Derivadas

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se* **derivável em x_0** $\in X \cap X'$ *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$.

Ao valor real d *chama-se* **derivada de f em x_0** *e escreve-se* $f'(x_0) = d$ *ou* $Df(x_0) = d$.

Nota

Observe-se que, considerando h *tal que* $x_0 + h \in \mathrm{Dom}\, f$, *e fazendo a mudança de variável* $x = x_0 + h$, *obtemos que*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável em* $c \in X \cap X'$*, a recta de equação* $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ *designa-se por* **recta tangente ao gráfico de** $\boldsymbol{f}$ *em* $(c, f(c))$*.*

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável em* $c \in X \cap X'$*, chama-se* **recta normal ao gráfico de** $\boldsymbol{f}$ *em* $(c, f(c))$ *à recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de* f *nesse ponto.*

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se* **derivável** *se* f *for derivável em todos os pontos de* X.

A função $\begin{array}{rccc} f' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ *diz-se a* **função derivada de** $\boldsymbol{f}$.

Teorema

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função,* $x_0 \in X \cap X'$. *Se* f *é derivável em* x_0 *então* f *é contínua em* x_0.

Corolário

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável. Então* f *é contínua.*

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se*

- **derivável à direita em** $\boldsymbol{x_0}$ $\in X \cap X'_+$ *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$. *Ao valor real* d *chama-se* **derivada à direita de f em** $\boldsymbol{x_0}$ *e escreve-se* $f'(x_0^+) = d$;
- **derivável à esquerda em** $\boldsymbol{x_0}$ $\in X \cap X'_-$ *se existe* $d \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$. *Ao valor real* d *chama-se* **derivada à esquerda de f em** $\boldsymbol{x_0}$ *e escreve-se* $f'(x_0^-) = d$.

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função,* $x_0 \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. *Então*

$$f \text{ derivável em } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{existem } f'(x_0^+) \text{ e } f'(x_0^-) \\ \text{e} \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-). \end{array}$$

Regras de derivação

Proposição

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis em* $x_0 \in X \cap X'$*. Então:*

1. $f + g$ *é derivável em* x_0 *e*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

2. *dado* $\lambda \in \mathbb{R}$, λf *é derivável em* x_0 *e*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0);$$

3. fg *é derivável em* x_0 *e*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

4. *se* $g(x_0) \neq 0$ *então* $\dfrac{f}{g}$ *é derivável em* x_0 *e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Teorema

Sejam X, Y *subconjuntos de* $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções,* $c \in X \cap X'$, $f(c) \in Y'$. *Suponhamos que* f *é derivável em* c *e que* g *é derivável em* $f(c)$. *Então* $g \circ f$ *é derivável em* c *e*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Teorema

Sejam X *e* Y *subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$ *uma função bijectiva e suponhamos que:*

1. f *é derivável em* $c \in X \cap X'$;
2. $f'(c) \neq 0$;
3. f^{-1} *é contínua em* $f(c)$.

Então f^{-1} *é derivável em* $f(c)$. *Além disso,*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Alguns teoremas envolvendo derivadas

Teorema

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $c \in X \cap X'$ *e tal que* $f'(c) \neq 0$*.*
Então ,

$$f'(c) > 0 \Longrightarrow$$
$$\exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in\, X \cap]c - \delta, c[\, \forall\, y \in\, X \cap]c, c + \delta[\quad f(x) < f(c) < f(y),$$

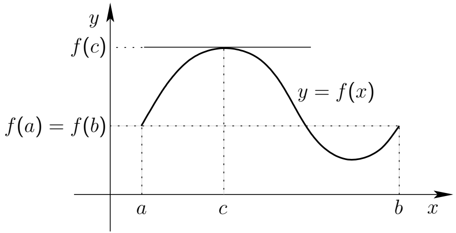
$$f'(c) < 0 \Longrightarrow$$
$$\exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in\, X \cap]c - \delta, c[\, \forall\, y \in\, X \cap]c, c + \delta[\quad f(x) > f(c) > f(y).$$

Teorema

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $c \in X \cap X'$. *Se* c *é um ponto de extremo de* f *então* $f'(c) = 0$.

Teorema (de Rolle)

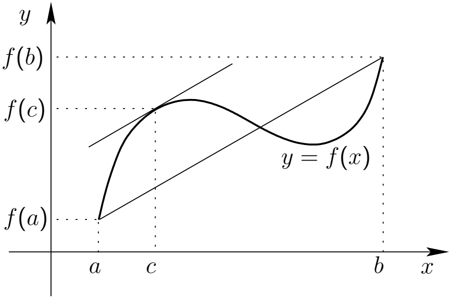
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a, b[$ *e tal que* $f(a) = f(b)$. *Então existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.



Teorema (de Lagrange)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a, b[$.
Então

$$\exists\, c \in\,]a, b[\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a, b[$. *Se* $f'(x) = 0$ *para todo o* $x \in]a, b[$ *então* f *é constante.*

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, derivável em* $]a, b[$.

1. *Se* $f'(x) > 0$ *para todo o* $x \in]a, b[$ *então* f *é estritamente crescente.*
2. *Se* $f'(x) < 0$ *para todo o* $x \in]a, b[$ *então* f *é estritamente decrescente.*

Teorema (de Cauchy)

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas, deriváveis em* $]a, b[$. *Então*

$$\exists\, c \in]a, b[\qquad [f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Teorema (de Darboux)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável. Então*

$f'([a, b])$ *contém o intervalo fechado de extremos* $f'(a)$ *e* $f'(b)$*.*

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável tal que* $f'(a)f'(b) < 0$*.*
Então existe $c \in \,]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Corolário

Sejam I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função derivável.*
Então $f'(I)$ *é um intervalo.*

Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam a, b *números reais,* $a < b$, $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis. Seja* $c \in \{a, b\}$ *e suponhamos que*

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ *e que existe* $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Então existe $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nota

A Regra de l'Hôpital é também válida:

1. *quando se calcula o limite quando* $x \to +\infty$ *ou quando* $x \to -\infty$*;*
2. *considerando, no teorema anterior,*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = +\infty \quad \textit{ou} \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = -\infty$$

e tomando $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Derivadas de ordem superior

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $c \in X' \cap X$. Diz-se que f é **duas vezes derivável em c**, *ou que f tem* **derivada de 2ª ordem em c** *ou que f tem* **segunda derivada em c** *se*

$$\exists\, \delta > 0 \ g = f'_{|_{X\cap\,]c-\delta, c+\delta[}} \text{ é derivável em } c.$$

Representa-se a segunda derivada de f em c por

$$f''(c) \text{ ou } f^{(2)}(c) \text{ ou } D^2 f(c).$$

Diz-se que f **tem derivada de 2ª ordem** *se f é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que $X \subseteq X'$).*

À função $\begin{array}{rccc} f'' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f''(x) \end{array}$ *chama-se* **função segunda derivada de f**.

Nota

Indutivamente define-se **derivada de ordem n de f em c** *e a* **função derivada de ordem n de f**.
Denota-se a derivada de f de ordem n por $f^{(n)}$ ou $D^n f$.
Convenciona-se que $f^{(0)} = f$.

Teorema

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite segunda derivada em $c \in X \cap X'$. Suponhamos que $f'(c) = 0$. Então, se $f''(c) > 0$, c é um ponto de mínimo local de f e se $f''(c) < 0$, c é um ponto de máximo local de f.

Definição

Seja X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *tal que* $X \subseteq X'$. *Dado* $k \in \mathbb{N}_0$, *chama-se* **conjunto das funções de** $\boldsymbol{X}$ **em** $\mathbb{R}$ **deriváveis até à ordem** $\boldsymbol{k}$ *ao conjunto*

$$\mathscr{D}^k(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } X\}.$$

Chama-se **conjunto das funções de** $\boldsymbol{X}$ **em** $\mathbb{R}$ **indefinidamente deriváveis** *ao conjunto*

$$\mathscr{D}^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ admite derivada de qualquer ordem em } X\}.$$

Definição

Seja X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *tal que* $X \subseteq X'$. *Dado* $k \in \mathbb{N}_0$, *chama-se* **conjunto das funções de classe** $\boldsymbol{\mathscr{C}^k}$ **de** $\boldsymbol{X}$ **em** $\mathbb{R}$ *ao conjunto*

$$\mathscr{C}^k(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ é } k \text{ vezes derivável em } X \text{ e } f^{(k)} \text{ é contínua}\}$$

Chama-se **conjunto das funções de classe** $\boldsymbol{\mathscr{C}^\infty}$ **de** $\boldsymbol{X}$ **em** $\mathbb{R}$

Teorema

Seja I um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}^0(I) \supseteq \mathscr{C}^0(I) \supseteq \mathscr{D}^1(I) \supseteq \mathscr{C}^1(I) \supseteq \cdots \\ &\qquad \cdots \supseteq \mathscr{D}^n(I) \supseteq \mathscr{C}^n(I) \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{D}^\infty(I) = \mathscr{C}^\infty(I), \end{aligned}$$

sendo as inclusões estritas.