



Duração: 2 horas

2º Teste

[3.0 valores] Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + 2yz, e^{xy})$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe \mathcal{C}^1 cuja matriz jacobiana em $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$J_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} x & y+2 \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}.$$

Determine $(g \circ f)'(1, 0, 1)$.

[3.5 valores] Exercício 2. Considere a superfície de nível $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$.

- a) Determine as equações da reta normal e do plano tangente a Σ no ponto $(2, 2, 1)$.
- b) Verifique se a reta encontrada na alínea anterior intersesta o eixo OZ.

[3.5 valores] Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

- a) Determine os pontos críticos de f .
- b) Verifique se $(1, 1)$ é maximizante local de f .

[3.5 valores] Exercício 4. Seja $I = \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} x dy dx + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx$.

- a) Represente graficamente o domínio de integração.
- b) Inverta a ordem de integração em I .
- c) Calcule I .

[3.0 valores] Exercício 5. Sejam $f : [-1, 1] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : [-1, 1] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções definidas por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = 16 - x^2 - y^2$. Calcule o volume do sólido limitado pelos gráficos destas duas funções.

[3.5 valores] Exercício 6. Seja $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4 - (x^2 + y^2), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcule, usando coordenadas cilíndricas, $\iiint_R (x + y) d(x, y, z)$.