Uma companhia pretende determinar o seu plano óptimo de produção, o qual permite obter um lucro máximo. São fabricados três produtos - A, B e C - e são utilizados dois recursos - mão-de-obra e matéria-prima. Para resolver este problema foi usado o seguinte modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar} \quad Z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ &\textit{Sujeito a}: \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 45 & (mao-de-obra) \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 30 & (materia\ prima) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as quantidades de A, B e C, respectivamente.

Seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ a matriz que produz a solução óptima. Construa o quadro óptimo, identificando claramente as variáveis básicas, e responda a cada uma das seguintes alíneas:

a) Determine a gama de valores admissíveis para o lucro unitário do produto A, sem que a solução óptima se modifique. Qual a solução óptima para $C_1 = 2$?

b) Qual deverá ser o lucro do produto B para que a sua produção seja atractiva?

c) Suponha que é possível adquirir adicionalmente 10 unidades de material a um custo de 5 UM. Será vantajoso fazer essa aquisição?

d) Uma ruptura de stock no fornecedor de matéria-prima, só permite dispor de 20 unidades. Esta redução afecta a solução óptima?

e) Devido a uma pequena reformulação do produto B, o requisito de material no fabrico deste produto é reduzido de 4 para 2 unidades. Será que esta alteração afectará a solução óptima? Porquê?

f) Suponha que, devido a um processo de controlo da qualidade dos produtos, uma restrição adicional é imposta, a qual se pode traduzir por $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. Neste caso, qual será a nova solução óptima?

g) A empresa pretende lançar o produto D. Este produto consome 1 unidade de mão-de-obra e 2 unidades de matéria. Se o lucro for 3 UM, o produto D deverá ser produzido?

Quadro inicial

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{s}$	
$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{z}$	$-\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$

Quadro Final

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{s}$	
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{B^{-1} A}$	$\boldsymbol{B^{-1}}$	$\boldsymbol{B^{-1} b}$
$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}A - c}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}}$	$\boldsymbol{c_B B^{-1}b}$

Solução óptima inicial

$$
\begin{array}{c|ccc|cc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 5 \\
x_3 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \\
\hline
 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 35
\end{array}
$$

a) Determine a gama de valores admissíveis para o lucro unitário do produto A, sem que a solução óptima se modifique. Qual a solução óptima para $C_1 = 2$?

$$
\begin{array}{c|ccc|cc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 5 \\
x_3 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \\
\hline
 & 0 & 4-\frac{p}{3} & 0 & -1+\frac{p}{3} & 2-\frac{p}{3} & 5\,(3+p)
\end{array}
$$

d) Uma ruptura de stock no fornecedor de matéria-prima, só permite dispor de 20 unidades. Esta redução afecta a solução óptima?

$$
\begin{array}{c|ccc|cc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 15-\frac{p}{3} \\
x_3 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -9+\frac{2p}{5} \\
\hline
 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 15+\frac{2p}{3}
\end{array}
$$

Modelo na forma normal

$$\text{Maximizar } z = 4u_1 + u_2 + 5u_3 + 0u_4 + 0u_5$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} 6u_1 + 3u_2 + 5u_3 + u_4 \quad\quad &= 45 \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \quad\quad + u_5 &= 30 \end{aligned}$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0$$

Temos

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Construir "interior" Quadro Simplex

$$B^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	5
0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3

Quais são as variaveis básicas?

Por inspecção do Quadro identificamos as colunas a_1 e a_3 como sendo as que formam a matriz identidade

Então $c_B = [4 \quad 5]$

$$c_B \cdot B^{-1} \cdot A - c = [4 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - [4 \quad 1 \quad 5]$$

$$= [4 \quad \tfrac{11}{3} \quad 5] - [4 \quad 1 \quad 5]$$

$$= [0 \quad \tfrac{8}{3} \quad 0]$$

$$c_B \cdot B^{-1} = [4 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = [\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3}]$$

$$c_B \cdot B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} = 35$$

Quadro Simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	5
x_3	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	3
	0	$8/3$	0	$1/3$	$2/3$	35

Solução optima

$x_1 = 5$ $\quad x_2 = 0$ $\quad z = 35$

$x_3 = 3$ $\quad x_4 = x_5 = 0$

a) intervalo de variação do lucro de x_1, actualmente $c_1 = 4$

x_1 é variável básica

alterar $c_1 \rightarrow p$

altera c e c_B $\quad c' = [p \;\; 1 \;\; 5]$

$c_B' = [p \;\; 5]$

Temos de recalcular

$$c_B' B^{-1}.A - c'$$

$$c_B' B^{-1}$$

$$c_B' B^{-1}.b$$

$$c_B' B^{-1}.A - c' = \begin{bmatrix} p & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & -p/3 + 5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -p/3 + 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} p & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p/3 - 1 & -p/3 + 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B' B^{-1}.b = \begin{bmatrix} p/3 - 1 & -p/3 + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} = 5p + 15$$

Para que a solução permaneça óptima tem de se ter

$$c_B' B^{-1} A - c' \geq 0 \quad \wedge \quad c_B' B^{-1} \geq 0$$

$$\begin{cases} -p/3 + 4 \geq 0 \\ p/3 - 1 \geq 0 \\ -p/3 + 2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p \leq 12 \\ p \geq 3 \\ p \leq 6 \end{cases}$$

$$p \in \left]3, 6\right[$$

$$p = 2 \implies \begin{cases} c_B' B^{-1} . A - c' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix} \\ c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \\ c_B' B^{-1} . b = 25 \end{cases}$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	
u_1	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	5 →
u_3	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	3
	0	$10/3$	0	$-1/3$	$4/3$	25
				↑		

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	
u_4	3	-1	0	1	-1	15
u_3	3/5	4/5	1	0	1/5	6
	1	3	0	0	1	30

$$\begin{array}{rcccccc} & 0 & 1 & 1 & -1/5 & 2/5 & 3 \\ + & 3/5 & -1/5 & 0 & 1/5 & -1/5 & 3 \\ \hline & 3/5 & 4/5 & 1 & 0 & 1/5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} & 0 & 10/3 & 0 & -1/3 & 4/3 & 25 \\ + & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}$$

∴ Lucro u_1 caiu, logo u_1 sai da base e valor da função objectivo diminui.

b) O lucro de u_2 deve aumentar $8/3$ para que u_2 passe a ser uma variavel atractiva.

Coluna de u_2 no quadro final

$$\begin{array}{c} u_2 \\ \hline -1/3 \\ 1 \\ \hline 8/3 \end{array}$$

→ valor a aumentar ao lucro actual de 1 para que u_2 entre para a base

e) Em primeiro lugar é necessário saber se as 10 unidades adicionais pertencem todas ao mesmo intervalo de variação permitida sem que a solução se altere. Deste modo todas as 10 unidades terão o mesmo contributo para o lucro.

$$b = \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} \longrightarrow b' = \begin{bmatrix} 45 \\ p \end{bmatrix}$$

Esta alteração em b implica recalcular

$$B^{-1} \cdot b' = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 45 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - p/3 \\ -9 + 2p/5 \end{bmatrix}$$

A solução não se altera se $B^{-1} \cdot b' \geq 0$

$$\begin{cases} 15 - p/3 \geq 0 \\ -9 + 2p/5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p \leq 45 \\ p \geq 45/2 \end{cases} \quad p \in \left] 45/2 , 45 \right[$$

As 10 unidades adicionais faz com que o recurso seja 30+10 = 40 um valor dentro do intervalo, e por isso as 10 unidades têm o mesmo valor

Preço sombra de u_5 — lucro adicional que uma unidade adicional do recurso matéria prima proporciona se for adquirida

coluna de u_5 $\quad \dfrac{u_5}{-1/3}$

$$\frac{2/5}{2/3}$$ preço sombra de u_5

$10 * 2/3 = 20/3 \simeq 6{,}67$ UM de ganho

na função objectivo que as 10 unidades proporcionariam se fossem adquiridas

Esta aquisição tem um custo de 5 UM para porporcionar um aumento de 6,67 UM

$\therefore$ interessa adquirir 10 unidades pelo valor de 5 UM.

d) Na alínea anterior foi calculado o intervalo de variação permitido à matéria prima.

$$b_2 \in \left] \frac{45}{2} , 45 \right[$$

Como o valor $b_2 = 20$ não pertence ao intervalo, então a solução será afectada

$$B^{-1} \cdot b' = \begin{bmatrix} 15 - \frac{p}{3} \\ -9 + \frac{2p}{5} \end{bmatrix}$$ (da alínea c)

$$b_2 = p = 20 \implies B^{-1} \cdot b' = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_B \cdot B^{-1} \cdot b' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{85}{3}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	$\frac{25}{3}$
x_3	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	-1
	0	$8/3$	0	$1/3$	$2/3$	$\frac{85}{3}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	$4/3$	$5/3$	0	$1/3$	$20/3$
x_4	0	-5	-5	1	-2	5
	0	$13/3$	$5/3$	0	$4/3$	$80/3$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{25}{3} \\ +\,0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \hline 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 0 & 8/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 85/3 \\ +\,0 & 5/3 & 5/3 & -1/3 & 2/3 & -5/3 \\ \hline 0 & 13/3 & 5/3 & 0 & 4/3 & 80/3 \end{array}$$

∴ Com menos matéria-prima deixa-se de produzir x_3 aumentando a produção de x_1. Esta diminuição de matéria-prima diminui o lucro total.

e) Alteração da coluna de x_2

$$A_{|x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow A^?_{|x_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

temos de recalcular (só para a coluna x_2)

$$B^{-1} A^?_{|x_2}$$

$$C_B \cdot B^{-1} \cdot A^?_{|x_2} - c$$

$$B^{-1} \cdot A'_{|u_2} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$C_B \cdot B^{-1} \cdot A'_{|u_2} - c_{|u_2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$= 7/3 - 1 = \frac{4}{3}$$

u_2
$1/3$
$1/5$
$4/3$

∴ Como este valor é positivo então a diminuição de consumo de matéria-prima de 4 para 2 unidades não afecta a solução óptima.

f) Nova restrição $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

Em primeiro lugar verificamos se a solução óptima corrente respeita a restrição.

$x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$

$5 + 0 + 3 \leq 6$

$8 \leq 6$ Falso

Então a nova restrição irá alterar a solução optima

$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	0	5
x_3	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	0	3
x_6	1	1	1	0	0	1	6
	0	$8/3$	0	$1/3$	$2/3$	0	35

"perdeu-se" a matriz identidade nas colunas de x_1 e x_3.

Validando o Quadro Simplex

$L\|_{u_6}$	1	1	1	0	0	1	6
$-L\|_{u_1}$	-1	$1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	0	-5
$-L\|_{u_3}$	0	-1	-1	$1/5$	$-2/5$	0	-3
$+$							
	0	$1/3$	0	$-2/15$	$-1/15$	1	-2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
u_1	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	0	5
u_3	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	0	3
u_6	0	$1/3$	0	$-2/15$	$-1/15$	1	-2 ←
	0	$8/3$	0	$1/3$ ↓	$2/3$	0	35

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
u_1	1	$1/2$	0	0	$-1/2$	$5/2$	0
u_3	0	$1/2$	1	0	$1/2$	$-3/2$	6
u_4	0	$-5/2$	0	1	$1/2$	$-15/2$	15
	0	$7/2$	0	0	$1/2$	$5/2$	30

g) Novo produto D – variável y_1

Altera-se matriz A com adição de uma coluna

$$A \rightarrow A'_{|y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e vector da função objectivo com $c_{|y} = 3$

tem de se recalcular

$$B^{-1} \cdot A'_{|y} \quad e \quad C_B\, B^{-1} A'_{|y} - c'_{|y}$$

$$B^{-1} \cdot A'_{|y} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$C_B\, B^{-1} \cdot A'_{|y} - c'_{|y} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 \\ 3/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = -\frac{4}{3}$$

$\therefore$ O produto D deverá ser produzido

	u_1	u_2	u_3	y	u_4	u_5	
u_1	1	$-1/3$	0	$-1/3$	$1/3$	$-1/3$	5
u_3	0	1	1	$3/5$	$-1/5$	$2/5$	3 →
	0	$8/3$	0	$-4/3$ ↑	$1/3$	$2/3$	35

	u_1	u_2	u_3	y	u_4	u_5	
u_1	1	$2/9$	$5/9$	0	$2/9$	$-1/9$	$20/3$
y	0	$5/3$	$5/3$	1	$-1/3$	$2/3$	5
	0	$44/9$	$20/9$	0	$-1/9$	$14/9$	$125/3$

	u_1	u_2	u_3	y	u_4	u_5	
u_4	$9/2$	1	$5/2$	0	1	$-1/2$	30
y	$3/2$	2	$5/2$	1	0	$1/2$	15
	$1/2$	5	$5/2$	0	0	$3/2$	45

A adição do novo produto implica que a nova solução optima seja a produção exclusiva deste produto aumentando o lucro total de 35 para 45 UM.