PARTE I - SELECÇÃO ECONÓMICA DE ALTERNATIVAS

1. Conceitos fundamentais e equações económicas

1.1 Valor do dinheiro no tempo. O conceito de juro.

Os cálculos teóricos económicos aplicados a problemas industriais baseiam-se no conceito de que uma determinada quantidade de dinheiro se torna mais valiosa, isto é, aumenta, à medida que o tempo passa. Este aumento não é senão o interesse ou juro sobre esse capital original que pode ser ganho durante o período de tempo considerado.

Uma noção paralela é a de que o custo do dinheiro é determinado e medido por uma taxa de juro, uma percentagem periodicamente aplicada e adicionada a uma ou mais quantidades de dinheiro ao longo de um determinado período de tempo.

A maneira como a taxa de juro (ou interesse; o uso do termo "interesse" como sinónimo de taxa de juro encontra-se em desuso) opera reflecte o facto de o dinheiro ter um valor que está associado ao tempo. A quantidade de juro depende do tempo e o valor económico de uma quantidade de dinheiro depende do momento em que é transaccionada e tal deve-se ao facto de o dinheiro ter em si o potencial de ganhar mais dinheiro.

O tempo tem assim um valor monetário e compreende-se a importância desta noção na avaliação de investimentos que normalmente se estendem ao longo de um certo tempo. O investidor espera na realidade que o seu investimento, tendo em consideração os dividendos devidos, se vá valorizando. Por outro lado, dentro daquela perspectiva, só será lícito comparar investimentos, custos ou benefícios quando referidos ao mesmo instante.

Qualquer investimento ou projecto envolve uma transacção e qualquer transacção envolve elementos comuns, nomeadamente:

1- Um montante inicial de dinheiro – chamado principal;
2- Uma taxa de juro que mede o custo do dinheiro, ou a valorização do dinheiro, expressa em percentagem;
3- Um período de tempo – chamado o período de capitalização, que determina a frequência com que o juro é calculado;
4- Um período de tempo especificado que estabelece a duração da transacção e consequentemente estabelece um número de períodos de capitalização;
5- Um plano para pagamentos e recebimentos que resulta num determinado padrão de fluxos monetários.

1.2 Juro simples e juro composto. Valor actual e valor futuro.

Existem dois métodos principais para calcular o juro: o método do juro simples e o método do juro composto. No método do juro simples o cálculo do juro incide apenas e sempre sobre o principal. Em geral, um depósito de uma dada quantia de dinheiro P a uma taxa de juro simples $\underline{i}$ para $\underline{n}$ períodos daria um juro total I que seria igual a

$$I = (iP)n$$

A quantia total futura disponível ao fim de n períodos seria

$$S = P(1 + in)$$

Um aspecto a salientar, e que constitui um traço comum das equações que serão apresentadas, é o uso do método do juro composto, ou seja, a valorização conseguida num determinado período de tempo constitui o investimento para o próximo período de tempo. Assim, o juro ganho pelo capital original é adicionado e fica a fazer parte integrada no fim do período considerado, de modo que nos períodos de tempo subsequentes, o juro é ganho não só sobre o capital original mas também sobre todos os pagamentos de juro anteriores.

Seja P uma quantidade de dinheiro no instante presente a que chamamos valor actual e seja $\underline{i}$ a taxa de juro, expresso como número decimal, que a soma P vence anualmente. Assim ao fim de um ano o aumento de capital decorrente da taxa de juro $\underline{i}$ será iP.

Seja S o valor futuro, isto é, o valor de P ao fim de um certo período de tempo. Então ao fim dum ano

$$S_1 = P + iP = P(1+i)$$

Como se usa a noção de juro composto, $P(1+i)$ deverá ser a quantidade de partida para o segundo ano e portanto ao fim deste, o valor futuro será

$$S_2 = P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2$$

Por indução verifica-se facilmente que ao fim de $\underline{n}$ anos

$$S = P(1+i)^n = PF_{PS,i,n} \qquad \text{(I-1)}$$

em que

$$F_{PS,i,n} = (1+i)^n \qquad \text{(I-2)}$$

A expressão (I-1) exprime a LEI DO JURO COMPOSTO e o factor $F_{PS,i,n}$ é um factor de conversão de um valor actual $\underline{P}$ num valor futuro $\underline{S}$ ao fim de $\underline{n}$ anos, à taxa de juro $\underline{i}$, designado por factor do juro composto. Este factor encontra-se tabelado (Apêndice I). Convém ainda notar que $\underline{P}$ é uma quantia única e que a sua valorização se fez discretamente (isto é, por passos, periodicamente). O valor actual P pode ser expresso em termos do valor futuro S como se tira imediatamente da expressão (I-1)

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n} = SF_{SP,i,n} \qquad \text{(I-3)}$$

em que

$$F_{SP,i,n} = (1+i)^{-n}$$
(I-4)

se designa por factor do valor actual e converte um valor futuro em um valor actual, para um período de n anos e uma taxa de juro i (Apêndice I). Note-se que um valor futuro decresce quando convertido a um valor actual que se pode interpretar como um valor descontado daquele. Este termo (descontado) é vulgarmente usado para designar a operação de transformação de um valor futuro no seu equivalente valor actual.

Tem-se ainda que:

$$F_{SP,i,n} = \frac{1}{F_{PS,i,n}} \qquad \text{(I-5)}$$

1.3 O factor do juro composto como um operador.

As relações (I-1) e (I-3) podem combinar-se numa única relação $Q_{t_2} = Q_{t_1}(1+i)^n$ (I-6)

em que Q_{t_2} é a quantia no instante t_2, Q_{t_1} é a quantia no instante t_1, e $\underline{n} = t_2 - t_1$ toma valor positivo ou negativo consoante a conversão desejada é para um tempo futuro ou para um tempo passado. O factor $(1+i)^n$ aparece assim como um operador que desloca a quantia unitária de n anos. Uma representação gráfica de fluxos monetários em função do tempo, como se indica na fig.I-1, ajuda a visualizar aquela relação. Neste gráfico o eixo dos tempos é horizontal e os fluxos monetários posicionam-se em linhas verticais ao longo desse eixo

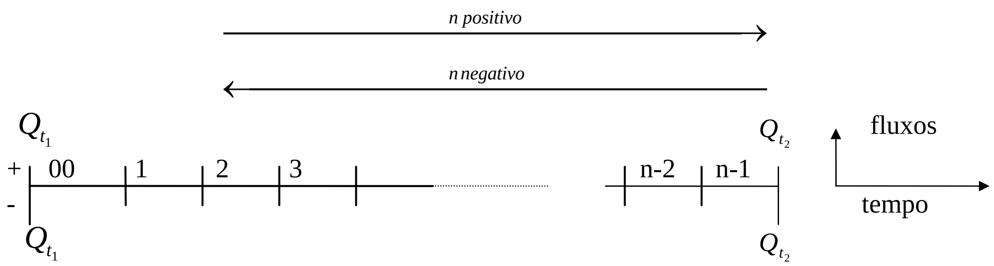


Fig I-1

Os fluxos monetários podem por sua vez ser positivos ou negativos, consoante se trate de recebimentos ou pagamentos. Convenciona-se que as quantidades recebidas (entradas) se indicam acima do eixo dos tempos e as pagas (saídas) abaixo do mesmo eixo.

1.4 Taxa de juro nominal e taxa de juro efectiva.

Nos cálculos económicos industriais, toma-se em geral o ano como o período de tempo unitário e por isso se exprimiu $\underline{n}$ em anos. Se o incremento do capital se fizer em períodos mais curtos, por exemplo p vezes por ano, a expressão (I-1) escrever-se-ia

$$S = P\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np} \qquad \text{(I-7)}$$

pois o número de períodos passa a ser $\underline{np}$ e o juro sobre o capital i/p por período.

A expressão (I-7) pode escrever-se

$$S = P\left[\left(1+\frac{i}{p}\right)^{p}\right]^{n} \qquad \text{(I-7a)}$$

A expressão entre parêntesis curvo representa o valor da quantia unitária ao fim de 1 ano. Chama-se taxa de juro efectiva ao aumento da quantia unitária ao fim de um ano, isto é, a

$$\left(1+\frac{i}{p}\right)^{p} - 1 = i_{ef} \qquad \text{(I-8)}$$

Esta taxa de juro efectiva pode-se usar como se a valorização se fizesse uma vez por ano em vez de p vezes por ano. Para evitar ambiguidades designa-se então $\underline{i}$ por taxa de juro nominal.

Quando p tende para infinito, isto é, quando a valorização se faz continuamente

$$\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{i}{p}\right)^{p} = e^{i}$$

e a relação entre P e S passa a ser

$$S = P\,e^{in} \qquad \text{(I-9)}$$

ou

$$P = S\,e^{-in} \qquad \text{(I-10)}$$

e o operador do juro composto passa a ser o factor e^{in} (juro composto contínuo).

Deve notar-se que as expressões (I-1), (I-7) e (I-9) dão, como seria de esperar resultados diferentes, se bem que a diferença seja relativamente pequena. Assim o factor $F_{PS,i,1}$ toma, para $i = 0{,}06$ respectivamente os valores $1{,}06000, 1{,}0613635, i{,}0616778, 1{,}0618305\ e\ 1{,}0618365$ quando a valorização se faz anualmente $(p = 1)$, trimestralmente $(p = 4)$, mensalmente $(p = 12)$, diariamente $(p = 365)$ e continuamente $(p = \infty)$.

Resta acrescentar que o valor de i varia com numerosos factores interdependentes, sendo essencialmente determinado pelo risco envolvido no empreendimento em causa. Mais à frente abordaremos esta questão.

1.5 <u>Custo anual uniforme.</u>

Considere-se uma quantia uniforme paga ou recebida todos os anos, no fim de cada ano, durante n anos (fig. I-2)

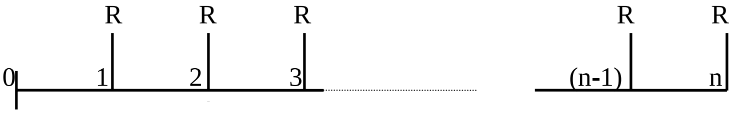


FIGURA I-2

Designamos R por <u>custo anual uniforme</u>. O termo custo deve entender-se num sentido algébrico, pois a mesma designação se aplicará a um benefício anual uniforme.

Pode-se substituir esta série de termos por um único valor actual P, deslocando-os para o tempo zero usando a expressão de conversão (I-3)

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} = R\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^m} \qquad \text{(I-11)}$$

Em (I-11) o somatório representa a soma de uma série geométrica u_n de n termos e razão $r = 1/(1+i)$. Como a soma de uma progressão geométrica é dada por $u_1\left[\left(l - r^n\right)/\left(l - r\right)\right]$ tem-se

$$P = R\frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)}\left(\frac{1}{1+i}\right)$$

ou

$$P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = RF_{RP,i,n} \qquad \text{(I-12)}$$

Em que

$$F_{RP,i,n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \qquad \text{(I-13)}$$

se designa por factor de anuidade - valor actual, cujos valores se encontram tabelados (Apêndice I).

Utilizando a expressão (I-12) pode-se exprimir R em função de P.

$$R = P\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = PF_{PR,i,n} \qquad \text{(I-14)}$$

em que

$$F_{PR,i,n} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \qquad \text{(I-15)}$$

é o factor de recuperação de capital, assim designado porque converte um único custo no tempo zero a uma série equivalente de pagamentos anuais durante $\underline{n}$ anos; esta série repõe a quantia inicial com o respectivo juro. Este factor encontra-se tabelado para vários valores de $\underline{i}$ e de $\underline{n}$ (Apêndice I).

É evidente que

$$F_{PR,i,n} = \frac{1}{F_{RP,i,n}} \qquad \text{(I-16)}$$

A partir das equações (I-1) ou (I-3) e (I-12) ou (I-14) estabelecem-se facilmente relações entre o custo anual uniforme R e o valor futuro S

Assim tem-se

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} = RF_{RS,i,n} \qquad \text{(I-17)}$$

em que

$$F_{RS,i,n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \text{(I-18)}$$

é designado por factor de anuidade - valor futuro.

Também

$$R = S\,\frac{i}{(1+i)^n - 1} = SF_{SR,i,n} \qquad \text{(I-19)}$$

em que

$$F_{SR,i,n} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad \text{(I-20)}$$

é chamado <u>factor do fundo de liquidação</u>.

É evidente ainda que

$$F_{SR,i,n} = \frac{i}{F_{RS,i,n}} \tag{I-21}$$

Nem $F_{RS,i,n}$ nem $F_{SR,in}$ se encontram tabelados, mas os seus valores podem obter-se a partir de valores tabelados dos factores de conversão definidos anteriormente, com o auxilio das seguintes relações que se deduzem da forma de (I-2), (I-7), (I-13), (I-15), (I-18) e (I-20):

$$F_{RS,i,n} = F_{RP,i,n}(1+i)^n = F_{RP,i,n}F_{PS,i,n} \tag{I-22}$$

$$F_{SR,i,n} = (1+i)^{-n}F_{PR,i,n} = F_{SP,i,n}F_{PR,i,n} \tag{I-23}$$

Na equação (I-19), se $S \equiv P$, a anuidade R representa o fluxo anual uniforme (referido ao fim do ano) necessário para repor apenas a quantia $S \equiv P$, isto é, sem juro; daí a designação de fundo de liquidação.

A anuidade uniforme poder ser referida ao principio do ano, embora tal grandeza seja menos utilizada em cálculos económicos; representá-la-emos pelo símbolo R_P. As relações entre R_P e P ou S deduzem-se de forma similar às de entre R e estas grandezas.

No quadro I-1 resumem-se as relações entre P, S, R e R_P, que se utilizarão frequentemente nas alíneas seguintes, nomeadamente as equações envolvendo P, e S ou R.

Tanto $\underline{n}$ como $\underline{i}$ podem aparecer como variáveis a determinar, para o que se utilizarão as mesmas equações, porém sob uma forma mais conveniente. Assim a equação (I-1) pode escrever-se

$$n \quad 1n(1+i) = 1n\frac{S}{P} \tag{I-24}$$

que permite determinar directamente $\underline{n}$ ou $\underline{i}$, dada respectivamente a relação S/P e $\underline{i}$ ou a relação S/P e $\underline{n}$.

Também de (I-14) se deduz

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-(P/R)i} \tag{I-25}$$

de onde se pode calcular directamente o valor de n

$$n = \frac{-1n\left[1-\left(P/R\right)i\right]}{1n\left(1+i\right)} \tag{I-26}$$

Quando a taxa de juro seja a incógnita o seu cálculo poderá ser feito através com o auxílio de máquinas calculadoras, de computadores, ou então através de métodos mais clássicos, como por exemplo, graficamente ou por um método iterativo.

Em qualquer dos casos é sempre possível determinar aproximadamente $\underline{n}$ ou $\underline{i}$ recorrendo às tabelas e interpolando.

Há situações em que, no mesmo problema, se usam duas taxas de juro diferentes, como por exemplo no caso de um recurso natural que se esgota ao fim de um certo tempo. O investidor pode usar um fundo de liquidação para regenerar o capital investido, sem juro, ao fim dos $\underline{n}$ anos que constituam a vida do recurso natural; se for R'' esta anuidade e $\underline{i}$ a respectiva taxa de juro tem-se de (I-19).

$$R'' = P \frac{i''}{(1+i'')^n - 1}$$

em que P é o investimento original.

A outra anuidade R' será o juro sobre o investimento original constante de valor P que o investidor obtém para o empreendimento; se i' for esse juro sobre o capital, designado por interesse ou taxa de juro estipulado

$$R' = P\, i'$$

A anuidade uniforme total será pois

$$R = R'' + R' = P \frac{i''}{(1+i'')^n - 1} + P\, i \qquad \text{(I-27)}$$

ou

$$P = R \frac{(1+i'')^n - 1}{i' \left[(1+i'')^n - 1\right] + i''} \qquad \text{(I-27a)}$$

As equações (I-27) são conhecidas por fórmulas de Hoskold. Quando $i' = i'' = i$ estas equações reduzem-se às equações (I-12) e (I-14). Em geral $i' > i''$ e então o valor da taxa de juro obtido através da equação (I-12) é maior do que a taxa de juro estipulada.

1.6 Custo capitalizado.

Suponhamos que a anuidade uniforme R constitui uma série perpétua de fluxos monetários anuais. O respectivo valor actual designa-se por <u>custo capitalizado</u> P_∞ e pode determinar-se facilmente a partir da equação (I-14), atendendo a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = i$$

Tem-se $$P_\infty = \frac{R}{i} \qquad \text{(I-28)}$$

Esta expressão é útil para calcular o custo capitalizado (valor actual) de uma série de reparações anuais ou custos operatórios anuais que têm de ser despendidos por um número indefinido de anos no futuro a fim de assegurar a continuidade de um determinado serviço.

QUADRO I - 1

Relações básicas entre S, P e R

Nº	Conversão	Relação algébrica	Relação por factor	Nome do factor
1	P para S	$S = P\ (1+i)^n$	$S = P\ F_{PS,i,n}$	Factor de juro composto
2	S para P	$P = S\ (1+i)^{-n}$	$P = S\ F_{SP,i,n}$	Factor do valor actual
3	R para P	$P = R\ \dfrac{(1+i)^n - 1}{i\ (1+i)^n}$	$P = R\ F_{RP,i,n}$	Factor do valor actual da anuidade uniforme
4	P para R	$R = P\ \dfrac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$R = P\ F_{PR,i,n}$	Factor de recuperação do capital
5	R para S	$S = R\ \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	$S = R\ F_{RS,i,n}$ $S = R\ F_{RP,i,n} F_{PS,i,n}$	Factor do valor futuro da anuidade uniforme
6	S para R	$R = S\ \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$	$R = S\ F_{SR,i,n}$ $R = S\ F_{SP,i,n} F_{PR,i,n}$	Factor do fundo de liquidação
7	R_p para P	$P = R_p (1+i) \dfrac{(1+i)^n - 1}{i\ (1+i)^n}$	$P = R_p\ (1+i)\ F_{RP,i,n}$	
8	P para R_p	$R_p = \dfrac{P}{1+i}\ \dfrac{i\ (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$R_p = \dfrac{P}{1+i}\ F_{PR,i,n}$	
9	R_p para S	$S = R_p\ (1+i)\ \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	$S = R_p\ (1+i)\ F_{RS,i,n}$ $S = R_p\ (1+i)\ F_{RP,i,n} F_{PS,i,n}$	
10	S para R_p	$R_p = \dfrac{S}{1+i}\ \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$	$R_p = S\ \dfrac{1}{1+i}\ F_{SR,i,n}$ $R_p = S\ \dfrac{1}{1+i}\ F_{SP,i,n} F_{PR,i,n}$	

1.7 Equivalência.

Nas noções expostas anteriormente bem como nas equações económicas deduzidas está subjacente a equivalência entre as grandezas definidas, nomeadamente o valor actual, o valor futuro e o custo anual uniforme, para descrever um determinado fluxo monetário, num dado período de tempo e a uma dada taxa de juro sobre o capital. Por outras palavras, uma operação económica pode ser caracterizada indiferentemente em termos do seu valor actual, do seu valor futuro ou de uma série de anuidades uniformes.

Este importante conceito de equivalência pode ilustrar-se com um exemplo simples. Suponha-se que se contrai um empréstimo de $1000\,UM$ [*], por um período de 5 anos e à taxa de juro anual de 10%. Se o pagamento se fizer de uma vez só daqui a cinco anos, a quantia a entregar será

$$S = PF_{Ps,0.1,5} = 1000 \times 1{,}6105 = 1610{,}5\ UM$$

O empréstimo poderia também ser liquidado em anuidades uniformes de valor

$$R = PF_{PR,0.1,5} = 1000 \times 0{,}26380 = 263{,}8\ UM\ /\ ano$$

Tanto as $263{,}8\,UM$ anuais como as $1610{,}5\,UM$ ao fim de cinco anos repõem o valor inicial de $1000\ UM$ mais o respectivo juro, à taxa de 10% ano. Por isso se diz que os dois processos de pagamento são equivalentes entre si e ao valor actual de $1000\ UM$. Note-se que o devedor, no segundo esquema, só paga $1319\ UM$ o que se explica por não dispor das $1000\ UM$ durante os 5 anos, pois todos os anos vai reduzindo a sua dívida. O credor, por sua vez, deve reinvestir estes pagamentos anuais à mesma taxa de juro para recuperar o empréstimo de $1000\ UM$ e respectivo juro; na realidade

$$S = R\,F_{RS,0.1,5} = R\,F_{RP,0.1,5}F_{PS,0.1,5} = 263{,}8 \times 3{,}7908 \times 1{,}6105 = 1610{,}5 \quad UM$$

O pagamento anual uniforme também se pode interpretar como composto por duas parcelas. Uma correspondente a regenerar o empréstimo inicial sem juro (expressão I-19)

$$R'' = P\frac{i}{(1+i)^n - 1} = 1000 \times 0{,}16380 = 163{,}8\ UM\ /\ ano$$

(com $i = 0{,}1$ e $n = 5$)
e outra que representa o juro sobre o capital emprestado

$$R' = P\,i = 1000 \times 0{,}10 = 100\,UM\ /\ ano$$

Como seria de esperar:

$$R = R' + R'' = 100 + 163{,}8 = 263{,}8\,UM\ /\ ano$$

Far-se-á ainda a aplicação das equações apresentadas a dois problemas de índole diferente, o segundo dos quais directamente relacionado com a análise de custos industriais.

---

[*] Emprega-se o termo "unidades monetárias" e o símbolo UM para exprimir quantidades de dinheiro, em vez de uma particular moeda.

(i) Acções

Como se sabe, as acções são emitidas por firmas com o objectivo de conseguir capital (empréstimo) e o seu preço está sujeito à lei da oferta e procura. São compradas por investidores que esperam obter nesse investimento um determinado juro sobre o capital empregue. A acção é um papel impresso que indica o valor da acção, o modo como o juro é pago e a data em que a firma tem de pagar o valor da acção; a firma vai assim pagando o empréstimo e o comprador recuperando o seu capital com juro.

Uma acção de valor facial $1000\,UM$, devida em 10 anos, à taxa de juros anual de 8%, pagável semestralmente, constitui uma promessa pelo seu emissor de pagar $40\,UM$ de seis em seis meses durante dez anos e $1000\,UM$ no fim de dez anos. O valor actual destes fluxos monetários é

$$P = 40F_{RP,0.04,20} + 1000F_{SP,0.04,20} = 40 \times 1.3,590 + 1000 \times 0,45639 = 1000\ UM$$

que é o empréstimo feito inicialmente.

Se o comprador pretender uma taxa de juro sobre o seu investimento superior a 8%, por exemplo 12% ao ano, só lhe convirá comprar aquelas acções no mercado por um preço inferior ao valor facial, concretamente por

$$P = 40F_{RP,0.06,20} + 1000F_{SP,0.06,20} = 40 \times 11,470 + 1000 \times 0,31180 = 770,6\ UM$$

(ii) Valor de um serviço

Um serviço prestado por uma instalação acarreta custos de diferente natureza, que se podem classificar essencialmente em despesas de investimento e despesas de laboração. As equações anteriores permitem caracterizar economicamente um serviço por meio de uma só grandeza.

Considere-se uma instalação de bombagem que custa $1000\,UM$ e que terá despesas anuais de $200\,UM$ (referidas ao fim do ano) englobando mão de obra, energia e manutenção. Supondo que a vida da instalação é de 10 anos e que a taxa de juro anual adoptada é 6%, o valor actual das despesas anuais é

$$P'' = 200F_{RP,0.06,10} = 200 \times 7,3601 = 1472\ UM$$

O valor actual do investimento é $P' = 1000\ UM$ e portanto o valor actual do serviço (um custo) é

$$P = P' + P'' = 1000 + 1472 = 2472\,UM$$

Este serviço podia caracterizar-se também por um custo anual uniforme, para o que basta converter o investimento inicial numa anuidade uniforme pela equação (I-14) e adicionar a esta as despesas anuais $R'' = 200\,UM$

$$R' = P'\ F_{PR,\,0.06,\,10} = 1000 \times 0,13587 = 135,9\,UM\ /\ ano$$

O custo anual uniforme do serviço é portanto

$$R = R' + R'' = 135,9 + 200 = 335,9\ UM\ /ano$$

O valor actual deste R é

$$P = 335{,}9 F_{RP,0.06,10} = 335{,}9 \times 7{,}3601 = 2472\ UM$$

o que mostra a equivalência dos dois métodos de caracterizar um serviço.

O custo capitalizado também pode ser utilizado para este fim. Recorrendo ao mesmo exemplo, se a instalação de bombagem tivesse de trabalhar perpetuamente, haveria que considerar uma outra despesa anual uniforme correspondente à recuperação do custo da instalação de dez em dez anos. Pela expressão do fundo liquidação (I-19), essa despesa anual uniforme é

$$R''' = 1000\ F_{SR,\,0.06,\,10} = 1000 \times 0{,}075868 = 75{,}9\ UM\ /\ ano$$

A anuidade uniforme total é

$$R_\infty = R'' + R''' = 275{,}9$$

e o correspondente custo capitalizado, de (I-28),

$$P_\infty = \frac{275{,}9}{0{,}06} = 4598\ UM$$

O custo capitalizado total do serviço obtém-se adicionando a este valor o custo inicial da instalação

$$P + P_\infty = 1000 + 4598 = 5598\ UM$$

2. Comparação de Custos

2.1. <u>Tipo de custos afectando uma máquina</u>

Define-se aqui máquina num sentido lato, significando qualquer investimento que se traduz num equipamento que presta um determinado serviço.

Uma máquina tem um perfil de custos no tempo que difere em geral do de outra máquina prestando o mesmo serviço. Os custos a considerar num tal perfil, por complexo que seja, podem resumir-se aos seguintes tipos:

I. Custo inicial (C_i) - custo inicial da máquina com vida de $\underline{n}$ anos (despesa de investimento)

II. Custo anual uniforme (R) - despesas regulares devidas ao funcionamento da máquina. Estas despesas distribuem-se normalmente ao longo do ano, mas exprimem-se como um custo equivalente referido ao fim do ano (R) ou também, mas menos frequentemente, referido ao princípio do ano (R_P).

   Podem ocorrer também benefícios anuais uniformes. A sua natureza é semelhante à de um custo anual uniforme, sendo apenas algebricamente do sinal contrário (R')

III. Custo irregular (C_x) - despesa irregular que se verifica no ano x e que se pode exprimir como um custo equivalente referido ao fim desse ano (C_{fx}) ou referido ao princípio desse ano (C_{px})

IV. Custo inicial não depreciável (C_{nd}) - despesa de investimento que não é susceptível de amortização, por se referir a um artigo considerado com vida eterna (por exemplo, um terreno)

V. Valor de sucata ou valor residual (C_L) - benefício resultante da venda ou aproveitamento da máquina no fim da sua vida, isto é, ao cabo de $\underline{n}$ anos.

Na figura (I-3) representa-se esquematicamente estes tipos de custos num diagrama de fluxos monetários – tempo

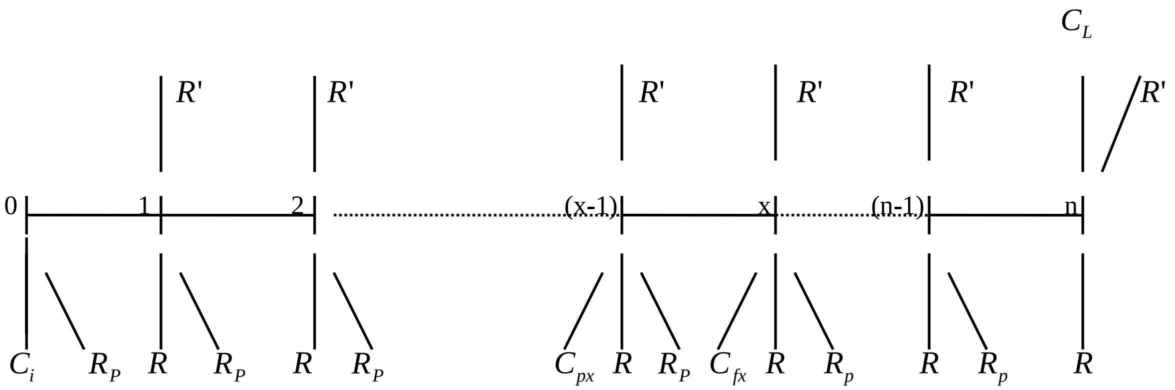


Fig. I-3

No Quadro I-2 indica-se a expressão do valor actual, da anuidade uniforme e do custo capitalizado relativos aos custos típicos indicados atrás.

QUADRO I - 2
Tipos de custos e sua expressão em termos de valor actual, custo anual e custo capitalizado

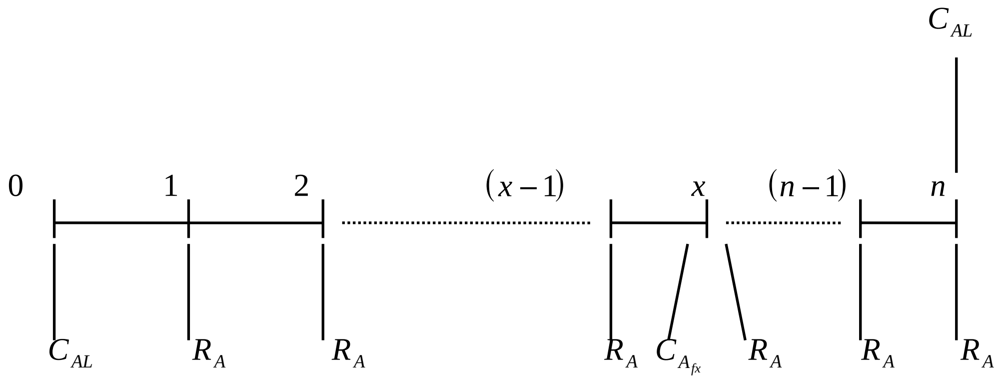
Nº	Tipo de Custo	Valor actual (como custo ao longo de n anos)	Custo anual uniforme		Custo capitalizado	
			Expressão algébrica	Expressão com factor	Expressão algébrica	Expressão com factor
1	C_i Custo inicial para vida de $\underline{n}$ anos	C_i	$C_i \dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$C_i\ F_{PR,\,i,\,n}$	Multiplicar a expressão algébrica correspondente do custo anual uniforme por $\dfrac{1}{i}$	$C_i\ F_{PP\infty,\,i,\,n}$
2	R Custo anual uniforme no fim do ano	$R\,\dfrac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}$	R	$R\,1$ (o factor é a unidade)		$R\,\dfrac{1}{i}$
3	R_p Custo anual uniforme no princípio do ano	$R_p(1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n}$	$R_p\,(1+i)$	$R_p(1+i)$		$R_p\ F_{PP\infty,\,i,\,1}$
4	C_{fx} Custo irregular no fim do ano $\underline{x}$ para artigo durando $\underline{n}$ anos	$C_{fx}\,\dfrac{1}{(1+i)^x}$	$C_{fx}\,\dfrac{1}{(1+i)^x} \bullet \dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$C_{fx}\,\dfrac{1}{(1+i)^x}\,F_{PR,\,i,\,n}$		$C_{fx}\,\dfrac{1}{(1+i)^x}\,F_{PP\infty,\,i,\,n}$
5	C_{px} Custo irregular no princípio do ano $\underline{x}$ para artigo durando $\underline{n}$ anos	$C_{px}\,\dfrac{1}{(1+i)^{x-1}}$	$C_{px}\,\dfrac{1}{(1+i)^{x-1}} \bullet \dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$C_{px}\,\dfrac{1}{(1+i)^{x-1}}\,F_{PR,\,i,\,n}$		$C_{px}\,\dfrac{1}{(1+i)^{x-1}}\,F_{PP\infty,\,i,\,n}$
6	C_{nd} Custo não amortizável (terreno, artigo eterno)	$C_{nd}\,\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$	$C_{nd}\,i$	$C_{nd}\,i$		$C_{nd}\,1$ (o factor é a unidade)
7	C_L Valor de sucata ao fim do ano $\underline{n}$	$-\,C_L\,\dfrac{1}{(1+i)^n}$	$-\,C_L\,\dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$	$-\,C_L\,\dfrac{1}{(1+i)^n}\,F_{PR,\,i,\,n}$		$-\,C_L\left(F_{PP\infty,\,i,\,n} - 1\right)$ ou $-\,C\,\dfrac{1}{(1+i)^n}\,F_{PP\infty,\,i,\,n}$
8	C_i Custo inicial e C_L Valor de sucata tomados juntamente	$\left(C_i - C_L\right) + C_L \bullet \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$	$\left(C_i - C_L\right)\dfrac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + i\ C_L$	$\left(C_i - C_L\right)F_{PR,\,i,\,n} + i\ C_L$		$\left(C_1 - C_L\right)F_{PP\infty,\,i,\,n} + C_L$

2.2 Comparação de máquinas com igual duração

Na alínea 1 introduziram-se os conceitos básicos e as ferramentas necessárias para se fazer a comparação económica de duas ou mais máquinas, tema que constitui o objecto da presente alínea. Na realidade, já se viu como se pode caracterizar o valor de um serviço utilizando o conceito de valor actual, anuidade uniforme ou custo capitalizado. A comparação económica de duas (ou mais) máquinas reduz-se assim a calcular na mesma base temporal os valores dos respectivos serviços através dos seus perfis de custos (diagramas de fluxos monetários - tempos), utilizando uma daquelas grandezas, e compará-los entre si: a máquina mais económica será a que apresentar um custo mais baixo.

No caso de máquinas de igual duração, só há assim que calcular o valor actual do custo do serviço prestado por cada máquina ao longo da sua vida visto que esta é a mesma para as máquinas em análise.

Considere-se por exemplo as máquinas A e B com os seguintes perfis de custo:



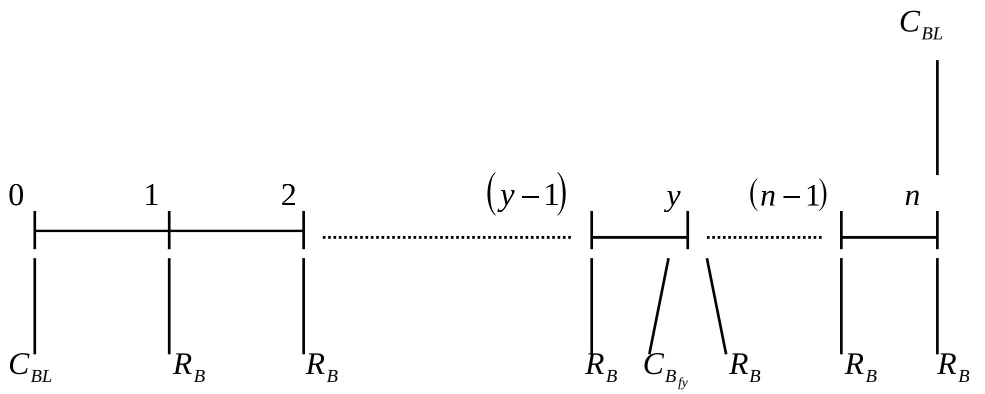


Fig. I-4

O valor actual dos custos do serviço da máquina A será

$$P_A - C_{Ai} + R_A \; F_{RP,\,i\,,\,n} + C_{Afx} \; F_{SP,\,i\,,\,x} - C_{AL} \; F_{SP,\,i\,,\,n} \qquad \text{(I-29)}$$

em que i é a taxa de juro adoptada para o estudo comparativo (em geral, o juro sobre o capital que a empresa obtém ou espera obter nos seus empreendimentos)

Identicamente para a máquina B

$$P_B = C_{Bi} + R_B F_{RP,\,i\,,\,n} + C_{Bfy} \; F_{SP,\,i\,,\,y} - C_{BL} F_{SP,\,i\,,\,n} \qquad \text{(I-30)}$$

Para seleccionar a máquina mais económica basta comparar P_A com P_B.

Poder-se-ia evidentemente utilizar o custo total anual uniforme de cada máquina como termo de comparação; para isso bastaria converter, no caso da máquina A, C_{Ai}, C_{Afx} e C_{AL} em anuidades uniformes e somá-las a R_A, e no caso da máquina B, converter $C_{Bi,}$ C_{Bfx} e C_{BL} em anuidade uniformes e somá-las a R_B:

$$\Re_{\mathrm{A}} = C_{\mathrm{Ai}} \; F_{PR,i,n} + R_A + C_{Afx} \; F_{SP,i,x} \; F_{PR,i,n} - C_{\mathrm{AL}} \; F_{SR,i,n}$$

$$\Re_B = C_{Bi} \; F_{PR,i,n} + R_B + C_{Afy} \; F_{SP,i,y} \; F_{PR,i,n} - C_{AL} \; F_{SR,i,n}$$

A comparação para efeitos de selecção faz-se agora entre $\Re_A$ e $\Re_B$.

Também se poderia utilizar o custo capitalizado nesta análise de comparação de custos, supondo que o serviço prestado pelas máquinas é perpétuo. A resposta ao problema é naturalmente sempre a mesma, dada a equivalência dos três conceitos.

2.3 Comparação de máquinas com duração diferente

Se as máquinas têm vida diferente não é legítimo comparar os valores actuais dos custos dos respectivos serviços referidos à vida de cada máquina e tem de se basear os cálculos num período de tempo igual para todas as máquinas em análise.

Um método de fazer a comparação é basear o cálculo dos valores actuais num período de tempo igual ao menor múltiplo comum das vidas das máquinas; deste modo o ciclo referente à vida de cada máquina repete-se um número inteiro de vezes e pode-se fazer para esse período de tempo um cálculo semelhante ao apresentado em 2.2 . No caso ai exemplificado o número de parcelas de (I-29) ou (I-30) viria multiplicado pelo número de ciclos necessário para atingir o menor múltiplo comum das vidas das máquinas. Deve notar-se que este método é simplesmente um artifício matemático, não implicando que qualquer das máquinas tenha de ser realmente repetida no fim da sua vida. O método torna-se laborioso quando o menor múltiplo comum é tal que o número de ciclos a considerar para cada máquina é grande.

Esta técnica pode no entanto ser desenvolvida de modo a obter-se uma expressão que permite converter o valor actual do custo de uma máquina ao longo de n_1 anos com o valor actual do custo da mesma máquina ao longo de n_2 anos.

Para tal note-se primeiramente que os custos verificados ao longo de um ciclo se podem converter no seu valor actual equivalente referido ao início do ciclo. Assim, por exemplo, são economicamente equivalentes os perfis traduzidos pelos dois diagramas seguintes (fig. I-5).

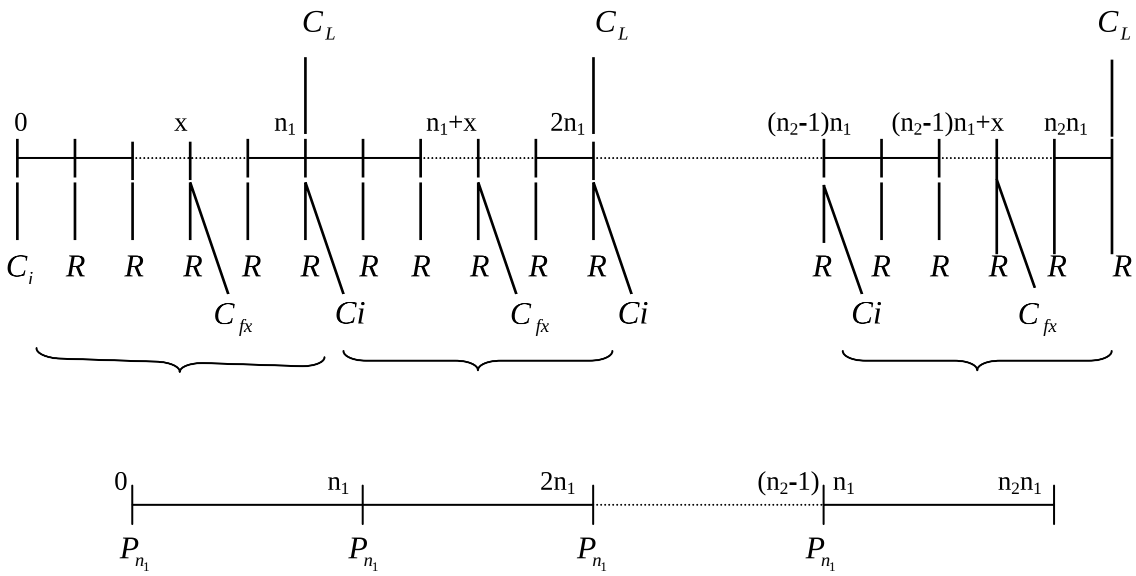


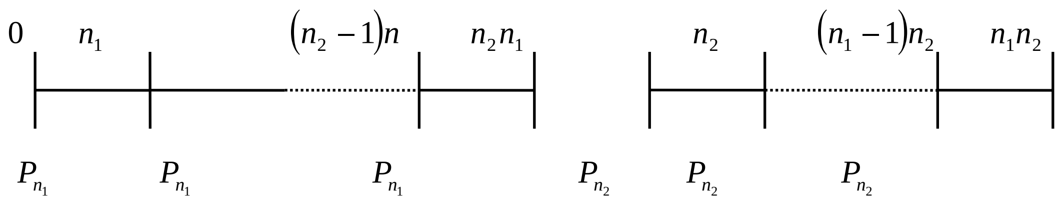
Fig. I-5

em que

$$P_{n_1} = C_i + R\,F_{RP,i,n} + C_{fx}\,F_{SP,i,x} - C_L\,F_{SP,i,n}$$

(o perfil de custos de cada ciclo é igual ao representado pelo primeiro diagrama da fig. I-4 e pela equação I-29).

Considerem-se agora duas máquinas economicamente equivalentes, uma com n_1 anos de vida e um valor actual dos custos verificados ao longo da sua vida igual a P_{n_1}, e outra com n_2 anos de vida e um valor actual dos custos verificados ao longo da sua vida igual a P_{n_2}. Os perfis de custo destas duas máquinas podem representar-se pelos diagramas da fig. I-6, os quais por hipótese são economicamente equivalentes



(a) (b)

Fig. 6

O valor actual dos fluxos no diagrama (a) da fig. I-6 é

$$P_{n_1 n_2} = P_{n_1}\left[1 + \frac{1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{1}{(1+i)^{2n_1}} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{(n_2-1)^{n_1}}}\right] \qquad \text{(I-33)}$$

Os termos da expressão entre parêntesis constituem uma progressão geométrica de n_2 termos cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é $1/(1+i)^{n_1}$. A sua soma é pois

$$\frac{1-\left[1/(1+i)^{n_1}\right]^{n_2}}{1-\left[1/(1+i)^{n_1}\right]} = \frac{\left[(1+i)^{n_1 n_2}-1\right]/(1+i)^{n_1 n_2}}{\left[(1+i)^{n_1}-1\right]/(1+i)^{n_1}} = \frac{i\ F_{RP,i,n_1 n_2}}{i\ F_{RP,i,n_1}} = \frac{F_{PR,i,n_1}}{F_{PR,i,n_1 n_2}}$$

Portanto, de (I-33),

$$P_{n_1 n_2} = P_{n_1} \frac{F_{PR,i,n_1}}{F_{PR,i,n_1 n_2}} \qquad \text{(I-34)}$$

O valor actual dos fluxos no diagrama (b) da fig. I-6 deve ser igual a $P_{n_1 n_2}$, visto que as duas máquinas são economicamente equivalentes, e calcula-se do mesmo modo

$$P_{n_1 n_2} = P_{n_2} \sum_{n_2=0}^{n_2=(n_1-1)n_2} \frac{1}{(1+i)^{n_2}} \qquad \text{(I-35)}$$

ou seja

$$P_{n_1 n_2} = P_{n_2} \frac{F_{PR,i,n_2}}{F_{PR,i,n_1 n_2}} \qquad \text{(I-36)}$$

De (I-34) e (I-36) conclui-se que

$$P_{n_2} = P_{n_1} \frac{F_{PR,i,n_1}}{F_{PR,i,n_2}} \qquad \text{(I-37)}$$

A equação (I-37) permite converter o valor actual do serviço de uma máquina com base numa duração qualquer de n_1 anos no valor actual do serviço da <u>mesma</u> máquina baseado numa outra duração qualquer de n_2 anos.

Esta importante relação resolve pois o problema da comparação económica de duas máquinas com vida diferente. Com efeito considerem-se duas máquinas A e B economicamente distintas e sejam n_1 e n_2 respectivamente as suas vidas; designe-se ainda por P_{An_1} e P_{Bn_2} o valor actual do serviço prestado respectivamente pela máquina A durante a sua vida de n_1 anos e pela máquina B também durante a sua vida de n_2 anos (o cálculo de P_{An_1} e P_{Bn_2} faz-se como exemplificado em 2.2).

A expressão (I-37) permite calcular por exemplo P_{An_2}

$$P_{An_2} = P_{An_1} \frac{F_{PR,i,n_1}}{F_{PR,i,n_2}}$$

e o valor actual P_{An_2} comparado directamente com P_{Bn_2} visto referir-se ao mesmo período de tempo n_2 .

Como termo de comparação pode também neste caso usar-se a anuidade uniforme equivalente ao serviço prestado pela máquina.

Note-se primeiramente que o período escolhido para termo de comparação pode ser qualquer, pois não influencia a comparação económica entre duas máquinas: duas máquinas economicamente equivalentes continuam economicamente equivalentes qualquer que seja o período de tempo escolhido para comparação do serviço prestado.

Se escolhermos para o n_2 o valor $n_2 = 1$ ano e se se puser $n_1 = n$ a equação (I-37) transforma-se

$$P_1 = P_n \frac{F_{PR,i,n}}{F_{PR,i,1}} \quad \text{(I-38)}$$

Atendendo a que $F_{PR,i,1} = 1 + i$, a equação (I-38) pode escrever-se

$$P_1 (1+i) = P_n \; F_{PR,i,n} \quad \text{(I-39)}$$

e como $P_1 (1+i) = R$ (da equação I-14, quando $n = 1$), tem-se

$$R = P_n \; F_{PR,i,n} \quad \text{(I-40)}$$

equação que relaciona a anuidade uniforme R com o valor actual P_n e não é senão a equação já conhecida (I-14).

A aplicação da equação (I-40) no caso das máquinas A e B da página I-16 permite calcular

$$R_A = P_{An_1} \; F_{PR,i,n_1}$$

e

$$R_b = P_{Bn_2} \; F_{PR,i,n_2}$$

e comparar em seguida R_A com R_B .

Se fizermos $n_2 = \infty$ e pondo também $n_1 = n$, a equação (I-37) devém

$$P_\infty = P_n \; \frac{F_{PR,i,n}}{F_{PR,i,\infty}} \quad \text{(I-41)}$$

Mas $F_{PR,i,\infty} = i$, como se indicou na página I-9, e portanto, utilizando a expressão (I-15)

$$P_\infty = P_n \frac{(1+i)^n}{(1'+1)^n{}_{-1}} = P_n F_{PP_\infty,i,n} \quad \text{(I-42)}$$

em que

$$F_{PP_\infty},i,n = \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} . \quad \text{(I-43)}$$

e um factor de conversão de um valor actual em custo capitalizado, designado por factor do custo capitalizado que se encontra tabelado, para vários valores de $\underline{i}$ e $\underline{n}$ (Apêndice I).

É evidente a relação

$$F_{PR,i,n} = i\, F_{PP_\infty,i,n} \tag{I-44}$$

Utilizando a equação (I-44) na equação (I-37) obtém-se a seguinte expressão alternativa

$$P_{n_2} = P_{n_1} \frac{F_{PP_\infty,i,n_1}}{F_{PP_\infty,i,n_2}} \tag{I-45}$$

A equação (I-42), aplicada ao caso das máquinas A e B que se tem vindo a exemplificar, permite calcular

$$P_{A_\infty} = P_{An_1}\; F_{PP_\infty,i,n_1}$$

e

$$P_{B_\infty} = P_{Bn_2}\; F_{PP_\infty,i,n_2}$$

e comparar depois P_{A_∞} com P_{B_∞} , isto é, os custos capitalizados de A e B.

2.4 Sistemas constituídos por mais de uma máquina

Para comparar sistemas constituídos por várias máquinas pode-se achar o valor actual, ou a anuidade uniforme, ou o valor capitalizado correspondente ao valor do serviço de cada sistema, somando os valores actuais, ou as anuidades uniformes ou os valores capitalizados correspondentes aos valores do serviço das máquinas que constituem esse sistema, ou seja, por exemplo,

$$P_{sist} = P_A + P_B + \ldots\ldots\ldots + P_z \tag{I-46}$$

Este valor P_{sist} compara-se em seguida com o do outro sistema.

3. Amortização

3.1 Conceito e natureza de amortização

Neste texto usa-se amortização como um termo genérico que descreve a equivalência de um determinado capital ao longo de um período de tempo. Num empreendimento, enquanto que o capital operatório, usado para pagar salários, comprar matérias primas e satisfazer outras despesas relativas às operações produtivas ou de serviço é normalmente imediatamente recuperado através das vendas efectuadas, o capital investido, usado para comprar equipamento e edifícios, não pode ser convertido directamente no capital original quando estes bens físicos diminuem de valor, devido a envelhecimento (desgaste) ou obsolescência. Há portanto necessidade de reaver a parte do capital original perdido devido à depreciação daquelas e outras imobilizações. A amortização é justamente a compensação ao longo do tempo da perda de capital devida ao envelhecimento e obsolescência de tais imobilizações perecíveis. O que se faz assim na realidade é uma distinção entre as despesas que se processam durante um ano e aquelas que se estendem por mais de um ano[*]: seria incorrecto, e até ilógico, imputar por exemplo inteiramente a despesa de compra de equipamento às operações realizadas no primeiro ano de funcionamento, na medida em que este equipamento vai continuar a servir de suporte às operações dos anos seguintes. Esta distinção é importante para fins contabilísticos e de impostos (cujo período de tempo é um ano) e naturalmente na análise de custos industriais.

---

[*] Não há, de facto, diferença intrínseca entre matérias primas e máquinas a não ser que aquelas constituem um custo que se consome imediatamente (anual, dentro do período contabilístico) e estas um custo que se consome em vários anos (custo plurianual, abrangendo vários períodos contabilísticos).

Pode-se pois definir amortização como a distribuição sistemática de custos de um bem ou conjunto de bens que realiza um serviço ou operação do qual ou da qual se obtém um determinado rendimento.

Esta afectação de custos no tempo é necessariamente uma estimativa pois não é possível prever com exactidão o ritmo de envelhecimento ou de obsolescência de um bem. A amortização tem assim um sentido essencialmente matemático e não tem necessariamente relação com a deterioração real do valor do bem ou bens em causa.

Tem-se correctamente referido a amortização como uma despesa, mas não é demais acentuar que tal resulta de, no processo de amortização, se recuperar sem juro a parte do capital investido depreciado durante o período em que é usada. Trata-se portanto de um custo destinado a proteger apenas o investimento efectuado.

Convém ainda referir que, sob o ponto de vista contabilístico, amortizar tem o sentido da definição dada e não significa a gradual recuperação do valor dos bens, nem a acumulação de dinheiro num fundo especial destinado a futura substituição das imobilizações. Uma quantia igual à quota de amortização aparecerá normalmente em outra parcela do activo e pode revestir a forma física de matéria prima, produto acabado em armazém, etc.

Um esquema de amortização implica dois parâmetros matemáticos: a vida do bem amortizável e o modelo matemático adoptado para a afectação do custo de amortização a cada ano da vida do bem.

Como há vantagens em diferir o pagamento dos impostos para os últimos anos, devido ao valor do dinheiro no tempo, o valor e expressão daqueles parâmetros poderia ser utilizado para evasão fiscal. Daí a existência, em todos os países, de legislação que regula não só a vida do equipamento como também o próprio ritmo de amortização.

Convém ainda salientar neste contexto que uma firma pode atribuir uma vida ao equipamento e utilizar um modelo de amortização para fins fiscais e outra vida e outro modelo para estudos económicos internos.

Na alínea seguinte indicam-se os métodos de amortização, ou seja os modelos matemáticos de distribuição dos custos de amortização ao longo do tempo, mais usados na prática industrial.

3.2 Métodos de amortização

3.2.1 Definições e terminologia

Seja C_i o custo inicial de um bem depreciável, C_L o seu valor residual e $\underline{n}$ o número de anos de vida. Designe-se ainda por $D_{f1,}\ D_{f2,}\ \ldots,\ D_{fm}\ \ldots$ a amortização fraccionária em cada ano.

A amortização total ou custo inicial amortizável C_d será

$$C_d = C_i - C_L \qquad \text{(I-47)}$$

A amortização D_m no ano $\underline{m}$ será

$$D_m = D_{fm}\ C_d \qquad \text{(I-48)}$$

Define-se valor contabilizado B_m do bem depreciável no fim de $\underline{m}$ anos, o seu valor inicial deduzido da amortização acumulada até esse ano, isto é

$$B_m = C_i - \sum_{m=1}^{m=m} D_m \qquad \text{(I-49)}$$

ou seja, atendendo a (I-48)

$$B_m = C_i - C_d \sum_{m=1}^{m=m} D_{fm} \qquad \text{(I-50)}$$

subtraindo e somando C_d a (I-50)

$$\begin{aligned} B_m &= \left(C_i - C_d\right) + \left(C_d - C_d \sum_1^m D_{fm}\right) = \\ &= C_L + C_d \left(1 - \sum_1^m D_{fm}\right) \end{aligned} \qquad \text{(I-51)}$$

isto é, o valor contabilizado é também dado pela soma do valor de sucata (primeira parcela de I-51) com a amortização futura (segunda parcela de I-51).

O valor contabilizado, como já se referiu pode não ter relação com o valor real (realizável) do bem em causa.

3.2.2 Método linear

Neste método, a afectação dos custos de amortização é uniforme ao longo da vida $\underline{n}$ prevista,

$$D_{f1} = D_{f2} = \cdots = D_{fm} = \cdots = D_{fn}$$

ou seja

$$D_f = \frac{1}{n} \qquad \text{(I-52)}$$

Tem-se assim, sucessivamente, atendendo às expressões (I-48) a (I-51),

$$D_m = \frac{C_d}{n} \qquad \text{(I-53)}$$

$$\sum_1^m D_m = C_d \frac{m}{n} \qquad \text{(I-54)}$$

$$B_m = C_i - C_d \frac{m}{n} = C_L + C_d \left(1 - \frac{m}{n}\right) \qquad \text{(I-55)}$$

O valor de $1\,UM$ de amortização $\left(C_d = 1\,UM\right)$ é dado pela expressão

$$F_{MLP,i,n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(1+i)^m} \tag{I-56}$$

como se pode facilmente deduzir de um diagrama de fluxos monetários - tempo.

Na expressão (I-56) o símbolo $F_{MLP,in}$ representa o factor de conversão da amortização linear ao longo de n anos no seu valor actual, quanto a taxa de juro é $\underline{i}$. Este factor está relacionado com o factor de anuidade - valor actual pela relação.

$$F_{MLP,i,n} = \frac{1}{n} \quad F_{RP,i,n} \tag{I-57}$$

como se pode verificar pelas expressões (I-11) e (I-13). O factor $F_{MLP,i,n}$ está tabelado (Apêndice I).

No Quadro I-3 apresentam-se as expressões de D_m, da amortização acumulada em $\underline{m}$ anos $\left(\sum_{1}^{m} D_m\right)$ e do valor actual desta amortização acumulada, tanto para o caso do método linear como para os restantes métodos de amortização aqui descritos.

3.2.3 Método do fundo de liquidação (FL)

Neste método a amortização é realizada através de uma anuidade uniforme que concorre para um fundo de liquidação de acordo com a expressão (I-19), isto é,

$$R_{FL} = C_d \ \frac{i}{(1+i)^n - 1} = C_d \ F_{SP,i,n} \ F_{PR,i,n} \tag{I-58}$$

em que i é a taxa de juro usada na constituição do fundo de liquidação.

Em cada ano o valor da amortização efectuada corresponde ao aumento do fundo de liquidação nesse ano, o qual é constituído pela anuidade R_{FL} relativa a esse ano mais o juro ganho pelo fundo nesse mesmo ano. Pode-se mostrar que a amortização no ano O factor $\underline{m}$ é dada por

$$D_m = R_{FL}\left[i \sum_{k=m-2}^{k=0} (1+i)^{k} + 1 \right] \tag{I-59}$$

No quadro I-3 indicam-se as expressões de $D_{m1,} \sum_{1}^{m} D_m$ e o valor actual desta amortização acumulada, em termos de factores de conversão tabelados.

QUADRO I-3

Expressão dos vários modos de amortização (n anos de vida)

Nº	Método	Amortização anual para o ano m	Amortização acumulada em m anos	Valor actual de m anos de amortização
1	Linear (ML)	$\frac{C_i - C_L}{n}$	$\left(C_i - C_L\right)\frac{m}{n}$	$\frac{C_i - C_L}{n} F_{RP,\,i,\,m}$
2	Fundo de liquidação (FL)	$\left(C_i - C_L\right) F_{SP,\,i,\,n} F_{PR,\,i,\,n} F_{PS,\,i,\,m-1}$	$\left(C_i - C_L\right)\frac{F_{PS,\,i,\,m} - 1}{F_{PS,\,i,\,n} - 1}$	$\left(C_i - C_L\right)\frac{m}{1+i} F_{SP,\,i,\,n} F_{PR,\,i,\,n}$
3	Percentagem fixa (PF)	$C_i\left(\sqrt[n]{\frac{C_L}{C_i}}\right)^{m-1}\left(1-\sqrt[n]{\frac{C_L}{C_i}}\right)$ ou $C_i\left(1-F_{PF}\right)^{m-1} F_{PF}$	$C_i\left[1-\left(\sqrt[n]{\frac{C_L}{C_i}}\right)^m\right]$ ou $C_1\left[1-\left(1-F_{PF}\right)^m\right]$	$C_i\left(1-\sqrt[n]{\frac{C_L}{C_i}}\right)\frac{1-\left(\frac{\sqrt[n]{C_L/C_i}}{1+i}\right)^m}{1+i-\sqrt[n]{\frac{C_L}{C_i}}}$
4	Dupla percentagem fixa (DPF)	$C_i\left(1-\frac{2}{n}\right)^{m-1}\frac{2}{n}$	$C_i\left[1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\right] = C_1\left(1-\frac{2}{n}\right)^m$	$\frac{2\,C_i}{n}\;\frac{1-\left(\frac{1-2/n}{1+i}\right)^m}{1+2/n}$
5	Soma dos dígitos (SD)	$\left(C_i - C_L\right)\frac{n-m+1}{0{,}5n\,(n+1)}$	$\left(C_i - C_L\right)\frac{m}{n(n+1)}\left(2n+1-m\right)$	$\frac{2\left(C_i - C_L\right)}{n\,(n+1)\,i}\bullet$ $\bullet\left[n - F_{RP,\,i,\,m} - (n-m)\,F_{SP,\,i,\,m}\right]$
6	Unidades de produção (UP)	$\left(C_i - C_L\right)\frac{M_m}{M}$	$\left(C_i - C_L\right)\frac{\sum_1^m M_m}{M}$	$\frac{C_i - C_L}{M}\sum_1^m \frac{M_m}{(1+i)^m}$

3.2.4. Método da percentagem fixa* (PF)

Neste método a depreciação anual é calculada como uma fracção fixa do valor contabilizado no princípio do ano. Seja F_{PF} essa fracção cujo valor ainda se desconhece; no fim do primeiro ano

$$D_1 = C_i \; F_{PF}$$

$$B_1 = C_i - C_i \; F_{PF} = C_i \left(1 - F_{PF}\right)$$

No fim do segundo ano

$$D_2 = C_i \left(1 - F_{PF}\right) F_{PF}$$

$$B_2 = B_1 - D_2 = C_i \left(1 - F_{PF}\right) - C_i \left(1 - F_{PF}\right) F_{PF} = C_i \left(1 - F_{PF}\right)^2$$

Ao cabo do ano m, tem-se

$$D_m = C_i \left(1 - F_{FP}\right)^{m-1} F_{FP} \qquad \text{(I-60)}$$

$$B_m = C_i \left(1 - F_{PF}\right)^m \qquad \text{(I-61)}$$

Ao fim de n anos o valor contabilizado deverá ser igual ao valor residual

$$B_n = C_L = C_i \left(1 - F_{PF}\right)^n$$

e portanto

$$F_{PF} = 1 - \sqrt[n]{\frac{C_L}{C_i}} \qquad \text{(I-62)}$$

Conhecido F_{PF} pode-se calcular D_m pela equação (I-60), bem como a amortização acumulada ao fim de m anos e o respectivo valor actual (Quadro I-3).

3.2.5 Método da dupla percentagem fixa** (DPF)

O modelo em que este método se baseia é idêntico ao da percentagem fixa, mas o factor F_{DPF} é obtido fazendo-o igual a duas vezes a amortização fraccionária segundo o método linear, isto é

$$F_{DPF} = \frac{2}{n} \qquad \text{(I-63)}$$

O valor contabilizado após n anos é, por força de (I-61) e de (I-63)

$$B_n = C_i \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \qquad \text{(I-64)}$$

Este valor de B_n não tem qualquer relação com o valor residual C_L, pelo que, para se respeitar o valor amortizável C_d, B_n terá que ser ajustado quer por diferença, quer usando para os últimos anos o método linear como modelo de amortização.

---

* "Declining-balance method" na terminologia anglo-saxónica

** "Double declining-balance method" na terminologia anglo-saxónica

3.2.6. Método da soma dos dígitos (SD)

Neste método a amortização fraccionária D_f é dada por uma fracção cujo numerador é o número de anos de vida que restam, contados no principio do ano em referência, e cujo denominador é a soma dos dígitos relativos à vida total.

Se for n a vida do bem depreciável, a soma dos dígitos respectiva é dada por

$$\sum_{x=1}^{x=n} x = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{1}{2} n \, (n+1) \tag{I-65}$$

visto os termos do somatório constituírem uma série aritmética.

O valor de D_{fm} é assim

$$D_{fm} = F_{SD} = \frac{n - m + 1}{0{,}5n \, (n+1)} \tag{I-66}$$

O valor actual de 1 UM de amortização total será

$$F_{SDP,i,n} = \sum_{m=i}^{m=n} \frac{n - m + 1}{0{,}5n \, (n+1)} \frac{1}{(1+i)^m} = \frac{n - F_{RP,i,n}}{0{,}5n \, (n+1) \, i} \tag{I-67}$$

O factor $F_{SDP,i,n'}$, que converte a amortização pelo método da soma dos dígitos ao longo de n anos no seu valor actual, quando a taxa de juro é $\underline{i}$, encontra-se tabelado (Apêndice I).

No Quadro I-3 apresentam-se além da de D_m as expressões da amortização acumulada e do respectivo valor actual.

3.2.7 Método das unidades de produção (UP)

Neste método, a afectação dos custos de amortização é feita na base da utilização do bem, e não na base do tempo, como nos métodos até agora expostos.

Se Z for o número total de unidades produzidas e se Z_m for o número de unidades produzidas no ano m, a amortização fraccionária para o ano m é

$$D_{fm} = \frac{Z_m}{Z} \tag{I-68}$$

Também para este método se indicam no Quadro I-3 as relações para D_m, amortização acumulada e seu valor actual.

3.3 <u>Comparação entre vários métodos de amortização</u>

No Quadro I-4 compara-se os cinco primeiros métodos de amortização apresentados na alínea anterior, para as mesmas condições de valor amortizável e vida de um bem depreciável.

QUADRO I-4
Comparação de métodos de amortização*

Fim do ano	**DEPRECIAÇÃO ANUAL $(D_m), UM$**				
	Linear	**Fundo de Liquidação $(i = 0{,}90)$**	**Percentagem Fixa**	**Dupla Percentagem fixa**	**Soma dos Dígitos**
1	200,0	163,8	419,1	440,0	333,3
2	200,0	180,2	259,4	264,0	266,7
3	200,0	198,2	160,6	158,4	200,0
4	200,0	218,0	99,4	95,0	133,3
5	200,0	239,8	61,5	42,6**	66,7
SOMA	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0	1000,0
Valor Actual da amortização de 5 anos para $i = 0{,}01$					
0	758,2	744,5	822,2	828,6	806,1

Os valores deste Quadro revelam as características estruturais dos vários métodos de amortização, aliás aparentes dos respectivos modelos matemáticos.

Assim, e relativamente ao método linear, que constitui um modelo de amortização uniforme, o método do fundo de liquidação é um método inicialmente lento cujas depreciações anuais vão aumentando com o tempo. Este método não é muito usado nas actividades industriais.

Os métodos da percentagem fixa, da dupla percentagem fixa e da soma dos dígitos, ditos métodos acelerados, são inicialmente rápidos e por isso apresentam os maiores valores actuais para o esquema de custos de amortização, o que é vantajoso visto que se detém assim o uso do capital por mais tempo. O melhor destes métodos depende porém da vida do bem e do seu valor residual.

Outras vantagens apontadas para os métodos acelerados são:

(i) os custos operatórios de um bem tendem a ser maiores nos últimos anos da sua vida. Os métodos acelerados, com depreciações maiores nos primeiros anos, conduzem a custos totais do bem (amortização + custos operatórios) sensivelmente constantes ao longo da sua existência

(ii) a amortização acelerada está mais de acordo com a realidade dos valores de revenda da maquinaria

4. Influência dos impostos na comparação de custos

Até agora não se tem considerado o efeito que a taxa do imposto possa ter na comparação de custos; assim a sua existência reflecte-se na taxa de juro sobre o capital que passa a ter efectivamente um valor mais baixo.

Seja i a taxa de juro sobre o capital (juro) antes dos impostos, r o juro sobre o capital após os impostos e t a taxa de imposto, todos expressos como número decimal; tem-se

* Quadro tirado de Jelen, "Cost and Optimization Engineering".
** Ajustado para $C_L = 100\,UM$

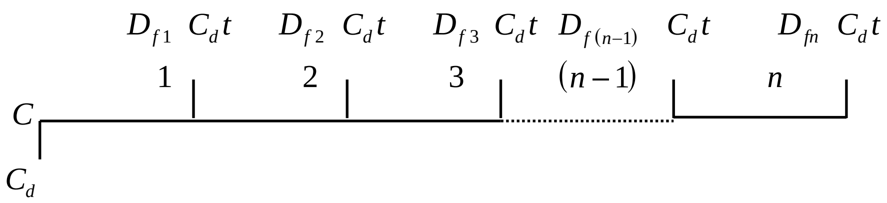
$$r = i\,(1 - t) \tag{I-69}$$

Suponhamos que o imposto é pago de uma vez só no fim do período anual e consideremos uma máquina com um custo inicial C_i, um valor de sucata C_L e um valor de amortização C_d sendo

$$C_d = C_i - C_L \tag{I-70}$$

No instante em que a máquina é adquirida não há que considerar qualquer imposto, mas no fim do 1º ano a amortização $D_{fl}\ C_d$ em que D_f é a fracção de amortização, representa uma despesa reconhecida como tal para efeitos de imposto. Reduz-se assim de $D_{fl}\,C_d$ a base passível de imposto e poupa-se em imposto o valor $D_{fl}\ C_d t$.

O diagrama custos-tempo deverá ser assim



O valor actual deste fluxo monetário será

$$P = C_d - C_d t\left[\frac{D_{fl}}{(1+r)} + \frac{D_{f2}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{D_{fn}}{(1+r)^n}\right] \tag{I-71}$$

ou

$$P = C_d - C_d t\ \chi = C_d\ (1 - t\ \chi) \tag{I-72}$$

em que

$$\chi = \sum_{1}^{n} \frac{D_{fm}}{(1+r)^m} \tag{I-73}$$

representa o valor actual de uma unidade monetária de amortização e depende, além de r e n, do método escolhido para efectuar a amortização da máquina. Assim por exemplo $\chi_{ML,r,n'}$ representa o factor quando o método de amortização usado é o linear, a taxa de juro efectiva por período é r e o tempo em jogo é de n períodos.

De um modo geral pode pôr-se

$$P = C_d\left(1 - t\chi_{RA,r,n^1}\right) \tag{I-74}$$

O índice RA significa ritmo de amortização e $\underline{n}'$ representa a vida da máquina para fins de imposto, a qual pode ser diferente da vida $\underline{n}$ usada no estudo económico.

O factor $\chi_{RA,r,n'}$ encontra-se tabelado para amortização linear e amortização pelo método da soma de dígitos usando-se os símbolos

$$\chi_{ML,r,n} = F_{MLP,r,n}$$

$$\chi_{SD,r,n} = F_{SDP,r,n} \; .$$

É de notar que, qualquer que seja o método de depreciação, se tem

$$\chi_{r,1} = \frac{1}{1+r} = F_{SDP,r,1} \tag{I-75}$$

$$\chi_{r,\infty} = 0 = F_{SDP,r,\infty} \tag{I-76}$$

A equação (I-74) pode facilmente converter-se num pagamento uniforme ou num custo capitalizado utilizando os factores já conhecidos.

$$R = C_d \; F_{PR,r,n} \left(1 - t \; \chi_{RA,r,n^1}\right) \tag{I-77}$$

$$P_\infty = C_d \; F_{PP\infty,r,n} \left(1 - t \; \chi_{RA,r,n^1}\right) \tag{I-78}$$

Considerações idênticas às que se fizeram para o valor actual do investimento amortizável, entrando em consideração com os impostos, se podem aplicar a outros fluxos económicos. Por exemplo, uma despesa anual R ocorre simultaneamente com o pagamento do imposto, pelo que o custo após o imposto será $R(1-t)$; o valor actual será portanto

$$P = R\,(1-t)\,\frac{(1+r)^n - 1}{r\,(1+r)^n} \tag{I-79}$$

Um custo irregular C_{fx} que ocorra no fim do ano x terá como valor actual

$$P = C_{fx}\,(1-t)\,\frac{1}{(1+r)^x} \tag{I-80}$$

e para um custo não depreciável C_{nd} como por exemplo custo de terrenos ou capital de laboração, o valor actual será

$$P = C_{nd} - \frac{C_{nd}}{(1+r)^n} = C_{nd} \; \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} \tag{I-81}$$

No Quadro I-5 indicam-se as expressões dos valores actuais, dos pagamentos anuais uniformes e dos custos capitalizados para os diferentes tipos de custos, quando se entra em consideração com a taxa de imposto.

Para a comparação de custos na selecção de alternativas utilizam-se estas expressões, procedendo-se de resto de modo idêntico ao que se indicou neste capitulo, na alínea 2.

QUADRO I.5
Expressões do valor actual, custo anual uniforme e custo capitalizado, atendendo aos impostos

Nº		Valor actual (como custo ao longo de n anos)	Custo anual uniforme		Custo capitalizado	
			Expressão algébrica	Expressão com factor para amortização segundo soma dos dígitos	Expressão algébrica	Expressão com factor para amortização segundo soma dos dígitos
1	C_d Parte amortizável do custo inicial para vida de n anos para efeitos de imposto. $C_d = C_i - C_L$	$C_d(1-t\chi_{rn'})$	$C_d(1-t\aleph_{rn'})\dfrac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$	$C_d\left(1-tF_{SDP,r,n'}\right)F_{PR,r,n}$	Multiplicar a expressão algébrica correspondente do custo anual uniforme por 1/r	$C_d\left(1-tF_{SDP,r,n'}\right)F_{PP\infty,r,n}$
2	R Custo anual uniforme no fim do ano, amortizado imediatamente.	$R(1-t)\dfrac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}$	$R(1-t)$	$R(1-t)$		$R(1-t)\dfrac{1}{r}$
3	R_p Custo anual uniforme no principio do ano, amortizado no fim do ano.	$R_p\left(1-\dfrac{t}{1+r}\right)(1+r)\cdot$ $\cdot\dfrac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}$	$R_p\left(1-\dfrac{t}{1+r}\right)(1+r)$	$R_p\left(1-tF_{SDP,r,1}\right)(1+r)$		$R_p\left(1-tF_{SDP,r,1}\right)F_{PP\infty,r,n}$
4	C_{fx} Custo irregular no fim do ano x para artigo durando n anos, imediatamente amortizado.	$C_{fx}\dfrac{1-t}{(1+r)^x}$ ou $\dfrac{C_{px}}{(1+r)^x}\left[1-t(1+r)\chi_{rl}\right]$	$C_{fx}\dfrac{1-t}{(1+r)^x}\dfrac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$	$C_{fx}\dfrac{1}{(1+r)^x}\cdot$ $\cdot\left[1-t(1+r)F_{SDP,r1}\right]F_{PR,r,n}$		$C_{fx}\dfrac{1}{(1+r)^x}\cdot$ $\cdot\left[1-t(1+r)F_{SDP,r,1}\right]F_{PP\infty,r,n}$
5	C_{px} Custo irregular no princípio do ano para artigo durante n anos, amortizado no fim do ano x.	$C_{px}\left(1-\dfrac{t}{1+r}\right)\dfrac{1}{(1+r)^{x-1}}$ ou $\dfrac{C_{px}}{(1+r)^{x-1}}(1-t\chi_{r1})$	$C_{px}\left(1-\dfrac{t}{1+r}\right)\dfrac{1}{(1+r)^{x-1}}\cdot$ $\cdot\dfrac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$	$C_{px}\dfrac{1-tF_{SDP,r,1}}{(1+r)^{x-1}}F_{PR,r,n}$		$C_{px}\dfrac{1-tF_{SDP,r,1}}{(1+r)^{x-1}}F_{PP\infty,r,n}$
6	C_{nd} Custo não depreciável (terreno, artigo eterno).	$C_{nd}\dfrac{(1+r)^n-1}{(1+r)^n}$	$C_{nd}r$	$C_{nd}r$		C_{nd}
7	C_L Valor de sucata ao fim do ano n, tratando como C_{nd}, uma	$C_L\dfrac{(1+r)^n-1}{(1+r)^n}$	$C_L r$	$C_L r$		C_L

Assim, as expressões I-29 e I-30 escritas para a solução do exemplo da alínea 2.2 escrever-se-iam, no caso de se entrar em consideração com os impostos, como se segue:

Em termos de valor actual

$$P_A = C_{Ad}\left(1 - t\chi_{RA,r,n^1}\right) + R_A(1-t)F_{RP,r,n} + C_{Afx}(1-t)F_{SP,r,x} + C_{AL}\left(1 - F_{SP,r,n}\right)$$

$$P_B = C_{Bd}\left(1 - t\chi_{RA,r,n^1}\right) + R_B(1-t)F_{RP,r,n} + C_{Bfy}(1-t)F_{SP,r,y} + C_{BL}\left(1 - F_{SP,r,n}\right)$$

Em termos de anuidade uniforme (ou renda anual)

$$\Re_A = C_{Ad}\left(1 - t\chi_{RA,r,n^1}\right)F_{PR,r,n} + R_A(1-t) + C_{Afx}(1-t)F_{SP,r,x}F_{PR,r,n} + C_{AL}\,r$$

$$\Re_B = C_{Bd}\left(1 - t\chi_{RA,rn^1}\right)F_{PR,r,n} + R_B(1-t) + C_{Bfy}(1-t)F_{SP,r,x}F_{PR,r,n} + C_{BL}\,r$$

5. Problemas de substituição

5.1 Definições

A substituição de uma máquina ou de um bem pode verificar-se por dois motivos:

(i) A máquina chegou ao termo da sua vida e tornou-se incapaz de desempenhar fisicamente o serviço que prestava. Designa-se este tipo de substituição por reposição.

(ii) A máquina está ainda em condições de prestar o serviço que lhe competia mas tornou-se economicamente conveniente substitui-la por uma máquina nova. Chama-se a esta substituição uma destituição.

A destituição de uma máquina ou bem pode resultar de uma das duas seguintes causas, ou ambas:

(i) A máquina torna-se mais onerosa de operar por perda de eficiência, traduzida por exemplo em menor qualidade na sua actuação ou/e maiores despesas de manutenção. Nestas condições pode tornar-se economicamente vantajoso substitui-la por uma nova máquina, mesmo que esta não contenha qualquer inovação tecnológica.

(ii) A máquina tornou-se obsoleta, isto é, devido a inovação tecnológica ou a progresso tecnológico, apareceram quer outras máquinas de concepção radicalmente diferente, quer outras máquinas do mesmo tipo, melhoradas, que consomem menos energia, ou mesmo mão de obra, ou exigem menos manutenção ou prestam serviço de melhor qualidade. A máquina pode ter conservado a sua eficiência, mas foi ultrapassada pela evolução tecnológica: é um caso de obsolescência tecnológica.

A reposição é um problema que se põe num determinado momento, normalmente no fim da vida prevista para a máquina, e que pode ser analisado pelos métodos indicados neste capítulo, alínea 2 e 4. Um problema de reposição pode no entanto criar oportunidade para estudar possíveis hipóteses de destituição de outros bens. Os problemas de destituição, ao contrário dos de reposição, exigem uma constante avaliação das situações, pois na realidade estão sempre presentes.

5.2. Análise típica de problemas de destituição

Na breve análise que se fará, designar-se-á a máquina em serviço por "existente" e a nova máquina por "destituidor".

A decisão de comprar o "destituidor" depende de uma comparação entre o custo de manter em operação o "existente" e o custo de operar o "destituidor"; para esta comparação pode usar-se o método do custo anual uniforme ou do custo capitalizado. Em geral, também, os custos operatórios e outros do "existente" aumentam progressivamente com o tempo e só se torna necessário considerar o ano seguinte para efeitos comparativos, pois será nesse período que o "existente" exibirá o seu melhor comportamento.

Sejam $C_{L,0}$ e $C_{L,1}$ respectivamente os valores de sucata realizáveis no momento presente e no fim do ano que segue, e B_0 e B_1 os valores contabilizados correspondentes. Em geral C_L e B não coincidem, verificando-se usualmente que C_L é menor que B, por vezes apreciavelmente. A diferença $\left(B - C_L\right)$, revelada pela destituição em causa, só influencia a decisão a tomar na medida em que existe imposto: esta diferença representa intrinsecamente um ritmo de amortização inadequado, facto que não é possível corrigir no futuro.

A decisão na base de um ano de comparação consiste em vender o "existente" agora por $C_{L,0}$ ou manter a máquina em funcionamento, incorrendo um custo operativo C_{f1} ao fim do ano e recuperar também um valor de sucata $C_{L,1}$.

Na primeira hipótese a perda em que se incorre por venda do "existente" será $B_0 - C_{L,0}$ e a poupança em imposto $t\left(B_0 - C_{L,0}\right)$; se a máquina não for vendida no momento presente, os recebimentos que por esse facto se evitam, têm que se considerar como despesas que terão assim o valor, após considerados os impostos,

$$C_{L,0} + t\left(B_0 - C_{L,0}\right) \tag{I-82}$$

No fim do ano faz-se uma depreciação D_1, recebe-se o valor de sucata $C_{L,1}$ e a perda por venda será $\left(B_1 - C_{L,1}\right)$. Considerados os impostos a poupança será

$$t\,D_1 + C_{L,1} + t\left(B_1 - C_{L,1}\right) \tag{I-83}$$

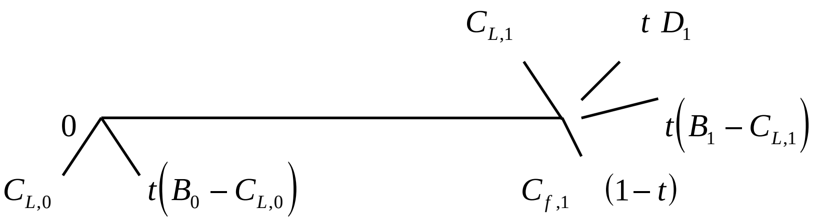
e, como $B_1 = B_0 - D_1$ tem-se que (I-83) se reduz a

$$C_{L,1} + t\left(B_0 - C_{L,1}\right) \tag{I-84}$$

Se for $C_{f,1}$ o custo de laboração durante o mesmo ano (referido ao fim do ano), realiza-se uma poupança correspondente ao crédito devido ao imposto e o custo, após imposto, será

$$C_{f,1}(1 - t) \tag{I-85}$$

Atendendo a (I-82), (I-83) e (I-85) o diagrama de fluxos monetários será



O valor actual será pois

$$P_1 = C_{L,0} + t\left(B_0 - C_{L,0}\right) - \frac{C_{L,1} + t\left(B_0 - C_{L,1}\right) - C_{f,1}(1-t)}{1+r} \qquad \text{(I-86)}$$

O pagamento anual uniforme correspondente será

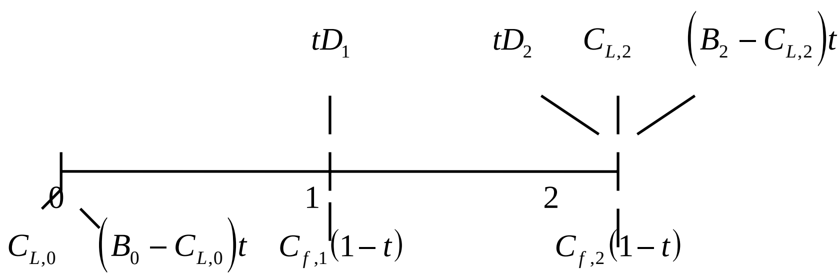
$$R = P_1\ F_{PR,r,1} = P_1\ (1+r) \qquad \text{(I-87)}$$

e o custo capitalizado

$$P = P_1\ F_{PP\infty,r,1} = P_1\ \frac{1+r}{r} \qquad \text{(I-88)}$$

O pagamento anual uniforme ou o custo capitalizado relativo ao destituidor calcula-se do modo indicado na alínea 4, podendo assim estabelecer-se uma comparação entre o existente e o destituidor.

No caso de a comparação se estender para além de um ano, os raciocínios que se fizeram para o existente seriam idênticos. O diagrama dos fluxos económicos que se obteria seria, para um segundo ano de serviço,



tendo os símbolos para o segundo ano, significado idêntico aos usados para o primeiro ano.

É de notar que pode haver casos em que operar o existente por tempos superiores a um ano pode ser mais provável do que operá-lo apenas por ano, nomeadamente quando: (i) o valor de sucata diminui fortemente no primeiro ano, e (ii) os benefícios de uma reparação se prolongam para além desse primeiro ano. Estas circunstâncias devem ser tomadas em consideração quando se compara o existente com o destituidor.

5.3 Modelo matemático para progresso tecnológico

Suponhamos um caso de destituição devido puramente ao progresso tecnológico, e formulemos as seguintes hipóteses:

(i) Em cada ano teremos um novo modelo cujo custo se pode considerar como $(1-p)$ do custo do modelo do ano precedente, em que p é um factor (em decimal) que representa a taxa de progresso tecnológico.

(ii) Os custos operatórios da máquina também beneficiarão de progresso tecnológico; assim se a despesa operatória para o modelo do ano corrente for R_t (fim do ano), o modelo do ano seguinte terá uma despesa do mesmo tipo de valor $R_t(1-p)$ e assim sucessivamente.

Nestas condições, podemos calcular o custo capitalizado da máquina, entrando em consideração com a taxa de avanço tecnológico e admitindo que a máquina é substituída de $\underline{n}$ em $\underline{n}$ anos. Será o valor presente, após os impostos, na base de um período de tempo infinito, de (i) os custos de investimento que se verificam de $\underline{n}$ em $\underline{n}$ anos e de (ii) os custos operatórios anuais, mudando de $\underline{n}$ em $\underline{n}$ anos. Assim

$$P_\infty = C_i\left(1-t\chi_{r,n}\right) + C_i\left(1-t\chi_{r,n}\right)\frac{(1-p)^n}{(1+r)^n} \quad \text{(I-89)}$$

$$+C_i\left(1-t\chi_{r,n}\right)\frac{(1-p)^{2n}}{(1+r)^{2n}} + \cdots\cdots \quad \text{(I-90)}$$

$$\sum_{2n+1}^{3n}\frac{R_t(1-t)(1-p)^{2n}}{(1+r)^x} + \cdots\cdots \quad \text{(I-91)}$$

$$+\sum_{1}^{n}\frac{R_t(1-t)}{(1+r)^x} + \sum_{n+1}^{2n}\frac{R_t(1-t)(1-p)^n}{(1+r)^x} + \quad \text{(I-92)}$$

que se pode reduzir a

$$\frac{P_\infty}{C_i} = \frac{(1+r)^n\left(1-t\chi_{r,n}\right)\frac{R_t}{C_i}\frac{(1-t)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}}{r-(1-p)^n} \quad \text{(I-93)}$$

O valor do pagamento uniforme equivalente será $R = rP_\infty$ em que P_∞ é dado pela equação (I-93).

O factor $(1-p)^n$ designa-se por $F_{PS,-p,n}$.

A vida económica óptima será aquela para a qual P_∞ / C_i apresente um mínimo. para valores especificados de outros parâmetros, incluindo o método de depreciação.

Cabe aqui notar que o progresso tecnológico tem dois efeitos divergentes, na medida em que o progresso já realizado vai contra a manutenção do "existente", mas a possibilidade de mais progresso futuro aconselha a conservar o "existente". De facto, se se continuar com o "existente", será eventualmente possível obter um modelo mais avançado do "destituidor" actual, incorporando ainda maior avanço tecnológico; nesta ordem de ideias, a conservação do "existente" pode constituir um benefício, resultante do progresso tecnológico futuro.

6. Inflação

6.1 Comparação de custos sob inflação

Quando existe inflação os preços variam com o tempo. Seja $\underline{d}$ a taxa de inflação, expressa em fracção decimal: um custo hoje de $X\ UM$ tornar-se-á um custo $X(1+d)\ UM$ ao fim do ano, $X(1+d)^2\ UM$ ao fim de 2 anos e assim sucessivamente, ou seja,

$$X_{t2} = X_{t1}(1+d)^n \tag{I-94}$$

(em que $t_2 - t_1 = n$)

expressão semelhante à de um valor futuro.

Na análise que se segue, todos os custos são expressos em preços correntes.

Seja C_d o valor inicial amortizável de determinado equipamento, o qual dura $\underline{n}$ anos. Seja D_{fx} a amortização fraccionária para o ano $\underline{x}$, a qual é baseada no custo inicial original e se considera não ser afectada pela inflação. Seja ainda t a taxa de imposto, em fracção decimal.

O custo capitalizado do correspondente serviço é o valor actual do custo inicial mais um número infinito de substituições, todos tomados pelo seu custo real, e tomando em consideração os benefícios fiscais resultantes do custo de amortização.

Tem-se pois, atendendo à análise feita na alínea 4,

$$\begin{aligned} P_\infty = {} & \left[C_d - t\,C_d \sum_1^n \frac{D_{fx}}{(1+r)^x} \right] + \frac{C_d(1+d)^n - t\,C_d(1+d)^n \sum_1^n \frac{D_{fx}}{(1+r)^x}}{(1+r)^n} + \\ & + \frac{C_d(1+d)^{2n} - t\,C_d(1+d)^{2n} \sum_1^n \frac{D_{fx}}{(1+r)^x}}{(1+r)^{2n}} + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{I-95}$$

ou

$$P_\infty = C_d\left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right) + C_d\left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right)\frac{(1+d)^n}{(1+r)^n} + C_d\left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right)\frac{(1+d)^{2n}}{(1+r)^{2n}} \tag{I-96}$$

A equação (I-96) é uma série geométrica cujo primeiro termo é

$C_a\ \left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right)$ e cuja razão é $\dfrac{(1+d)^n}{(1+r)^n}$

Se $(1+d)<(1+r)$, isto é, para taxas de inflação baixas,

$$P_{\infty} = C_d\left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right)\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - (1+d)^n} \tag{I-97}$$

ou seja

$$P_{\infty} = C_d\left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right)\frac{F_{PS,r,n}}{F_{PS,r,n} - F_{PS,d,n}}$$

(I-98)

No Quadro I-6 resumem-se as relações para as outras grandezas, cujos custos se devem tomar em termos de preços correntes.

QUADRO I - 6

Relações para o custo capitalizado, atendendo à inflação, $r > d$ *

(todos os custos em termos de UM presentes)

Nº	Tipo de Custo	Expressão algébrica para o custo capitalizado	Expressão com factor para custo capitalizado, $P_{\infty,r\rangle d}$ e amortização pela soma dos dígitos
1	C_d Custo inicial depreciável	$C_d\left(1-t\chi_{r\,n'}\right)\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-(1+d)^n}$	$C_d\left(1-tF_{SDP,r,n'}\right)\frac{F_{PS,r,n}}{F_{PS,r,n,}-F_{PS,d,n}}$
2	R Encargo anual uniforme (fim do ano)	$R(1-t)\frac{1+d}{r-d}$	$R(1-t)\frac{1+d}{r-d}$
3	R_p Encargo anual uniforme (principio do ano)	$R_p\left(1-t\chi_{r1}\right)\frac{1+r}{r-d}$	$R_p\left(1-t\,F_{SDP,r,1}\right)\frac{1+r}{r-d}$
4	C_{fx} Custo irregular no fim do ano x	$C_{fx}(1-t)(1+d)^x\frac{(1+r)^{n-x}}{(1+r)^n-(1+d)^n}$	$C_{fx}(1-t)F_{PS,d,x}\frac{F_{SP,r,n-x}}{F_{SP,r,n}-F_{PS,d,n}}$
5	C_{px} Custo irregular no princípio do ano x	$C_{px}\left(1-t\chi_{r1}\right)(1+d)^{x-1}\frac{(1+r)^{n-x+1}}{(1+r)^n-(1+d)^n}$	$C_{px}\left(1-t\,F_{SDP,r,1}\right)F_{PS,d,x-1}\frac{F_{SP,r,n-x+1}}{F_{PS,r,n}-F_{PS,d,n}}$
6	C_{nd} Custo inicial não amortizável	$C_{nd}\ 1$	C_{nd}
7	C_L Valor de sucata	$C_L\left[1+t\frac{(1+d)^n-1}{(1+r)^n-(1+d)^n}\right]$	$C_L\left(1+t\frac{F_{PS,d,n}-1}{F_{PS,r,n}-F_{PS,d,n}}\right)$

* Para $d > r, P_{\infty,d>r} = P_{\infty,r>d}$. Para encargo anual, $R_D = (r-d)P_{\infty,r>d}$ para $r > d$ ou $d > r$ Para $d = r$ ver 6.3

6.2 Encargo anual

Quando existe inflação, um custo anual uniforme em termos de preços correntes é um custo que aumenta $(1+d)$ cada ano. Assim, com a inflação, o critério do custo anual uniforme não é constante em termos de UM reais, mas traduz-se por um encargo uniforme que se designa por encargo anual, R_D, e que aumenta do factor $(1+d)$ cada ano, em termos de preços reais.

Para o encargo anual tem-se

$$R_d = (r-d)\,P_{\infty,r\rangle d} \quad r \rangle d \tag{I-99}$$

As grandezas do Quadro (I-6) podem exprimir-se em termos de R_D, a partir da relação (I-99)

6.3 Altos ritmos de inflação

Se $d > r$, então a soma da série (I-96) torna-se infinita.

Mostra-se que

$$P_{\infty,d\rangle r} = -P_{\infty,r\rangle d} \tag{I-100}$$

o que permite usar as expressões tabeladas mudando-lhes o sinal, o que lhes restitui o valor positivo

Para o encargo anual R_D ter-se-á

$$R_D = (d-r)\,P_{\infty,d\rangle r} \quad d \rangle r \tag{I-101}$$

Se $d = r$, deve usar-se o encargo anual R_D, e mostra-se que

$$R_D = \frac{C_d}{n}\left(1 - t\chi_{RA,r,n'}\right)(1+r) \tag{I-102}$$

$$R_D = R\,(1-t)(1+r) \tag{I-103}$$

$$R_D = R_b\left(1 - t\chi_{RA,r,1}\right)(1+r) \tag{I-104}$$

$$R_D = \frac{C_{fx}}{n}(1-t)(1+r) \tag{I-105}$$

$$R_D = \frac{C_{px}}{n}\left(1 - t\chi_{RA,r,1}\right)(1+r) \tag{I-106}$$

$$R_D = C_{nd}(0) = 0 \tag{I-107}$$

$$R_D = C_L\,\frac{t}{n}\,\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}(1+r) \tag{I-108}$$

6.4 Inflação e progresso tecnológico

É evidente que na comparação de custos industriais a inflação aparece sempre como um parâmetro do futuro, isto é, torna-se necessário estimar ou prever o valor da taxa de inflação $\underline{d}$. Esta previsão pode fazer-se a partir dos índices de custo, publicados regularmente em revistas especializadas, e que traduzem a evolução dos preços de equipamentos até um passado próximo; deve notar-se no entanto que aqueles índices de custo reflectem também o progresso tecnológico, pelo que a taxa de inflação deles deduzida não é um valor puro.

Embora teoricamente a inflação e o progresso tecnológico sejam fenómenos independentes, na prática acham-se interligados, dadas as relações que existem entre o avanço tecnológico, a evolução dos salários e o poder de compra. No entanto, convém salientar algumas das suas diferenças. Assim, enquanto que a inflação afecta os custos na generalidade e se processa continuamente, o progresso tecnológico é especifico e evolui descontinuamente, por saltos mais ou menos bruscos. Por outro lado a inflação tende a favorecer os bens de vida longa, ao passo que o progresso tecnológico confere vantagem aos bens de vida curta.

Por último, uma breve nota acerca da deflação, porventura com pouco interesse dadas as tendências que se verificam nas economias de quase todos os países, nomeadamente que o fenómeno da deflação se pode tratar matematicamente como o da inflação, atribuindo a $\underline{d}$ um adequado valor negativo.

EXPRESSÕES PARA O ENCARGO ANUAL R_d

(d=taxa de inflação)

Nº	Tipo de custo	Expressão algébrica para o encargo anual $\left(r > d \;\; e \;\; d > r\right)$	Expressão algébrica para o encargo anual $(r = d)$
1	C_d Custo inicial depreciável	$C_d\left(1 - t\chi_{r,n}\right)\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - (1+d)^n}(r-d)$	$\frac{C_d}{n}(1-t\chi)(1+r)$
2	R Anuidade uniforme	$R(1-t)(1+d)$	$R(1-t)(1+r)$
3	R_p Anuidade uniforme referida ao princípio do ano	$R_p\left(1-t\chi_{r,1}\right)(1+r)$	$R_p(1-t\chi)(1+r)$
4	C_{fx} Custo irregular	$C_{fx}(1-t)(1+d)^x\frac{(1+r)^{n-x}}{(1+r)^n - (1+d)^n}(r-d)$	$\frac{C_{fx}}{n}(1-t)(1+r)$
5	C_{px} Custo irregular referido ao princípio do ano	$C_{px}\left(1-t\chi_{r,1}\right)(1+d)^{x-1}\frac{(1+r)^{n-x+1}}{(1+r)^n - (1+d)^n}(r-d)$	$\frac{C_{px}}{n}(1-t\chi)(1+r)$
6	C_{nd} Custo não depreciável	$C_{nd}(r-d)$	$C_{nd}(0) = 0$
7	C_L Valor residual	$C_L\left[1 + t\frac{(1+d)^n - 1}{(1+r)^n - (1+d)^n}\right](r-d)$	$C_L\frac{t}{n}\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}(1+r)$