



EXAME DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Cursos de Engenharia: CIVIL

14 de Junho de 2004 Duração: 3 horas

APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS QUE TIVER DE EFECTUAR

1. Em engenharia ambiental, a seguinte equação pode ser usada para calcular o nível de concentração de oxigénio c num rio, em função da distância x , medida a partir do local de descarga de poluentes:

$$c(x) = 10 - 20(e^{-0.2x} - e^{-0.75x}).$$

Calcule, usando um método que recorre ao cálculo de derivadas, a distância para a qual o nível de oxigénio desce para o valor 5. Utilize para aproximação inicial o valor $x^{(1)} = 1.0$ e considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo 3 iterações.

2. Considere a seguinte tabela, contendo os valores de $f(x)$ e de dois modelos $M_1(x)$ e $M_2(x)$:

| | | | | |
|------------|---------|--------|--------|--------|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x_i)$ | -2 | 1.9 | 2 | 3 |
| $M_1(x_i)$ | -1.765 | 1.195 | 2.705 | 2.765 |
| $M_2(x_i)$ | -1.9127 | 1.7843 | 2.2811 | 2.9079 |

- a) Qual o modelo, $M_1(x)$ ou $M_2(x)$, que melhor aproxima a função $f(x)$ no sentido dos mínimos quadrados? Justifique.
- b) Sabendo que:

M_1 é um modelo polinomial de grau 2

$$M_2(x; c_1, c_2) = c_1 e^x - c_2 x^2$$

calcule, no sentido dos mínimos quadrados, o modelo escolhido na alínea a).

3. Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

| Equipa | F.C.Sol | F.C.Lá | S.C.Gato | Nova F.C. | Vila F.C. | F.C.Chão |
|-----------------------|---------|--------|----------|-----------|-----------|----------|
| Nº de pontos, x_i | 10 | 12 | 18 | 27 | 30 | 34 |
| Nº de golos, $f(x_i)$ | 20 | 18 | 15 | 9 | 12 | 10 |

- a) Use uma spline cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7ª equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.
- b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.
4. Um soldado pára-quedista cai do avião a uma altura de 600 metros. Após 5 segundos, o pára-quedas abre.

A altura de queda do soldado pára-quedista como função do tempo, $y(t)$, é dada por

$$y'' = -g + \frac{\alpha(t)}{m}, \quad y(0) = 600m \text{ e } y'(0) = 0m/s$$

em que $g = 9.81m/s^2$ é a aceleração da gravidade e $m = 80 \text{ kg}$ é peso do soldado pára-quedista.

A resistência do ar $\alpha(t)$ é proporcional ao quadrado da velocidade, com diferentes constantes de proporcionalidade antes e depois da abertura do pára-quedas:

$$\alpha(t) = \begin{cases} K_1 y'(t)^2, & t < 5 \text{ s} \\ K_2 y'(t)^2, & t \geq 5 \text{ s} \end{cases}$$

Considere $K_1 = 1/150$, $K_2 = 4/150$.



A que altura o pára-quedas abre? (considere um espaçamento de 2.5 segundos).

5. Na tabela seguinte são indicadas as medidas do fluxo de calor, q , na superfície de um painel solar, ao longo do tempo

| Tempo, t (h) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 11 | 13 |
|---|-----|------|------|------|-----|------|------|------|-----|
| Fluxo de Calor, q $\left(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\text{h}}\right)$ | 0.1 | 1.62 | 5.32 | 6.29 | 7.8 | 8.81 | 8.03 | 5.56 | 1.0 |

O painel tem uma eficiência e de 0.45. O calor total absorvido é dado por

$$H = e \int_0^{13} q A dt$$

onde A é a área da superfície do painel.

Estime o calor total absorvido por um painel de 150000cm^2 .

6. Considere a fórmula simples de Newton-Cotes, para integração numérica, definida por

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right]$$

que apenas utiliza os dois pontos x_1 e x_2 do intervalo $[a, b]$, sendo o espaçamento entre pontos definido por $h = \frac{b-a}{3}$

| | | | |
|-------|------------------|------------------|-------|
| x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
| a | $\frac{2a+b}{3}$ | $\frac{a+2b}{3}$ | b |

Deduz a correspondente fórmula composta.

FIM