# Apontamentos de Análise Matemática III

(Resumo das aulas teóricas)

Mestrado Integrado em Engenharia Biológica

Lucile Vandembroucq

## Conteúdo

# 1 Equações diferenciais ordinárias de $1^a$ ordem

## 1.1 Vocabulário geral e Teorema de Existência e Unicidade

Uma **equação diferencial ordinária (EDO) de $1^a$ ordem** é uma equação cuja incógnita é uma função real de uma variável real e que se escreve em termos da variável (denotada, por exemplo, por $x$), da função incógnita (denotada, por exemplo, por $y$) e da derivada da $1^a$ ordem dela (denotada por $y'$ ou por $\dfrac{dy}{dx}$).

As equações diferenciais da $1^a$ ordem que vamos estudar serão equações que poderão sempre escrever-se sob a forma

$$y'(x) = F(x, y(x)) \text{ ou, mais brevemente, } y' = F(x, y)$$

onde $F$ é uma função definida e contínua num aberto $D$ de $\mathbb{R}^2$.

Chamamos **solução** da equação $y' = F(x, y), \quad (x, y) \in D$ a uma função $y$ definida e de classe $C^1$ num intervalo aberto $I$ de $\mathbb{R}$ que verifica:

(i) $\forall x \in I \quad (x, y(x)) \in D$,

(ii) $\forall x \in I \quad y'(x) = F(x, y(x))$.

Uma solução $y$, definida num intervalo $I$, é dita **maximal** se não for prolongável a uma outra solução da equação definida num intervalo aberto $J$ tal que $I \subset J$ e $I \neq J$.

Uma solução $y$, definida num intervalo $I$, é uma solução **constante** ou solução de **equilíbrio** se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x \in I$, $y(x) = \lambda$. Essas soluções são caracterizadas por $y' = 0$.

Seja $(x_0, y_0) \in D$. Diz-se que $y : I \to \mathbb{R}$ *passa* pelo ponto $(x_0, y_0)$ se $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$.

**Teorema de Existência e Unicidade (TEU).** *Seja $(\mathcal{E}) \quad y' = F(x, y), \quad (x, y) \in D$ uma equação diferencial de $1^a$ ordem (com $F$ contínua) e seja $(x_0, y_0) \in D$. Se a derivada parcial $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existe e é contínua em $D$ então:*

*i) existe uma solução maximal de $(\mathcal{E})$ que passa por $(x_0, y_0)$;*

*ii) se $I$ é um intervalo aberto contendo $x_0$ e se $y_1$ e $y_2$ são duas soluções de $(\mathcal{E})$ definidas em $I$ que passam ambas pelo ponto $(x_0, y_0)$ então são iguais: $\forall x \in I, \quad y_1(x) = y_2(x)$.*

O TEU garante que o seguinte **problema com condição inicial**

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução maximal. Resolver um tal problema consiste portanto em determinar e descrever esta solução maximal.

O TEU também garante que, sem condição inicial prescrita, a equação diferencial $y' = F(x, y)$ admite uma infinidade de soluções. Resolver a equação consiste em determinar todas as suas soluções. Toda a solução sendo ou uma solução maximal ou a restrição de uma solução maximal, chegará, para resolver uma equação, determinar apenas as soluções maximais dessa equação.

## 1.2 Equações diferenciais lineares de $1^a$ ordem

**Definição.** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma equação diferencial (ordinária) linear de $1^a$ ordem em $I$ é uma equação diferencial do tipo

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad x \in I$$

onde $a, b$ e $c$ são funções (conhecidas) contínuas em $I$ e, para todo o $x \in I$, $a(x) \neq 0$.

De maneira equivalente, podemos dizer que uma equação diferencial linear de $1^a$ ordem em $I$ é uma equação diferencial do tipo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad x \in I$$

onde $p$ e $q$ são funções (conhecidas) contínuas em $I$.

**Resolução das equações diferenciais lineares de $1^a$ ordem.**

Uma maneira de resolver uma equação do tipo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \quad x \in I$$

baseia-se sobre o facto que, sendo $P(x)$ uma primitiva de $p(x)$, tem-se, para todo o $x \in I$,

$$e^{P(x)}(y'(x) + p(x)y(x)) = (y(x)e^{P(x)})'$$

Assim, multiplicando toda a equação por $e^{P(x)}$, o primeiro membro é transformado em $(y(x)e^{P(x)})'$ o que permite, depois de integreção, determinar a forma geral de $y(x)$.

**Nota.** A resolução mostra que as soluções maximais de uma equação linear em $I$ são definidas em tudo $I$.

## 1.3 Equações separáveis

**Definição.** Uma equação diferencial ordinária de $1^a$ ordem é dita *separável* se pode ser reduzida a uma equação diferencial do tipo

$$y' = g(x)h(y)$$

onde $g$ é uma função real contínua e não identicamente nula num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $h$ é uma função real contínua num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$.

**Resolução das equações separáveis.**

Consideremos a seguinte equação separável

$$(\mathcal{E}) \quad y' = g(x)h(y), \quad x \in I, y \in J$$

em que $h$ é de classe $C^1$ em $J$.

1) Determinação das soluções constantes.

**Proposição.** *As soluções constantes (maximais) de* $(\mathcal{E})$ *são as funções* $y : I \to \mathbb{R}$ *dadas por* $y(x) = \lambda$ *onde* $\lambda \in J$ *é um zero de* $h$.

2) Determinação das soluções não constantes.

O TEU permite reduzir a determinação das soluções não constantes da equação

$$(\mathcal{E}) \quad y' = g(x)h(y), \quad x \in I, y \in J$$

à resolução de equações do tipo

$$y' = g(x)h(y), \quad x \in I, y \in J'$$

onde $J'$ é um subintervalo de $J$ em que $h$ nunca se anula.

Sob a condição $y \in J'$, temos

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

e basta integrar ambos os lados.
Mais precisamente, sendo $H$ uma primitiva de $\frac{1}{h}$ em $J'$, isto é $\frac{dH}{dy} = \frac{1}{h}$, as soluções da equação

$$y' = g(x)h(y), \quad x \in I, y \in J'$$

são *implicitamente* dadas por

$$H(y) = \int g(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sempre que possível, determinaremos *explicitamente* as soluções (o que poderá conduzir a restrições sobre os valores da constante $C$ e sobre o domínio) e apresentaremos as soluções na seguinte forma

$$y(x) = ..., \; C \in ..., \; x \in ...$$

**Nota.** Na prática a resolução de uma equação separável pode fazer-se "separando as variáveis":

$$y' = g(x)h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C, C \in \mathbb{R}...$$

## 1.4 Mudança de função incógnita

A técnica da mudança de função incógnita consiste em transformar uma determinada equação diferencial (digamos de função incógnita $y(x)$) numa outra equação diferencial (digamos de função incógnita $v(x)$) que sabemos resolver. Deste modo podemos resolver a nova equação diferencial (em $v(x)$) e deduzir das soluções dessa equação as soluções da equação inicial.

### 1.4.1 Equações homogéneas

**Definição.** A equação diferencial de $1^a$ ordem

$$y' = F(x, y), \quad (x, y) \in D$$

é dita homogénea se, para todo $(x, y) \in D$, tem-se $F(tx, ty) = F(x, y)$ desde que $t \neq 0$ e $(tx, ty) \in D$.

**Ideia da resolução.** A mudança de função incógnita

$$y(x) = xv(x)$$

vai transformar uma equação homogénea $y' = F(x, y)$ numa equação separável $v' = g(x)h(v)$.

### 1.4.2 Equação de Bernoulli

**Definição.** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma *equação de Bernoulli* é uma equação diferencial do tipo

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), \quad x \in I$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $a, b$ são funções contínuas em $I$.

**Nota.** Se $k = 0$ ou $1$ a equação é linear e, em todos os casos, $y = 0$ é solução.

**Ideia da resolução.** Quando $k \notin \{0, 1\}$, a mudança de função incógnita

$$y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-k}} \qquad \big( \Leftrightarrow z(x) = (y(x))^{1-k} \big)$$

transforma a equação

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^k(x), \quad x \in I, y > 0$$

numa equação diferencial linear (de função incógnita $z(x)$).

**Nota.** Se a condição sobre $y$ for $y < 0$, podemos através de uma primeira mudança de função incógnita $v = -y$, colocar-nos nas condições da situação anterior.

## 1.5 Equações exactas

**Definição.** Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas. Suponhamos que $Q$ nunca se anula em $D$ e consideremos a seguinte equação diferencial ordinária de $1^a$ ordem

$$(\mathcal{E}) \quad P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (x, y) \in D.$$

Esta equação diferencial é dita *exacta* em $D$ se existir uma função $H : D \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que

$$\forall (x, y) \in D, \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

ou seja, tal que

$$\forall (x, y) \in D, \quad \nabla H(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

### 1.5.1 Resolução de uma equação exacta

**Proposição.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas tais que $Q$ nunca se anula em $D$. Suponhamos que a seguinte equação diferencial*

$$(\mathcal{E}) \quad P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (x, y) \in D$$

*é exacta e seja $H : D \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que $\forall (x, y) \in D, \quad \nabla H(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Então, as soluções da equação $(\mathcal{E})$ são as funções $y$ de classe $C^1$ num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tais que*

- *para todo o* $x \in I$, $(x, y(x)) \in D$
- $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ H(x, y(x)) = C$.

Desta proposição resulta que sabemos, pelo menos implicitamente, descrever as soluções de uma equação exacta desde que conhecemos uma função $H$ tal que $\nabla H(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Quando existir, uma tal função $H$ deve, para verificar $\dfrac{\partial H}{\partial x} = P(x, y)$, ser da forma

$$H(x, y) = \int P(x, y)\, dx + k(y)$$

onde $\int P(x, y)\, dx$ é uma primitiva de $P$ em ordem a $x$, isto é $\dfrac{\partial}{\partial x}(\int P(x, y)\, dx) = P(x, y)$, e $k$ é uma função que só depende da variável $y$. A análise, a partir dessa expressão de $H$, da condição $\dfrac{\partial H}{\partial y} = Q(x, y)$ permitirá muitas vezes na prática obter uma expressão explicita de $k(y)$ e, por conseguinte, uma expressão de uma função $H$ que verifica $\nabla H = (P, Q)$.

### 1.5.2 Condições de exactidão

O teorema a seguir permite verificar rapidamente se uma dada equação é exacta.

Recordemos que um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é *convexo* se, dados dois pontos quaisquer $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ de $C$, o segmento de recta que os une está inteiramente contido em $C$, ou seja,

$$\forall (x_0, y_0) \in C, \forall (x_1, y_1) \in C, \forall t \in [0, 1] \quad (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \in C.$$

**Teorema.** *Sejam $P$ e $Q$ duas funções classe $C^1$ num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que $Q$ nunca se anula em $D$ e que $D$ é convexo. Então a equação diferencial*

$$(\mathcal{E}) \quad P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (x, y) \in D$$

*é exacta se e só se*

$$\forall (x, y) \in D \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

### 1.5.3 Factor integrante

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas tais que $Q$ nunca se anula em $D$. Consideremos a seguinte equação

$$(\mathcal{E}) \quad P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (x, y) \in D.$$

**Definição.** Uma função contínua $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é chamada *factor integrante* da equação $(\mathcal{E})$ se a equação diferencial

$$(\mu\mathcal{E}) \qquad \mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (x,y) \in D$$

é exacta em $D$.

**Nota.** Como $\mu$ nunca se anula, as duas equações $(\mathcal{E})$ e $(\mu\mathcal{E})$ são equivalentes. É portanto possível resolver $(\mathcal{E})$ resolvendo $(\mu\mathcal{E})$.

# 2 Equações diferenciais lineares de ordem 2

## 2.1 Generalidades

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Recordemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita de classe $C^n$ se, para todo $k \leq n$, a derivada de $f$ de ordem $k$ existe e é contínua em $I$.

**Definição.** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma equação diferencial (ordinária) linear de ordem 2 em $I$ é uma equação diferencial do tipo

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

onde $a, b, c$ e $s$ são funções (conhecidas) contínuas em $I$ e, para todo o $x \in I$, $a(x) \neq 0$.

Uma *solução* desta equação diferencial é uma função $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ tal que

$$\forall x \in I \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = s(x)$$

As funções $a, b, c$ são chamadas *coeficientes* da equação linear. Em particular, quando $a, b, c$ forem funções constantes, diremos que a equação é uma equação linear com coeficientes constantes.

A função $s(x)$ é chamada *segundo membro* da equação. Se $s$ for a função nula, diremos que a equação é uma equação linear *homogénea*. Caso contrário, diremos que a equação é uma equação linear *não-homogénea*.

**Teorema 1.** *Dados $x_0 \in I$ e $y_0, y_1$ em $\mathbb{R}$, existe uma única solução $y : I \to \mathbb{R}$ da equação*

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

*tal que*

$$y(x_0) = y_0 \quad e \quad y'(x_0) = y_1.$$

As condições $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$ são chamadas *condições iniciais*.

## 2.2 Equação linear homogénea

### 2.2.1 Estrutura das soluções

**Teorema 2.** *Seja $(\mathcal{E}) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in I$ uma equação linear homogénea de ordem 2. Suponhamos que $f_1$ e $f_2$ são 2* ***soluções*** *não identicamente nulas de $(\mathcal{E})$. Então*

1. *Para todos os números reais $\lambda$ e $\mu$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ é solução de $(\mathcal{E})$.*

2. *As três seguintes condições são equivalentes*

   (a) *$f_1$ e $f_2$ são linearmente dependentes.*

   (b) $\forall x \in I$, $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$

   (c) $\exists x \in I$, $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$

   *(Mais adiante, o determinante* $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$ *será denatodo por $W(f_1, f_2)(x)$.)*

3. *Se $f_1$ e $f_2$ são linearmente independentes então toda a solução de $(\mathcal{E})$ é da forma $y(x) = Af_1(x) + Bf_2(x)$ onde $A$ e $B$ são constantes reais.*

**Nota.** Pela alínea 2 podemos dizer que, se $f_1$ e $f_2$ são soluções da equação $(\mathcal{E})$, então $f_1$ e $f_2$ são linearmente independentes se e só se existe um ponto $x \in I$ tal que $W(f_1, f_2)(x) \neq 0$ ou, equivalentemente, se e o se o determinante $W(f_1, f_2)(x)$ nunca se nula.

### 2.2.2 Equação linear homogénea com coeficientes constantes

Seja $(\mathcal{E})$ $\quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$ uma equação linear homogénea de ordem 2 com coeficientes constantes ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$). A essa equação associa-se o seguinte polinómio de grau 2

$$P(r) = ar^2 + br + c$$

chamado *polinómio característico* da equação $(\mathcal{E})$.

**Proposição 3.** *A função $f(x) = e^{\lambda x}$ é solução da equação $(\mathcal{E})$ se e só se $\lambda$ é raiz do polinómio $P(r) = ar^2 + br + c$.*

**Teorema 4.** *Sejam $(\mathcal{E})$ $\quad ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$ uma equação linear homogénea de ordem 2 com coeficientes constantes ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), $P(r) = ar^2 + br + c$ o seu polinómio caraterístico e $\Delta = b^2 - 4ac$.*

- *Se $\Delta > 0$ então $P(r)$ admite duas raízes reais distíntas*

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  *e a solução geral da equação $(\mathcal{E})$ é dada por:*

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

- *Se* $\Delta = 0$ *então* $P(r)$ *admite uma raiz real dupla* $\lambda = \dfrac{-b}{2a}$ *e a solução geral da equação* $(\mathcal{E})$ *é dada por:*

$$y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

- *Se* $\Delta < 0$ *então* $P(r)$ *admite duas raízes complexas conjugadas*

$$\lambda = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad e \quad \bar{\lambda} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

*e a solução geral da equação* $(\mathcal{E})$ *é dada por:*

$$y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

*onde* $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ *e* $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *e* $A, B \in \mathbb{R}$.

## 2.3 Equação linear não homogénea

Seja $(\mathcal{E}) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$ uma equação linear de ordem 2. Chamamos *equação linear homogénea associada à* $(\mathcal{E})$ à equação:

$$(\mathcal{E}_0) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in I.$$

### 2.3.1 Estrutura das soluções

**Teorema 5.** *Sejam*

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

$$(\mathcal{E}_0) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

*uma equação linear de ordem* 2 *e a sua equação linear homogénea associada. A solução geral da equação* $(\mathcal{E})$ *é da forma*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x), \quad x \in I,$$

*onde* $y_0$ *é a solução geral da equação* $(\mathcal{E}_0)$ *e* $y_p$ *é uma solução (particular) da equação* $(\mathcal{E})$.

### 2.3.2 Método de variação das constantes

**Teorema 6.** *Sejam*

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = s(x), \quad x \in I$$

$$(\mathcal{E}_0) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in I$$

*uma equação linear de ordem 2 e a sua equação linear homogénea associada e sejam $f_1$ e $f_2$ duas soluções linearmente independentes de $(\mathcal{E}_0)$. Se $A(x)$ e $B(x)$ são duas funções tais que*

$$\begin{cases} A'(x)f_1(x) + B'(x)f_2(x) & = & 0 \\ A'(x)f_1'(x) + B'(x)f_2'(x) & = & \dfrac{s(x)}{a(x)} \end{cases}$$

*então a função $y_p(x) = A(x)f_1(x) + B(x)f_2(x)$ é solução da equação $(\mathcal{E})$.*

### 2.3.3 Método dos coeficientes indeterminandos

**Teorema 7.** *Seja $(\mathcal{E})\quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = s(x), \quad x \in \mathbb{R}$ uma equação linear de ordem 2 com coeficientes constantes ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) e seja $P(r) = ar^2 + br + c$ o seu polinómio caraterístico. Se*

$$s(x) = R(x)e^{\omega x}\cos(\varphi x) \quad ou \quad s(x) = R(x)e^{\omega x}\mathrm{sen}\,(\varphi x)$$

*onde $\omega$ e $\varphi$ são números reais e $R(x)$ é um polinómio, então a equação $(\mathcal{E})$ admite uma solução particular da forma*

$$y_p(x) = x^k(M(x)e^{\omega x}\cos(\varphi x) + N(x)e^{\omega x}\cos(\varphi x))$$

*onde $M(x)$ e $N(x)$ são polinómios de mesmo grau que $R(x)$ e*

$$k = \begin{cases} 0 & se\ \omega + i\varphi\ não\ é\ raiz\ de\ P(r), \\ 1 & se\ \omega + i\varphi\ é\ raiz\ simples\ de\ P(r), \\ 2 & se\ \varphi = 0\ e\ \omega\ é\ raiz\ dupla\ de\ P(r). \end{cases}$$

## 2.4 Transformada de Laplace

**Definição.** Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. A *Transformada de Laplace* de $f$ é a função real $\mathcal{L}\{f\}$ dada por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

O domínio de $\mathcal{L}\{f\}$ é o conjunto dos reais $s$ tais que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$ é convergente.

**Proposição.** *Sejam $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas funções cuja transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}$ e $\mathcal{L}\{g\}$ existem para $s > \alpha$. Então, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a transformada de Laplace de $\lambda f + \mu g$ existe para $s > \alpha$ e temos:*

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\}(s) = \lambda\mathcal{L}\{f\}(s) + \mu\mathcal{L}\{g\}(s), \quad s > \alpha.$$

**Proposição.** *Seja $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ uma função cuja transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe para $s > \alpha$. Então, par todo o $a \in \mathbb{R}$, a trasformada de Laplace $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s)$ existe para $s > \alpha + a$ e temos:*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - a)$$

**Uma tabela de transformadas de Laplace:**

| $f(t)$ | $\mathcal{L}\{f(t)\}$ | $f(t)$ | $\mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $\dfrac{1}{s}$ | $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ |
| $t^n$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ | $e^{at} t^n$ | $\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\text{sen}\,(\beta t)$ | $\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$ | $e^{\alpha t}\text{sen}\,(\beta t)$ | $\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ |
| $\cos(\beta t)$ | $\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$ | $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ | $\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ |
| $\text{sh}\,(\beta t)$ | $\dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$ | $e^{\alpha t}\text{sh}\,(\beta t)$ | $\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$ |
| $\text{ch}\,(\beta t)$ | $\dfrac{s}{s^2-\beta^2}$ | $e^{\alpha t}\text{ch}\,(\beta t)$ | $\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$ |

**Definição.** Sejam $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha > 0$ um número. Diz-se que $f$ é de *ordem exponencial* $\alpha$ se existir$M > 0$ tal que

$$\forall t \geq 0 \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}.$$

Diremos que $f$ é de ordem exponencial se existir $\alpha > 0$ tal que $f$ é de ordem exponencial $\alpha$.

**Nota.** 1) Se $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{e^{\alpha t}} = 0$ então $f$ é de ordem exponencial $\alpha$. Em particular toda a função da forma $f(t) = e^{at}\cos(\beta t) Q(t)$ ou $f(t) = e^{at}\text{sen}\,(\beta t) Q(t)$, onde $a < \alpha$ e $Q$ é um polinómio, são de ordem exponencial $\alpha$.

2) Se $f$ é de ordem exponencial $\alpha$ então, para qualquer $s > \alpha$, $\lim_{t \to +\infty} f(t)e^{-st} = 0$.

**Teorema.** *Seja $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ tal que $f$ e $f'$ são de ordem exponencial $\alpha$. Então, para $s > \alpha$, temos:*

1. $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$.
2. $\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$.

**Teorema.** *Sejam $f, g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Se existir $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $s \geq s_0$, $\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$ então $f = g$ (isto é, $\forall t \geq 0,\ f(t) = g(t)$).*

Seja $F$ uma função. Pelo teorema anterior, se existir uma função $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\mathcal{L}\{f\} = F$, essa função é única. Essa função é chamada *transformada de Laplace inversa* (contínua) de $F$ e é denotada por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$. As propriedades da transformada de Laplace induzem propriedades da transformada inversa. Em particular:

**Proposição.** *Sejam $F$ e $G$ duas funções tais que $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G\}$ existem. Então, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos $\mathcal{L}^{-1}\{\lambda F + \mu G\} = \lambda\mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mu\mathcal{L}^{-1}\{G\}$.*

A transformada de Laplace pode ser usada para determinar a solução (em $[0, +\infty[$) de um problema do tipo:

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = s(t) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \end{cases}$$

onde $a, b, c$ e $y_0, y_1$ são reais e $s : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua de ordem exponencial.

O método consiste, num primeiro passo, em calular a transformada de Laplace da função incógnita $y$ utilisando as expressões das transformadas de Laplace das derivadas de $y$ dadas no teorema acima e, num segundo passo, em determinar a transformada inversa da função $\mathcal{L}\{y\}$ obtida no primeiro passo. O seguinte resultado pode ser útil no segundo passo desse método:

**Teorema.** *Seja $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ uma função contínua de ordem exponencial $\alpha > 0$. Então, para $s > \alpha$, temos*

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

*ou seja, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, tem-se $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\}(t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x)dx$.*

## 2.5 Sistemas lineares de equações diferenciais de $1^a$ ordem

Vamos apenas estudar o seguinte tipo de sistemas:

**Definição.** Um *sistema linear de duas equações diferenciais de* $1^a$ *ordem, homogéneo e com coeficientes constantes* é um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Uma *solução* desse sistema é um par $(x(t), y(t))$ com $t$ num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ tal que, para todo o $t \in I$,

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t). \end{cases}$$

Denotando por $v(t)$ o vector $(x(t), y(t))$, o sistema escreve-se

$$v'(t) = Av(t) \quad \text{ou ainda} \quad v'(t) - Av(t) = 0 \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se $b = c = 0$ o sistema é composto das duas equações $x'(t) = ax(t)$ e $y'(t) = dy(t)$ que sabemos resolver pelas técnicas do Capítulo I. Se $b \neq 0$ (resp. $c \neq 0$), podemos eliminar o $y$ (resp $x$) na segunda (resp. primeira) equação obtendo deste modo uma equação linear da $2^a$ ordem em $x$ (resp. $y$).

**Teorema.** Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dados $t \in I$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (t \in I)$$

admite uma única solução $t \mapsto (x(t), y(t))$, definida em $I$, tal que $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.

# 3 Equações com derivadas parciais (EDP) e Séries de Fourier

## 3.1 Exemplos de Equações com derivadas parciais

Uma *equação diferencial com derivadas parciais (EDP)* é uma equação cuja incógnita é uma função real de várias variáveis e que se escreve em termos desta função e das suas derivadas parciais. Os exemplos que vamos estudar serão da forma seguinte

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t)+b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)+c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x,t)+d(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+e(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+f(x,t)u(x,t)=0$$

onde $a, b, c, d, e$ e $f$ são funções contínuas. Uma *solução* de uma tal equação é uma função $u(x,t)$,de classe $C^2$ num aberto de $\mathbb{R}^2$, que verifica a equação. É imediato verificar que, se $u$ e $v$ são duas soluções, então, para todos $A, B \in \mathbb{R}$, a função $Au + Bv$ também é solução.

**Equação do calor (ou da difusão)**
Chamamos *Problema do calor* (num objecto uni-dimensional) ao problema

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \quad \text{(equação do calor)} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \quad \text{(condições de fronteira)} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \quad \text{(condição inicial).} \end{cases}$$

onde $L > 0$ e $c > 0$ são constantes e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é uma função que verifica $f(0) = f(L) = 0$. Uma solução deste problema é uma função $u : [0, L] \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua, de classe $C^2$ em $]0, L[\times]0, +\infty[$, que verifica o sistema acima.

Este problema descreve a variação da temperatura numa barra de comprimento $L$ ao longo do tempo. A barra é suposta feita de material homogéneo com constante de difusividade térmica $c > 0$ e suficientemente fina de modo a admitir que a posição na barra pode ser representada por uma variável $x$ variando de 0 a $L$. Assim a temperatura $u$ só depende da posição $x$ e do tempo $t$. No instante $t = 0$ a distribuição da temperatura é dada por uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ (condição inicial) que verifica $f(0) = f(L) = 0$, isto é a temperatura inicial é 0 nas extremidades da barra (isto garante a compatibilidade das duas condições). A barra é então colocada num reservatório térmico mantido a temperatura 0 e é suposto que apenas há troca de calor entre o reservatório e a barra através das extremidades, a superfície lateral da barra sendo termicamente isolada. Deste modo, as extremidades ficam mantidas a temperatura 0 (condições de fronteira). Nestas condições, a função $u$ deve satisfazer o sistema $(P)$ dado.

**Equação da corda vibrante (ou das ondas)**
Chamamos *Problema da corda vibrante* ao problema

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \quad \text{(equação da corda vibrante)} \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, & t \geq 0 \quad \text{(condições de fronteira)} \\ y(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \quad \text{(posição inicial)} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \quad \text{(velocidade inicial)} \end{cases}$$

onde $L > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes e $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ são funções que verificam $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$. Uma solução deste problema é uma função $y : [0, L] \times [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ contínua, de classe $C^2$ em $]0, L[\times]0, +\infty[$, que verifica o sistema acima.

Este problema descreve o movimento de uma corda de comprimento $L$ fixadas nas suas extremidades e em vibrações verticais. A constante $\alpha > 0$ depende de características físicas da corda (densidade, tensão), $y(x, t)$ represente o deslocamento vertical da corda no ponto $x$ $(0 \leq x \leq L)$ e no instante $t$.

## 3.2 Método de separação das variáveis

Dada uma EDP de função incógnita $u(x, t)$, o método de separação das variáveis consiste em procurar, caso existam, soluções da equação da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$. Escrever que uma função desta forma é solução da EDP conduz a condições necessárias sobre as funções $F$ e $G$ que, em situações favoráveis, podem tomar a forma de equações diferenciais ordinárias nas funções $F$ e $G$.

*Aplicação à Equação do calor*

Procurar soluções da equação $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$ conduz ao seguinte sistema de equações ordinárias em $F$ e $G$:

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0, \\ G'(t) - c\lambda G(t) = 0 \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante a priori qualquer. Essas equações são equações lineares com coeficientes constantes. O interesse é obviamente em encontrar soluções não identicamente triviais dessas equações. Nessas condições, a condição $u(0, t) = u(L, t) = 0$ traduz-se em $F(0) = F(L) = 0$ e temos de resolver as duas seguintes equações:

$$(I)\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases} \qquad (II)\ G'(t) - c\lambda G(t) = 0.$$

A resolução de $(I)$ mostre que as únicas valores de $\lambda$ que proporcionam soluções não triviais do problema são os valores $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dai vem então $F(x) =$ (constante)sen $(\dfrac{n\pi}{L}x)$ e, por conseguinte, $G(t) =$ (constante)$e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}$.

Verificando que as funções $u(x,t) = F(x)G(t)$ assim obtidas são soluções da equação $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, estabelecemos:

**Proposição.** *Considerando o problema* $(P')$ $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$ *, tem-se*

- *Para todo $n \geq 1$, a função $u_n : [0,L] \times [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ dada por*

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

  *é solução de $(P')$.*

- *Toda a combinação linear finita das funções $u_n$ é solução de $(P')$. Isto é, para todo o $N \geq 1$, a função $u$ dada por:*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x) \tag{1}$$

  *onde $N \geq 1$ é um inteiro e $c_1$,...,$c_N$ são constantes reais, é solução de $(P')$.*

**Nota:** Observemos que em $t = 0$ a função dada em (1) dá

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

Portanto, se a temperatura incial $f$ for dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x), \quad x \in [0,L]$$

onde $b_n$ são números reais, temos imediatamente (identificando $c_n$ e $b_n$) que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

é solução do problema do calor.

### 3.3 Série de Fourier de senos de uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$

O objectivo dessa secção é ver em que medida uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ pode ser decomposta num somatório de funções da forma $x \mapsto \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$.

**Proposição.** *Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e sejam $p, n \geq 1$ dois inteiros. Tem-se*

$$\frac{2}{L}\int_0^L \text{sen}\,(\frac{p\pi}{L}x)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)dx = \begin{cases} 0 & se\ p \neq n \\ 1 & se\ p = n. \end{cases}$$

**Nota.** Na prova desta proposição tal como no cálculo de certas séries de Fourier, podem ser úteis as seguintes fórmulas de trigonometria:

$$\begin{aligned} \text{sen}\, a \cos b &= \tfrac{1}{2}(\text{sen}\,(a-b) + \text{sen}\,(a+b)) \\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b &= \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{aligned}$$

**Definição.** *Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $x \in [0, L]$. Chamamos série de Fourier de senos em $x$ à série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

*onde o n-ésimo coeficiente $b_n$ é dado por*

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)dx.$$

Relembremos que, dada uma sucessão de números reais $(\alpha_n)_{n\geq i}$, a série numérica $\sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n$ é dita *convergente* se existir um número finito $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=i}^{N} \alpha_n = l$. Neste caso, dizemos que a série converge para $l$ e escrevemos $\sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n = l$.

Em particular, se consideramos, para cada $x \in D$ ($D \subset \mathbb{R}$), uma sucessão $(\alpha_n(x))_{n\geq i}$ tal que a série $\sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x)$ converge para $l(x)$, diremos que a série $\sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x)$ é convergente para todo o $x \in D$, e escreveremos

$$\sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x) = l(x).$$

Isto significa que a função $x \mapsto \sum_{n=i}^{+\infty} \alpha_n(x)$ definida pela série (é uma função, pois a série é convergente) é igual à função $x \mapsto l(x)$.

O seguinte teorema dá condições em que a série de Fourier de senos de uma função é convergente e descreve a relação entre a função definida pela série e a função própria.

**Definição.** Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é dita *seccionalmente de classe* $C^1$ em $[a, b]$ se a sua derivada $f'$ existe em $[a, b]$, excepto eventualmente num número finito de números $a \leq a_0 < a_1 < ... < a_k \leq b$, é contínua em cada intervalo $]a_i, a_{i+1}[$ e os limites laterais $\lim\limits_{x \to a_i^+} f'(x)$ e $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f'(x)$ existem e são finitos.

**Teorema.** **(Convergência da série de Fourier de senos)** Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seccionalmente de classe $C^1$. Então:

1. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de senos de $f$ em $x$ é convergente.

2. Sendo $F(x)$ a função definida pela série de Fourier de senos de $f$, tem-se

   - $F(x) = f(x)$ para todo o $x \in ]0, L[$,
   - $F(0) = F(L) = 0$,
   - $F(x) = f(x)$ para todo o $x \in [0, L]$ se e só se $f(0) = f(L) = 0$.

## 3.4 Regresso à Equação do calor e à Equação da corda vibrante

**Problema do calor.** Considere o seguinte problema do calor

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

onde $L > 0$ e $c > 0$ são constantes e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é uma função que verifica $f(0) = f(L) = 0$.

Vímos, na secção 3.2, que se $f$ for dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L} x), \quad x \in [0, L]$$

onde $b_n$ são números reais e $N \geq 1$ é um inteiro, a função $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} ct} \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L} x)$ é solução do problema.

A função $f$ não tem, em geral, essa forma. No entanto, se $f$ é contínua, seccionalmente de classe $C^1$ e tal que $f(0) = f(L) = 0$ vímos, na secção 3.3, que $f$ coincide com a sua série de Fourier de senos. Assim, sob estas condições, é razoável esperar que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

onde $b_n$ são os coeficientes da série de Fourier de senos de $f$, fornece uma solução do problema. Esta série é chamada a *solução formal* do problema. Para afirmar que esta série dá uma verdadeira solução do problema seria preciso verificar que a série é convergente para todo o par $(x, t)$ e, portanto, define uma função $u : [0, L] \times [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ e que esta função $u$ é de classe $C^2$ e satisfaz a equação diferencial, o que necessite um resultado sobre a derivação das séries. O seguinte teorema diz que estas verificações são possíveis e que esta série é de facto a única solução do problema (ver V. Iório, *EDP, um curso de graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.)

**Teorema.** *Sejam $L > 0$, $c > 0$ e $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente de classe $C^1$, contínua, e que verifica $f(0) = f(L) = 0$. Então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}ct} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

*onde $b_n$ são os coeficientes da série de Fourier de senos de $f$, é convergente e define uma função*

$$u : [0, L] \times [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$$

*que é a única solução do problema do calor*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

**Problema da corda vibrante (ou das ondas)**

Considere o seguinte problema

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 & \text{(equação da corda vibrante)} \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t \geq 0 & \text{(condições de fronteira)} \\ y(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(posição inicial)} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L & \text{(velocidade inicial)} \end{cases}$$

onde $L > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes e $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ são funções que verificam $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$.

Para determinar uma solução potencial do problema da corda vibrante procede-se, como para o problema do calor, nos dois seguintes passos:

Passo 1: Determinação de soluções de $(P')$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$

Estabelece-se as duas seguintes ppropoposições:

**Proposição.** *Se* $y_1 : [0,L] \times [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ *e* $y_2 : [0,L] \times [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ *são soluções de* $(P')$ *então, para quaisquer* $A, B \in \mathbb{R}$, *a função* $Ay_1 + By_2$ *também é solução de* $(P')$.

**Proposição.** *Para todo* $n \geq 1$, *as funções* $[0,L] \times [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$(x,t) \mapsto \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$(x,t) \mapsto \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

*são soluções de* $(P')$.

**Nota.** Como para a equação do calor, a expressão destas funções é encontrada através do método de separação das variáveis.

Em consequência, temos que, para todo o $N \geq 1$, a função $y$ dada por:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right) + B_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{2}$$

onde $A_n$ e $B_n$ são constantes em $\mathbb{R}$, é solução de $(P')$.

Passo 2: Integração das condição iniciais $y(x,0) = f(x)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

Observemos que em $t = 0$ a função dada em (2) dá

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{N} A_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Também temos

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \frac{n\pi}{L}\alpha\left(-\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\right) + B_n \frac{n\pi}{L}\alpha \cos\left(\frac{n\pi}{L}\alpha t\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e logo

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{N} B_n \frac{n\pi}{L}\alpha \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Como $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$, podemos, supondo que $f$ e $g$ são seccionalmente de classe $C^1$ e contínuas, identificar $f$ e $g$ com as suas séries de Fourier de senos. Isto é

$$\forall x \in [0, L], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x) \quad \text{onde} \quad d_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt$$

$$\forall x \in [0, L], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n \text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x) \quad \text{onde} \quad e_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(t)\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}t)\,dt$$

Assim, através des identificações $A_n = d_n$ e $B_n \frac{n\pi}{L}\alpha = e_n$, é razoável esperar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (d_n \cos\,(\frac{n\pi}{L}\alpha t) + e_n \frac{L}{n\pi\alpha}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}\alpha t))\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

onde $d_n$ e $e_n$ são os coeficientes das séries de Fourier de senos de $f$ e $g$ respectivamente, fornece uma solução do problema. Esta série é chamada a *solução formal* do problema. O seguinte teorema diz que, sob boas condições, esta série é a única solução do problema.

**Teorema.** *Sejam* $L > 0$, $\alpha > 0$ *duas constantes e* $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que* $f$ *é de classe* $C^2$ *e verifica* $f(0) = f(L) = 0$ *e* $f''(0) = f''(L) = 0$ *e* $g$ *é de classe* $C^1$ *e verifica* $g(0) = g(L) = 0$. *Então a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (d_n \cos\,(\frac{n\pi}{L}\alpha t) + e_n \frac{L}{n\pi\alpha}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}\alpha t))\text{sen}\,(\frac{n\pi}{L}x)$$

*onde* $d_n$ *e* $e_n$ *são os coeficientes das séries de Fourier de senos de* $f$ *e* $g$ *respectivamente, é convergente e define uma função* $y : [0, L] \times [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *que é a única solução do problema da corda vibrante*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ y(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

**Nota.** Se $f$ e $g$ são contínuas, seccionalmente de classe $C^1$, se $f''$ existe e é contínua excepto num número finito de pontos em que admite limites laterais finitos e se verifica-se que $f(0) = f(L) = 0$, $f''(0) = f''(L) = 0$ e que $g(0) = g(L) = 0$, então a função $u(x, t)$ dada pela série é bem definida e verifica a equação excepto eventualmente num número finito de pontos.