

Parte I

As respostas às questões colocadas devem ser **todas cuidadosamente justificadas**

Duração: 1,5 horas

Exercício 1. Considere três funções definidas por

$$f(x, y) = \sqrt{|1 - x^2 - y^2|}, \quad g(x, y) = (-y^2 + x^2) e^{1-x^2-y^2} \quad \text{e} \quad h(x, y) = \sin x \sin y.$$

Considere também as seguintes representações gráficas:

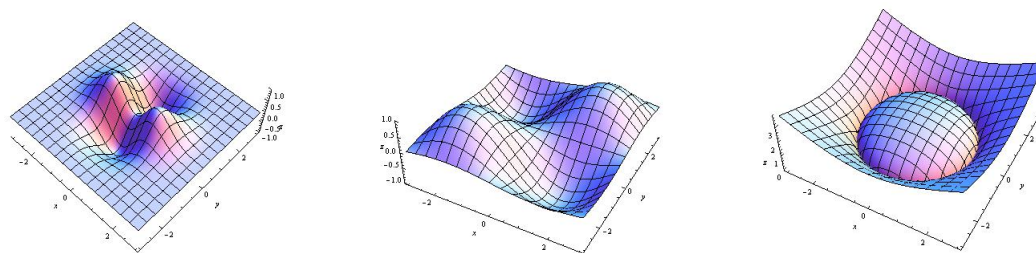


Figura 1: Gráficos A, B e C, respetivamente.

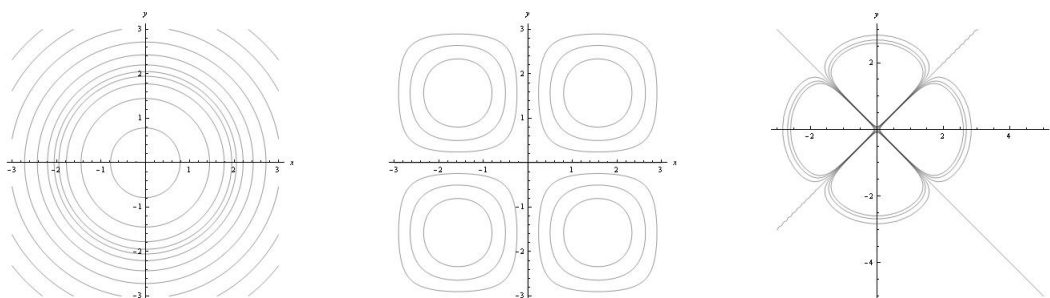


Figura 2: Diagramas de Curvas de Nível a, b e c, respetivamente.

- [2 valores] Estabeleça as correspondências apropriadas entre cada gráfico e o respetivo diagrama de curvas de nível.
- [2 valores] Estabeleça as correspondências apropriadas com cada uma das funções f , g e h .
- [2 valores] Indique e esboce, justificando, o domínio da função $\frac{1}{f}$.
- [2 valores] Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y), g(x, y))$.
- [2.5 valores] Calcule a derivada direcional de h no ponto $(1, 1)$, segundo o vetor $(1, 2)$.
- [2.5 valores] Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- [2 valores] Mostre que a função h satisfaz a equação $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + h = 0$.

Exercício 2. Considere a função definida por $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$

- [2.5 valores] Mostre que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$ não existe, considerando (x, y, z) a tender para $(0, 0, 0)$ ao longo da curva definida por $x = t^2$, $y = t$ e $z = t$.
- [2.5 valores] Calcule, pela definição, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 1)$.



Parte II

As respostas às questões colocadas devem ser **todas cuidadosamente justificadas** Duração: 1,5 horas

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$

- a) [2 valores] Mostre que $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (1, -1)$ são os pontos críticos de f .
- b) [2 valores] Classifique os pontos críticos A e B .
- c) [2 valores] Seja $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\}$. Calcule o máximo de f restrita ao conjunto K .

Exercício 2. Considere o integral $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{-x^2+2x}} y \, dy \, dx.$

- a) [2 valores] Esboce o domínio de integração.
- b) [2 valores] Inverta a ordem de integração.
- c) [2 valores] Calcule o integral.

Exercício 3. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 3, (x-2)^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$

- a) [2 valores] Escreva um integral triplo, em coordenadas cartesianas, que represente o volume de V .
- b) [2 valores] Calcule, em coordenadas cilíndrica, o volume de V .

Exercício 4. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z, xy, z).$

- a) [2 valores] Mostre que o campo de vetores \vec{F} não é conservativo.
- b) [2 valores] Calcule $\int_c \vec{F} \cdot ds$, sendo c o segmento de reta que une o ponto $(1, 1, 1)$ ao ponto $(2, 2, 2)$.

Preencha, com os seus dados e a sua situação, a tabela seguinte e entregue o enunciado ao docente vigilante:

Nome

Número

Parte I

Parte II