CORREÇÃO DO 2º TESTE DE CÁLCULO/LEI 16/01/2013

Exercício 1

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x+1+\ln x}{x^3-3x+2} = \frac{0}{0}$$

Então, aplicando a Regra de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x+1+\ln x}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{-1+1/x}{3x^2-3} = \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{3x(x-1)(x+1)}$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{1}{3x(x+1)} = -\frac{1}{6}$$

Exercício 2

$$\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = 2\int (2x+1)(x^2+x+1)^{-1/2}dx$$

$$= 2\,\frac{(x^2+x+1)^{1/2}}{1/2} + C = 4\sqrt{x^2+x+1} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Exercício 3

$\sqrt[3]{x} = y \iff x = y^3$ Então $dx = 3y^2dy$

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x^2})\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{3y^2dy}{(1+y^2)y} = \frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

$x=1 \iff y=\sqrt[3]{1}=1$

$x=2 \iff y=\sqrt[3]{2}$

$$= \frac{3}{2}\ln(1+y^2)\Big]_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{2}\left(\ln(1+\sqrt[3]{4}) - \ln 2\right)$$

Exercício 4

$$\int_0^1 x^2\ln(x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$

$u' = x^2 \qquad u = x^3/3$

$v = \ln(x^2+1) \qquad v' = \frac{2x}{x^2+1}$

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 1\right) - \frac{2}{3}\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

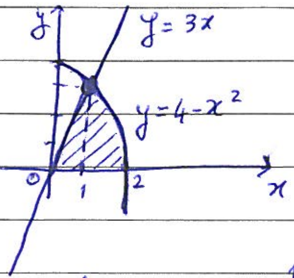
$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{9} + \frac{2}{3} - \frac{2\operatorname{arctg} 1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$$

NOTA: Alternativamente ao cálculo à esquerda, poder-se-ia efetuar a divisão do polinómio x^4 pelo polinómio x^2+1.

Exercício 5

a) 

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 3x = 4 - x^2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

b) $$\text{Área}(R) = \int_0^1 (3x - 0)\,dx + \int_1^2 (4 - x^2 - 0)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{2} + \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6}$$

Exercício 6

A série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{(-2)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ é convergente, pelo critério de d'Alembert, uma vez que $\lim_n \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_n \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$.

Uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$ é convergente. NOTA: Poder-se-ia utilizar o critério de Leibniz.

Exercício 7

a) $f(0) = 0 + 1 - e^0 = 0$

$f'(x) = 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável. Se f tivesse um zero em $x_0 \neq 0$, aplicando o Teorema de Rolle a $f: [0, x_0] \to \mathbb{R}$, se $x_0 > 0$, e a $f: [x_0, 0] \to \mathbb{R}$, se $x_0 < 0$, existiria um x_1 pertencente ao intervalo aberto de extremos 0 e x_0 tal que $f'(x_1) = 0$, o que contraria o facto de que f' tem um único zero, $x = 0$. Então f só se anula em $x = 0$.

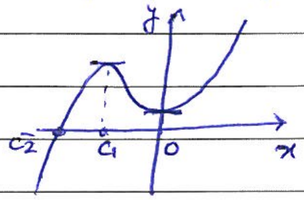
Exercício 8

a) FALSA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ satisfaz $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ mas $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmónica ou série de Riemann com expoente $\alpha = 1$).

b) FALSA

A função cujo gráfico se esboça abaixo é derivável, a sua derivada anula-se nos pontos c_1 e 0 e a função anula-se apenas no ponto $x = c_2$.



c) VERDADEIRA

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Então

$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^{x_2} f(t)dt - \int_0^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt > 0$, uma vez que $f > 0$ e o integral entre x_1 e x_2 de f representa a área abaixo do gráfico de $f|_{[x_1,x_2]}$.

d) VERDADEIRA

$$\int_{-1}^{0} f(x+1)\,dx = \int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1 f(x)\,dx$$

fazendo a mudança de variável $x+1=y$ (então $dx = dy$ e se $x=0$ temos $y=-1$ e se $x=1$ temos $y=0$)