Splines

1 Considerando a função $f(x)$ dada pela tabela

x_i	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
f_i	0.0639	0.0800	0.0988	0.1203	0.1442	0.1714	0.2010	0.2331	0.2673	0.3036	0.3414

qual o valor aproximado da função no ponto $x = 5.45$

a) usando uma 'spline' cúbica sem considerar derivadas nos extremos?

$s_3(x) =$

$f(5.45) \approx s_3(5.45) =$

b) usando uma 'spline' cúbica completa?

$s_3(x) =$

$f(5.45) \approx s_3(5.45) =$

2 De uma tabela de logaritmos obteve-se o seguinte quadro de valores.

x_i	1	1.5	2	3	3.5
$\ln(x_i)$	0	0.4055	0.6931	1.0986	1.2528

a) Usando uma função 'spline' cúbica sem usar derivadas nos extremos, calcule uma aproximação a $\ln(2.5)$.

$s_3(x) =$

$f(2.5) \approx s_3(2.5) =$

b) Repita a alínea anterior, mas agora usando uma 'spline' cúbica completa.

$s_3(x) =$

$f(2.5) \approx s_3(2.5) =$

3 Foram registados os consumos de combustível $f(x_i)$, de um automóvel a arrancar em determinados instantes, x_i (em segundos).

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
f_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.8

a) Usando uma função 'spline' cúbica sem usar derivadas nos extremos, calcule o consumo no instante de tempo $x_i = 5$ s.

$s_3(x) =$

$f(5) \approx s_3(5) =$

b) Repita a alínea anterior, mas agora usando uma 'spline' cúbica completa.

$s_3(x) =$

$f(5) \approx s_3(5) =$

Resolução

.1 Começa-se por introduzir a tabela de pontos na forma de dois vetores x e f.

```
>> x=[5 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.7 5.8 5.9 6];
>> f=[0.0639 0.08 0.0988 0.1203 0.1442 0.1714 0.201 0.2331 0.2673 0.3036 0.3414];
```

a) Para determinar splines, usa-se o comando `spline` do MATLAB.

```
>> s3=spline(x,f);
>> s=s3.coefs
s =
    0.0345    0.1246    0.1482    0.0639
    0.0345    0.1350    0.1742    0.0800
   -0.1727    0.1454    0.2022    0.0988
    0.3562    0.0936    0.2261    0.1203
   -0.3521    0.2004    0.2555    0.1442
    0.1521    0.0948    0.2850    0.1714
   -0.1562    0.1404    0.3085    0.2010
    0.0727    0.0936    0.3319    0.2331
   -0.1345    0.1154    0.3528    0.2673
   -0.1345    0.0750    0.3718    0.3036
```

Uma vez que o ponto interpolador é 5.45, o segmento de interesse é o quinto, que corresponde à quinta linha da matriz `s`. O ponto inicial desse segmento é 5.4. Assim,

$s_3^5(x) = -0.3521(x-5.4)^3 + 0.2004(x-5.4)^2 + 0.2555(x-5.4) + 0.1442.$

Para determinar o valor da spline num ponto, usa-se o comando `spline`, mas indicando esse ponto como terceiro argumento de entrada.

```
>> xx=spline(x,f,5.45)
xx =
    0.1574
```

$f(5.45) \approx s_3^5(5.45) = 0.1574.$

b) Para se usar uma spline cúbica completa, têm se se reservar o segundo e penúltimo ponto, que não serão usados na spline. No entanto, serão usados para determinar uma aproximação às derivadas nos extremos.

```
>> d0=(f(2)-f(1))/(x(2)-x(1));
>> dn=(f(11)-f(10))/(x(11)-x(10));
>> s3=spline(x([1,3:9,11]),[d0 f([1,3:9,11]) dn]);
>> s=s3.coefs
s =
    0.2962    0.0083    0.1610    0.0639
   -0.3444    0.1860    0.1998    0.0988
    0.4025    0.0827    0.2267    0.1203
   -0.3656    0.2034    0.2553    0.1442
    0.1600    0.0937    0.2850    0.1714
   -0.1743    0.1417    0.3086    0.2010
    0.1373    0.0894    0.3317    0.2331
   -0.2328    0.1306    0.3537    0.2673
```

O segmento de interesse passa a ser o quarto, que corresponde à quarta linha. O ponto inicial do segmento continua a ser 5.4.

$s_3^4(x) = -0.3656(x-5.4)^3 + 0.2034(x-5.4)^2 + 0.2553(x-5.4) + 0.1442.$

```
>> xx=spline(x([1,3:9,11]),[d0 f([1,3:9,11]) dn],5.45)
xx =
    0.1574
```

$f(5.45) \approx s_3^4(5.45) = 0.1574.$

.2
```
>> x=[1 1.5 2 3 3.5];
>> f=[0 0.4055 0.6931 1.0986 1.2528];
```

a)
```
>> s3=spline(x,f);
>> s=s3.coefs
s =
```

```
    0.0826   -0.3596    0.9702         0
    0.0826   -0.2358    0.6725    0.4055
    0.0189   -0.1120    0.4986    0.6931
    0.0189   -0.0553    0.3313    1.0986
```

O segmento de interesse é o terceiro e o ponto inicial do intervalo é 2.

$s_3^3(x) = 0.0189(x-2)^3 - 0.1120(x-2)^2 + 0.4986(x-2) + 0.6931.$

```
>> xx=spline(x,f,2.5)
xx =
    0.9168
```

$\ln(2.5) \approx s_3^3(2.5) = 0.9168.$

b) A função é conhecida, por isso pode calcular-se a derivada nos extremos. $f'(x) = \frac{1}{x}$.

```
>> d0=1/1;
>> dn=1/3.5;
>> s3=spline(x,[d0 f dn]);
>> s=s3.coefs
s =
    0.1695   -0.4628    1.0000         0
    0.0603   -0.2085    0.6644    0.4055
    0.0225   -0.1181    0.5011    0.6931
    0.0052   -0.0506    0.3324    1.0986
```

Mais uma vez, o segmento de interesse é o terceiro e o ponto inicial do intervalo 2.

$s_3^3(x) = 0.0225(x-2)^3 - 0.1181(x-2)^2 + 0.5011(x-2) + 0.6931.$

```
>> xx=spline(x,[d0 f dn],2.5)
xx =
    0.9169
```

$\ln(2.5) \approx s_3^3(2.5) = 0.9169.$

.3
```
>> x=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 3.6 6.6 9.6 9.8 10];
>> f=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.6 0.6 0.6 0.7 0.8];
```

a)
```
>> s3=spline(x,f);
>> s=s3.coefs
s =
   -0.0091    0.0027    0.9998         0
   -0.0091   -0.0000    1.0001    0.1000
    0.0454   -0.0027    0.9998    0.2000
   -0.1724    0.0109    1.0006    0.3000
    0.6444   -0.0408    0.9976    0.4000
   -2.4051    0.1525    1.0088    0.5000
    0.0822   -0.5691    0.9671    0.6000
   -0.0317    0.1710   -0.2271    0.6000
    0.0448   -0.1148   -0.0586    0.6000
   -0.4803    0.2882    0.4616    0.6000
   -0.4803    0.0000    0.5192    0.7000
```

O segmento de interesse é o oitavo e o ponto inicial deste intervalo é 3.6.

$s_3^8 = -0.0317(x-3.6)^3 + 0.1710(x-3.6)^2 - 0.2271(x-3.6) + 0.6.$

```
>> xx=spline(x,f,5)
xx =
    0.5300
```

$f(5) \approx s_3^8(5) = 0.53.$

b) Reservam-se o segundo e penúltimo pontos para o cálculo da aproximação das derivadas nos extremos.

```
>> s3=spline(x([1,3:10,12]),[d0 f([1,3:10,12]) dn]);
>> s=s3.coefs
```

```
s =

   -0.0054    0.0011    1.0000         0
    0.0429   -0.0021    0.9998    0.2000
   -0.1717    0.0107    1.0006    0.3000
    0.6438   -0.0408    0.9976    0.4000
   -2.4035    0.1524    1.0088    0.5000
    0.0821   -0.5687    0.9672    0.6000
   -0.0314    0.1702   -0.2283    0.6000
    0.0434   -0.1121   -0.0540    0.6000
   -0.3478    0.2782    0.4444    0.6000
```

O segmento de interesse é o sétimo e o ponto inicial do intervalo é 3.6.

$s_3^7 = -0.0314(x-3.6)^3 + 0.1702(x-3.6)^2 - 0.2283(x-3.6) + 0.6.$

```
>> xx=spline(x([1,3:10,12]),[d0 f([1,3:10,12]) dn],5)

xx =

    0.5279
```