Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

2º Teste :: 2 de junho de 2017

Nome [ ] Número [ ]

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

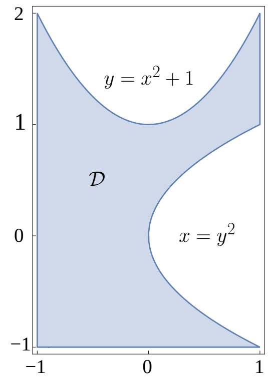
Exercício 1. [3 valores] Considere a função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy - 1$.

a) Calcule os pontos críticos de f.

b) Averigue se algum dos pontos críticos obtidos anteriormente é ponto extremante de f e, em caso afirmativo, classifique-o.

Exercício 2. [2 valores] Determine o cilindro inscrito numa esfera de raio 2 cujo volume é máximo.

Exercício 3. [3 valores] Considere a região $\mathcal{D}$ representada na figura ao lado. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} xy\, d(x,y)$.



Exercício 4. [3 valores] Considere o integral $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{y^2-4}^{2-y} f(x,y)\, dxdy$.

a) Faça um esboço da região de integração.

b) Inverta a ordem de integração.

Exercício 5. [5 valores] Considere o sólido $\mathcal{S}$ limitado pelos parabolóides definidos pelas equações

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + 2.$$

a) Descreva ou faça um esboço do sólido $\mathcal{S}$.

b) Escreva uma expressão integral, utilizando integrais duplos e coordenadas cartesianas, que permita obter o volume de $\mathcal{S}$.

c) Escreva uma expressão integral, utilizando integrais triplos e coordenadas cilíndricas, que permita obter o volume de $\mathcal{S}$.

d) Calcule o volume de $\mathcal{S}$.

As respostas ao exercício 6 são dadas na folha de enunciado.

Exercício 6. [4 valores] Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $g(x, y) = |f(x, y)|$ e $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$. Se 1 e -2 são, respetivamente, o máximo e o mínimo de $f_{|\mathcal{D}}$ então $g_{|\mathcal{D}}$ não tem mínimo;

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{xy}\, dxdy \leq e;$

c) Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $\displaystyle\int_0^2 \int_0^2 f(x, y)\, d(x, y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, d(x, y);$

d) As coordenadas cartesianas de um ponto, cujas coordenadas esféricas são $\rho = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, são $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.