introdução aos sistemas dinâmicos

decomposição em fracções racionais

neste texto vamos recordar o processo de decomposição de uma função racional

$$F(x) = P(x)/Q(x),$$

com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios com coeficientes reais, numa soma de funções racionais mais simples.

no que se segue, admitimos que o grau do polinómio $P(x)$ é inferior ao grau do polinómio $Q(x)$. (se não fosse esse o caso, dever-se-ia começar por dividir um pelo outro, obtendo-se, então, como resto da divisão, uma função racional cujo grau do polinómio do numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador.) nesse caso, $F(x) = P(x)/Q(x)$ admite uma expansão em fracções parciais cuja forma depende dos factores lineares e quadráticos em que o polinómio $Q(x)$ se factoriza, havendo 4 casos a considerar.

1. factores lineares não repetidos

se o polinómio $Q(x)$ puder ser factorizado num produto

$$Q(x) \,=\, (x - r_1)\,(x - r_2)\,\ldots\,(x - r_k),$$

com todos os valores r_j distintos, então podemos procurar uma decomposição do tipo

$$F(x) \,=\, \frac{P(x)}{Q(x)} \,=\, \frac{A_1}{x - r_1} \,+\, \frac{A_2}{x - r_2} \,+\, \ldots \,+\, \frac{A_k}{x - r_k},$$

com $A_1, A_2, \ldots, A_k$ números reais.

2. factores lineares repetidos

se $(x - r)^m$, com $m > 1$, é um factor presente na factorização de $Q(x)$, com m o maior inteiro possível, então, **a parte** da decomposição de $F(x) = P(x)/Q(x)$ que corresponde a este factor é do tipo

$$\frac{A_1}{x - r} \,+\, \frac{A_2}{(x - r)^2} \,+\, \ldots \,+\, \frac{A_m}{(x - r)^m},$$

com $A_1, A_2, \ldots, A_m$ números reais.

3. factores quadráticos não repetidos

se $x^2 + a\,x + b$, com a e b constantes reais, é um factor quadrático presente na factorização do polinómio $Q(x)$ que não pode ser reduzido a factores lineares, nem se repete, então, **a parte** da decomposição de $F(x) = P(x)/Q(x)$ que corresponde a este factor pode escrever-se como

$$\frac{A\,x + B}{x^2 + a\,x + b},$$

com A e B números reais.

4. Factores quadráticos repetidos

se $x^2 + a\,x + b$, com a e b constantes reais, é um factor quadrático de multiplicidade m presente na factorização do polinómio $Q(x)$ que não pode ser reduzido a factores lineares, então, **a parte** da decomposição de $F(x) = P(x)/Q(x)$ que corresponde a este factor, $(x^2 + a\,x + b)^m$, pode ser dada como

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + a\,x + b} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + a\,x + b)^2} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(x^2 + a\,x + b)^m}$$

com $A_1, A_2, \ldots, A_m$ e $B_1, B_2, \ldots, B_m$ números reais.

nota: em todos estes quatro casos, os valores das constantes a determinar podem calcular-se através do método dos coeficientes indeterminados, o qual corresponde, após a redução ao mesmo denominador de ambos os lados da igualdade, a igualar os coeficientes das diferentes potências de x nos polinómios do numerador.

5. exemplos

5.1

$$P(x)/Q(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2} \implies A_1 = -1/2; \quad A_2 = -1/3; \quad A_3 = 5/6$$

5.2

$$P(x)/Q(x) = \frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+1} \implies A_1 = 2; \quad A_2 = -1; \quad A_3 = -2$$

5.3

$$P(x)/Q(x) = \frac{1-4x+2x^2}{(x+1)(x^2-x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B\,x + C}{x^2-x-1} \implies A = 7; \quad B = -5; \quad C = 8$$

5.4

$$P(x)/Q(x) = \frac{1+4x-x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{x^2+1} + \frac{D\,x + E}{(x^2+1)^2} \implies A = 1;\ B = -1;\ C = 0;\ D = -2;\ E = 4$$