Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

1º teste de Análise
Engenharia Informática
17.04.2013

Responda à Parte I e à Parte II em folhas de teste separadas.
O teste tem a duração de 2h.
Justifique convenientemente todas as respostas.

Parte I

Exercício 1. Considere as funções f, g e h definidas, respetivamente, por

$$f: \begin{array}{ccl} \mathcal{D}f & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y) = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2-9}} \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccl} \mathcal{D}g & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & g(x,y) = y \ln x \end{array}$$

$$h: \begin{array}{ccl} \mathcal{D}h & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & h(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) \end{array}.$$

a) [2 valores] Determine o domínio de h e esboce-o.

b) [1 valor] Esboce a linha de nível 1 de f.

c) [2 valores] Encontre a reta normal à superfície definida por $z = g(x,y)$ no ponto de coordenadas $(e, 2, 2)$.

d) [2 valores] Calcule, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,e)} h(x,y)$.

Exercício 2. Considere a função f definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) [1,5 valores] Mostre que, para $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
Sugestão: Recorde que, para todo o $a \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{sen} a| \leq |a|$.

b) [1,5 valores] Conclua que f é contínua em $(0,0)$.

c) [2 valores] Seja $b \in \mathbb{R}$. Encontre, pela definição, a derivada direcional de f no ponto $(0,0)$, segundo a direção do vetor $(1,b)$.

Parte II

Exercício 3. [2 valores] Sabendo que $f(x,y) = x \cos y + \cos x$, defina o plano tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(0,0,1)$.

Exercício 4. [1,5 valores] Considere $f(x,y) = xy^2$, $x(t) = 4 + \cos(4\pi t)$ e $y(t) = 1 + \operatorname{sen}(2\pi t)$. Usando a regra da cadeia (regra de derivação da função composta), calcule $\frac{df}{dt}$ quando $t = 1$.

Exercício 5. [2,5 valores] Calcule a derivada da função f, definida por $f(x,y) = (xe^y, xy, \operatorname{sen}(x^2y))$, no ponto de coordenadas $(2,\pi)$.

Exercício 6. [2 valores] Mostre, usando o Teorema de Schwarz, que não pode existir uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 - 4y^3 + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4y - 12xy^2$.