Ficha n.º 4: DETERMINANTES

Exercício 4.1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os valores de λ para os quais se tem

$$det(A - \lambda I_3) = 0.$$

Exercício 4.3. Determine para que valores de x se verifica

$$det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 0.$$

Exercício 4.4. *a)* Prove que a equação da recta que passa por dois pontos distintos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

b) Use o resultado da alínea anterior para obter uma equação da recta que passa nos pontos de coordenadas $(1,6)$ e $(2,4)$.

c) Prove que os pontos de coordenadas $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ e (x_3,y_3) são colineares se e só se

$$det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Exercício 4.5. Calcule o valor do determinante de cada uma das matrizes seguintes, sem realizar cálculo numérico.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.6. Calcule

a)

$$det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$det\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

c)

$$det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.7. Seja A uma matriz de ordem n tal que $det(A) = 1$. Escreva a que é igual

a) $det(-A)$.

b) $det(3A)$.

c) $det(A^{-1})$.

d) $det(P^{-1}AP)$.

Exercício 4.8. Calculando o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix},$$

verifique que ela é invertível se e só se $a \neq b$.

Exercício 4.9. Seja A uma matriz de ordem n cuja soma dos elementos de cada linha é igual a zero. Justifique que $det(A) = 0$.

(Observação: Se $\mathbf{x}$ é um vector com n componentes todas iguais a 1, note que $A\mathbf{x} = 0$.)

Exercício 4.10. Prove que se R é uma matriz ortogonal então $det(R)$ é igual a 1 ou a -1.

Exercício 4.11. Calcule, usando eliminação Gaussiana, o determinante de cada uma das matrizes seguintes:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.12. Use a regra de Cramer para resolver os sistemas:

a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}.$$

b)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}.$$

Exercício 4.13. Use o método da adjunta para calcular a inversa de:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Observação: Recorde que a inversa de uma matriz simétrica invertível é também simétrica.)

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Observação: Recorde que a inversa de uma matriz triangular superior invertível é também triangular superior.)

Exercício 4.14. Prove que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

onde $\Delta = a\,d - b\,c \neq 0$.