introdução aos sistemas dinâmicos

resolução de exercícios da folha iteração de funções — parte três

1.

Seja $\bar{x}$ um ponto fixo de um sistema dinâmico discreto $f : I \to I$, com f diferenciável em $\bar{x}$. Recordemos que, por definição, $\bar{x}$ é um ponto fixo atractivo de f se existe um intervalo $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \bar{x}, \qquad x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon).$$

Também por definição, dizemos que $\bar{x}$ é um ponto fixo repulsivo de f se existe um intervalo $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$, mas $x \neq \bar{x}$,

$$|f(x) - \bar{x}| > |x - \bar{x}|.$$

1.1

Supondo que $|f'(\bar{x})| < 1$, então existe uma constante $A < 1$ e um intervalo $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, em torno de $\bar{x}$, tal que

$$\left|\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}\right| \leq A$$

para todo $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$, com x diferente de $\bar{x}$. Vamos construir a prova do resultado argumentando por indução.

Pela desigualdade anterior, podemos escrever que

$$|f(x) - \bar{x}| = |f(x) - f(\bar{x})| \leq A\,|x - \bar{x}|.$$

Suponhamos então que

$$|f^n(x) - \bar{x}| \leq A^n\,|x - \bar{x}|, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

e provemos que a desigualdade é ainda verdadeira para a iterada seguinte de x por f. De facto, escrevendo $x_n = f^n(x)$, temos que

$$\left|f^{n+1}(x) - \bar{x}\right| = |f(x_n) - f(\bar{x})| \leq A\,|x_n - \bar{x}|,$$

uma vez que da hipótese, a desigualdade (1), se retira imediatamente que $x_n \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$. Assim sendo, ainda pela hipótese (1), podemos afirmar que

$$\left|f^{n+1}(x) - \bar{x}\right| \leq A\,A^n\,|x - \bar{x}| = A^{n+1}\,|x - \bar{x}|,$$

mostrando assim que a desigualdade $|f^n(x) - \bar{x}| \leq A^n\,|x - \bar{x}|$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, como $A < 1$, temos imediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0,$$

pelo que

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - \bar{x}| = 0,$$

ou seja, $f^n(x)$ tende para o ponto fixo $\bar{x}$, quando n tende para infinito. Mostramos assim que $\bar{x}$ é um ponto fixo atractivo de f.

nota: nesta resolução estamos a admitir que $f(x) \neq \bar{x}$, $f^n(x) \neq \bar{x}$ e $f^{n+1}(x) \neq \bar{x}$; naturalmente que, se alguma dessas igualdades for satisfeita, se conclui que, para esse x em particular, $f^n(x) \to \bar{x}$.

1.2 Supondo que $|f'(\bar{x})| > 1$, então existe uma constante $A > 1$ e um intervalo $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, em torno de $\bar{x}$, tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| \geq A$$

para todo $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$, diferente de $\bar{x}$. Assim sendo, podemos afirmar que

$$|f(x) - f(\bar{x})| \geq A \times |x - \bar{x}| > |x - \bar{x}|,$$

ficando provado que, nessas circunstâncias, $\bar{x}$ é um ponto fixo repulsivo de f.

5.

Seja $\{x_1, x_2\}$ um ciclo de período 2 de um sistema dinâmico discreto $f : I \to I$, tal que f^2 é diferenciável em ambos os pontos do ciclo.

5.1 Assim sendo, temos que

$$\left|(f^2)'(x_1)\right| = \left|f'\big(f(x_1)\big) \times f'(x_1)\right| = |f'(x_2) \times f'(x_1)| = \left|f'(x_2) \times f'\big(f(x_2)\big)\right| = \left|(f^2)'(x_2)\right|.$$

Deste modo, se $|(f^2)'(x_1)| < 1$, então podemos concluir imediatamente que $|(f^2)'(x_2)| < 1$.

5.2 De igual modo, a igualdade anterior permite-nos também concluir que, se $|(f^2)'(x_1)| > 1$, então $|(f^2)'(x_2)| > 1$.

6.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2 - 1$. Comecemos por encontrar os seus pontos fixos. Para tal, vejamos quais são as soluções de $f(\bar{x}) = \bar{x}$:

$$f(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 1 = \bar{x},$$

logo, temos que

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}),$$

que são os pontos fixos de f. Aproveitando o facto de f ser diferenciável em todo o seu domínio, podemos estabelecer a estabilidade de cada um destes pontos fixos através do respectivo valor da derivada de f. Sendo $f'(x) = 2x$, temos

$$|f'\big((1 - \sqrt{5})/2\big)| = |1 - \sqrt{5}| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (1 - \sqrt{5})/2 \text{ é um ponto fixo repulsivo de } f$$

$$|f'\big((1 + \sqrt{5})/2\big)| = |1 + \sqrt{5}| > 1 \quad \Longrightarrow \quad (1 + \sqrt{5})/2 \text{ é um ponto fixo repulsivo de } f$$

Relativamente aos pontos periódicos de período 2 de f, temos que procurar as soluções de $f^2(\bar{x}) = \bar{x}$:

$$f^2(\bar{x}) = f(\bar{x}^2 - 1) = (\bar{x}^2 - 1)^2 - 1 = \bar{x},$$

ou seja, as soluções de

$$\bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 - \bar{x} = \bar{x}(\bar{x}^3 - 2\bar{x} - 1) = 0.$$

Ora, uma vez que a solução trivial, $\bar{x} = 0$, não é um ponto fixo de f, podemos concluir que se trata de um ponto periódico, de período 2, de f. Assim sendo, temos imediatamente que a quarta e última solução da equação acima, um segundo ponto periódico, de período 2, de f, é dada por $\bar{x} = f(0) = -1$. Quanto à estabilidade destes pontos periódicos, uma vez que eles formam um 2-ciclo periódico de f, vai poder ser encontrada calculando

$$|(f^2)'(0)| = |(f^2)'(-1)| = |f'(0) \times f'(-1)| = 0.$$

Deste modo, podemos concluir que o 2-ciclo $\{0, -1\}$ de f é atractivo.

9.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $\mathcal{S} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

9.1

Pela expressão de $\mathcal{S}$, podemos afirmar que $\mathcal{S}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é diferenciável em todos os pontos do intervalo $[0,1]$ excepto em pontos cuja imagem por $\mathcal{S}^n$ é igual a 0, ou seja, excepto em alguns pontos eventualmente fixos de $\mathcal{S}$. Deste modo, podemos concluir que $\mathcal{S}$ é diferenciável em todos os seus pontos fixos e todos os seus pontos periódicos.

9.2

Seja $\bar{x}$ um ponto fixo ou periódico, de período n, de $\mathcal{S}$. Pela alínea anterior, sabemos que $\mathcal{S}$ é diferenciável em $\bar{x}$, pelo que a estabilidade de $\bar{x}$ pode ser determinada através do valor da derivada de $\mathcal{S}^n$, calculada nesse ponto. Mas, uma vez que, nos pontos onde existe derivada, se tem $\mathcal{S}'(x) = 2$, podemos concluir que

$$|(\mathcal{S}^n)'(\bar{x})| = |\mathcal{S}'(\bar{x}) \times \mathcal{S}'\big(\mathcal{S}(\bar{x})\big) \times \cdots \times \mathcal{S}'\big(\mathcal{S}^{n-1}(\bar{x})\big)| = 2^n,$$

ficando assim estabelecido que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{S}$ são repulsivos.

10.

Consideremos o sistema dinâmico discreto $\mathcal{T} : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2 - 2x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

10.1

Pela expressão de $\mathcal{T}$, podemos afirmar que $\mathcal{T}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é diferenciável em todos os pontos do intervalo $[0,1]$, excepto em pontos cuja imagem por $\mathcal{T}^n$ é igual a 1, ou seja, excepto em alguns pontos eventualmente fixos de $\mathcal{T}$. Deste modo, podemos concluir que $\mathcal{T}$ é diferenciável em todos os seus pontos fixos e todos os seus pontos periódicos.

10.2

Seja $\bar{x}$ um ponto fixo ou periódico, de período n, de $\mathcal{T}$. Pela alínea anterior, sabemos que $\mathcal{T}$ é diferenciável em $\bar{x}$, pelo que a estabilidade de $\bar{x}$ pode ser determinada através do valor da derivada de $\mathcal{T}^n$, calculada nesse ponto. Mas, uma vez que, nos pontos onde existe derivada, se tem $|\mathcal{T}'(x)| = 2$, podemos concluir que

$$|(\mathcal{T}^n)'(\bar{x})| = |\mathcal{T}'(\bar{x}) \times \mathcal{T}'\big(\mathcal{T}(\bar{x})\big) \times \cdots \times \mathcal{T}'\big(\mathcal{T}^{n-1}(\bar{x})\big)| = 2^n,$$

ficando assim estabelecido que todos os pontos fixos e pontos periódicos de $\mathcal{T}$ são repulsivos.