



Nome

Número

Todas as respostas devem ser justificadas. Responda aos exercícios 1 e 3 nesta folha.

Exercício 1. [6 valores] Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

- a) um número irracional positivo menor do que 10^{-4} ;
- b) um conjunto não limitado cujo derivado seja vazio;
- c) um conjunto X tal que $\bar{X} = [0, 2]$ e $\text{int } X =]0, 1[$;
- d) uma função $f : [0, 1] \cup \{3\} \cup [4, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$, contínua;
- e) uma função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua e não limitada;
- f) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sobrejectiva, derivável em \mathbb{R}^+ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Exercício 2. [5 valores] Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |5x - 12| = |x|\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| < 3\} \quad \text{e} \quad S = A \cup B.$$

- a) Mostre que $S =]-2, 1[\cup \{2, 3\}$.
- b) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo e o ínfimo do conjunto S .
- c) Diga, justificando, se S é aberto ou fechado.
- d) Determine a fronteira, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de S .

Exercício 3. [4 valores] Considere a função $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \ln x$. Apresente, para cada alínea, analiticamente, um prolongamento de f a \mathbb{R} que seja:

a) descontínuo;

b) contínuo mas não derivável;

c) derivável mas não duas vezes derivável;

d) duas vezes derivável.

Exercício 4. [3 valores] Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

Exercício 5. [2 valores] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 3, em torno de 1, é

$$x^3 - 2x^2 + 5x.$$

Determine os polinómios de Taylor de f , de ordens 1 e 2, em torno de 1.