Folha 2

2.1

a) Se $x \in I$, com I o intervalo dado, então

$$\frac{\pi}{1001} \leq x \leq \frac{\pi}{1000} \Leftrightarrow 1000\pi \leq 1000 \times 1001 x \leq 1001\pi$$

como $\pi = 3,14159\ldots$ vem

$$1000\pi < 3142 \quad e \quad 1001\pi = 1000\pi + \pi > 3144$$

pelo que podemos escolher x tal que

$$3142 \leq 1000 \times 1001 x \leq 3144 .$$

Por exemplo, x tal que

$$1000 \times 1001 x = 3143 \Rightarrow x = \frac{3143}{1000 \times 1001} .$$

b) Por exemplo, $\frac{\sqrt{2}}{1000}$.

c) Não existe.
Se existisse um tal número, digamos $\underline{a}$, então entre os racionais $\underline{0}$ e $\underline{a}$ não existiria nenhum irracional, o que é absurdo.

d) Não existe. Justificação semelhante à de c).

2.2

a) $\text{int}\, \mathbb{N} = \emptyset$. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. $\text{fr}\, \mathbb{N} = \mathbb{N}$. $\mathbb{N}' = \emptyset$.
$\mathbb{N}$ ñ é aberto porque $\text{int}\, \mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ é fechado porque $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

b) $\text{int}\, \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}' = \mathbb{R}$. $\text{fr}\, \mathbb{R} = \emptyset$.
$\mathbb{R}$ é aberto e fechado, simultaneamente.

c) Semelhante a a).

d) $\operatorname{int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$. $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\operatorname{fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ não é aberto nem fechado.

e) Semelhante a d).

f) $\operatorname{int}(\,[0,2[\,) = \,]0,2[$

g) e h) semelhantes

$\overline{[0,2[} = [0,2]$

$\operatorname{fr}(\,[0,2[\,) = \{0,2\}$

$(\,[0,2[\,)' = [0,2]$

$[0,2[$ não é aberto nem fechado.

i) $A = \mathbb{Q} \cap [-2,0[$

$\operatorname{int} A = \emptyset$, $\overline{A} = [-2,0]$, $\operatorname{fr} A = \overline{A} = A'$.

A não é aberto nem fechado.

j) semelhante a i)

k) $B = \,]0,3[\,\setminus\{1\} \cup \{4,5\}$

B não é fechado nem aberto.

$\operatorname{int} B = \,]0,1[\,\cup\,]1,3[$

$\overline{B} = [0,3] \cup \{4,5\}$

$\operatorname{fr} B = \{0,1,3,4,5\}$

$B' = [0,3]$

l) $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$\operatorname{int} C = \emptyset$, $\overline{C} = C \cup \{0\} = \operatorname{fr} C$, $C' = \{0\}$.

C não é aberto nem fechado.

2.3

a) Falsa. Por exemplo, $A =]0,1[$ é aberto e é limitado.

b) Falsa. $A =]1,2[$, $B = [0,3]$.

c) Falsa. $A =]-1,3]$, $B = [2,5[$.

d) Falsa, $\text{int} A = \emptyset$, logo $A \neq \text{int} A$.

e) Falsa, $\bar{A} = [0,7]$, logo $A \neq \bar{A}$.

f) Falsa, pois $A =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$.

g) Verdadeira, pois $A = [-7,7]$.

2.4

a) Major $A = \emptyset$, logo A ñ possui supremo.
Minor $A =]-\infty, 0]$, $\inf A = 0$.
A não possui mín nem máx.
$\text{int} A = \emptyset$, $\bar{A} = \mathbb{R}_0^+$, $\text{fr} A = \mathbb{R}_0^+$, $A' = \mathbb{R}_0^+$.

b) $B =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
completar.

c) $C =]-\sqrt{50}, \sqrt{50}[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Completar.

d) $D =]0, +\infty[$
Completar.

e) Notar que
$x^5 > x^3 \Leftrightarrow x^3(x^2-1) > 0$
donde
$E =]-1,0[\cup]1,+\infty[$
Completar.

f) Notar que
$1 < |x-1| \leq 4$
$\Leftrightarrow (-4 \leq x-1 < -1 \quad \vee \quad 1 < x-1 \leq 4)$
$\Leftrightarrow (-3 \leq x < 0 \quad \vee \quad 2 < x \leq 5)$
Logo $F = [-3,0[\cup]2,5]$.
completar.

g) $G = \left(]-2,2[\cap \mathbb{Q}\right) \cup \left([1,\pi] \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$

$= \left(]-2,1[\cap \mathbb{Q}\right) \cup [1,2] \cup \left(]2,\pi] \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$

$\text{Major}(G) = [\pi,+\infty[$, $\sup G = \pi$, $\max G = \pi$.

$\text{Minor}(G) =]-\infty,-2]$, $\inf G = -2$, G não possui mín.

$\text{int}\, G =]1,2[$. $\overline{G} = [-2,\pi]$. $\text{fr}\, G = [-2,1] \cup [2,\pi]$.

$G' = [-2,\pi]$.

h) $H = \left(]-7,-1[\cap \mathbb{Q}\right) \cup \left(]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$

$= \left(]-7,-\sqrt{3}[\cap \mathbb{Q}\right) \cup]-\sqrt{3},-1[\cup \left(]-1,\sqrt{3}[\cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$

Completar (semelhante a g)).

i) $I = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right)$

$= \{0\} \cup \left]\frac{1}{2},1\right[\cup \left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[\cup \cdots$

$\text{Major}(I) = [1,+\infty[$, $\sup I = 1$. I não possui máx.

$\text{Minor}(I) =]-\infty,0]$, $\inf I = 0$, $\min I = 0$.

$\text{int}\, I = I\setminus\{0\}$, $\overline{I} = [0,1]$, $\text{fr}\, I = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

$I' = [0,1]$.

2.5

a) $A =]0,1]$; $A = \mathbb{Q}$ (etc).

b) $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$ (só).

c) $A =]0,1[$. d) $A = \mathbb{R}$, $A = [1,+\infty[$ (etc).

e) $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $A = [0,+\infty[\cap\mathbb{Q}$ (etc).

f) $A =]0,1]$, $A = [0,1]\cap\mathbb{Q}$ (etc).

g) $A =]0,1]$, pois $A' = [0,1]$.

h) $A = [0,1]$ i) $A = \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$, $A' = \{0\}$.

j) Não existe.
Suponhamos que existia $A \subset \mathbb{R}$, limitado, com $a = \inf A$ e $a \in \operatorname{int} A$. Então, como $a \in \operatorname{int} A$,

$$\exists R > 0 : \ ]a-R, a+R[\subset A$$

pelo que todo x em $]a-R, a[$ é também elemento de A e $\underline{a}$ não seria o ínfimo de A.

K) $A = \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\} \cup \{5 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$. $A' = \{0,5\}$.

l) $A = [0,1] \cup \{2\}$, pois $\operatorname{int} A =]0,1[$ e $\overline{\operatorname{int} A} = [0,1]$.

m) $A =]0,1[\cup]1,2[$, pois $\overline{A} = [0,2]$ e $\operatorname{int} \overline{A} =]0,2[$.

m) $A = \{1\}$.

o) $A = \mathbb{R}$ ou $A = \emptyset$ (só).