Universidade do Minho
Departamento de Matemática Engenharia Informática

Tópicos de Matemática Discreta

Exame – Época Normal [2^a chamada] 25.jan'07 [resolução]

1. Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) Se pelo menos uma das proposições p ou q é verdadeira, então o valor lógico da fórmula proposicional $(\neg p \wedge r) \Rightarrow \big(\neg q \vee (p \Leftrightarrow r)\big)$ é o de falsidade.

Falsa: No caso em que p é V, q é V e r é F, temos que a fórmula dada é verdadeira. Portanto, o facto de uma das proposição p ou q ser verdadeira não implica que a fórmula $(\neg p \wedge r) \Rightarrow \big(\neg q \vee (p \Leftrightarrow r)\big)$ seja falsa.

(b) Existe um conjunto A tal que $\mathcal{P}(A) \cap A = \{\{1\}\}$.

Verdadeira: Consideremos $A = \{1, \{1\}\}$. Como $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$, segue-se que $\mathcal{P}(A) \cap A = \{\{1\}\}$.

(c) Dada a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2|x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$.

Verdadeira: Facilmente se verifica que $g(x) \geq 0$ para todo o real x e se $x \in \mathbb{R}_0^+$ temos que x é imagem de $\sqrt[3]{x}$. Portanto, $g(\mathbb{R}) = \{g(x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$. Como todas as imagens são reais, é claro que $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \{x \ : \ g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

(d) A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \leq 0$ e por $f(x) = x - 1$ se $x > 0$ é injectiva e sobrejectiva.

Falsa: f não é injectiva porque, por exemplo, $f(0) = 0 = f(1)$.

2. Construa uma prova para cada uma das seguintes afirmações:

(a) Se A, B e C são conjuntos não vazios tais que $A \cap B \neq \emptyset$ então $(A \times C) \cap (B \times C) \neq \emptyset$.

Dado que $A \cap B \neq \emptyset$, sabemos que existe $x \in A \cap B$. Logo, $x \in A$ e $x \in B$. Como C é não vazio, existe $y \in C$. Assim, o par (x, y) é um elemento de $A \times C$ e também de $B \times C$, ou seja, $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$, pelo que $(A \times C) \cap (B \times C) \neq \emptyset$.

(b) Para todo o natural $n \geq 1$, $6^n - 5n + 4$ é um múltiplo de 5.

Seja $p(n)$ o predicado '$6^n - 5n + 4$ é um múltiplo de 5' sobre os naturais. Mostremos que $p(n)$ é uma proposição verdadeira para cada $n \in \mathbb{N}$.

[**i**] Para $n = 1$, temos que $6^n - 5n + 4 = 5$. Logo, $p(1)$ é uma proposição verdadeira.

[**ii**] Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira. Então, $6^k - 5k + 4 = 5q$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Note-se que, assim, $6^k = 5k + 5q - 4$. Mostremos que $p(k + 1)$ também é verdadeira, ou seja, que $6^{(k+1)} - 5(k + 1) + 4 = 5p$, para algum $p \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 6^{(k+1)} - 5(k+1) + 4 &= 6^k \times 6 - 5k - 5 + 4 \\ &= (5k + 5q - 4) \times 6 - 5k - 1, \end{aligned}$$

pela hipótese de indução. Segue-se, então, que

$$\begin{aligned} 6^{(k+1)} - 5(k+1) + 4 &= 30k + 30q - 24 - 5k - 1 \\ &= 25k + 30q - 25 \\ &= 5(5k + 6q - 5) \\ &= 5p, \end{aligned}$$

onde $p = (5k + 6q - 5) \in \mathbb{Z}$. Portanto, $p(k+1)$ é verdadeira.

Por [i] e [ii], pelo Princípio de Indução em $\mathbb{N}$, podemos concluir que $6^n - 5n + 4$ é um múltiplo de 5 para todo o natural n.

3. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, as relações binárias $S = \{(2, 5), (3, 3), (3, 4), (5, 6)\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6)\}$ em A e a partição $\Pi = \{\{2, 5, 6\}, \{1, 3, 4\}\}$ de A.

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de $(S \circ R)^{-1}$.

   $S \circ R = \{(1, 5), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 6)\}$. Logo,

   $$(S \circ R)^{-1} = \{(5, 1), (5, 2), (3, 3), (4, 3), (6, 4), (6, 5)\}.$$

   Assim, $dom((S \circ R)^{-1}) = \{3, 4, 5, 6\}$ e $contradom((S \circ R)^{-1}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (b) Diga, justificando, se a relação R é uma relação de equivalência.

   Para R ser uma relação de equivalência, R teria de ser reflexiva, simétrica e transitiva. Facilmente se verifica que R é reflexiva, mas R não é simétrica, já que $(1, 2) \in R$ mas $(2, 1) \notin R$, e tão pouco é transitiva, pois $(3, 4), (4, 5) \in R$ mas $(3, 5) \notin R$. Portanto, R não é uma relação de equivalência.

   (c) Dê exemplo de uma relação binária em A que seja simétrica e transitiva mas não reflexiva

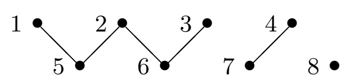
   Por exemplo $U = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

   (d) Seja T a relação de equivalência associada a Π, definida em A. Indique três elementos x, y e z de A tais que $[x]_T = [y]_T$ e $[x]_T \neq [z]_T$.

   Por exemplo, $x = 2$, $y = 6$ e $z = 3$.

4. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 3, 6\}$ e $B = \{1, 4, 5, 7, 8\}$.

   (a) Considere o c.p.o. $(X, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse ao lado.



   i. Indique, referindo a definição, os elementos minimais e maximais de X.

   Os elementos minimais são os elementos a de X tais que não existe $x \in X$ tal que $x < a$ [não existem elementos menores que a]. Os elementos maximais são os elementos b de X tais que não existe $x \in X$ tal que $x > b$ [não existem elementos maiores que b]. Assim, os elementos maximais de X são $1, 2, 3, 4, 8$ e os minimais são $5, 6, 7, 8$.

   ii. Indique, referindo a definição, os majorantes e os minorantes de A e de B.

   Dado um subconjunto C de X, $x \in X$ é um majorante de C se $x \geq c$ para todo o elemento c de C, e $y \in X$ é um minorante de C se $y \leq c$ para todo o elemento c de C. Assim, A e B não têm majorantes. O único minorante de A é o 6 e B não tem minorantes.

   iii. Indique um subconjunto C de X que admita supremo e ínfimo.

   Seja $C = \{4, 7\}$. O supremo de C é o 4 e o ínfimo é o 7.

(b) O diagrama em cima representa um grafo G com X como conjunto dos vértices (i.e., $\mathcal{V}(G) = X$). O grafo G é conexo? Justifique a sua resposta.

G não é conexo porque não existe, por exemplo, nenhum caminho do vértice 8 até ao vértice 4.

Cotação:

1. $\sim (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5)$; 2. $\sim (2 + 2)$; 3. $\sim (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1)$; 4. $\sim (1 + 1,5 + 1 + 1)$