



Universidade do Minho

Textos de apoio de Engenharia Económica PARTE I

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Paula Varandas Ferreira

2016/2017

| | |
|--|-----------|
| ENQUADRAMENTO | 3 |
| 1. CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA | 4 |
| 1.1 O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO | 4 |
| 1.2 O JURO (INTERESSE) | 4 |
| 1.3 O JURO SIMPLES E COMPOSTO | 5 |
| 1.4 TAXA DE JURO NOMINAL E EFETIVA | 8 |
| 1.5 PAGAMENTOS UNIFORMES | 9 |
| 1.6 PERPETUIDADES | 12 |
| 1.7 RESUMO | 12 |
| 2. COMPARAÇÃO DE CUSTOS | 13 |
| 2.1 AVALIAÇÃO PELO VALOR PRESENTE | 14 |
| 2.2 AVALIAÇÃO PELA ANUIDADE EQUIVALENTE | 15 |
| 2.3 COMPARAÇÃO DE OPÇÕES COM IGUAL TEMPO DE VIDA | 16 |
| 2.4 COMPARAÇÃO DE OPÇÕES DIFERENTE TEMPO DE VIDA | 17 |
| 3. O EFEITO DOS IMPOSTOS NA COMPARAÇÃO DE CUSTOS | 19 |
| 3.1 AMORTIZAÇÕES | 19 |
| 3.2 FLUXOS MONETÁRIOS APÓS IMPOSTOS | 20 |
| 4. AVALIAÇÃO DE PROJETOS | 23 |
| 4.1 VALOR ATUAL LÍQUIDO (VAL) | 24 |
| 4.2 TAXA INTERNA DE RENTABILIDADE | 25 |
| 4.3 ANUIDADE EQUIVALENTE | 26 |
| 4.4 TEMPO DE RECUPERAÇÃO | 27 |
| 4.5 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS | 27 |
| 5. COMPARAÇÃO E SELEÇÃO DE PROJETOS DE INVESTIMENTO | 29 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 32 |
| ANEXO 1- TABELAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA | 34 |

Enquadramento

As funções diversificadas e abrangentes de um engenheiro requerem que as suas competências vão muito para além dos conhecimentos técnicos específicos de cada especialidade. É necessário reconhecer e compreender o contexto económico, ambiental e social na tomada de decisão em projetos de engenharia. Assim, a utilização de recursos monetários escassos de um modo eficiente é um critério essencial na seleção de alternativas de investimento tecnicamente viáveis. A análise financeira de custos e benefícios associados a diferentes investimentos, representa assim uma disciplina fundamental para a formação de um profissional de engenharia.

1. Conceitos básicos de matemática financeira

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos básicos de matemática financeira essenciais para o decisor avaliar financeiramente os projetos.

1.1 O valor do dinheiro no tempo

A avaliação de um projeto envolve a análise de custos e benefícios, expressos em valores monetários, que ocorrem em diferentes momentos da vida do projeto. De modo a comparar esses fluxos monetários é necessário recorrer ao conceito de *taxa de juro* ou *taxa de interesse* que permite avaliar como o valor do dinheiro varia no tempo. 1 € agora vale mais do que 1 € amanhã; 1 € amanhã vale mais do que 1 € depois de amanhã... Quais as razões para isso?

- Os valores futuros são afetados pela inflação; deste modo o poder de compra de 1 € hoje é superior ao de 1 € amanhã.
- Existe risco e incerteza. Um rendimento ou despesa que ocorra hoje é um valor certo. O rendimento ou despesa futura pode variar de acordo com o valor antecipado.
- Existe necessidade de retorno. Ao incorrer numa despesa hoje, o investidor espera ser recompensado por um retorno no futuro que compense o deferimento do consumo.

Deste modo o investidor espera obter um prémio pelo seu investimento que compense os três fatores: inflação; risco e deferimento. Mesmo que a inflação não seja considerada, uma quantia hoje continua a ser mais valiosa do que a mesma quantia no futuro.

A definição da taxa de interesse tem grande importância na avaliação de projetos. Os benefícios futuros de um projeto, em valores absolutos, podem parecer muito superiores aos custos incorridos de imediato mas, quando reduzidos ao mesmo espaço temporal usando a taxa de interesse, a realidade pode ser substancialmente diferente.

1.2 O juro (interesse)

O *juro* ou *interesse* é a medida do valor do dinheiro no tempo e permite quantificar a diferença entre o dinheiro inicialmente investido/emprestado e o valor final obtido/devido. O capital inicial investido ou emprestado é chamado o *principal*. Se o principal é investido no momento t_0 e se esse valor acumular juros até ao momento t_1 , o juro será:

$$\text{Juro} = (\text{valor final obtido})_{t_1} - (\text{principal})_{t_0} \quad (1)$$

Do mesmo modo se o principal é emprestado no momento t_0 , o juro será:

$$\text{Juro} = (\text{valor final devido})_{t_1} - (\text{principal})_{t_0} \quad (2)$$

Se este juro ou interesse for apresentado sob a forma de uma taxa percentual será:

$$\text{Taxa de juro (interesse)} = \frac{\text{Interesse no período de tempo } t}{\text{Principal original}} \times 100 (\%) \quad (3)$$

Exemplo 1

Uma empresa de construção civil investe 10 000 € num novo projeto, obtendo 10 650 € 12 meses depois. Determine: (a) O juro ou interesse subjacente ao projeto. (b) A taxa de juro ou interesse sobre o capital investido.

(a) Usando a eq. (1): $\text{Juro} = 10650 - 10000 = 650 \text{ €}$

(b) Usando a eq. (3): $\text{Taxa de juro} = 650/10000 = 6,5 \% \text{ ao ano}$

1.3 O juro simples e composto

Para calcular o valor do dinheiro acumulado durante mais do que um período poderá ser considerado juro simples ou juro composto.

No caso do juro simples, o juro acumulado é diretamente proporcional ao principal envolvido. O interesse total acumulado (I) ao longo de um determinado período é:

$$I = P \times i \times n \quad (4)$$

P- principal; i- taxa de interesse; n- número de períodos.

Deste modo o valor futuro do dinheiro (F) será dado por:

$$F = P + I = P + P \times i \times n = P [1 + (i \times n)] \quad (5)$$

Exemplo 2

Uma empresa pede um empréstimo no valor de 12 000 € por um período de 4 anos e com uma taxa de juro de 5% em regime simples. Quanto deverá pagar ao fim do período do empréstimo?

Usando a eq. (5): $F = 12000 [1 + (0,05 \times 4)] = 14400 \text{ €}$

| Ano | Empréstimo | Interesse | Divida acumulada | Divida paga |
|-----|------------|-----------|------------------|-------------|
| 0 | 12000 | | | |
| 1 | | 600 | 12600 | |
| 2 | | 600 | 13200 | |
| 3 | | 600 | 13800 | |
| 4 | | 600 | 14400 | 14400 |

Valores em €

No caso do juro composto, o juro devido em cada período de tempo é calculado sobre o principal mais o juro acumulado em todos os períodos anteriores. Deste modo o capital vai aumentando sucessivamente ao longo do tempo.

O interesse (I_1) ao fim do primeiro período é: $I_1 = P \times i$

O valor do capital (F_1) ao fim do primeiro período é: $F_1 = P + P \times i = P (1+i)$

O interesse (I_2) ao fim do segundo período é: $I_2 = (P+I_1) \times i = F_1 \times i$

O valor do capital (F_2) ao fim do primeiro período é: $F_2 = P (1+i) (1+i) = P(1+i)^2$

(...)

A expressão generalizada para obter o valor futuro do dinheiro (F) para um período de tempo (n) á taxa de juro composto (i) sobre o capital inicial (P), também conhecida por expressão de capitalização é:

$$F = P (1+i)^n = P F_{PF,i,n} \quad (6)$$

Onde $F_{PF,i,n} = (1+i)^n$ é o fator do juro composto que pode ser calculado ou obtido em tabelas de matemática financeira como as que se apresentam no Anexo 1.

A relação inversa permite obter a expressão generalizada para obter o valor do capital inicial (P) a partir do valor futuro (F) para um período de tempo (n) á taxa de juro composto (i).

$$P = F (1+i)^{-n} = F F_{FP,i,n} \quad (7)$$

Onde $F_{FP,i,n} = (1+i)^{-n}$ é o fator do valor atual que pode ser calculado ou obtido em tabelas de matemática financeira como as que se apresentam no Anexo 1.

Exemplo 3

Uma empresa pede um empréstimo no valor de 12 000 € por um período de 4 anos e com uma taxa de juro de 5% ao ano em regime composto. Quanto deverá pagar ao fim do período do empréstimo?

Usando a eq. (6):

$$F = 12000 (1+0,05)^4 = 14586,1 \text{ € ou } F = 12000 \times F_{PF,5,4} = 12000 \times 1,2155 = 14586,1 \text{ €}$$

| Ano | Empréstimo | Interesse | Divida acumulada | Divida paga |
|--------------|------------|-----------|------------------|-------------|
| 0 | 12000 | | | |
| 1 | | 600,0 | 12600,0 | |
| 2 | | 630,0 | 13230,0 | |
| 3 | | 661,5 | 13891,5 | |
| 4 | | 694,6 | 14586,1 | 14586,1 |
| Valores em € | | | | |

O exemplo 3 põe em evidência também o princípio da equivalência. De acordo com este exemplo 12000 € agora são equivalentes a possuir 14586,1 € dentro de 4 anos ou seja têm o mesmo valor económico. Este princípio da equivalência é essencial para a avaliação financeira de projetos, uma vez que permite que diferentes valores de fluxos monetários que ocorram em diferentes momentos possam ser comparados num instante de tempo comum.

Exemplo 4

Uma empresa pede um empréstimo no valor de 10 000 € por um período de 5 anos e com uma taxa de juro de 8% ao ano em regime composto. Compare os diferentes planos de pagamento disponíveis:

| Ano | Empréstimo | Plano A | Plano B | Plano C |
|--------------|------------|---------|---------|---------|
| 0 | 10000 | | | |
| 1 | | 2504,6 | 0 | |
| 2 | | 2504,6 | 0 | 5000 |
| 3 | | 2504,6 | 0 | |
| 4 | | 2504,6 | 0 | |
| 5 | | 2504,6 | 14693,3 | 8394,7 |
| Total | 10000 | 12523 | 14693,3 | 13394,7 |
| Valores em € | | | | |

Para cada um destes planos é possível calcular o valor presente equivalente aos pagamentos a efetuar:

Plano A: $P = 2504,6 (1+0,08)^{-1} + 2504,6 (1+0,08)^{-2} + 2504,6 (1+0,08)^{-3} + 2504,6 (1+0,08)^{-4} + 2504,6 (1+0,08)^{-5} = 10000 \text{ €}$

$$\text{Plano B: } P = 14693,3 (1+0,08)^{-5} = 10000 \text{ €}$$

$$\text{Plano C: } P = 5000 (1+0,08)^{-2} + 8394,7 (1+0,08)^{-5} = 10000 \text{ €}$$

Os planos são todos economicamente equivalentes, para a taxa de juro de 8% ao ano.

1.4 Taxa de juro nominal e efetiva

Na maior parte dos casos, a taxa de juro é dada numa base anual. No entanto, frequentemente, o juro é vencido várias vezes ao longo de um ano (capitalização). Por exemplo, se o juro for vencido duas vezes num ano com uma taxa de juro de 6% em cada período de meio ano, a taxa pode ser expressa como 12% ao ano com capitalização semestral. Isto é a taxa de juro anual nominal é igual a 12%. Veja-se um exemplo, se um banco oferecer uma taxa de juro nominal de 12% ao ano para um depósito de 1000 €, teremos ao fim de 1 ano:

$$\text{com capitalização anual } F = 1000 \times (1+0,12) = 1120 \text{ €}$$

$$\text{com capitalização semestral: } F = 1000 \times (1+0,06)^2 = 1124 \text{ €}$$

Deste modo o cálculo do juro total num período n depende da capitalização da taxa.

A utilização de taxas efetivas (equivalentes) elimina estas questões e torna assim os cálculos independentes do período de capitalização. Veja-se outro exemplo, se um banco oferecer uma taxa de juro efetiva de 12% ao ano para um depósito de 1000 €, teremos ao fim de 1 ano:

$$F = 1000 \times (1+0,12) = 1120 \text{ €}$$

A taxa efetiva semestral associada a esta conta poderia ser calculada por uma relação de equivalência:

$$1000 \times (1+0,12) = 1000 \times (1+i_{\text{semestral}})^2 \Leftrightarrow i_{\text{semestral}} = 5,83\%$$

É fundamental efetuar os cálculos de matemática financeira utilizando sempre as taxas de juro efetivas e não as anunciadas ou nominais.

Assim, a partir de uma taxa nominal é sempre possível calcular a taxa efetiva referente ao período de capitalização sabendo qual a periodicidade dessa capitalização. Considerando uma taxa nominal i_n referente a um determinado período e que capitaliza m vezes nesse período a taxa efetiva (i_{ef}) será dada pela relação de proporcionalidade:

$$i_{ef} = i_n / m, \text{ para o período } m \quad (8)$$

Para converter uma taxa de juro efetiva referentes a um período numa taxa efetiva referente a um subperíodo p, utilizaremos a relação da equivalência:

$$(1+i) = (1+i_p)^p, \text{ onde } p \text{ é o numero de subperíodos dentro do período da taxa} \quad (9)$$

Exemplo 5

O Sr. Antunes colocou 1000 € num banco durante 5 anos à taxa anual nominal de 16%. Determine o valor acumulado se:

(a) A capitalização for anual.

Se a taxa é dada para o mesmo período da capitalização, significa que a taxa nominal é simultaneamente a taxa efetiva. Verificando pela equação (7) teremos: $i_{\text{ano}} = 16\% / 1 = 16\%$.

$$F = 1000 \times (1+0,16)^5 = 2100,34 \text{ €}$$

(b) A capitalização for mensal.

Como o período de capitalização é o mês é necessário calcular a taxa mensal corresponde, pela equação (8): $i_{\text{mês}} = 16\% / 12 = 1,33\%$.

$$F = 1000 \times (1+0,0133)^{60} = 2209,44 \text{ €}$$

Ou, utilizando a taxa anual efetiva: $(1+0,0133)^{12} = (1+i_{\text{ano}}) \Leftrightarrow i_{\text{ano}} = 17,18\%$

$$F = 1000 \times (1+0,1718)^5 = 2209,44 \text{ €}$$

Exemplo 6

Considerando a taxa anual nominal de 18% com capitalização semestral, determine a taxa de juro mensal efetiva:

Uma vez que a capitalização é semestral o juro será vencido 2 vezes em cada período de 1 ano. Pela equação (8) teremos a taxa semestral efetiva: $i_s = 18\% / 2 = 9\%$.

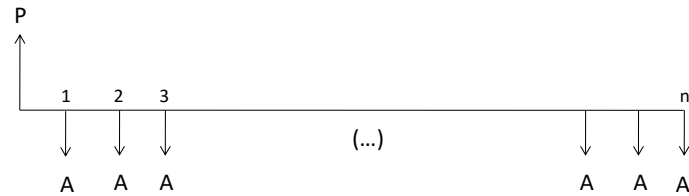
Pela equação (9) teremos a taxa mensal efetiva, com $p = 6$ uma vez que cada semestre tem 6 meses:

$$(1+0,09) = (1+i_m)^6 \Leftrightarrow i_m = 1,45\%$$

1.5 Pagamentos uniformes

Frequentemente os projetos/investimentos requerem pagamentos ou recebimentos uniformes, caracterizados por um valor A constante e pago no final de cada sub-período durante um

período de tempo n . Este tipo de pagamentos é frequente a nível empresarial e também a nível pessoal quando se contrai um empréstimo para a aquisição de uma casa ou de um carro por exemplo. A figura seguinte esquematiza o exemplo de um empréstimo P contraído em $n=0$, amortizado com pagamentos uniformes A no final de cada ano durante n períodos.



Usando a relação de atualização (equação 7) podemos calcular o valor de P como a somatórios dos valores de A atualizados à taxa de interesse i :

$$P = A (1+i)^{-1} + A (1+i)^{-2} + A (1+i)^{-3} + \dots + A (1+i)^{-n}$$

$$P = A (1+i)^{-1} [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n+1}] \quad (10)$$

Multiplicando por $(1+i)^{-1}$:

$$P (1+i)^{-1} = A (1+i)^{-1} [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}] \quad (11)$$

(11)-(10):

$$P [(1+i)^{-1} - 1] = A (1+i)^{-1} [(1+i)^{-n+1}] \quad \square$$

$$P = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} (1+i)^{-1} \Leftrightarrow P = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A F_{AP,i,n} \quad (12)$$

Onde $F_{AP,i,n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ é o fator de anuidade- valor presente que pode ser calculado ou obtido em tabelas de matemática financeira como as que se apresentam no Anexo 1.

A relação inversa permite obter a expressão generalizada para obter o valor da anuidade a pagar no fim de cada ano (A) para recuperar (ou amortizar) um investimento (P) num período de tempo (n) á taxa de juro composto (i).

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P F_{PA,i,n} \quad (13)$$

Onde $F_{PA,i,n} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ é o fator de recuperação de capital que pode ser calculado ou obtido

em tabelas de matemática financeira como as que se apresentam no Anexo 1.

Exemplo 7

Qual o valor do investimento a realizar hoje num fundo que rende 10% ao ano, de modo a poder retirar 200 € no final de cada ano durante os próximos 4 anos, esgotando por completo o fundo no final desse período?

Pela equação (12) teremos: $P = 200 \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1(1+0,1)^4} = 200 F_{AP,10\%,4} = 200 \times 3,1699 = 634 \text{ €}$

Combinando a equação (12) com a equação (6) obtemos:

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = AF_{AF,i,n} \quad (14)$$

Onde $F_{AF,i,n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é o fator de anuidade- valor futuro que pode ser calculado ou obtido

em tabelas de matemática financeira como as que se apresentam no Anexo 1.

A relação inversa permite obter a expressão generalizada para obter o valor da anuidade a pagar no fim de cada ano (A) a partir do valor futuro (F) ao longo de um período de tempo (n) á taxa de juro composto (i).

$$A = F \frac{i}{(1+i)^n - 1} = AF_{FA,i,n} \quad (15)$$

Onde $F_{FA,i,n} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é o fator do fundo de liquidação que pode ser calculado ou obtido em

tabelas de matemática financeira como as que se apresentam no Anexo 1.

Exemplo 8

São feitos depósitos no valor de 110 € no final de cada ano num fundo de investimento que rende 8% ao ano. Quanto estará acumulado no fundo ao fim de 12 anos?

$$\text{Pela equação (14) teremos: } F = 110 \frac{(1 + 0,08)^{12} - 1}{0,08} = 110 F_{AF,8\%,12} = 110 \times 18,9771 = 2087,48$$

€

1.6 Perpetuidades

Um projeto pode ter uma sequência infinita de recebimentos ou pagamentos. Este é o caso de grandes projetos de engenharia como túneis ou barragens que permitem um serviço muito prolongado. O custo capitalizado (P_{∞}) representa o valor presente dos custos e benefícios uniformes de um projeto com tempo de vida infinito e pode ser calculado a partir da equação 12 com $n=\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^{-n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^{-n} = 1 - 0 = 1$$

$$P_{\infty} = A \frac{1}{i} \quad (16)$$

Exemplo 9

Uma fundação pretende criar um fundo de investimento que lhe permita distribuir anualmente 80000 € para um período de tempo infinito. Se a taxa de interesse do fundo for de 7,75% quanto deverá ser investido hoje?

$$\text{Pela equação (15) teremos: } P_{\infty} = 80000 \frac{1}{0,0775} = 1032258 \text{ €}.$$

Repare-se que no exercício anterior, 80000 € corresponde exatamente ao valor do juro gerado anual pelo investimento inicial. Deste modo no cálculo do custo capitalizado assume-se que o juro ou interesse gerado pelo investimento pode ser gasto/distribuído mas o principal não decresce, caso contrário o investimento iria esgotar-se antes do infinito.

1.7 Resumo

Este capítulo abordou o conceito de equivalência e taxa de juro e a sua utilização nos fatores financeiros, que permitem efetuar cálculos tendo em consideração o valor do dinheiro no

tempo. O claro entendimento destes princípios financeiros básicos é fundamental para realizar uma avaliação económica de um projeto de engenharia. A tabela seguinte resume as principais relações apresentadas anteriormente.

$$F = P (1+i)^n = P F_{PF,i,n}$$

$$P = F (1+i)^{-n} = P F_{FP,i,n}$$

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A F_{AP,i,n}$$

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P F_{PA,i,n}$$

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A F_{AF,i,n}$$

$$A = F \frac{i}{(1+i)^n - 1} = A F_{FA,i,n}$$

$$P_{\infty} = A \frac{1}{i}$$

Estas relações assumem que o valor presente (P) ocorre no princípio do período em análise, as anuidades (A) e o valor futuro (F) ocorrem no fim do período em análise. Uma vez conhecidos os métodos de valorização do dinheiro no tempo é agora possível avaliar um projeto/investimento ou um conjunto de projetos do ponto de vista financeiro.

2. Comparação de custos

O processo de tomada de decisão implica a análise dos fluxos financeiros de cada alternativa de investimento de modo a que estes possam ser avaliados em termos da sua eficiência económica. Esta avaliação baseia-se na aplicação do princípio da equivalência, que permite traduzir diferentes fluxos financeiros numa soma equivalente ou numa série de fluxos com horizontes temporais comparáveis.

Para a comparação de máquinas ou diferentes propostas de investimento será necessário conhecer diversos elementos que permitem caracterizar cada alternativa:

- A vida económica do projeto, definida de acordo com as características técnicas do equipamento e com a aceitação do produto pelo mercado (n).
- Os fluxos financeiros do projeto em termos de valores monetários envolvidos e momentos em que ocorrem ao longo da vida económica do projeto. Onde se incluem:
 - ⇒ C_i - Custo de aquisição, que poderá ocorrer na totalidade no início do projeto ou implicar pagamentos adicionais ao longo da vida do projeto.
 - ⇒ R - Custos regulares, que representam pagamentos a efetuar periodicamente ao longo da vida do projeto.
 - ⇒ C_x - Custos irregulares, que representam pagamentos a efetuar em determinados momentos ao longo da vida do projeto.
 - ⇒ R' - Recebimentos, que representam proveitos/benefícios auferidos ao longo da vida do projeto.
 - ⇒ VR - Valor residual, que representa o valor que pode ser recuperado após a vida útil do projeto.
- A taxa de interesse a aplicar na atualização dos fluxos financeiros. Esta taxa deverá ser a taxa mínima exigida pelo investidor, conhecida como a taxa mínima de atratividade.

Na comparação de opções às quais não são atribuídos benefícios financeiros diretos ou que trarão os mesmos benefícios, a análise será feita apenas com base no custo total e a escolha deverá recair naquela que apresentar um menor custo em valor absoluto.

2.1 Avaliação pelo valor presente

Uma das formas mais simples de proceder à comparação alternativas é reportar todos os fluxos financeiros ao momento presente. O valor presente (VP) representa o valor de uma determinada opção reportado ao momento atual medido em unidades monetárias. O cálculo de VP deverá ser realizada somando todos proveitos ou benefícios atualizados obtidos pelo projeto e subtraindo todos os custos atualizados incorridos pelo projeto.

No caso de projetos que não geram um benefício quantificável em valores monetários (por exemplo um equipamento auxiliar de produção ou administrativo), o valor de VP apenas representará a totalidade dos custos e apresentará assim um valor negativo.

Exemplo 10

Uma casa arrendada gera 12000 € anuais. Os custos anuais de manutenção são 3000 €. Sabendo que se estima que a casa pode ser vendida por 145000 € dentro de 10 ano, quanto poderá ser pago por ela agora assumindo que taxa de interesse mínima exigida pelo investidor é de 18%.

$$VP = -C_i + 12000 F_{AP,18\%,10} - 3000 F_{AP,18\%,10} + 145000 F_{FP,18\%,10} = -C_i + 68151$$

Para o investimento ser lucrativo deverá ter um $VP > 0$.

$$-C_i + 68151 > 0 \Leftrightarrow C_i < 68151 \text{ €}.$$

O custo de aquisição da casa deverá ser inferior a 68151 €.

2.2 Avaliação pela anuidade equivalente

Este critério é uma variante do VP, convertendo todos os pagamentos e recebimentos num valor uniforme anual (A), ao longo da vida útil do projeto ou equipamento (n). Define-se como:

$$A = VP \times F_{PA,i,n} \quad (17)$$

Mais uma vez no caso de decisões de investimento que não geram um benefício quantificável em valores monetários (por exemplo um equipamento auxiliar de produção ou administrativo), o valor de A apenas representará o custo total anual equivalente.

Exemplo 11

Um apartamento vai ser adquirido por 120 000 €. Os custos anuais de manutenção são 3000 € e estima-se que a casa possa ser vendida por 110000 € dentro de 15 ano. Se o investidor pretender arrendar o apartamento qual deverá ser o valor da renda anual a cobrar, sabendo que o investidor pretende obter uma taxa de interesse de 15% ao ano? E a renda mensal?

$$VP = -120000 - 3000 F_{AP,15\%,15} + 110000 F_{FP,15\%,15} = -124023,7$$

$$A = 124023,7 F_{PA,15\%,15} = 21210 \text{ €/ano}$$

Para o investimento ser lucrativo o apartamento deverá ser arrendado por 21210 €/ano.

$$(1+0,15) = (1+i_m)^{12} \Leftrightarrow i_m = 1,171\%$$

$$A = 21210 F_{FA; 1,171\%; 12} = 1656 \text{ €/mês ou}$$

$$A = 124023,7 F_{PA; 1,17\%; 180} = 1656 \text{ €/mês}$$

2.3 Comparação de opções com igual tempo de vida

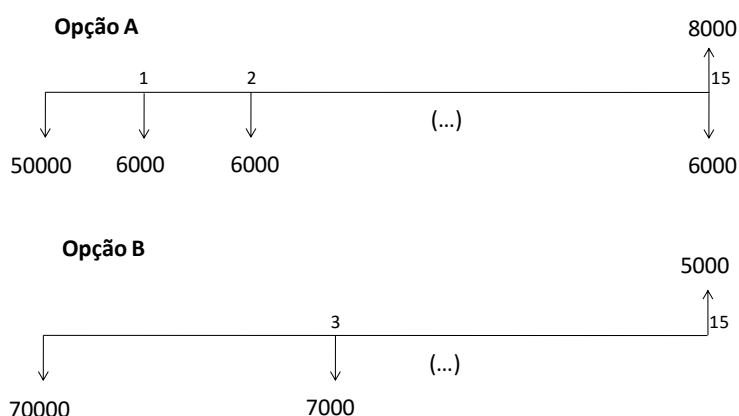
No caso de se pretender comparar projetos ou opções de investimento com igual tempo de vida estimado o cálculo poderá ser realizado de forma direta, com a opção a apresentar maior valor económico a ser a mais desejável do ponto de vista financeiro.

Exemplo 12

Compare as seguintes propostas para aquisição de uma máquina, assumindo uma taxa de interesse de 12% ao ano.

| Custos | Opção A | Opção B |
|--|----------------|----------------|
| <i>Custo inicial (C_i)</i> | 50000 | 70000 |
| <i>Custos anuais de manutenção (R)</i> | 6000 | -- |
| <i>Substituição de peças ao fim do terceiro ano (C_{β})</i> | -- | 7000 |
| <i>Valor residual (VR)</i> | 8000 | 5000 |
| <i>Tempo de vida (n)</i> | 15 | 15 |

Valores em €



$$VP (\text{Opção A}) = -50000 - 6000 F_{AP,12\%,15} + 8000 F_{FP,12\%,15} = -89404 \text{ €}$$

$$VP (\text{Opção B}) = -70000 - 7000 F_{FP,12\%,3} + 5000 F_{FP,12\%,15} = -74069 \text{ €}$$

A opção B deverá ser selecionada porque o seu custo total (valor absoluto) é inferior ao da máquina A.

A comparação poderia também ser feita recorrendo à anuidade equivalente obtendo-se resultados semelhantes:

$$A (\text{Opção A}) = (-50000 - 6000 F_{AP,12\%,15} + 8000 F_{FP,12\%,15}) F_{PA,12\%,5} = -13127 \text{ €/ano}$$

$$A (\text{Opção B}) = (-70000 - 7000 F_{FP,12\%,3} + 5000 F_{FP,12\%,15}) F_{PA,12\%,5} = -10875 \text{ €/ano}$$

Exemplo 13

Um investidor está a analisar três alternativas incluídas num programa de modernização da linha de produção.

| | Alternativa A | Alternativa B | Alternativa C |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|
| Custo inicial | 10000 | 15000 | 20000 |
| Benefícios anuais | 1990 | 2530 | 3310 |
| Custos anuais | 400 | 400 | 550 |
| Vida útil | 10 | 10 | 10 |

(€)

Assumindo uma taxa mínima de atratividade de 6% ao ano, qual das alternativas deverá ser selecionada?

$$VP (\text{Opção A}) = -10000 + (1990-400) F_{AP,6\%,10} = 1702 \text{ €}$$

$$VP (\text{Opção B}) = -15000 + (2530-400) F_{AP,6\%,10} = 677 \text{ €}$$

$$VP (\text{Opção C}) = -20000 + (3310-550) F_{AP,6\%,10} = 314 \text{ €}$$

A opção A deverá ser selecionada porque $VP_A > VP_B > VP_C$.

2.4 Comparação de opções diferente tempo de vida

No caso de se pretender comparar projetos ou opções de investimento com diferente tempo de vida o cálculo deverá ser realizado reportando ao mesmo número de anos. Se a análise não for feita considerando um período de tempo comum, o valor presente irá geralmente favorecer a opção com menor tempo de vida uma vez que implica menos custos, mesmo que esta não seja a mais económica.

Frequentemente recorre-se à comparação das opções considerando um tempo de vida igual o mínimo múltiplo comum (mmc) dos tempos de vida das opções em análise. Com este método assume-se que os fluxos financeiros de uma opção se repetem ao longo de um período de tempo igual ao mmc, estabelecendo-se assim um horizonte comum a ambas as alternativas. Por exemplo, se duas opções estão a ser comparadas, uma com tempo de vida igual a 6 anos e outra com tempo de vida igual a 9 anos, assume-se um projeto a 18 anos, o mmc entre 6 e 9. Deste modo, a primeira opção será analisada para 3 ciclos de vida e a segunda opção será analisada para 2 ciclos de vida.

Exemplo 14

Um investidor tem duas propostas para construção de um armazém. Uma será feita em madeira e a outra em aço. A tabela seguinte caracteriza financeiramente as opções. Compare as opções com base no valor presente e assumindo uma taxa de interesse de 12% ao ano.

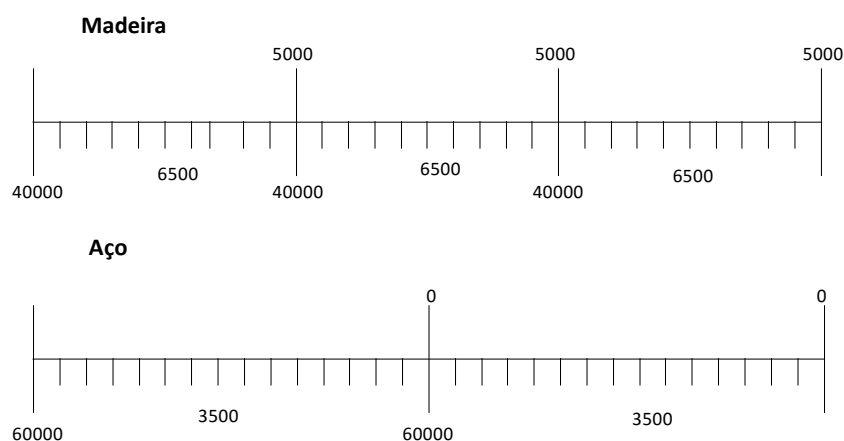
| Custos | Madeira | Aço |
|---|----------------|------------|
| <i>Custo inicial (C_i)</i> | 40000 | 60000 |
| <i>Custos anuais de manutenção (R)</i> | 6500 | 3500 |
| <i>Valor residual (VR)</i> | 5000 | -- |
| <i>Tempo de vida (n)</i> | 10 | 15 |

Valores em €

$\text{mmc}(10, 15) = 30$ anos

A análise será assim realizada a 30 anos.

O ciclo da opção madeira deverá ser repetido 3 vezes e o ciclo da opção aço deverá ser repetido 2 vezes conforme ilustra o diagrama seguinte.



$$\begin{aligned} \text{VP (Madeira)} &= -40000 (1 + F_{\text{FP},12\%,10} + F_{\text{FP},12\%,20}) - 6500 F_{\text{AP},12\%,30} + 5000 (F_{\text{FP},12\%,10} + F_{\text{FP},12\%,20} + F_{\text{FP},12\%,30}) \\ &= -107423 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\text{VP (Aço)} = -60000 (1 + F_{\text{FP},12\%,15}) - 3500 F_{\text{AP},12\%,30} = -99154 \text{ €}$$

A opção aço deverá ser selecionada porque o seu custo total (valor absoluto) é inferior ao da opção madeira.

A técnica do mmc pode-se tornar morosa e, em alternativa pode-se recorrer ao critério da anuidade na seleção de projetos com diferentes tempos de vida. Esta técnica baseia-se também no pressuposto da possibilidade de repetição das condições de realização dos investimentos ao longo do tempo.

Exemplo 15

Compare as opções apresentadas no exercício anterior com base na anuidade equivalente e assumindo uma taxa de interesse de 12% ao ano.

$$A(\text{Madeira}) = -40000 F_{PA,12\%,10} - 6500 + 5000 F_{FA,12\%,10} = -13294 \text{ €/ano}$$

$$A(\text{Aço}) = -60000 F_{PA,12\%,15} - 3500 = -12309 \text{ €/ano}$$

A opção aço deverá ser selecionada porque o seu custo anual equivalente (valor absoluto) é inferior ao da opção madeira.

3. O efeito dos impostos na comparação de custos

Na comparação de custos apresentada no Capítulo 2 foi utilizada uma simplificação da realidade, tendo-se assumido cálculos sem impostos. Assim, os fluxos financeiros calculados são considerados fluxos financeiros antes de impostos. Estes valores deverão ser tidos em linha de conta num cálculo mais elaborado (e realista) onde os impostos sejam incluídos e as suas consequências económicas devidamente consideradas. Para estes cálculos são necessários diversos elementos:

- Fluxos financeiros antes de impostos (FAI): calculados de acordo com as receitas e os custos operacionais de cada investimento.
- Amortizações: calculadas de acordo com o tempo de vida fiscal e o método de amortização considerado.
- Rendimento coletável: calculado de acordo com os fluxos financeiros antes de impostos e as amortizações.
- Impostos: calculado de acordo com a taxa de imposto (t) e o rendimento coletável.
- Fluxos financeiros após impostos (FDI): calculados de acordo com os fluxos financeiros antes de impostos e os impostos.

3.1 Amortizações

As amortizações representam a perda de valor contabilístico de um bem imobilizado. São por isso um custo contabilístico uma vez que não são uma saída efetiva de dinheiro da empresa ou projeto. Assim no momento da aquisição de um bem (i.e. no momento do investimento) é

efetuado um pagamento real pelo investidor, o que representa uma saída de dinheiro compensada em termos contabilísticos pela entrada de um bem no mesmo valor. No entanto, este bem vai perdendo valor ao longo do tempo, o que se reflete num custo do exercício: a amortização.

Uma vez que como se disse as amortizações são custos contabilísticos não deveriam afetar diretamente o cálculo dos cash-flows do projeto. No entanto, estes custos são relevantes para efeitos fiscais permitindo obter uma poupança fiscal que deverá ser tida em consideração no cálculo dos CFs.

Existem vários métodos de amortização, sendo o mais comum o método linear onde se assume que a perda de valor do bem é constante ao longo da sua vida útil.

Exemplo 16

Um projeto de investimento implica a aquisição de uma frota de transporte no valor de 150000 amortizável pelo método linear a uma taxa de 25% ao ano (i.e. amortizável em 4 anos). Calcule o valor das amortizações ao longo de 4 anos. Assumindo que a taxa de imposto sobre os lucros é de 30%, determine a poupança fiscal associada a estas amortizações.

$$\text{Amortização} = 150000 \times 0,25 = 37500/\text{ano}$$

$$\text{Poupança fiscal} = 37500 \times 0,3 = 11250 \text{ €/ano}$$

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|-----|--------|-------|-------|-------|-------|
| Investimento | | 150000 | | | | |
| Amortizações | 25% | | 37500 | 37500 | 37500 | 37500 |
| Poupança fiscal | 30% | | 11250 | 11250 | 11250 | 11250 |

Deste modo, a empresa poderá abater 37500 € por ano aos seus lucros, o que lhe permitirá economizar 11250 €/ano em impostos.

3.2 Fluxos monetários após impostos

Os fluxos monetários após impostos podem assim ser calculados seguindo uma estrutura como a que se apresenta na tabela seguinte:

Tabela 3.1 – Fluxos monetários após impostos

| Ano | Fluxos financeiros antes de imposto | Amortização | Rendimento coletável | Impostos | Fluxos financeiros após imposto |
|-----|-------------------------------------|----------------|----------------------------------|---------------------------------------|---|
| 0 | FAI ₀ | | | | FAI ₀ |
| 1 | FAI ₁ | D ₁ | FAI ₁ -D ₁ | (FAI ₁ -D ₁)×t | FAI ₁ -(FAI ₁ -D ₁)×t |

| | | | | | |
|-------|---------|-------|---------------|--------------------------|---------------------------------------|
| m | FAI_m | D_m | $FAI_m - D_m$ | $(FAI_m - D_m) \times t$ | $FAI_m - (FAI_m - D_m) \times t$ |
| (...) | (...) | (...) | (...) | (...) | (...) |
| n | FAI_n | D_n | $FAI_n - D_n$ | $(FAI_n - D_n) \times t$ | $FAI_n - (FAI_n - D_n) \times t + VR$ |

O ano 0 deverá ser considerado como o momento de partida do projeto, deste modo está frequentemente associado ao investimento inicial mas não deverá ter associadas despesas operacionais, receitas ou impostos que apenas serão contabilizadas após o primeiro ano de operação.

No último ano em análise (n) deverá ter se contabilizado o valor residual do equipamento. No sentido simplificar a análise iremos assumir que o valor residual atribuído pelo mercado é igual ao seu valor contabilístico, isto é à componente não amortizada do investimento. Deste modo não há lugar nem ao pagamento nem à dedução em impostos. Assim, o valor residual deverá apenas surgir no cálculo do fluxo financeiro após imposto.

O rendimento coletável poderá aparecer com um valor negativo, caso as despesas sejam superiores às receitas. Se assim for o imposto deverá ser calculado do mesmo modo, mas terá também um sinal negativo. Este valor representa assim uma poupança fiscal obtida pela empresa pela aquisição de um bem ou de uma máquina. De qualquer modo as equações e a estrutura de cálculo apresentada na Tabela 3.1 deverão ser mantidas.

Exemplo 17

Uma empresa está a considerar a compra de uma máquina com um custo inicial de 3000 €. Estima-se que a máquina permita obter receitas anuais no valor de 800 €, tenha despesas operacionais anuais de 490 € e uma vida útil igual a 5 anos. A máquina será amortizada pelo método linear em 3 anos. O valor residual estimado é igual a 750 €.

Determine os fluxos monetários antes e após impostos ao longo dos próximos 5 anos. Considere uma taxa de imposto igual a 30%.

| Ano | Fluxos financeiros antes de imposto | Amortização | Rendimento coletável | Impostos | Fluxos financeiros após imposto |
|-----|-------------------------------------|-------------|----------------------|----------------------------|---------------------------------|
| 0 | -3000 | | | | -3000 |
| 1 | $800 - 490 = 310$ | 750 | $310 - 750 = -440$ | $0,3 \times (-440) = -132$ | $310 - (-132) = 442$ |
| 2 | 310 | 750 | -440 | -132 | 442 |
| 3 | 310 | 750 | -440 | -132 | 442 |
| 4 | 310 | | 310 | 93 | 217 |
| 5 | 310 | | 310 | 93 | $310 - 93 + 750 = 967$ |

$$\text{Amortizações} = (3000 - 750) / 3 = 750 \text{ €}$$

Após o cálculo dos fluxos financeiros após impostos, a decisão económica na comparação de custos deverá ser baseada nos critérios estabelecidos no Capítulo 2, nomeadamente o valor presente (VP) ou a anuidade equivalente (A). Deverá no entanto ser também considerado o efeito do imposto no cálculo da taxa de juro. Assim a taxa de juro após imposto (r) deverá ser calculada a partir da taxa de juro antes de imposto (i) e da taxa de imposto (t):

$$r = i - i \times t$$

$$r = i (1 - t) \quad (23)$$

Exemplo 18

Um investidor tem duas propostas para construção de um armazém. Uma será feita em madeira e a outra em aço. A tabela seguinte caracteriza financeiramente as opções.

Compare as opções considerando que ambas serão amortizadas pelo método linear em 6 anos, a taxa de imposto é 25% e a taxa de juro antes de imposto é igual a 12%.

| Custos | Madeira | Aço |
|---|---------|-------|
| Custo inicial (C_i) | 40000 | 60000 |
| Custos anuais de manutenção (R) | 6000 | 3500 |
| Substituição de materiais no início do 6º ano | 1000 | |
| Valor residual (VR) | 5000 | -- |
| Tempo de vida (n) | 10 | 15 |

Valores em €

$$r = 12 \times (1 - 0,25) = 9\%$$

Opção madeira

| Ano | Fluxos financeiros antes de imposto | Amortização | Rendimento coletável | Impostos | Fluxos financeiros após imposto |
|-----|-------------------------------------|-------------|----------------------|----------|---------------------------------|
| 0 | -40000 | | | | -40000 |
| 1 | -6000 | 5833 | -11833 | -2958 | -3042 |
| 2 | -6000 | 5833 | -11833 | -2958 | -3042 |
| 3 | -6000 | 5833 | -11833 | -2958 | -3042 |
| 4 | -6000 | 5833 | -11833 | -2958 | -3042 |
| 5 | -7000 | 5833 | -12833 | -3208 | -3792 |
| 6 | -6000 | 5833 | -11833 | -2958 | -3042 |
| 7 | -6000 | | -6000 | -1500 | -4500 |
| 8 | -6000 | | -6000 | -1500 | -4500 |
| 9 | -6000 | | -6000 | -1500 | -4500 |

| | | | | | |
|----|-------|--|-------|-------|-----|
| 10 | -6000 | | -6000 | -1500 | 500 |
|----|-------|--|-------|-------|-----|

VP (10 anos) = - 60713 € A = - 9460 €/ano

Opção aço

| Ano | Fluxos financeiros antes de imposto | Amortização | Rendimento coletável | Impostos | Fluxos financeiros após imposto |
|-----|-------------------------------------|-------------|----------------------|----------|---------------------------------|
| 0 | -60000 | | | | -60000 |
| 1 | -3500 | 10000 | -13500 | -3375 | -125 |
| 2 | -3500 | 10000 | -13500 | -3375 | -125 |
| 3 | -3500 | 10000 | -13500 | -3375 | -125 |
| 4 | -3500 | 10000 | -13500 | -3375 | -125 |
| 5 | -3500 | 10000 | -13500 | -3375 | -125 |
| 6 | -3500 | 10000 | -13500 | -3375 | -125 |
| 7 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 8 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 9 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 10 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 11 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 12 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 13 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 14 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |
| 15 | -3500 | | -3500 | -875 | -2625 |

VP (15 anos) = - 69944 € A = - 8677 €/ano

A opção aço deverá ser selecionada porque o seu custo total (valor absoluto) é inferior ao da opção madeira.

4. Avaliação de projetos

Os projetos envolvem investimentos com o objetivo de satisfazer uma procura e atingir um objetivo de engenharia ou um propósito económico, envolvendo muitas tarefas complexas. Um projeto é um processo não repetitivo, com início e fim definidos, orçamentos e planos financeiros e diversas fases ao longo do ciclo de vida.

O projeto de investimento engloba duas vertentes (Barros, 1995): a intenção ou plano do investimento (ideia) e o próprio estudo dessa intenção (plano de negócios). O objetivo do projeto de investimento é gerar um rendimento durante um certo tempo que remunere adequadamente a aplicação dos recursos escassos. Deste modo a seleção de um projeto é um problema de alocação de recursos escassos incluindo capital, mão de obra, capacidade

administrativa e de gestão, assim como outros recursos. Os projetos podem ser justificados pelo aumento da procura, pela necessidade de melhorar a qualidade do produto ou serviço fornecido, ou por outras necessidades económicas ou ambientais.

A análise de projetos permite escolher entre diferentes alternativas de uso de recursos pela análise de informação e de dados. Os estudos de avaliação de projetos permitem apoiar a seleção e a preparação de novos projetos viáveis.

A avaliação de projetos ou opções de investimento implica a previsão dos fluxos financeiros (ou *cash-flows*) do projeto que são depois utilizados no cálculo dos indicadores de rentabilidade. Assume-se para já que estes valores são conhecidos à partida e no Capítulo 7 será retomada em maior detalhe esta temática. A taxa de interesse a aplicar na atualização dos fluxos financeiros. Esta taxa deverá ser a taxa mínima exigida pelo investidor, conhecida como a taxa mínima de atratividade.

4.1 Valor Atual Líquido (VAL)

O Valor Atual Líquido (VAL) de um projeto é um dos métodos de avaliação mais populares. Baseia-se nos princípios subjacentes ao cálculo do VP e representa o somatório dos cash-flows líquidos atualizados. O critério VAL define-se por:

$$VAL = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^n CF_t (1+i)^{-t} \quad (18)$$

Onde n é o horizonte do projeto, i é a taxa de atualização, t é o período e CF é o cash-flow (fluxo financeiro) no período t . A utilização da expressão (24) pressupõe que é conhecida a taxa de atualização e que esta permanece constante ao longo do horizonte do projeto. Obviamente, a consideração de diferentes taxas de atualização tem como consequência a obtenção de diferentes valores do VAL.

Se o VAL for positivo significa que o projeto irá gerar um valor superior ao desembolso de capital do investidor assegurando a taxa de remuneração pretendida e criando riqueza. As regras de decisão são:

$$\text{Se } VAL > 0 \Rightarrow \text{Aceitar}$$

Se $VAL < 0 \Rightarrow$ Rejeitar

Se $VAL = 0 \Rightarrow$ Indiferença

Exemplo 19

Considere um projeto com os cash-flows estimados apresentados no quadro seguinte:

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| CF | -100000 | 25000 | 25000 | 35000 | 35000 | 35000 |

Analise o projeto na ótica do VAL considerando a taxa de atualização igual a 10% e a 18%.

$$VAL (10\%) = -100000 + 25000(1+0,1)^{-1} + 25000(1+0,1)^{-2} + 35000(1+0,1)^{-3} + 35000(1+0,1)^{-4} + 35000(1+0,1)^{-5} = 15322 \text{ €}$$

$$VAL (18\%) = -100000 + 25000(1+0,18)^{-1} + 25000(1+0,18)^{-2} + 35000(1+0,18)^{-3} + 35000(1+0,18)^{-4} + 35000(1+0,18)^{-5} = -6205 \text{ €}$$

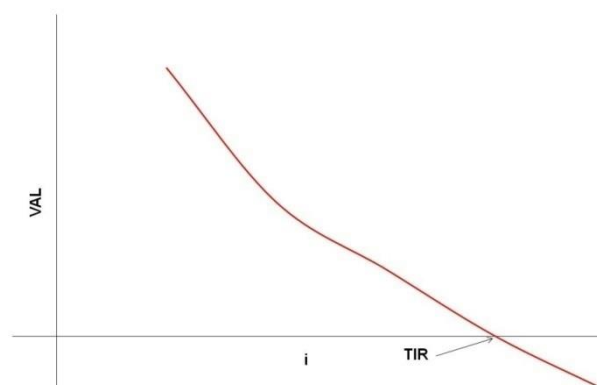
Deste modo se os investidores exigirem uma taxa mínima de atratividade de 10% o projeto será implementável. No entanto se for exigida uma taxa de 18% o projeto não é implementável.

4.2 Taxa interna de rentabilidade

A taxa interna de rentabilidade (TIR) é a taxa de juro que torna o VAL igual a zero. Tem-se assim:

$$\sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1 + TIR)^t} = \sum_{t=0}^n CF_t (1 + TIR)^{-t} = 0 \quad (19)$$

Em termos gráficos o cálculo do VAL e da TIR pode ser representado como na figura seguinte:



A tomada de decisão é feita comparando o valor da TIR com a taxa mínima de atratividade (TA) fixada pela empresa. Assim, apesar do cálculo da TIR não exigir o conhecimento prévio

de uma taxa de referência, a decisão final implica esse conhecimento. A TIR poderá ser interpretada como a taxa máxima que uma empresa poderia considerar usar para financiar um projeto sem haver perda financeira para o investidor. O projeto é implementável sempre que TIR seja superior a essa TA. As regras de decisão são:

Se $TIR > TA \Rightarrow$ Aceitar

Se $TIR < TA \Rightarrow$ Rejeitar

Se $TIR = TA \Rightarrow$ Indiferença

Exemplo 20

Calcule a TIR e analise o projeto descrito no exemplo 19.

$$-100000 + 25000(1+i)^{-1} + 25000(1+i)^{-2} + 35000(1+i)^{-3} + 35000(1+i)^{-4} + 35000(1+i)^{-5} = 0$$

$$i = TIR = 15,4\%.$$

Deste modo se os investidores exigirem uma taxa mínima de atratividade de 10% o projeto será implementável. No entanto se for exigida uma taxa de 18% o projeto não é implementável.

4.3 Anuidade equivalente

Este critério é uma variante do VAL, convertendo todos os pagamentos e recebimentos num valor uniforme anual (A). Define-se como:

$$A = \sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t} F_{PA,i,n} \quad (20)$$

Um projeto é rentável quando $A > 0$. Projetos com $A < 0$ são rejeitados, de acordo com este critério.

Exemplo 21

Calcule a anuidade equivalente (A) e analise o projeto descrito no exemplo 19 para uma taxa mínima de atratividade de 10%.

$$A = [-100000 + 25000(1+0,1)^{-1} + 25000(1+0,1)^{-2} + 35000(1+0,1)^{-3} + 35000(1+0,1)^{-4} + 35000(1+0,1)^{-5}] F_{PA,10,5}$$

$$= 4042 \text{ €/ano.}$$

Deste modo o projeto será implementável.

4.4 Tempo de recuperação

O período de recuperação é um indicador simples que traduz o número de anos necessários para recuperar o investimento inicial de um projeto. O método assume que um projeto irá gerar recebimentos durante o seu tempo de vida e, em algum instante de tempo, os recebimentos totais irão igualar o custo inicial. O cálculo pode ser feito considerando os CFs simples sem atualização (tempo de recuperação simples) ou considerando os CFs atualizados (tempo de recuperação atualizado).

Exemplo 22

Calcule o tempo de recuperação simples e atualizado para o projeto descrito no exemplo 19, para uma taxa mínima de atratividade de 10%

| Ano | CF | Acumulado |
|-----|---------|-----------|
| 0 | -100000 | -100000 |
| 1 | 25000 | -75000 |
| 2 | 25000 | -50000 |
| 3 | 35000 | -15000 |
| 4 | 35000 | 20000 |
| 5 | 35000 | 55000 |

| Ano | CF | CF atualizado | Acumulado |
|-----|---------|---------------|-----------|
| 0 | -100000 | -100000 | -100000 |
| 1 | 25000 | 22727 | -77273 |
| 2 | 25000 | 20661 | -56612 |
| 3 | 35000 | 26296 | -30316 |
| 4 | 35000 | 23905 | -6410 |
| 5 | 35000 | 21732 | 15322 |

Tempo de recuperação simples:

Interpolação linear (-15000,3); (20000,4) : 3,4 anos

Tempo de recuperação atualizado:

Interpolação linear (-6410,4); (15322,5) : 4,3 anos

4.5 Comparação dos métodos

Tempo de recuperação

- É um método simples e não um cálculo económico exato.
- No método simples todos os custos e proveitos ocorridos antes da recuperação são incluídos sem considerar o seu valor no tempo.

- Todos impactos económicos que ocorrem após o tempo de recuperação são ignorados.
- O tempo de recuperação pode apontar para conclusões diferentes das obtidas com métodos envolvendo uma maior fundamentação teórica.
- É de fácil aplicação e compreensão.
- Permite analisar a velocidade com que o dinheiro é recuperado, e deste modo avaliar a liquidez do projeto, o seu risco e a disponibilidade de fundos para outros investimentos.
- Deverá ser utilizado como complemento de outros métodos.

VAL e anuidade equivalente

- E conceptualmente superior ao tempo de recuperação.
- Não ignora o período de vida do projeto nem qualquer CF, tendo assim em consideração todos os impactos económicos do projeto.
- Tem em consideração o valor do dinheiro no tempo e deste modo valoriza mais os fluxos financeiros imediatos em detrimento dos posteriores.
- Implica o conhecimento prévio de uma taxa de atualização apropriada, sendo muito sensível à escolha desta taxa.
- A utilização da expressão simples no cálculo do VAL (equação 24) pressupõe a constância da taxa de atualização, embora seja possível alterar a expressão de modo a considerar variações dessa taxa no tempo.
- Não tem em consideração a solvabilidade do projeto.
- O VAL não deverá ser utilizado na comparação de projetos com diferentes tempos de vida conforme iremos verificar. No entanto, esta limitação pode ser ultrapassada com manipulação matemática ou pela utilização da anuidade equivalente.

TIR

- E conceptualmente superior ao tempo de recuperação.
- Não ignora o período de vida do projeto nem qualquer CF, tendo assim em consideração todos os impactos económicos do projeto.
- Tem em consideração o valor do dinheiro no tempo e deste modo valoriza mais os fluxos financeiros imediatos em detrimento dos posteriores.
- Não implica o conhecimento prévio de uma taxa de atualização apropriada. Esta poderá ser uma vantagem significativa na comparação de projetos alternativos. No entanto na

tomada de decisão de investimento ou não implica o conhecimento da taxa mínima de atratividade exigida ao projeto.

- Fornece um valor relativo (taxa) o que permite contornar o problema de escala dos projetos.
- Pode apresentar alguma complexidade no cálculo e podem existir TIR múltiplas.
- Assume implicitamente que CFs recuperados são reinvestidos à mesma TIR.
- Na comparação de projetos com diferentes pode conduzir a resultados diferentes do critério VAL, sendo por isso essencial utilizar a lógica diferencial na tomada de decisão.

5. Comparação e seleção de projetos de investimento

Na tomada de decisão para a seleção de projetos deverá ser tida em consideração a existência de diversas possibilidades de investimento que poderão apresentar características distintas. Será necessário não apenas avaliar a aceitação e rejeição de um projeto mas também hierarquizar as diferentes opções de investimento.

Em projetos concorrentes ou mutuamente exclusivos a aceitação de um implica a não realização do outro. Nestes problemas pretende-se analisar diferentes opções investimento, hierarquizando-as e selecionando a que apresenta melhores resultados. Ex: Instalar uma nova unidade produtiva no Porto ou em Lisboa.

A comparação de projetos mutuamente exclusivos deve ser feita recorrendo aos indicadores apresentados anteriormente e tendo em consideração o tempo de vida dos projetos e a dimensão dos investimentos.

Na comparação de opções às quais não são atribuídos benefícios financeiros directos ou que trarão os mesmos benefícios, a análise será feita apenas com base no custo total e a escolha deverá recair naquela que apresentar um menor custo em valor absoluto.

Exemplo 23

Considere dois projetos de investimento A e B com os seguintes CFs, para uma taxa mínima de atratividade (TA) de 12%. Selecione um dos projetos de acordo com os critérios VAL e TIR.

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|-------|------|------|------|------|------|
| CF_A | -5000 | 1800 | 1800 | 1800 | 1800 | 1800 |
| CF_B | -5000 | 1000 | 1000 | 2300 | 2300 | 2300 |

(milhares de €)

TIR (A) = 23,4%



Projeto A

TIR (B) = 19,8%

$$VAL(A) = 1488,6 \text{ m€}$$



Projeto A

$$VAL(B) = 1207,4 \text{ m€}$$

De acordo com os critérios VAL e TIR a escolha deveria recair sobre o projeto A.

No caso de se pretender comparar projetos ou opções de investimento com diferente valor de investimento os resultados obtidos com o indicador TIR poderão não ser consistentes com o indicador VAL. Nestes casos os projetos deverão ser comparados com base numa análise diferencial, onde se assume que o projeto de maior dimensão pode ser dividido em dois projetos de menor dimensão: um igual ao projeto de menor investimento e outro igual à diferença dos projetos. Trata-se assim de avaliar um investimento alternativo (diferencial) que tornaria indiferente a escolha do de maior dimensão face à alternativa de menor investimento. Veja-se um exemplo:

Exemplo 24

Considerem-se dois projetos de investimento A e B com os seguintes CFs para uma taxa mínima de atratividade (TA) de 10%.

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|-------|-----|-----|-----|-----|
| CF_A | -1000 | 350 | 420 | 420 | 420 |
| CF_B | -600 | 200 | 250 | 300 | 300 |

$$TIR(A) = 21,5\%$$



Projeto B

$$TIR(B) = 24,7\%$$

$$VAL(A) = 267,7 \text{ €}$$



Projeto A

$$VAL(B) = 218,7 \text{ €}$$

De acordo com o critério VAL a escolha deveria recair sobre o projeto A, mas de acordo com o critério TIR a escolha deveria recair sobre o projeto B.

Se optarmos pelo projeto B apenas serão investidos 600 € à taxa de 24,7%, sendo os restantes 400 € investidos à TA (10%). Se optarmos pelo projeto A os 1000 € serão investidos à taxa de 21,5%. Vamos assim analisar o projeto diferencial que nos permite verificar qual a taxa que tornaria indiferente a escolha dos projetos.

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|------|-----|-----|-----|-----|
| Δ (A-B) | -400 | 150 | 170 | 120 | 120 |

$$VAL(\Delta) = 50,0 \text{ €}$$

$$TIR(\Delta) = 15,8\%$$

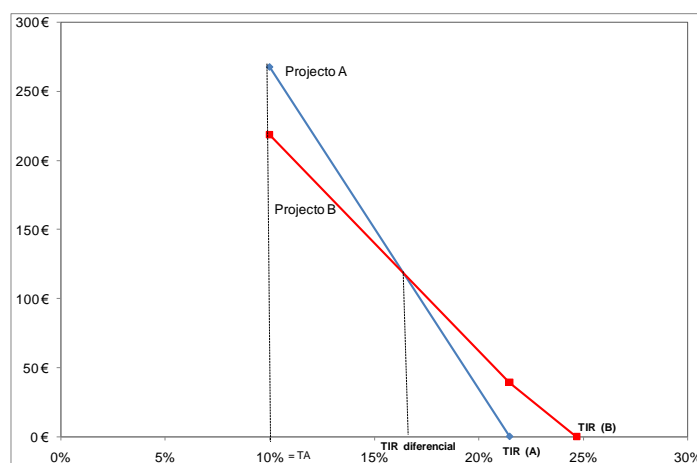
Deste modo, para ser indiferente a escolha entre A e B o investimento diferencial teria de ter uma rentabilidade de 15,8%. Uma vez que ao optarmos pelo projeto B estaríamos implicitamente a assumir que a rentabilidade dos 400 € seria de 10%, ficaríamos aquém do pretendido.

Deste modo, deveria ser selecionado o projeto de maior investimento, i.e. o Projeto A.

A projeção gráfica do VAL de cada investimento para diferentes níveis de taxas de atualização, permite tornar mais claras as ideias subjacentes ao cálculo diferencial.

Exemplo 24 (resolução gráfica):

Cada curva intercepta o eixo horizontal no ponto corresponde à TIR do respetivo projeto. Olhando apenas à TIR verifica-se que para uma taxa de atualização de 10% o investimento preferível é o A. No entanto, há um ponto em as curvas se intersectam correspondente ao valor da TIR do projeto diferencial. Para valores de TA inferiores a 15,8% o investimento A é preferível. Para valores superiores a 15,8% o investimento B é preferível pois apresenta maior VAL.



Deste modo, uma vez que a TA considerada no exercício é de 10%, deverá ser selecionado o projeto A.

Os casos de incompatibilidade de VAL e TIR surgem frequentemente associados à comparação de opções com diferente dimensão de investimento, conforme demonstrado no problema anterior. No entanto grandes diferenças de perfil temporal dos CFs dos projetos alternativos podem também gerar resultados divergentes, mesmo que partindo de iguais valores investidos. Nestes casos, a divergência poderá ser resolvida também pela avaliação do projeto diferencial.

As regras de decisão pelo critério VAL podem ser resumidas a:

| |
|--|
| $\text{Se VAL (A) > VAL (B) } \Rightarrow \text{Selecionar A}$ |
|--|

As regras de decisão pelo critério TIR podem ser resumidas a:

| |
|--|
| $\text{Se TIR (A) > TIR (B) e Investimento (A) > Investimento (B) } \Rightarrow \text{Selecionar A}$ |
|--|

| |
|---|
| $\text{Se TIR (A) > TIR (B) e Investimento (A) < Investimento (B) } \Rightarrow \text{Projeto diferencial } (\Delta)$ |
|---|

| |
|---|
| $\text{Se TIR } (\Delta) > TA \Rightarrow \text{Selecionar B (maior investimento)}$ |
|---|

| |
|---|
| $\text{Se TIR } (\Delta) < TA \Rightarrow \text{Selecionar A (menor investimento)}$ |
|---|

Referências bibliográficas

Barros, C (1995) *Decisões de investimento e financiamento de projetos*, Edições Sílabo.

Ernest & Young (2005) “Business plan guidebook” (www.ey.com)

Ernest & Young (2001) “Guide to producing a business plan” (www.ey.com)

IAPMEI “Como Elaborar um Plano de Negócios: o seu guia para um projeto de sucesso” (<http://www.iapmei.pt/iapmei-art02.php?id=162&temaid=17>)

Soares, I; Moreira, J; Pinho, C e Couto, J (2007) *Decisões de investimento. Análise financeira de projetos*, Edições Sílabo.

Sousa, A (2005) *Análise económica e financeira de projetos*, Editor: Instituto Superior de Ciências Sociais e Políticas, Lisboa.

Anexo 1- Tabelas de matemática financeira¹

Taxa de juro (i) =1%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|----|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|----|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0100 | 0.9901 | 1.0000 | 0.9901 | 1.0000 | 1.0100 | 1 |
| 2 | 1.0201 | 0.9803 | 2.0100 | 1.9704 | 0.4975 | 0.5075 | 2 |
| 3 | 1.0303 | 0.9706 | 3.0301 | 2.9410 | 0.3300 | 0.3400 | 3 |
| 4 | 1.0406 | 0.9610 | 4.0604 | 3.9020 | 0.2463 | 0.2563 | 4 |
| 5 | 1.0510 | 0.9515 | 5.1010 | 4.8534 | 0.1960 | 0.2060 | 5 |
| 6 | 1.0615 | 0.9420 | 6.1520 | 5.7955 | 0.1625 | 0.1725 | 6 |
| 7 | 1.0721 | 0.9327 | 7.2135 | 6.7282 | 0.1386 | 0.1486 | 7 |
| 8 | 1.0829 | 0.9235 | 8.2857 | 7.6517 | 0.1207 | 0.1307 | 8 |
| 9 | 1.0937 | 0.9143 | 9.3685 | 8.5660 | 0.1067 | 0.1167 | 9 |
| 10 | 1.1046 | 0.9053 | 10.4622 | 9.4713 | 0.0956 | 0.1056 | 10 |
| 11 | 1.1157 | 0.8963 | 11.5668 | 10.3676 | 0.0865 | 0.0965 | 11 |
| 12 | 1.1268 | 0.8874 | 12.6825 | 11.2551 | 0.0788 | 0.0888 | 12 |
| 13 | 1.1381 | 0.8787 | 13.8093 | 12.1337 | 0.0724 | 0.0824 | 13 |
| 14 | 1.1495 | 0.8700 | 14.9474 | 13.0037 | 0.0669 | 0.0769 | 14 |
| 15 | 1.1610 | 0.8613 | 16.0969 | 13.8651 | 0.0621 | 0.0721 | 15 |
| 16 | 1.1726 | 0.8528 | 17.2579 | 14.7179 | 0.0579 | 0.0679 | 16 |
| 17 | 1.1843 | 0.8444 | 18.4304 | 15.5623 | 0.0543 | 0.0643 | 17 |
| 18 | 1.1961 | 0.8360 | 19.6147 | 16.3983 | 0.0510 | 0.0610 | 18 |
| 19 | 1.2081 | 0.8277 | 20.8109 | 17.2260 | 0.0481 | 0.0581 | 19 |
| 20 | 1.2202 | 0.8195 | 22.0190 | 18.0456 | 0.0454 | 0.0554 | 20 |
| 21 | 1.2324 | 0.8114 | 23.2392 | 18.8570 | 0.0430 | 0.0530 | 21 |
| 22 | 1.2447 | 0.8034 | 24.4716 | 19.6604 | 0.0409 | 0.0509 | 22 |
| 23 | 1.2572 | 0.7954 | 25.7163 | 20.4558 | 0.0389 | 0.0489 | 23 |
| 24 | 1.2697 | 0.7876 | 26.9735 | 21.2434 | 0.0371 | 0.0471 | 24 |
| 25 | 1.2824 | 0.7798 | 28.2432 | 22.0232 | 0.0354 | 0.0454 | 25 |
| 26 | 1.2953 | 0.7720 | 29.5256 | 22.7952 | 0.0339 | 0.0439 | 26 |
| 27 | 1.3082 | 0.7644 | 30.8209 | 23.5596 | 0.0324 | 0.0424 | 27 |
| 28 | 1.3213 | 0.7568 | 32.1291 | 24.3164 | 0.0311 | 0.0411 | 28 |
| 29 | 1.3345 | 0.7493 | 33.4504 | 25.0658 | 0.0299 | 0.0399 | 29 |
| 30 | 1.3478 | 0.7419 | 34.7849 | 25.8077 | 0.0287 | 0.0387 | 30 |
| 36 | 1.4308 | 0.6989 | 43.0769 | 30.1075 | 0.0232 | 0.0332 | 36 |
| 40 | 1.4889 | 0.6717 | 48.8864 | 32.8347 | 0.0205 | 0.0305 | 40 |
| 48 | 1.6122 | 0.6203 | 61.2226 | 37.9740 | 0.0163 | 0.0263 | 48 |
| 50 | 1.6446 | 0.6080 | 64.4632 | 39.1961 | 0.0155 | 0.0255 | 50 |
| 52 | 1.6777 | 0.5961 | 67.7689 | 40.3942 | 0.0148 | 0.0248 | 52 |
| 60 | 1.8167 | 0.5504 | 81.6697 | 44.9550 | 0.0122 | 0.0222 | 60 |

¹ A taxa de juro poderá ser representada por i ou r conforme sejam ou não considerados os impostos na análise.

Taxa de juro (i) =2%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0200 | 0.9804 | 1.0000 | 0.9804 | 1.0000 | 1.0200 | 1 |
| 2 | 1.0404 | 0.9612 | 2.0200 | 1.9416 | 0.4950 | 0.5150 | 2 |
| 3 | 1.0612 | 0.9423 | 3.0604 | 2.8839 | 0.3268 | 0.3468 | 3 |
| 4 | 1.0824 | 0.9238 | 4.1216 | 3.8077 | 0.2426 | 0.2626 | 4 |
| 5 | 1.1041 | 0.9057 | 5.2040 | 4.7135 | 0.1922 | 0.2122 | 5 |
| 6 | 1.1262 | 0.8880 | 6.3081 | 5.6014 | 0.1585 | 0.1785 | 6 |
| 7 | 1.1487 | 0.8706 | 7.4343 | 6.4720 | 0.1345 | 0.1545 | 7 |
| 8 | 1.1717 | 0.8535 | 8.5830 | 7.3255 | 0.1165 | 0.1365 | 8 |
| 9 | 1.1951 | 0.8368 | 9.7546 | 8.1622 | 0.1025 | 0.1225 | 9 |
| 10 | 1.2190 | 0.8203 | 10.9497 | 8.9826 | 0.0913 | 0.1113 | 10 |
| 11 | 1.2434 | 0.8043 | 12.1687 | 9.7868 | 0.0822 | 0.1022 | 11 |
| 12 | 1.2682 | 0.7885 | 13.4121 | 10.5753 | 0.0746 | 0.0946 | 12 |
| 13 | 1.2936 | 0.7730 | 14.6803 | 11.3484 | 0.0681 | 0.0881 | 13 |
| 14 | 1.3195 | 0.7579 | 15.9739 | 12.1062 | 0.0626 | 0.0826 | 14 |
| 15 | 1.3459 | 0.7430 | 17.2934 | 12.8493 | 0.0578 | 0.0778 | 15 |
| 16 | 1.3728 | 0.7284 | 18.6393 | 13.5777 | 0.0537 | 0.0737 | 16 |
| 17 | 1.4002 | 0.7142 | 20.0121 | 14.2919 | 0.0500 | 0.0700 | 17 |
| 18 | 1.4282 | 0.7002 | 21.4123 | 14.9920 | 0.0467 | 0.0667 | 18 |
| 19 | 1.4568 | 0.6864 | 22.8406 | 15.6785 | 0.0438 | 0.0638 | 19 |
| 20 | 1.4859 | 0.6730 | 24.2974 | 16.3514 | 0.0412 | 0.0612 | 20 |
| 21 | 1.5157 | 0.6598 | 25.7833 | 17.0112 | 0.0388 | 0.0588 | 21 |
| 22 | 1.5460 | 0.6468 | 27.2990 | 17.6580 | 0.0366 | 0.0566 | 22 |
| 23 | 1.5769 | 0.6342 | 28.8450 | 18.2922 | 0.0347 | 0.0547 | 23 |
| 24 | 1.6084 | 0.6217 | 30.4219 | 18.9139 | 0.0329 | 0.0529 | 24 |
| 25 | 1.6406 | 0.6095 | 32.0303 | 19.5235 | 0.0312 | 0.0512 | 25 |
| 26 | 1.6734 | 0.5976 | 33.6709 | 20.1210 | 0.0297 | 0.0497 | 26 |
| 27 | 1.7069 | 0.5859 | 35.3443 | 20.7069 | 0.0283 | 0.0483 | 27 |
| 28 | 1.7410 | 0.5744 | 37.0512 | 21.2813 | 0.0270 | 0.0470 | 28 |
| 29 | 1.7758 | 0.5631 | 38.7922 | 21.8444 | 0.0258 | 0.0458 | 29 |
| 30 | 1.8114 | 0.5521 | 40.5681 | 22.3965 | 0.0246 | 0.0446 | 30 |
| 36 | 2.0399 | 0.4902 | 51.9944 | 25.4888 | 0.0192 | 0.0392 | 36 |
| 40 | 2.2080 | 0.4529 | 60.4020 | 27.3555 | 0.0166 | 0.0366 | 40 |
| 48 | 2.5871 | 0.3865 | 79.3535 | 30.6731 | 0.0126 | 0.0326 | 48 |
| 50 | 2.6916 | 0.3715 | 84.5794 | 31.4236 | 0.0118 | 0.0318 | 50 |
| 52 | 2.8003 | 0.3571 | 90.0164 | 32.1449 | 0.0111 | 0.0311 | 52 |
| 60 | 3.2810 | 0.3048 | 114.0515 | 34.7609 | 0.0088 | 0.0288 | 60 |

Taxa de juro (i) =3%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0300 | 0.9709 | 1.0000 | 0.9709 | 1.0000 | 1.0300 | 1 |
| 2 | 1.0609 | 0.9426 | 2.0300 | 1.9135 | 0.4926 | 0.5226 | 2 |
| 3 | 1.0927 | 0.9151 | 3.0909 | 2.8286 | 0.3235 | 0.3535 | 3 |
| 4 | 1.1255 | 0.8885 | 4.1836 | 3.7171 | 0.2390 | 0.2690 | 4 |
| 5 | 1.1593 | 0.8626 | 5.3091 | 4.5797 | 0.1884 | 0.2184 | 5 |
| 6 | 1.1941 | 0.8375 | 6.4684 | 5.4172 | 0.1546 | 0.1846 | 6 |
| 7 | 1.2299 | 0.8131 | 7.6625 | 6.2303 | 0.1305 | 0.1605 | 7 |
| 8 | 1.2668 | 0.7894 | 8.8923 | 7.0197 | 0.1125 | 0.1425 | 8 |
| 9 | 1.3048 | 0.7664 | 10.1591 | 7.7861 | 0.0984 | 0.1284 | 9 |
| 10 | 1.3439 | 0.7441 | 11.4639 | 8.5302 | 0.0872 | 0.1172 | 10 |
| 11 | 1.3842 | 0.7224 | 12.8078 | 9.2526 | 0.0781 | 0.1081 | 11 |
| 12 | 1.4258 | 0.7014 | 14.1920 | 9.9540 | 0.0705 | 0.1005 | 12 |
| 13 | 1.4685 | 0.6810 | 15.6178 | 10.6350 | 0.0640 | 0.0940 | 13 |
| 14 | 1.5126 | 0.6611 | 17.0863 | 11.2961 | 0.0585 | 0.0885 | 14 |
| 15 | 1.5580 | 0.6419 | 18.5989 | 11.9379 | 0.0538 | 0.0838 | 15 |
| 16 | 1.6047 | 0.6232 | 20.1569 | 12.5611 | 0.0496 | 0.0796 | 16 |
| 17 | 1.6528 | 0.6050 | 21.7616 | 13.1661 | 0.0460 | 0.0760 | 17 |
| 18 | 1.7024 | 0.5874 | 23.4144 | 13.7535 | 0.0427 | 0.0727 | 18 |
| 19 | 1.7535 | 0.5703 | 25.1169 | 14.3238 | 0.0398 | 0.0698 | 19 |
| 20 | 1.8061 | 0.5537 | 26.8704 | 14.8775 | 0.0372 | 0.0672 | 20 |
| 21 | 1.8603 | 0.5375 | 28.6765 | 15.4150 | 0.0349 | 0.0649 | 21 |
| 22 | 1.9161 | 0.5219 | 30.5368 | 15.9369 | 0.0327 | 0.0627 | 22 |
| 23 | 1.9736 | 0.5067 | 32.4529 | 16.4436 | 0.0308 | 0.0608 | 23 |
| 24 | 2.0328 | 0.4919 | 34.4265 | 16.9355 | 0.0290 | 0.0590 | 24 |
| 25 | 2.0938 | 0.4776 | 36.4593 | 17.4131 | 0.0274 | 0.0574 | 25 |
| 26 | 2.1566 | 0.4637 | 38.5530 | 17.8768 | 0.0259 | 0.0559 | 26 |
| 27 | 2.2213 | 0.4502 | 40.7096 | 18.3270 | 0.0246 | 0.0546 | 27 |
| 28 | 2.2879 | 0.4371 | 42.9309 | 18.7641 | 0.0233 | 0.0533 | 28 |
| 29 | 2.3566 | 0.4243 | 45.2189 | 19.1885 | 0.0221 | 0.0521 | 29 |
| 30 | 2.4273 | 0.4120 | 47.5754 | 19.6004 | 0.0210 | 0.0510 | 30 |
| 36 | 2.8983 | 0.3450 | 63.2759 | 21.8323 | 0.0158 | 0.0458 | 36 |
| 40 | 3.2620 | 0.3066 | 75.4013 | 23.1148 | 0.0133 | 0.0433 | 40 |
| 48 | 4.1323 | 0.2420 | 104.4084 | 25.2667 | 0.0096 | 0.0396 | 48 |
| 50 | 4.3839 | 0.2281 | 112.7969 | 25.7298 | 0.0089 | 0.0389 | 50 |
| 52 | 4.6509 | 0.2150 | 121.6962 | 26.1662 | 0.0082 | 0.0382 | 52 |
| 60 | 5.8916 | 0.1697 | 163.0534 | 27.6756 | 0.0061 | 0.0361 | 60 |

Taxa de juro (i) =4%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0400 | 0.9615 | 1.0000 | 0.9615 | 1.0000 | 1.0400 | 1 |
| 2 | 1.0816 | 0.9246 | 2.0400 | 1.8861 | 0.4902 | 0.5302 | 2 |
| 3 | 1.1249 | 0.8890 | 3.1216 | 2.7751 | 0.3203 | 0.3603 | 3 |
| 4 | 1.1699 | 0.8548 | 4.2465 | 3.6299 | 0.2355 | 0.2755 | 4 |
| 5 | 1.2167 | 0.8219 | 5.4163 | 4.4518 | 0.1846 | 0.2246 | 5 |
| 6 | 1.2653 | 0.7903 | 6.6330 | 5.2421 | 0.1508 | 0.1908 | 6 |
| 7 | 1.3159 | 0.7599 | 7.8983 | 6.0021 | 0.1266 | 0.1666 | 7 |
| 8 | 1.3686 | 0.7307 | 9.2142 | 6.7327 | 0.1085 | 0.1485 | 8 |
| 9 | 1.4233 | 0.7026 | 10.5828 | 7.4353 | 0.0945 | 0.1345 | 9 |
| 10 | 1.4802 | 0.6756 | 12.0061 | 8.1109 | 0.0833 | 0.1233 | 10 |
| 11 | 1.5395 | 0.6496 | 13.4864 | 8.7605 | 0.0741 | 0.1141 | 11 |
| 12 | 1.6010 | 0.6246 | 15.0258 | 9.3851 | 0.0666 | 0.1066 | 12 |
| 13 | 1.6651 | 0.6006 | 16.6268 | 9.9856 | 0.0601 | 0.1001 | 13 |
| 14 | 1.7317 | 0.5775 | 18.2919 | 10.5631 | 0.0547 | 0.0947 | 14 |
| 15 | 1.8009 | 0.5553 | 20.0236 | 11.1184 | 0.0499 | 0.0899 | 15 |
| 16 | 1.8730 | 0.5339 | 21.8245 | 11.6523 | 0.0458 | 0.0858 | 16 |
| 17 | 1.9479 | 0.5134 | 23.6975 | 12.1657 | 0.0422 | 0.0822 | 17 |
| 18 | 2.0258 | 0.4936 | 25.6454 | 12.6593 | 0.0390 | 0.0790 | 18 |
| 19 | 2.1068 | 0.4746 | 27.6712 | 13.1339 | 0.0361 | 0.0761 | 19 |
| 20 | 2.1911 | 0.4564 | 29.7781 | 13.5903 | 0.0336 | 0.0736 | 20 |
| 21 | 2.2788 | 0.4388 | 31.9692 | 14.0292 | 0.0313 | 0.0713 | 21 |
| 22 | 2.3699 | 0.4220 | 34.2480 | 14.4511 | 0.0292 | 0.0692 | 22 |
| 23 | 2.4647 | 0.4057 | 36.6179 | 14.8568 | 0.0273 | 0.0673 | 23 |
| 24 | 2.5633 | 0.3901 | 39.0826 | 15.2470 | 0.0256 | 0.0656 | 24 |
| 25 | 2.6658 | 0.3751 | 41.6459 | 15.6221 | 0.0240 | 0.0640 | 25 |
| 26 | 2.7725 | 0.3607 | 44.3117 | 15.9828 | 0.0226 | 0.0626 | 26 |
| 27 | 2.8834 | 0.3468 | 47.0842 | 16.3296 | 0.0212 | 0.0612 | 27 |
| 28 | 2.9987 | 0.3335 | 49.9676 | 16.6631 | 0.0200 | 0.0600 | 28 |
| 29 | 3.1187 | 0.3207 | 52.9663 | 16.9837 | 0.0189 | 0.0589 | 29 |
| 30 | 3.2434 | 0.3083 | 56.0849 | 17.2920 | 0.0178 | 0.0578 | 30 |
| 36 | 4.1039 | 0.2437 | 77.5983 | 18.9083 | 0.0129 | 0.0529 | 36 |
| 40 | 4.8010 | 0.2083 | 95.0255 | 19.7928 | 0.0105 | 0.0505 | 40 |
| 48 | 6.5705 | 0.1522 | 139.2632 | 21.1951 | 0.0072 | 0.0472 | 48 |
| 50 | 7.1067 | 0.1407 | 152.6671 | 21.4822 | 0.0066 | 0.0466 | 50 |
| 52 | 7.6866 | 0.1301 | 167.1647 | 21.7476 | 0.0060 | 0.0460 | 52 |
| 60 | 10.5196 | 0.0951 | 237.9907 | 22.6235 | 0.0042 | 0.0442 | 60 |

Taxa de juro (i) =5%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0500 | 0.9524 | 1.0000 | 0.9524 | 1.0000 | 1.0500 | 1 |
| 2 | 1.1025 | 0.9070 | 2.0500 | 1.8594 | 0.4878 | 0.5378 | 2 |
| 3 | 1.1576 | 0.8638 | 3.1525 | 2.7232 | 0.3172 | 0.3672 | 3 |
| 4 | 1.2155 | 0.8227 | 4.3101 | 3.5460 | 0.2320 | 0.2820 | 4 |
| 5 | 1.2763 | 0.7835 | 5.5256 | 4.3295 | 0.1810 | 0.2310 | 5 |
| 6 | 1.3401 | 0.7462 | 6.8019 | 5.0757 | 0.1470 | 0.1970 | 6 |
| 7 | 1.4071 | 0.7107 | 8.1420 | 5.7864 | 0.1228 | 0.1728 | 7 |
| 8 | 1.4775 | 0.6768 | 9.5491 | 6.4632 | 0.1047 | 0.1547 | 8 |
| 9 | 1.5513 | 0.6446 | 11.0266 | 7.1078 | 0.0907 | 0.1407 | 9 |
| 10 | 1.6289 | 0.6139 | 12.5779 | 7.7217 | 0.0795 | 0.1295 | 10 |
| 11 | 1.7103 | 0.5847 | 14.2068 | 8.3064 | 0.0704 | 0.1204 | 11 |
| 12 | 1.7959 | 0.5568 | 15.9171 | 8.8633 | 0.0628 | 0.1128 | 12 |
| 13 | 1.8856 | 0.5303 | 17.7130 | 9.3936 | 0.0565 | 0.1065 | 13 |
| 14 | 1.9799 | 0.5051 | 19.5986 | 9.8986 | 0.0510 | 0.1010 | 14 |
| 15 | 2.0789 | 0.4810 | 21.5786 | 10.3797 | 0.0463 | 0.0963 | 15 |
| 16 | 2.1829 | 0.4581 | 23.6575 | 10.8378 | 0.0423 | 0.0923 | 16 |
| 17 | 2.2920 | 0.4363 | 25.8404 | 11.2741 | 0.0387 | 0.0887 | 17 |
| 18 | 2.4066 | 0.4155 | 28.1324 | 11.6896 | 0.0355 | 0.0855 | 18 |
| 19 | 2.5270 | 0.3957 | 30.5390 | 12.0853 | 0.0327 | 0.0827 | 19 |
| 20 | 2.6533 | 0.3769 | 33.0660 | 12.4622 | 0.0302 | 0.0802 | 20 |
| 21 | 2.7860 | 0.3589 | 35.7193 | 12.8212 | 0.0280 | 0.0780 | 21 |
| 22 | 2.9253 | 0.3418 | 38.5052 | 13.1630 | 0.0260 | 0.0760 | 22 |
| 23 | 3.0715 | 0.3256 | 41.4305 | 13.4886 | 0.0241 | 0.0741 | 23 |
| 24 | 3.2251 | 0.3101 | 44.5020 | 13.7986 | 0.0225 | 0.0725 | 24 |
| 25 | 3.3864 | 0.2953 | 47.7271 | 14.0939 | 0.0210 | 0.0710 | 25 |
| 26 | 3.5557 | 0.2812 | 51.1135 | 14.3752 | 0.0196 | 0.0696 | 26 |
| 27 | 3.7335 | 0.2678 | 54.6691 | 14.6430 | 0.0183 | 0.0683 | 27 |
| 28 | 3.9201 | 0.2551 | 58.4026 | 14.8981 | 0.0171 | 0.0671 | 28 |
| 29 | 4.1161 | 0.2429 | 62.3227 | 15.1411 | 0.0160 | 0.0660 | 29 |
| 30 | 4.3219 | 0.2314 | 66.4388 | 15.3725 | 0.0151 | 0.0651 | 30 |
| 36 | 5.7918 | 0.1727 | 95.8363 | 16.5469 | 0.0104 | 0.0604 | 36 |
| 40 | 7.0400 | 0.1420 | 120.7998 | 17.1591 | 0.0083 | 0.0583 | 40 |
| 48 | 10.4013 | 0.0961 | 188.0254 | 18.0772 | 0.0053 | 0.0553 | 48 |
| 50 | 11.4674 | 0.0872 | 209.3480 | 18.2559 | 0.0048 | 0.0548 | 50 |
| 52 | 12.6428 | 0.0791 | 232.8562 | 18.4181 | 0.0043 | 0.0543 | 52 |
| 60 | 18.6792 | 0.0535 | 353.5837 | 18.9293 | 0.0028 | 0.0528 | 60 |

Taxa de juro (i) =6%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|----|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|----|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0600 | 0.9434 | 1.0000 | 0.9434 | 1.0000 | 1.0600 | 1 |
| 2 | 1.1236 | 0.8900 | 2.0600 | 1.8334 | 0.4854 | 0.5454 | 2 |
| 3 | 1.1910 | 0.8396 | 3.1836 | 2.6730 | 0.3141 | 0.3741 | 3 |
| 4 | 1.2625 | 0.7921 | 4.3746 | 3.4651 | 0.2286 | 0.2886 | 4 |
| 5 | 1.3382 | 0.7473 | 5.6371 | 4.2124 | 0.1774 | 0.2374 | 5 |
| 6 | 1.4185 | 0.7050 | 6.9753 | 4.9173 | 0.1434 | 0.2034 | 6 |
| 7 | 1.5036 | 0.6651 | 8.3938 | 5.5824 | 0.1191 | 0.1791 | 7 |
| 8 | 1.5938 | 0.6274 | 9.8975 | 6.2098 | 0.1010 | 0.1610 | 8 |
| 9 | 1.6895 | 0.5919 | 11.4913 | 6.8017 | 0.0870 | 0.1470 | 9 |
| 10 | 1.7908 | 0.5584 | 13.1808 | 7.3601 | 0.0759 | 0.1359 | 10 |
| 11 | 1.8983 | 0.5268 | 14.9716 | 7.8869 | 0.0668 | 0.1268 | 11 |
| 12 | 2.0122 | 0.4970 | 16.8699 | 8.3838 | 0.0593 | 0.1193 | 12 |
| 13 | 2.1329 | 0.4688 | 18.8821 | 8.8527 | 0.0530 | 0.1130 | 13 |
| 14 | 2.2609 | 0.4423 | 21.0151 | 9.2950 | 0.0476 | 0.1076 | 14 |
| 15 | 2.3966 | 0.4173 | 23.2760 | 9.7122 | 0.0430 | 0.1030 | 15 |
| 16 | 2.5404 | 0.3936 | 25.6725 | 10.1059 | 0.0390 | 0.0990 | 16 |
| 17 | 2.6928 | 0.3714 | 28.2129 | 10.4773 | 0.0354 | 0.0954 | 17 |
| 18 | 2.8543 | 0.3503 | 30.9057 | 10.8276 | 0.0324 | 0.0924 | 18 |
| 19 | 3.0256 | 0.3305 | 33.7600 | 11.1581 | 0.0296 | 0.0896 | 19 |
| 20 | 3.2071 | 0.3118 | 36.7856 | 11.4699 | 0.0272 | 0.0872 | 20 |
| 21 | 3.3996 | 0.2942 | 39.9927 | 11.7641 | 0.0250 | 0.0850 | 21 |
| 22 | 3.6035 | 0.2775 | 43.3923 | 12.0416 | 0.0230 | 0.0830 | 22 |
| 23 | 3.8197 | 0.2618 | 46.9958 | 12.3034 | 0.0213 | 0.0813 | 23 |
| 24 | 4.0489 | 0.2470 | 50.8156 | 12.5504 | 0.0197 | 0.0797 | 24 |
| 25 | 4.2919 | 0.2330 | 54.8645 | 12.7834 | 0.0182 | 0.0782 | 25 |
| 26 | 4.5494 | 0.2198 | 59.1564 | 13.0032 | 0.0169 | 0.0769 | 26 |
| 27 | 4.8223 | 0.2074 | 63.7058 | 13.2105 | 0.0157 | 0.0757 | 27 |
| 28 | 5.1117 | 0.1956 | 68.5281 | 13.4062 | 0.0146 | 0.0746 | 28 |
| 29 | 5.4184 | 0.1846 | 73.6398 | 13.5907 | 0.0136 | 0.0736 | 29 |
| 30 | 5.7435 | 0.1741 | 79.0582 | 13.7648 | 0.0126 | 0.0726 | 30 |
| 36 | 8.1473 | 0.1227 | 119.1209 | 14.6210 | 0.0084 | 0.0684 | 36 |
| 40 | 10.2857 | 0.0972 | 154.7620 | 15.0463 | 0.0065 | 0.0665 | 40 |
| 48 | 16.3939 | 0.0610 | 256.5645 | 15.6500 | 0.0039 | 0.0639 | 48 |
| 50 | 18.4202 | 0.0543 | 290.3359 | 15.7619 | 0.0034 | 0.0634 | 50 |
| 52 | 20.6969 | 0.0483 | 328.2814 | 15.8614 | 0.0030 | 0.0630 | 52 |
| 60 | 32.9877 | 0.0303 | 533.1282 | 16.1614 | 0.0019 | 0.0619 | 60 |

Taxa de juro (i) =7%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0700 | 0.9346 | 1.0000 | 0.9346 | 1.0000 | 1.0700 | 1 |
| 2 | 1.1449 | 0.8734 | 2.0700 | 1.8080 | 0.4831 | 0.5531 | 2 |
| 3 | 1.2250 | 0.8163 | 3.2149 | 2.6243 | 0.3111 | 0.3811 | 3 |
| 4 | 1.3108 | 0.7629 | 4.4399 | 3.3872 | 0.2252 | 0.2952 | 4 |
| 5 | 1.4026 | 0.7130 | 5.7507 | 4.1002 | 0.1739 | 0.2439 | 5 |
| 6 | 1.5007 | 0.6663 | 7.1533 | 4.7665 | 0.1398 | 0.2098 | 6 |
| 7 | 1.6058 | 0.6227 | 8.6540 | 5.3893 | 0.1156 | 0.1856 | 7 |
| 8 | 1.7182 | 0.5820 | 10.2598 | 5.9713 | 0.0975 | 0.1675 | 8 |
| 9 | 1.8385 | 0.5439 | 11.9780 | 6.5152 | 0.0835 | 0.1535 | 9 |
| 10 | 1.9672 | 0.5083 | 13.8164 | 7.0236 | 0.0724 | 0.1424 | 10 |
| 11 | 2.1049 | 0.4751 | 15.7836 | 7.4987 | 0.0634 | 0.1334 | 11 |
| 12 | 2.2522 | 0.4440 | 17.8885 | 7.9427 | 0.0559 | 0.1259 | 12 |
| 13 | 2.4098 | 0.4150 | 20.1406 | 8.3577 | 0.0497 | 0.1197 | 13 |
| 14 | 2.5785 | 0.3878 | 22.5505 | 8.7455 | 0.0443 | 0.1143 | 14 |
| 15 | 2.7590 | 0.3624 | 25.1290 | 9.1079 | 0.0398 | 0.1098 | 15 |
| 16 | 2.9522 | 0.3387 | 27.8881 | 9.4466 | 0.0359 | 0.1059 | 16 |
| 17 | 3.1588 | 0.3166 | 30.8402 | 9.7632 | 0.0324 | 0.1024 | 17 |
| 18 | 3.3799 | 0.2959 | 33.9990 | 10.0591 | 0.0294 | 0.0994 | 18 |
| 19 | 3.6165 | 0.2765 | 37.3790 | 10.3356 | 0.0268 | 0.0968 | 19 |
| 20 | 3.8697 | 0.2584 | 40.9955 | 10.5940 | 0.0244 | 0.0944 | 20 |
| 21 | 4.1406 | 0.2415 | 44.8652 | 10.8355 | 0.0223 | 0.0923 | 21 |
| 22 | 4.4304 | 0.2257 | 49.0057 | 11.0612 | 0.0204 | 0.0904 | 22 |
| 23 | 4.7405 | 0.2109 | 53.4361 | 11.2722 | 0.0187 | 0.0887 | 23 |
| 24 | 5.0724 | 0.1971 | 58.1767 | 11.4693 | 0.0172 | 0.0872 | 24 |
| 25 | 5.4274 | 0.1842 | 63.2490 | 11.6536 | 0.0158 | 0.0858 | 25 |
| 26 | 5.8074 | 0.1722 | 68.6765 | 11.8258 | 0.0146 | 0.0846 | 26 |
| 27 | 6.2139 | 0.1609 | 74.4838 | 11.9867 | 0.0134 | 0.0834 | 27 |
| 28 | 6.6488 | 0.1504 | 80.6977 | 12.1371 | 0.0124 | 0.0824 | 28 |
| 29 | 7.1143 | 0.1406 | 87.3465 | 12.2777 | 0.0114 | 0.0814 | 29 |
| 30 | 7.6123 | 0.1314 | 94.4608 | 12.4090 | 0.0106 | 0.0806 | 30 |
| 36 | 11.4239 | 0.0875 | 148.9135 | 13.0352 | 0.0067 | 0.0767 | 36 |
| 40 | 14.9745 | 0.0668 | 199.6351 | 13.3317 | 0.0050 | 0.0750 | 40 |
| 48 | 25.7289 | 0.0389 | 353.2701 | 13.7305 | 0.0028 | 0.0728 | 48 |
| 50 | 29.4570 | 0.0339 | 406.5289 | 13.8007 | 0.0025 | 0.0725 | 50 |
| 52 | 33.7253 | 0.0297 | 467.5050 | 13.8621 | 0.0021 | 0.0721 | 52 |
| 60 | 57.9464 | 0.0173 | 813.5204 | 14.0392 | 0.0012 | 0.0712 | 60 |

Taxa de juro (i) =8%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|----|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|----|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0800 | 0.9259 | 1.0000 | 0.9259 | 1.0000 | 1.0800 | 1 |
| 2 | 1.1664 | 0.8573 | 2.0800 | 1.7833 | 0.4808 | 0.5608 | 2 |
| 3 | 1.2597 | 0.7938 | 3.2464 | 2.5771 | 0.3080 | 0.3880 | 3 |
| 4 | 1.3605 | 0.7350 | 4.5061 | 3.3121 | 0.2219 | 0.3019 | 4 |
| 5 | 1.4693 | 0.6806 | 5.8666 | 3.9927 | 0.1705 | 0.2505 | 5 |
| 6 | 1.5869 | 0.6302 | 7.3359 | 4.6229 | 0.1363 | 0.2163 | 6 |
| 7 | 1.7138 | 0.5835 | 8.9228 | 5.2064 | 0.1121 | 0.1921 | 7 |
| 8 | 1.8509 | 0.5403 | 10.6366 | 5.7466 | 0.0940 | 0.1740 | 8 |
| 9 | 1.9990 | 0.5002 | 12.4876 | 6.2469 | 0.0801 | 0.1601 | 9 |
| 10 | 2.1589 | 0.4632 | 14.4866 | 6.7101 | 0.0690 | 0.1490 | 10 |
| 11 | 2.3316 | 0.4289 | 16.6455 | 7.1390 | 0.0601 | 0.1401 | 11 |
| 12 | 2.5182 | 0.3971 | 18.9771 | 7.5361 | 0.0527 | 0.1327 | 12 |
| 13 | 2.7196 | 0.3677 | 21.4953 | 7.9038 | 0.0465 | 0.1265 | 13 |
| 14 | 2.9372 | 0.3405 | 24.2149 | 8.2442 | 0.0413 | 0.1213 | 14 |
| 15 | 3.1722 | 0.3152 | 27.1521 | 8.5595 | 0.0368 | 0.1168 | 15 |
| 16 | 3.4259 | 0.2919 | 30.3243 | 8.8514 | 0.0330 | 0.1130 | 16 |
| 17 | 3.7000 | 0.2703 | 33.7502 | 9.1216 | 0.0296 | 0.1096 | 17 |
| 18 | 3.9960 | 0.2502 | 37.4502 | 9.3719 | 0.0267 | 0.1067 | 18 |
| 19 | 4.3157 | 0.2317 | 41.4463 | 9.6036 | 0.0241 | 0.1041 | 19 |
| 20 | 4.6610 | 0.2145 | 45.7620 | 9.8181 | 0.0219 | 0.1019 | 20 |
| 21 | 5.0338 | 0.1987 | 50.4229 | 10.0168 | 0.0198 | 0.0998 | 21 |
| 22 | 5.4365 | 0.1839 | 55.4568 | 10.2007 | 0.0180 | 0.0980 | 22 |
| 23 | 5.8715 | 0.1703 | 60.8933 | 10.3711 | 0.0164 | 0.0964 | 23 |
| 24 | 6.3412 | 0.1577 | 66.7648 | 10.5288 | 0.0150 | 0.0950 | 24 |
| 25 | 6.8485 | 0.1460 | 73.1059 | 10.6748 | 0.0137 | 0.0937 | 25 |
| 26 | 7.3964 | 0.1352 | 79.9544 | 10.8100 | 0.0125 | 0.0925 | 26 |
| 27 | 7.9881 | 0.1252 | 87.3508 | 10.9352 | 0.0114 | 0.0914 | 27 |
| 28 | 8.6271 | 0.1159 | 95.3388 | 11.0511 | 0.0105 | 0.0905 | 28 |
| 29 | 9.3173 | 0.1073 | 103.9659 | 11.1584 | 0.0096 | 0.0896 | 29 |
| 30 | 10.0627 | 0.0994 | 113.2832 | 11.2578 | 0.0088 | 0.0888 | 30 |
| 36 | 15.9682 | 0.0626 | 187.1021 | 11.7172 | 0.0053 | 0.0853 | 36 |
| 40 | 21.7245 | 0.0460 | 259.0565 | 11.9246 | 0.0039 | 0.0839 | 40 |
| 48 | 40.2106 | 0.0249 | 490.1322 | 12.1891 | 0.0020 | 0.0820 | 48 |
| 50 | 46.9016 | 0.0213 | 573.7702 | 12.2335 | 0.0017 | 0.0817 | 50 |
| 52 | 54.7060 | 0.0183 | 671.3255 | 12.2715 | 0.0015 | 0.0815 | 52 |
| 60 | 101.2571 | 0.0099 | 1253.2133 | 12.3766 | 0.0008 | 0.0808 | 60 |

Taxa de juro (i) =9%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|----|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|----|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.0900 | 0.9174 | 1.0000 | 0.9174 | 1.0000 | 1.0900 | 1 |
| 2 | 1.1881 | 0.8417 | 2.0900 | 1.7591 | 0.4785 | 0.5685 | 2 |
| 3 | 1.2950 | 0.7722 | 3.2781 | 2.5313 | 0.3051 | 0.3951 | 3 |
| 4 | 1.4116 | 0.7084 | 4.5731 | 3.2397 | 0.2187 | 0.3087 | 4 |
| 5 | 1.5386 | 0.6499 | 5.9847 | 3.8897 | 0.1671 | 0.2571 | 5 |
| 6 | 1.6771 | 0.5963 | 7.5233 | 4.4859 | 0.1329 | 0.2229 | 6 |
| 7 | 1.8280 | 0.5470 | 9.2004 | 5.0330 | 0.1087 | 0.1987 | 7 |
| 8 | 1.9926 | 0.5019 | 11.0285 | 5.5348 | 0.0907 | 0.1807 | 8 |
| 9 | 2.1719 | 0.4604 | 13.0210 | 5.9952 | 0.0768 | 0.1668 | 9 |
| 10 | 2.3674 | 0.4224 | 15.1929 | 6.4177 | 0.0658 | 0.1558 | 10 |
| 11 | 2.5804 | 0.3875 | 17.5603 | 6.8052 | 0.0569 | 0.1469 | 11 |
| 12 | 2.8127 | 0.3555 | 20.1407 | 7.1607 | 0.0497 | 0.1397 | 12 |
| 13 | 3.0658 | 0.3262 | 22.9534 | 7.4869 | 0.0436 | 0.1336 | 13 |
| 14 | 3.3417 | 0.2992 | 26.0192 | 7.7862 | 0.0384 | 0.1284 | 14 |
| 15 | 3.6425 | 0.2745 | 29.3609 | 8.0607 | 0.0341 | 0.1241 | 15 |
| 16 | 3.9703 | 0.2519 | 33.0034 | 8.3126 | 0.0303 | 0.1203 | 16 |
| 17 | 4.3276 | 0.2311 | 36.9737 | 8.5436 | 0.0270 | 0.1170 | 17 |
| 18 | 4.7171 | 0.2120 | 41.3013 | 8.7556 | 0.0242 | 0.1142 | 18 |
| 19 | 5.1417 | 0.1945 | 46.0185 | 8.9501 | 0.0217 | 0.1117 | 19 |
| 20 | 5.6044 | 0.1784 | 51.1601 | 9.1285 | 0.0195 | 0.1095 | 20 |
| 21 | 6.1088 | 0.1637 | 56.7645 | 9.2922 | 0.0176 | 0.1076 | 21 |
| 22 | 6.6586 | 0.1502 | 62.8733 | 9.4424 | 0.0159 | 0.1059 | 22 |
| 23 | 7.2579 | 0.1378 | 69.5319 | 9.5802 | 0.0144 | 0.1044 | 23 |
| 24 | 7.9111 | 0.1264 | 76.7898 | 9.7066 | 0.0130 | 0.1030 | 24 |
| 25 | 8.6231 | 0.1160 | 84.7009 | 9.8226 | 0.0118 | 0.1018 | 25 |
| 26 | 9.3992 | 0.1064 | 93.3240 | 9.9290 | 0.0107 | 0.1007 | 26 |
| 27 | 10.2451 | 0.0976 | 102.7231 | 10.0266 | 0.0097 | 0.0997 | 27 |
| 28 | 11.1671 | 0.0895 | 112.9682 | 10.1161 | 0.0089 | 0.0989 | 28 |
| 29 | 12.1722 | 0.0822 | 124.1354 | 10.1983 | 0.0081 | 0.0981 | 29 |
| 30 | 13.2677 | 0.0754 | 136.3075 | 10.2737 | 0.0073 | 0.0973 | 30 |
| 36 | 22.2512 | 0.0449 | 236.1247 | 10.6118 | 0.0042 | 0.0942 | 36 |
| 40 | 31.4094 | 0.0318 | 337.8824 | 10.7574 | 0.0030 | 0.0930 | 40 |
| 48 | 62.5852 | 0.0160 | 684.2804 | 10.9336 | 0.0015 | 0.0915 | 48 |
| 50 | 74.3575 | 0.0134 | 815.0836 | 10.9617 | 0.0012 | 0.0912 | 50 |
| 52 | 88.3442 | 0.0113 | 970.4908 | 10.9853 | 0.0010 | 0.0910 | 52 |
| 60 | 176.0313 | 0.0057 | 1944.7921 | 11.0480 | 0.0005 | 0.0905 | 60 |

Taxa de juro (i) =10%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.1000 | 0.9091 | 1.0000 | 0.9091 | 1.0000 | 1.1000 | 1 |
| 2 | 1.2100 | 0.8264 | 2.1000 | 1.7355 | 0.4762 | 0.5762 | 2 |
| 3 | 1.3310 | 0.7513 | 3.3100 | 2.4869 | 0.3021 | 0.4021 | 3 |
| 4 | 1.4641 | 0.6830 | 4.6410 | 3.1699 | 0.2155 | 0.3155 | 4 |
| 5 | 1.6105 | 0.6209 | 6.1051 | 3.7908 | 0.1638 | 0.2638 | 5 |
| 6 | 1.7716 | 0.5645 | 7.7156 | 4.3553 | 0.1296 | 0.2296 | 6 |
| 7 | 1.9487 | 0.5132 | 9.4872 | 4.8684 | 0.1054 | 0.2054 | 7 |
| 8 | 2.1436 | 0.4665 | 11.4359 | 5.3349 | 0.0874 | 0.1874 | 8 |
| 9 | 2.3579 | 0.4241 | 13.5795 | 5.7590 | 0.0736 | 0.1736 | 9 |
| 10 | 2.5937 | 0.3855 | 15.9374 | 6.1446 | 0.0627 | 0.1627 | 10 |
| 11 | 2.8531 | 0.3505 | 18.5312 | 6.4951 | 0.0540 | 0.1540 | 11 |
| 12 | 3.1384 | 0.3186 | 21.3843 | 6.8137 | 0.0468 | 0.1468 | 12 |
| 13 | 3.4523 | 0.2897 | 24.5227 | 7.1034 | 0.0408 | 0.1408 | 13 |
| 14 | 3.7975 | 0.2633 | 27.9750 | 7.3667 | 0.0357 | 0.1357 | 14 |
| 15 | 4.1772 | 0.2394 | 31.7725 | 7.6061 | 0.0315 | 0.1315 | 15 |
| 16 | 4.5950 | 0.2176 | 35.9497 | 7.8237 | 0.0278 | 0.1278 | 16 |
| 17 | 5.0545 | 0.1978 | 40.5447 | 8.0216 | 0.0247 | 0.1247 | 17 |
| 18 | 5.5599 | 0.1799 | 45.5992 | 8.2014 | 0.0219 | 0.1219 | 18 |
| 19 | 6.1159 | 0.1635 | 51.1591 | 8.3649 | 0.0195 | 0.1195 | 19 |
| 20 | 6.7275 | 0.1486 | 57.2750 | 8.5136 | 0.0175 | 0.1175 | 20 |
| 21 | 7.4002 | 0.1351 | 64.0025 | 8.6487 | 0.0156 | 0.1156 | 21 |
| 22 | 8.1403 | 0.1228 | 71.4027 | 8.7715 | 0.0140 | 0.1140 | 22 |
| 23 | 8.9543 | 0.1117 | 79.5430 | 8.8832 | 0.0126 | 0.1126 | 23 |
| 24 | 9.8497 | 0.1015 | 88.4973 | 8.9847 | 0.0113 | 0.1113 | 24 |
| 25 | 10.8347 | 0.0923 | 98.3471 | 9.0770 | 0.0102 | 0.1102 | 25 |
| 26 | 11.9182 | 0.0839 | 109.1818 | 9.1609 | 0.0092 | 0.1092 | 26 |
| 27 | 13.1100 | 0.0763 | 121.0999 | 9.2372 | 0.0083 | 0.1083 | 27 |
| 28 | 14.4210 | 0.0693 | 134.2099 | 9.3066 | 0.0075 | 0.1075 | 28 |
| 29 | 15.8631 | 0.0630 | 148.6309 | 9.3696 | 0.0067 | 0.1067 | 29 |
| 30 | 17.4494 | 0.0573 | 164.4940 | 9.4269 | 0.0061 | 0.1061 | 30 |
| 36 | 30.9127 | 0.0323 | 299.1268 | 9.6765 | 0.0033 | 0.1033 | 36 |
| 40 | 45.2593 | 0.0221 | 442.5926 | 9.7791 | 0.0023 | 0.1023 | 40 |
| 48 | 97.0172 | 0.0103 | 960.1723 | 9.8969 | 0.0010 | 0.1010 | 48 |
| 50 | 117.3909 | 0.0085 | 1163.9085 | 9.9148 | 0.0009 | 0.1009 | 50 |
| 52 | 142.0429 | 0.0070 | 1410.4293 | 9.9296 | 0.0007 | 0.1007 | 52 |
| 60 | 304.4816 | 0.0033 | 3034.8164 | 9.9672 | 0.0003 | 0.1003 | 60 |

Taxa de juro (i) =12%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.1200 | 0.8929 | 1.0000 | 0.8929 | 1.0000 | 1.1200 | 1 |
| 2 | 1.2544 | 0.7972 | 2.1200 | 1.6901 | 0.4717 | 0.5917 | 2 |
| 3 | 1.4049 | 0.7118 | 3.3744 | 2.4018 | 0.2963 | 0.4163 | 3 |
| 4 | 1.5735 | 0.6355 | 4.7793 | 3.0373 | 0.2092 | 0.3292 | 4 |
| 5 | 1.7623 | 0.5674 | 6.3528 | 3.6048 | 0.1574 | 0.2774 | 5 |
| 6 | 1.9738 | 0.5066 | 8.1152 | 4.1114 | 0.1232 | 0.2432 | 6 |
| 7 | 2.2107 | 0.4523 | 10.0890 | 4.5638 | 0.0991 | 0.2191 | 7 |
| 8 | 2.4760 | 0.4039 | 12.2997 | 4.9676 | 0.0813 | 0.2013 | 8 |
| 9 | 2.7731 | 0.3606 | 14.7757 | 5.3282 | 0.0677 | 0.1877 | 9 |
| 10 | 3.1058 | 0.3220 | 17.5487 | 5.6502 | 0.0570 | 0.1770 | 10 |
| 11 | 3.4785 | 0.2875 | 20.6546 | 5.9377 | 0.0484 | 0.1684 | 11 |
| 12 | 3.8960 | 0.2567 | 24.1331 | 6.1944 | 0.0414 | 0.1614 | 12 |
| 13 | 4.3635 | 0.2292 | 28.0291 | 6.4235 | 0.0357 | 0.1557 | 13 |
| 14 | 4.8871 | 0.2046 | 32.3926 | 6.6282 | 0.0309 | 0.1509 | 14 |
| 15 | 5.4736 | 0.1827 | 37.2797 | 6.8109 | 0.0268 | 0.1468 | 15 |
| 16 | 6.1304 | 0.1631 | 42.7533 | 6.9740 | 0.0234 | 0.1434 | 16 |
| 17 | 6.8660 | 0.1456 | 48.8837 | 7.1196 | 0.0205 | 0.1405 | 17 |
| 18 | 7.6900 | 0.1300 | 55.7497 | 7.2497 | 0.0179 | 0.1379 | 18 |
| 19 | 8.6128 | 0.1161 | 63.4397 | 7.3658 | 0.0158 | 0.1358 | 19 |
| 20 | 9.6463 | 0.1037 | 72.0524 | 7.4694 | 0.0139 | 0.1339 | 20 |
| 21 | 10.8038 | 0.0926 | 81.6987 | 7.5620 | 0.0122 | 0.1322 | 21 |
| 22 | 12.1003 | 0.0826 | 92.5026 | 7.6446 | 0.0108 | 0.1308 | 22 |
| 23 | 13.5523 | 0.0738 | 104.6029 | 7.7184 | 0.0096 | 0.1296 | 23 |
| 24 | 15.1786 | 0.0659 | 118.1552 | 7.7843 | 0.0085 | 0.1285 | 24 |
| 25 | 17.0001 | 0.0588 | 133.3339 | 7.8431 | 0.0075 | 0.1275 | 25 |
| 26 | 19.0401 | 0.0525 | 150.3339 | 7.8957 | 0.0067 | 0.1267 | 26 |
| 27 | 21.3249 | 0.0469 | 169.3740 | 7.9426 | 0.0059 | 0.1259 | 27 |
| 28 | 23.8839 | 0.0419 | 190.6989 | 7.9844 | 0.0052 | 0.1252 | 28 |
| 29 | 26.7499 | 0.0374 | 214.5828 | 8.0218 | 0.0047 | 0.1247 | 29 |
| 30 | 29.9599 | 0.0334 | 241.3327 | 8.0552 | 0.0041 | 0.1241 | 30 |
| 36 | 59.1356 | 0.0169 | 484.4631 | 8.1924 | 0.0021 | 0.1221 | 36 |
| 40 | 93.0510 | 0.0107 | 767.0914 | 8.2438 | 0.0013 | 0.1213 | 40 |
| 48 | 230.3908 | 0.0043 | 1911.5898 | 8.2972 | 0.0005 | 0.1205 | 48 |
| 50 | 289.0022 | 0.0035 | 2400.0182 | 8.3045 | 0.0004 | 0.1204 | 50 |
| 52 | 362.5243 | 0.0028 | 3012.7029 | 8.3103 | 0.0003 | 0.1203 | 52 |
| 60 | 897.5969 | 0.0011 | 7471.6411 | 8.3240 | 0.0001 | 0.1201 | 60 |

Taxa de juro (i) =15%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.1500 | 0.8696 | 1.0000 | 0.8696 | 1.0000 | 1.1500 | 1 |
| 2 | 1.3225 | 0.7561 | 2.1500 | 1.6257 | 0.4651 | 0.6151 | 2 |
| 3 | 1.5209 | 0.6575 | 3.4725 | 2.2832 | 0.2880 | 0.4380 | 3 |
| 4 | 1.7490 | 0.5718 | 4.9934 | 2.8550 | 0.2003 | 0.3503 | 4 |
| 5 | 2.0114 | 0.4972 | 6.7424 | 3.3522 | 0.1483 | 0.2983 | 5 |
| 6 | 2.3131 | 0.4323 | 8.7537 | 3.7845 | 0.1142 | 0.2642 | 6 |
| 7 | 2.6600 | 0.3759 | 11.0668 | 4.1604 | 0.0904 | 0.2404 | 7 |
| 8 | 3.0590 | 0.3269 | 13.7268 | 4.4873 | 0.0729 | 0.2229 | 8 |
| 9 | 3.5179 | 0.2843 | 16.7858 | 4.7716 | 0.0596 | 0.2096 | 9 |
| 10 | 4.0456 | 0.2472 | 20.3037 | 5.0188 | 0.0493 | 0.1993 | 10 |
| 11 | 4.6524 | 0.2149 | 24.3493 | 5.2337 | 0.0411 | 0.1911 | 11 |
| 12 | 5.3503 | 0.1869 | 29.0017 | 5.4206 | 0.0345 | 0.1845 | 12 |
| 13 | 6.1528 | 0.1625 | 34.3519 | 5.5831 | 0.0291 | 0.1791 | 13 |
| 14 | 7.0757 | 0.1413 | 40.5047 | 5.7245 | 0.0247 | 0.1747 | 14 |
| 15 | 8.1371 | 0.1229 | 47.5804 | 5.8474 | 0.0210 | 0.1710 | 15 |
| 16 | 9.3576 | 0.1069 | 55.7175 | 5.9542 | 0.0179 | 0.1679 | 16 |
| 17 | 10.7613 | 0.0929 | 65.0751 | 6.0472 | 0.0154 | 0.1654 | 17 |
| 18 | 12.3755 | 0.0808 | 75.8364 | 6.1280 | 0.0132 | 0.1632 | 18 |
| 19 | 14.2318 | 0.0703 | 88.2118 | 6.1982 | 0.0113 | 0.1613 | 19 |
| 20 | 16.3665 | 0.0611 | 102.4436 | 6.2593 | 0.0098 | 0.1598 | 20 |
| 21 | 18.8215 | 0.0531 | 118.8101 | 6.3125 | 0.0084 | 0.1584 | 21 |
| 22 | 21.6447 | 0.0462 | 137.6316 | 6.3587 | 0.0073 | 0.1573 | 22 |
| 23 | 24.8915 | 0.0402 | 159.2764 | 6.3988 | 0.0063 | 0.1563 | 23 |
| 24 | 28.6252 | 0.0349 | 184.1678 | 6.4338 | 0.0054 | 0.1554 | 24 |
| 25 | 32.9190 | 0.0304 | 212.7930 | 6.4641 | 0.0047 | 0.1547 | 25 |
| 26 | 37.8568 | 0.0264 | 245.7120 | 6.4906 | 0.0041 | 0.1541 | 26 |
| 27 | 43.5353 | 0.0230 | 283.5688 | 6.5135 | 0.0035 | 0.1535 | 27 |
| 28 | 50.0656 | 0.0200 | 327.1041 | 6.5335 | 0.0031 | 0.1531 | 28 |
| 29 | 57.5755 | 0.0174 | 377.1697 | 6.5509 | 0.0027 | 0.1527 | 29 |
| 30 | 66.2118 | 0.0151 | 434.7451 | 6.5660 | 0.0023 | 0.1523 | 30 |
| 36 | 153.1519 | 0.0065 | 1014.3457 | 6.6231 | 0.0010 | 0.1510 | 36 |
| 40 | 267.8635 | 0.0037 | 1779.0903 | 6.6418 | 0.0006 | 0.1506 | 40 |
| 48 | 819.4007 | 0.0012 | 5456.0047 | 6.6585 | 0.0002 | 0.1502 | 48 |
| 50 | 1083.6574 | 0.0009 | 7217.7163 | 6.6605 | 0.0001 | 0.1501 | 50 |
| 52 | 1433.1370 | 0.0007 | 9547.5798 | 6.6620 | 0.0001 | 0.1501 | 52 |
| 60 | 4383.9987 | 0.0002 | 29219.9916 | 6.6651 | 0.0000 | 0.1500 | 60 |

Taxa de juro (i) =18%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.1800 | 0.8475 | 1.0000 | 0.8475 | 1.0000 | 1.1800 | 1 |
| 2 | 1.3924 | 0.7182 | 2.1800 | 1.5656 | 0.4587 | 0.6387 | 2 |
| 3 | 1.6430 | 0.6086 | 3.5724 | 2.1743 | 0.2799 | 0.4599 | 3 |
| 4 | 1.9388 | 0.5158 | 5.2154 | 2.6901 | 0.1917 | 0.3717 | 4 |
| 5 | 2.2878 | 0.4371 | 7.1542 | 3.1272 | 0.1398 | 0.3198 | 5 |
| 6 | 2.6996 | 0.3704 | 9.4420 | 3.4976 | 0.1059 | 0.2859 | 6 |
| 7 | 3.1855 | 0.3139 | 12.1415 | 3.8115 | 0.0824 | 0.2624 | 7 |
| 8 | 3.7589 | 0.2660 | 15.3270 | 4.0776 | 0.0652 | 0.2452 | 8 |
| 9 | 4.4355 | 0.2255 | 19.0859 | 4.3030 | 0.0524 | 0.2324 | 9 |
| 10 | 5.2338 | 0.1911 | 23.5213 | 4.4941 | 0.0425 | 0.2225 | 10 |
| 11 | 6.1759 | 0.1619 | 28.7551 | 4.6560 | 0.0348 | 0.2148 | 11 |
| 12 | 7.2876 | 0.1372 | 34.9311 | 4.7932 | 0.0286 | 0.2086 | 12 |
| 13 | 8.5994 | 0.1163 | 42.2187 | 4.9095 | 0.0237 | 0.2037 | 13 |
| 14 | 10.1472 | 0.0985 | 50.8180 | 5.0081 | 0.0197 | 0.1997 | 14 |
| 15 | 11.9737 | 0.0835 | 60.9653 | 5.0916 | 0.0164 | 0.1964 | 15 |
| 16 | 14.1290 | 0.0708 | 72.9390 | 5.1624 | 0.0137 | 0.1937 | 16 |
| 17 | 16.6722 | 0.0600 | 87.0680 | 5.2223 | 0.0115 | 0.1915 | 17 |
| 18 | 19.6733 | 0.0508 | 103.7403 | 5.2732 | 0.0096 | 0.1896 | 18 |
| 19 | 23.2144 | 0.0431 | 123.4135 | 5.3162 | 0.0081 | 0.1881 | 19 |
| 20 | 27.3930 | 0.0365 | 146.6280 | 5.3527 | 0.0068 | 0.1868 | 20 |
| 21 | 32.3238 | 0.0309 | 174.0210 | 5.3837 | 0.0057 | 0.1857 | 21 |
| 22 | 38.1421 | 0.0262 | 206.3448 | 5.4099 | 0.0048 | 0.1848 | 22 |
| 23 | 45.0076 | 0.0222 | 244.4868 | 5.4321 | 0.0041 | 0.1841 | 23 |
| 24 | 53.1090 | 0.0188 | 289.4945 | 5.4509 | 0.0035 | 0.1835 | 24 |
| 25 | 62.6686 | 0.0160 | 342.6035 | 5.4669 | 0.0029 | 0.1829 | 25 |
| 26 | 73.9490 | 0.0135 | 405.2721 | 5.4804 | 0.0025 | 0.1825 | 26 |
| 27 | 87.2598 | 0.0115 | 479.2211 | 5.4919 | 0.0021 | 0.1821 | 27 |
| 28 | 102.9666 | 0.0097 | 566.4809 | 5.5016 | 0.0018 | 0.1818 | 28 |
| 29 | 121.5005 | 0.0082 | 669.4475 | 5.5098 | 0.0015 | 0.1815 | 29 |
| 30 | 143.3706 | 0.0070 | 790.9480 | 5.5168 | 0.0013 | 0.1813 | 30 |
| 36 | 387.0368 | 0.0026 | 2144.6489 | 5.5412 | 0.0005 | 0.1805 | 36 |
| 40 | 750.3783 | 0.0013 | 4163.2130 | 5.5482 | 0.0002 | 0.1802 | 40 |
| 48 | 2820.5665 | 0.0004 | 15664.2586 | 5.5536 | 0.0001 | 0.1801 | 48 |
| 50 | 3927.3569 | 0.0003 | 21813.0937 | 5.5541 | 0.0000 | 0.1800 | 50 |
| 52 | 5468.4517 | 0.0002 | 30374.7316 | 5.5545 | 0.0000 | 0.1800 | 52 |
| 60 | 20555.1400 | 0.0000 | 114189.6665 | 5.5553 | 0.0000 | 0.1800 | 60 |

Taxa de juro (i) =20%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.2000 | 0.8333 | 1.0000 | 0.8333 | 1.0000 | 1.2000 | 1 |
| 2 | 1.4400 | 0.6944 | 2.2000 | 1.5278 | 0.4545 | 0.6545 | 2 |
| 3 | 1.7280 | 0.5787 | 3.6400 | 2.1065 | 0.2747 | 0.4747 | 3 |
| 4 | 2.0736 | 0.4823 | 5.3680 | 2.5887 | 0.1863 | 0.3863 | 4 |
| 5 | 2.4883 | 0.4019 | 7.4416 | 2.9906 | 0.1344 | 0.3344 | 5 |
| 6 | 2.9860 | 0.3349 | 9.9299 | 3.3255 | 0.1007 | 0.3007 | 6 |
| 7 | 3.5832 | 0.2791 | 12.9159 | 3.6046 | 0.0774 | 0.2774 | 7 |
| 8 | 4.2998 | 0.2326 | 16.4991 | 3.8372 | 0.0606 | 0.2606 | 8 |
| 9 | 5.1598 | 0.1938 | 20.7989 | 4.0310 | 0.0481 | 0.2481 | 9 |
| 10 | 6.1917 | 0.1615 | 25.9587 | 4.1925 | 0.0385 | 0.2385 | 10 |
| 11 | 7.4301 | 0.1346 | 32.1504 | 4.3271 | 0.0311 | 0.2311 | 11 |
| 12 | 8.9161 | 0.1122 | 39.5805 | 4.4392 | 0.0253 | 0.2253 | 12 |
| 13 | 10.6993 | 0.0935 | 48.4966 | 4.5327 | 0.0206 | 0.2206 | 13 |
| 14 | 12.8392 | 0.0779 | 59.1959 | 4.6106 | 0.0169 | 0.2169 | 14 |
| 15 | 15.4070 | 0.0649 | 72.0351 | 4.6755 | 0.0139 | 0.2139 | 15 |
| 16 | 18.4884 | 0.0541 | 87.4421 | 4.7296 | 0.0114 | 0.2114 | 16 |
| 17 | 22.1861 | 0.0451 | 105.9306 | 4.7746 | 0.0094 | 0.2094 | 17 |
| 18 | 26.6233 | 0.0376 | 128.1167 | 4.8122 | 0.0078 | 0.2078 | 18 |
| 19 | 31.9480 | 0.0313 | 154.7400 | 4.8435 | 0.0065 | 0.2065 | 19 |
| 20 | 38.3376 | 0.0261 | 186.6880 | 4.8696 | 0.0054 | 0.2054 | 20 |
| 21 | 46.0051 | 0.0217 | 225.0256 | 4.8913 | 0.0044 | 0.2044 | 21 |
| 22 | 55.2061 | 0.0181 | 271.0307 | 4.9094 | 0.0037 | 0.2037 | 22 |
| 23 | 66.2474 | 0.0151 | 326.2369 | 4.9245 | 0.0031 | 0.2031 | 23 |
| 24 | 79.4968 | 0.0126 | 392.4842 | 4.9371 | 0.0025 | 0.2025 | 24 |
| 25 | 95.3962 | 0.0105 | 471.9811 | 4.9476 | 0.0021 | 0.2021 | 25 |
| 26 | 114.4755 | 0.0087 | 567.3773 | 4.9563 | 0.0018 | 0.2018 | 26 |
| 27 | 137.3706 | 0.0073 | 681.8528 | 4.9636 | 0.0015 | 0.2015 | 27 |
| 28 | 164.8447 | 0.0061 | 819.2233 | 4.9697 | 0.0012 | 0.2012 | 28 |
| 29 | 197.8136 | 0.0051 | 984.0680 | 4.9747 | 0.0010 | 0.2010 | 29 |
| 30 | 237.3763 | 0.0042 | 1181.8816 | 4.9789 | 0.0008 | 0.2008 | 30 |
| 36 | 708.8019 | 0.0014 | 3539.0094 | 4.9929 | 0.0003 | 0.2003 | 36 |
| 40 | 1469.7716 | 0.0007 | 7343.8578 | 4.9966 | 0.0001 | 0.2001 | 40 |
| 48 | 6319.7487 | 0.0002 | 31593.744 | 4.9992 | 0.0000 | 0.2000 | 48 |
| 50 | 9100.4382 | 0.0001 | 45497.191 | 4.9995 | 0.0000 | 0.2000 | 50 |
| 52 | 13104.6309 | 0.0001 | 65518.155 | 4.9996 | 0.0000 | 0.2000 | 52 |
| 60 | 56347.5144 | 0.0000 | 281732.572 | 4.9999 | 0.0000 | 0.2000 | 60 |

Taxa de juro (i) =25%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|----|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|----|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.2500 | 0.8000 | 1.0000 | 0.8000 | 1.0000 | 1.2500 | 1 |
| 2 | 1.5625 | 0.6400 | 2.2500 | 1.4400 | 0.4444 | 0.6944 | 2 |
| 3 | 1.9531 | 0.5120 | 3.8125 | 1.9520 | 0.2623 | 0.5123 | 3 |
| 4 | 2.4414 | 0.4096 | 5.7656 | 2.3616 | 0.1734 | 0.4234 | 4 |
| 5 | 3.0518 | 0.3277 | 8.2070 | 2.6893 | 0.1218 | 0.3718 | 5 |
| 6 | 3.8147 | 0.2621 | 11.2588 | 2.9514 | 0.0888 | 0.3388 | 6 |
| 7 | 4.7684 | 0.2097 | 15.0735 | 3.1611 | 0.0663 | 0.3163 | 7 |
| 8 | 5.9605 | 0.1678 | 19.8419 | 3.3289 | 0.0504 | 0.3004 | 8 |
| 9 | 7.4506 | 0.1342 | 25.8023 | 3.4631 | 0.0388 | 0.2888 | 9 |
| 10 | 9.3132 | 0.1074 | 33.2529 | 3.5705 | 0.0301 | 0.2801 | 10 |
| 11 | 11.6415 | 0.0859 | 42.5661 | 3.6564 | 0.0235 | 0.2735 | 11 |
| 12 | 14.5519 | 0.0687 | 54.2077 | 3.7251 | 0.0184 | 0.2684 | 12 |
| 13 | 18.1899 | 0.0550 | 68.7596 | 3.7801 | 0.0145 | 0.2645 | 13 |
| 14 | 22.7374 | 0.0440 | 86.9495 | 3.8241 | 0.0115 | 0.2615 | 14 |
| 15 | 28.4217 | 0.0352 | 109.6868 | 3.8593 | 0.0091 | 0.2591 | 15 |
| 16 | 35.5271 | 0.0281 | 138.1085 | 3.8874 | 0.0072 | 0.2572 | 16 |
| 17 | 44.4089 | 0.0225 | 173.6357 | 3.9099 | 0.0058 | 0.2558 | 17 |
| 18 | 55.5112 | 0.0180 | 218.0446 | 3.9279 | 0.0046 | 0.2546 | 18 |
| 19 | 69.3889 | 0.0144 | 273.5558 | 3.9424 | 0.0037 | 0.2537 | 19 |
| 20 | 86.7362 | 0.0115 | 342.9447 | 3.9539 | 0.0029 | 0.2529 | 20 |
| 21 | 108.4202 | 0.0092 | 429.6809 | 3.9631 | 0.0023 | 0.2523 | 21 |
| 22 | 135.5253 | 0.0074 | 538.1011 | 3.9705 | 0.0019 | 0.2519 | 22 |
| 23 | 169.4066 | 0.0059 | 673.6264 | 3.9764 | 0.0015 | 0.2515 | 23 |
| 24 | 211.7582 | 0.0047 | 843.0329 | 3.9811 | 0.0012 | 0.2512 | 24 |
| 25 | 264.6978 | 0.0038 | 1054.7912 | 3.9849 | 0.0009 | 0.2509 | 25 |
| 26 | 330.8722 | 0.0030 | 1319.4890 | 3.9879 | 0.0008 | 0.2508 | 26 |
| 27 | 413.5903 | 0.0024 | 1650.3612 | 3.9903 | 0.0006 | 0.2506 | 27 |
| 28 | 516.9879 | 0.0019 | 2063.9515 | 3.9923 | 0.0005 | 0.2505 | 28 |
| 29 | 646.2349 | 0.0015 | 2580.9394 | 3.9938 | 0.0004 | 0.2504 | 29 |
| 30 | 807.7936 | 0.0012 | 3227.1743 | 3.9950 | 0.0003 | 0.2503 | 30 |
| 36 | 3081.4879 | 0.0003 | 12321.952 | 3.9987 | 0.0001 | 0.2501 | 36 |
| 40 | 7523.1638 | 0.0001 | 30088.655 | 3.9995 | 0.0000 | 0.2500 | 40 |
| 48 | 44841.5509 | 0.0000 | 179362.203 | 3.9999 | 0.0000 | 0.2500 | 48 |
| 50 | 70064.9232 | 0.0000 | 280255.693 | 3.9999 | 0.0000 | 0.2500 | 50 |
| 52 | 109476.4425 | 0.0000 | 437901.770 | 4.0000 | 0.0000 | 0.2500 | 52 |
| 60 | 652530.4468 | 0.0000 | 2610117.787 | 4.0000 | 0.0000 | 0.2500 | 60 |

Taxa de juro (i) =30%

| N | Actualização/ Capitalização | | Pagamentos uniformes | | | | N |
|-----------|-----------------------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| | P → F | F → P | A → F | A → P | F → A | P → A | |
| | $F_{PF,i,n}$ | $F_{FP,i,n}$ | $F_{AF,i,n}$ | $F_{AP,i,n}$ | $F_{FA,i,n}$ | $F_{PA,i,n}$ | |
| 1 | 1.3000 | 0.7692 | 1.0000 | 0.7692 | 1.0000 | 1.3000 | 1 |
| 2 | 1.6900 | 0.5917 | 2.3000 | 1.3609 | 0.4348 | 0.7348 | 2 |
| 3 | 2.1970 | 0.4552 | 3.9900 | 1.8161 | 0.2506 | 0.5506 | 3 |
| 4 | 2.8561 | 0.3501 | 6.1870 | 2.1662 | 0.1616 | 0.4616 | 4 |
| 5 | 3.7129 | 0.2693 | 9.0431 | 2.4356 | 0.1106 | 0.4106 | 5 |
| 6 | 4.8268 | 0.2072 | 12.7560 | 2.6427 | 0.0784 | 0.3784 | 6 |
| 7 | 6.2749 | 0.1594 | 17.5828 | 2.8021 | 0.0569 | 0.3569 | 7 |
| 8 | 8.1573 | 0.1226 | 23.8577 | 2.9247 | 0.0419 | 0.3419 | 8 |
| 9 | 10.6045 | 0.0943 | 32.0150 | 3.0190 | 0.0312 | 0.3312 | 9 |
| 10 | 13.7858 | 0.0725 | 42.6195 | 3.0915 | 0.0235 | 0.3235 | 10 |
| 11 | 17.9216 | 0.0558 | 56.4053 | 3.1473 | 0.0177 | 0.3177 | 11 |
| 12 | 23.2981 | 0.0429 | 74.3270 | 3.1903 | 0.0135 | 0.3135 | 12 |
| 13 | 30.2875 | 0.0330 | 97.6250 | 3.2233 | 0.0102 | 0.3102 | 13 |
| 14 | 39.3738 | 0.0254 | 127.9125 | 3.2487 | 0.0078 | 0.3078 | 14 |
| 15 | 51.1859 | 0.0195 | 167.2863 | 3.2682 | 0.0060 | 0.3060 | 15 |
| 16 | 66.5417 | 0.0150 | 218.4722 | 3.2832 | 0.0046 | 0.3046 | 16 |
| 17 | 86.5042 | 0.0116 | 285.0139 | 3.2948 | 0.0035 | 0.3035 | 17 |
| 18 | 112.4554 | 0.0089 | 371.5180 | 3.3037 | 0.0027 | 0.3027 | 18 |
| 19 | 146.1920 | 0.0068 | 483.9734 | 3.3105 | 0.0021 | 0.3021 | 19 |
| 20 | 190.0496 | 0.0053 | 630.1655 | 3.3158 | 0.0016 | 0.3016 | 20 |
| 21 | 247.0645 | 0.0040 | 820.2151 | 3.3198 | 0.0012 | 0.3012 | 21 |
| 22 | 321.1839 | 0.0031 | 1067.2796 | 3.3230 | 0.0009 | 0.3009 | 22 |
| 23 | 417.5391 | 0.0024 | 1388.4635 | 3.3254 | 0.0007 | 0.3007 | 23 |
| 24 | 542.8008 | 0.0018 | 1806.0026 | 3.3272 | 0.0006 | 0.3006 | 24 |
| 25 | 705.6410 | 0.0014 | 2348.8033 | 3.3286 | 0.0004 | 0.3004 | 25 |
| 26 | 917.3333 | 0.0011 | 3054.4443 | 3.3297 | 0.0003 | 0.3003 | 26 |
| 27 | 1192.5333 | 0.0008 | 3971.7776 | 3.3305 | 0.0003 | 0.3003 | 27 |
| 28 | 1550.2933 | 0.0006 | 5164.3109 | 3.3312 | 0.0002 | 0.3002 | 28 |
| 29 | 2015.3813 | 0.0005 | 6714.6042 | 3.3317 | 0.0001 | 0.3001 | 29 |
| 30 | 2619.9956 | 0.0004 | 8729.9855 | 3.3321 | 0.0001 | 0.3001 | 30 |
| 36 | 12646.2186 | 0.0001 | 42150.729 | 3.3331 | 0.0000 | 0.3000 | 36 |
| 40 | 36118.8648 | 0.0000 | 120392.883 | 3.3332 | 0.0000 | 0.3000 | 40 |
| 48 | 294632.6763 | 0.0000 | 982105.588 | 3.3333 | 0.0000 | 0.3000 | 48 |
| 50 | 497929.2230 | 0.0000 | 1659760.743 | 3.3333 | 0.0000 | 0.3000 | 50 |
| 52 | 841500.3868 | 0.0000 | 2804997.956 | 3.3333 | 0.0000 | 0.3000 | 52 |
| 60 | 6864377.1727 | 0.0000 | 22881253.909 | 3.3333 | 0.0000 | 0.3000 | 60 |

