1
EX2

Exame de Cálculo I, LEI, 2ª chamada, 1 Fev 2007

1. a) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

b) $A = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

A é limitado porque $A \subset [0, \sqrt{2}]$.

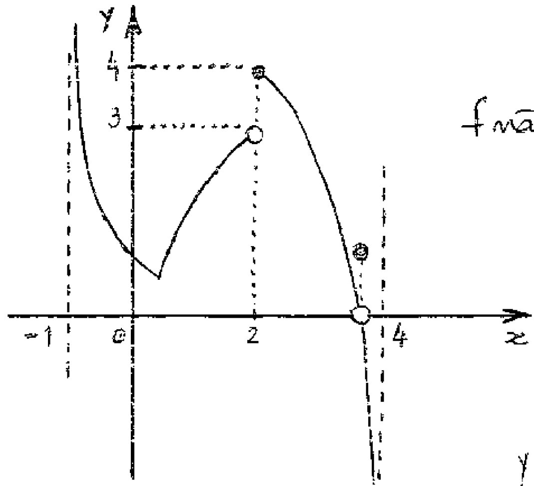
$A \cap \mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

são numeráveis, uma vez que as aplicações

$$n \longmapsto \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad n \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{n}$$

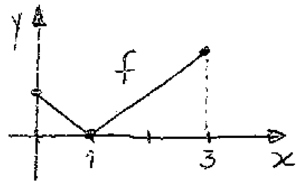
são bijecções de $\mathbb{N}$ para $A \cap \mathbb{Q}$ e $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, respectivamente.

c)



f não é sobrejectiva porque $\nexists\, a \in]-1, 4[: f(a) = 0$.

d) $f(x) = |x-1|, \ \forall x \in [0,3]$



e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ -1 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 (-1)\,dx = 0.$$

2\. a) Proposição falsa.

Para $x = -\frac{3}{2}$, tem-se $|2x^2-5| = \frac{1}{2} < 3$ e, no entanto, $-\frac{3}{2} \notin]1,2[$.

Notar que $|2x^2-5|<3 \Leftrightarrow -3 < 2x^2-5<3 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 2$

$$\Leftrightarrow x \in]-2,-1[\cup]1,2[.$$

b) Proposição falsa.

$$[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = [0,\pi] \setminus \left\{\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \dots\right\}$$

Então o conjunto dado possui mínimo, 0, mas não possui máximo, pois o seu supremo é π que não lhe pertence.

c) Proposição verdadeira.

Ponha-se $f(x) = \cos^2 x - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

→ como f é contínua, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, o teorema de Bolzano garante que f possui, pelo menos, um zero.

→ Este zero é único. De facto, se f possuísse dois zeros, digamos z_1 e z_2, como f é derivável, o teorema de Rolle garantiria que f' iria possuir um zero entre z_1 e z_2. Mas

$$f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x - 3$$

tendo-se $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque $\cos x \operatorname{sen} x \neq -\frac{3}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo f possui um único zero, que equivale a dizer que a equação apresentada possui uma única raiz real.

d) Proposição falsa.

$$\int_0^1 \psi'(t)\cos\psi(t)\,dt = \left[\operatorname{sen}\psi(t)\right]_0^1 = \operatorname{sen}\psi(1) - \operatorname{sen}\psi(0)$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 \neq \frac{\pi}{2}.$$

e) Proposição verdadeira.

O comprimento em causa pode ser dado por

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Mas

$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \left((1-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(-2x)(1-x^2)^{-1/2}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in]-1,1[).$$

Então

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \left[\operatorname{arcsen} x\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arcsen} 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-e^{x}-e^{-x}}{1-\cos^2 x}$ (indeterminação $\frac{0}{0}$)

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-e^{x}-e^{-x})'}{(1-\cos^2 x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{x}+e^{-x}}{2\cos x \operatorname{sen} x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-e^{x}+e^{-x})'}{(2\cos x\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{x}-e^{-x}}{-2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x} = \frac{-2}{2} = -1,$$

conclui-se, pela Regra de L'Hospital, que o limite proposto vale -1.

4a) Seja $G(u) = \int_1^u e^{t^4}\,dt$, $u \in \mathbb{R}$.

G é derivável porque $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua, tendo-se

$$G'(u) = e^{u^4}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

F é derivável porque $F = G \circ h$, com $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$, sendo G e h funções deriváveis. Além disso,

$$F(x) = (G \circ h)(x) = G(x^2) \Rightarrow F'(x) = 2x\, G'(x^2)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2x\, e^{x^8}.$$

b) O polinómio pedido é

$$P_{2,1}(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Mas

$$F(1) = \int_1^1 e^{t^4}\,dt = 0.$$

$$F'(1) \underset{a)}{=} 2x e^{x^8}\Big|_{x=1} \Rightarrow F'(1) = 2e$$

$$F''(1) = \left(2x e^{x^8}\right)'\Big|_{x=1} \Rightarrow F''(1) = 2e^{x^8} + 16x^8 e^{x^8}\Big|_{x=1}$$

$$\Rightarrow F''(1) = 18e,$$

donde

$$P_{2,1}(x) = 2e(x-1) + 9e(x-1)^2.$$

b') Alternativa:

$$P_{2,0}(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2,$$

onde

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = -2e^{-2x}\Big|_{x=0} = -2, \quad g''(0) = 4e^{-2x}\Big|_{x=0} = 4.$$

5\. a) $\int \frac{2+x+e^{\operatorname{angsh} x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{e^{\operatorname{angsh} x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= 2\operatorname{angsh} x + \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{-1/2}\,dx + e^{\operatorname{angsh} x}$

$= 2\operatorname{angsh} x + \sqrt{x^2+1} + e^{\operatorname{angsh} x} + C.$

b) $\frac{4x^2-7x+1}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

$4x^2-7x+1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x^2-1)$

$= (A+B+C)x^2 + (-A-3B)x - 2A + 2B - C$

$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A+3B=7 \\ -2A+2B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases}$

$\int \frac{4x^2-7x+1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$

$= \log|x-1| + 2\log|x+1| + \log|x-2| + C.$

6\. a) $\int_{\sqrt{3}/3}^{3} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \left[x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{3}/3}^{3} - \int_{\sqrt{3}/3}^{3} x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$

$= 3\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \int_{\sqrt{3}/3}^{3} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= 3\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_{\sqrt{3}/3}^{3}$

$= 3\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2}\left(\log 10 - \log\frac{4}{3}\right).$

b) Substituição de variável definida por

$1+x = t^4 \, ; \, t \geq 0,$

donde

$x = t^4 - 1, \; t \geq 0, \quad$ e $\quad g(t) = t^4 - 1, t \geq 0.$

Então $g'(t) = 4t^3, \; t \geq 0,$ e para os limites de integração vem

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = t^4 - 1 \end{cases} \Rightarrow 0 = t^4 - 1 \Rightarrow t^4 = 1 \underset{t \geq 0}{\Rightarrow} t = 1$$

$$\begin{cases} x = 15 \\ x = t^4 - 1 \end{cases} \Rightarrow 15 = t^4 - 1 \Rightarrow t^4 = 16 \underset{t \geq 0}{\Rightarrow} t = 2.$$

Consequentemente,

$$\int_0^{15} x \sqrt[4]{1+x} \, dx = \int_1^2 (t^4 - 1) \, t \, 4t^3 \, dt$$

$$= 4 \int_1^2 (t^8 - t^4) \, dt$$

$$= \frac{4}{9} \left[t^9 \right]_1^2 - \frac{4}{5} \left[t^5 \right]_1^2$$

$$= \frac{4}{9} (2^9 - 1) - \frac{4}{5} (2^5 - 1).$$

7. g é integrável em $[0,1]$ porque g é contínua.
Sendo g uma função contínua, o teorema da média para integrais garante que

$\exists c \in]0,1[$ tal que $\int_0^1 g(t) dt = g(c)(1-0) = g(c),$

ou seja,

$\exists c \in]0,1[$ tal que $\int_0^1 g(t) dt = \int_0^c f(t) dt.$