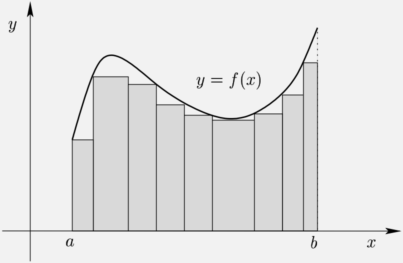
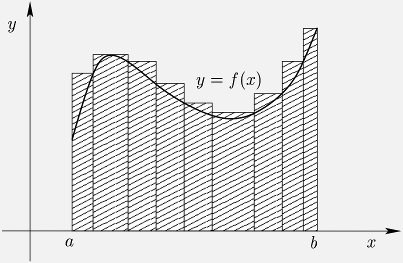
Integral de Riemann

Vamos considerar funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas, isto é,

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ \exists\, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a, b] \qquad \alpha \leq f(x) \leq \beta.$$





$s(f, P)$ – área a cheio

$S(f, P)$ – área a tracejado

Definição

Dado um intervalo $[a, b]$, *seja* $\Upsilon = \{$*partições de* $[a, b]\}$.
Define-se *integral superior de* f *do seguinte modo:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{P \in \Upsilon} \{S(f, P)\}.$$

Define-se *integral inferior de* f *do seguinte modo:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{P \in \Upsilon} \{s(f, P)\}.$$

Definição

Dados um intervalo $[a, b]$ *e uma função* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f *diz-se integrável em* $[a, b]$ *se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

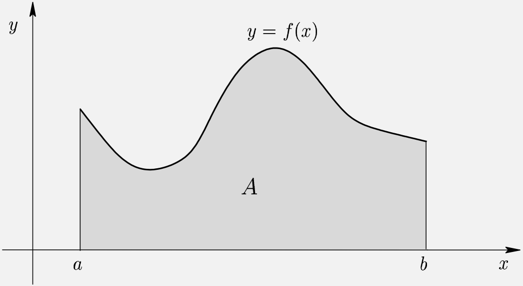
A este valor comum chama-se integral de f *(ou integral definido de* f*) e denota-se por*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_a^b f.$$

Interpretação geométrica do integral de Riemann:

Dada uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ não negativa, integrável, seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



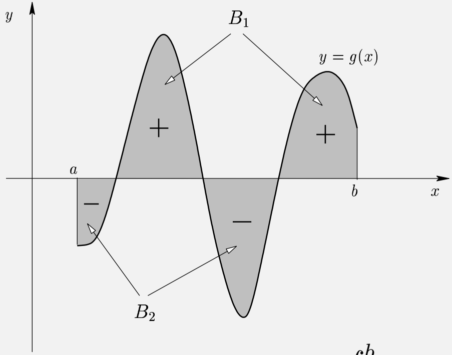
Chamamos área de A ao valor do integral de f em $[a, b]$, isto é,

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Seja agora $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Sejam

$$B_1 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \; g(x) > 0, \; 0 < y \leq g(x)\},$$

$$B_2 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \; g(x) < 0, \; g(x) \leq y < 0\}.$$



$$\text{área de } B_1 - \text{ área de } B_2 = \int_a^b f(x)\, dx$$

Propriedades do integral definido

Proposição

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções integráveis. Então:*

1. *Se* $c \in \,]a, b[$, *então* $f_{|_{[a,c]}}$ *e* $f_{|_{[c,b]}}$ *são integráveis e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. *Para todo o* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ *é integrável e*

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$

3. $f + g$ *é integrável e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Propriedades do integral definido

4. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo o* $x \in [a, b]$ *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. *Em particular, se* $f(x) \geq 0$ *para todo o* $x \in [a, b]$*, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0;$$

6. $|f|$ *é integrável e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

7. $f \cdot g$ *é integrável.*

Teorema

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então* f *é integrável.*

Nota

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função descontínua apenas num número finito de pontos. Então* f *é integrável.*

Teorema

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada e monótona. Então* f *é integrável.*

Nota

Convenção: *Por uma questão de comodidade, não queremos estar preocupados com o facto do extremo superior de integração ser ou não maior ou igual ao extremo inferior. Assim, convenciona-se que, se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função integrável,*

$$\forall\, c,\ d \in [a, b] : c \leq d \qquad \int_d^c f(x)\, dx = -\int_c^d f(x)\, dx.$$

As propriedades do integral definido apresentadas anteriormente mantêm-se válidas após esta generalização.

Os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad f_{\big|_{[a,x]}} \text{ é integrável.}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} F : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt. \end{array}$$

Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que f é contínua em $c \in [a, b]$. Então a função F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f admite primitiva.

Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e F uma primitiva de f. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Nota

O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo justifica a utilização do símbolo $\int f(x)\,dx$ para denotar o conjunto das primitivas de uma função f.

Notação: Nas condições do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, denota-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big]_a^b \underset{\textbf{Notação}}{=} F(b) - F(a).$$

Teorema

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis tais que* f' *e* g' *são integráveis. Então é válida a*

fórmula de integração por partes no integral definido

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Teorema (Integração por mudança de variável)

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável,* $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ *uma função bijectiva com derivada nunca nula no intervalo* $]c, d[$. *Então é válida a seguinte*

fórmula de integração por substituição no integral definido

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\; dt.$$

Teorema (do Valor Médio para Integrais)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então*

$$\exists\, c \in \,]a, b[\qquad \int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b - a).$$