1. **Noções de majorante, minorante, supremo, ínfimo, máximo e mínimo**
   Seja $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Define-se:

   - $b \in \mathbb{R}$ é um majorante de $\mathbf{A}$ se $\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \leq b$.
   - $b \in \mathbb{R}$ é um minorante de $\mathbf{A}$ se $\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow b \leq x$.
   - $\mathbf{A}$ é um conjunto majorado se tiver pelo menos um majorante.
   - $\mathbf{A}$ é um conjunto minorado se tiver pelo menos um minorante.
   - $\mathbf{A}$ é um conjunto limitado se for majorado e minorado.
   - Se $\mathbf{A}$ é um conjunto majorado, o supremo de $\mathbf{A}$ é o menor dos majorantes e representa-se por sup $\mathbf{A}$.
   - Se $\mathbf{A}$ é minorado, o ínfimo de $\mathbf{A}$ é o maior dos minorantes e representa-se por inf $\mathbf{A}$.
   - Se no conjunto $\mathbf{A}$ existe um elemento **a** maior que todos os outros, **a** diz-se um máximo de $\mathbf{A}$ e representa-se por max $\mathbf{A}$.
   - Se no conjunto $\mathbf{A}$ existe um elemento **a** menor que todos os outros, **a** diz-se um mínimo de $\mathbf{A}$ e representa-se por min $\mathbf{A}$.

   Nota:
   Se $\sup \mathbf{A} \subset \mathbf{A}$ então existe max $\mathbf{A}$ e

   $$\sup \mathbf{A} = \max \mathbf{A}$$

   Do mesmo modo, se $\inf \mathbf{A} \subset \mathbf{A}$ então existe min $\mathbf{A}$ e

   $$\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A}$$

2. **Noções topológicas em $\mathbb{R}$**

   - Define-se distância entre dois pontos x e y da recta real:

     $$\text{dist}(x, y) = |x - y|$$

   - dado $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ define-se vizinhança de centro em a e raio ε e representa-se por $\mathcal{V}_\varepsilon(a)$ como sendo o conjunto dos números reais cuja distância a a é inferior a ε, isto é:

     $$\mathcal{V}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

   - Seja $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que:
     - a é ponto interior de $\mathbf{A}$ se existe uma vizinhança de a contida em $\mathbf{A}$, isto é se:

       $$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$$

     - a é ponto exterior de $\mathbf{A}$ se existe uma vizinhança de a cuja intersecção com $\mathbf{A}$ seja o vazio, isto é se:

       $$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A = \emptyset$$

- a diz-se ponto fronteiro se não é ponto interior nem ponto exterior isto é se:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A^c \neq \emptyset$$
- a diz-se ponto aderente de **A** se é ponto interior ou fronteiro.

- Chama-se:
  - **Interior** de **A**, e representa-se por **int A**, o conjunto dos pontos interiores de **A**;
  - **Exterior** de **A**, e representa-se por **ext A**, o conjunto dos pontos exteriores de **A**;
  - **Fronteira** de **A**, e representa-se por **front A**, o conjunto dos pontos fronteiros de **A**;
  - **Aderência** ou **Fecho** de **A**, e representa-se por **ad A** ou $\overline{\mathbf{A}}$, o conjunto dos pontos aderentes de **A**, ou seja:
    ad A $=$ **fr A** $\cup$ **int A**

  Nota: $\forall\, \mathbf{A} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{intA} \cup \mathbf{frontA} \cup \mathbf{extA} = \mathbb{R}$.

- Um conjunto **A** diz-se
  - **aberto** se $\mathbf{A} = \mathbf{intA}$;
  - **fechado** se $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$;
  - $a \in \mathbb{R}$ diz-se um **ponto de acumulação** de **A** se em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um ponto de **A** distinto de a, isto é:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \big(\mathcal{V}_\varepsilon(a) \backslash \{a\}\big) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$$

- $a \in \mathbf{A}$ diz-se **um ponto isolado** se não é ponto de acumulação;
- Ao conjunto dos pontos de acumulação de **A** chama-se **Derivado** de **A** e representa-se por $\mathbf{A}'$.
  Nota: um ponto de acumulação dum conjunto pode ou não pertencer ao conjunto, um ponto isolado dum conjunto é um <u>elemento</u> do conjunto.
- Um conjunto **A** diz-se **compacto** se é limitado e fechado;
- Dois conjuntos **A** e **B** dizem-se separados se cada um deles está contido no exterior do outro, isto é:
$$\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} = \emptyset \quad \wedge \quad \overline{\mathbf{B}} \cap \mathbf{A} = \emptyset$$
- Um conjunto diz-se **conexo** se não é união de dois conjuntos separados; diz-se **desconexo** caso contrário.
  Exemplo: $\mathbf{A} =]1,3] \cup]4,6]$ é desconexo.

3. **Exemplo:** A $=]0,2[\cup]2,5[\cup \{-2\}$
   Minorantes A $=]-\infty, -2]$, sup A $= 5$, A não tem máximo;
   Majorantes A $= [5, +\infty[$, inf A $= -2$, min A $= -2$. A é limitado.
   int A $=]0,2[\cup]2,5[$, front A $= \{-2, 0, 2, 5\}$,ad A $= [0,5] \cup \{-2\}$
   A não é aberto nem fechado. Não é compacto e é desconexo.