Definição 2: Sejam X um conjunto e B um subconjunto não vazio de X. Seja O um conjunto de *operações em* X (*i.e.*, funções do tipo $X^n \longrightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$). Um subconjunto I de X tal que

i) $B \subseteq I$ e

ii) I é *fechado* para as operações de O (*i.e.*, as operações de O quando aplicadas a elementos de I produzem elementos de I ou, por outras palavras, para cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O e para cada $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $f(x_1, ..., x_n) \in I$)

é chamado um *conjunto indutivo, sobre* X, *de base* B e *conjunto de operações* O.

i) X é um conjunto indutivo para qualquer O;

ii) B é um conjunto indutivo quando $O = \emptyset$.

Donde podemos concluir que, em geral, os subconjuntos indutivos de um conjunto, para uma dada base e um dado conjunto de operações, não são únicos, pois X e B são ambos conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações $\emptyset$.

1. Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos e chamaremos *letras* aos elementos de um alfabeto.
2. Dado um alfabeto A, chamaremos *palavra* (ou *string*) *sobre* o alfabeto A a uma sequência finita de letras de A. A notação A^* representará o conjunto de todas as palvras sobre A.
3. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ.
4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras a_1, a_2, ..., a_n de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1a_2...a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i-ésima letra (para $1 < i < n$) é a_i.
5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras. (Em particular, a única palavra de comprimento 0 é ϵ.)
6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.
7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (*i.e.*, a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).
8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo 8: Seja A o alfabeto $\{0, s, +, \times, (,)\}$. Consideremos a linguagem E em A (E para *expressões*), definida indutivamente pelas seguintes *regras*:

1. $0 \in E$;
2. $e \in E \Rightarrow s(e) \in E$, para todo $e \in A^*$;
3. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 + e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$;
4. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 \times e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$.

Por exemplo, as palavras 0, $s(0)$, (0×0), $(s(0) + (0 \times 0))$ pertencem a E. De facto:

- $0 \in E$, pela regra 1.;
- de $0 \in E$, pela regra 2., segue $s(0)$;
- de $0 \in E$, pela regra 4., segue (0×0);
- de $s(0) \in E$ e (0×0), pela regra 3., segue $(s(0) + (0 \times 0))$.

Já as palavras sobre A $+(00)$ e $s0$ não pertencem a E. Note-se que nenhuma palavra de E tem a letra $+$ como primeira letra e nenhuma palavra de E, com exceção da palavra 0, tem 0 como última letra.

Exemplo 16: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a $n \in C$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k+2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in C$.

Consideremos a propriedade $P(n)$, relativa a $n \in C$, dada por "n é par". Provemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in C$. Pelo Princípio de indução estrutural para C, basta mostrarmos as duas condições acima descritas.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k+2$ é também par e, portanto, $P(k+2)$ é verdadeira. Provámos, assim, a condição 2 do Princípio de indução estrutural para C.

Para mostar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta ainda demonstrar que C contém o conjunto dos números pares. Para tal, pode provar-se, por indução em $\mathbb{N}_0$, que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)

Exemplo 17: O Princípio de indução estrutural associado à linguagem de expressões E do Exemplo 8 é o seguinte:

Seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in E$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(e)$, então $P(s(e))$, para todo $e \in E$;
3. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 + e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;
4. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 \times e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

então $P(e)$, para todo $e \in E$.

Exemplo 18: Consideremos de novo a linguagem de expressões E do Exemplo 8 e consideremos a função $np : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada expressão de E faz corresponder o número de ocorrências de parênteses nessa expressão. Esta função pode ser definida por *recursão estrutural em* E do seguinte modo:

1. $np(0) = 0$;
2. para todo $e \in E$, $np(s(e)) = 2 + np(e)$;
3. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$;
4. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Definição 22: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares*.

Definição 24: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\bot \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}^{CP})^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}^{CP})^*$.

Teorema 28 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se:

a) $P(\bot)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Observação 20: Ao contrário do que sucede em relação ao *Princípio de indução estrutural*, nem todas as definições indutivas têm um *Princípio de recursão estrutural* associado. Este princípio é válido apenas para as chamadas *definições indutivas deterministas*, classe na qual se inserem as definições indutivas de C e E, que vimos nos Exemplos 1 e 8, e que se caracterizam por permitirem *decomposições únicas* dos seus elementos.

Vejamos um exemplo de uma definição indutiva não-determinista e de problemas que surgiriam com um hipotético Princípio de recursão estrutural associado.

Tomemos a definição indutiva de C do Exemplo 1 e acrescentemos-lhe, agora, a regra: 3. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $2 \times n \in C$.

Simultaneamente, às condições que definem a função f, no exemplo anterior, acrescentemos, agora, a seguinte condição associada à regra que acabámos de introduzir:

3. para todo $n \in C$, $f(2n) = 2 + f(n)$.

O Princípio de recursão estrutural associado asseguraria que esta condição, juntamente com as condições 1 e 2 do exemplo anterior, definiriam uma função.

Mas, por exemplo, qual seria a imagem de 4 por f?

Por um lado, $f(4) = f(2 \times 2) = 2 + f(2) = 2 + f(2+0) = 2 + 1 + f(0) = 3 + 0 = 3$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 3 e usando a condição 3 na segunda igualdade).

Por outro lado, $f(4) = f(2{+}2) = 1 + f(2) = 1{+}1 = 2$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 2 e usando a condição 2 na segunda igualdade).

Teríamos, portanto, duas imagens distintas para 4, o que é impossível. Consequentemente, o Princípio de recursão estrutural não pode ser válido para esta definição indutiva.

Definição 31: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\bot) = \emptyset$; **b)** $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi \square \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 32:

$$\begin{aligned} & var(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \vee \bot)) \\ = \ & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \bot) \\ = \ & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\bot) \\ = \ & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\ = \ & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = \ & \{p_1, p_2\}. \end{aligned}$$

Definição 37: A função $alt : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, que a cada fórmula φ faz corresponder a altura da sua árvore sintática[3], é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP como a única função t.q.:

a) $alt(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$;

b) $alt(\neg\varphi) = 1 + alt(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $alt(\varphi \square \psi) = 1 + máximo(alt(\varphi), alt(\psi))$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 39 Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $\bot\,[\psi/p] = \bot$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \square \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 40:

a)
$$\begin{aligned} & (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \bot))[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = \ & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2 \wedge \bot)[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = \ & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \rightarrow (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \bot\,[p_0 \vee p_1/p_2]) \\ = \ & \neg p_1 \rightarrow ((p_0 \vee p_1) \wedge \bot) \end{aligned}$$

b) Verifique que $(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \bot))[p_0 \vee p_1/p_0] = (\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \bot))$. Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue (observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \rightarrow (p_2 \wedge \bot))$).

Definição 46: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz a seguintes condições:

a) $v(\bot) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $v(\varphi \wedge \psi) = mínimo(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $v(\varphi \vee \psi) = máximo(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 50: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases}.$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \bot)$. Então:

a) por definição de valoração,

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 1 \text{ e } v_1(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 0 \text{ ou } v_1(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases}$$

Assim, como $v_1(p_1 \vee p_2) = máximo(v_1(p_1), v_1(p_2)) = máximo(0, 0) = 0$, segue que $v_1(\varphi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) por definição de valoração,

$$v_1(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_1(\neg p_1) = v_1(p_1 \rightarrow \bot) \\ 0 & \text{se } v_1(\neg p_1) \neq v_1(p_1 \rightarrow \bot) \end{cases}$$

Assim, como $v_1(\neg p_1) = 1 - v_1(p_1) = 1$ e $v_1(p_1 \rightarrow \bot) = 1$, segue que $v_1(\psi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.)

Teorema 59 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Proposição 63: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Proposição 65: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$ $\qquad$ $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

(*associatividade*)

$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$ $\qquad$ $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

(*comutatitvidade*)

$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$ $\qquad$ $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$

(*idempotência*)

$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$ $\qquad$ $\varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$

(*elemento neutro*)

$\varphi \vee \neg\bot \Leftrightarrow \neg\bot$ $\qquad$ $\varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$

(*elemento absorvente*)

$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$ $\qquad$ $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$

(*distributividade*)

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\qquad$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

(*leis de De Morgan*)

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

(*lei da dupla negação*)

$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ $\qquad$ $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi$ $\qquad$ $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \bot$ $\qquad$ $\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$

(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Proposição 84: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Definição 85: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjnunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, *i.e.*, quando existe alguma valoração v t.q. $v \models \Gamma$ e $v \not\models \varphi$.

Observação 86: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se existe alguma valoração v tal que, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$.

Teorema 67 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ se e só se para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$, *i.e.*, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a propriedade: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Por definição de substituição, $\bot\,[\varphi_1/p] = \bot = \bot\,[\varphi_2/p]$. Assim, como a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, $\bot \Leftrightarrow \bot$, ou equivalentemente $\bot\,[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \bot\,[\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\bot)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Seja v uma valoração. Então:

$$\begin{aligned} & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) \\ = \ & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) && \text{(definição de substituição)} \\ = \ & 1 - v(\psi_1[\varphi_1/p]) && \text{(definição de valoração)} \\ = \ & 1 - v(\psi_1[\varphi_2/p]) && (*) \\ = \ & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) && \text{(definição de valoração)} \\ = \ & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) && \text{(definição de substituição).} \end{aligned}$$

onde a igualdade assinalada com (*) é consequência da HI, pois da HI, por definição de $\Leftrightarrow$, segue que $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, para toda a valoração v, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

d) Para completar a prova, falta mostar que, para $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \square \psi_2)$. (Exercício.)

Proposição 70: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

a) $f(\bot) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;

b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 71: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \bot) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \bot$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\bot \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

Exemplo 76: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0$. Então:

i)
$$\begin{aligned} & \varphi \\ \Leftrightarrow \ & ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow \ & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow \ & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow \ & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow \ & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0 \end{aligned}$$

□

e a última fórmula é uma FNC:

ii)
$$\begin{aligned} & \varphi \\ \Leftrightarrow \ & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 && \text{por } \mathbf{i)} \\ \Leftrightarrow \ & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), \end{aligned}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma taotologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.

	p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
linha 1 $\rightarrow$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\rightarrow$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\rightarrow$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1, a 2 e a 6. Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 79: Seja v uma valoração.

1. Dizemos que v *satisfaz uma fórmula do CP* φ , e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$. Quando v *não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$, escrevemos $v \not\models \varphi$).
2. Dizemos que v *satisfaz um conjunto de fórmulas do CP* Γ, e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ. Quando v *não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 80: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula);
5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula).

Observação 81: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se trivialmente, que, para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

Definição 82: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando existe alguma valoração que satisfaz Γ.
2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0, mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também consistente.

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3. Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:
   (a) $\Gamma \models p_1$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)
   (b) $\Gamma \models p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$ temos $v(\neg p_1) = 0$ e daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)
   (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)
   (d) $\Gamma \not\models p_3$. (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)
   (e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg p_2$. (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)
   (f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3)$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)
2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.
3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}, \{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2.

Proposição 91: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.
b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.
c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.
d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.
e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ. Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ. Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

d) $\Rightarrow$) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ $(*)$. Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$ $(**)$. Logo, de $(*)$ e $(**)$, por definição de valoração, $v(\psi) = 1$.

e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ $(*)$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$ $(**)$. Logo, de $(*)$ e $(**)$, por definição de valoração, $v(\psi) = 1$. □

Proposição 93 (Redução ao absurdo): Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ $(*)$. Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com $(*)$. Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

$\Leftarrow$) Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, seguiria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. □

1. Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, *, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{a \in G}\,1 \qquad \frac{x \in G}{xa \in G}\,2 \qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x * y) \in G}\,3$$

Seja ainda $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:
- $i(a) = 1$;
- $i(xa) = i(x) + 1$, para todo o $x \in G$;
- $i((x * y)) = i(x) + i(y)$, para todos os $x, y \in G$.

(a) Construa a árvore de formação do elemento $u = ((aa * a)a * a)$ de G.

R: *A árvore de formação de u é a seguinte*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \in G}\,1}{aa \in G}\,2 \quad \dfrac{}{a \in G}\,1}{(aa * a) \in G}\,3}{(aa * a)a \in G}\,2 \quad \dfrac{}{a \in G}\,1}{((aa * a)a * a) \in G}\,3$$

(b) Indique um elemento de X que não pertence a G.

R: *Seja, por exemplo, $v = aa)$. É claro que v é um elemento de X pois é uma sequência finita de letras do alfabeto $\{a, *, (,)\}$. Por outro lado v não pertence a G. De facto, dado que a última letra de v é) e a única regra que tem como conclusão uma palavra que acaba por) é a terceira, para v pertencer a G teria que ser conclusão de alguma instância*

$$\frac{x \in G \quad y \in G}{v \in G}\,3$$

da regra 3. Ora tal é impossível pois nesse caso a primeira letra de v teria que ser (, o que não acontece.

(c) Calcule $i(u)$.

R: *Denotemos por (i.1), (i.2) e (i.3) respectivamente a primeira, a segunda e a terceira condições da definição da função i. Tem-se*

$$\begin{aligned} i(u) &= i(((aa * a)a * a)) \\ &= i((aa * a)a) + i(a) && \textit{por (i.3)} \\ &= i((aa * a)) + 1 + 1 && \textit{por (i.1) e (i.2)} \\ &= i(aa) + i(a) + 2 && \textit{por (i.3)} \\ &= i(a) + 1 + 1 + 2 && \textit{por (i.1) e (i.2)} \\ &= 1 + 4 && \textit{por (i.1)} \\ &= 5. \end{aligned}$$

(d) Enuncie o teorema de indução estrutural para G.

R: *O Princípio de Indução Estrutural para G pode ser enunciado da seguinte forma.*
Seja $P(x)$ uma propriedade relativa aos elementos $x \in G$ e suponhamos que:
(1) $P(a)$ é verdadeira;
(2) para qualquer $x \in G$, se $P(x)$ é verdadeira, então $P(xa)$ é verdadeira;
(3) para quaisquer $x, y \in G$, se $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiras, então $P((x * y))$ é verdadeira.
Então $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in G$.

2. Sejam φ, ψ e σ as seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

$$\psi = p_1 \to p_2$$
$$\sigma = p_0 \vee \neg p_2$$
$$\varphi = p_0 \to (p_1 \vee p_2)$$

(a) Dê exemplo de uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$.

R: *Usando as propriedades da equivalência lógica, pode-se deduzir sucessivamente*

$$\begin{aligned} (\psi \wedge \sigma) \to \varphi &\Leftrightarrow \neg(\psi \wedge \sigma) \vee \varphi \\ &\Leftrightarrow \neg\psi \vee \neg\sigma \vee \varphi \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2 \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg\neg p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2 \\ &\Leftrightarrow (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2. \end{aligned}$$

Logo, $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2$ é uma forma normal disjuntiva (FND) logicamente equivalente a $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$.

Alternativamente, poderíamos determinar uma outra FND através da tabela de verdade da fórmula $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$, que apresentamos de seguida,

p_0	p_1	p_2	ψ	σ	φ	$(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

As linhas para as quais $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ tem valor lógico 1 são todas excepto a 4ª. Portanto uma FND logicamente equivalente a $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ é

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p$$

(b) Diga se $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ é uma tautologia.

R: *A fórmula $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ não é uma tautologia como se pode verificar pela sua tabela de verdade. De facto, para as valorações v tais que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = v(p_2) = 0$ tem-se $v((\psi \wedge \sigma) \to \varphi) = 0$.*

(c) Verifique se o conjunto $\{\psi, \sigma \wedge \neg\varphi\}$ é semanticamente consistente.

R: *O conjunto $\{\psi, \sigma \wedge \neg\varphi\}$ é semanticamente consistente pois existe pelo menos uma valoração que o satisfaz. Por exemplo, para qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = v(p_2) = 0$ tem-se $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ e $v(\varphi) = 0$ e, portanto, $v(\psi) = v(\sigma \wedge \neg\varphi) = 1$.*

3. Considere as seguintes proposições:
- A lógica é difícil ou não há muitos estudantes que gostam dela, e se a matemática é fácil então a lógica não é difícil.
- Se há muitos estudantes que gostam de lógica, então a matemática não é fácil.

(a) Exprima as duas proposições acima através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

R: *Representemos por p_0 a frase atómica "A lógica é difícil", por p_1 a frase "Há muitos estudantes que gostam de lógica" e por p_2 "A matemática é fácil". Então as duas proposições acima exprimem-se respectivamente pelas fórmulas*

$$(p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \to \neg p_0) \qquad e \qquad p_1 \to \neg p_2.$$

(b) Diga, justificando, se a segunda proposição é ou não uma consequência da primeira.

R: *Pretende-se verificar se*

$$(p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \to \neg p_0) \models p_1 \to \neg p_2.$$

Denotemos $\varphi = (p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \to \neg p_0)$ e $\psi = p_1 \to \neg p_2$. Analisando a tabela

p_0	p_1	p_2	φ	ψ
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

verifica-se que sempre que φ assume o valor lógico 1 (ou seja para as valorações dadas pelas 2ª, 4ª, 7ª e 8ª linhas) a fórmula ψ assume o mesmo valor. Logo a afirmação é verdadeira, i.e., a segunda proposição é uma consequência da primeira.

4. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}^{CP}$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

(a) Se $\neg\varphi \vee (\psi \to \sigma)$ é uma tautologia, então $\psi \to (\varphi \to \sigma)$ é uma tautologia.

R: *Esta afirmação é verdadeira. De facto, suponhamos que $\neg\varphi \vee (\psi \to \sigma)$ é uma tautologia e consideremos uma valoração v qualquer.*
- *Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \to \sigma) = 1$ e portanto $v(\psi \to (\varphi \to \sigma)) = 1$.*
- *Suponhamos agora que $v(\varphi) = 1$, donde $v(\neg\varphi) = 0$. Dado que $\neg\varphi \vee (\psi \to \sigma)$ é uma tautologia, tem-se então que $v(\psi \to \sigma) = 1$. Se $v(\psi) = 0$, então resulta imediatamente que $v(\psi \to (\varphi \to \sigma)) = 1$. Se $v(\psi) = 1$, então $v(\sigma) = 1$ donde resulta que $v(\varphi \to \sigma) = 1$ e daí $v(\psi \to (\varphi \to \sigma)) = 1$.*

Provou-se assim que $\psi \to (\varphi \to \sigma)$ é uma tautologia.

(b) Se ψ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi \to \psi$, então φ é uma contradição.

R: *A afirmação é falsa. Um contra-exemplo é obtido, por exemplo, considerando*

$$\psi = p_0 \wedge \neg p_0, \ \varphi = p_1 \ e \ \Gamma = \{p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0)\}.$$

De facto, $p_0 \wedge \neg p_0$ é uma contradição e, evidentemente, $p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0) \models p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0)$. No entanto p_1 não é uma contradição.

5. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}^{CP}$. Mostre que, se $\Gamma \models \psi \vee \neg\sigma$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi \to \psi\}$ é semanticamente inconsistente, então $\Gamma \models \sigma \to \varphi$.

R: *Suponhamos que $\Gamma \models \psi \vee \neg\sigma$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi \to \psi\}$ é semanticamente inconsistente. Temos de provar que todas as valorações que satisfazem Γ também satisfazem a fórmula $\sigma \to \varphi$.*
Seja v uma valoração tal que $v \models \Gamma$, ou seja, tal que $v(\gamma) = 1$ para toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$. Então $v(\psi \vee \neg\sigma) = 1$ pois, por hipótese, $\Gamma \models \psi \vee \neg\sigma$. Por outro lado $v(\neg\varphi \to \psi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi \to \psi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde resultaria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi \to \psi\}$ seria semanticamente consistente, o que não se verifica por hipótese. Agora, de $v(\neg\varphi \to \psi) = 0$ deduz-se que $v(\psi) = 0$, o que em simultâneo com $v(\psi \vee \neg\sigma) = 1$ permite concluir que $v(\sigma) = 0$. Daqui resulta que $v(\sigma \to \varphi) = 1$ e a demonstração fica completa.

1. Seja $X = \{0, 1\}$ e seja $G \subseteq X^*$ o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva:

$$\frac{}{1 \in G}\,(i) \qquad \frac{u \in G}{00u \in G}\,(ii) \qquad \frac{u \in G}{u1 \in G}\,(iii)$$

(d) Seja $f : X^* \to X^*$ a função definida, para cada $u \in X^*$, por $f(u) = 0u$. Diga se G é fechado para f.

R: *G é não é fechado para f, pois existe $v \in G$ tal que $f(v) \notin G$. Basta tomar $v = 1$ ($v \in G$ segue da regra (i)). Vejamos que $f(v) \notin G$, ou seja $01 \notin G$. Por um lado, o número de ocorrências de 0 em 01 é ímpar; por outro lado, qualquer que seja $u \in G$, o número de ocorrências de 0 em u é par; segue que $01 \notin G$. (A prova de que o número de ocorrências de 0 em u é par, para todo $u \in G$, é por indução estrutural: percorrendo as regras da definição indutiva de G, observa-se que a propriedade de ter um número par de ocorrências de 0 é imediata em $u = 1$; e se se verifica na premissa u das regras (ii) ou (iii), verifica-se ainda nas respectivas conclusões).*
(Prova alternativa de que $01 \notin G$. Por redução ao absurdo. Suponhamos que $01 \in G$. Então 01 tem árvore de formação, que necessariamente termina com uma aplicação da regra (iii) (pois $01 \neq 1$ e 01 não tem 2 ocorrências de 0). Mas então 0 tem árvore de formação. Porém, nenhuma das regras (i), (ii), e (iii) permite concluir $0 \in G$. Absurdo. Deste modo, concluímos $01 \notin G$.)

2. Considere $f : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ a função definida recursivamente por:
   (i) $f(p_i) = 0$ $(i \in \mathbb{N}_0)$. (ii) $f(\bot) = 0$.
   (iii) $f(\neg\varphi) = f(\varphi)^2$. (iv) $f(\varphi \Box \psi) = f(\varphi) \times f(\psi)$ $(\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\})$.

(a) Verifique que $f(\neg(\neg p_3 \to \bot)) = 0$.

R:

$$\begin{aligned} f(\neg(\neg p_3 \to \bot)) &= f(\neg p_3 \to \bot)^2 && \textit{(por (iii))} \\ &= f(\neg p_3) \times f(\bot) && \textit{(por (iv))} \\ &= f(\neg p_3) \times 0 && \textit{(por (ii))} \end{aligned}$$

(b) Prove por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $f(\varphi) = 0$.

R: *Defina-se $P(\varphi)$ sse $f(\varphi) = 0$. Pelo Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, basta demonstrar as afirmações (I)-(IV) seguintes:*
(I) $P(p_i)$ $(i \in \mathbb{N}_0)$.
(II) $P(\bot)$.
(III) Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\varphi)$ então $P(\neg\varphi)$.
(IV) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \Box \psi)$.
Passemos à demonstração destas afirmações.
(I) $f(p_i) = 0$ por (i) na def. de f.
(II) $f(\bot) = 0$ por (ii) na def. de f.
(III) Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $f(\varphi) = 0$ (HI). Então

$$\begin{aligned} f(\neg\varphi) &= f(\varphi)^2 && \textit{(por (iii) na def. de f)} \\ &= 0^2 && \textit{(por HI)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(IV) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $f(\varphi) = f(\psi) = 0$ (HI). Então

$$\begin{aligned} f(\varphi \Box \psi) &= f(\varphi) \times f(\psi) && \textit{(por (iv) na def. de f)} \\ &= 0 \times 0 && \textit{(por HI)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) Diga se f é uma valoração.

R: *f não é uma valoração. Se fosse uma valoração, ter-se-ia $f(\neg\varphi) = 1 - f(\varphi)$ para todo φ. Porém, esta igualdade é falsa, não apenas para algum φ, mas inclusivamente para qualquer φ: por um lado $f(\neg\varphi) = f(\varphi)^2 = 0^2 = 0$; por outro, $1 - f(\varphi) = 1 - 0 = 1$.*

3. Seja φ a seguinte fórmula do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (p_0 \to \bot) \vee (p_1 \leftrightarrow \neg p_2).$$

(c) Verifique se $\neg(p_1 \wedge p_2)$ é consequência semântica de $\{\varphi, p_0\}$.

R: *Pretende-se verificar se $\varphi, p_0 \models \neg(p_1 \wedge p_2)$, ou seja, se para toda a valoração v tal que $v(\varphi) = 1$ e $v(p_0) = 1$ se tem que $v(\neg(p_1 \wedge p_2)) = 1$. Esta afirmação é verdadeira. De facto, quando $v(p_0) = 1$ e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$, teremos que ter $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$, pois $v(p_0 \to \bot) = 0$. De $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$, segue que $v(p_1) \neq v(p_2)$, donde um destes valores é necessariamente 0 e, como tal, $v(p_1 \wedge p_2) = 0$, pelo que $v(\neg(p_1 \wedge p_2)) = 1$.*

5. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) Se Γ é consistente e $\Gamma \models \varphi$, então φ não é uma contradição.

R: *Suponhamos que Γ é consistente e $\Gamma \models \varphi$. Note-se que a hipótese $\Gamma \models \varphi$ significa que, se v' é uma valoração tal que $v' \models \Gamma$, então $v' \models \varphi$. Ora, da consistência de Γ deduzimos que existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, resulta que $v \models \varphi$, isto é, que $v(\varphi) = 1$. Isto mostra que φ não é uma contradição pois para tal seria necessário que φ tivesse o valor lógico 0 para todas as valorações. Conclui-se assim que a afirmação é verdadeira.*

(b) $p_0 \vee \neg p_0 \models \varphi$ se e só se φ é uma tautologia.

R: *Como é evidente, a fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Ou seja, $v \models p_0 \vee \neg p_0$ para toda a valoração v. Logo, pela definição de uma fórmula ser consequência de um conjunto de fórmulas (ver resposta da alínea anterior), deduz-se imediatamente que $p_0 \vee \neg p_0 \models \varphi$ se e só se $v \models \varphi$ para toda a valoração v. Portanto, $p_0 \vee \neg p_0 \models \varphi$ se e só se φ é uma tautologia, donde a afirmação é verdadeira.*

(c) Se $\Gamma, p_0 \to p_2 \models p_0 \wedge p_2$, então Γ é inconsistente.

R: *Esta afirmação é falsa. Um contra-exemplo é fornecido, por exemplo, pelo conjunto $\Gamma = \{p_0\}$. De facto, tem-se que*

$$\Gamma, p_0 \to p_2 \models p_0 \wedge p_2$$

pois, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_0 \to p_2) = 1$, então $v(p_2) = 1$ e, por conseguinte, $v(p_0 \wedge p_2) = 1$. No entanto Γ é consistente já que existem valorações que satisfazem p_0.

Consistente ou inconsistente $v \not\models \Gamma$
(existe uma valoração que satisfaz)
o conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_1, p_2 \to p_0, \bot \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos ... é satisfeito para toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$
o conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$
Portanto $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.
$\Gamma \subseteq \Delta$
Se Δ é cons. então Γ é cons.
Se Γ é incons. então Δ é incons.

1. Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, +, -, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{a \in G}\,a \qquad \frac{x \in G}{(x - b) \in G}\,- \qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x + y) \in G}\,+$$

Seja ainda $g : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:
- $g(a) = 0$;
- $g((x - b)) = g(x) - 1$, para todo o $x \in G$;
- $g((x + y)) = g(x) + g(y)$, para todos os $x, y \in G$.

(c) Enuncie o Princípio de indução estrutural para G.
(d) Prove por indução estrutural que, para todo o $x \in G$, $g(x) \leq 0$.
(e) Considere a função $h : G \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que, para todo o $x \in G$, $h(x)$ é o número de ocorrências da letra b na palavra x. Defina a função h por recursão estrutural.

2. Seja φ a seguinte fórmula do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (p_0 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1).$$

(a) Indique uma fórmula logicamente equivalente a φ onde apenas ocorram os conectivos $\neg$ e $\to$.
(b) Mostre que $\varphi \models \neg p_1$.
(c) φ é uma tautologia?

4. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:
(a) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\models \neg\varphi$ ou $\models \psi$.
(b) Se Γ é inconsistente, então todo o subconjunto de Γ é inconsistente.
(c) Se φ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi$, então Γ é inconsistente.

Recursão estrutural
Considere a função $nv : F^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que para cada $\varphi \in F^{CP}$, $nv(\varphi)$ é o número de ocorrências de variáveis em φ
(a) Defina a função nv por recursão estrutural
- $nv(p_i) = 1$ $\quad \Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$
- $nv(\bot) = 0$ $\quad \varphi, \psi \in F^{CP}$
- $nv(\neg\varphi) = nv(\varphi)$
- $nv(\varphi \Box \psi) = nv(\varphi) + nv(\psi)$

Indução Estrutural | Ir às regras ... em cima e fazer
Enunciar o Teorema
R: Seja $P(u)$ uma propriedade, com $u \in G$
(I) $P(1)$ é verdadeira
(II) para todo $u \in G$, se $P(u)$ é verdadeira então $P(00u)$ também é verdadeira
(III) Para todo $u \in G$, se $P(u)$ é verdadeira então $P(u1)$ também
Então: para todo $u \in G$, $P(u)$ é verdade

Provar por Indução estrutural
Defina-se $P(\varphi)$ sse $f(\varphi) = 0$. Pelo Princípio de Indução Estrutural para F^{CP}, basta demonstrar as afirmações (I) - (IV) seguintes:
(I) $P(p_i)$ $(i \in \mathbb{N}_0)$
(II) $P(\bot)$
(III) Para todo $\varphi \in F^{CP}$, se $P(\varphi)$ então $P(\neg\varphi)$
(IV) para todo $\varphi, \psi \in F^{CP}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \Box \psi)$
Passemos à demonstração destas afirmações
(I) $f(p_i) = 0$ por (i) na def. de f
(II) $f(\bot) = 0$ por (ii) na def. de f
(III) Seja $\varphi \in F^{CP}$ tal que $f(\varphi) = 0$ (HI) Então:
$f(\neg\varphi) = f(\varphi)^2$ (por (iii) na def. de f)
$= 0^2$ (por HI)
$= 0$
(IV) Sejam φ e $\psi \in F^{CP}$ tais que $f(\varphi) = f(\psi) = 0$ (HI). Então:
$f(\varphi \Box \psi) = f(\varphi) \times f(\psi)$ (por (iv) na def. de f)
$= 0 \times 0$ (por HI)
$= 0$