LEI **Folha 9** **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**

Dezembro 2014

1. Quais das seguintes funções são solução da equação $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

   (a) $3e^{-\lambda t} \sin \sqrt{\lambda t}$

   (b) $ae^{-3t}e^{-5x}$

   (c) ae^{3x+3t}

   (d) $\sin x \cos t + \cos x \sin t$

2. Verifique que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 então a função definida por $u(x,t) = f(t/x)$, para $x \neq 0$, é solução da EDP:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

3. Considere a EDP linear de primeira ordem
$$3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

   (a) Procure uma solução da EDP mediante o método de separação das variáveis. Determine uma solução que verifique a condição inicial $u(x,0) = e^{3x}$.

   (b) Verifique que as funções do tipo $u(x,t) = f(x+3t)$, com $f \in C^1(\mathbb{R})$ são solução da EDP.

   (c) Efectue a mudança de variáveis $s = 3x - t, r = x + 3t$ para encontrar a solução geral da EDP. Determine uma solução da EDP que verifique a condição inicial $u(x,0) = x^2$.

4. Considere a equação
$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ com } a \neq 0.$$

   (a) Encontre soluções desta equação do tipo $u(x,t) = v(x)w(t)$. Determine a solução que satisfaz a condição inicial $u(x,0) = e^x$.

   (b) Mostre que qualquer função da forma $u(x,t) = f(ax - t)$ é solução da equação.

   (c) Resolva a equação fazendo a mudança de variável definida por $s = ax - t$ e $r = t$. Resolva a equação com a condição inicial $u(x,0) = ke^{-x^2}$.

5. Usando o método de separação de variáveis encontre soluções das equações:

   (a) $u_{xt} - u_x = 0$

   (b) $xtu_{xt} + u = 0$

   (c) $t^2 u_x = e^x u_t$

6. Mostre que a função dada por $u(x,t) = e^{-8t} \sin(2x)$ é solução do problema com condições iniciais e de fronteira:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(2x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{1}$$

7. Encontre a solução geral das EDPs (i) $u_{xy} = 0$, em $\mathbb{R}^2$ (ii) $xu_x + u = x^2$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

8. Considere a equação de transporte $u_t + v(t)u_x = 0$, onde v é uma função que representa um campo de velocidades dependente do tempo t. Mostre que
$$u(x,t) = f\left(x - \int_0^t v(s)ds\right)$$
é uma solução da equação com condição inicial $u(x,0) = f(x)$, onde $f \in C^1(\mathbb{R})$.