LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Teste 1, Versão A - 26/11/11**

Nome: ____ **Número:** _________ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 1 hora e 20 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por seis exercícios. Os exercícios I - V devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VI deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
☐	☐	$(p \Leftrightarrow \neg p) \Leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
☐	☐	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
☐	☐	$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$
☐	☐	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$
☐	☐	$((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee r))$

II. (1 valor) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$p: \quad \forall x \forall y \forall z \quad (x \geq 0 \wedge y \leq z) \Rightarrow xy \leq xz$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição p.

____

III. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$ e $B = \mathbb{Z} \cup \{\{1, 2\}, (1, 2)\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
☐	☐	$\{(1, 2)\} \in B$
☐	☐	$\{(1, 2)\} \subseteq B \setminus A$
☐	☐	$\{1, 2\} \subseteq A$ e $\{1, 2\} \in B$
☐	☐	$A \cap B \in B$
☐	☐	$A \cap B \not\subseteq \mathbb{Z}$

IV. Sejam A, B, C três conjuntos tais que $A \cap B = B \setminus C$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
☐	☐	$A \cap B \cap C = \emptyset$
☐	☐	$\forall x \in B \quad x \notin C \Rightarrow x \in A$
☐	☐	$A \cap C = \emptyset$
☐	☐	$\forall x \in B \quad x \notin A \Rightarrow x \in C$

V. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{X \subseteq \mathbb{N} \,|\, \exists x \in \mathbb{N},\, X = \{x\}\}, \quad B = \{\emptyset, 1\} \quad \text{e} \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \in B\}.$$

Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (1 valor) $C =$ ______________________

(b) (1 valor) $B^2 =$ ______________________

(c) (1 valor) $\mathcal{P}(B) \cap A =$ ______________________

(d) (1 valor) $\mathcal{P}(C) \setminus A =$ ______________________

VI. **[Resposta em folha separada]** Sejam A, B e C três conjuntos.

(a) (2,5 valores) Mostre que, se $A \setminus C \subseteq A \setminus B$, então $A \cap B \subseteq A \cap C$.

(b) (2 valores) **Justificando a sua resposta**, diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

Se $C \subseteq A \times B$ então existem $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tais que $C = X \times Y$.

LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Teste 1, Versão B - 26/11/11**

Nome: ____ **Número:** _________ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 1 hora e 20 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por seis exercícios. Os exercícios I - V devem ser resolvidos no enunciado. O exercício VI deve ser resolvido numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
□	□	$(q \Rightarrow p) \Rightarrow p$
□	□	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$
□	□	$(q \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg p)$
□	□	$(r \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow ((r \wedge p) \vee q)$
□	□	$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$

II. (1 valor) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$p: \quad \forall x \forall y \forall z \quad (x \geq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow xz \geq yz$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição p.

____

III. Considere os conjuntos $A = \mathbb{Z} \cup \{(1,3), \{1,3\}\}$ e $B = \{1, 3, \{1\}, \{3\}\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
□	□	$\{(1,3)\} \subseteq A \setminus B$
□	□	$\{(1,3)\} \in A$
□	□	$\{1,3\} \in A$ e $\{1,3\} \subseteq B$
□	□	$A \cap B \nsubseteq \mathbb{Z}$
□	□	$A \cap B \in A$

IV. Sejam A, B, C três conjuntos tais que $A \cap C = C \setminus B$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
☐	☐	$\forall x \in C \quad x \notin B \Rightarrow x \in A$
☐	☐	$A \cap B = \emptyset$
☐	☐	$A \cap B \cap C = \emptyset$
☐	☐	$\forall x \in C \quad x \notin A \Rightarrow x \in B$

V. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{\emptyset, 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \in A\}, \quad \text{e} \quad C = \{X \subseteq \mathbb{N} \,|\, \exists x \in \mathbb{N},\, X = \{x\}\}.$$

Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (1 valor) $A^2 =$ ____________________________

(b) (1 valor) $B =$ ____________________________

(c) (1 valor) $\mathcal{P}(A) \cap C =$ ____________________________

(d) (1 valor) $\mathcal{P}(B) \setminus C =$ ____________________________

VI. [Resposta em folha separada] Sejam A, B e C três conjuntos.

(a) (2,5 valores) Mostre que, se $A \setminus C \subseteq A \setminus B$, então $A \cap B \subseteq A \cap C$.

(b) (2 valores) **Justificando a sua resposta**, diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

$$\text{Se } C \subseteq A \times B \text{ então existem } X \subseteq A \text{ e } Y \subseteq B \text{ tais que } C = X \times Y.$$