11. Indutância

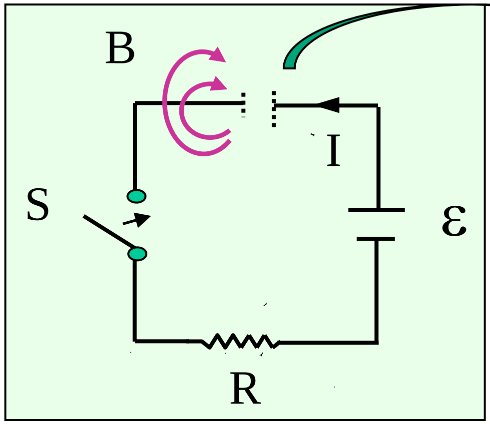
- Induzem-se correntes e fems, num circuito, quando o ϕ_m através do circuito varia com o tempo.
- Auto-indução: quando uma corrente num condutor, variável no tempo, induz uma fem no próprio condutor, que se opõe à fem externa que provoca a I original.

  ⮝ este efeito é a base do indutor: papel importante nos circuitos com correntes variáveis no tempo.

- Energia no campo magnético dum indutor e densidade de energia num campo magnético.
- Indução mútua: induzir uma fem num circuito pela acção dum fluxo magnético variável originário dum circuito externo.

11.1. Auto-Indutância

Circuito isolado: interruptor S, R e uma fonte de fem.



Símbolo: fonte de fem auto-induzida

- Quando S for fechado, I não passa instantaneamente do 0 para para o seu valor máximo, E/R. $\rightarrow$ Lei de Faraday.
- À medida que I aumenta com o tempo, o ϕ_m através da espira, devida a essa I, também aumenta com o tempo.
- Este ϕ_m crescente induz uma fem que se opõe à variação do fluxo líquido que atravessa a espira do circuito.

- (Lei de Lenz) $\rightarrow$ o $\vec{E}$ induzido nos condutores deve opor-se à direcção da I convencional $\Rightarrow$ essa fem em oposição acarreta um aumento gradual da I.

- Este efeito é a auto-indução: o fluxo variável através do circuito provém do próprio circuito.

- A fem que se estabelece é a fem auto-induzida.

- Descrição quantitativa:

$\rightarrow$ Lei de Faraday: $$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\phi_m \propto \left|\vec{B}\right| \quad e \quad \left|\vec{B}\right| \propto I$$

$\Rightarrow$ a fem auto-induzida é sempre proporcional à taxa temporal de variação da corrente.

- Bobina com N espiras apertadas com geometria fixa (p.e. solenóide, bobina toroidal) $\Rightarrow$

$$\varepsilon = -N\frac{d\phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

L: é a indutância do componente do circuito $\rightarrow$ constante de proporcionalidade que depende de factores geométricos e outras características físicas.

- A L duma bobina com N espiras:

$$L = \frac{N.\phi_m}{I}$$

(o mesmo ϕ_m passa através de cada espira)

- Podemos também escrever:

$$L = -\frac{\varepsilon}{dI/dt}$$

→ Definição da indutância para qualquer bobina, independentemente da forma, tamanho ou material.

- R: medida da oposição dum elemento de circuito à corrente.

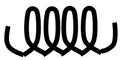
- L: medida da oposição à variação da corrente.

  SI → [L]: henry (H) ; 1 H = 1 V.s/A

- A indutância dum componente depende da geometria do componente.

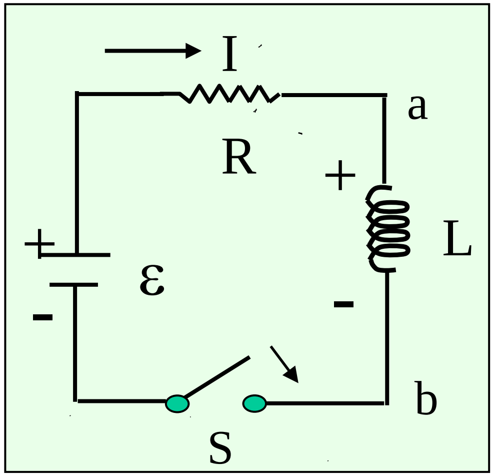
  ⮙ o cálculo pode ser difícil no caso de geometrias complicadas.

11.2. Circuitos RL

- um circuito que tem uma bobina (p.e. Solenóide) $\Rightarrow$ tem uma auto-indutância que impede a I de aumentar ou de diminuir instantaneamente.
- Indutor () : elemento de circuito com L grande.
- Admitimos que a auto-indutância da parte restante de um circuito é desprezável em comparação com a do indutor.
- Consideremos:

S fechado no instante t = 0 $\Rightarrow$ I principiará a aumentar e o indutor provocará uma fem (força contra-electromotriz) que se opõe ao aumento da I.

$\rightarrow$ O indutor actua como uma bateria cuja polaridade fosse oposta à polaridade da bateria real.



•A força contra-electromotriz: $\varepsilon_L = -L\, dI/dt$

I aumentando $\Rightarrow$ $dI/dt > 0$, $\varepsilon_L < 0 \Rightarrow$ queda de potencial através do indutor:

$\boxed{V_a > V_b}$

•Equação das malhas: $\boxed{\varepsilon - IR - L\, dI/dt = 0}$ A

•Para resolver a equação $\Rightarrow$ $x = \varepsilon/R - I$, dx = -dI

•Com esta mudança $\Rightarrow$ A $\rightarrow$

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$

• A integração da : $\ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t$

onde $-\ln x_0$ é a constante de integração

•Tomando o anti-log ⇒ $x = x_0 e^{-Rt/L}$

Quando t = 0, I = 0 ⇒ x_0 = ε / R

⇒A solução da eq. A : $\dfrac{\varepsilon}{R} - I = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$

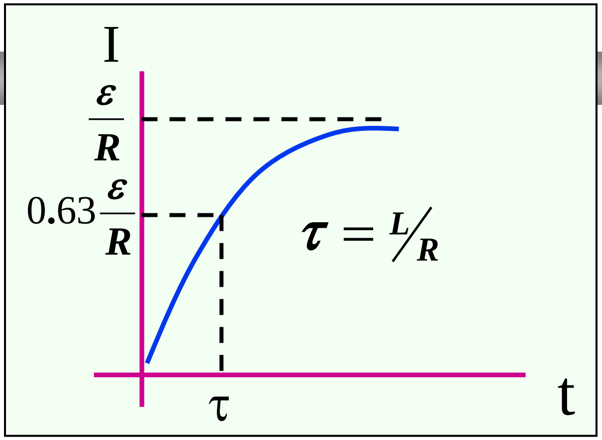
B $$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/z}\right)}$$

onde z é a constante de tempo do circuito: $\boxed{z = L/R}$

τ tem a dimensão dum tempo

τ : intervalo de tempo necessário para a I atingir

$(1 - e^{-1}) = 0.63$ do seu valor final ε / R

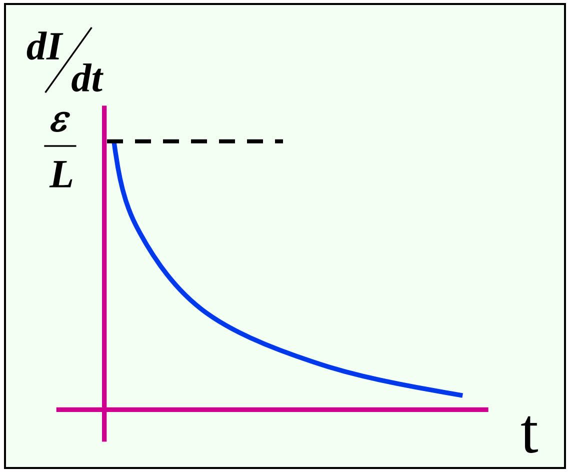


- $I = 0$ no $t = 0$
- $I \to \mathcal{E}/R$ (valor de equilíbrio) quando $t \to \infty$

- Tomando a primeira derivada da equação B:

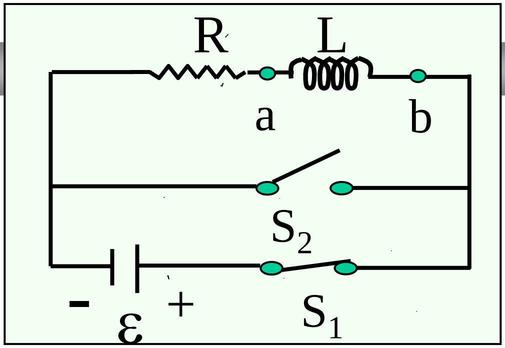
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau}$$

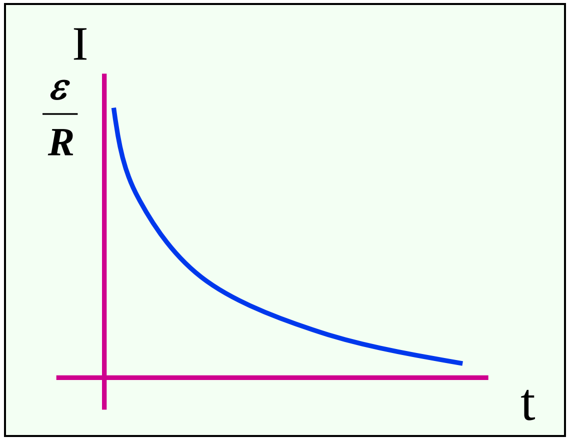
⮝ a taxa de crescimento da I, dI/dt, é máxima (= ε/L) quando t = 0 e cai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$



- Consideremos agora:

  I = ε/R (equilíbrio) ⇒ S_1 aberto e S_2 fechado, no t = 0 temos um circuito que não tem bateria (ε = 0) ⇒





2ª regra de Kirchhoff: $\boxed{IR + L\frac{dI}{dt} = 0}$

solução: $\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

I em t = 0: $I_0 = \varepsilon/R \; ; \; \tau = L/R$

- $dI/dt < 0$ (valor máximo quando t = 0) ⇒ $\varepsilon_L = -L\left(dI/dt\right) > 0$

$\boxed{V_a < V_b}$

11.3. Energia num Campo Magnético

- Uma bateria deve efectuar W contra o indutor para criar uma I.
- Parte da energia fornecida pela bateria dissipa-se no efeito Joule da R e a parte restante da energia fica no indutor.
- Se multiplicarmos eq. A pela corrente I $\Rightarrow$

$$\underbrace{I.\varepsilon}_{\text{taxa a que a bateria fornece energia.}} = \underbrace{R.I^2}_{\text{taxa de dissipação de calor na resistência.}} + \underbrace{L.I.\frac{dI}{dt}}_{\text{taxa de acumulação de energia no indutor.}}$$

- Se U_m: energia no indutor num instante t $\Rightarrow$

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$: taxa de acumulação de energia no indutor

- Energia total acumulada no indutor:

$$dU_m = LIdI \;\rightarrow\; U_m = \int_0^{U_m} dU_m = \int_0^{I} LIdI \quad , \quad \boxed{U_m = \tfrac{1}{2}LI^2}$$

constante

! Semelhante a um condensador : $Q^2/2C$ num $\vec{E}$

- energia acumulada como energia magnética no campo indutor.

- A densidade de energia no campo magnético:

Para um solenóide: $L = \mu_0 n^2 A\ell$ e $B = \mu_0 n I$, $I = \dfrac{B}{\mu_0 n}$

$$\Rightarrow \; U_m = \tfrac{1}{2} L I^2 = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 A\ell \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\underline{(A\ell)}$$

Volume do solenóide

→ Energia por unidade de volume do campo magnético

$$\boxed{u_m = \frac{U_m}{A\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Proporcional ao quadrado do campo.

Válida para qualquer região do espaço onde exista um campo magnético.

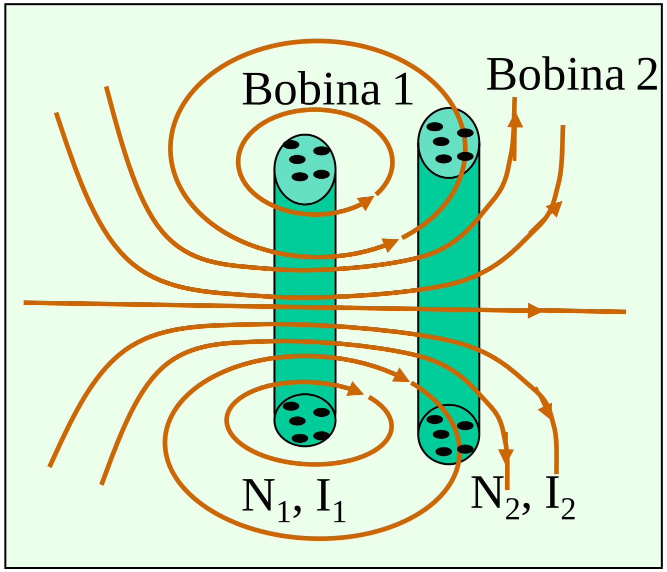
! Energia por unidade de volume num $\vec{E}$: $\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

11.4. Indutância Mútua

- Indução mútua: o ϕ_m através dum circuito varia com o tempo em virtude de correntes variáveis em circuitos vizinhos, o que provoca uma fem induzida.

- Duas bobinas com espiras bem cerradas:

  Bobina 1; N_1 espiras; I_1: cria um $\vec{B}$ do qual algumas linhas passam através da bobina 2, N_2 espiras.



- ϕ_m : o ϕ_m através da bobina 2, provocado pela bobina 1.

- Definimos a indutância mútua M_{21}da bobina 2 em relação à bobina 1:

$$\boldsymbol{M}_{21} \equiv \frac{\boldsymbol{N}_2 \boldsymbol{\phi}_{21}}{\boldsymbol{I}_1}$$

- A indutância mútua depende da geometria dos dois circuitos e da orientação de um em relação ao outro. Se a separação aumenta $\Rightarrow M_{21}$ diminui pois o acoplamento do fluxo também diminui.

- Se I, varia com o tempo $\Rightarrow$ a fem induzida na bobina 2 pela bobina 1 (Lei de Faraday):

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

- Analogamente, se I_2 variar com o tempo, a fem induzida na bobina 1, devida à bobina 2:

$$\varepsilon_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

- Resultados semelhantes, na sua forma, à expressão da fem auto-induzida,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{L}\,{}^{\boldsymbol{dI}}\!/_{\boldsymbol{dt}}$$

- A fem induzida pela indução mútua numa bobina é sempre proporcional à taxa de variação da I na outra bobina.

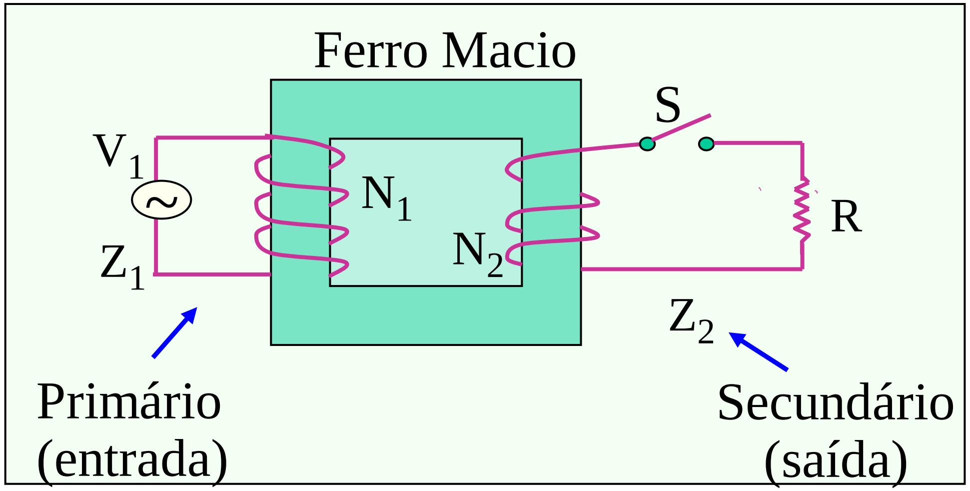
- Se $\quad {}^{dI_1}\!/_{dt} = {}^{dI_2}\!/_{dt} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

- As constantes de proporcionalidade M_{12} e M_{21} pode-se mostrar que são iguais $\Rightarrow$ $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = -\boldsymbol{M}\,{}^{\boldsymbol{dI}_1}\!/_{\boldsymbol{dt}} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = -\boldsymbol{M}\,{}^{\boldsymbol{dI}_2}\!/_{\boldsymbol{dt}}$$

SI : [M] $\rightarrow$ henry

Ap. O transformador e a Transmissão de Potência.



$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -N_1 \, {d\phi_m}/{dt} \\ V_2 &= -N_2 \, {d\phi_2}/{dt} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1}$$

$N_1 > N_2 \Rightarrow V_1 > V_2$ t. elevador

$N_2 < N_1 \Rightarrow V_2 < V_1$ t. redutor perdas por aquecimento

- $P = I^2 R \Rightarrow$ V elevada e I baixa nas linhas de transmissão

(reduz as perdas $I^2 R$)

linhas de 350 kV (765 kV)

Transformador ideal: $\boxed{P = I_1 V_1 = I_2 V_2}$

$$P_{\text{primário}} = P_{\text{secundário}}$$

Transformadores reais: potência no secundário entre 90% e 99% da potência no primário.

- V elevada até ~230.000V na central geradora

$\rightarrow$ abaixada até ~ 20.000 V numa estação distribuidora e

$\rightarrow$ abaixada a 110 – 220 V na rede de atendimento aos consumidores.