TESTE 2

Análise [MIEInf]
02/06/2017

1

a) A função f é polinomial pelo que é C^∞. Assim $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico de f se

$$\nabla f(a) = 0,$$

onde

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y,\ 4y^3 - 4x).$$

Ora

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x[x^8 - 1] = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \text{---} \\ x^8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

pelo que f admite 3 pontos críticos: $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

b) Um ponto crítico $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ de f é um extremante de f se

$$\det Hf(a) > 0$$

onde

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\det Hf(x,y) = 12^2 x^2 y^2 - 16$$

Tem-se

$$\det Hf(0,0) = -16 < 0 \quad \text{logo } (0,0) \text{ não é extremante}$$

$$\det Hf(1,1) = 12^2 - 16 > 0 \quad \text{logo } (1,1) \text{ é extremante}$$

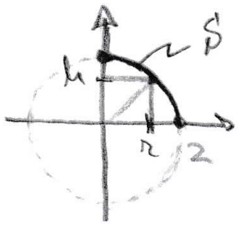
como $f_{xx}(1,1) > 0$ $(1,1)$ é minimizante

$$\det Hf(-1,-1) > 0 \quad \text{logo } (-1,-1) \text{ é extremante}$$

e como $f_{xx}(-1,-1) > 0$ $(-1,-1)$ é minimizante.

Ex. 2

Seja r o raio da base e h metade da altura do cilindro, com $r,h \geq 0$.



Para que o cilindro esteja inscrito na esfera de raio 2 r e h têm que satisfazer a condição $r^2+h^2=4$.

O volume do cilindro é dado, em função de r e h por $V(r,h)=2\pi r^2 h$.

$S'=\{(r,h)\in \mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+ : r^2+h^2=4\}$

S' é fechado e limitado, a função V é contínua, logo $V|_{S'}$ tem máximo e tem mínimo. Dois candidatos a pontos de extremo são $(r,h)=(2,0)$ e $(r,h)=(0,2)$.

Os restantes candidatos resultam de aplicar do método dos multiplicadores de Lagrange, encarando S' como parte da curva de nível Σ_4^g, onde $g(r,h)=r^2+h^2$:

$$\begin{cases} \nabla V(r,h)=\lambda \nabla g(r,h) \\ g(r,h)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi r h = 2\lambda r \\ 2\pi r^2 = 2\lambda h \\ r^2+h^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(2\pi h-\lambda)=0 \\ \pi r^2 = \lambda h \\ r^2+h^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \\ \\ h=\pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 2\pi h \\ r^2 = 2h^2 \\ 3h^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \\ - \end{cases} \vee \begin{cases} = \\ \\ h=\pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \\ h=\pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} r=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ h=\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} r=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ h=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Das 6 soluções, apenas duas estão em S: $(r,h)=(0,2)$ e $(r,h)=\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

r,h	$V(r,h)$
$(0,2)$	0
$(2,0)$	0
$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$

O cilindro de volume máximo é o cilindro de raio $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ e altura $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

③ $$\iint_D xy \, d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y^2} xy \, dx\, dy + \int_{-1}^{1}\int_{1}^{x^2+1} xy \, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} y\right]_{x=-1}^{x=y^2} dy + \int_{-1}^{1} \left[x \frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=x^2+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{y^5}{2} - \frac{y}{2} \, dy + \int_{-1}^{1} \frac{x(x^2+1)^2}{2} - \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \left[\frac{y^6}{12} - \frac{y^2}{4}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{x^5 + 2x^3 + \cancel{x} - \cancel{x}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right) + \left[\frac{x^6}{12} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = 0 \,,$$

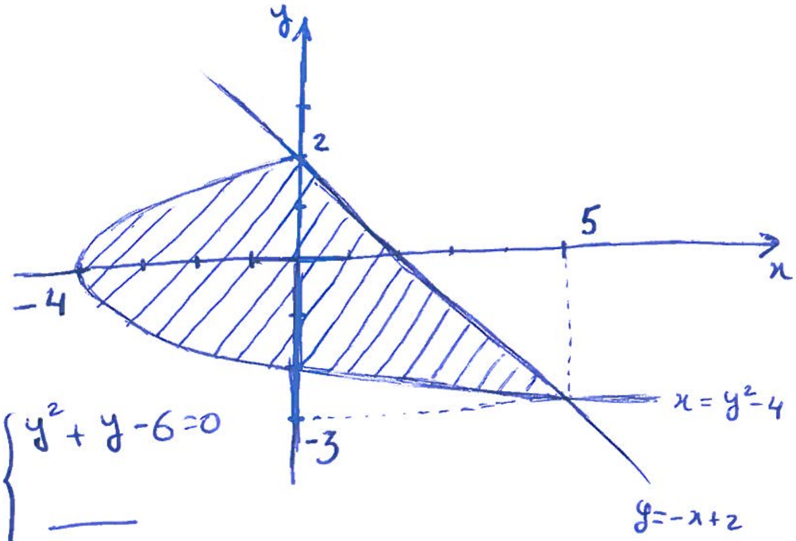
4

$$\int_{-3}^{2} \int_{y^2-4}^{2-y} f(x,y)\, dx\, dy$$

a)

$-3 \leq y \leq 2$

$y^2-4 \leq x \leq 2-y$



$$\begin{cases} y = -x+2 \\ y^2-4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -y^2+4+2 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-6=0 \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -3 \\ x = 5 \end{cases}$$

b)

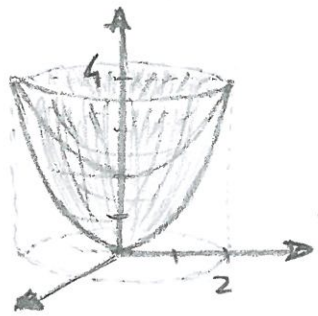
$$\int_{-3}^{2} \int_{y^2-4}^{2-y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{-4}^{0} \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\, dy\, dx + \int_{0}^{5} \int_{-\sqrt{x+4}}^{-x+2} f(x,y)\, dx\, dy$$

Ex 5.

a) $z = x^2+y^2$

$z = \dfrac{x^2+y^2}{2} + 2$

$x^2+y^2 = \dfrac{x^2+y^2}{2} + 2 \iff x^2+y^2 = 4$



Sólido S é a região limitada pelos dois parabolóides.

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$

$$\text{Vol}(S) = \iint_D \left(\frac{x^2+y^2}{2} + 2 - (x^2+y^2)\right) d(x,y)$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dx\,dy$$

c) $$\text{Vol}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^{\frac{r^2}{2}+2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$z = x^2+y^2 \rightarrow z = r^2$

$z = \dfrac{x^2+y^2}{2} + 2 \rightarrow z = \dfrac{r^2}{2} + 2$

d) $$\text{Vol}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\left(\frac{r^2}{2} + 2 - r^2\right) dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(2r - \frac{r^3}{2}\right) dr =$$

$$= 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{8}\right]_0^2 = 2\pi(4-2) = 4\pi$$

As respostas ao exercício 6 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 6. [4 valores] Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $g(x, y) = |f(x, y)|$ e $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$. Se 1 e -2 são, respetivamente, o máximo e o mínimo de $f_{|\mathcal{D}}$ então $g_{|\mathcal{D}}$ não tem mínimo;

FALSA

. g é contínua, uma vez que é a composta de funções contínuas

$\mathcal{D}$ é fechado e limitado

$g|_{\mathcal{D}}$ atinge mínimo e máximo

Aliás, $\min g|_{\mathcal{D}} = 0$ e $\max g|_{\mathcal{D}} = 2$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{xy}\, dxdy \leq e$;

VERDADEIRA

$e^{xy} \leq e$, $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, logo $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} e^{xy}\, d(x,y) \leq \iint_{[0,1]^2} e\, d(x,y) =$

$= e$.

c) Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $\displaystyle\int_0^2 \int_0^2 f(x, y)\, \underline{d(x, y)} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, \underline{d(x, y)}$;

FALSA

Tomar, por exemplo: $f(x,y) = x$:

$\displaystyle\int_0^2 \int_0^2 x\, dx\, dy = 2 \times 2 = 4$

$\displaystyle 4 \int_0^1 \int_0^1 x\, dx\, dy = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$

d) As coordenadas cartesianas de um ponto, cujas coordenadas esféricas são $\rho = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, são $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

FALSA

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0$.

ou

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$