Universidade do Minho
Dep. de Matemática

Cálculo I
Teste 1

Eng. Informática
22/11/2008
[2h 00m]

Exercício 1. [5 valores] Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

a) um conjunto aberto de números racionais;

b) um conjunto numerável de irracionais, minorado, mas que não possua mínimo;

c) uma função contínua, $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f\big([0,1]\big)$ seja numerável;

d) uma função contínua e bijectiva cuja inversa não seja contínua;

e) uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, injectiva, e tal que

$$f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

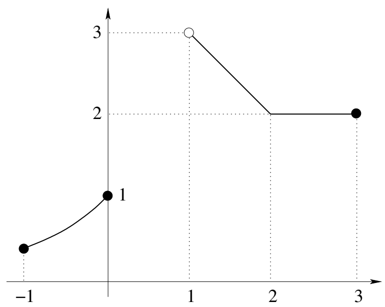
Exercício 2. [5 valores] Sejam $A = \big\{x \in \mathbb{Q} : -2 \le x \le 1 \,\wedge\, |2x^2 - 1| < 3\big\}$ e $B = [0,1[\,\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.

a) Mostre que $A =]-\sqrt{2}, 1] \cap \mathbb{Q}$.

b) Considere o conjunto $S = A \cup B$.

1. Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo do conjunto S.
2. Diga, justificando, se S é aberto ou fechado.
3. Determine a fronteira, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de S.

Exercício 3. [5 valores] Considere a função $f : [-1,0] \cup]1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura. No intervalo $[-1,0]$ o gráfico da função f coincide com o gráfico da função exponencial.



a) Indique o contradomínio da função f.

b) A função f é injectiva?

c) Classifique a função f quanto à continuidade.

d) Quais os pontos onde a função f não é derivável?

e) Indique, analiticamente, um prolongamento contínuo da função f ao intervalo $[-1,3]$ que seja duas vezes derivável no intervalo $[-1,1[$.

Exercício 4. [3 valores] Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{e^x - 1 - x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)$.

Exercício 5. [2 valores] Seja $P_{2,1}(x) = x^2 + 2x - 2$ o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 1 de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 2 de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(2x - 3)$.