Responda às questões utilizando técnicas adequadas à resolução de problemas de grande dimensão.

1. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + x_2 \\ \text{suj.} & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & \quad\quad x_2 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o modelo dual do problema acima apresentado.

b) Seleccione dois pontos válidos, um do domínio primal e outro do dual, com valores de função objectivo diferentes, e mostre que obedecem ao Teorema da Dualidade Fraca.

c) Considere os pontos do espaço primal $(x_1, x_2)^t = (14, 4)^t$ e do espaço dual $(y_1, y_2)^t = (4, 9)^t$. Será que eles são soluções óptimas do problema primal e do problema dual, respectivamente? Justifique.

d) Considere o ponto óptimo primal $(x_1, x_2)^* = (14, 4)$ e o ponto óptimo dual $(y_1, y_2)^* = (4, 9)$. Mostre que se verifica o Teorema da Folga Complementar.

2. Considere o seguinte problema de programação linear e os respectivos quadro óptimo e relatório de sensibilidade.

$$\begin{array}{lllll} \max & 60x_1 & +40x_2 & +30x_3 & \\ \text{suj.} & 3x_1 & +2x_2 & & \leq 120 \\ & 4x_1 & & +x_3 & \leq 60 \\ & & x_2 & +2x_3 & \leq 30 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	$-19/4$	1	$-3/4$	-2	15
x_1	1	0	$1/4$	0	$1/4$	0	15
x_2	0	1	2	0	0	1	30
	0	0	65	0	15	40	2100

Duals			
Variables	value	from	till
objective	2100	2100	2100
R1	0	$-\infty$	$+\infty$
R2	15	0	80
R3	40	0	37.5
x1	0	$-\infty$	$+\infty$
x2	0	$-\infty$	$+\infty$
x3	-65	-3.15789	15

a) Quanto estaria disposto a pagar para aumentar a disponibilidade do recurso 1. Justifique.

b) Quanto estaria disposto a pagar para aumentar a disponibilidade do recurso 2. Justifique.

c) Da análise do relatório, indique que quantidade adicional de recurso 2 é que estaria disposto a adquirir ao preço indicado na alínea anterior.

d) Qual seria o valor da solução óptima caso adquirisse essa quantidade adicional. Justifique.

e) Faça a análise matricial para derivar os limites de variação do recurso 2, que serve para verificar que a informação dada pelo relatório (relativa à alínea c) está correcta.

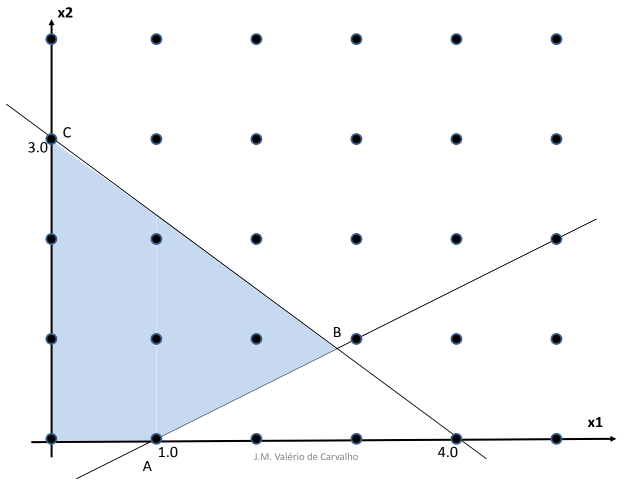
f) Se fosse proposta uma nova actividade (x_4) com coeficiente da função objectivo (lucro unitário) de 40 e coeficientes nas linhas iguais a 3, 2, 0, respectivamente, será que essa actividade seria atractiva? Em caso afirmativo, construa a novo quadro, **mas não o resolva**, indicando apenas a variável que sairia da base.

g) Qual deveria ser, no mínimo, o coeficiente c_3 da variável x_3 para esta actividade ser atractiva?

h) Face ao preço-sombra do recurso 3 e ao número de unidades de recurso usadas na actividade 3, apresente um argumento, justificando sucintamente, para mostrar que a actividade 3 nunca poderia ser atractiva.

Nota: Todas as seguintes alíneas são independentes entre si. Qualquer resposta que envolva a resolução do problema desde o quadro inicial não será classificada.

3. Considere o seguinte problema: $\max 1000x_1 + 1x_2$, suj. a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$, $x_1 - 2x_2 \leq 1$, $x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros. Os vértices abaixo indicados têm as coordenadas $A = (1,0)^t$, $B = (2.8, 0.9)^t$, $C = (0,3)^t$, respectivamente.

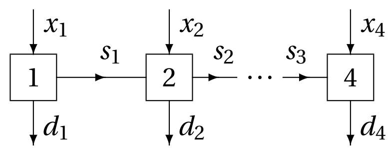


a) Usando a regra de pesquisa $BFS(FIFO)$ e explorando em primeiro lugar o ramo correspondente à restrição do tipo $\leq$, resolva graficamente (*i.e.*, pode determinar a solução óptima de cada nó usando a informação dada acima, inspeccionando o desenho ou calculando a intersecção de rectas, **não sendo necessário usar o método simplex**) o problema pelo método de partição e avaliação, construindo uma árvore de pesquisa (justificando sucintamente todas as decisões tomadas) em que sejam indicados:

- em cada nó da árvore: o número de ordem de visita do nó, as coordenadas do ponto e o valor da função objectivo;

- em cada ramo da árvore: a restrição de partição.

4. Considere o seguinte problema de produção/armazenagem. Em cada dia j, existe uma procura d_j que é necessário satisfazer. Para esse efeito, podem usar-se as unidades produzidas no próprio dia e/ou as unidades em armazém. Se, num determinado dia, as unidades produzidas mais as unidades em armazém forem superiores à procura, o excesso é armazenado para o dia subsequente. O diagrama de fluxos das unidades é o seguinte:



sendo x_j o número de unidades produzidas no dia j e s_j o stock existente após o dia j.

O horizonte de planeamento é de 4 dias. A procura em cada dia é de 3, 5, 4 e 2 unidades, respectivamente. Os custos unitários de produção dependem do dia, e são 14, 12, 15, e 12 U.M., respectivamente. A capacidade máxima de produção diária é de 8 unidades. Os custos de armazenagem são de 1 U.M./dia/unidade e a capacidade máxima de armazenagem é de 3 unidades.

a) Represente o problema numa rede, identificando claramente os vértices, e apresente o ficheiro de *input* do `Relax4` do modelo. Identifique sucintamente o significado dos elementos do ficheiro de *input*.

b) Formule um modelo para este problema com o objectivo de minimizar a soma dos custos de produção e de armazenagem, considerando que existe um custo fixo de 2 U.M., quando existe produção num dado dia. Justifique sucintamente.

c) Considere que existe um custo de preparação, com o valor de 3 U.M./preparação, quando num período há produção não tendo havido produção no período anterior. Indique **as alterações** ao modelo. Justifique sucintamente.

VC