Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Engenharia Informática

3º Trabalho de Grupo de Análise TP4 - 25 Mar

Nome: ______________________________ Número: __________

Nome: ______________________________ Número: __________

Apresente todos os cálculos que efectuar

1. Calcule, ou justifique que não existe, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}.$$

2. Estude a continuidade da seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+3y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}.$$

3. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem da função f definida por

$$f(x,y,z) = y^2 \ln x + x e^{xz}.$$

3º TG — 25 Março — TP4

$\boxed{1}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$, logo se o limite existir, este terá que ser zero.

Como

$$\left| \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{y^2 |\operatorname{sen} x|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot |\operatorname{sen} x|$$

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\operatorname{sen} x| = 0$, conclui-se que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} = 0$.

$\boxed{2}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+3y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

→ Para $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)$ é o quociente de dois polinómios, logo é contínua.

→ Para $(x,y)=(0,0)$, tem-se

$$\left| \frac{x^2 \cdot y}{x^2+3y^4} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+3y^4}}_{\leq 1} \cdot |y| \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0.$$

Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+3y^4} = 0 = f(0,0)$, donde f é contínua em $(0,0)$.

$\boxed{3}$ $f(x,y,z) = y^2 \ln x + x e^{xz}$, $D_f =]0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $f_x(x,y,z) = \dfrac{y^2}{x} + e^{xz} + xz e^{xz}$, com domínio $]0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $f_y(x,y,z) = 2y \ln x$, com domínio $]0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $f_z(x,y,z) = x^2 e^{xz}$, com domínio $]0,+\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$