LEI, 2012/13

Resumos

ANÁLISE

Elfrida Ralha

9 de Abril de 2013

DMA-U. Minho

As presentes notas resultam de vários anos de lecionação destes conteúdos a muitos alunos e onde muitos colegas, que comigo partilharam esta missão, também tiveram um papel fundamental. Em particular, na organização das representações gráficas aqui incluídas pude, mais uma vez, contar com a colaboração da OLGA VAZ que, mesmo arredada destas lides letivas, não hesitou em responder afirmativamente a mais um desafio que, nesta instância, lhe lancei.

Na verdade estes apontamentos são notas muito resumidas da matéria apresentada nos turnos TP3 e TP4 das aulas de ANÁLISE, para a Licenciatura em Engenharia Informática, na Universidade do Minho, no ano letivo de 2012/2013.

Enquanto resumos escritos não pretendem, de forma alguma, substituir o ensino de viva voz que procurei transmitir aos alunos, nas próprias aulas teórico-práticas. Assim, recordo que os alunos deverão prestar especial atenção à aprendizagem dos resultados, terminologias, notações e exemplos explorados no decurso das respetivas aulas, bem como deverão resolver os exercícios mais emblemáticos das folhas de exercícios.

Legenda: Usarei os símbolos ★ e ☞ para apresentar exemplos resolvidos. ♣ e ✎ estão reservados para chamadas de atenção complementares de exercícios.

1 Algumas Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

1.1 Produto Interno. Norma e distância euclidianas.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{R}^n$ define-se como sendo o conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Aos elementos de $\mathbb{R}^n$ podemos chamar **vetores** – mas também nos reportaremos a eles como "pontos", como veremos mais adiante – e recordemos que $\mathbb{R}^n$ munido da adição (de vetores) e da multiplicação escalar (de um escalar (real) por um vetor) é um **espaço vetorial** de dimensão n.

Definição 1. *O* **produto interno** *de dois vetores,* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*, de* $\mathbb{R}^n$ *é um número real definido por*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

com $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$*.*

Pode-se denotar o produto interno dos vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$.

Definição 2. *A* **norma euclidiana** *de um vetor,* $\boldsymbol{x}$*, de* $\mathbb{R}^n$ *é o número real não negativo definido por*

$$\sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}.$$

Denota-se esta norma por $||\boldsymbol{x}||$. Atente-se que, nestas condições,

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}.$$

O espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ com este produto interno e esta norma é o **espaço euclidiano** de dimensão n.

Note-se ainda que, para $n = 1$, a norma euclidiana de um vetor (número real, neste caso) não é mais do que o módulo do número real em causa.

Definição 3. *A* **distância euclidiana** *entre dois vetores,* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$*, de* $\mathbb{R}^n$ *é o número real não negativo definido por*

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||.$$

Denota-se também esta distância por $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Atente-se que, nestas condições,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

1.2 Bolas abertas e fechadas. Pontos interiores, ...

Definição 4. *A* **bola aberta** *de centro* $\boldsymbol{a}$*, com* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*, e raio* δ*, com* $\delta \in \mathbb{R}^+$*, é o conjunto*

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \delta\}.$$

Pode denotar-se esta bola por $\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta)$.

Definição 5. *A* **bola fechada** *de centro* $\boldsymbol{a}$*, com* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$*, e raio* δ*, com* $\delta \in \mathbb{R}^+$*, é o conjunto*

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \leq \delta\}.$$

Pode denotar-se esta bola por $\overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \delta)$.

Atente-se que, nestas condições,

$\boldsymbol{a} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta)$, $\boldsymbol{a} \in \overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \delta)$ e $\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \subset \overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \delta)$.

★

✎ Com a distância euclidiana, em

- $\mathbb{R}$ temos intervalos de números reais: $\mathcal{B}(\boldsymbol{a},\delta) =]\boldsymbol{a}-\delta, \boldsymbol{a}+\delta[$ e $\overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a},\delta) = [\boldsymbol{a}-\delta, \boldsymbol{a}+\delta]$.

- $\mathbb{R}^2$ temos as seguintes representações geométricas

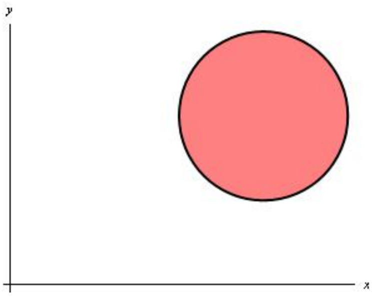

Figura 1.1: $\overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a},\delta)$

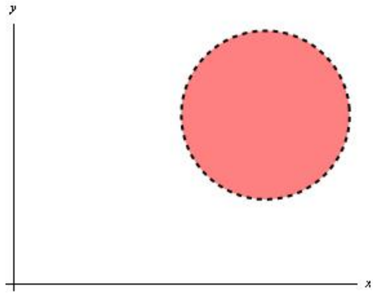

Figura 1.2: $\mathcal{B}(\boldsymbol{a},\delta)$

- $\mathbb{R}^3$ temos as seguintes representações geométricas

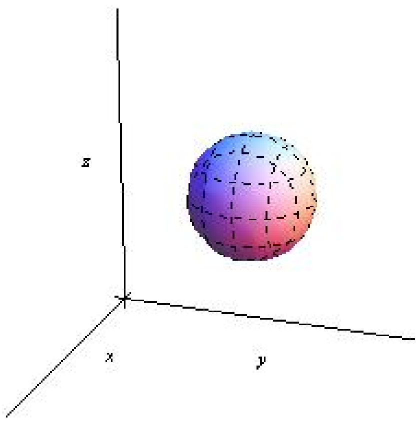

Figura 1.3: $\mathcal{B}(\boldsymbol{a},\delta)$

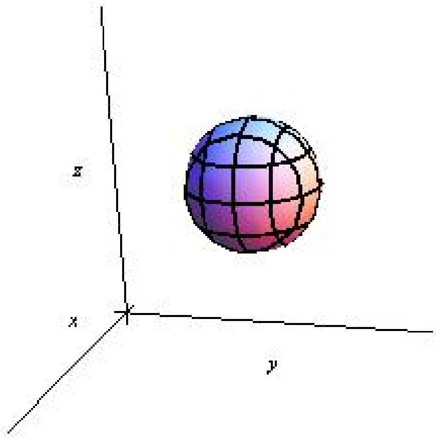

Figura 1.4: $\overline{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a},\delta)$

Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}$

Definição 6. $\boldsymbol{a}$ *diz-se um* **ponto interior** *de* $\mathcal{S}$ *quando*

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \subseteq \mathcal{S}.$$

Quando $\boldsymbol{a}$ é um ponto interior de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ também se diz uma **vizinhança** de $\boldsymbol{a}$.

O conjunto de todos os pontos interiores de $\mathcal{S}$ diz-se **interior** de $\mathcal{S}$ e denota-se por $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$.

Definição 7. $\boldsymbol{a}$ *diz-se um* **ponto fronteiro** *de* $\mathcal{S}$ *quando*

qualquer $\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta)$, *com* $\delta \in \mathbb{R}^+$, *interseta* $\mathcal{S}$ *e o seu complementar.*

Recordemos que o conjunto complementar de $\mathcal{S}$ é $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \notin \mathcal{S}\}$.

O conjunto de todos os pontos fronteiros, de um conjunto $\mathcal{S}$, chama-se **fronteira** de $\mathcal{S}$ e representa-se por $\mathrm{fr}(\mathcal{S})$.

Definição 8. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *diz-se um* **ponto exterior** *de* $\mathcal{S}$ *quando* $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S})}$.

O conjunto de todos os pontos exteriores, de um conjunto $\mathcal{S}$, chama-se **exterior** de $\mathcal{S}$ e representa-se por $\mathrm{ext}(\mathcal{S})$.

Definição 9. $\boldsymbol{a}$ *diz-se um* **ponto de acumulação** *de* $\mathcal{S}$ *quando*

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, (\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset.$$

Note-se que um ponto de acumulação não pertence necessariamente ao conjunto $\mathcal{S}$ e recordemos a papel fundamental que este tipo de pontos desempenha em conceitos estruturantes como o de “limite"de uma função em um ponto.

O conjunto de todos os pontos de acumulação, dum conjunto $\mathcal{S}$, chama-se **conjunto derivado** de $\mathcal{S}$ e representa-se por $\mathcal{S}'$.

Definição 10. $\boldsymbol{a}$ *diz-se um* **ponto isolado** *de* $\mathcal{S}$ *quando pertencer a* $\mathcal{S}$ *e não pertencer a* $\mathcal{S}'$.

Definição 11. *$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um* **ponto aderente** *a $\mathcal{S}$ quando*

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset.$$

O conjunto de todos os pontos aderentes, de um conjunto $\mathcal{S}$, chama-se **fecho ou aderência** de $\mathcal{S}$ e representa-se por $\overline{\mathcal{S}}$.

Facilmente se conclui que $\mathcal{S}' \subseteq \overline{\mathcal{S}}$.

Definição 12. *Um conjunto diz-se* **aberto** *quando coincide com o seu interior.*

Definição 13. *Um conjunto diz-se* **fechado** *quando contém a sua fronteira.*

Definição 14. *Um conjunto diz-se* **limitado** *quando existe uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ que o contém.*

★

☞ Seja $\mathcal{A} = [1, 3[\cup \{4\}$.
Então $\mathring{\mathcal{A}} =]1, 3[$; $\text{fr}(\mathcal{A}) = \{1, 3, 4\}$;
$\mathcal{A}' = [1, 3]$; $\text{ext}(\mathcal{A}) =]-\infty, 1[\cup]3, 4[\cup]4, +\infty[$;
$\overline{\mathcal{A}} = [1, 3] \cup \{4\}$.

☞ Seja $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.
Então $\mathring{\mathcal{B}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$;
$\text{fr}(\mathcal{B}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$; $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$;
$\text{ext}(\mathcal{B}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$; $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.

♣

✎ Folha 1

- **1.1** Atente-se nas seguintes representações geométricas e complete-as, quando for caso disso, por forma a traduzirem geometricamente os respectivos conjuntos:

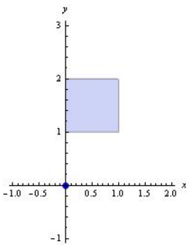

Figura 1.5: A

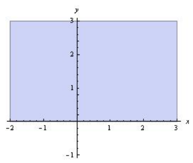

Figura 1.6: B

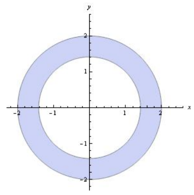

Figura 1.7: C

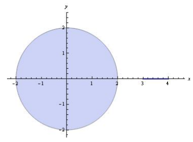

Figura 1.8: D

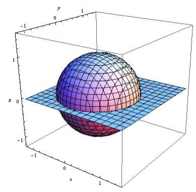

Figura 1.9: E

2 Funções reais de várias variáveis reais

2.1 Noções elementares.

Sejam n e m números naturais e $\emptyset \neq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição 15. *Uma* **função real de** n **variáveis reais** *definida em* $\mathcal{D}$ *é uma correspondência* f *que, a cada* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$*, associa um e um só elemento* $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$*.*

Observe-se que $f(\boldsymbol{x})$, enquanto m-uplo (elemento de $\mathbb{R}^m$), será da forma $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ com $f_j = f_j(\boldsymbol{x})$, para cada $j \in \{1, 2 \ldots, m\}$.

Abreviadamente podemos escrever:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \rightsquigarrow & (f_1, f_2, \ldots, f_m) \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \boldsymbol{x} & \rightsquigarrow & f(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

Ora o caso de $n = m = 1$ foi sobejamente estudado quer no ensino secundário quer na UC do 1º semestre e é, como quase todos os conteúdos em Matemática, estrutura fundamental de onde partiremos e onde regressaremos reiteradamente para tratar os restantes casos.

Importa ainda esclarecer que a f, nas condições da definição anterior

- e com $n \geq 2$ e $m = 1$, também chamamos **campo escalar**.
- e com $n \geq 2$ e $m \geq 2$ chamamos **campo vetorial**.

Definição 16. *$\mathcal{D}$ diz-se o* **domínio** *(ou conjunto de partida) de f.*

$\mathbb{R}^m$ chama-se o **conjunto de chegada** *de f.*

O **contradomínio** *de f é o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^m$*

$$\{(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

Uma função f define-se à custa do seu domínio, do seu conjunto de chegada e de uma “lei"de formação (expressão analítica do tipo $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$) mas, por convenção e quando não for dito algo em contrário, assume-se sempre que o domínio da função f é o maior subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que, para cada $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, existe $f(\boldsymbol{x})$.

Definição 17. *O* **gráfico** *de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$*

$$\textit{graf}(f) = \{(\boldsymbol{x}, f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}\}$$

Os campos escalares de $n = 2$ e $n = 3$ serão objecto de um estudo mais detalhado, no âmbito da presente UC; servirão como uma espécie de montra explicativa do caso geral porquanto nesses casos (e muito especialmente para $n = 2$) será possível fazermos uso de uma abordagem geométrica, para além da aritmética e/ou da analítica.

Observe-se que num campo escalar (recorde-se que $m = 1$), para $n = 2$, as representações gráficas estão num espaço tridimensional (já que $n + m = 2 + 1$). Assim usaremos frequentemente $z = f(x, y)$ em vez de notações indexadas do tipo $y = f(x_1, x_2)$. Analogamente para $n = 3$, usaremos normalmente $w = f(x, y, z)$.

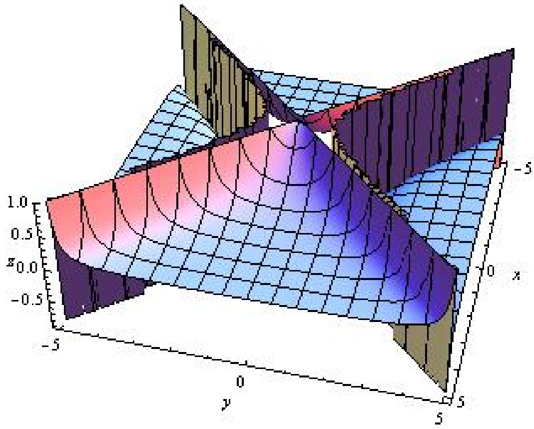

Figura 2.1: Representação Gráfica, em $[-2,2] \times [-2.2]$, do campo escalar definido por $z = \frac{1}{1+x^2-y^2}$

Podemos usar um programa de computador, por exemplo, o "Mathematica®"tal como fizemos nas figuras destes apontamentos e, em particular, na figura seguinte. Todavia é frequentemente útil recorrermos aos meios analíticos de determinação ou verificação das soluções.

Por um lado, nem sempre os programas dos computadores nos dão uma imagem adequada e, por outro, somos nós, em última instância, quem tem que fazer escolhas conscientes das "janelas"de representação geométrica bem como aferir da veracidade ou falsidade da imagem que uma máquina nos dita. Se não o fizermos e/ou não o soubermos fazer, corremos sérios riscos de estarmos a incorrer em informações erróneas e/ou, no mínimo, deturpadas!

☞ Tente perceber o que o computador nos ditou no caso da representação gráfica anterior!

★ & ♣

☞ Seja f um campo escalar (função real de 2 variáveis reais) definida por

$$\begin{array}{rcl} f: \ \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & z = \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{array}$$

- Qual o domínio de f?

  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ (porque, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existe $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ em $\mathbb{R}$ (uma vez que o denominador nunca se anula)).

- Qual o conjunto de chegada de f? E o contradomínio?

  O conjunto de chegada de f é $\mathbb{R}$.

✎ Complete:

O contradomínio de f é ... ,porque ....

- Qual o gráfico de f?

  $$\text{graf}\,(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right\}$$

- Como obter uma representação gráfica do gráfico de f?

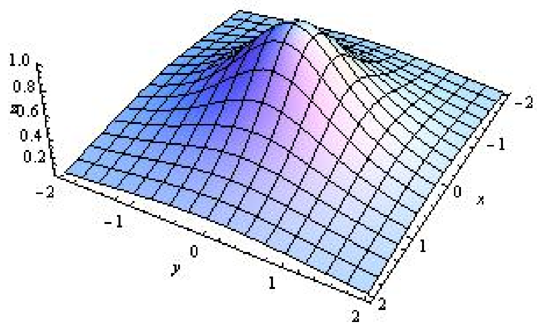

Figura 2.2: Representação Gráfica, em $[-2, 2] \times [-2.2]$, do campo escalar definido por $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

Definição 18. *Os* **traços** *de uma função f, real de n variáveis reais, são os lugares geométricos definidos pelas interseções do gráfico de f com cada um dos planos (ou hiperplanos) coordenados.*

★ & ♣

☞ No caso do presente exemplo, os traços de f são definidos e representados geometricamente por

$$\text{em } XOY \begin{cases} z = \frac{1}{1+x^2+y^2} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2+y^2} = 0$$

Recordemos que uma função (real de 1 variável real) definida por meio de uma equação do tipo $f(x, y) = 0$ se diz definida implicitamente (ou de forma implícita), enquanto que se estiver na forma $y = f(x)$ se diz definida explicitamente (com uma das variáveis, a dependente, explicitada em função da outra, a independente).

✎ Justifique a seguinte afirmação:

O traço de f, em XOY é o conjunto vazio!

$$\text{em } XOZ \begin{cases} z = \frac{1}{1+x^2+y^2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{1+x^2}$$

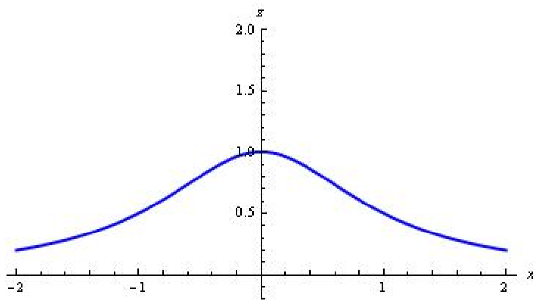

Figura 2.3: Traço, em XOZ, do campo escalar definido por $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

$$\text{em } YOZ \begin{cases} z = \frac{1}{1+x^2+y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{1+y^2}$$

Para além desta informação, podemos ainda recorrer a um diagrama de nível da função, a saber

Definição 19. *Um* **diagrama de nível** *de uma função f, real de n variáveis reais, é um conjunto representável em $n-1$ dimensões definido, para k pertencente ao contradomínio*

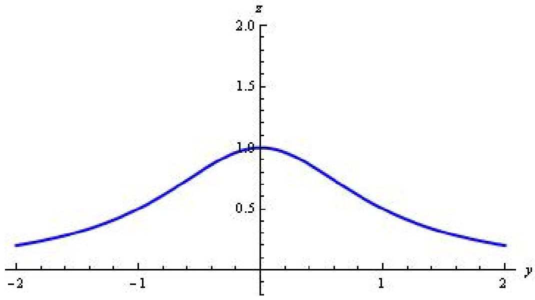

Figura 2.4: Traço, em YOZ, do campo escalar definido por $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

de f, pela projeção ortogonal sobre o plano (ou hiperplano) onde está definido o domínio da interseção do gráfico de f com o plano (ou hiperplano) definido pela equação $z = k$.

Note-se que para campos escalares definidos em $\mathbb{R}^2$, o traço em XOY é, ele próprio, uma curva de nível (para $k = 0$) e os diagramas de nível, nestes casos, contêm informações preciosas, por exemplo, em estudos geográficos (porque reportam, num plano, a morfologia sólida do terreno).

★ & ♣

☞ Retomemos, então, o exemplo do campo escalar (de 2 variáveis) definido por $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

Neste caso, as curvas de nível de f de valor k são as da figura seguinte:

Atente-se na definição de "diagrama de nível"e perceba-se que as curvas de nível estarão definidas, analiticamente, por $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{1+x^2+y^2} = k \wedge k \in \mathbb{R}\right\}$ e representam-se, como afirmámos na definição, projectadas num plano (o do domínio); isto é para 7 valores de k (escolhidos) obtemos a seguinte representação de um diagrama de nível para o nosso campo escalar f

✎ Quais foram os valores de k escolhidos no caso deste diagrama de nível?

✎ Defina, analiticamente, a curva de nível correspondente à cota 1.

♣

✎ Folha 1: Algumas representações gráficas

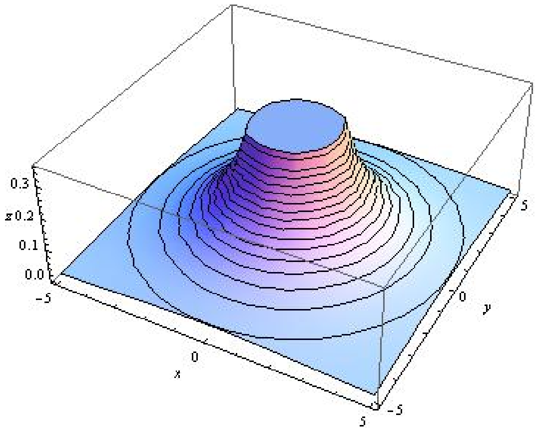

Figura 2.5: Diferentes interseções, para uma mesma cota, na representação gráfica do campo escalar definido por $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

$\mathbf{1.3} - \boldsymbol{a})$

$\mathbf{1.3} - \boldsymbol{b})$

$\mathbf{1.4} - \boldsymbol{a})$

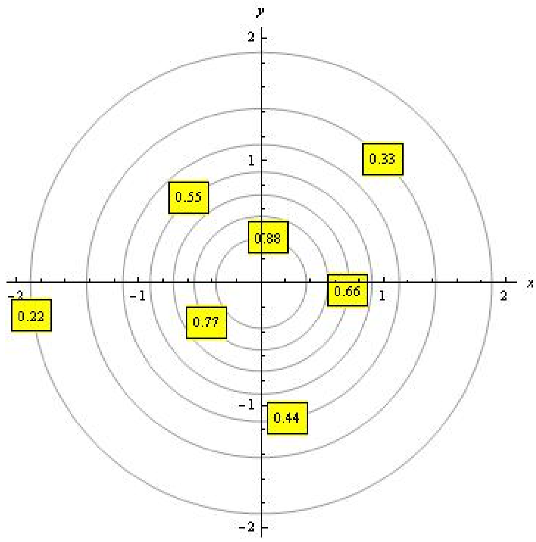

Figura 2.6: Um diagrama de nível para o campo escalar definido por $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

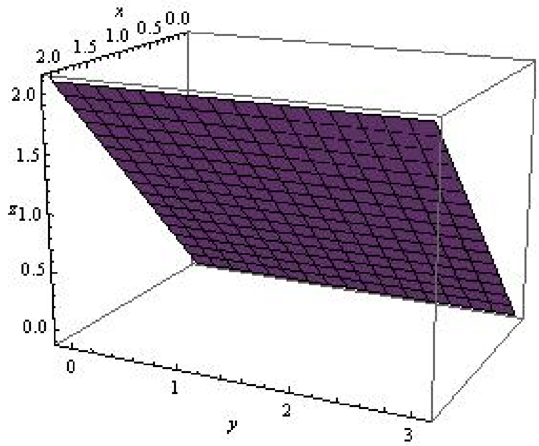

Figura 2.7: Representação Gráfica do campo escalar definido por $f(x, y) = x$

Figura 2.8: Traço da função no plano XOY

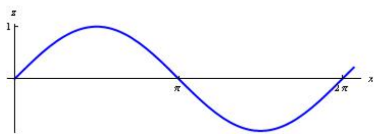

Figura 2.9: Traço da função no plano XOZ

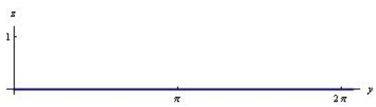

Figura 2.10: Traço da função no plano YOZ

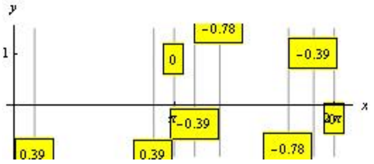

Figura 2.11: Diagrama de Nível da função

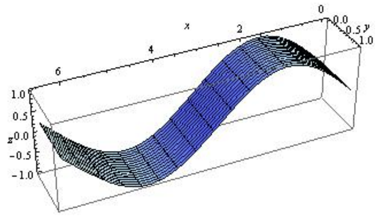

Figura 2.12: Representação Gráfica da função definida por $f(x, y) = \sin x$

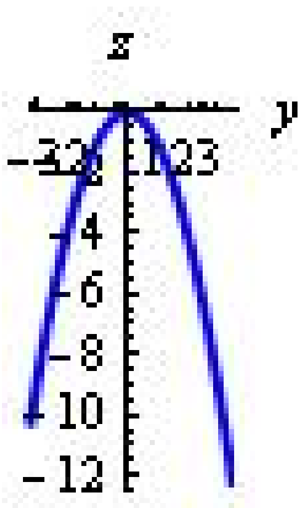

Figura 2.13: Traço da função no plano XOY

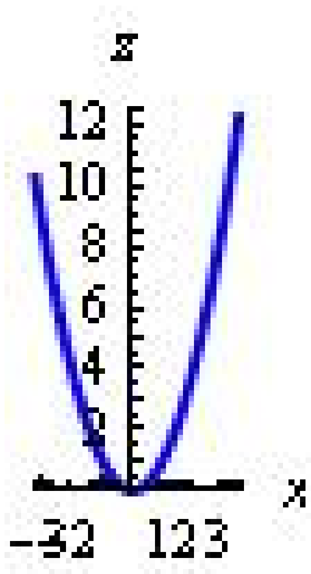

Figura 2.14: Traço da função no plano XOZ

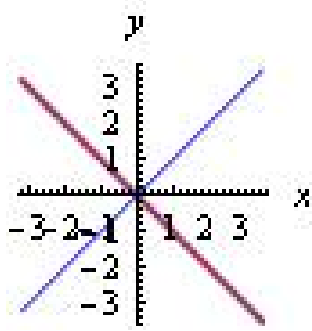

Figura 2.15: Traço da função no plano YOZ

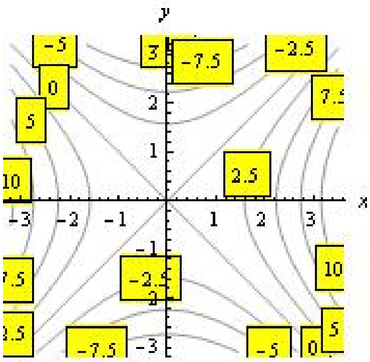

Figura 2.16: Diagrama de Nível da função

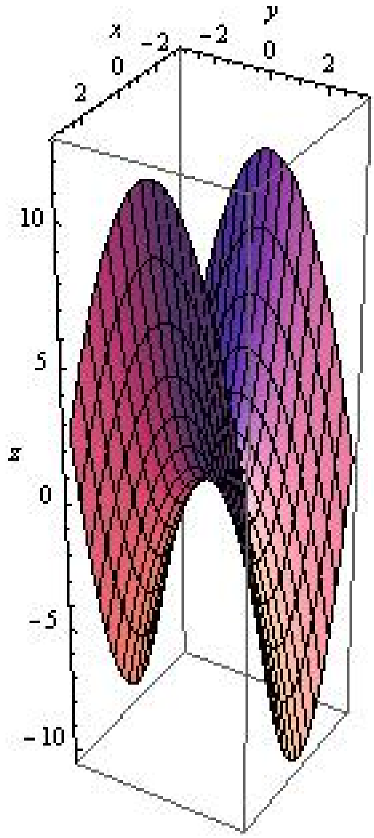

Figura 2.17: Representação Gráfica da função definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$