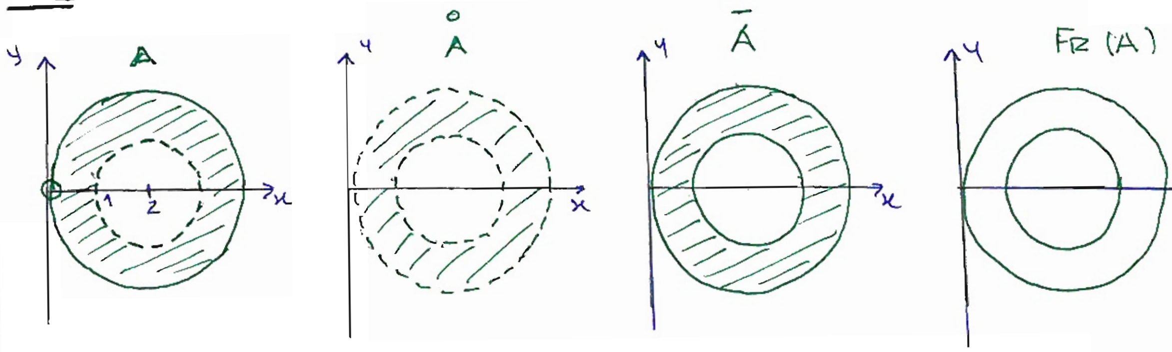
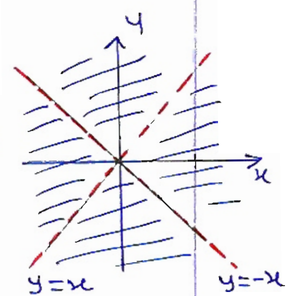
Proposta de correção do 1º Teste Cálculo II

14/abril/12

Ex 1



Ex 2



a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm y\}$

b) Para mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, basta encontrar dois limites direcionais de f em (0,0) diferentes:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ \boxed{y=0}}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$
- $\lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ \boxed{x=0}}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$

$\therefore$ não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Ex 3

a) f contínua em (0,0) se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

A função f pode escrever-se como $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ com $g(x,y) = \frac{x^2}{2x^2+3y^2}$ e $h(x,y) = y$. Como a função g é limitada, uma vez que $|g(x,y)| = \frac{x^2}{2x^2+3y^2} \leq \frac{1}{2}$ e, além disso $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, conclui-se, de imediato, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. (Teorema do confronto).

b) $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

c) $f'((0,0);(1,1)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{5t^2}}{t} = \frac{1}{5}$

d) Se f fosse derivável em $(0,0)$, então seria válida a igualdade

$$f'((0,0);(1,1)) = f'(0,0)(1,1) = \nabla f(0,0)\cdot(1,1)$$

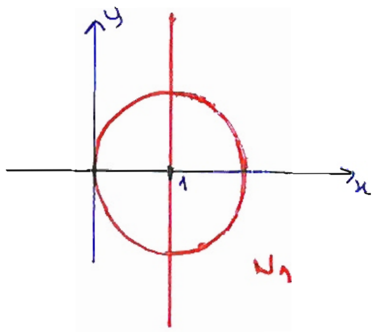
Por b) e c), sabemos que tal não é verdade. Logo f não é derivável em $(0,0)$.

e) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(2x^2+3y^2)-6y(x^2y)}{(2x^2+3y^2)^2} = \frac{2x^4-3x^2y^2}{(2x^2+3y^2)^2}$

<u>Ex4</u>:

a) $N_1 = \{ (x,y)\in \mathbb{R}^2 : (x-1)^3+(x-1)y^2-x+2=1 \}$

$$(x-1)^3+(x-1)y^2-x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^2+y^2-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \ \vee\ (x-1)^2+y^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \ \vee\ (x-1)^2+y^2=1$$



b) • $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x-1)^2+y^2-1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=3$

• $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x-1)y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=2$

• $f(2,1)=2$

Eq. plano: $(x,y,z)=(2,1,2)+\lambda(1,0,3)+\mu(0,1,2)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{OU}}$

$$z = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$$

$$z = 3x+2y-6$$

<u>Ex5</u>: a) $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,2)} f(x,y,z) = \left(\lim_{(x,y,z)\to(1,0,2)} ye^{yz}, \lim_{(x,y,z)\to(1,0,2)} xyz\right) = (0,0)$

b) $f_1(x,y,z) = ye^{yz}$, $\nabla f_1(x,y,z) = (0, e^{yz}+yze^{yz}, y^2e^{yz})$

$f_2(x,y,z) = xyz$, $\nabla f_2(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

$$\mathcal{J}(f) = \begin{pmatrix} 0 & (1+yz)e^{yz} & y^2e^{yz} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

c) $f'(1,2,3): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto \mathcal{J}(f)(1,2,3)\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7e^6 & 4e^6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^6(7y+4z) \\ 6x+3y+2z \end{pmatrix}$$