Álgebra Linear e Geometria Analítica

Gaspar José Brandão Queiroz de Azevedo Machado
Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia
Universidade do Minho
2008

Índice

Capítulo 1

Matrizes

1.1def (a) ⟦produto cartesiano de dois conjuntos⟧ Sejam A e B conjuntos. Chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A\times B$, ao conjunto formado pelos pares ordenados tais que a primeira componente pertence a A e a segunda componente pertence a B, ou seja,

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, \beta) | \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

(b) ⟦produto cartesiano de um número finito de conjuntos⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. Chama-se produto cartesiano de $A_1, \ldots, A_n$, que se representa por $A_1 \times \cdots \times A_n$, a

$$A_1 \times \cdots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 \in A_1, \ldots, \alpha_n \in A_n\}.$$

(c) ⟦potência cartesiana de um conjunto⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A um conjunto. Chama-se potência cartesiana de ordem n do conjunto A, que se representa por A^n, a

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A\},$$

identificando-se A^1 com A.

1.2exe Explicite os seguintes conjuntos

(a) $\{1,2,3\} \times \{a,b\}$.

(b) $\mathbb{R}^3$.

res (a) $\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$.

(b) $\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) | a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

1.3def (a) ⟦matriz, tipo de uma matriz⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a uma função real com domínio $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.

(b) ⟦$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$⟧ Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$.

1.4obs É possível considerar matrizes cujos elementos do conjunto de chegada não são números reais (*e.g.*, números complexos e polinómios). Neste curso, porém, considera-se apenas este caso.

1.5def ⟦escalar⟧ Chama-se escalar a um elemento de $\mathbb{R}$.

1.6def ⟦elemento de uma matriz⟧ Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Chama-se elemento ij da matriz A, que se representa por $(A)_{ij}$ (ou por $(A)_{i,j}$ se houver ambiguidade relativamente aos índices), a

$$(A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A(i,j).$$

$\boxed{\text{1.7obs}}$ (a) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{i,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$. Se se quiser representar por ξ_{ij} o elemento ij da matriz A, usa-se a notação

$$A = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

(b) É habitual representar matrizes por letras maiúsculas. Neste caso, para representar o elemento ij duma matriz é também habitual usar a respectiva letra minúscula afectada do índice ij, ou seja,

$$A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

(c) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. A representação habitual de A é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n$.

(d) Neste curso, as letras "i" e "j" nunca estão associadas à unidade imaginária dosnúmeros complexos.

(e) Quando se está perante matrizes do conjunto $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$, o contexto será suficiente para distinguir se se está a fazer referência à matriz ou ao único elemento que a constitui.

1.8exe Dê um exemplo de uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

res $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -4 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

1.9exe Explicite as seguintes matrizes:

(a) $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = j - i$.

(b) $X = [\xi_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\xi_{ij} = ij + 1$.

res (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

1.10def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦linha de uma matriz⟧ Chama-se linha i da matriz A, que se representa por $\ell_{i,A}$ (ou por ℓ_i se não houver ambiguidade relativamente à matriz), a

$$\ell_{i,A} \overset{\text{def}}{=} (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}).$$

(b) ⟦coluna de uma matriz⟧ Chama-se coluna j da matriz A, que se representa por $c_{j,A}$ (ou por c_j se não houver ambiguidade relativamente à matriz), a

$$c_{j,A} \overset{\text{def}}{=} (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}).$$

1.11exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Indique o elemento que está na segunda linha e na terceira coluna da matriz A.

(b) Indique a segunda linha da matriz A.

(c) Indique a terceira coluna da matriz A.

res (a) $a_{23} = 7$.

(b) $\ell_2 = (5, 6, 7, 8)$.

(c) $c_3 = (3, 7)$.

1.12def Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(a) [[matriz coluna]] Diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) [[matriz linha]] Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

1.13obs É habitual representar matrizes linha e matrizes coluna por letras minúsculas e os seus elementos apenas com um índice. Assim, e usando esta notação, as formas da matriz coluna x com m linhas e da matriz linha y com n colunas são:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

1.14exe (a) Dê um exemplo de uma matriz linha com 3 elementos.

(b) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "Há matrizes que são simultaneamente matrizes linha e matrizes coluna".

res (a) $q = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Proposição verdadeira pois as matrizes que pertencem ao conjunto $\mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ são matrizes linha pois só têm uma coluna e são matrizes coluna pois só têm uma linha.

1.15def ⟦matriz rectangular, matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz rectangular se $m \neq n$. Caso contrário, diz-se uma matriz quadrada.

1.16def ⟦ordem de uma matriz quadrada⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se uma matriz de ordem n.

1.17exe (a) Indique se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: "$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz rectangular."

(b) Dê um exemplo de uma matriz de ordem 2.

res (a) A proposição é verdadeira pois o número de linhas da matriz A, que é 2, é diferente do número de colunas, que é 3.

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1.18def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦diagonal principal ou diagonal de uma matriz⟧ Chama-se diagonal principal da matriz A ou diagonal da matriz A a $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

(b) ⟦diagonal secundária de uma matriz⟧ Chama-se diagonal secundária da matriz A ao elemento $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$ de $\mathbb{R}^n$.

(c) ⟦matriz diagonal⟧ A diz-se uma matriz diagonal se $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(d) ⟦matriz escalar⟧ A diz-se uma matriz escalar se é uma matriz diagonal com $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$.

(e) ⟦matriz triangular superior⟧ A diz-se uma matriz triangular superior se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(f) ⟦matriz triangular inferior⟧ A diz-se uma matriz triangular inferior se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$\boxed{\text{1.19obs}}$

(a) As definições anteriores só se aplicam a matrizes quadradas.

(b) A é uma matriz diagonal se todos os elementos fora da diagonal são zeros.

(c) A é uma matriz triangular superior se todos os elementos "abaixo" da diagonal são zeros.

(d) A é uma matriz triangular inferior se todos os elementos "acima" da diagonal são zeros.

$\boxed{\text{1.20exe}}$

(a) Dê um exemplo de uma matriz diagonal de ordem 4.

(b) Dê um exemplo de uma matriz escalar de ordem 3.

(c) Dê um exemplo de uma matriz triangular superior de ordem 2.

(d) Dê um exemplo de uma matriz triangular inferior de ordem 3 e indique a sua diagonal principal e diagonal secundária.

(e) Dê um exemplo de uma matriz simultaneamente triangular superior e triangular inferior de ordem 2.

$\boxed{\text{res}}$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, diagonal principal — $(1, 0, 2)$ e diagonal secundária — $(0, 0, 2)$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.21exe Sejam as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique as matrizes rectangulares e o seu tipo.

(b) Indique as matrizes quadradas e a sua ordem.

(c) Indique as matrizes linha.

(d) Indique as matrizes coluna.

(e) Indique as matrizes diagonais.

(f) Indique as matrizes escalares.

(g) Indique as matrizes triangulares superiores.

(h) Indique as matrizes triangulares inferiores.

1.22def ⟦traço de uma matriz⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se traço da matriz A, que se representa por $\operatorname{tr}(A)$, a

$$\operatorname{tr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.23exe Determine o traço da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right]$.

res $\operatorname{tr}(A) = 12$.

1.24exe Determine o traço da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right]$.

1.25def (a) [[matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$]] Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou por $\underline{0}$ se não houver ambiguidade relativamente ao tipo.

(b) [[matriz identidade, I_n, I]] Chama-se matriz identidade à matriz escalar cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou por I se não houver ambiguidade relativamente à ordem.

1.26exe (a) Indique a matriz nula do tipo 2×4.

(b) Indique a matriz identidade de ordem 3.

res (a) $0_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.27def [[matrizes iguais]] Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes iguais se

$$a_{ij} = b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

1.28obs Usa-se esta definição em algumas demonstrações relativas a matrizes.

1.29def [[soma de matrizes]] Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se soma das matrizes A e B à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $z_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, escrevendo-se $Z = A + B$.

1.30def [[produto de uma matriz por um escalar]] Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto da matriz A pelo escalar α à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $z_{ij} = \alpha a_{ij}$, escrevendo-se $Z = \alpha A$.

1.31obs

(a) Só se pode somar matrizes do mesmo tipo.

(b) É sempre possível multiplicar uma matriz por um escalar.

(c) Seja a matriz A. Então, em vez de $(-1)A$ escreve-se $-A$.

(d) Sejam as matrizes A e B do mesmo tipo. Então, tendo em consideração a alínea anterior, em vez de $A+(-B)$ escreve-se $A-B$.

(e) A matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes.

1.32exe Sejam as matrizes $A=\left[\begin{smallmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{smallmatrix}\right]$ e $B=\left[\begin{smallmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{smallmatrix}\right]$. Calcule:

(a) $A+B$.

(b) $2A$.

(c) $\frac{1}{2}A-3B$.

res

(a) $A+B=\left[\begin{smallmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{smallmatrix}\right]+\left[\begin{smallmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{smallmatrix}\right]$.

(b) $2A=2\left[\begin{smallmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}-2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -8\end{smallmatrix}\right]$.

(c) $\frac{1}{2}A-3B=\frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{smallmatrix}\right]-3\left[\begin{smallmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{smallmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-\frac{19}{2} & 1 & -\frac{11}{2}\\ -3 & \frac{7}{2} & -8\end{bmatrix}$.

1.33teo

(a) $\forall A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): A+B=B+A$.

(b) $\forall A,B,C\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): (A+B)+C=A+(B+C)$.

(c) $\forall A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): A+0_{m\times n}=A$.

(d) $\forall A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): A+(-A)=0_{m\times n}$.

(e) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): (\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

(f) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

(g) $\forall \alpha\in\mathbb{R},\forall A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

(h) $\forall A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}): 1A=A$.

$\boxed{\text{dem}}$ (a) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A+B$ e $B+A$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(A+B)_{ij} &= (A)_{ij} + (B)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes} \\
&= (B)_{ij} + (A)_{ij} && \text{pela propriedade comutativa dos escalares} \\
&= (B+A)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A+B$ e $B+A$ são iguais.

(b) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
((A+B)+C)_{ij} &= (A+B)_{ij} + (C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes} \\
&= ((A)_{ij} + (B)_{ij}) + (C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes} \\
&= (A)_{ij} + ((B)_{ij} + (C)_{ij}) && \text{pela propriedade associativa dos escalares} \\
&= (A)_{ij} + (B+C)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$ são iguais.

(c) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A+0_{m\times n}$ e A são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(A+0)_{ij} &= (A)_{ij} + (0_{m\times n})_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes} \\
&= (A)_{ij} + 0 && \text{por definição de matriz nula} \\
&= (A)_{ij} && \text{0 é o elemento neutro da soma de escalares,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $A+0_{m\times n}$ e A são iguais.

(d) Como, por definição de soma de matrizes, as matrizes $A+B$ e $B+A$ são do tipo $m \times n$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$
\begin{aligned}
(A+(-A))_{ij} &= (A)_{ij} + (-A)_{ij} && \text{por definição de soma de matrizes} \\
&= (A)_{ij} - (A)_{ij} && \text{por } \boxed{\text{1.31obs}}\text{(c)} \\
&= 0 && \text{pois são escalares simétricos,}
\end{aligned}
$$

tem-se que as matrizes $A+(-A)$ e $0_{m\times n}$ são iguais.

(e) Exercício.

(f) Exercício.

(g) Exercício.

(h) Exercício.

1.34def ⟦produto ou multiplicação de matrizes⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Chama-se produto ou multiplicação da matriz A pela matriz B à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, escrevendo-se $Z = AB$.

1.35obs (a) Só se pode efectuar a multiplicação da matriz A pela matriz B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Neste caso, o número de linhas da matriz resultante é igual ao número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz resultante é igual ao número de colunas da matriz B.

(b) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$. Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação AB. Por exemplo o elemento $(AB)_{23}$ obtém-se considerando $\ell_{2,A}$ e $c_{3,B}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ \boxed{2 \quad 1} \\ * & * \end{bmatrix}}_{A\in\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}} & * \\ * & * & & * \end{bmatrix}}_{B\in\mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & \boxed{13} & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{AB\in\mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})}$$

$$(AB)_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k}b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 2 \times 4 + 1 \times 5 = 13.$$

1.36exe Considere as matrizes $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Indique se as seguintes operações estão bem definidas e nesses casos efectue as operações:

(a) AB.

(b) BA.

(c) BI_3.

(d) I_2B.

res (a) Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação AB, tendo-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Como o número de colunas da matriz B, que é 3, é diferente do número de linhas da matriz A, que é 2, não é possível efectuar a operação BA.

(c) Como o número de colunas da matriz B é igual ao número de linhas da matriz I_3, é possível efectuar a operação BI_3, tendo-se

$$BI_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Como o número de colunas da matriz I_2 é igual ao número de linhas da matriz B, é possível efectuar a operação I_2B, tendo-se

$$I_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.37teo (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) : (AB)C = A(BC)$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) : (A+B)C = AC + BC$.

(c) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) : A(B+C) = AB + AC$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : I_mA = AI_n = A$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) : \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

dem Exercício.

1.38obs (a) A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

(b) Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo. Então, tem-se que a expressão $A + B + C$ não resulta ambígua devido à propriedade associativa da soma de matrizes.

(c) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Então, tem-se que a expressão ABC não resulta ambígua devido à propriedade associativa da multiplicação de matrizes, fazendo sentido a seguinte definição:

$\boxed{\text{1.39def}}$ [[potência de uma matriz]] Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada. Chama-se p-ésima potência da matriz A, que se representa por A^p, a $\prod_{k=1}^{p} A$.

$\boxed{\text{1.40exe}}$ Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule A^3.

$\boxed{\text{res}}$ Como A é uma matriz quadrada, é possível determinar A^3, tendo-se:

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: como a multiplicação de matrizes é associativa, também se tem $A^3 = A(AA)$.

$\boxed{\text{1.41exe}}$ Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que $A^2 = (a+d)A - (ad - bc)I_2$.

$\boxed{\text{1.42obs}}$ A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa. Faz, pois, sentido a seguinte definição:

$\boxed{\text{1.43def}}$ [[matrizes comutáveis]] Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Diz-se que as matrizes A e B são comutáveis se $AB = BA$.

1.44exe Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Simplifique a expressão $(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2$.

res

$$\begin{aligned}
&(A+B)^2 - (A-B)(A+B) - 2B^2 \\
&\quad = (A+B)(A+B) - (A-B)(A+B) - 2B^2 \\
&\quad = A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - AB + BA + B^2 - 2B^2 \\
&\quad = 2BA.
\end{aligned}$$

1.45obs Não se define a operação "divisão de matrizes".

1.46def ⟦matriz invertível ou não-singular, matriz não-invertível ou singular⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz invertível ou não-singular se existir uma matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AZ = ZA = I_n$. Caso contrário, diz-se que A é uma matriz não-invertível ou singular.

1.47teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que é uma matriz invertível. Então, existe uma e uma só matriz $Z \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $ZA = AZ = I_n$.

dem Sejam $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$\begin{aligned}
&AX = I_n \overset{(1)}{=} XA, \\
&AY \overset{(2)}{=} I_n = YA.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
X &= XI_n && \text{I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= X(AY) && \text{por (2)}\\
&= (XA)Y && \text{a multiplicação de matrizes é associativa}\\
&= I_nY && \text{por (1)}\\
&= Y, && \text{I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes,}
\end{aligned}$$

i.e., existe uma única matriz que satisfaz a condição de invertibilidade.

1.48def [[matriz inversa]] Seja A uma matriz de ordem n invertível. Chama-se matriz inversa da matriz A, que se representa por A^{-1}, à única matriz Z tal que $AZ = ZA = I_n$.

1.49teo Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem tais que $AB = I$. Então, $A^{-1} = B$.

1.50obs
(a) Se A é a matriz inversa da matriz B, então B é a matriz inversa da matriz A.

(b) Sejam A e B matrizes da mesma ordem. Então, $AB = I \Leftrightarrow BA = I$. Assim, basta verificar se $AB = I$ ou $BA = I$ para se concluir que as matrizes A e B são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

1.51teo
(a) Seja A uma matriz invertível. Então, A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Sejam A e B matrizes da mesma ordem e invertíveis. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

dem (a) Como A é uma matriz invertível, tem-se que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Logo, A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(b) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Então, existem $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$AA^{-1} \overset{(1)}{=} I_n = AA^{-1},$$
$$BB^{-1} = I_n \overset{(2)}{=} BB^{-1},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} && \text{a multiplicação de matrizes é associativa}\\
&= AI_nA^{-1} && \text{por (2)}\\
&= AA^{-1} && I \text{ é o elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= I_n, && \text{por (1)}
\end{aligned}$$

pelo que AB é invertível com $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ uma vez que a inversa de uma matriz é única.

1.52exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a sua inversa através da definição.

1.53obs (a) Há matrizes quadradas que não admitem inversa.

(b) Apresenta-se no final deste capítulo uma condição para caracterizar matrizes invertíveis e um método mais prático para cálcular inversas.

1.54exe Sejam as matrizes $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine AB.

(b) O que pode concluir da alínea anterior?

(c) As matrizes A e B são comutáveis?

res (a) $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) As matrizes são invertíveis com $A^{-1} = B$ e $B^{-1} = A$.

(c) Sim, pois $AB = BA = I_2$.

1.55exe Sejam A e B matrizes comutáveis e invertíveis. Mostre que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

1.56exe Sejam A e B matrizes comutáveis e B é uma matriz invertível. Mostre que $AB^{-1} = B^{-1}A$.

1.57exe Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Então, mostre que $(I - A)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{p-1} A^k$.

1.58def ⟦matriz transposta⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se transposta da matriz A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $z_{ij} = a_{ji}$, escrevendo-se $Z = A^T$.

1.59obs (a) É sempre possível calcular a matriz transposta de uma matriz.

(b) Calcular a transposta de uma matriz corresponde a trocar linhas com colunas.

1.60exe Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^T.

(b) Calcule $\frac{AA^T}{u^T u}$.

res (a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\frac{AA^T}{u^Tu} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

Nota: relembrar 1.7obs (d).

1.61exe Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $B^T A$.

(b) $(C^T A + D^T A)^T$.

(c) $A^T B$.

(d) $B^T (C + D)$.

1.62teo (a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : \left(A^T\right)^T = A$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : (A + B)^T = A^T + B^T$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : (\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(d) $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) : (AB)^T = B^T A^T$.

(e) $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

dem (a) Exercício.

(b) Exercício.

(c) Exercício.

(d) Como, por definição da transposta de uma matriz e da multiplicação de matrizes, as matrizes $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são do tipo $p \times m$ e como, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\left((AB)^T\right)_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{pela definição de matriz transposta} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk}(B)_{ki} && \text{pela definição de produto de matrizes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (B)_{ki}(A)_{jk} && \text{pela propriedade comutativa dos escalares} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} && \text{pela definição de matriz transposta} \\
&= (B^T A^T)_{ij}, && \text{pela definição de produto de matrizes,}
\end{aligned}$$

tem-se que as matrizes $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são iguais.

(e) Exercício.

$\boxed{\text{1.63exe}}$ Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ b_{ij} = i - j,$$

$$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i < j, \\ (-1)^{i+1} & \text{se} \quad i = j, \\ 1 & \text{se} \quad i > j, \end{cases}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efectuando as operações nesses casos:

(a) $A + 2B$.

(b) $A - C$.

(c) AC.

(d) CA.

(e) C^3.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2}$.

(g) $(CBA^TC)^2$.

(h) uu^T.

(i) u^Tu.

(j) u^TA^TBu.

1.64def ⟦matriz simétrica⟧ Seja A uma matriz quadrada. Diz-se que A é uma matriz simétrica se $A = A^T$.

1.65exe Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

res $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

1.66exe Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que a matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

1.67exe Mostre que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

1.68exe Uma matriz quadrada A diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que, dada qualquer matriz quadrada B, a matriz $B - B^T$ é anti-simétrica.

1.69def ⟦matriz ortogonal⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz ortogonal se $AA^T = A^TA = I_n$.

1.70obs Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

1.71exe Verifique que a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é ortogonal.

res Como

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

i.e., $AA^T = I_2$, tem-se que A é uma matriz ortogonal.

1.72exe Indique quais das seguintes matrizes são ortogonais:

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.
$$

1.73exe Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais ainda é uma matriz ortogonal.

1.74def Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) [[linha nula]] Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A se $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0$.

(b) [[coluna nula]] Diz-se que c_j é uma coluna nula da matriz A se $a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{mj} = 0$.

(c) [[pivô de uma linha não-nula]] Chama-se pivô de uma linha não-nula ao seu elemento não-nulo mais à esquerda.

(d) ⟦coluna pivô⟧ Chama-se coluna pivô a uma coluna da matriz se existe um elemento pivô nessa coluna.

1.75exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Identifique os pivôs das linhas não-nulas da matriz A.

(b) Identifique as colunas pivô da matriz A.

res (a) Pivôs: a_{15}, a_{22} e a_{32}.

(b) Colunas pivô: c_2 e c_5.

1.76def Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦matriz em escada⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada se o número de elementos nulos à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, possivelmente, sobrem apenas linhas nulas.

(b) ⟦matriz em escada reduzida⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada reduzida se é uma matriz em escada, se todos os pivôs são iguais a um e se estes são os únicos elementos não-nulos nas colunas pivô.

1.77exe Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique as matrizes em escada.

(b) Indique as matrizes em escada reduzida.

res (a) Matrizes em escada: A, B, C, F, G, H, u.

(b) Matrizes em escada reduzida: A, C, F, H, u.

1.78def Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) ⟦operação elementar do tipo I nas linhas de uma matriz⟧ Dá-se o nome de operação elementar do tipo I nas linhas da matriz A à troca de duas linhas. A troca das linhas i e j representa-se por $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$.

(b) ⟦operação elementar do tipo II nas linhas de uma matriz⟧ Dá-se o nome de operação elementar do tipo II nas linhas da matriz A à substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo. A substituição da linha ℓ_i pela linha que se obtém multiplicando por α os elementos da linha ℓ_i representa-se por $\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i$.

(c) ⟦operação elementar do tipo III nas linhas de uma matriz⟧ Dá-se o nome de operação elementar do tipo III nas linhas da matriz A à substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha. A substituição da linha ℓ_i pela linha que se obtém somando os elementos da linha ℓ_i aos elementos que se obtêm multiplicando por β os elementos de ℓ_j representa-se por $\ell_i \leftarrow \ell_i + \beta\ell_j$.

1.79obs Na definição anterior apenas se consideram operações sobre linhas, apesar de também ser possível definir operações sobre colunas. Fazendo este curso apenas faz referência a operações elementares sobre linhas, estas passarão a ser referenciadas apenas por “operações elementares”.

1.80def ⟦matrizes equivalentes, $A \longleftrightarrow B$⟧ Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes equivalentes, escrevendo-se $A \longleftrightarrow B$, se se pode obter uma a partir da outra através duma sequência (finita) de operações elementares com linhas.

1.81exe Seja a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right]$. Efectue a seguinte sequência de operações na matriz A: $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$, $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$, $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3$, $\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2$ e $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2$.

res

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{1.82teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe uma única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

$\boxed{\text{1.83obs}}$ Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

$\boxed{\text{1.84def}}$ Seja A uma matriz.

(a) [[fe(A)]] Representa-se por fe(A) o conjunto das matrizes em escada que são equivalentes à matriz A.

(b) [[fer(A)]] Representa-se por fer(A) a única matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz A.

$\boxed{\text{1.85obs}}$ Seja A uma matriz.

(a) Note-se que fe(A) é um conjunto de matrizes e que fer(A) é uma matriz.

(b) Em $\boxed{\text{1.86obs}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar um elemento de fe(A) e em $\boxed{\text{1.87obs}}$ apresenta-se um algoritmo para determinar fer(A).

$\boxed{\text{1.86obs}}$ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina um elemento de fe(A):

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ **então**

$k \leftarrow \min\{q \in \{i+1, \ldots, m\} | a_{qj} \neq 0\}$

$\ell_i \leftrightarrow \ell_k$

fimse

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i + 1$ **até** m **fazer**

$\ell_p \leftarrow \ell_p - \dfrac{a_{pj}}{a_{ij}} \ell_i$

fimpara

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i + 1$

$j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz que

se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$

ir para o Passo 2

fimse

1.87obs Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina fer(A):

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

determinar $A' = [a'_{ij}] \in$ fe(A) (no que se segue, ℓ' refere-se às linhas da matriz A')

$i \leftarrow$ índice da última linha não-nula da matriz A'

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

Passo 2 [colocar elemento pivô a um]

se $a'_{ij} \neq 1$ **então**

$\ell'_i \leftarrow \frac{1}{a'_{ij}}\ell'_i$

fimse

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ **até** $i-1$ **fazer**

$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$

fimpara

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida **então**

terminar

senão

$i \leftarrow i-1$

$j \leftarrow$ índice da coluna pivô da linha i

ir para o Passo 2

fimse

$\boxed{1.88\text{exe}}$ Seja a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Determine um elemento de fe(A) e fer(A).

$\boxed{\text{res}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \xleftrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \text{fe}(A)}$$

$$\xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \frac{1}{3}\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\text{fer}(A)}.$$

1.89exe Determine, para cada uma das seguintes matrizes, uma matriz equivalente que seja uma matriz em escada e a matriz equivalente que seja uma matriz em escada reduzida.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(i) $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(j) $K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.90def [[matriz elementar]] Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que E é uma matriz elementar se se pode obter através de uma operação elementar sobre a matriz I_n.

1.91exe A partir de I_4, determine as matrizes elementares obtidas através das seguintes operações elementares:

(a) $\ell_2 \leftrightarrow \ell_4$.

(b) $\ell_3 \leftarrow 2\ell_3$.

(c) $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$.

res (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow 2\ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.92teo As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares.

1.93teo Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A \longleftrightarrow B$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $B = E_1E_2\cdots E_kA$.

1.94teo Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tais que $\text{fer}(A) = E_1E_2\cdots E_kA$.

1.95teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é invertível se e só se A é o produto de matrizes elementares.

1.96obs (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é invertível se e só se $\text{fer}(A) = I_n$.

(b) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Então, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$I_n = E_k \cdots E_2 E_1 A,$$

pelo que

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} A^{-1} &= I_n \left(E_k^{-1}\right)^{-1} \cdots \left(E_2^{-1}\right)^{-1} \left(E_1^{-1}\right)^{-1} \\ &= E_k \cdots E_2 E_1 I_n, \end{aligned}$$

i.e., A^{-1} obtém-se a partir de I_n através das mesmas operações elementares que transformam A em I_n.

1.97exe Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é invertível e determine a sua inversa.

res

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A|I_3} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{I_3|A^{-1}}.$$

Assim, A é uma matriz invertível pois $\text{fer}(A) = I_3$ com $A^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Mostre-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_3$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.98exe Calcule, se possível, as matrizes inversas das seguintes matrizes:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

1.99exe Sabendo que as matrizes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação matricial $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$.

1.100exe Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem não-singulares. Resolva em ordem a X a equação matricial $[(A^T)^{-1}X]^T + (AB)^{-1} = A$.

1.101exe Matrizes — Aplicação: Redes e Grafos

Definição: Um *grafo* é um conjunto de pontos, designados por *vértices*, ligados por segmentos de recta, chamados *arestas*. As arestas podem ser representadas por pares não-ordenados de vértices.

Exemplo: A Figura 1.1 representa um grafo com vértices $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ e arestas $A = \{\{V_1, V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_3, V_4\}, \{V_2, V_4\}\}$.

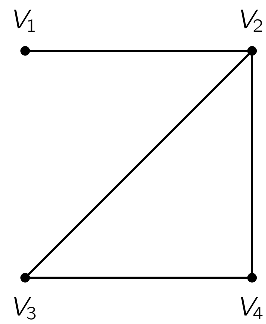


Figura 1.1: *Grafo 1.*

Pode-se imaginar que os vértices correspondem a nós numa rede de comunicação e que as arestas que ligam os vértices representam elos de comunicação entre dois nós da rede. Na realidade, uma rede de comunicação envolve um número elevado de vértices e arestas o que complica a representação gráfica da rede. Esta dificuldade é ultrapassada recorrendo a uma representação matricial para a rede.

Definição: Considere um grafo com n vértices. A matriz $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{V_i, V_j\} \text{ é uma aresta do grafo} \\ 0 & \text{se não existe uma aresta que liga } V_i \text{ e } V_j \end{cases}$$

é a *matriz de adjacência* do grafo.

Exemplo: A matriz de adjacência para grafo da Figura 1 é

$$M = \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&1&1&0 \end{bmatrix}.$$

Nota: A matriz de adjacência M é sempre simétrica.

Definição: Um *caminho* num grafo é uma sequência de arestas que ligam um vértice a outro. O *comprimento* do caminho é o número de arestas que o formam.

Exemplo: Na Figura 1.1, a sequência de arestas $(\{V_1, V_2\}, \{V_2, V_4\})$ representa um caminho de comprimento 2 que liga V_1 a V_4 e a sequência de arestas $(\{V_2, V_3\}, \{V_3, V_2\}, \{V_2, V_3\})$ representa um caminho de comprimento 3 que liga V_2 a V_3.

Teorema: Sejam $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz de adjacência de um grafo e $m_{ij}^{(k)}$ um elemento de M^k. Então, $m_{ij}^{(k)}$ é igual ao número de caminhos de comprimento k de V_i a V_j.

Exemplo: Para determinar o número de caminhos de comprimento 3 que ligam V_2 e V_3 no grafo da Figura 1.1, calcula-se M^3:

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se,então, que o número de caminhos de comprimento 3 que ligam V_2 e V_3 é $m_{23}^{(3)} = 4$.

Exercícios:

(a) Considere o grafo da Figura 1.2.

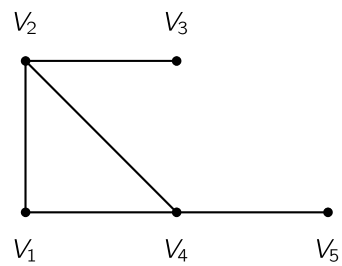


Figura 1.2: *Grafo 2.*

i. Determine a matriz de adjacência M do grafo.

ii. Calcule M^2. Analisando os elementos da primeira linha de M^2, o que pode dizer sobre os caminhos de comprimento 2 que começam em V_1?

iii. Calcule M^3. Quantos caminhos de comprimento 3 existem de V_2 a V_4? Quantos caminhos de comprimento menor ou igual a 3 existem de V_2 a V_4?

(b) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i. Desenhe um grafo que tenha M como matriz de adjacência e indique os vértices.

ii. Analisando o grafo, determine o número de caminhos de comprimento 2 de V_1 a V_3.

iii. Calcule M^2 e determine o número de caminhos de comprimento 2 de V_2 a V_4.

Capítulo 2

Determinantes

2.1def ⟦matriz complementar de um elemento de uma matriz⟧ Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\xi, \eta \in \{1, \ldots, n\}$. Chama-se matriz complementar do elemento $\xi\eta$, que se representa por $\widetilde{A}_{\xi\eta}$, a

$$\widetilde{A}_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [a_{11}] & \text{se} \quad n = 1, \\ \text{matriz que se obtém a partir da matriz } A \text{ eliminando } \ell_\xi \text{ e } c_\eta & \text{se} \quad n > 1. \end{cases}$$

2.2exe Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine a matriz complementar do elemento 12.

(b) Determine $\widetilde{A}_{33}$.

res (a) $\widetilde{A}_{12} = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $\widetilde{A}_{33} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

2.3def ⟦determinante de uma matriz⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se determinante da matriz A, que se representa por $\det(A)$, $|A|$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ao escalar definido recursivamente por

$$\det(A) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a_{11} & se \quad n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{A}_{1j}) & se \quad n > 1. \end{cases}$$

2.4obs Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$. Note-se que quando se escreve $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$, $|\cdot|$ não representa o valor absoluto mas sim o determinante. O contexto será sempre suficiente para interpretar o significado correcto de $|\cdot|$.

2.5exe Seja $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Determine $\widetilde{X}_{11}$ e $\widetilde{X}_{12}$.

(b) Calcule $|X|$.

res (a) $\widetilde{X}_{11} = [\,x_{22}\,]$ e $\widetilde{X}_{12} = [\,x_{21}\,]$.

(b)

$$\begin{aligned}
|X| \equiv \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}
&= \sum_{j=1}^{2} x_{1j}(-1)^{1+j} \det(\widetilde{X}_{1j}) \\
&= x_{11}(-1)^{1+1} \det(\widetilde{X}_{11}) + x_{12}(-1)^{1+2} \det(\widetilde{X}_{12}) \\
&= x_{11} \times 1 \times x_{22} + x_{12} \times (-1) \times x_{21} \\
&= x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.
\end{aligned}$$

2.6obs Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então, $\det(A)$ pode-se calcular atendendo a

$$\begin{tikzcd}
+ & - \\
a_{11} \arrow[dr] & a_{12} \arrow[dl] \\
a_{21} & a_{22}
\end{tikzcd}$$

vindo

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2.7exe Determine $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right|$.

res $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

2.8exe Seja $Y = [y_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule $|Y|$.

$\boxed{\text{res}}$

$$
\begin{aligned}
|Y| \equiv \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{3} y_{1j}(-1)^{1+j}\det(\widetilde{Y}_{1j}) \\
&= \underbrace{y_{11}(-1)^{1+1}\det(\widetilde{Y}_{11})}_{j=1} + \underbrace{y_{12}(-1)^{1+2}\det(\widetilde{Y}_{12})}_{j=2} \\
&\quad + \underbrace{y_{13}(-1)^{1+3}\det(\widetilde{Y}_{13})}_{j=3} \\
&= y_{11} \times 1 \times \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + y_{12} \times (-1) \times \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} \\ y_{31} & y_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + y_{13} \times 1 \times \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{vmatrix} \\
&= y_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}y_{32}) - y_{12}(y_{21}y_{33} - y_{23}y_{31}) \\
&\quad + y_{13}(y_{21}y_{32} - y_{22}y_{31}) \\
&= y_{11}y_{22}y_{33} + y_{12}y_{23}y_{31} + y_{13}y_{21}y_{32} \\
&\quad - y_{11}y_{23}y_{32} - y_{12}y_{21}y_{33} - y_{13}y_{22}y_{31}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{2.9obs}}$ "Regra de Sarrus" (apenas se aplica a matrizes de ordem 3): seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então, $\det(A)$ pode-se calcular atendendo a

$$\begin{array}{ccccc}
+ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & - \\
+ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & - \\
+ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & - \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{array}$$

vindo

$$\begin{aligned}
\det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
& - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21},
\end{aligned}$$

ou, atendendo a

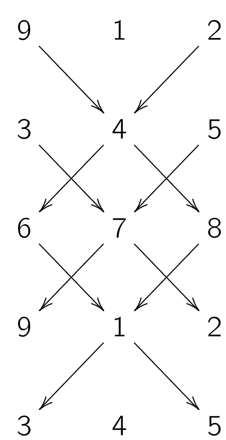
$$\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

vindo

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2.10exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$.

res Atendendo a



tem-se que

$$\det(A) = 9 \times 4 \times 8 + 3 \times 7 \times 2 + 6 \times 1 \times 5$$
$$- 2 \times 4 \times 6 - 5 \times 7 \times 9 - 8 \times 1 \times 3 = -27,$$

ou atendendo a

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 1 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \end{array}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \det(A) &= 9 \times 4 \times 8 + 1 \times 5 \times 6 + 2 \times 3 \times 4 \\ &\quad - 2 \times 4 \times 6 - 9 \times 5 \times 7 - 1 \times 3 \times 8 = -27. \end{aligned}$$

2.11def ⟦co-factor de um elemento de uma matriz ou complemento algébrico de um elemento de uma matriz⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se co-factor ou complemento algébrico do elemento ij, que se representa por A_{ij}, a

$$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det(\widetilde{A}_{ij}).$$

2.12exe Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine o co-factor do elemento 11.

(b) Determine o complemento algébrico do elemento 12.

(c) Determine A_{21}.

(d) Determine A_{22}.

res (a) $A_{11} = (-1)^{1+1} \det(\widetilde{A}_{11}) = 1 \times |-4| = -4.$

(b) $A_{12} = (-1)^{1+2} \det(\widetilde{A}_{12}) = -1 \times |3| = -3.$

(c) $A_{21} = (-1)^{2+1}\det(\widetilde{A}_{21}) = -1 \times |-2| = 2.$

(d) $A_{22} = (-1)^{2+2}\det(\widetilde{A}_{22}) = 1 \times |-5| = -5.$

$\boxed{\text{2.13teo}}$ (Teorema de Laplace) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(A)_{\xi j}A_{\xi j}}_{\substack{\text{desenvolvimento}\\ \text{através da linha } \xi,\\ \forall \xi \in \{1,2,\dots,n\}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(A)_{i\eta}A_{i\eta}}_{\substack{\text{desenvolvimento}\\ \text{através da coluna } \eta,\\ \forall \eta \in \{1,2,\dots,n\}}}.$$

$\boxed{\text{2.14obs}}$ (a) Notar que a definição $\boxed{\text{2.3def}}$ consiste no cálculo do determinante através do desenvolvimento segundo a primeira linha.

(b) Como regra prática para calcular determinantes através do teorema de Laplace, deve-se fazer o desenvolvimento a partir da linha ou coluna que tiver mais zeros.

$\boxed{\text{2.15teo}}$ Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

(a) se A for uma matriz diagonal ou triangular (inferior ou superior): $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(b) Se todos os elementos de uma linha A são nulos: $\det(A) = 0$.

(c) Se A tem duas linhas iguais: $\det(A) = 0$.

(d) Se B resulta de A por troca de duas linhas (operação elementar do tipo I): $\det(B) = -\det(A)$.

(e) Se B resulta de A por multiplicação dos elementos de uma linha de A por α (operação elementar do tipo II): $\det(B) = \alpha\det(A)$.

(f) Se B resulta de A adicionando a uma linha um múltiplo de outra linha (operação elementar do tipo III): $\det(B) = \det(A)$.

(g) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(h) $\det(A^T) = \det(A)$.

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(j) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

(k) Se A é uma matriz invertível, então, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2.16obs (a) $\det(I) = 1$.

(b) Todas as propriedades do teorema anterior que se referem a linhas também são aplicáveis a colunas.

(c) Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $B \in \text{fe}(A)$ e que se obteve a partir da matriz A através das operações elementares do tipo I e III (por exemplo, por aplicação do algoritmo apresentado em 1.86obs). Então, $\det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} b_{ii}$, em que s é o número de trocas de linhas realizadas.

2.17exe Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ tal que } P \text{ é uma matriz invertível.}$$

Usando as propriedades dos determinantes, calcule:

(a) $\det(A)$.

(b) $\det(B)$.

(c) $\det(C)$.

(d) $\det(D)$.

(e) $\det(-2A)$.

(f) $-2\det(A)$.

(g) $\det(A^3)$.

(h) $\det(2A^TAA^T)$.

(i) $\det(A^TA^{-1}B^T)$.

(j) $\det(A^{-1}DA)$.

(k) $\det(ABCD)$.

(l) $\det(P^{-1}AP)$.

res

(a) Sendo A uma matriz triangular (superior), tem-se que $\det(A) = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

(b) Sendo $\ell_{1,B} = \ell_{2,B}$, tem-se que $\det(B) = 0$.

(c) Sendo $\ell_{2,C}$ uma linha nula, tem-se que $\det(C) = 0$.

(d) Sendo D uma matriz diagonal, tem-se que $\det(D) = (-1) \times 1 = -1$.

(e) $\det(-2A) = (-2)^3 \det(A) = -8 \times 6 = -48$.

(f) $-2\det(A) = -2 \times 6 = -12$.

(g) $\det(A^3) = (\det(A))^3 = 6^3 = 216$.

(h) $\det(2A^TAA^T) = \det(2A^T)\det(A)\det(A^T) = \det(2A)\det(A)\det(A) = 2^3 \times 6 \times 6 \times 6 = 1728$.

(i) $\det(A^TA^{-1}B^T) = \det(A^T)\det(A^{-1})\det(B^T) = \det(A)\frac{1}{\det(A)}\det(B) = \det(B) = 0$.

(j) $\det(A^{-1}DA) = \det(A^{-1})\det(D)\det(A) = \frac{1}{\det(A)}\det(D)\det(A) = \det(D) = -1$.

(k) $\det(ABCD) = \det(A)\det(B)\det(C)\det(D) = 6 \times 0 \times 0 \times (-1) = 0$.

(l) $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A) = 6$.

$\boxed{2.18\text{exe}}$ Considere as matrizes A, B, C e D do exercício anterior. Indique as que são invertíveis.

$\boxed{\text{res}}$ As matrizes A e D são invertíveis pois os seus determinantes são diferentes de zero.

$\boxed{2.19\text{exe}}$ Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Utilizando a teoria dos determinantes, diga para que valores de x e y a matriz A tem inversa.

$\boxed{2.20\text{exe}}$ Para cada uma das seguintes matrizes, calcule o determinante e diga se a matriz é singular ou invertível.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2.21\text{exe}}$ Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e seja B uma matriz de ordem 4 tal que $|B| = 12$. Calcule, justificando, o determinante da matriz $(AB^{-1})^T$.

$\boxed{2.22\text{exe}}$ Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a equação matricial em X dada por $[(AX)^T + DF]^{-1} = I_2$.

(a) Resolva a equação dada.

(b) Diga, sem efectuar quaisquer cálculos, qual o determinante de $(AX)^T + DF$.

$\boxed{2.23\text{exe}}$ Sejam A uma matriz quadrada tal que $|A| = 2$ e $B = 2A^T$. Mostre que a proposição "A matriz B é invertível." é verdadeira.

$\boxed{\text{2.24exe}}$ Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&2\\ 1&1&2&0\\ 1&0&0&3\\ 2&1&0&1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $|A|$ através da definição (podendo usar qualquer processo para calcular determinantes de matrizes de ordem 3).

(b) Calcule $|A|$ por aplicação do teorema de Laplace através do desenvolvimento a partir da terceira coluna (podendo usar qualquer processo para calcular determinantes de matrizes de ordem 3).

(c) Calcule $|A|$ através de $\boxed{\text{2.16obs}}$ (c).

$\boxed{\text{res}}$ (a)

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{4} (A)_{1j}(-1)^{1+j} \det(\widetilde{A}_{1j}) \\
&= (A)_{11}(-1)^{1+1} \det(\widetilde{A}_{11}) + (A)_{12}(-1)^{1+2} \det(\widetilde{A}_{12}) \\
&\quad + (A)_{13}(-1)^{1+3} \det(\widetilde{A}_{13}) + (A)_{14}(-1)^{1+4} \det(\widetilde{A}_{14}) \\
&= 0 + 1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1&2&0\\ 1&0&3\\ 2&0&1 \end{vmatrix} + 0 + 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1&1&2\\ 1&0&0\\ 2&1&0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 1 \times (-1) \times 10 + 0 + 2 \times (-1) \times 2 \\
&= -14.
\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$\begin{vmatrix} 1&2&0\\ 1&0&3\\ 2&0&1 \end{vmatrix} = 1\times(0\times1-3\times0)-2\times(1\times1-3\times2)+0\times(1\times0-0\times2) = 10.$

$\begin{vmatrix} 1&1&2\\ 1&0&0\\ 2&1&0 \end{vmatrix} = 1\times(0\times0-0\times1)-1\times(1\times0-0\times2)+2\times(1\times1-0\times2) = 2.$

(b)

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{i=1}^{4} (A)_{i3}(-1)^{i+3} \det(\widetilde{A}_{i3}) \\
&= (A)_{13}(-1)^{1+3} \det(\widetilde{A}_{13}) + (A)_{23}(-1)^{2+3} \det(\widetilde{A}_{23}) \\
&\quad + (A)_{33}(-1)^{3+3} \det(\widetilde{A}_{33}) + (A)_{43}(-1)^{4+3} \det(\widetilde{A}_{43}) \\
&= 0 + 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 \\
&= 2 \times (-1) \times 7 \\
&= -14.
\end{aligned}
$$

Cálculos auxiliares:

$\left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 0\times(0\times1-3\times1)-1\times(1\times1-3\times2)+2\times(1\times1-0\times2) = 7.$

(c)

$$
\begin{aligned}
|A| &\equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} && \ell_1 \leftrightarrow \ell_2 \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_1 \end{array} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \ell_2 \end{array} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \\ \\ \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_3 \end{array} \\
&= -(1 \times 1 \times (-2) \times (-7)) \\
&= -14.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2.25\text{obs}}$ Pedindo-se o determinante de uma matriz, se não for explicitado no enunciado o processo de cálculo, este pode ser feito por um método qualquer, nomeadamente aquele que se achar mais simples.

2.26exe Calcule o determinante da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ por dois processos distintos.

2.27exe Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.28def ⟦matriz adjunta⟧ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se matriz adjunta de A à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $z_{ij} = A_{ji}$, escrevendo-se $Z = \operatorname{adj}(A)$.

2.29obs A matriz adjunta é a transposta da matriz dos co-factores.

2.30exe (a) Determine a matriz adjunta da matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Determine a matriz adjunta da matriz $X = [x_{ij}]\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

res (a) Atendendo a 2.12exe, tem-se que $\operatorname{adj}(A) = \left[\begin{smallmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -5 \end{smallmatrix}\right]^T = \left[\begin{smallmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -5 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) Atendendo a

$$X_{11} = (-1)^{1+1}\det(\widetilde{X}_{11}) = 1 \times |x_{22}| = x_{22},$$
$$X_{12} = (-1)^{1+2}\det(\widetilde{X}_{12}) = -1 \times |x_{21}| = -x_{21},$$
$$X_{21} = (-1)^{2+1}\det(\widetilde{X}_{21}) = -1 \times |x_{12}| = -x_{12},$$
$$X_{22} = (-1)^{2+2}\det(\widetilde{X}_{22}) = 1 \times |x_{11}| = x_{11},$$

tem-se que $\mathrm{adj}(X) = \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{21} \\ -x_{12} & x_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix}$.

2.31teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Então, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$.

2.32exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que a matriz A é invertível.

(b) Determine a inversa da matriz A pelo método da adjunta.

res (a) Como $\det(A) = 3\times 0 - (-2)\times 1 = 2 \neq 0$, A é uma matriz invertível.

(b) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$.

Calcule-se, apenas para efeito de verificação, que $AA^{-1} = I_2$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.33exe Calcule o determinante, a adjunta e a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.34exe Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Calcule $A(\operatorname{adj}(A))$ e obtenha a partir deste resultado a inversa de A.

2.35exe Sejam $p \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$. Mostre que A é uma matriz singular.

2.36exe Seja A uma matriz ortogonal. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

2.37exe Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $a_{ij} = 1$. Mostre que $\det(A - nI_n) = 0$.

2.38exe Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

(b) Mostre que se A é uma matriz invertível e $n \geqslant 2$, então $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$.

2.39exe Determinantes — Aplicação: Mensagens codificadas

Pode-se codificar uma mensagem associando a cada letra do alfabeto um número inteiro e enviar a lista de números que substitui a mensagem. A teoria dos determinantes é usada neste contexto para o cálculo de inversas com propriedades especiais.

Exemplo: A mensagem "BOA SORTE!" pode ser codificada por

$$3, 1, 5, 10, 1, 6, 2, 8, 0,$$

onde a letra “B” é representado pelo algarismo “3”, a letra “O” pelo algarismo “1”,... e o símbolo “!” pelo algarismo “0” (neste exemplo não se codifica o espaço).

Para complicar ainda mais a codificação da mensagem e para impedir que o código seja quebrado pode-se usar a seguinte técnica: o código que representa a mensagem é colocado nas colunas de uma matriz B. No exemplo considerado tem-se

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz B vai ser pré-multiplica por uma outra matriz A. A matriz A deve verificar as seguintes propriedades: os elementos de A são números inteiros e $\det(A) = \pm 1$. Daí resulta que $A^{-1} = \pm\,\mathrm{adj}(A)$ e os elementos de A^{-1} também vão ser todos números inteiros.

Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

contém a mensagem codificada que deve ser enviada:

$$13, 1, 6, 22, 1, 7, 2, 8, 8.$$

O receptor da mensagem consegue descodificá-la multiplicando-a por A^{-1} da seguinte forma

$$A^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 22 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de codificação A pode ser construída a partir da matriz identidade I, aplicando, sucessivamente, operações elementares do tipo I e do tipo III. A matriz assim obtida vai ter elementos inteiros, verifica $\det(A) = \pm\det(I) = \pm 1$ e A^{-1} também vai ter elementos inteiros.

Exercício: Na codificação de uma mensagem, a letra "A" é representada pelo número "1", "B" por "2", "C" por "3",..., "J" por "10", "K" por "11", "L" por "12",...e assim por diante (neste exercício, o espaço também não é considerado). A mensagem foi transformada usando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e enviada como

$$45, 60, -47, 63, 82, -68, 44, 48, -65.$$

Qual é a mensagem?

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares

3.1def [[sistema de equações lineares, matriz dos coeficientes, vector dos termos independentes, vector das incógnitas, matriz aumentada ou matriz ampliada, conjunto solução]] Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ com matriz dos coeficientes A e vector dos termos independentes b se (S) é o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Chama-se vector das incógnitas do sistema (S) à matriz coluna $x = [x_i] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Chama-se matriz aumentada ou matriz ampliada do sistema (S), que se representa por $A|b$, à matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Chama-se conjunto solução do sistema (S), que se representa por $\mathrm{CS}_{(S)}$, a

$$\mathrm{CS}_{(S)} \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b\}.$$

3.2obs Note-se que o sistema (S) da definição anterior pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou, em notação matricial, como $Ax = b$.

3.3def ⟦sistema de equações não lineares⟧ Chama-se sistema de equações não lineares a um sistema de equações que não é um sistema de equações lineares.

3.4exe (a) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a três incógnitas.

(b) Dê um exemplo de um sistema de duas equações não lineares a duas incógnitas.

res (a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + x\,\mathrm{sen}(y) = 1 \\ x - e^y = 0. \end{cases}$

3.5def Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$.

(a) ⟦sistema homogéneo⟧ Diz-se que (S) é um sistema homogéneo se $b = \underline{0}$.

(b) ⟦sistema homogéneo associado⟧ Se $b \neq \underline{0}$, chama-se sistema homogéneo associado ao sistema (S) ao sistema $Ax = \underline{0}$.

3.6exe (a) Dê um exemplo de um sistema homogéneo de duas equações a três incógnitas.

(b) Identifique o sistema homogéneo associado ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 0. \end{cases}$$

res (a) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

3.7def Seja (S) um sistema de equações lineares.

(a) ⟦sistema possível⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível se $CS_{(S)} \neq \emptyset$.

(b) ⟦sistema possível e determinado⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível e determinado se $\#CS_{(S)} = 1$.

(c) ⟦sistema possível e indeterminado⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível e indeterminado se $\#CS_{(S)} > 1$.

(d) ⟦sistema impossível⟧ Diz-se que (S) é um sistema impossível se $CS_{(S)} = \emptyset$.

3.8def ⟦característica de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se característica da matriz A, que se representa por $c(A)$, ao número de linhas não nulas de uma matriz em escada que seja equivalente à matriz A.

3.9teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A é uma matriz invertível se e só se $c(A) = n$.

3.10teo Seja (S) o sistema de equações lineares de m equações nas n incógnitas $Ax = b$. Então,

$$\begin{cases} c(A) = c(A|b) & : \text{ sistema possível} \\ c(A) = c(A|b) = n & : \text{ sistema possível e determinado} \\ c(A) = c(A|b) < n & : \text{ sistema possível e indeterminado} \\ c(A) < c(A|b) & : \text{ sistema impossível.} \end{cases}$$

3.11obs Seja (S) o sistema de equações lineares de m equações nas n incógnitas $Ax = b$. Então, se $n > m$ o sistema não pode ser possível e determinado.

$\boxed{\text{3.12def}}$ [[variável pivô, variável livre]] Sejam $Ax = b$ um sistema de equações lineares e $A' \in \text{fe}(A)$. Se $c_{j,A'}$ é uma coluna pivô, diz-se que x_j é uma variável pivô. Caso contrário, diz-se que é uma variável livre.

$\boxed{\text{3.13exe}}$ Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine um elemento de $\text{fe}(A|b)$.

(b) Identifique as colunas pivô do sistema (S).

(c) Identifique as variáveis pivô do sistema (S).

(d) Identifique as variáveis livres do sistema (S).

$\boxed{\text{res}}$ (a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]}_{\in \text{fe}(A|b)}.$$

(b) Colunas pivô de (S): c_1 e c_3.

(c) Variáveis pivô de (S): x_1 e x_3.

(d) Variáveis livres de (S) x_2 e x_4.

$\boxed{\text{3.14teo}}$ Método de Gauss para a resolução de sistemas de equações lineares: seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então, o seguinte algoritmo determina $CS_{(S)}$:

Passo 1 determinar um elemento de $\text{fe}(A|b)$.

Passo 2 identificar as variáveis livres.

Passo 3 aplicar método de substituição de trás para a frente.

3.15teo Método de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas de equações lineares: seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então, o seguinte algoritmo determina $CS_{(S)}$:

Passo 1 determinar $\text{fer}(A|b)$.

Passo 2 identificar as variáveis livres.

Passo 3 aplicar método de substituição de trás para a frente.

3.16exe (a) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas possível e determinado, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

(b) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas possível e indeterminado, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

(c) Dê um exemplo de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas impossível, resolva-o através do Método de Gauss e faça a sua interpretação geométrica.

res (a) Seja (S_1) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Resolução de (S_1) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Como $c(A) = 2$, $c(A|b) = 2$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) = n$ —, (S_1) é um sistema possível e determinado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & - & 2y & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_1)} = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}.$$

$CS_{(S_1)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das rectas $x + y = 1$ e $x - y = 0$, que neste caso é um só *cf.* Figura 3.1.

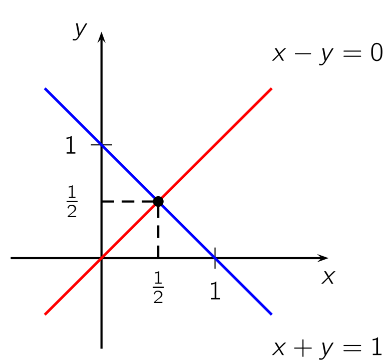


Figura 3.1: *Interpretação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas possível e determinado.*

(b) Seja (S_2) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_2) \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ -2x & - & 2y & = & -2. \end{array}\right.$$

Resolução de (S_2) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como $c(A) = 1$, $c(A|b) = 1$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) < n$ —, (S_2) é um sistema possível e indeterminado equivalente ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

Sendo y uma variável livre, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_2)} = \{(1 - \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$CS_{(S_2)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das rectas $x + y = 1$ e $-2x - 2y = -2$, que neste caso são uma infinidade *cf.* Figura 3.2.

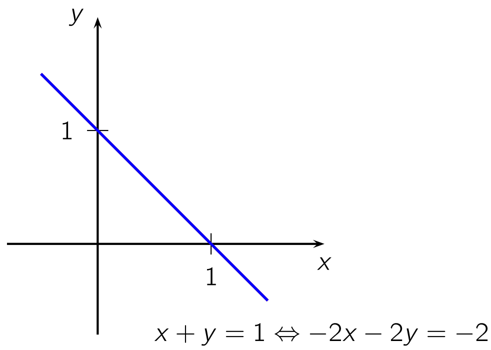


Figura 3.2: *Interpretação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas possível e indeterminado.*

(c) Seja (S_3) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vector dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, *i.e.*,

$$(S_3) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Resolução de (S_3) através do método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como $c(A) = 1$ e $c(A|b) = 2$ — $c(A) < c(A|b)$ —, (S_3) é um sistema impossível equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

tendo-se

$$CS_{(S_3)} = \emptyset.$$

$CS_{(S_3)}$ pode ser geometricamente interpretado como sendo os pontos de intersecção das rectas $x + y = 1$ e $x + y = 2$, que neste caso não existem *cf.* Figura 3.3.

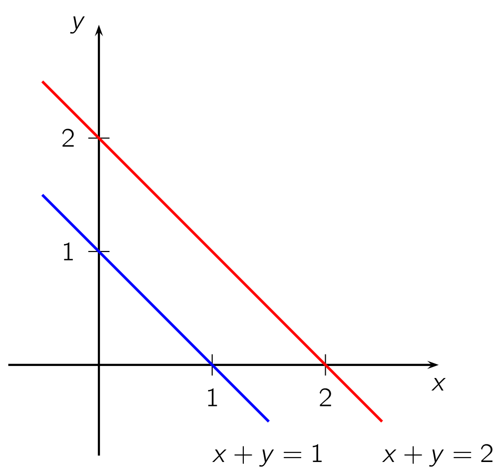


Figura 3.3: *Interpretação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas impossível.*

$\boxed{\text{3.17exe}}$ Classifique quanto ao número de soluções e determine o conjunto solução dos seguintes sistemas de equações lineares:

(a) (S_a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ \qquad 3x_2 = 6. \end{cases}$

(b) (S_b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ \qquad 0x_2 = 2. \end{cases}$

(c) (S_c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \qquad 4x_2 + 5x_3 = 23. \end{cases}$

(d) (S_d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

3.18exe Considere os sistemas de equações lineares

$$(S_1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 2. \end{cases}$$

(a) Resolva (S_1) através do métodos de Gauss.

(b) Resolva (S_1) através do métodos de Gauss-Jordan.

(c) Resolva (S_2) através do métodos de Gauss.

(d) Resolva (S_2) através do métodos de Gauss-Jordan.

$\boxed{\text{res}}$ (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Assim, (S_1) é um sistema equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1-1+1}{1} = 1 \\ y = \frac{0+2\times 1}{2} = 1 \\ z = \frac{3}{3} = 1 \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_1)} = \{(1, 1, 1)\}.$$

(b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \frac{1}{3}\ell_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + 2\ell_3]{\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, (S_1) é um sistema equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$CS_{(S_1)} = \{(1, 1, 1)\}.$$

(c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, (S_2) é um sistema equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & & & = & 1. \end{array}\right.$$

Sendo z uma variável livre, tem-se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - (-1) - \alpha = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

ou seja,

$$CS_{(S_2)} = \{(2 - \alpha, -1, \alpha)\}.$$

(d)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\underset{\ell_2 \leftarrow -\ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Assim, (S_2) é um sistema equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y \qquad\; = -1. \end{cases}$$

Sendo z uma variável livre, tem-se

$$\begin{cases} x = 1 - (-1) - \alpha = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou seja,

$$CS_{(S_2)} = \{(2 - \alpha, -1, \alpha)\}.$$

$\boxed{\text{3.19exe}}$ Use o método de Gauss-Jordan para resolver cada um dos seguintes sistemas:

$$(S_3) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$$(S_4)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3.20exe Resolva pelo método de Gauss, pelo método de Gauss-Jordan e pela regra de Cramer os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(S_a)\quad \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ y - w = 0 \\ x - w = 2. \end{cases}$$

$$(S_b)\quad \begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ 2x - y + z - w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ 2x - 2y + 2z - w = -2. \end{cases}$$

3.21exe Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(S_a)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$(S_b)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$(S_c)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$(S_d)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Responda às seguintes questões para cada um destes sistemas de equações lineares:

(a) identifique a matriz dos coeficientes A, o vector dos termos independentes b, o vector das incógnitas x e a matriz ampliada $A|b$.

(b) Classifique o sistema quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto solução.

(c) Classifique o sistema homogéneo associado quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto solução.

3.22exe Dê exemplos de sistemas de m equações lineares a n incógnitas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis para $m > n$, $m = n$ e $m < n$, sempre que tal seja possível.

3.23exe Discuta o seguinte sistema de equações lineares em função dos parâmetros reais α e β:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & \beta \\ 2x_1 & + & (\alpha+2)x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ (\alpha+1)x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 0. \end{cases}$$

res

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & \alpha+2 & 2 & -1 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - (\alpha+1)\ell_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & -1-\alpha & \alpha & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{\alpha}{2}\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \frac{1-\alpha}{2}\ell_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \\ \\ \ell_3 \leftrightarrow \ell_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \end{array}\right]$$

$\alpha = -1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} \end{array}\right]$$

- $\alpha \neq -1$: $c(A) = 4$, $c(A|b) = 4$ e $n = 4$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) = n$ —, pelo que o sistema é possível e determinado.
- $\alpha = -1$ e $\beta = 0$: $c(A) = 3$, $c(A|b) = 3$ e $n = 4$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) < n$ —, pelo que o sistema é possível e indeterminado.
- $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$: $c(A) = 3$ e $c(A|b) = 4$ — $c(A) < c(A|b)$ —, pelo que o sistema é impossível.

3.24exe Discuta os seguintes sistemas de equações lineares $Ax = b$ em função dos respectivos parâmetros reais:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & k \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(c) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & c \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{smallmatrix}\right]$.

(d) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{smallmatrix}\right]$.

(e) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & \beta \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.

(f) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \gamma \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

3.25exe Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x & & - & 2z & = & 1 \\ & y & - & bz & = & 1 \\ ax & + & - & z & = & 2a \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Discuta o sistema em função de a e b.

(b) Considere $a = 1/2$ e $b = 1$. Calcule a solução geral do sistema homogéneo associado.

3.26teo (Regra de Cramer) Seja $Ax = b$ um sistema de n equações lineares a n incógnitas possível e determinado. Então, $x = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)\, b$, ou seja, $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$, $i = 1, \ldots, n$, em que Δ_i é o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz A, na qual se substitui a i-ésima coluna pelo vector dos termos independentes, b.

3.27exe Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que (S) é um sistema possível e determinado.

(b) Determine o conjunto solução de (S) através da Regra de Cramer.

res (a) Como $\det(A) = 1 \times 6 - 2 \times (-3) = 12 \neq 0$, $c(A) = 2$, $c(A|b) = 2$ e $n = 2$ (número de incógnitas) — $c(A) = c(A|b) = n$ —, pelo que (S) é um sistema possível e determinado.

(b)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{5}{12}.$$

Assim, $CS_{(S)} = \{(\frac{1}{6}, \frac{5}{12})\}$.

3.28exe Considere o seguinte sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2ax_2 + 2ax_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Discuta o sistema em função de a e b.

(b) Para $a = 2$ e $b = 1$, resolva o sistema pela regra de Cramer.

3.29exe Determine, por dois processos distintos, para que valores de α a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ é invertível.

3.30exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Mostre que o sistema $Ax = b$ é possível e determinado, qualquer que seja o vector dos termos independentes $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

(c) Usando a alínea (a), resolva o sistema $Ax = b$, em que $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $b_i = i$.

3.31exe Considere o seguinte sistema não linear nas incógnitas α, β e γ.

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\,\mathrm{sen}\,\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\,\mathrm{sen}\,\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9. \end{cases}$$

Mostre que, neste caso, é possível concluir que o sistema é impossível recorrendo ao método de Gauss.

3.32exe Determine a equação da parábola que passa nos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

3.33exe Sistemas de Equações Lineares — Aplicação: Circuitos eléctricos

Nesta aplicação vai-se analisar como se pode usar a teoria de sistemas de equações lineares para determinar a corrente em cada trecho de um circuito eléctrico através das *leis de Kirchhoff*.

Considere o circuito eléctrico ilustrado na Figura 3.4.

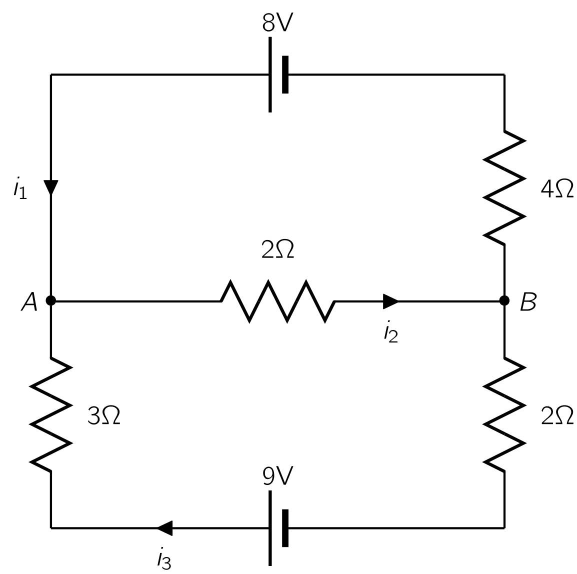


Figura 3.4: *Circuito eléctrico 1.*

A bateria, medida em volt (V), gera uma carga que produz uma corrente. A corrente sai da bateria do lado que contém a recta vertical mais longa. As resistências são medidas em ohm (Ω). As letras maiúsculas representam os nós do circuito eléctrico. A letra i representa a corrente entre os nós e as setas indicam o sentido de fluxo, mas se i for negativa, então a corrente flui no sentido oposto ao indicado. As correntes são medidas em ampere.

Para determinar as correntes, recorre-se às *leis de Kirchhoff*:

(a) Em cada nó, a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem.

(b) Em cada ciclo fechado, a diferença de potencial é zero.

A diferença de potencial eléctrico U em cada resistor é dada pela *lei de Ohm*:

$$U = iR,$$

onde i representa a corrente em ampere e R a resistência em ohm.

Vamos dererminar as correntes do circuito eléctrico considerado. Da primeira *lei de Kirchhoff* obtém-se

$$\begin{array}{rcrcrcl} i_1 & - & i_2 & + & i_3 & = & 0 \qquad (\text{nó } A) \\ -i_1 & + & i_2 & - & i_3 & = & 0 \qquad (\text{nó } B) \end{array}$$

Da segunda *lei de Kirchhoff* resulta que

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4i_1 & + & 2i_2 & & & = & 8 \qquad (\text{ciclo superior}) \\ & & 2i_2 & + & 5i_3 & = & 9 \qquad (\text{ciclo inferior}) \end{array}$$

Podemos representar o circuito eléctrico usando a seguinte matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

Esta matriz pode ser reduzida à forma escada da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo por substituição de trás para a frente, obtém-se $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ e $i_3 = 1$.

Exercício: Determine a corrente em cada um dos trechos do circuito eléctrico ilustrado na Figura 3.5.

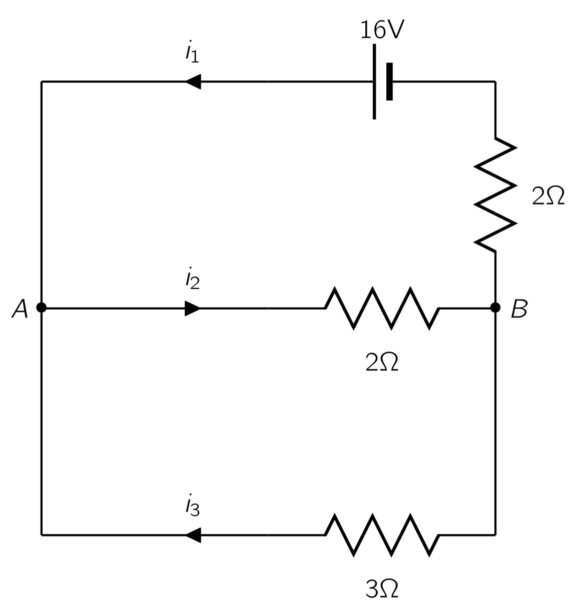


Figura 3.5: *Circuito eléctrico 2.*

Capítulo 4

Espaços Vectoriais

4.1obs Apresenta-se na definição que se segue a generalização da noção de "vector" entendido como uma entidade com um tamanho e uma direcção. O estudo genérico de um espaço vectorial permite-nos estabelecer propriedades válidas para um conjunto alargado de entidades matemáticas.

4.2def ⟦espaço vectorial⟧ Sejam V um conjunto não vazio e as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \odot x. \end{array}$$

Diz-se que o sêxtuplo $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ é um espaço vectorial se:

(a) $\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x$.

(b) $\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

(c) $\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

(d) $\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

(g) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

(h) $\forall x \in V : 1 \odot x = x$.

4.3def Seja o espaço vectorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

(a) ⟦escalar⟧ Chama-se escalares aos elementos de $\mathbb{R}$.

(b) ⟦vector⟧ Chama-se vectores aos elementos de V.

(c) ⟦soma de vectores⟧ Chama-se soma de vectores à operação $\oplus$. ⟦multiplicação de um escalar por um vector⟧ Chama-se multiplicação de um escalar por um vector à operação $\odot$.

4.4obs (a) Para simplificar a linguagem, em vez de "seja o espaço vectorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$" diz-se "seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$" quando as operações de soma de vectores e de multiplicação de um escalar por um vector estiverem subentendidas.

(b) Se não causar confusão, em vez de $x \oplus y$ escreve-se $x + y$, em vez de $x \oplus (-y)$ escreve-se $x - y$ e em vez de $\alpha \odot x$ escreve-se αx.

4.5obs Na definição que se segue, relembram-se ou introduzem-se conjuntos e as respectivas operações usuais, que serão usados na apresentação de exemplos de espaços vectoriais.

4.6def (a) ⟦$\mathbb{R}^n$⟧ Seja $n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathbb{R}^n$ o conjunto dos n-tuplos com elementos em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

As operações usuais neste conjunto são:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

(b) $[\![\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})]\!]$ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes com m linhas e n colunas com elementos em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}\}.$$

As operações usuais neste conjunto são:

$$[(A + B)_{ij}] \stackrel{\text{def}}{=} [(A)_{ij} + (B)_{ij}],$$
$$[(\alpha A)_{ij}] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha(A)_{ij}].$$

(c) $[\![\mathbb{R}_n[x]]\!]$ Seja $n \in \mathbb{N}$. Representa-se por $\mathbb{R}_n[x]$ o conjunto dos polinómios na variável x com coeficientes em $\mathbb{R}$ e que têm grau menor ou igual a n, ou seja,

$$\mathbb{R}_n[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n | a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

As operações usuais neste conjunto são:

$$\begin{aligned}
&(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n) + (b_0x^n + \cdots + b_{n-1}x + b_n) = \\
&\qquad (a_0 + b_0)x^n + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n), \\
&\alpha(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \\
&\qquad (\alpha a_0)x^n + \cdots + (\alpha a_{n-1})x + (\alpha a_n).
\end{aligned}$$

(d) $[\![\mathbb{R}[x]]\!]$ Representa-se por $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinómios na variável x de qualquer grau com coeficientes em $\mathbb{R}$. As operações usuais neste conjunto são idênticas às definidas no conjunto $\mathbb{R}_n[x]$.

(e) $[\![C(a,b),\ C^k(a,b),\ C^\infty(a,b)]\!]$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $k \in \mathbb{N}$. Representa-se por $C(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real contínuas em (a,b), por $C^k(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real tais que existem todas as derivadas de f até à ordem k (inclusive) e f e todas as derivadas de f até à ordem k (inclusive) são contínuas em (a,b), e por $C^\infty(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real tais que existem todas as derivadas de f e f e todas as derivadas de f são contínuas em (a,b), ou seja,

$$\begin{aligned}
&C(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : (a,b) \to \mathbb{R} | f \text{ é contínua em } (a,b)\}, \\
&C^k(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : (a,b) \to \mathbb{R} | \\
&\qquad\qquad f \in C(a,b) \text{ e } \tfrac{d^pf}{dx^p} \in C(a,b), p = 1, \ldots, k\}, \\
&C^\infty(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : (a,b) \to \mathbb{R} | \\
&\qquad\qquad f \in C(a,b) \text{ e } \tfrac{d^pf}{dx^p} \in C(a,b), \forall p \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

As operações usuais nestes conjuntos são:

$$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x).$$

$\boxed{\text{4.7exe}}$ Mostre que $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais é um espaço vectorial.

$\boxed{\text{res}}$ As operações usuais em $\mathbb{R}^2$ são

$$x+y=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),$$
$$\alpha x=\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2).$$

com $x_1,x_2,y_1,y_2,\alpha\in\mathbb{R}$ (como já se disse, quando estão em causa as operações usuais, em vez de $x\oplus y$ escreve-se $x+y$ e em vez de $\alpha\odot x$ escreve-se αx).

No que se segue, verificam-se as oito propriedades de $\boxed{\text{4.2def}}$.

Propriedade (a)

Definição geral:

$\forall x,y\in V: x\oplus y=y\oplus x.$

Exemplo presente:

$\forall x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2: x+y=y+x.$

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\
&\overset{(1)}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.1)} \\
y + x &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\
&\overset{(2)}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.2)}
\end{aligned}
$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) pela propriedade comutativa da soma de números reais.

Como as expressões (a.1) e (a.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Definição geral:

$\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)+z = x+(y+x).$

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= ((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2)\\ &\overset{(1)}{=} (x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2)\\ &\overset{(1)}{=} ((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2)\\ &\overset{(2)}{=} (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2). \qquad \text{(b.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+(y+z) &= (x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2))\\ &\overset{(1)}{=} (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2)\\ &\overset{(1)}{=} (x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2))\\ &\overset{(2)}{=} (x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2). \qquad \text{(b.2)}\end{aligned}$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) pela propriedade associativa da soma de números reais.

Como as expressões (b.1) e (b.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Definição geral:

$\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

Exemplo presente:

$\exists^1 0_{\mathbb{R}^2} = (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x + 0_{\mathbb{R}^2} = x$.

$$
\begin{aligned}
x + 0_{\mathbb{R}^2} = x \Leftrightarrow & (x_1, x_2) + (a, b) = (x_1, x_2) \\
\overset{(1)}{\Leftrightarrow} & (x_1 + a, x_2 + b) = (x_1, x_2) \\
\overset{(2)}{\Leftrightarrow} & x_1 + a = x_1 \wedge x_2 + b = x_2 \\
\overset{(3)}{\Leftrightarrow} & a = 0 \wedge b = 0.
\end{aligned}
$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) pela definição da igualdade de dois elementos de $\mathbb{R}^2$.

(3) pelas propriedades dos números reais.

Assim, conclui-se que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ é o elemento neutro da soma de vectores, sendo a propriedade (c) válida.

Propriedade (d)

Definição geral:

$\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists^1 - x = (a, b) \in \mathbb{R}^2 : x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

$$
\begin{aligned}
x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow & (x_1, x_2) + (a, b) = (0, 0) \\
\overset{(1)}{\Leftrightarrow} & (x_1 + a, x_2 + b) = (0, 0) \\
\overset{(2)}{\Leftrightarrow} & x_1 + a = 0 \wedge x_2 + b = 0 \\
\overset{(3)}{\Leftrightarrow} & a = -x_1 \wedge b = -x_2.
\end{aligned}
$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) igualdade de dois elementos de $\mathbb{R}^2$.

(3) pelas propriedades dos números reais.

Assim, conclui-se que $-x = (-x_1, -x_2)$ é o elemento simétrico do elemento $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, sendo a propriedade (d) válida.

Propriedade (e)

Definição geral:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &\overset{(1)}{=} \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &\overset{(2)}{=} (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) \\ &\overset{(3)}{=} (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2). \qquad \text{(e.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha y &= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) \\ &\overset{(2)}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) \\ &\overset{(1)}{=} (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2). \qquad \text{(e.2)} \end{aligned}$$

(1) por definição da operação soma de vectores.

(2) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(3) pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à soma em $\mathbb{R}$.

Como as expressões (e.1) e (e.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (e) é válida.

Propriedade (f)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) \\
&\overset{(2)}{=} (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2). \qquad \text{(f.1)} \\
\alpha x + \beta x &= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2) \\
&\overset{(1)}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) \\
&\overset{(3)}{=} (\alpha x_1 + \beta x_{,} \alpha x_2 + \beta x_2). \qquad \text{(f.2)}
\end{aligned}$$

(1) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(2) pela propriedade distributiva da multiplicação relativamente à soma em $\mathbb{R}$.

(3) por definição da operação soma de vectores.

Como as expressões (f.1) e (f.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (f) válida.

Propriedade (g)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x).$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)x &= (\alpha\beta)(x_1, x_2) \\
&\stackrel{(1)}{=} ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2) \\
&\stackrel{(2)}{=} (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.1)} \\
\alpha(\beta x) &= \alpha(\beta(x_1, x_2)) \\
&\stackrel{(1)}{=} \alpha(\beta x_1, \beta x_2) \\
&\stackrel{(1)}{=} (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2)) \\
&\stackrel{(2)}{=} (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.2)}
\end{aligned}
$$

(1) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(2) pela propriedade associativa da multiplicação de números reais.

Como as expressões (g.1) e (g.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (g) válida.

Propriedade (h)

Definição geral:

$\forall x \in V : 1 \odot x = x.$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1x = x.$

$$
\begin{aligned}
1x &= 1(x_1, x_2)\\
&\overset{(1)}{=} (1x_1, 1x_2)\\
&\overset{(2)}{=} (x_1, x_2)\\
&= x.
\end{aligned}
$$

(1) por definição da operação multiplicação de um vector por um escalar.

(2) 1 é o elemento neutro da multiplicação de reais.

Assim, conclui-se que a propriedade (h) é válida.

Assim, uma vez que as oito propriedades da definição 4.2def de espaço vectorial são verificadas, conclui-se que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais é um espaço vectorial.

4.8exe Mostre que os seguintes conjuntos com as operações usuais são espaços vectoriais:

(a) $\mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(c) $\mathbb{R}[x]$.

(d) $C(a, b)$.

4.9exe Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y = xy, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \odot x = x^\alpha \end{array}$$

é um espaço vectorial.

4.10exe Mostre que o conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & (A, B) & \longmapsto & A \oplus B = A^T + B^T \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & (\alpha, A) & \longmapsto & \alpha \odot A = \alpha A, \end{array}$$

não define um espaço vectorial.

res Para resolver este exercício é necessário identificar (pelo menos) uma propriedade da definição 4.2def que não é satisfeita. No entanto, e por questões didácticas, vai-se verificar todas as propriedades (apesar de não se explicitar na resolução deste exercício, esta faz uso das propriedades das operações com matrizes).

Note-se que neste exercício, uma vez que a definição de uma das operações não é a usual — soma de elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ —, usa-se a notação $x \oplus y$ e $\alpha \odot x$.

Propriedade (a)

Definição geral:

$\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x.$

Exemplo presente:

$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \oplus B = B \oplus A.$

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= A^T + B^T. && \text{(a.1)}\\
B \oplus A &= B^T + A^T \\
&= A^T + B^T. && \text{(a.2)}
\end{aligned}
$$

Como as expressões (a.1) e (a.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Definição geral:

$\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z).$

Exemplo presente:

$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$

$$
\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= (A^T + B^T) \oplus C \\
&= (A^T + B^T)^T + C^T \\
&= ((A^T)^T + (B^T)^T) + C^T \\
&= A + B + C^T. \qquad (b.1) \\
A \oplus (B \oplus C) &= A \oplus (B^T + C^T) \\
&= A^T + (B^T + C^T)^T \\
&= A^T + ((B^T)^T + (C^T)^T) \\
&= A^T + B + C. \qquad (b.2)
\end{aligned}
$$

Como existem elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que produzem expressões diferentes para (b.1) e (b.2), conclui-se que a propriedade (b) não é válida.

Propriedade (c)

Definição geral:

$\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

Exemplo presente:

$\exists^1$ elemento de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (representado por $\overline{0}$), $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \oplus \overline{0} = A$.

$$\begin{aligned} A \oplus \overline{0} = A &\Leftrightarrow A^T + \overline{0}^T = A \\ &\Leftrightarrow \overline{0}^T = A - A^T \\ &\Leftrightarrow \overline{0} = (A - A^T)^T \\ &\Leftrightarrow \overline{0} = A^T - A. \end{aligned}$$

Assim, uma vez que $\overline{0}$ não é independente de A, conclui-se que a propriedade (c) não é válida.

Propriedade (d)

Definição geral:

$\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

Exemplo presente:

Esta propriedade não faz sentido verificar, uma vez que não existe elemento neutro da soma (ver propriedade anterior).

Propriedade (e)

Definição geral:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

Exemplo presente:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \alpha \odot (A \oplus B) = \alpha \odot A \oplus \alpha \odot B$.

$$
\begin{aligned}
\alpha \odot (A \oplus B) &= \alpha \odot (A^T + B^T) \\
&= \alpha(A^T + B^T) \\
&= \alpha A^T + \alpha B^T. \qquad \text{(e.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \odot A \oplus \alpha \odot B &= \alpha A \oplus \alpha B \\
&= (\alpha A)^T + (\alpha B)^T \\
&= \alpha A^T + \alpha B^T. \qquad \text{(e.2)}
\end{aligned}
$$

Como as expressões (e.1) e (e.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (e) é válida.

Propriedade (f)

Definição geral:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$$

Exemplo presente:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : (\alpha + \beta) \odot A = \alpha \odot A \oplus \beta \odot A.$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\odot A &= (\alpha+\beta)A\\ &= \alpha A+\beta A. \qquad \text{(f.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\odot A\oplus\beta\odot A &= \alpha A\oplus\beta A\\ &= (\alpha A)^T+(\beta A)^T\\ &= \alpha A^T+\beta A^T. \qquad \text{(f.2)}\end{aligned}$$

Como existem elementos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que produzem expressões diferentes para (f.1) e (f.2), conclui-se que a propriedade (f) não é válida.

Propriedade (g)

Definição geral:

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall x\in V:(\alpha\cdot\beta)\odot x=\alpha\odot(\beta\odot x).$

Exemplo presente:

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}):(\alpha\cdot\beta)\odot A=\alpha\odot(\beta\odot A).$

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\odot A &= (\alpha\beta)\odot A\\ &= \alpha\beta A. \qquad \text{(g.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\odot(\beta\odot A) &= \alpha\odot(\beta A)\\ &= \alpha\beta A. \qquad \text{(g.2)}\end{aligned}$$

Como as expressões (g.1) e (g.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (g) é válida.

Propriedade (h)

Definição geral:

$\forall x \in V : 1 \odot x = x.$

Exemplo presente:

$\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : 1A = A.$

$$1A = A.$$

Assim, conclui-se que a propriedade (h) é válida.

Como as propriedades (b), (c), (d) e (f) da definição $\boxed{\text{4.2def}}$ não são válidas, conclui-se que o conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com as operações dadas não é um espaço vectorial (volta-se a frisar que bastava uma propriedade falhar para se concluir que não se estava perante um espaço vectorial).

$\boxed{\text{4.11exe}}$ Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações

$$\begin{array}{cccc} \oplus : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a,b) \oplus (c,d) = (0, b+d), \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha,(a,b)) & \longmapsto & \alpha \odot (a,b) = (2\alpha a, 2\alpha b), \end{array}$$

não define um espaço vectorial.

res Para resolver este exercício é necessário identificar (pelo menos) uma propriedade da definição 4.2def que não é satisfeita. No entanto, e por questões didácticas, vai-se verificar todas as propriedades.

Note-se que neste exercício, uma vez que a definição das duas operações não é a usual, usa-se a notação $x \oplus y$ e $\alpha \odot x$.

Apesar de não se explicitar na resolução deste exercício, esta faz uso das propriedades dos números reais.

Propriedade (a)

Definição geral:

$\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x.$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x \oplus y = y \oplus x.$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \\ &= (0, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \oplus x &= (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2) \\ &= (0, y_2 + x_2) \\ &= (0, x_2 + y_2). \qquad \text{(a.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (a.1) e (a.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Definição geral:

$\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2) \\
&= (0, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) \\
&= (0, (x_2 + y_2) + z_2) \\
&= (0, x_2 + y_2 + z_2). && \text{(b.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \oplus (y \oplus z) &= (x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) \\
&= (x_1, x_2) + (0, y_2 + z_2) \\
&= (0, x_2 + (y_2 + z_2)) \\
&= (0, x_2 + y_2 + z_2). && \text{(b.2)}
\end{aligned}$$

Como as expressões (b.1) e (b.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Definição geral:

$\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

Exemplo presente:

$\exists^1$ elemento de $\mathbb{R}^2$ (representado por $\overline{0} = (a, b)$), $\forall x \in \mathbb{R}^2 : x \oplus \overline{0} = x$.

$$\begin{aligned} x \oplus \overline{0} = x &\Leftrightarrow (x_1, x_2) \oplus (a, b) = (x_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow (0, x_2 + b) = (x_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow 0 = x_1 \wedge x_2 + b = x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge b = 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a propriedade (c) não é satisfeita, pois não só o vector $\overline{0}$ não é único, como não é possível que a relação fosse satisfeita para qualquer elemento de $x \in \mathbb{R}^2$.

Propriedade (d)

Definição geral:

$\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

Exemplo presente:

Esta propriedade não faz sentido verificar, uma vez que não existe elemento neutro da soma (ver propriedade anterior).

Propriedade (e)

Definição geral:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

Exemplo presente:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$

$$\begin{aligned}\alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \\ &= \alpha \odot (0, x_2 + y_2) \\ &= (0, 2\alpha(x_2 + y_2)) \\ &= (0, 2\alpha x_2 + 2\alpha y_2). \qquad \text{(e.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \odot x \oplus \alpha \odot y &= \alpha \odot (x_1, x_2) \oplus \alpha \odot (y_1, y_2) \\ &= (2\alpha x_1, 2\alpha x_2) \oplus (2\alpha y_1, 2\alpha y_2) \\ &= (0, 2\alpha x_2 + 2\alpha y_2). \qquad \text{(e.2)}\end{aligned}$$

Como as expressões (e.1) e (e.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (e) é válida.

Propriedade (f)

Definição geral:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

Exemplo presente:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x.$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot x &= (\alpha + \beta) \odot (x_1, x_2) \\ &= (2(\alpha + \beta)x_1, 2(\alpha + \beta)x_2) \\ &= (2\alpha x_1 + 2\beta x_1, 2\alpha x_2 + 2\beta x_2). \qquad \text{(f.1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \odot \oplus x\beta \odot x &= \alpha \odot (x_1, x_2) \oplus \beta \odot (x_1, x_2) \\ &= (2\alpha x_1, 2\alpha x_2) \oplus (2\beta x_1, 2\beta x_2) \\ &= (0, 2\alpha x_2 + 2\beta x_2). \qquad \text{(f.2)}\end{aligned}$$

Como existem elementos de $\mathbb{R}^2$ tais que produzem expressões diferentes para (f.1) e (f.2), conclui-se que a propriedade (f) não é válida.

Propriedade (g)

Definição geral:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x).$$

Exemplo presente:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x).$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \cdot \beta) \odot x &= (\alpha \cdot \beta) \odot (x_1, x_2) \\
&= (2(\alpha\beta)x_1, 2(\alpha\beta)x_2) \\
&= (2\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \odot (\beta \odot x) &= \alpha \odot (\beta \odot (x_1, x_2)) \\
&= \alpha \odot (2\beta x_1, 2\beta x_2) \\
&= (2\alpha(2\beta x_1), 2\alpha(2\beta x_2)) \\
&= (4\alpha\beta x_1, 4\alpha\beta x_2). \qquad \text{(g.2)}
\end{aligned}
$$

Como existem elementos de $\mathbb{R}^2$ tais que produzem expressões diferentes para (g.1) e (g.2), conclui-se que a propriedade (g) não é válida.

Propriedade (h)

Definição geral:

$\forall x \in V : 1 \odot x = x.$

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \odot x = x.$

$$
\begin{aligned}
1x &= 1(x_1, x_2) \\
&= (2x_1, 2x_2) \\
&\neq (x_1, x_2) \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Assim, conclui-se que a propriedade (h) não é válida.

Como as propriedades (c), (d), (f), (g) e (h) da definição 4.2def não são satisfeitas, conclui-se que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações dadas não é um espaço vectorial (volta-se a frisar que bastava uma propriedade não se verificar para se concluir que não se estava perante um espaço vectorial).

4.12exe Mostre que os seguintes conjuntos com as operações indicadas não são espaços vectoriais, identificando as propriedades da definição de espaço vectorial que não são verificadas:

(a) $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \oplus (c,d) = (a,b)$ e $\alpha \odot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$.

(b) $\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2)$.

(c) $\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, 0)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

(d) $\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3) \oplus (y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, 0, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2,x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$.

4.13exe Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y = \frac{x}{y}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x = x^\alpha \end{array}$$

não é um espaço vectorial, identificando as propriedades da definição de espaço vectorial que não são verificadas.

4.14teo Seja V um espaço vectorial. Então,

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha 0_V = 0_V$.

(b) $\forall x \in V : 0x = 0_V$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V : -(\alpha x) = (-\alpha)x$ e $(-\alpha)(-x) = \alpha x$.

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \alpha x = 0_V \Rightarrow (\alpha = 0 \vee x = 0_V)$.

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V \setminus \{0_V\} : \alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta$.

(f) $\forall x_1, x_2 \in V : x_1 + x = x_2 \Rightarrow x = x_2 - x_1$.

(g) $\forall x, x_1, x_2 \in V : x + x_1 = x + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

4.15def [[subespaço]] Sejam o espaço vectorial $(V, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ e F um subconjunto não-vazio de V. Diz-se que F é um subespaço V se $(F, \oplus, \odot, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ainda for espaço vectorial.

4.16teo Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $F \subset V$. Então, F é um subespaço de V se e só se:

(a) $0_V \in F$.

(b) $\forall x, y \in F : x + y \in F$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in F : \alpha x \in F$.

4.17obs Note-se que o teorema 4.16teo é um processo mais prático de verificar se um subconjunto de um espaço vectorial é um subespaço do que a definição 4.15def.

4.18exe Mostre que $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

res Sendo $F \subset \mathbb{R}^2$, verifiquem-se as três propriedades do teorema 4.16teo:

Propriedade (a)

$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $x = (x_1, 0), y = (y_1, 0) \in F$. Então, $x + y = (x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0) \in F$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, 0) \in F$. Então, $\alpha x = \alpha(x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in F$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Conclui-se, assim, que F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

4.19exe Seja $S = \{[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | a_{12} = -a_{21}\}$. Mostre que S é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4.20exe Mostre que o conjunto das matrizes simétricas de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

res Seja F o conjunto das matrizes simétricas de ordem n, *i.e.*, $F = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) | A = A^T\}$, que é um subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Verifiquem-se, agora, as três propriedades do teorema 4.16teo:

Propriedade (a)

$0_{\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})} = 0_{n\times n} \in F$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $A, B \in F$. Então, $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, $A + B \in F$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in F$. Então, como $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$, $\alpha A \in F$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Conclui-se, assim, que F é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{4.21exe}}$ Mostre que:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto das matrizes de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(c) $\mathbb{R}_n[x]$ é um subespaço de $\mathbb{R}[x]$.

(d) $C^k(a, b)$ é um subespaço de $C(a, b)$

(e) $C^\infty(a, b)$ é um subespaço de $C^k(a, b)$.

(f) $\{0_V\}$ é um subespaço de V.

(g) V é um subespaço de V.

$\boxed{\text{4.22exe}}$ Mostre que o conjunto $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{res}}$ Para resolver este exercício é necessário identificar (pelo menos) uma propriedade do teorema $\boxed{\text{4.16teo}}$ que não é satisfeita. No entanto, e por questões didácticas, vai-se verificar todas as propriedades.

Sendo $G \subset \mathbb{R}^2$, verifiquem-se as três propriedades do teorema $\boxed{\text{4.16teo}}$:

Propriedade (a)

$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \notin G$, pelo que a propriedade (a) não é válida.

Propriedade (b)

Sejam $x = (x_1, 1), y = (y_1, 1) \in G$. Então, $x + y = (x_1, 1) + (y_1, 1) = (x_1 + y_1, 2) \notin G$, pelo que a propriedade (b) não é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, 1) \in G$. Então, $\alpha x = \alpha(x_1, 1) = (\alpha x_1, \alpha) \notin G$, pelo que a propriedade (c) não é válida.

Como as propriedades (a), (b) e (c) do teorema $\boxed{4.16teo}$ não são satisfeitas, conclui-se que o conjunto G não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ (volta-se a frisar que bastava uma propriedade não se verificar para se concluir que não se estava perante um subespaço).

$\boxed{4.23teo}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, $CS_{Ax=\underline{0}}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{dem}$ Para mostrar que $CS_{Ax=\underline{0}} \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, aplique-se o teorema $\boxed{4.16teo}$ (no que se segue identifica-se $\mathbb{R}^n$ com $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$):

Propriedade (a)

Como $A0_{n\times 1} = \underline{0}$, tem-se que $0_{\mathbb{R}^n} = 0_{n\times 1} \in CS_{Ax=\underline{0}}$, pelo que a propriedade (a) é válida.

Propriedade (b)

Sejam $x_1, x_2 \in CS_{Ax=\underline{0}}$. Então, como $A(x_1+x_2) = Ax_1+Ax_2 = \underline{0}+\underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $x_1 + x_2 \in CS_{Ax=\underline{0}}$, pelo que a propriedade (b) é válida.

Propriedade (c)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in CS_{Ax=\underline{0}}$. Então, como $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\underline{0} = \underline{0}$, tem-se que $\alpha x \in CS_{Ax=\underline{0}}$, pelo que a propriedade (c) é válida.

Assim, conclui-se que $CS_{Ax=\underline{0}}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{4.24def}$ [[combinação linear]] Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, $x \in V$ e $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$. Diz-se que x é uma combinação linear dos elementos de S se

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k.$$

$\boxed{4.25exe}$ Sejam $x = (1, 4), x_1 = (1, 2), x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$.

(a) Mostre que $x = (1, 4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1, 2)$ e $x_2 = (1, 1)$ e escreva x como combinação linear de x_1 e de x_2.

(b) Mostre que $x = (1, 4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$.

(c) Mostre que $x = (1, 4)$ não é uma combinação linear de $x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$.

res (a) Mostrar que $x = (1, 4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1, 2)$ e $x_2 = (1, 1)$ é, por definição, mostrar que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x = \alpha x_1 + \beta x_2,$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares (S_a) dado por

$$(1, 4) = \alpha(1, 2) + \beta(1, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ 2\alpha & + & \beta & = & 4. \end{array} \right.$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right],$$

a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada, pelo que o sistema (S_a) é possível, concluindo-se que x é uma combinação linear de x_1 e x_2. Para escrever x como combinação linear de x_1 e x_2, resolve-se o sistema (S_a), tendo-se

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 3 \\ \beta & = & -2, \end{array} \right.$$

vindo

$$x = 3x_1 - 2x_2.$$

(b) Mostrar que $x = (1,4)$ é uma combinação linear de $x_1 = (1,2)$, $x_2 = (1,1)$ e $x_3 = (2,2)$ é, por definição, mostrar que

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3,$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares (S_b) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) + \gamma(2,2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 4. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right],$$

a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada, pelo que o sistema (S_b) é possível, concluindo-se que x é uma combinação linear de x_1, x_2 e x_3. Para escrever x como combinação linear de x_1, x_2 e x_3, resolve-se o sistema (S_b), tendo-se

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 - 2a \\ \gamma = a \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

vindo

$$x = 3x_1 + (-2 - 2a)x_2 + ax_3, a \in \mathbb{R}.$$

(c) Mostrar que $x = (1, 4)$ não é uma combinação linear de $x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$ é equivalente a mostrar que é impossível o sistema de equações lineares (S_c) dado por

$$(1,4) = \alpha(1,1) + \beta(2,2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & = & 4. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right],$$

a característica da matriz dos coeficientes é menor do que a característica da matriz ampliada, o sistema (S_c) é impossível, concluindo-se que x não é uma combinação linear de x_2 e x_3.

4.26exe Escreva, se possível, o vector $v = (3, 3) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^2$, e interprete geometricamente os resultados obtidos:

(a) $v_1 = (1, 1)$.

(b) $v_1 = (1, 2)$.

(c) $v_1 = (1, 2), v_2 = (4, 2)$.

(d) $v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 2)$.

(e) $v_1 = (1, -1), v_2 = (-1, 1)$.

(f) $v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 1), v_3 = (2, 0)$.

4.27exe Sejam $a = (-1, 2-3),\ b = (3, 4, 2),\ c = (2, 6, 6),\ d = (-9, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$.

(a) $c \in \langle a, b\rangle$?

(b) $d \in \langle a, b\rangle$?

4.28exe Sejam $u = (1, 2, -4), v = (2, 5, -6), w = (1, -1, -10), r = (1, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Escreva o vector w como combinação linear de u e v.

(b) Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vector r é uma combinação linear de u e v.

4.29exe Escreva $u = 5t^2 - 8t + 6$ como combinação linear de $v = t^2 - t$ e $w = 2t^2 - 4$.

4.30def [[espaço gerado, $L(S)$, $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$]] Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Chama-se espaço gerado pelo conjunto S, que se representa por $L(S)$ ou por $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S, ou seja,

$$L(S) \equiv \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

4.31teo Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset U \subset V$. Então,

(a) $L(S)$ é um subespaço de V.

(b) U subespaço de $V \Rightarrow L(S) \subset U$.

4.32obs Sejam V um espaço vectorial $\mathbb{R}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Então,

(a) $L(S) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$.

(b) Chama-se "espaço gerado" ao conjunto $L(S)$ devido à alínea (a) do teorema anterior.

(c) $L(S)$ é o "menor" subespaço de V que contém S no sentido da alínea (b) do teorema anterior.

4.33def ⟦conjunto gerador⟧ Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Diz-se que S é um conjunto gerador de V se $V = L(S)$.

4.34obs Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Então, S é um conjunto gerador de V se

$$\forall x \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

i.e., que é possível o sistema de equações lineares $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, qualquer que seja $x \in V$.

4.35exe (a) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0) \rangle$.

(b) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4) \rangle$.

(c) Verifique se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4), (0,1) \rangle$.

res (a) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0) \rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_1) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha & = & x_1 \\ 0\alpha & = & x_2. \end{cases}$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_1) é

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{array}\right],$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é menor do que a característica da matriz ampliada se $x_2 \neq 0$, pelo que o sistema (S_1) nem sempre é possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 \neq \langle(1,0)\rangle$, *i.e.*, $\{(2,0)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

(b) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle(2,0),(3,4)\rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_2) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) + \beta(3,4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2\alpha & + & 3\beta & = & x_1 \\ 0\alpha & + & 4\beta & = & x_2. \end{array}\right.$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_2) é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 4 & x_2 \end{array}\right],$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pelo que o sistema (S_2) é sempre possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 = \langle(2,0),(3,4)\rangle$, *i.e.*, $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

(c) Verificar se $\mathbb{R}^2 = \langle(2,0),(3,4),(0,1)\rangle$ é equivalente a verificar se, qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é possível o sistema de equações lineares (S_3) dado por

$$(x_1, x_2) = \alpha(2,0) + \beta(3,4) + \gamma(0,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha & + & 3\beta & + & 0\gamma & = & x_1 \\ 0\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & = & x_2. \end{cases}$$

Então, como a representação matricial do sistema (S_3) é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 4 & 1 & x_2 \end{array}\right]$$

que já está em escada, a característica da matriz dos coeficientes é igual à característica da matriz ampliada qualquer que seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, pelo que o sistema (S_3) é sempre possível, concluindo-se que $\mathbb{R}^2 = \langle (2,0), (3,4), (0,1) \rangle$, *i.e.*, $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$.

4.36obs (a) Um espaço vectorial pode admitir diversos conjuntos geradores.

(b) Conjuntos geradores distintos podem gerar o mesmo espaço vectorial.

4.37exe Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são conjuntos geradores do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$.

(a) $A = \{(1,0), (0,1)\}$.

(b) $B = \{(1,2), (-1,0)\}$.

(c) $C = \{(1,0), (0,1), (1,3)\}$.

(d) $D = \{(1,2)\}$.

(e) $E = \{(1,2), (2,4), (-1,-2)\}$.

(f) $F = \{(1, -1), (-2, 2)\}$.

4.38exe Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são conjuntos geradores do espaço vectorial $\mathbb{R}_3[x]$:

(a) $A = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) $B = \{1 + x, x^2 + x^3\}$.

(c) $C = \{1 + x, 1 - x, x^2, x^3 - 1, x + x^3\}$.

(d) $D = \{1, 2x, x^2 + 1, x^3 - x\}$.

4.39exe Seja $X = \{(1, 0, \alpha), (\alpha, \beta, \beta), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Indique para que valores de α e β o conjunto X é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

4.40def Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$.

(a) ⟦conjunto linearmente independente⟧ Diz-se que S é um conjunto linearmente independente se

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

(b) ⟦vectores linearmente independentes⟧ Se S é um conjunto linearmente independente, os elementos de S dizem-se vectores linearmente independentes.

(c) ⟦conjunto linearmente dependente⟧ Se S não é um conjunto linearmente independente, diz-se que S é um conjunto linearmente dependente.

(d) ⟦vectores linearmente dependentes⟧ Se S é um conjunto linearmente dependente, os elementos de S dizem-se vectores linearmente dependentes.

4.41exe

(a) Indique, justificando, se $\{(2,0)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

(b) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente.

(c) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

res

(a) Como

$$\alpha(2,0)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha &= 0 \\ 0\alpha &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0,$$

conclui-se que $\{(2,0)\}$ é um conjunto linearmente independente.

(b) Como

$$\alpha(2,0)+\beta(3,4)=(0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 0\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \end{cases}$$

conclui-se que $\{(2,0),(3,4)\}$ é um conjunto linearmente independente.

(c) Como

$$(x_1,x_2)\alpha(2,0)+\beta(3,4)+\gamma(0,1)=(0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 0\gamma = 0 \\ 0\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3a}{8}, \\ \beta = -\frac{a}{4}, \\ \gamma = a \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

conclui-se que $\{(2,0),(3,4),(0,1)\}$ é um conjunto linearmente dependente.

4.42teo Sejam V um espaço vectorial e $S_1 \subset S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_2 \subset V$.

(a) Se S é um conjunto linearmente dependente, então, S_2 é um conjunto linearmente dependente.

(b) se S é um conjunto linearmente independente, então, S_1 é um conjunto linearmente independente.

4.43exe Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são conjuntos linearmente independentes:

(a) $A = \{(3,1),(4,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $B = \{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(c) $C = \{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(d) $D = \{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$ em $\mathbb{R}^4$.

4.44exe Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 7 & m \\ 4 & n \end{bmatrix}, m, n \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine os valores de m e n para que $\{A, B, C\}$ seja um conjunto linearmente dependente.

(b) Estabeleça a relação de dependência entre A, B e C.

4.45exe Indique para que valores do parâmetro real α, os vectores $a = (1,-2)$ e $b = (\alpha,-1)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

$\boxed{4.46\text{exe}}$ Considere no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ os vectores $v_1 = (\alpha_1, \beta_1, 1)$ e $v_2 = (\alpha_2, \beta_2, 0)$ em que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ são constantes reais. Indique, em função de α_1, α_2, β_1 e β_2 uma condição necessária e suficiente para os vectores v_1 e v_2 serem linearmente independentes.

$\boxed{4.47\text{exe}}$ Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e um seu subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y\}$. Determine dois vectores linearmente independentes u e v de S e mostre que qualquer vector $w \in S$ é uma combinação linear de u e v.

$\boxed{4.48\text{exe}}$ Mostre que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente.

$\boxed{4.49\text{exe}}$ Sejam V um espaço vectorial e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vectores de V linearmente independente. Então, mostre que os seguintes conjuntos também são linearmente independentes:

(a) $\{v_1, v_1 + v_2\}$.

(b) $\{2v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_3\}$.

(c) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$.

$\boxed{4.50\text{exe}}$ Considere no espaço vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ os vectores $u = 1$, $v = 1 - x$ e $w = (1 - x)^2$. Verifique que os vectores u, v e w são linearmente independentes.

4.51def [[base]] Sejam V um espaço vectorial e $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Diz-se que S é uma base de V se S é um conjunto gerador de V linearmente independente.

4.52exe (a) Indique, justificando, se $\{(2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,3)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Indique, justificando, se $\{(2,0),(3,3),(0,1))\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

res (a) Atendendo ao exercício 4.35exe (a), $\{(2,0)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$, pelo que também não é uma sua base.

(b) Atendendo aos exercícios 4.35exe (b) e 4.41exe (b), $\{(2,0),(3,3)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$ linearmente independente, pelo que é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(c) Atendendo ao exercício 4.41exe (c), $\{(2,0),(3,3),(0,1)\}$ não é um conjunto linearmente independente, pelo que também não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4.53exe Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{(1,1),(3,0)\}$.

(b) $B = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$.

(c) $C = \{(1,1),(0,8)\}$.

(d) $D = \{(1,-2),(-2,4)\}$.

4.54exe Determine os valores do parâmetro α para os quais o conjunto $\{(\alpha,6),(1,\alpha)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4.55exe Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}_3[x]$:

(a) $A = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, x^3\}$.

(c) $C = \{2, x, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}$.

(d) $D = \{1, 1 + x, x^2 + x^3\}$.

4.56def [[base ordenada]] Sejam V um espaço vectorial e $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_n) \in V^n$. Diz-se que $\mathcal{S}$ é uma base ordenada de V se $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base de V.

4.57obs O objectivo da definição anterior é permitir distinguir entre ordenações diferentes dos seus elementos, situação que não acontece em conjuntos. Faz sentido, agora, a seguinte definição:

4.58def [[coordenadas de um vector numa base ordenada]] Sejam V um espaço vectorial, $\mathcal{S} = (x_1, \dots, x_n)$ uma base ordenada de V e $x \in V$. Chama-se coordenadas do vector x relativamente à base ordenada $\mathcal{S}$, que se representa por $[x]_{\mathcal{S}}$, a $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ se

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

4.59obs Como uma base é um conjunto linearmente independente, o sistema linear que é necessário resolver para determinar as coordenadas de um vector numa base ordenada é sempre possível e determinado, pelo que as coordenadas de um vector numa base ordenada são únicas.

4.60exe (a) Seja $\mathcal{S}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $x = (0, 2, 3)$ na base ordenada $\mathcal{S}_1$.

(b) Seja $\mathcal{S}_2 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $x = (0, 2, 3)$ na base ordenada $\mathcal{S}_2$.

(c) Seja $\mathcal{S}_3 = ((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de $x = (0,2,3)$ na base ordenada $\mathcal{S}_3$.

res (a) Como $(0,2,3) = 0(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$, tem-se que $[x]_{\mathcal{S}_1} = (0,2,3)$.

(b) Como $(0,2,3) = 2(0,1,0) + 0(1,0,0) + 3(0,0,1)$, tem-se que $[x]_{\mathcal{S}_2} = (2,0,3)$.

(c) Para responder à questão, tem que se resolver o sistema

$$\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1) = (0,2,3) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & = & 2 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 3. \end{cases}$$

Recorra-se, agora, ao método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

tendo-se

$$\begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = 3, \\ \gamma = 1, \end{cases}$$

pelo que $(0,2,3) = -(1,1,1)+3(0,1,1)+(1,0,1)$, ou seja, $[x]_{\mathcal{S}_3} = (-1,3,1)$.

4.61exe Seja $\mathcal{S} = \left(\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right)$ uma base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas de $A = \left[\begin{smallmatrix}-2&3\\5&4\end{smallmatrix}\right]$ na base ordenada $\mathcal{S}_2$.

res Como $\left[\begin{smallmatrix}-2&3\\5&4\end{smallmatrix}\right] = -2\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right] + 3\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right] + 5\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right] + 4\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$, tem-se que $[A]_{\mathcal{S}} = (-2,3,5,4)$.

4.62teo Sejam V um espaço vectorial e o conjunto $\{x_1,\ldots,x_n\}$ uma base de V. Então, todas as bases de V têm n vectores.

4.63def ⟦dimensão de um espaço vectorial, $\dim(V)$, espaço vectorial de dimensão finita⟧ Sejam V um espaço vectorial e $\{x_1,\ldots,x_n\}$ uma base de V. Chama-se dimensão do espaço vectorial V ao número de elementos que constituem a base, escrevendo-se $\dim(V) = n$. Diz-se, ainda, que V é um espaço vectorial de dimensão finita.

4.64obs
(a) Note-se que a definição anterior faz sentido pois o teorema que a precede garante que todas as bases de um espaço vectorial têm o mesmo número de elementos.

(b) Seja V um espaço vectorial. Então, $\dim(\{0_V\}) = 0$.

4.65teo
(a) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e
$\{e_1,e_2,e_3\}$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, e
$\{f_1,f_2,f_3\}$, $f_1 = (-1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1)$, $f_3 = (1,1,1)$, são dois exemplos de bases de $\mathbb{R}^3$ (à primeira chama-se base canónica de $\mathbb{R}^3$).

(b) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

(c) $\dim(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})) = 6$ e $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$, em que

$$E_{11} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], E_{12} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], E_{13} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],$$

$$E_{21} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], E_{22} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], E_{23} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right],$$

é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ (base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$).

(d) $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$.

(e) $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ e $\{1, x, x^2\}$ é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ (base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$).

(f) $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

(g) $C(a, b)$ não é um espaço vectorial de dimensão finita.

$\boxed{\text{4.66teo}}$ Seja V um espaço vectorial tal que $\dim(V) = n$ e S um subconjunto de V com n elementos.

(a) Se S é um conjunto linearmente independente, então S é uma base de V.

(b) Se S é um conjunto gerador de V, então S é uma base de V.

$\boxed{\text{4.67teo}}$ Sejam V um espaço vectorial com dimensão finita e X e Y subespaços de V. Então,

(a) $\dim(X) \leqslant \dim(V)$.

(b) $\dim(X) = \dim(V)$ se e só se $X = V$.

$\boxed{\text{4.68def}}$ ⟦espaço nulo de uma matriz⟧ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se espaço nulo da matriz A, que se representa por $N(A)$, ao conjunto solução do sistema homogéneo cuja matriz dos coeficientes é a matriz A, ou seja,

$$N(A) \stackrel{\text{def}}{=} CS_{Ax=\underline{0}}.$$

$\boxed{4.69\text{teo}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) $\dim(\langle \ell_{1,A}; \dots; \ell_{m,A} \rangle) = c(A)$.

(b) $\dim(\langle c_{1,A}; \dots; c_{n,A} \rangle) = c(A)$.

(c) $\dim(N(A))$ é igual ao número de variáveis livres do sistema $Ax = \underline{0}$.

$\boxed{4.70\text{obs}}$ Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) $\{c_{1,A}, \dots, c_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente dependente se é só se $\det(A) = 0$.

(b) $\{c_{1,A}, \dots, c_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente independente se é só se $\det(A) \neq 0$.

(c) $\{\ell_{1,A}, \dots, \ell_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente dependente se é só se $\det(A) = 0$.

(d) $\{\ell_{1,A}, \dots, \ell_{n,A}\}$ é um conjunto linearmente independente se é só se $\det(A) \neq 0$.

$\boxed{4.71\text{exe}}$ Determine o espaço nulo e a sua dimensão das seguintes matrizes:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

$\boxed{\text{res}}$ (a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$N(A) = \{(0,0)\}.$$

Como o sistema não tem variáveis livres, tem-se que $\dim(N(A)) = 0$.

(b) Comece-se por determinar $N(B)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta, \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R}, \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} N(B) &= \{(-\alpha-\beta, \alpha, 0, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(-1,1,0,0) + \beta(-1,0,0,1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1,1,0,0), (-1,0,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\{(-1,1,0,0), (-1,0,0,1)\}$ é uma base de $N(B)$ pois é um conjunto linearmente independente (verificar).

$\boxed{\text{4.72obs}}$ Seja V um espaço vectorial tal que $\dim(V) = n$. Então,

(a) quaisquer m vectores de V com $m > n$ são linearmente dependentes.

(b) C conjunto de geradores de $V \Rightarrow \#C \geqslant n$.

(c) C conjunto de n vectores linearmente independentes de $V \Rightarrow C$ conjunto gerador.

(d) C conjunto de n vectores geradores de $V \Rightarrow$ os vectores são linearmente independentes.

(e) C conjunto de geradores de V constituído por vectores linearmente independentes $\Rightarrow \#C = n$.

4.73exe Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x = y - 3z \wedge z = 2w\}.$$

(a) Mostre que V é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base e a dimensão de V.

4.74exe Determine uma base para o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ formado por todos os vectores da forma $(a + b, a - b + 2c, b, c)$, onde a, b e c são números reais. Qual a dimensão de S?

4.75exe Considere o espaço dos polinómios reais de grau ≤ 2, $\mathbb{R}^2[x]$.

(a) Verifique se o conjunto de polinómios $\{1, x, x(x+1)\}$ é um conjunto linearmente independente ou linearmente dependente.

(b) Estude a possibilidade de o polinómio $1 + 2x + 3x^2$ se poder obter como combinação linear dos polinómios da alínea anterior.

4.76exe Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e $u_1 = (0, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ e $u_3 = (-1, 6, 0)$ três vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que F é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifique que $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

(c) O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de F?

(d) Indique a dimensão de F.

4.77exe Sejam V um espaço vectorial, v_1, v_2, v_3 e v_4 vectores de V e $\{v_1, v_2\}$ uma base de V.

(a) $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

(b) A é constituído por vectores linearmente independentes?

(c) $B = \{v_1\}$ é um conjunto gerador de V?

(d) B é constituído por vectores linearmente independentes?

(e) Seja C um subconjunto de V que gera V. Que pode dizer sobre o número de vectores de C?

(f) Seja D um subconjunto de V constituído por vectores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vectores de D?

(g) Em que condições é que $E = \{v_1, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

Capítulo 5

Transformações Lineares

5.1obs Na definição que se segue revê-se o conceito de função, estudando-se neste capítulo um seu caso particular — as transformações lineares.

5.2def ⟦função, imagem de um elemento por meio de uma função⟧ Sejam A e B conjuntos e $x \in A$. Diz-se que f é uma função de A em B se associa a cada elemento de A um e só um elemento de B, representando-se por $f(x)$ a imagem de x por f.

5.3def Sejam V e V' espaços vectoriais e T uma função de V em V'.

(a) ⟦transformação linear ou homomorfismo⟧ Diz-se que T é uma transformação linear ou um homomorfismo se se verificar as seguintes propriedades:

i. $\forall x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$.

ii. $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

(b) ⟦$\mathcal{L}(V, V')$⟧ Representa-se por $\mathcal{L}(V, V')$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em V'.

5.4exe Considere a função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, 0, x)$. Calcule:

(a) $T(2, 1)$.

(b) $T(y, 1)$.

(c) $T(y, x)$.

(d) $T(x + 2y, 2y - x)$.

5.5exe Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2)$. Mostre que T é uma transformação linear.

res **Propriedade (i)**

Definição geral:

$\forall x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : T(x + y) = T(x) + T(y)$.

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \qquad \text{(i.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x) + T(y) &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \\ &= (x_2, 0, x_1 + x_2) + (y_2, 0, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, 0, x_1 + y_1 + x_2 + y_2). \qquad \text{(i.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (i.1) e (i.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (i) é válida.

Propriedade (ii)

Definição geral:

$\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Exemplo presente:

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T(\alpha(x_1, x_2)) \\ &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= (\alpha x_2, 0, \alpha x_1 + \alpha x_2). \qquad \text{(ii.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha T(x) &= \alpha T(x_1, x_2) \\ &= \alpha(x_2, 0, x_1 + x_2) \\ &= (\alpha x_2, 0, \alpha x_1 + \alpha x_2). \qquad \text{(ii.2)} \end{aligned}$$

Como as expressões (ii.1) e (ii.2) são iguais, conclui-se que a propriedade (ii) é válida.

Como as expressões (i) e (ii) são válidas, conclui-se que T é uma transformação linear.

5.6exe Seja $T : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(ax + b) = \int_0^1 (ax + b)\,dx$. Mostre que T é uma transformação linear.

5.7exe Indique quais das seguintes funções são transformações lineares:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (0, -x)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y, z) = (x + y + 2, z - 3)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_3(x, y) = |x - y|$.

(d) $T_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_4(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1)$.

(e) $T_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_5(x_1, x_2) = (x_1^2, 0)$.

(f) $T_6 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_6(A) = a_{11}$.

(g) $T_7 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_7(A) = (a_{11})^2$.

(h) $T_8 : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_8(A) = \det(A)$.

(i) $T_9 : \mathbb{R}_2 x \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_9(ax^2 + bx + c) = a$.

(j) $T_{10} : C^1(a, b) \longrightarrow C(a, b)$, $T_{10}(f) = f'$.

5.8exe Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine a relação entre α e β de modo que a transformação $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x + \alpha - 2\beta, -x)$, seja linear.

5.9exe Seja T uma transformação linear de um espaço vectorial V e suponha que $u_1, \ldots, u_n$ são vectores de V linearmente dependentes. Prove que $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ são também linearmente dependentes.

5.10def [[endomorfismo]] Seja V um espaço vectorial. Chama-se endomorfismo de V a uma transformação linear de V em V.

5.11exe Indique quais das seguintes aplicações lineares são endomorfismos:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_1(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1 + x_2)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2(x_1, x_2) = (0, 0)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_3(ax + b) = \int_0^1 (ax + b)\,\mathrm{d}x$.

res (a) Não.

(b) Sim.

(c) Não.

5.12teo Sejam V e V' espaços vectoriais e T uma função de V em V'. Então, T é uma transformação linear se e só se

$$\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

5.13obs O teorema anterior indica um processo alternativo à definição 5.3def de verificar se uma função é uma transformação linear.

5.14teo Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$. Então, tem-se:

(a) $T(0_V) = 0_{V'}$.

(b) $\forall x \in V : T(-x) = -T(x)$.

(c) $\forall x, y \in V : T(x - y) = T(x) - T(y)$.

5.15obs O teorema anterior permite concluir que se $T(0_V) \neq 0_{V'}$ ou $\exists x \in V : T(-x) \neq -T(x)$ ou $\exists x, y \in V : T(x - y) \neq T(x) - T(y)$, então T não é uma transformação linear. Note-se, ainda, que há funções em que $T(0_V) = 0_{V'}$, $\forall x \in V : T(-x) = -T(x)$ e $\forall x, y \in V : T(x - y) = T(x) - T(y)$ e que não são transformações lineares.

5.16exe Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(a, b) = (a, 1, a + 2b)$. Mostre que g não é uma transformação linear.

res Como $g(0_{\mathbb{R}^2}) = g(0, 0) = (0, 1, 0) \neq (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$, conclui-se que g não é uma transformação linear.

5.17obs Sejam $T \in \mathcal{L}(V, V')$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de V, $C' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ uma base ordenada de V' e $v \in V$. Então,

$$\begin{aligned}
&\exists^1 \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \\
&\exists^1 a_{11}, \ldots, a_{m1} \in \mathbb{R} : T(v_1) = a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m, \\
&\quad\vdots \\
&\exists^1 a_{1n}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R} : T(v_n) = a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m.
\end{aligned}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned}
T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \\
&= \alpha_1 (a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m) + \cdots + \alpha_n (a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m) \\
&= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n}) v'_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn}) v'_m \\
&= \beta_1 v'_1 + \cdots + \beta_m v'_m,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

5.18def ⟦matriz de uma transformação linear entre espaços de dimensão finita, $A_{T,C,C'}$, A_T⟧ Sejam $T \in \mathcal{L}(V, V')$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de V e $C' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ uma base ordenada de V'. Chama-se matriz da transformação linear T relativamente às bases C e C', que se representa por $A_{T,C,C'}$, à matriz $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ introduzida na observação anterior.

Se $V = \mathbb{R}^n$, $V' = \mathbb{R}^m$ e C e C' são as respectivas bases canónicas, então representa-se por A_T a matriz da transformação linear T relativamente às bases C e C'.

5.19exe Determine a matriz da transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x, y, z) = (x + 2z, 3x - y)$, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

res Como

$$T(1, 0, 0) = (1, 3)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, -1)$$
$$T(0, 0, 1) = (2, 0),$$

tem-se que

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.20exe Seja T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 - x_3, 2x_3 - x_1 - x_2).$$

(a) Determine a matriz da transformação linear T em relação à base canónica.

(b) Use a matriz da transformação linear T para determinar a imagem dos seguintes vectores:

i. $x = (1, 1, 1)$.

ii. $x = (2, 1, 1)$.

iii. $x = (-5, 3, 2)$.

5.21def Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$.

(a) [[imagem de uma transformação linear, $\mathcal{I}_T$]] Chama-se imagem de T, que se representa por $\mathcal{I}_T$, a

$$\mathcal{I}_T \overset{\text{def}}{=} \{T(x) \in V' | x \in V\}.$$

(b) [[núcleo de uma transformação linear, $\mathcal{N}_T$]] Chama-se núcleo de T, que se representa por $\mathcal{N}_T$, a

$$\mathcal{N}_T \overset{\text{def}}{=} \{x \in V | T(x) = 0_{V'}\}.$$

5.22exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Determine:

(a) a imagem de T, ou seja, $\mathcal{I}_T$.

(b) O núcleo de T, ou seja, $\mathcal{N}_T$.

res (a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_T &= \{T(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1, 1), (0, 2), (1, -1) \rangle.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_T &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | T(x_1, x_2, x_3) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3) = (0, 0)\}.\end{aligned}$$

Tem-se, então, que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftrightarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

obtendo-se

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_T &= \{(-a, a, a) | a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1, 1, 1) \rangle.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{5.23exe}}$ Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares:

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_1(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_1)$.

5.24teo Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) $\mathcal{I}_T$ é um subespaço de V'.

(b) $\mathcal{N}_T$ é um subespaço de V.

5.25teo Sejam $T \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto gerador de V (em particular, uma base). Então,

(a) T fica definida desde que se conheçam os vectores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$.

(b) $\mathcal{I}_T = \langle T(u_1), \ldots, T(u_n) \rangle$.

5.26exe Resolva de novo 5.22exe (a), atendendo ao teorema anterior.

res Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T &= \langle T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1) \rangle \\ &= \langle (1, 1), (0, 2), (1, -1) \rangle. \end{aligned}$$

5.27exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, tal que $T(2, 2) = (0, 1, 1)$ e $\mathcal{N}_T = \langle (1, 3) \rangle$. Determine a imagem por T de um elemento genérico do seu domínio.

res Como $S = \{(2, 2), (1, 3)\}$ é um conjunto linearmente independente (verifique!), S é uma base de $\mathbb{R}^2$ (pois $\#S = \dim(\mathbb{R}^2)$), pelo que qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear única dos elementos de S, vindo

$$(x, y) = \alpha(2, 2) + \beta(1, 3).$$

Tem-se, então, que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ 2\alpha & + & 3\beta & = & y. \end{cases}$$

Então, como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & y-x \end{array}\right],$$

obtendo-se

$$\begin{cases} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ & & 2\beta & = & y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3x-y}{4} \\ \beta = \frac{y-x}{2}. \end{cases}$$

Assim,

$$(x, y) = \frac{3x-y}{4}(2, 2) + \frac{y-x}{2}(1, 3)$$

pelo que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(\frac{3x-y}{4}(2, 2) + \frac{y-x}{2}(1, 3)\right) \\ &= \frac{3x-y}{4}T(2, 2) + \frac{y-x}{2}T(1, 3) && \text{por } T \text{ ser uma transformação linear} \\ &= \frac{3x-y}{4}(0, 1, 1) + \frac{y-x}{2}(0, 0, 0) && \text{por } \mathcal{N}_T = \langle (1, 3) \rangle \\ &= (0, \frac{3x-y}{4}, \frac{3x-y}{4}). \end{aligned}$$

5.28exe Para cada uma das alíneas seguintes, determine a função T sabendo que é uma transformação linear definida por:

(a) $T(1,0) = (-1,1,2)$ e $T(0,1) = (3,0,1)$.

(b) $T(1,2) = (3,-1,5)$ e $T(0,1) = (2,1,-1)$.

(c) $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = -2$.

$\boxed{\text{5.29exe}}$ Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, tal que $T(0,0,1) = (0,0,1)$ e $\mathcal{N}_T = \langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$. Determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{5.30def}}$ Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$.

(a) ⟦característica de uma transformação linear, c_T⟧ Chama-se característica de T, que se denota por c_T, à dimensão do subespaço $\mathcal{I}_T$, ou seja,

$$c_T \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathcal{I}_T).$$

(b) ⟦nulidade de uma transformação linear, n_T⟧ Chama-se nulidade de T, que se denota por n_T, à dimensão do subespaço $\mathcal{N}_T$, ou seja,

$$n_T \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathcal{N}_T).$$

$\boxed{\text{5.31teo}}$ Seja $T \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) $c(A_T) = c_T$.

(b) Se $\dim(V) = n$, tem-se que $n = c_T + n_T$.

$\boxed{\text{5.32exe}}$ Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Determine:

(a) c_T.

(b) uma base de $\mathcal{I}_T$.

(c) n_T.

(d) uma base de $\mathcal{N}_T$.

$\boxed{\text{res}}$ (a) Como

$$T(1,0,0) = (1,1)$$
$$T(0,1,0) = (0,2)$$
$$T(0,0,1) = (1,-1),$$

tem-se que

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então, como

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

tem-se que $c(A_T) = 2$, pelo que, aplicando $\boxed{\text{5.31teo}}$ (a), vem $c_T \equiv \dim(\mathcal{I}_T) = 2$.

(b) Como $c_T = \dim(\mathcal{I}_T) = 2$, conclui-se que $\mathcal{I}_T = \mathbb{R}^2$, pelo que, por exemplo, $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}_T$.

(c) Aplicando $\boxed{\text{5.31teo}}$ (b), tem-se que $\dim(\mathbb{R}^3) = c_T + n_T$, *i.e.*, $3 = 2 + n_T$, pelo que $n_T = 1$ (este valor é confirmado pelo número de variáveis livres em $\mathcal{N}_T$).

(d) Como $\mathcal{N}_T = \langle(-1,1,1)\rangle$ e $n_T = 1$, tem-se que, por exemplo, $\{(-1,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}_T$.

5.33exe Determine a imagem, a característica, o núcleo, a nulidade e a matriz relativamente às bases canónicas das seguintes transformações lineares:

(a)

$$\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y. \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+2y+2z). \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rccc} T_3: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-z, 0, y-2z). \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rccc} T_4: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & (x-y, z-w, x-3w). \end{array}$$

5.34exe Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = \begin{bmatrix} (A)_{11}+(A)_{12} & (A)_{22} \\ -(A)_{22} & 2(A)_{11} \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine as dimensões de $\mathcal{N}_T$ e de $\mathcal{I}_T$.

5.35exe Considere a seguinte transformação linear definida em $\mathbb{R}^3$:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_1 - x_3, x_3 - x_2).$$

Determine uma base e a dimensão do núcleo da transformação.

5.36exe Sejam $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $T(A) = AM - MA$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Considere $M = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Determine uma base e a dimensão para o núcleo de T.

Capítulo 6

Valores e Vectores Próprios

6.1def [[vector próprio de uma matriz associado a um valor próprio]] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ é um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$ se $Ax = \lambda x$.

6.2def [[espectro de uma matriz]] Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se espectro de A, que se representa por $\lambda(A)$, ao conjunto de todos os valores próprios de A.

6.3def [[subespaço próprio de um valor próprio]] Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Chama-se subespaço próprio do valor próprio λ, que se representa por E_λ, ao conjunto

$$E_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = \lambda x\}.$$

6.4teo Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Então, E_λ é um subespaço de $\mathbb{C}^n$.

6.5obs (a) Note-se que existem matrizes cujos valores próprios são números complexos.

(b) Cada vector próprio está associado apenas a um valor próprio.

(c) Se x é um vector próprio associado ao valor próprio λ, então, αx, $\alpha \neq 0$, também é um vector próprio associado ao valor próprio λ.

(d) Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \lambda(A)$. Então,

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n | x \text{ é um vector próprio associado ao valor próprio } \lambda\} \cup \{0_{\mathbb{C}^n}\}.$$

(e) Chama-se "subespaço próprio" ao conjunto E_λ devido ao teorema anterior.

(f) O seguinte teorema indica-nos um processo de calcular $\lambda(A)$.

6.6teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\lambda \in \lambda(A)$ se e só se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

6.7def Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) ⟦polinómio característico de uma matriz⟧ Chama-se polinómio característico da matriz A, que se representa por $\Pi_A(\lambda)$, ao polinómio

$$\Pi_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I_n).$$

(b) ⟦equação característica de uma matriz⟧ Chama-se equação característica da matriz A à equação $\Pi_A(\lambda) = 0$.

(c) ⟦multiplicidade algébrica de um valor próprio⟧ Seja λ um valor próprio de A. Chama-se multiplicidade algébrica de λ à multiplicidade do escalar λ enquanto raiz da equação característica.

(d) ⟦valor próprio simples⟧ Seja λ um valor próprio de A. Diz-se que λ é um valor próprio simples se tem multiplicidade algébrica um.

6.8teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, o coeficiente do termo de grau n do polinómio característico da matriz A é $(-1)^n$ e o seu termo independente de λ é $\det(A)$.

6.9obs Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, $\Pi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \cdots + \det(A)$.

6.10obs Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) os valores próprios da matriz A são os zeros do seu polinómio característico.

(b) Se λ é um valor próprio da matriz A, então os vectores próprios associados a λ são as soluções não-nulas do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)x = \underline{0}$.

(c) Do Teorema Fundamental da Álgebra resulta que $\Pi_A(\lambda)$ tem exactamente n zeros, podendo alguns deles ser iguais. Assim, sejam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ as multiplicidades dos $m(\leqslant n)$ zeros distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $\Pi_A(\lambda)$. Então,

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{n_m},$$

em que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Aos números $n_1, n_2, \ldots, n_m$ chama-se multiplicidade algébrica dos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

6.11teo Seja A uma matriz quadrada. Então, A é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A)$.

6.12exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o espectro da matriz A.

(b) Determine o espaço próprio associado ao valor próprio de menor módulo da matriz A.

res (a) Seja

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Então, aplicando o Teorema de Laplace e fazendo o desenvolvimento a partir da primeira coluna, obtém-se

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= (2-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (2-\lambda)^2(\lambda - 3), \end{aligned}$$

pelo que

$$\lambda(A) = \{2, 3\},$$

sendo que $\lambda_1 = 2$ é um valor próprio de multiplicidade algébrica dois e $\lambda_2 = 3$ é um valor próprio simples.

C.A.: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3.$

(b) Para determinar o espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$, tem que se resolver o sistema

$$(A - 2I_3)x_1 = \underline{0}.$$

Aplicando o Método de Gauss, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pelo que

$$\begin{cases} x_{11} = a \in \mathbb{C} \\ x_{12} = 0 \\ x_{13} = 0. \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$E_2 = \{(a, 0, 0) | a \in \mathbb{C}\}.$$

6.13exe Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcule os valores próprios de A e os respectivos subespaços próprios.

6.14exe Determine o espectro das seguintes matrizes, bem como os espaços próprios associados aos seus valores próprios:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.15exe Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\Pi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

6.16exe Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) a matriz A_T é invertível se e só se $CS_{A_T x = \underline{0}} = \{\underline{0}\}$.

(b) A matriz A_T é invertível se e só se $\# CS_{A_T x = b} = 1$, $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

(c) A matriz A_T é invertível se e só se $\det(A_T) \neq 0$.

(d) A matriz A_T é invertível se e só se $\mathcal{I}_T = \mathbb{R}^n$.

(e) A matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T são linearmente independentes.

(f) A matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T são linearmente independentes.

(g) A matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T geram $\mathbb{R}^n$.

(h) A matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T geram $\mathbb{R}^n$.

(i) A matriz A_T é invertível se e só se as colunas da matriz A_T formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(j) A matriz A_T é invertível se e só se as linhas da matriz A_T formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(k) A matriz A_T é invertível se e só se $n_T = 0$.

(l) A matriz A_T é invertível se e só se $c_T = n$.

(m) A matriz A_T é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A_T)$.

6.17exe Determine a e b de modo que $(1,1)$ e $(1,0)$ sejam vectores próprios da matriz $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right]$.

6.18exe Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se idempotente se $A^2 = A$. Mostre que, se λ é um valor próprio de uma matriz idempotente, então λ tem que ser igual a 0 ou 1.

6.19exe Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e seja $B = A - \alpha I$, onde α é um escalar. Explique qual é a relação entre os valores próprios de A e B.

6.20exe Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Se tr($A$)=8 e det($A$)=12, quais são os valores próprios de A?

6.21exe Determine a matriz A sabendo que tr(A)=2, det(A)=0 e $(1,0)$ e $(1,2)$ são os seus vectores próprios. Sabe-se também que A admite dois valores próprios.

6.22exe Valores e Vectores Próprios — Aplicação: Problemas de misturas

Os valores e vectores próprios podem ser usados para determinar as soluções de alguns sistemas de equações diferenciais.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{dy_1(t)}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = \dfrac{dy_2(t)}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Sejam $y = \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right]$, $y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$ e $A = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$. Então, o sistema pode ser escrito na forma $y' = Ay$:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Se A tem dois valores próprios reais distintos λ_1 e λ_2 com vectores próprios v_1 e v_2 associados a λ_1 e λ_2 respectivamente, então a solução geral do sistema de equações diferenciais considerado é

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) v_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se além disso impusermos que $y(t)$ assume um determinado valor y_0 quando $t = 0$, então o problema vai ter uma única solução. Um problema da forma

$$y' = Ay, y(0) = y_0$$

é designado por *problema com condições iniciais*.

Problema de misturas

Dois tanques estão ligados como ilustrado na Figura 6.1. Inicialmente, o tanque A contém 200 litros de água, onde foram dissolvidos 60 gramas de sal. O tanque B contém 200 litros de água pura. Bombeia-se líquido para dentro e para fora dos dois tanques a taxas indicadas na figura. Pretende-se determinar a quantidade de sal no instante t.

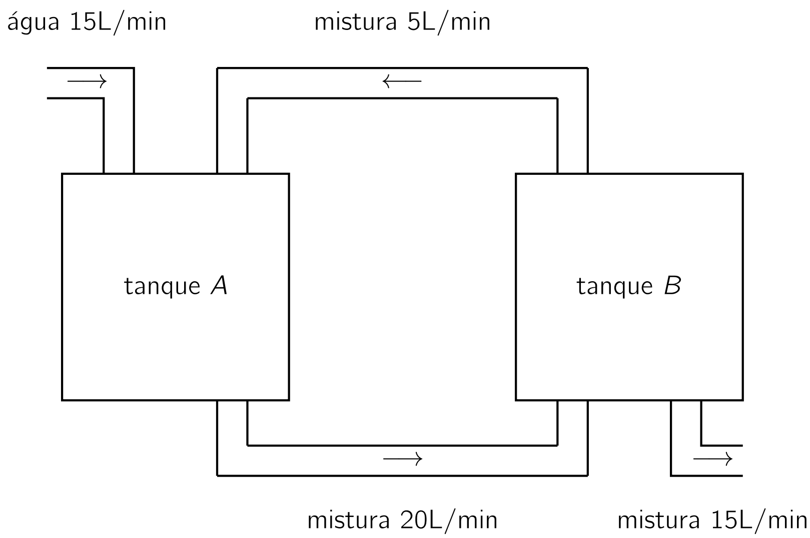


Figura 6.1: *Mistura 1.*

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade de sal em gramas nos tanques A e B, respectivamente, no instante de tempo t. Inicialmente, tem-se

$$y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A quantidade total de líquido em cada tanque é sempre 200 litros, porque a quantidade de líquido bombeada para dentro é igual à quantidade bombeada para fora em cada tanque. A taxa de variação da quantidade de sal em cada tanque é igual à taxa em que está sendo adicionado sal menos a taxa em que está sendo bombeado para fora. Para o tanque A, a taxa em que o sal está a ser adicionado é dada por

$$(5\,\mathrm{L/min})\left(\frac{y_2(t)}{200}\,\mathrm{g/L}\right) = \frac{y_2(t)}{40}\,\mathrm{g/min}$$

e a taxa de sal que está sendo bombeada para fora é

$$(20\,\mathrm{L/min})\left(\frac{y_1(t)}{200}\,\mathrm{g/L}\right)=\frac{y_1(t)}{10}\,\mathrm{g/min}.$$

Então, a taxa de variação para o tanque A é dada por

$$y_1'(t)=\frac{y_2(t)}{40}-\frac{y_1(t)}{10}.$$

Analogamente, a taxa de variação para o tanque B é dada por

$$y_2'(t)=\frac{20y_1(t)}{200}-\frac{20y_2(t)}{200}=\frac{y_1(t)}{10}-\frac{y_2(t)}{10}.$$

Para determinar $y_1(t)$ e $y_2(t)$, precisamos de resolver o problema com condições iniciais

$$y'=Ay, y(0)=y_0,$$

onde $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{1}{40}\\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}$ e $y_0=\begin{bmatrix}60\\0\end{bmatrix}$. Calculando os valores próprios de A, obtém-se $\lambda_1=-\frac{3}{20}$ e $\lambda_2=-\frac{1}{20}$ com vectores próprios associados $v_1=(1,-2)$ e $v_2=(1,2)$. A solução deste problema é da forma

$$y=c_1\exp\left(-\frac{3}{20}t\right)v_1+c_2\exp\left(-\frac{t}{20}\right)v_2.$$

No instante $t=0$, $y=y_0$, logo

$$c_1\,v_1+c_2\,v_2=y_0,$$

ou, escrito de outra forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular o valor das constantes c_1 e c_2 resolvendo o sistema associado à última equação. A solução é $c_1 = c_2 = 30$. Conclui-se que a solução do problema de valor inicial é

$$y = 30 \exp\left(-\frac{3}{20}t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 30 \exp\left(-\frac{t}{20}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

que pode ser reescrita da forma

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \exp(-\frac{3}{20}t) + 30 \exp(-\frac{t}{20}) \\ -60 \exp(-\frac{3}{20}t) + 60 \exp(-\frac{t}{20}) \end{bmatrix}.$$

Exercício: Dois tanques contêm, cada um, 100 litros de uma mistura. A mistura no tanque A contém 40 gramas de sal, enquanto a mistura no tanque B contém 20 gramas de sal. Bombeia-se líquido para dentro e para fora dos tanques de acordo com a Figura 6.2. Determine a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t.

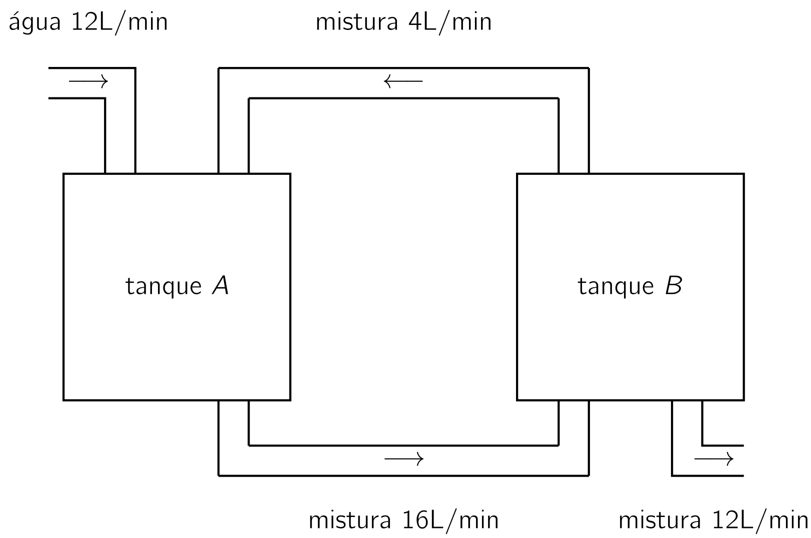


Figura 6.2: *Mistura 2.*

Capítulo 7

Geometria Analítica

7.1def [[produto interno de dois vectores ou produto escalar de dois vectores]]

Sejam V um espaço vectorial real e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array}$$

tal que

(a) $\forall x, y \in V : x \cdot y = y \cdot x$.

(b) $\forall x, y, z \in V : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(c) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha x) \cdot y = \alpha (x \cdot y)$.

(d) $\forall x \in V \setminus \{0_V\} : x \cdot x > 0$.

(e) $0_V \cdot 0_V = 0$.

Então, diz-se que V está munido do produto interno ou produto escalar $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

7.2obs Também se usam as notações $x|y$, (x,y), $\langle x,y\rangle$ e $(x|y)$ para representar o produto interno dos vectores x e y.

7.3def [[espaço euclidiano]] Um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno diz-se um espaço euclidiano.

7.4teo Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto & (x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \end{array}$$

Então, $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ é um espaço euclidiano.

7.5obs O produto interno por defeito de $\mathbb{R}^3$ é o produto interno do exemplo anterior.

7.6exe Determine o produto interno dos vectores $x = (1,0,2)$ e $y = (3,1,0)$.

7.7def [[norma]] Sejam V um espaço vectorial real e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\|, \end{array}$$

tal que

(a) $\forall x,y \in V : \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

(b) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(c) $\forall x \in V \setminus \{0_V\} : \|x\| > 0$.

(d) $\|0_V\| = 0$.

Então, diz-se que V está munido da norma $x \mapsto \|x\|$.

$\boxed{\text{7.8def}}$ [[espaço normado]] Um espaço vectorial real munido de uma norma diz-se um espaço normado.

$\boxed{\text{7.9teo}}$ Sejam V um espaço euclidiano e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x \cdot x}. \end{array}$$

Então, $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

$\boxed{\text{7.10def}}$ [[norma induzida pelo produto interno]] À norma definida no teorema anterior chama-se norma induzida pelo produto interno.

$\boxed{\text{7.11obs}}$ Por defeito, a norma num espaço euclidiano é a norma induzida pelo produto interno.

$\boxed{\text{7.12teo}}$ Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{array}$$

Então, $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. (Esta é a norma induzida pelo produto interno de $\boxed{\text{6.4teo}}$.)

$\boxed{\text{7.13def}}$ [[vector unitário]] Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e $x \in V$. Então, x diz-se um vector unitário se $\|x\| = 1$.

$\boxed{\text{7.14exe}}$ Determine as normas dos vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$ e indique se são vectores unitários.

7.15teo Desigualdade de Cauchy-Schwarz: seja $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano. Então,

$$\forall x, y \in V : |x \cdot y| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

7.16def Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\| \cdot \|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então,

(a) ⟦distância entre dois vectores⟧ chama-se distância entre os vectores x e y, que se representa por $d(x, y)$, a $\|x - y\|$.

(b) ⟦ângulo entre dois vectores⟧ Chama-se ângulo entre os vectores x e y, que se representa por $\angle(x, y)$, a θ, onde

$$\theta = 0 \text{ se } x = 0_V \text{ ou } y = 0_V.$$
$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \text{ se } x \neq 0_V \text{ e } y \neq 0_V.$$

(c) ⟦vectores ortogonais⟧ Os vectores x e y dizem-se ortogonais, que se representa por $x \perp y$, se $\angle(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

7.17obs Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\| \cdot \|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \leq 1$, pelo que a definição de ângulo entre dois vectores faz sentido.

7.18exe Determine a distância e o ângulo entre os vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$ e indique se são vectores ortogonais.

7.19obs Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\| \cdot \|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então,

(a) $x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \theta$, em que $\angle(x, y) = \theta$.

(b) se $x \neq 0_V$ e $y \neq 0_V$, então, $x \perp y$ se e só se $x \cdot y = 0$.

7.20def ⟦produto externo de dois vectores ou produto vectorial de dois vectores de $\mathbb{R}^3$⟧ Sejam o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Então, chama-se produto externo de x e y, que se representa por $x \times y$, ao elemento de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \in \mathbb{R}^3.$$

7.21obs Sejam $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Então, o produto externo de x e y pode ser calculado através do determinante simbólico

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

7.22exe Sejam os vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$. Então, determine $x \times y$.

7.23def ⟦triedro directo⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ vectores ortogonais dois a dois. Então, diz-se que os vectores a, b e c formam um triedro directo se um observador colocado no ponto $(0, 0, 0)$ e com a cabeça na parte positiva do vector c, vê a à direita de b.

7.24teo (a) $\forall x \in \mathbb{R}^3 : x \times 0 = 0$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : x \times y = -y \times x$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} : x \times (\alpha y) = \alpha(x \times y)$.

(d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3 : (x + y) \times z = x \times z + y \times z$.

(e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

(f) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : (x \times y) \perp x$ e $(x \times y) \perp y$.

(g) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : x \times y = \big(\|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta\big)\, n$, onde $\angle(x, y) = \theta$ e $n \in \mathbb{R}^3$ é um vector unitário, $n \perp x$ e $n \perp y$, e a, b e n definem um triedro directo.

(h) $\|x \times y\|$ é igual à área do paralelogramo que tem como dois dos lados x e y.

7.25obs (a) Um dos conceitos principais em Álgebra Linear é o de "espaço vectorial", no qual intervêm "vectores" e "escalares" sujeitos a certas leis operatórias. Na Geometria Analítica do "espaço ordinário", um dos conceitos fundamentais é o de "ponto".

(b) Considere-se no "espaço ordinário" um ponto fixo, a que se chama origem e que se denota por O, e três eixos ortogonais concorrentes no ponto O, que se denotam por OX, OY e OZ, no sentido directo, *i.e.*, um observador colocado na origem e com a cabeça na parte positiva do eixo OZ, vê OX à direita de OY. Um ponto P do espaço ordinário fica identificado por três coordenadas, escrevendo-se $P = (p_1, p_2, p_3)$, em que p_1 é a distância do ponto ao plano YOZ, p_2 é a distância do ponto ao plano XOZ e p_3 é a distância do ponto ao plano XOY. Às coordenadas p_1, p_2 e p_3 chama-se abcissa, ordenada e cota, respectivamente. Note-se, então, que se pode estabelecer uma relação entre o ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ do espaço ordinário e o vector $v = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, em que $\{e_1, e_2, e_3\}$ representa a sua base canónica, *i.e.*, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$: o vector v é representado geometricamente por um vector cuja origem coincide com a origem do sistema de eixos coordenados e cujo extremo é o ponto P de coordenadas (p_1, p_2, p_3). Assim, passa-se a denotar indistintamente por $\mathbb{R}^3$ o espaço ordinário e o espaço vectorial real.

(c) Sejam, agora, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ pontos do espaço ordinário. Então, denotam-se os segmentos orientados no espaço ordinário com ponto inicial A e com ponto final B por $\overrightarrow{AB}$ que corresponderá ao vector $v = (b_1 - a_1)e_1 + (b_2 - a_2)e_2 + (b_3 - a_3)e_3$, ou seja, o seu segmento equipolente (mesma direcção, comprimento e sentido) aplicado na origem.

7.26def ⟦equação cartesiana de um plano⟧ Equação do plano α que contém o ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ e que é perpendicular ao vector não-nulo $u = (u_1, u_2, u_3)$: seja o ponto $P = (x, y, z)$. Então,

$$P \in \alpha \text{ se e só se } (P - A) \cdot u = 0,$$

ou seja,

$$(x - a_1)u_1 + (y - a_2)u_2 + (z - a_3)u_3 = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = d,$$

em que $a = u_1$, $b = u_2$, $c = u_3$ e $d = u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3$. Chama-se equação cartesiana do plano α à equação $ax + by + cz = d$.

7.27obs Seja o plano α dado pela equação cartesiana equação $ax+by+cz=d$. Então, o vector $v=(a,b,c)$ é perpendicular a α.

7.28exe Determine a equação cartesiana do plano α tal que:

(a) passa na origem e é perpendicular ao vector $v=(1,2,3)$.

(b) Passa na origem e é paralelo aos vectores $u=(1,1,1)$ e $v=(1,0,0)$.

(c) Passa nos pontos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ e $C=(0,0,1)$.

7.29def [[equação vectorial de uma recta, equações paramétricas de uma recta, equações cartesianas de uma recta, vector director de uma recta]]
Equação da recta r que passa pelo ponto $A=(a_1,a_2,a_3)$ e que é paralela ao vector não-nulo $u=(u_1,u_2,u_3)$: seja o ponto $P=(x,y,z)$. Então, $P\in r$ se e só se $\overrightarrow{AP}\parallel u$, ou seja,

$$P-A=\alpha u,\ \alpha\in\mathbb{R} : \text{equação vectorial,}$$

ou

$$\begin{cases} x-a_1 &= \alpha u_1 \\ y-a_2 &= \alpha u_2 \\ z-a_3 &= \alpha u_3 \end{cases} : \text{equações paramétricas.}$$

Se se eliminar o parâmetro α das equações paramétricas, obtêm-se as equações cartesianas.
Chama-se vector director da recta r ao vector u.

7.30exe Determine a equação vectorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da recta r que passa no ponto $A = (-1, 0, 2)$ e é paralela ao vector $v = (1, 2, 3)$.

7.31exe Determine a equação vectorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da recta definida:

(a) pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e pelo vector director $v = (-2, 1, -1)$.

(b) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 5)$.

(c) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 3)$.

(d) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 3)$.

7.32exe Determine a equação cartesiana do plano definido

(a) pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e que é perpendicular ao vector $u = (1, 2, 3)$.

(b) pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e pelos vectores directores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 3)$.

(c) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 3)$ e pelo vector director $v = (2, -1, 3)$.

(d) pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

7.33exe Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 2, 0)$ e $D = (1, 2, 1)$. Determine:

(a) a recta r definida pelos pontos A e B.

(b) A recta s que contém o ponto C e que é paralela à recta r.

(c) O plano α definido pelas rectas r e s.

(d) O plano β definido pela recta r e pelo ponto D.

(e) O ponto de intersecção da recta r com o plano α.

7.34def [[distância entre dois pontos]] Sejam $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Então, chama-se distância entre os pontos P e Q, que se representa por $d(P, Q)$, a

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

7.35def [[distância de um ponto a um plano]] Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e π um plano. Então, chama-se distância de P a π, que se representa por $d(P, \pi)$, a $d(P, \pi) = d(P, Q)$, em que

(a) r é a recta perpendicular a π que passa em P.

(b) $Q = \pi \cap r$.

7.36exe Determine a distância entre o ponto $P = (0, 1, -2)$ e o plano α cuja equação cartesiana é $x + y + z = 1$.

7.37def [[distância de um ponto a uma recta]] Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e r uma recta. Então, chama-se distância de P a r, que se representa por $d(P, r)$, a $d(P, r) = d(P, Q)$, em que

(a) π é o plano perpendicular a r que passa em P.

(b) $Q = \pi \cap r$.

7.38exe Determine a distância do ponto $P = (0, 1, -2)$ à recta r definida pelas equações cartesianas $x + y - z = 4$ e $x + 2y - 3z = 4$.

7.39def ⟦ângulo entre dois planos⟧ Sejam π e ψ dois planos tais que $u = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi$ e $v = (a_2, b_2, c_2) \perp \psi$. Então, chama-se ângulo entre π e ψ, que se representa por $\angle(\pi, \psi)$, a

$$\begin{aligned} \angle(\pi, \psi) &= \arccos \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \\ &= \arccos \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \end{aligned}$$

7.40exe Determine o ângulo entre os planos α e β, cujas equações cartesianas são $x + y + z = 1$ e $2x - y + z = 2$, respectivamente.

7.41def ⟦ângulo entre duas rectas⟧ Sejam r e s duas rectas tais que $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são os seus vectores directores, respectivamente. Então, chama-se ângulo entre r e s, que se representa por $\angle(r, s)$, a

$$\begin{aligned} \angle(r, s) &= \arccos \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \\ &= \arccos \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \end{aligned}$$

7.42def ⟦ângulo entre uma recta e um plano⟧ Sejam r uma recta em que $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o seu vector director e π um plano tal que $v = (a, b, c) \perp \pi$. Então, chama-se ângulo entre r e π, que se representa por $\angle(r, \pi)$, a

$$\begin{aligned} \angle(r, \pi) &= \arcsin \frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|} \\ &= \arcsin \frac{|a u_1 + b u_2 + c u_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}. \end{aligned}$$

7.43exe Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, o plano $\alpha = x+2y = 3$, o plano $\beta = x+y-z = 0$, a recta r definida pelos pontos $A = (1,2,3)$ e $B = (1,0,1)$ e a recta s definida pelas equações $x+y-z = 4$ e $x+2y-3z = 4$. Determine:

(a) $\angle(r,s)$.

(b) $\angle(\alpha,r)$.

(c) $\angle(\alpha,\beta)$.

(d) A recta t que contém o ponto A e que é perpendicular ao plano α.

(e) $d(A,\alpha)$.

(f) $d(B,s)$.

(g) O plano que contém a recta r e que é perpendicular ao plano α.

7.44def (a) [[superfície de segunda ordem, superfície quádrica, quádrica]] Chama-se superfície de segunda ordem ou superfície quádrica ou quádrica ao conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação algébrica inteira do segundo grau, *i.e.*, que satisfaz a equação

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x+a_{22}y^2+2a_{23}yz+2a_{24}y+a_{33}z^2+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

(b) [[superfície de revolução, geratriz de uma superfície de revolução, eixo]] Chama-se superfície de revolução a uma quádrica gerada pela rotação de uma curva plana, a que se chama geratriz, em torno de uma recta, a que se chama eixo, que está no plano da geratriz.

(c) [[superfície cilíndrica, geratriz de uma superfície cilíndrica, directriz]] Chama-se superfície cilíndrica a uma quádrica gerada por uma recta, a que se chama geratriz, que se move paralelamente a uma recta fixa apoiando-se numa curva, a que se chama directriz. Se a directriz for uma curva plana e a geratriz for perpendicular a um plano que contenha a curva, a superfície cilíndrica diz-se recta.

(d) [[traço de uma quádrica]] Chama-se traço à intersecção de uma quádrica com um plano.

7.45def (a) [[simetria de uma quádrica relativamente a um plano coordenado]] Uma quádrica diz-se simétrica relativamente a um plano coordenado se a sua equação não se alterar quando a variável medida a partir desse plano mudar de sinal.

(b) [[simetria de uma quádrica relativamente a um eixo coordenado]] Uma quádrica diz-se simétrica relativamente a um eixo coordenado se a sua equação não se alterar quando as variáveis que não são medidas sobre esse eixo mudam de sinal.

(c) ⟦simetria de uma quádrica relativamente à origem⟧ Uma quádrica diz-se simétrica relativamente à origem se a sua equação não se alterar quando as três variáveis mudam de sinal.

7.46teo Através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), é sempre possível transformar uma quádrica numa das seguintes formas canónicas:

(a) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(b) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(c) $\lambda_1 x^2 + d = 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(d) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 2az$, $\lambda_1\, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

(e) $\lambda_1 x^2 = 2ay$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

7.47obs O objectivo do que resta deste capítulo é identificar e esboçar o gráfico de uma quádrica conhecida a sua forma canónica.

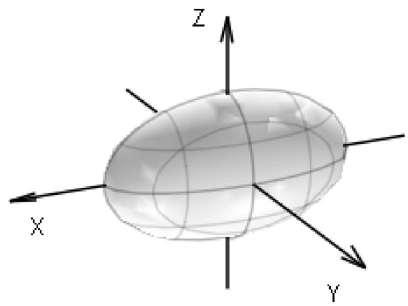
7.48def ⟦elipsóide, esfera⟧ Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se elipsóide à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a,\ b \text{ e } c \text{ não todos iguais,}$$

e esfera à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

7.49exe A quádrica cuja equação é $x^2+5y^2+3z^2=1$ ($a=1$, $b=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$) é um elipsóide. A sua representação é



7.50obs Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ não todos iguais e o elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$.
- No plano XOZ — a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$.
- No plano YOZ — a elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$.

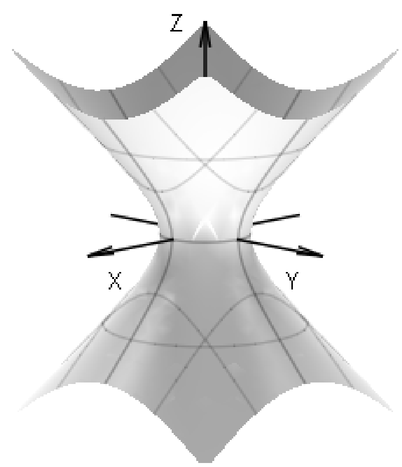
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a=b$, em que a geratriz é a elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ e o eixo é o eixo coordenado OZ, ou se $a=c$, em que a geratriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e o eixo é o eixo coordenado OY, ou se $b=c$, em que a geratriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ e o eixo é o eixo coordenado OX.

7.51def ⟦hiperbolóide de uma folha⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se hiperbolóide de uma folha à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

7.52exe A quádrica cuja equação é $x^2+y^2-z^2=1$ $(a=1,\ b=1,\ c=1)$ é um hiperbolóide de uma folha. A sua representação é



7.53obs Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$.
- No plano XOZ — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$.
- No plano YOZ — a hipérbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$.

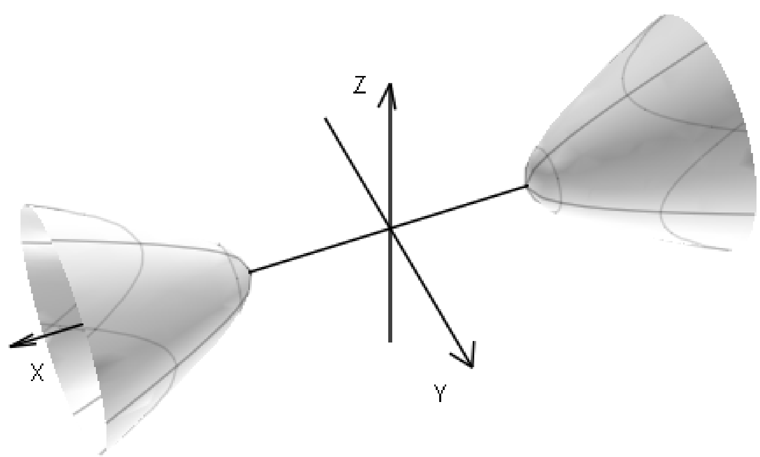
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

7.54def [[hiperbolóide de duas folhas]] Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se hiperbolóide de duas folhas à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7.55exe A quádrica cuja equação é $\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$ ($a = \sqrt{3}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$) é um hiperbolóide de duas folhas. A sua representação é



7.56obs Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — não existe.

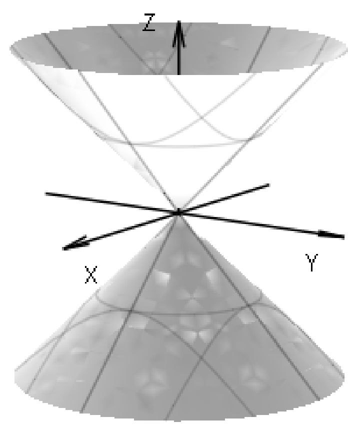
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $b = c$, em que a geratriz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OX.

7.57def ⟦cone⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se cone à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

7.58exe A quádrica cuja equação é $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ($a = 1,\ b = 1,\ c = 1$) é um cone. A sua representação é



7.59obs Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o cone $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o ponto $(0, 0, 0)$.
- No plano XOZ — o par de rectas $\frac{z}{c} = \pm\frac{x}{a}$, $y = 0$.

- No plano YOZ — o par de rectas $\frac{z}{c} = \pm\frac{y}{b}$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a recta $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $x = 0$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

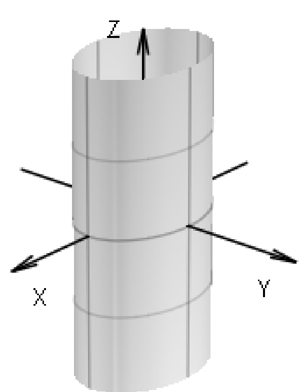
$\boxed{\text{7.60def}}$ [[cilindro elíptico, cilindro circular]] Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se cilindro elíptico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,\, a \neq b, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,\, a \neq c, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,\, b \neq c,$$

e cilindro circular à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + z^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad y^2 + z^2 = \rho^2.$$

$\boxed{\text{7.61exe}}$ A quádrica cuja equação é $x^2 + 2y^2 = 1$ ($a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$) é um cilindro elíptico. A sua representação é



7.62obs Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, e o cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — o par de rectas $x = \pm a$, $y = 0$.
- No plano YOZ — o par de rectas $y = \pm b$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

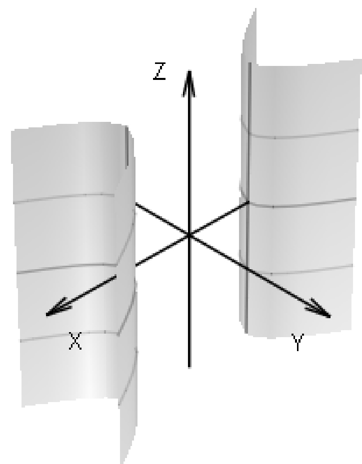
(c) Superfície cilíndrica recta, em que a directriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

7.63def [[cilindro hiperbólico]] Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se cilindro hiperbólico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7.64exe A quádrica cuja equação é $x^2 - 4y^2 = 1$ ($a = 1$, $b = \frac{1}{2}$) é um cilindro hiperbólico. A sua representação é



7.65obs Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e o cilindro hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — o par de rectas $x = \pm a$, $y = 0$.
- No plano YOZ — não existe.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície cilíndrica, em que a directriz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

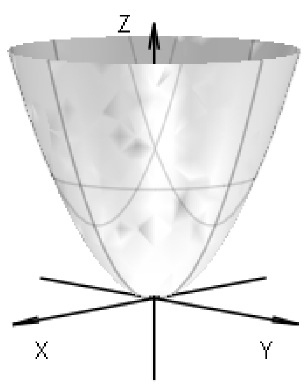
7.66def [[parabolóide elíptico, parabolóide circular]] Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$ e $p, q, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, chama-se parabolóide elíptico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 2pz, a \neq b, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 2qy, a \neq c, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 2rx, b \neq c,$$

e parabolóide circular à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 + y^2 = 2p\rho^2 z \quad \text{ou} \quad x^2 + z^2 = 2q\rho^2 y \quad \text{ou} \quad y^2 + z^2 = 2r\rho^2 x.$$

7.67exe A quádrica cuja equação é $x^2+y^2 = z$ ($\rho = 1$, $p = \frac{1}{2}$) é um parabolóide circular. A sua representação é



7.68obs Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o parabolóide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o ponto $(0, 0, 0)$.
- No plano XOZ — a parábola $\frac{x^2}{a^2} = 2pz$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a parábola $\frac{y^2}{b^2} = 2pz$, $x = 0$.

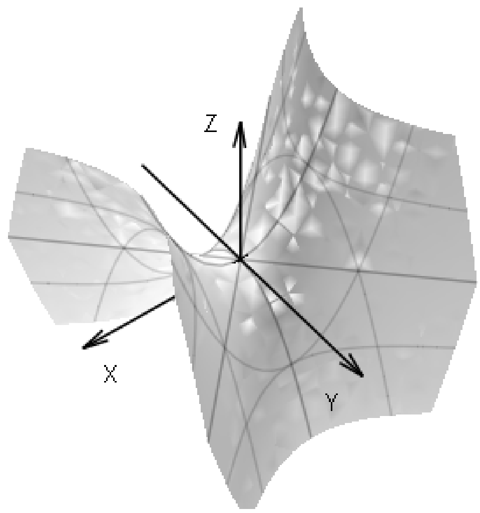
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ e ao eixo coordenado OZ.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a parábola $\frac{y^2}{b^2} = 2pz$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

7.69def [[parabolóide hiperbólico]] Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e $p, q, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Então, chama-se parabolóide hiperbólico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2qy \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2rx.$$

7.70exe A quádrica cuja equação é $x^2 - y^2 = z$ ($a = 1$, $b = 1$, $p = \frac{1}{2}$) é um parabolóide hiperbólico. A sua representação é



7.71obs Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e o parabolóide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o par de rectas $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a parábola $-\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ e ao eixo coordenado OZ.

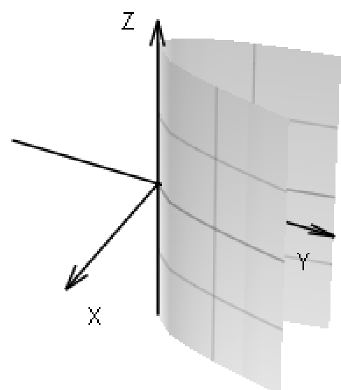
(c) Nunca é uma superfície de revolução.

7.72def ⟦cilindro parabólico⟧ Sejam $p, q, r, s, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, chama-se cilindro parabólico à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 = 2py \quad \text{ou} \quad y^2 = 2qx \quad \text{ou} \quad x^2 = 2rz \quad \text{ou}$$

$$z^2 = 2sx \quad \text{ou} \quad y^2 = 2mz \quad \text{ou} \quad z^2 = 2ny.$$

7.73exe A quádrica cuja equação é $4x^2 = y$ ($p = \frac{1}{8}$) é um cilindro parabólico. A sua representação é



7.74obs Sejam $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o cilindro parabólico $x^2 = 2py$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a parábola $x^2 = 2py$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a recta $x = 0$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a recta $x = 0$, $y = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOY e YOZ e ao eixo coordenado OY.

(c) Superfície cilíndrica, em que a directriz é a parábola $x^2 = 2py$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

7.75def [[quádrica degenerada]] Uma quádrica diz-se degenerada se não há pontos de $\mathbb{R}^3$ que satisfaçam a sua equação, ou se, existindo, eles definem um plano, uma recta ou apenas um ponto de $\mathbb{R}^3$.

7.76obs Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, as seguintes equações definem quádricas degeneradas:

(a) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

(c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(f) $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$, $z^2 = c^2$.

(g) $x^2 = -a^2$, $y^2 = -b^2$, $z^2 = -c^2$.

(h) $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$.

7.77exe Identifique as quádricas dadas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$.

(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$.

(c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$.

(d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$.

(e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$.

(f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$.

(g) $3x^2 - 2y^2 = z$.

(h) $x^2 + 2y^2 = z^2$.

(i) $x^2 + 2y^2 = z$.

(j) $x^2 + 2y^2 = 1$.

(k) $2y^2 = z$.

(l) $x^2 - 2y^2 = 1$.

(m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$.

(n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$.

(o) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$.

(p) $2x^2 + 2y^2 = 1$.

$\boxed{\text{7.78obs}}$ Resumo das quádricas: seja a quádrica

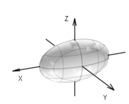
$$\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 y^{\alpha_2} + \lambda_3 z^{\alpha_3} = d, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{1, 2\}, d \in \{0, 1\}.$$

Então:

(a) $d = 1$

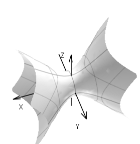
(a.i) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 2$

(a.i.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k > 0$: elipsóide ou esfera.

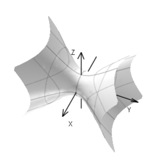


$x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 1$

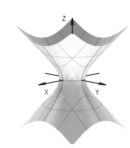
(a.i.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$: hiperbolóide de uma folha.



$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$

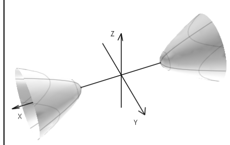


$x^2 - y^2 + z^2 = 1$

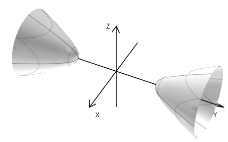


$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

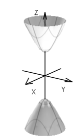
(a.i.3) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k < 0$: hiperbolóide de duas folhas.



$\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$



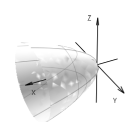
$-2x^2 + \frac{y^2}{3} - 2z^2 = 1$



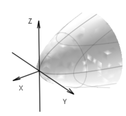
$-2x^2 - 2y^2 + \frac{z^2}{3} = 1$

(a.ii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 1$

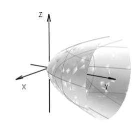
(a.ii.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k \neq 0$: parabolóide elíptico ou circular.



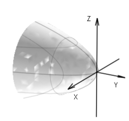
$y^2 + z^2 = x$



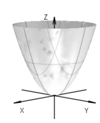
$y^2 + z^2 = -x$



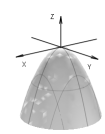
$x^2 + z^2 = y$



$x^2 + z^2 = -y$

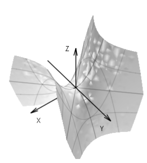


$x^2 + y^2 = z$

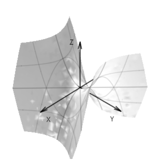


$x^2 + y^2 = -z$

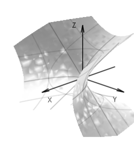
(a.ii.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k \neq 0$: parabolóide hiperbólico.



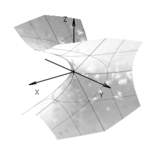
$x^2 - y^2 = z$



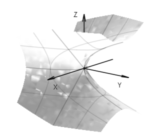
$x^2 - y^2 = -z$



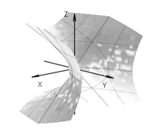
$y^2 - z^2 = x$



$y^2 - z^2 = -x$



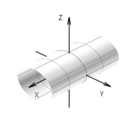
$z^2 - x^2 = y$



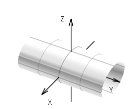
$z^2 - x^2 = -y$

(a.iii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 0$

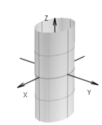
(a.iii.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k = 0$: cilindro elíptico ou circular.



$y^2 + 2z^2 = 1$

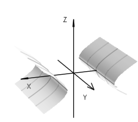


$x^2 + 2z^2 = 1$

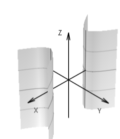


$x^2 + 2y^2 = 1$

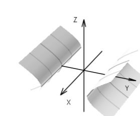
(a.iii.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$: cilindro hiperbólico.



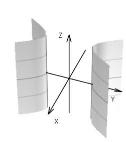
$x^2 - 4z^2 = 1$



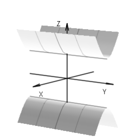
$x^2 - 4y^2 = 1$



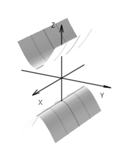
$y^2 - 4z^2 = 1$



$y^2 - 4x^2 = 1$

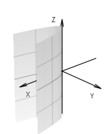


$z^2 - 4x^2 = 1$

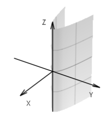


$z^2 - 4y^2 = 1$

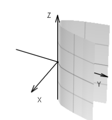
(a.iv) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 1, \alpha_k = 0$: cilindro parabólico.



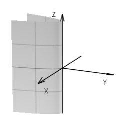
$4y^2 = x$



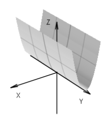
$4y^2 = -x$



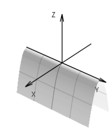
$4x^2 = y$



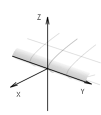
$4x^2 = -y$



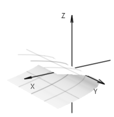
$4x^2 = z$



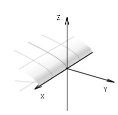
$4x^2 = -z$



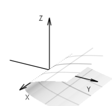
$4z^2 = -x$



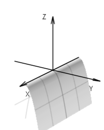
$4z^2 = x$



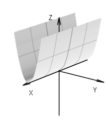
$4z^2 = -y$



$4z^2 = y$



$4y^2 = -z$

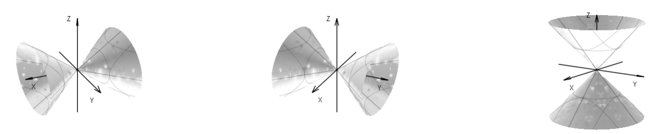


$4y^2 = z$

(a.v) caso contrário: quádrica degenerada.

(b) $d = 0$

(b.i) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 2, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$: cone.



$x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$ $\quad -x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $\quad -x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$

(b.ii) caso contrário: quádrica degenerada.

Apêndice A

Alfabeto Grego

Minúscula	Maiúscula	Nome	Equivalente Latino
α	A	alfa	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gama	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	épsilon	e
ζ	Z	zeta	z
η	H	eta	e,h
θ	Θ	teta	t
ι	I	iota	i
κ	K	capa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	miu	m
ν	N	niu	n
ξ	Ξ	csi	cs
o	O	ómicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	ró	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	ípsilon	u,y
φ, ϕ	Φ	fi	f
χ	X	qui	c,x
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	ómega	w

Apêndice B

Soluções dos Exercícios

B.1 Soluções dos Exercícios do Capítulo 1 (Matrizes)

1.21sol (a) A — tipo 2×3, c — tipo 3×1, D — tipo 3×2, E — tipo 1×4.

(b) B — ordem 2, F — ordem 2, g — ordem 1, H — ordem 2.

(c) e, g.

(d) c, g.

(e) B, g, H.

(f) g, H.

(g) B, F, g, H.

(h) B, g, H.

1.24sol $\operatorname{tr}(A) = 16$.

1.52sol $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

1.63sol (a) $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) A expressão $A - C$ não está bem definida.

(c) A expressão AC não está bem definida.

(d) $CA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(g) $(CBA^TC)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(h) $uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) $u^Tu = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

(j) $u^TA^TBu = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$.

1.61sol (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$.

1.66sol $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$.

1.72sol A e C.

1.89sol Nota: associada a cada matriz não-nula, existe uma infinidade de matrizes que lhe são equivalentes e que estão na forma em escada. As soluções que a seguir se apresentam, resultam da aplicação do algoritmo apresentado em 1.86obs.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(A), \mathrm{fer}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(B), \mathrm{fer}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(C), \mathrm{fer}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(D), \text{fer}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(E), \text{fer}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \in \text{fe}(F), \text{fer}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(g) $G \in \text{fe}(G), \text{fer}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{fe}(x), \text{fer}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(i) $\text{fer}(J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(j) $\text{fer}(K) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.98sol (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) A matriz B é singular.

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$.

(f) F é singular.

(g) G é singular.

1.99sol $X = CB - A$.

1.100sol $X = (A^2)^T - (B^{-1})^T$

1.101sol (a) i. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ii. Existem 2 caminhos de comprimento 2 que começam em V_1 e terminam em V_1. Existe 1 caminho de comprimento 1 de V_1 para V_2, de V_1 para V_3, de V_1 para V_4, de V_1 para V_5.

iii. Existem 5 caminhos de comprimento 3 de V_2 a V_4. Existem 7 caminhos de comprimento menor ou igual a 3 de V_2 a V_4.

(b) ii. Existem 2 caminhos de comprimento 2 de V_1 a V_3.

iii. Não existem caminhos de comprimento 2 de V_2 a V_4.

B.2 Soluções dos Exercícios do Capítulo 2 (Determinantes)

2.19sol A tem inversa sse $xy \neq 3$.

2.0sol $\det(B) = 24$; $\det(C) = 0$; $\det(D) = 0$. C e D são matrizes singulares. B é invertível.

2.21sol $\det((AB^{-1})^T) = -5$.

2.22sol (a) $X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\det(AX^T + DF) = 1$.

2.26sol $\det(A) = -1$.

2.27sol $\det(A) = 15$, $\det(B) = 1$, $\det(C) = 0$, $\det(D) = 0$, $\det(E) = 1$, $\det(F) = 2$.

2.33sol (a) $\det(A) = 1$, $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\det(B) = -7$, $\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

(c) $\det(C) = 10$, $\operatorname{adj}(C) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$.

(d) $\det(D)=3$, $\mathrm{adj}(D)=\begin{bmatrix}-3&5&2\\0&1&1\\6&-8&-5\end{bmatrix}$, $D^{-1}=\begin{bmatrix}-1&\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\2&-\frac{8}{3}&-\frac{5}{3}\end{bmatrix}$.

(e) $\det(E)=1$, $\mathrm{adj}(E)=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $E^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

2.34sol $A(\mathrm{adj}(A))=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{4}\,\mathrm{adj}(A)$.

B.3 Soluções dos Exercícios do Capítulo 3 (Sistemas de Equações Lineares)

3.17sol (a) (S_a) é um sistema possível e determinado com $\mathrm{CS}_{(S_a)}=\{(1,2)\}$.

(b) (S_b) é um sistema impossível, *i.e.*, $\mathrm{CS}_{(S_b)}=\emptyset$.

(c) (S_c) é um sistema possível e indeterminado com $\mathrm{CS}_{(S_c)}=\{(\frac{5-\alpha}{2},\frac{23-5\alpha}{4},\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

(d) (S_d) é um sistema possível e indeterminado com $\mathrm{CS}_{(S_d)}=\{(-s,1-t,s,t)|t,s\in\mathbb{R}\}$.

3.18sol $CS_3=\{(0,\alpha,-\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

$CS_4=\{(-\frac{4}{3}\alpha,0,\frac{1}{3}\alpha,\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

3.20sol (a) $\mathrm{CS}_{(S_a)}=\{(1,-1,1,-1)\}$.

(b) $\mathrm{CS}_{(S_b)}=\{(0,1,0,0)\}$.

3.21sol (S_1) (a) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, $A|b=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&-1&0&0\\-1&0&1&0\end{bmatrix}$.

(b) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=b}=\{(1,1,1)\}$.

(c) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=0}=\{(0,0,0)\}$.

(S_2) (a) $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\2&1&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, $A|b=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&2\\2&1&1&4\end{bmatrix}$.

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b}=\{(2-t,t,t)|t\in\mathbb{R}\}$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0}=\{(-t,t,t)|t\in\mathbb{R}\}$.

(S_3) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(b) Imp. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \emptyset$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-s, s, 0) | s \in \mathbb{R}\}$.

(S_4) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1 + s - t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(s - t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$.

3.24sol (a) PD: $\alpha \neq 3$. PI: $\alpha = 3$. Imp: nunca.

(b) PD: $k \neq 2 \wedge k \neq -5$. PI: $k = 2$. Imp: $k = -5$.

(c) PD: nunca. PI: $c \neq 3 \vee t = 3$. Imp: $c = 3 \wedge t \neq 3$.

(d) PD: nunca. PI: $a \neq -1 \vee t = -1$. Imp: $a = -1 \wedge t \neq -1$.

(e) PD: $\beta \neq -\frac{2}{3}$. PI: nunca. Imp: $\beta = -\frac{2}{3}$.

(f) PD: nunca. PI: $\gamma = 2$. Imp: $\gamma \neq 2$.

3.25sol (a) Para $a = 1/2$ o sistema é impossível. Para $a \neq 1/2$ o sistema é possível e determinado.

(b) $CS = \{(2\alpha, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

3.28sol (a) $a = 1$ e $b = 1$: sistema possível e indeterminado. $a = 1$ e $b \neq 1$: sistema impossível. $a \neq 1$ e $a \neq 1/2$ e $b \in \mathbb{R}$: sistema possível e determinado. $a = 1/2$ e $b \in \mathbb{R}$: sistema possível e indeterminado.

(b) $CS = \{(1, 0, 0)\}$.

3.29sol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

3.30sol (a) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(c) $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(0, 1, 2)\}$.

$\boxed{3.32\text{sol}}$ $x^2 - 2x + 3$.

$\boxed{3.33\text{sol}}$ $i_1 = 5$, $i_2 = 3$, $i_3 = -2$.

B.4 Soluções dos Exercícios do Capítulo 4 (Espaços Vectoriais)

$\boxed{4.12\text{sol}}$

(a) Propriedades (a), (c), (d) e (f).

(b) Propriedades (f).

(c) Propriedades (c), (d) e (f).

(d) Propriedades (c), (d) e (f).

$\boxed{4.13\text{sol}}$ Propriedades (a), (b), (f).

$\boxed{4.26\text{sol}}$

(a) $v = 3v_1$.

(b) v não é uma combinação linear de v_1.

(c) $v = v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

(d) $v = \alpha v_1 + \frac{3-\alpha}{2}v_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) v não é uma combinação linear de v_1 e v_2.

(f) $v = (\beta - 3)v_1 + \beta v_2 + \frac{6-\beta}{2}v_3$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{4.27\text{sol}}$

(a) c não pertence a $\langle a, b\rangle$.

(b) d não pertence a $\langle a, b\rangle$.

c e d não podem ser escritos como combinação linear de a e b.

$\boxed{4.28\text{sol}}$

(a) $w = 7u - 3v$.

(b) $\alpha = -8$.

4.29sol $u = 8v - \frac{3}{2}w$.

4.37sol A, B e C.

4.38sol A, C e D.

4.39sol $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.43sol A e C.

4.44sol (a) A, B e C são linearmente dependentes para $m = -4$ e $n = 3$.

(b) $A = -\frac{3}{2}B + \frac{1}{2}C$.

4.45sol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

4.46sol $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.53sol A e C.

4.54sol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

4.55sol A.

4.73sol (b) Por exemplo, o conjunto $\{(1,1,0,0), (-6,0,2,1)\}$ é uma base de V e $\dim(V) = 2$.

4.74sol Base: $\{(1,1,0,0), (1,-1,1,0), (0,2,0,1)\}$. $\dim(S)$=3.

4.75sol (a) Os polinómios $1, x, x(x+1)$ são linearmente independentes.

(b) $1 + 2x + 3x^2 = 1 - x + 3x(x+1)$.

4.76sol (c) Não.

(d) $\dim(F) = 2$.

4.77sol (a) Sim.

(b) Não.

(c) Não.

(d) Sim.

(e) $\#C \geqslant 2$.

(f) $\#D \leqslant 2$.

(g) E é um conjunto gerador de V se e só se v_1 e v_4 forem vectores linearmente independentes.

B.5 Soluções dos Exercícios do Capítulo 5 (Transformações Lineares)

5.4sol (a) $T(2,1) = (1,0,2)$.

(b) $T(y,1) = (y-1,0,y)$.

(c) $T(y,x) = (y-x,0,y)$.

(d) $T(x+2y,2y-x) = (2x,0,x+2y)$.

5.7sol T_1, T_4, T_6, T_9 e T_{10}.

5.8sol $\alpha = 2\beta$.

5.20sol (a) $A_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) i. $T(x) = (0,0,0)$.

ii. $T(x) = (2,-1,-1)$.

iii. $T(x) = (-15,9,6)$.

5.23sol (a) $\mathcal{N}_{T_1} = \{(0,0,0)\}$, $\mathcal{I}_{T_1} = \mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{N}_{T_2} = \{(0,0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{I}_{T_2} = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$.

(c) $\mathcal{N}_{T_3} = \langle (0,1,0),(0,0,1)\rangle$, $\mathcal{I}_{T_3} = \langle (1,1,1)\rangle$.

5.33sol (a) $\mathcal{I}_{T_1} = \mathbb{R}$, $c_{T_1} = 1$,

$\mathcal{N}_{T_1} = \{(x,-x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1)\rangle$, $n_{T_1} = 1$,

$A_{T_1} = [\,1\ 1\,]$.

(b) $\mathcal{I}_{T_2} = \{(x,2x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2)\rangle$, $c_{T_2} = 1$,

$\mathcal{N}_{T_2} = \{(-y-z,y,z) | y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, $n_{T_2} = 2$,

$A_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathcal{I}_{T_3} = \{(x,0,z) | x,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle$, $c_{T_3} = 2$,

$\mathcal{N}_{T_3} = \{(z,2z,z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,1)\rangle$, $n_{T_3} = 1$,

$A_{T_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathcal{I}_{T_4} = \mathbb{R}^3$, $c_{T_4} = 3$,

$\mathcal{N}_{T_4} = \{(3w,3w,w,w) | w \in \mathbb{R}\} = \langle (3,3,1,1)\rangle$, $n_{T_4} = 1$,

$A_{T_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

5.28sol (a) $T(x,y) = (-x+3y, x, 2x+y)$.

(b) $T(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 7x-y)$.

(c) $T(x,y,z) = 8x-3y-2z$.

5.29sol $T(x,y,z) = (0,0,z-y)$.

5.34sol (b) $n_T = 1$, $c_T = 3$.

5.35sol $n_T = 1$. $\{(1,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}_T$.

5.36sol (b) Por exemplo: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $n_T = 2$.

B.6 Soluções dos Exercícios do Capítulo 6 (Valores e Vectores Próprios)

6.13sol $\lambda(A) = \{\alpha\}$, $E_\alpha = \{(0,0,x) | x \in \mathbb{C}\}$.

6.14sol (a) $\lambda(A) = \{-1, 5\}$.

$E_1 = \{(-2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_5 = \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(b) $\lambda(B) = \{-i, i\}$.

$E_{-i} = \{(\frac{\alpha}{1+i}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_i = \{(\frac{\alpha}{1-i}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(c) $\lambda(C) = \{-2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = -2$ tem multiplicidade algébrica dois.

$E_{-2} = \{(\beta - \alpha, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

$E_4 = \{(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(d) $\lambda(D) = \{2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica dois.

$E_2 = \{(\alpha, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

$E_4 = \{(-\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(e) $\lambda(E) = \{0, 2\}$, em que o valor próprio $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade algébrica dois.

$E_0 = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_2 = \{(\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(f) $\lambda(F) = \{1, 2, 3\}$.

$E_1 = \{(-\frac{\alpha}{3}, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

$E_2 = \{(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

$E_3 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\}$.

6.16sol Todas as afirmações são verdadeiras.

6.17sol $a = 0,\ b = 2$.

6.19sol Seja λ o valor próprio de A e μ o valor próprio de B, então $\mu = \lambda - \alpha$.

6.20sol $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 2$.

6.21sol $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

6.22sol $y_1(t) = 25\, e^{-\frac{2}{25}t} + 15\, e^{-\frac{6}{25}t}$.

$y_2(t) = 50\, e^{-\frac{2}{25}t} - 30\, e^{-\frac{6}{25}t}$.

B.7 Soluções dos Exercícios do Capítulo 7 (Geometria Analítica)

7.31sol (a) i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(-2, 1, -1), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

(b) i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, -1, 2), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

(c) i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, -1, 0), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1}, z = 3$.

(d) i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, 0, 0), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $y = 2, z = 3$.

7.32sol

(a) $x + 2y + 3z = 4$.

(b) $3y - 2z = -2$.

(c) $x + 2y = 5$.

(d) $x - y - z = -1$.

7.33sol

(a) $x = 1, y - z = -1$.

(b) $x = 0, y - z = 2$.

(c) $3x + y - z = 2$.

(d) $x = 1$.

(e) A recta r pertence ao plano α.

7.43sol

(a) $\angle(r, s) = \frac{\pi}{6}$.

(b) $\angle(\alpha, r) = arcsen(\frac{\sqrt{10}}{5})$.

(c) $\angle(\alpha, \beta) = arccos(\frac{\sqrt{15}}{5})$.

(d) $2x - y = 0, z = 3$.

(e) $d(A, \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(f) $d(B, s) = \frac{\sqrt{66}}{3}$.

(g) $2x - y + z = 3$.

7.77sol

(a) Elipsóide.

(b) Esfera.

(c) Hiperbolóide de uma folha.

(d) Hiperbolóide de duas folhas.

(e) Parabolóide elíptico.

(f) Parabolóide circular.

(g) Parabolóide hiperbólico.

(h) Cone.

(i) Parabolóide elíptico.

(j) Cilindro elíptico.

(k) Cilindro parabólico.

(l) Cilindro hiperbólico.

(m) Parabolóide elíptico.

(n) Cone.

(o) Hiperbolóide de uma folha.

(p) Cilindro circular.

Índice Remissivo