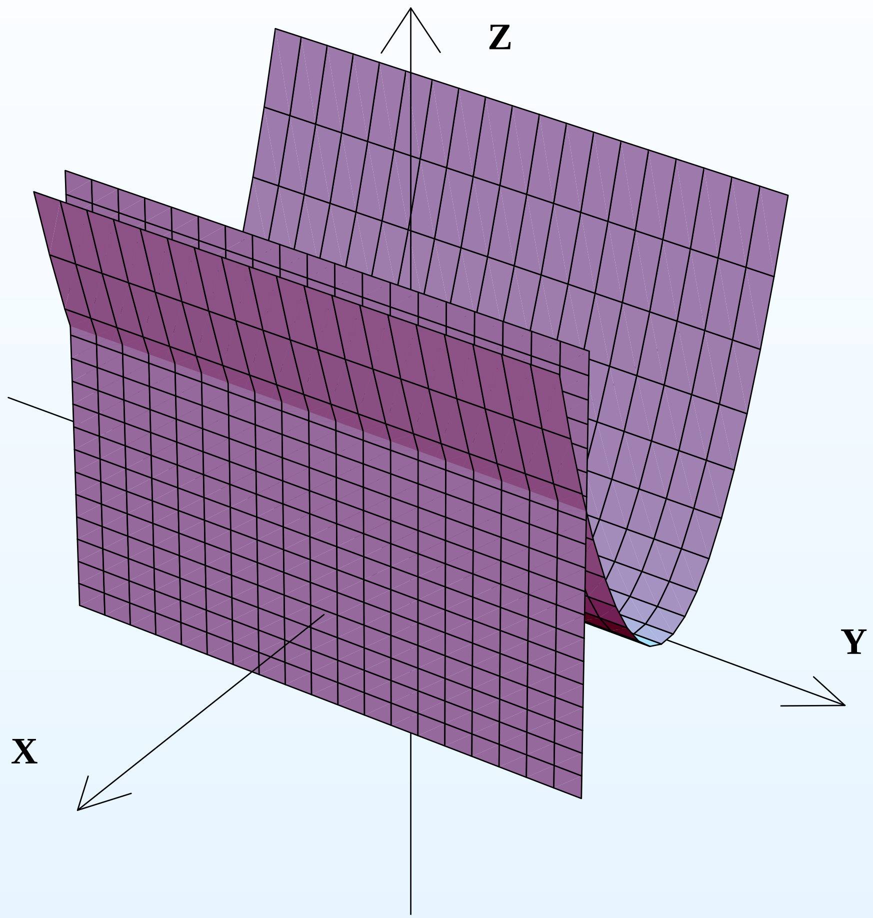
● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano XOY é o vazio, uma recta ou duas rectas.

● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano YOZ é uma recta.

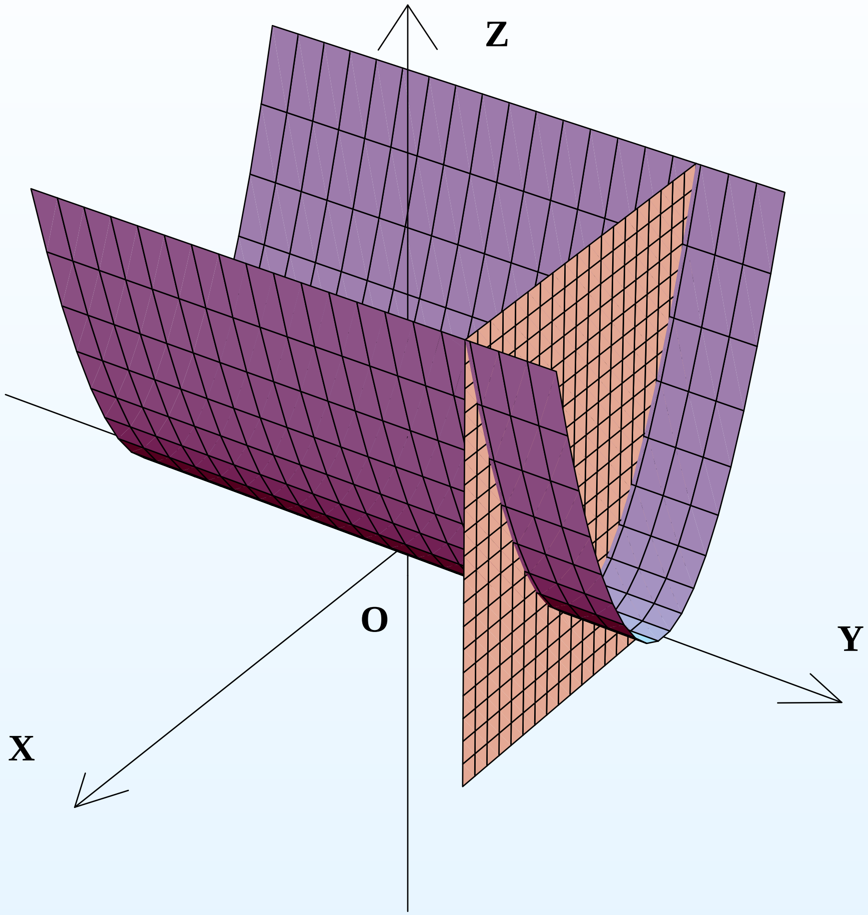
● A sua intersecção com um plano paralelo ao plano XOZ é uma parábola.



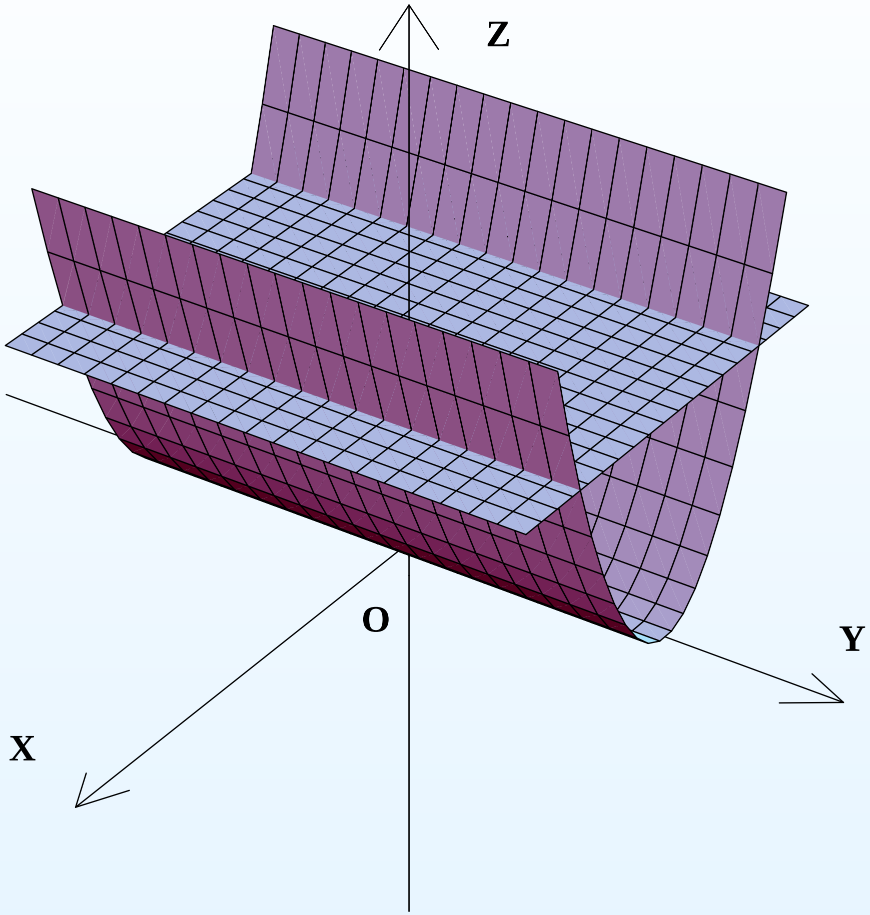
$$z = \frac{1}{2}x^2$$



$$z = \frac{1}{2}x^2 \;\wedge\; x = 3$$



$$z = \frac{1}{2}x^2 \ \wedge \ y = 4$$



$$z = \frac{1}{2}x^2 \ \wedge \ z = 5$$