LÓGICA EI

RESOLUÇÃO EXAME 2012

1 $\qquad \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$

(1) $p_n \in \Delta \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

(2) $\varphi, \psi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \in \Delta$

(3) $\varphi, \psi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \in \Delta$

(a) Seq. de formação : $p_0, p_1, p_3, (p_1 \wedge p_0), (p_1 \wedge p_0) \vee p_3,$ $((p_1 \wedge p_0) \vee p_3) \vee p_0$

(b) $f: \Delta \to \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

1) $f(p_n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$;

2) $f(\varphi \square \psi) = \max(f(\varphi), f(\psi))$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee\}$, para todo $\varphi, \psi \in CP$.

(c)

$$
\begin{aligned}
f(E) &= \max\left(f((p_1 \wedge p_0) \vee p_3),\ f(p_0)\right)\\
&= \max\left(\max(f(p_1 \wedge p_0), f(p_3)),\ 0\right)\\
&= \max(\max(\max(f(p_1), f(p_0)), 3), 0)\\
&= \max(\max(\max(1, 0), 3), 0)\\
&= \max(\max(1, 3), 0)\\
&= \max(3, 0) = 3
\end{aligned}
$$

(d) Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre os elementos φ de Δ.

Se 1) $P(p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$;

2) se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \wedge \psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \Delta$;

3) se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \vee \psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \Delta$;

então

$P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \Delta$

e) v tal que $v(p_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade $v(\varphi) = 1$ (com $\varphi \in \Delta$).

(1) Seja $n \in \mathbb{N}_0$
Pela definição de v, $v(p_n) = 1$.
Portanto, $P(p_n)$.

(2) Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ (H.I).
Então, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Temos, assim,

$v(\varphi \wedge \psi) = 1$, ou seja, $P(\varphi \wedge \psi)$.

(3) Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ (H.I).
Então, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Temos, assim,
$v(\varphi \vee \psi) = 1$, donde $P(\varphi \vee \psi)$.

Por (1), (2), (3) e pelo princípio de Indução Estrutural, $P(\varphi)$ para todo $\varphi \in \Delta$.

f) Consideremos a valoração v de e). Sabemos que
$v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Delta$.

Ora, $v(\neg p_0) = 1 - v(p_0) = 1 - 1 = 0$.

Portanto, para todo $\varphi \in \Delta$ $v(\varphi \leftrightarrow \neg p_0) = 0$.

Assim, $\varphi \not\Leftrightarrow \neg p_0$, para todo $\varphi \in \Delta$.

Para $\{\wedge, \vee\}$ ser um conjunto completo de conectivos,

teria de existir uma fórmula $\varphi \in \Delta$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \neg p_0$.
Logo, $\{\wedge, \vee\}$ não é um conj. completo de conectivos.

2.

(a) Seja Γ um subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$.

Queremos averiguar se $\Gamma \models \varphi$. Se v for uma valoração tal que $v \models \Gamma$ então, porque φ é tautologia, $v(\varphi) = 1$.

Por isso, $\Gamma \models \varphi$ e a afirmação é verdadeira.

(b) Sejam $\Gamma = \{p_0\}$ e $\varphi = p_1$.

A valoração v tal que $v(p_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ satisfaz Γ e satisfaz φ. Logo, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente.

A valoração v' tal que $v'(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

(com $n \in \mathbb{N}_0$) satisfaz Γ e satisfaz $\neg\varphi$. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente.

Assim, a afirmação é verdadeira

3.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \qquad \dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \qquad p_0 \leftrightarrow \neg p_0}{\neg p_0} \leftrightarrow_1 E}{\bot} \neg E}{p_1} (\bot)}{p_0 \to p_1} \to I^{(1)}$$

é uma derivação de $p_0 \to p_1$ a partir de $p_0 \leftrightarrow \neg p_0$ (a conclusão é $p_0 \to p_1$ e a hipótese não cancelada é $p_0 \leftrightarrow \neg p_0$.)

(b) Pelo Teorema da Adequação, $\psi \nvdash \varphi$ se e só se $\psi \nvDash \varphi$.

p_0	p_1	$\overset{\varphi}{p_0 \leftrightarrow \neg p_0}$	$\overset{\psi}{p_0 \to p_1}$
1	1	0	1 $\leftarrow$
1	0	0	0
0	1	0	1 $\leftarrow$
0	0	0	1 $\leftarrow$

Pela tabela de verdade, podemos afirmar que existem valorações v tais que $v(\psi)=1$ e $v(\varphi)=0$ (linhas 1, 3 e 4).

Logo, $\psi \nvDash \varphi$, donde $\psi \nvdash \varphi$.

4.

(a)

(i) é L-termo; seq. de formação:

$x_0, x_1, x_2, f(x_0), f(f(x_0)), \times(x_1, x_2), \times(\times(x_1,x_2), f(f(x_0)))$

(ii) é L-fórmula; seq. de formação:

$= (\times(x_1, x_2), f(f(x_0)))$

(iii) nem $\mathcal{T}_L$ nem $\mathcal{F}_L$.

$f(x_1) \in \mathcal{T}_L$
$f(x_2) \in \mathcal{T}_L$ $\qquad f(x_1) \to f(x_2) \notin \mathcal{F}_L \ldots$

(b) $LIV(\sigma) = \{x_0\}$.

x_0 tem ocorrências livres no alcance de $\forall x_1$ e $\exists x_2$.

Para que x_0 seja substituível por t, $x_1 \notin VAR(t)$ e $x_2 \notin VAR(t)$

Por exemplo, para $t = x_3$, x_0 é substituível por t em σ.

Para que x_0 não substituível por t' em σ, $x_1 \in VAR(t')$ ou $x_2 \in VAR(t')$

Basta tomar, por exemplo, $t' = x_1$.

(c)

$\overline{f} : D \to D$ funções $\longrightarrow$ temos $(\#D)^{(\#D)}$ hipóteses

$\overline{\times} : D \times D \to D$ funções $\longrightarrow$ temos $(\#D)^{\#(D \times D)}$ hipóteses

$\overline{P} \subseteq D$ $\longrightarrow$ temos $2^{\#D}$ hipóteses

Assim, temos $3^3 \times 3^9 \times 2^3$ L-estruturas nessas condições.

(d) Seja a uma atribuição em E.

(i) $(\forall x_0 \; P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $P(f(x_0) \times f(x_0)) \left[a \binom{x_0}{d}\right] = 1$

sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $\overline{f}(d) \;\overline{\times}\; \overline{f}(d) \in \overline{P}$

sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $sen(d) \times sen(d) \in \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$

sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $-1 \leq sen^2(d) \leq 1$, uma afirmação verdadeira

logo, $(\forall x_0 \; P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 1$

donde é válida em E.

A L-fórmula não é universalmente válida: basta pensar numa estrutura $E' = (\mathbb{R}, \sim)$ exatamente igual a E exceto em $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x \leq -9\}$ (ou seja $\tilde{f} = \overline{f}$; $\tilde{x} = \overline{x}$)

$(\forall x_0 \; P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 1$

se para todo $d \in \mathbb{R}$ $sen^2(d) \in \{x \in \mathbb{R} : -10 \leq x \leq -9\}$

o que é falso.

Logo $(\forall x_0 \; P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 0$ e

a fórmula não é universalmente válida.

(ii) Seja a atribuição em E.

Temos que $(\forall x_0 \exists x_1 (x_0 = f(x_1)))[a] = 1$ se e só se

para todo $d_0 \in \mathbb{R}$ existe $d_1 \in \mathbb{R}$ tal que $sen(d_1) = d_0$.

Para $d_0 = 5$, sabemos que não existe $d_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$sen(d_1) = 5$.

Logo, $(\forall x_0 \exists x_1 (x_0 = f(x_1)))[a]_E = 0$ e a fórmula não é válida em E nem universalmente válida.

(e) $\varphi = (P(x_0) \vee \neg P(x_0))$ é instância de $p_0 \vee \neg p_0$, que é uma tautologia do CP. (considerando uma instanciação i tal que $i(p_0) = P(x_0)$, temos que $i(p_0 \vee \neg p_0) = \varphi$.

Logo, φ é universalmente válida, pelo que E é modelo de φ.