Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMA

Folha 8 - **Séries numéricas**

Exercício 1 Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n}} = 1$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \frac{9}{2}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{4}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{45}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{n+1}4^{-(n+2)} = \frac{9}{16}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -1$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$;

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercício 2 Represente $x = 1.\overline{41}$ na forma de um quociente entre dois números inteiros, observando que

$$x = 1 + \frac{41}{100} + \frac{41}{100^2} + \frac{41}{100^3} + \cdots + \frac{41}{100^n} + \cdots .$$

Exercício 3 Mostre que se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\lim\limits_n a_n = 0$.

Sugestão: note que $s_n = s_{n-1} + a_n$, onde $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Exercício 4 Justifique que as séries seguintes são divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^{n-1}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{n+3}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 4^{n+1}}{3^{n+2}}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{3\sqrt{n}} + \frac{1}{4^n}\right)$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{n^2}\right)$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right)$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+4}{3n-1}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}}$;

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{-4} + n^{-\frac{1}{2}}\right)$;

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2+\pi)^{2n}$.

Exercício 5 Considere as sucessões definidas por $a_n = \dfrac{2n+n^2}{3n^2+7}$, $b_n = \dfrac{1}{\pi^{2n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e ainda as sucessões de termo geral

$$x_n = a_n + 3b_n, \quad y_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ b_n & \text{se } n > 10^8 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} b_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ a_n & \text{se } n > 10^8 \end{cases}.$$

a) Conclua, justificando, que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente e que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente.

b) Justificando devidamente, determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n\,.$$

Exercício 6 Apresente duas séries divergentes, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, tais que $u_n + v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ seja convergente.

Exercício 7 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo nas condições indicadas:

a) uma série alternada divergente;

b) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^3$ seja divergente;

c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ seja divergente;

d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ seja divergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ seja convergente.

Exercício 8 Considere a série de Riemann convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Pretende-se determinar um limite superior para a sua soma.

a) Verifique que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

b) Usando o resultado da alínea anterior conclua que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Nota: Pode mostrar-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercício 9 Use um critério de comparação para decidir sobre a natureza das séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n+1}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{n^4}$; g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}+5}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1+n^4}$.

Exercício 10 Use o critério de D'Alembert (ou da razão) para decidir se convergem ou divergem as séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$; g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{99^n}{n!}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n\,!}{n^n}$.

Exercício 11 Use o critério de Cauchy (ou da raíz) para estudar a convergência das séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+a)^n}, a \in \mathbb{R}^+$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}+\frac{1}{n}\right)^n$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Nota: para a resolução a alínea c), recorde que $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{n} = 1$.

Exercício 12 Use o critério de Leibnitz para justificar que as séries alternadas seguintes são convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercício 13 Usando um teste adequado, decida sobre a natureza das séries apresentadas a seguir e, em caso de convergência, indique se a convergência é simples ou absoluta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}$; i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5}{3\cdot 2^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$; j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6+7n}$; g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$; k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{1}{n}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4+\cos n}{n^3}$; l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2+1}$.