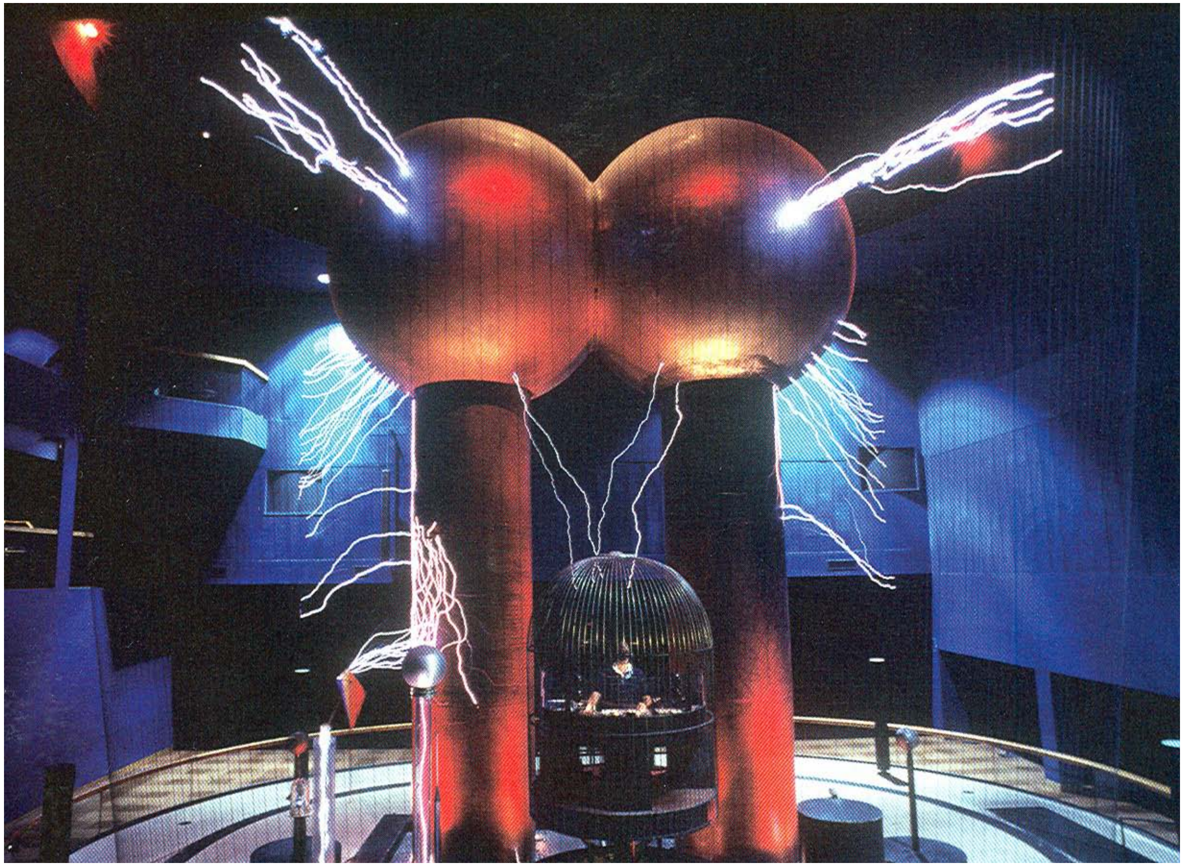
2. Lei de Gauss



Universidade do Minho

2.1. Fluxo Eléctrico

2.2. Lei de Gauss

2.3. Aplicações da Lei de Gauss a Isolantes Carregados

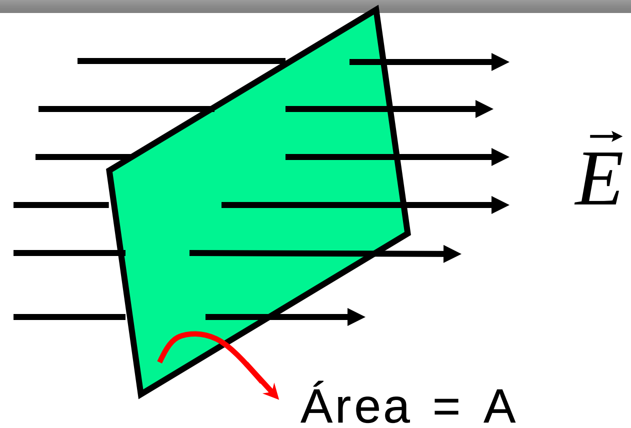
2.4. Condutores em Equilíbrio Electrostático

Lei de Gauss:

- É uma consequência da lei de Coulomb.
- Outro procedimento para o cálculo dos campos eléctricos. $\Rightarrow$ mais indicado para o cálculo do campo eléctrico de distribuições de carga simétrica.
- Guia para o entendimento de problemas mais complicados.

2.1. Fluxo Eléctrico

- Base quantitativa a ideia de linhas do campo eléctrico.
- Fluxo eléctrico é uma medida do número de linhas do campo eléctrico que atravessam uma determinada superfície.
- Quando a superfície atravessada envolve uma determinada quantidade de carga eléctrica, o número líquido de linhas que atravessam a superfície é proporcional à carga líquida no interior da superfície.
- O número de linhas contado é independente da forma da superfície que envolve a carga (Lei de Gauss)



Campo eléctrico uniforme (em módulo e direcção), área A $\perp$ ao campo

O número de linhas por unidade de área é proporcional ao módulo do campo eléctrico.

$$\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}}$$

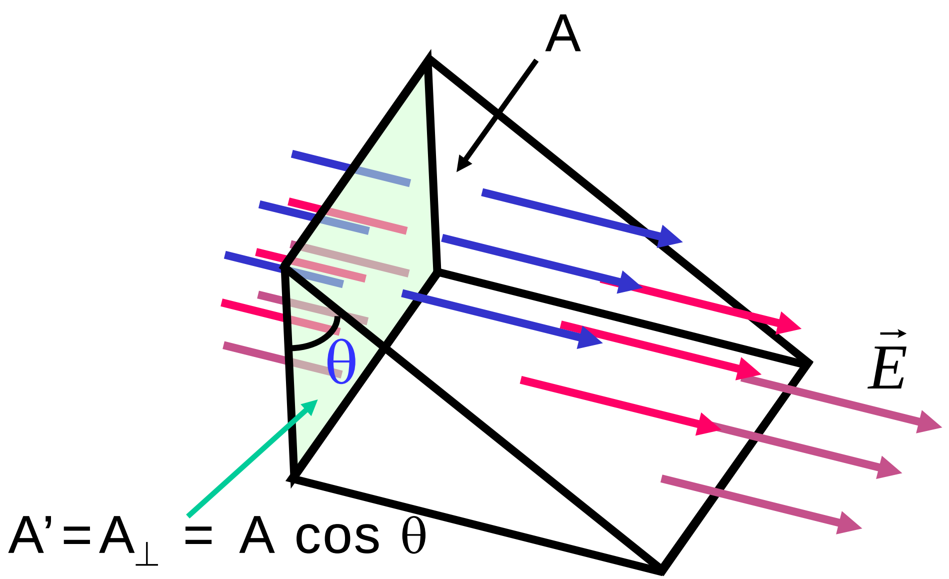
(N.m^2/C)

Fluxo Eléctrico

Campo Eléctrico

Área da superfície $\perp$ ao campo

- Se a superfície não for $\perp$ ao campo $\Rightarrow$ o número de linhas (ou o fluxo) através dela pode ser menor.



θ : ângulo entre a normal à superfície, A, e o campo eléctrico uniforme.

Nº Linhas que atravessam A é igual ao número de linhas que atravessam a área projectada A' (perpendicular a $\vec{E}$).

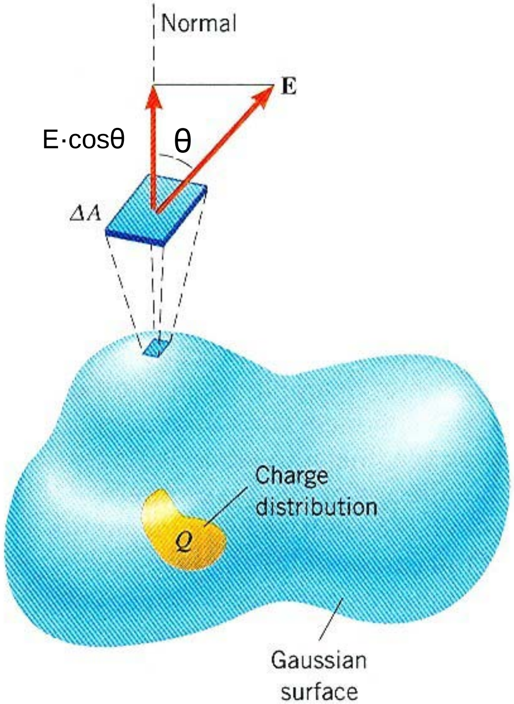
Logo, neste caso: $\Phi_A = \Phi_{A'}$

$$\Phi = E \cdot A \cdot \cos\theta = E \cdot A_{\perp}$$

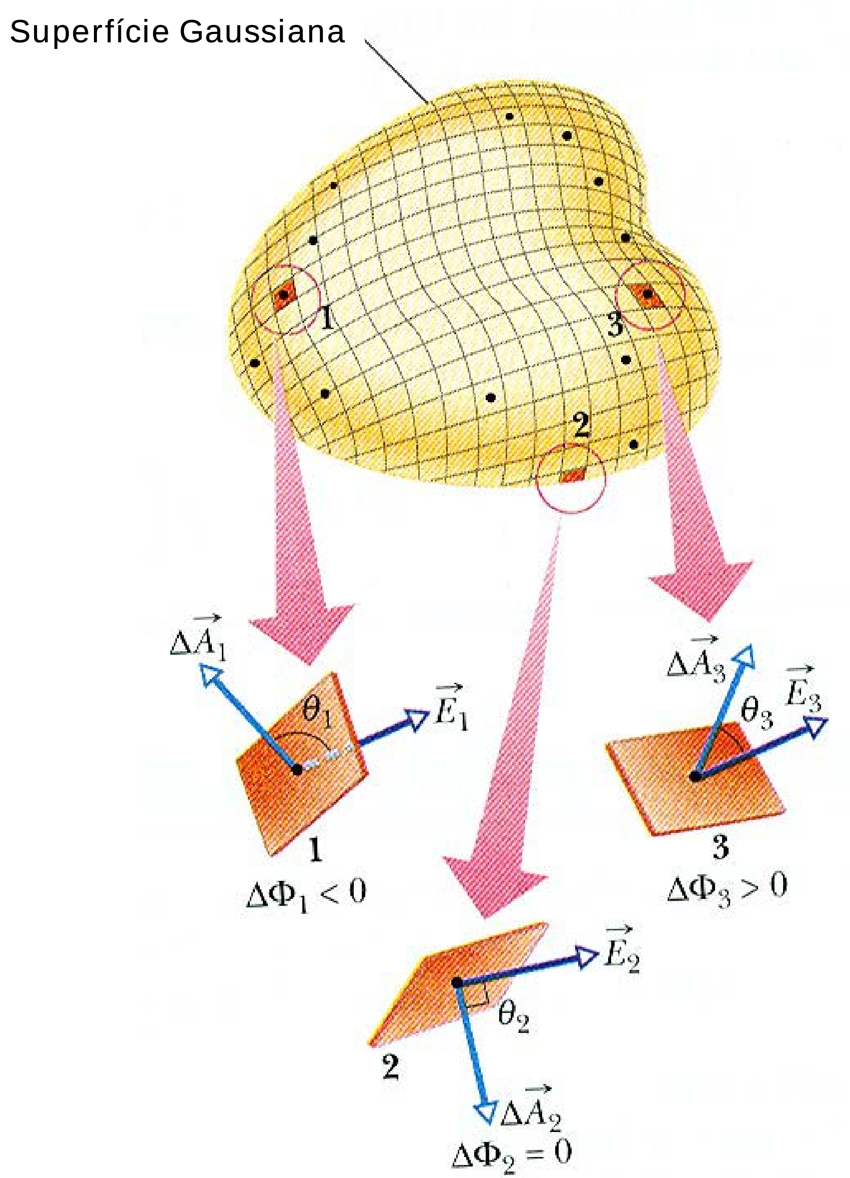
Fluxo através de uma superfície de área fixa, tem:

- **Valor máximo**, **E·A**, quando a superfície é **perpendicular** ao campo eléctrico (cos 0º = 1)
- **Valor nulo**, quando a superfície é **paralela** ao campo eléctrico (cos 90º = 0)

⇒ Em situações mais gerais, o campo eléctrico pode variar sobre a superfície considerada.



Exemplo 1:



$$\Delta\phi_i = E_i . \Delta A_i . \cos\theta = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Produto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\Phi \equiv \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i = \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Definição geral do fluxo eléctrico

- Integral sobre uma superfície hipotética
- Em geral o valor de **Φ** depende da configuração do campo e da superfície que se tiver escolhido.

Usualmente: calcula-se o fluxo através de uma superfície fechada (superfície que divide o espaço em uma região interior e uma exterior); ex: uma esfera

$\Delta\vec{A}_i$ são normais à superfície (apontam "para fora").

Fig. anterior:

☞ 1: $\vec{E}$ está para o interior e $\theta > 90^o$ $\Rightarrow \Delta\phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} < 0$

☞ 3: $\vec{E}$ está para fora e $\theta < 90^o$ $\Rightarrow \Delta\phi = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A} > 0$

O **fluxo total ou líquido**, através da superfície, é proporcional ao **número líquido** de linhas que atravessam a superfície.

nº de linhas que saem – nº de linhas que entram

Saem > entram $\Rightarrow$ fluxo líquido positivo

Entram > saem $\Rightarrow$ fluxo líquido negativo

Fluxo líquido:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n \cdot dA$$

Integral sobre uma superfície fechada

Componente do campo eléctrico $\perp$ à superfície

O cálculo do fluxo líquido através de uma superfície fechada pode ser muito trabalhoso...

Porém, se o campo **E** $\perp$ à superfície, em cada ponto, e tiver módulo constante $\Rightarrow$ cálculo directo.

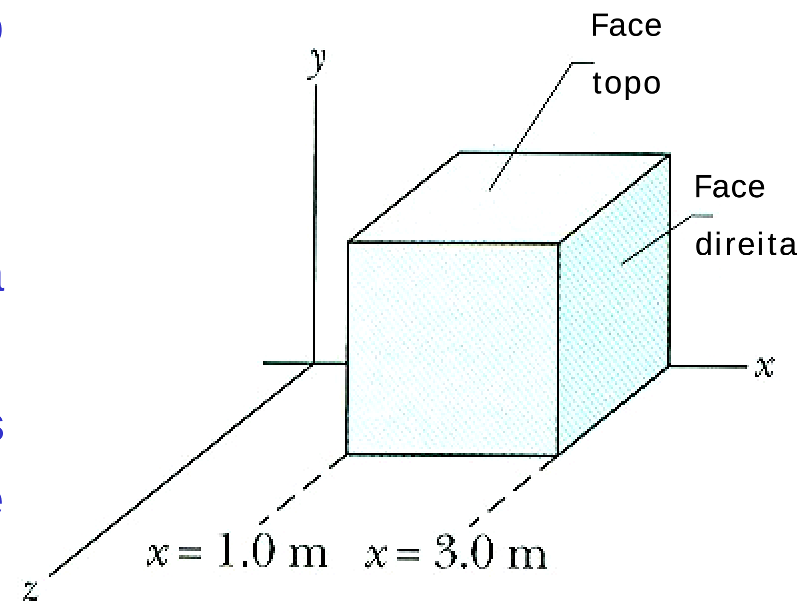
$\Rightarrow$ Exercício 2.1

Exercício 1:

Um campo eléctrico não uniforme é dado por :

$$\vec{E} = 3x(\mathrm{N/C \cdot m})\hat{i} + 4(\mathrm{N/C})\,\hat{j}$$

Atravessa a superfície gaussiana cúbica mostrada na figura. Calcule o fluxo eléctrico através da face direita e através da face do topo.



Face direita:

$$\Phi_r = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int [(3.0\ \mathrm{N/C \cdot m})x\hat{\mathrm{i}} + (4.0\ \mathrm{N/C})\hat{\mathrm{j}}] \cdot (dA\hat{\mathrm{i}})$$

$$= \int [(3.0\ \mathrm{N/C \cdot m})(x)(dA)\hat{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathrm{i}} + (4.0\ \mathrm{N/C})(dA)\hat{\mathrm{j}} \cdot \hat{\mathrm{i}}]$$

$$= \int (3.0\ \mathrm{N/C \cdot m})x\,dA + (0.0\ \mathrm{N \cdot m^2/C}) = (3.0\ \mathrm{N/C \cdot m})\int x\,dA.$$

Exercício: (cont.)

$$\Phi_r = (3.0\ \mathrm{N/C\cdot m})\int (3.0\ \mathrm{m})\,dA = (9.0\ \mathrm{N/C})\int dA$$

x= 3 m

$$\Phi_r = (9.0\ \mathrm{N/C})(4.0\ \mathrm{m^2}) = 36\ \mathrm{N\cdot m^2/C}.$$

Face topo:

$$\Phi_t = \int [(3.0\ \mathrm{N/C\cdot m})x\hat{\mathrm{i}} + (4.0\ \mathrm{N/C})\hat{\mathrm{j}}]\cdot(dA\,\hat{\mathrm{j}})$$

$$= \int [(3.0\ \mathrm{N/C\cdot m})(x\,dA)\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} + (4.0\ \mathrm{N/C})(dA)\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}}]$$

$$= (0.0\ \mathrm{N\cdot m^2/C}) + \int (4.0\ \mathrm{N/C})\,dA) = (4.0\ \mathrm{N/C})\int dA$$

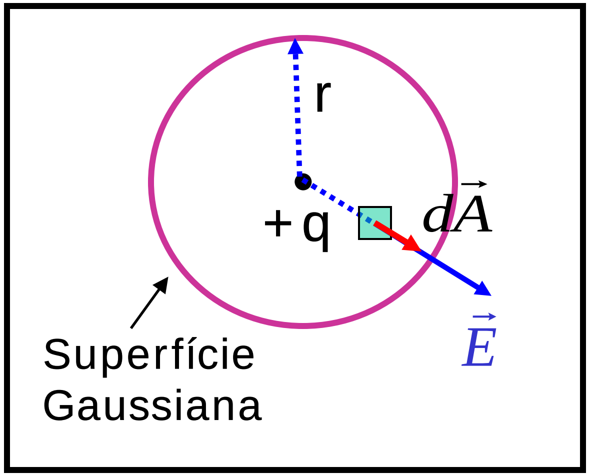
$$= 16\ \mathrm{N\cdot m^2/C}.$$

Nota: tente calcular agora o fluxo na face esquerda

2.2. Lei de Gauss

Relação geral entre o fluxo eléctrico líquido através de uma superfície fechada (superfície Gaussiana) e a carga pontual no interior da superfície.

Carga **+*q*** no centro de uma esfera de raio ***r*:**



$$\boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$ na superfície Gaussiana.

$\vec{E}$ radial $\Rightarrow$ $\vec{E} \,//\, \Delta\vec{A}_i \,,\ \forall i$

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{A}_i = E_n \cdot \Delta A_i \cdot \cos 0^{o} = E \cdot \Delta A_i$$

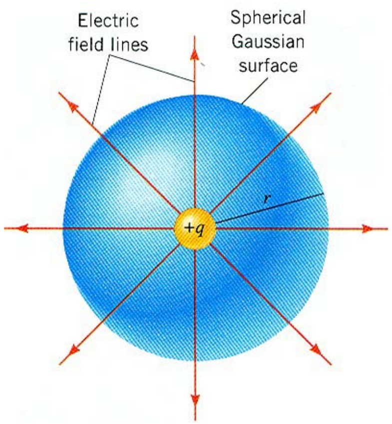
$$\Phi = \oint E_n dA = \oint E dA = E\oint dA = k\frac{q}{r^2}\oint dA$$

E = cte. na superfície

- Superfície Gaussiana Esférica $\Rightarrow$ $\oint dA = A = 4\pi r^2$

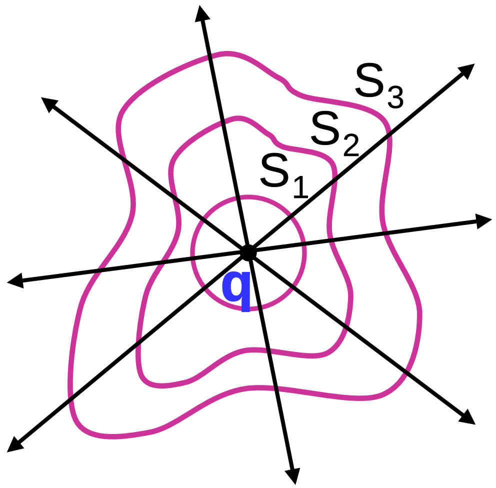
$$\boxed{\Phi = \frac{kq}{r^2}\left(4\pi r^2\right) = 4\pi kq = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$



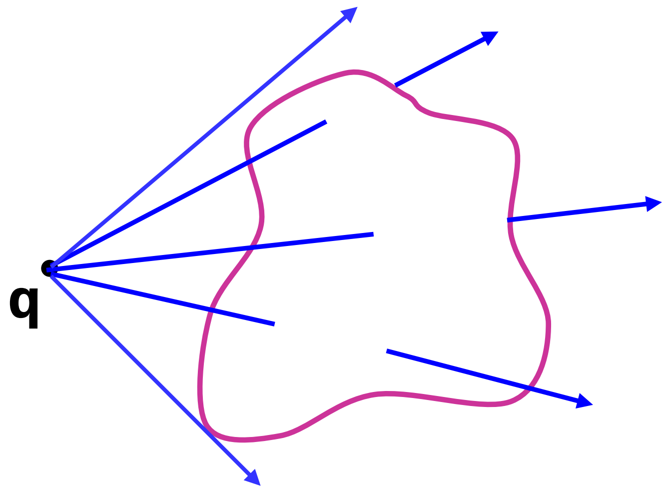
- **O fluxo é independente de r**

- O fluxo líquido através duma superfície Gaussiana esférica é proporcional à carga, **q**, **no interior da superfície**.



- $\Phi \propto$ ao número de linhas que atravessam a superfície.
- O fluxo líquido através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga pontual q é dado por $\boldsymbol{\Phi = q / \varepsilon_0}$

Carga pontual no exterior de uma superfície fechada.



nº de linhas que entram = nº de linhas que saem

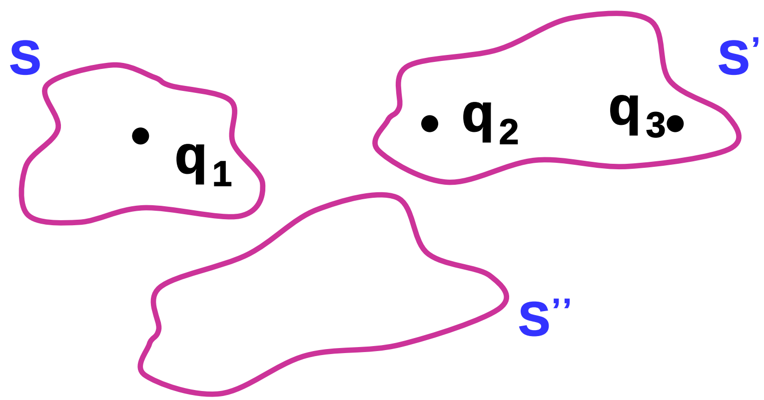
Logo:

- O fluxo líquido através de uma superfície fechada que não envolve nenhuma carga, é nulo.

Caso geral de muitas cargas pontuais, ou de uma distribuição continua de cargas.

- Princípio de sobreposição: o campo eléctrico de muitas cargas é igual à soma vectorial dos campos eléctricos provocados pelas cargas individuais. Logo o fluxo total será:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \ldots \right) \cdot d\vec{A}$$



$$\Phi_S = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S'} = \left(\frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\Phi_{S''} = 0$$

Resumo:

- Lei de Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Carga líquida no interior da superfície

Campo eléctrico em qualquer ponto da superfície Gaussiana

O fluxo eléctrico líquido, através de qualquer Superfície Gaussiana fechada, é igual à carga líquida no interior da superfície, dividida por ε_0.

q_{in} : carga eléctrica líquida no interior da Superfície Gaussiana.

$\vec{E}$: campo eléctrico total (contribuições das cargas no interior e no exterior da Superfície Gaussiana).

Universidade do Minho

- Na prática, a **Lei de Gauss** só é útil num limitado número de situações, nas quais existe um elevado grau de simetria (distribuições de cargas que têm simetria esférica, cilíndrica ou plana).

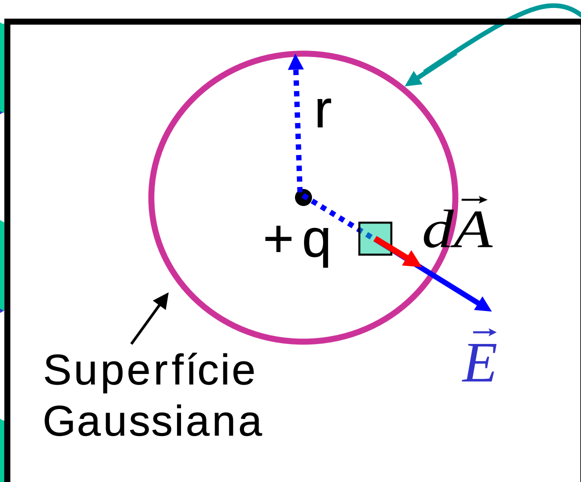
- A Superfície Gaussiana é uma superfície matemática.

- Se a Superfície Gaussiana é cuidadosamente escolhida $\Rightarrow$ o integral do fluxo será fácil de calcular.

2.3. Aplicações da Lei de Gauss.

- Cálculo do campo eléctrico, $\vec{E}$, de uma dada distribuição de cargas.
- A Lei de Gauss é útil quando há um elevado grau de simetria na distribuição de cargas: e.g., esferas, cilindros compridos ou chapas planas, todas uniformemente carregadas.
- A superfície deve ser sempre escolhida de modo que tenha a mesma simetria da distribuição de carga.

a) Campo eléctrico de uma carga pontual



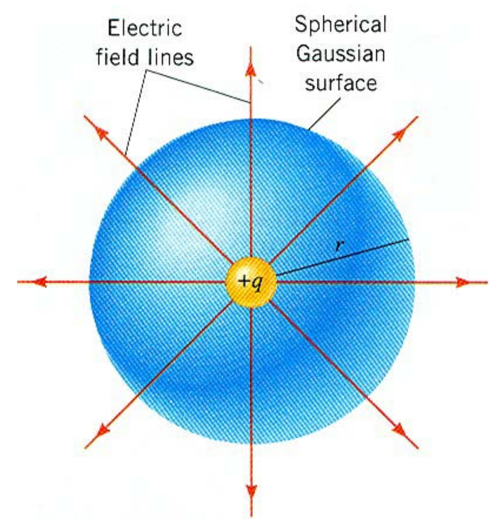
Superfície Gaussiana esférica, raio r

Campo radial, para fora

$\vec{E} \perp$ à superfície $\forall P_{\text{sup.}}$

$$\vec{E} \,//\, d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos 0^{\circ} = E \cdot dA$$

Lei de Gauss: $$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$



$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

E = cte. na superfície

Universidade do Minho

$\Rightarrow$ Módulo do campo

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{q}{r^2}}$$

$\Rightarrow$ Força electrostática sobre uma segunda carga pontual q_0

Módulo $\Rightarrow$

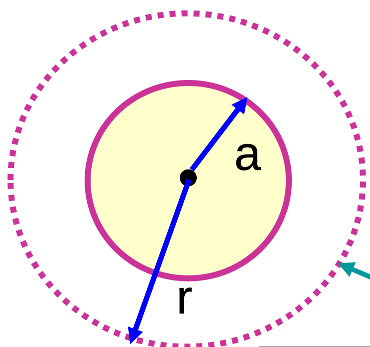
$$\boxed{F = q_0 E = k\frac{q q_0}{r^2}}$$

Lei de Coulomb

b) Distribuição de carga num isolante com simetria esférica

Esfera isolante; raio ***a***; densidade de carga ***σ*** uniforme; carga total ***+Q***.

1) Intensidade do campo num ponto externo à esfera,   r > a.



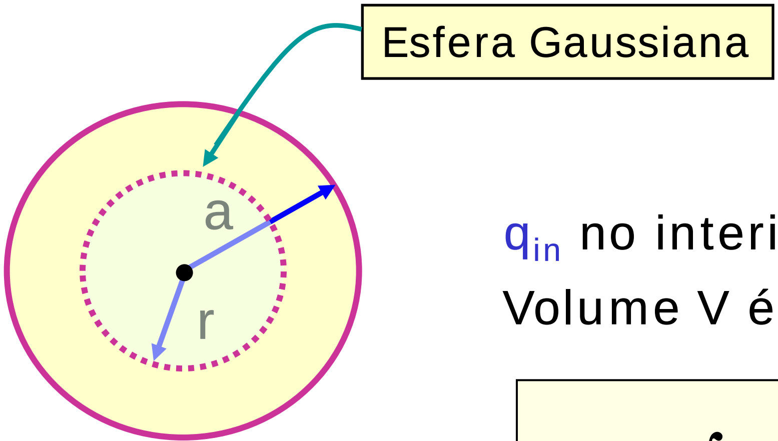
Superfície Gaussiana esférica, raio r concêntrica

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = k\frac{Q}{r^2}$$

Resultado equivalente ao que foi obtido para uma carga pontual!!!

2) Intensidade do campo no interior da esfera (r < a).



q_{in} no interior da Superfície Gaussiana de Volume V é < Q

$$q_{in} = \rho \int dV = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

Exemplo a) $\Rightarrow$ $E = cte;\ \vec{E} \perp\ Sup.\ Gauss. \forall P_{sup}$

Lei de Gauss r < a

$$\oint E dA = E \oint dA = E.4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{in}}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)} = \frac{\rho \, \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$$Como \;\; \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}$$

(Definição)

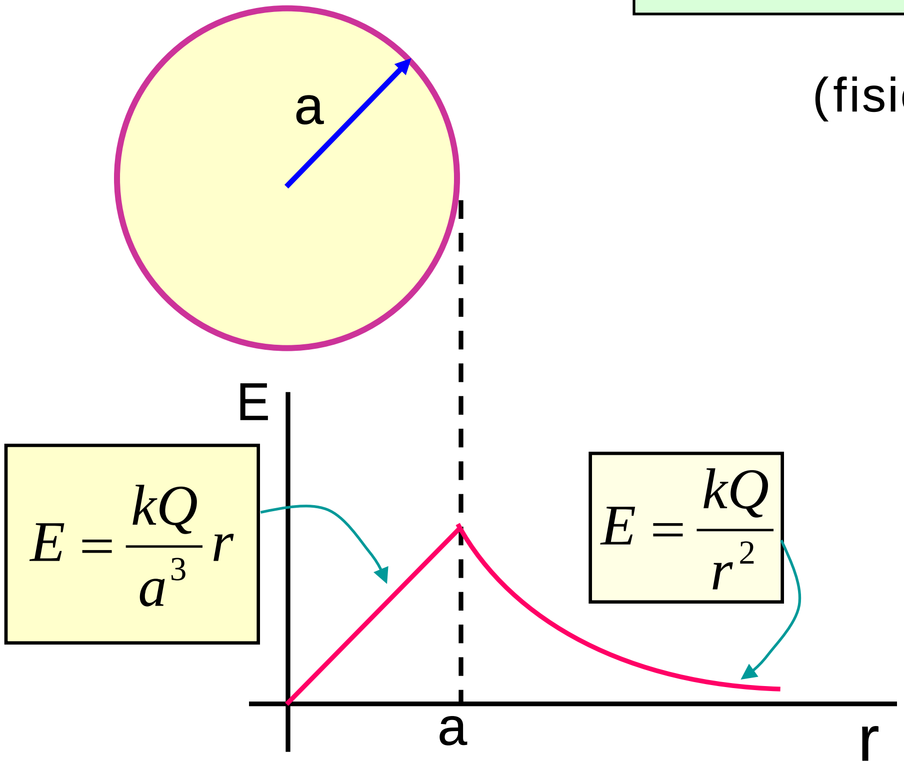
$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{kQ}{a^3} r$$

para: **r < a**

- $E \Rightarrow 0$ quando $r \Rightarrow 0$ (simetria)

$$Quando: E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow E = \infty \; em \; r = 0!!$$

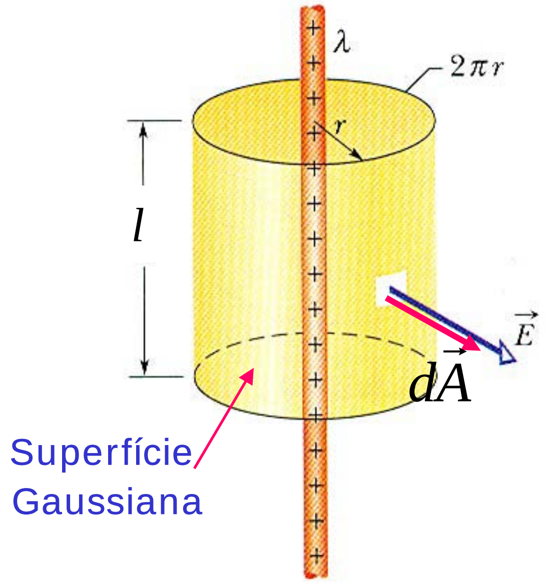
(fisicamente impossível)

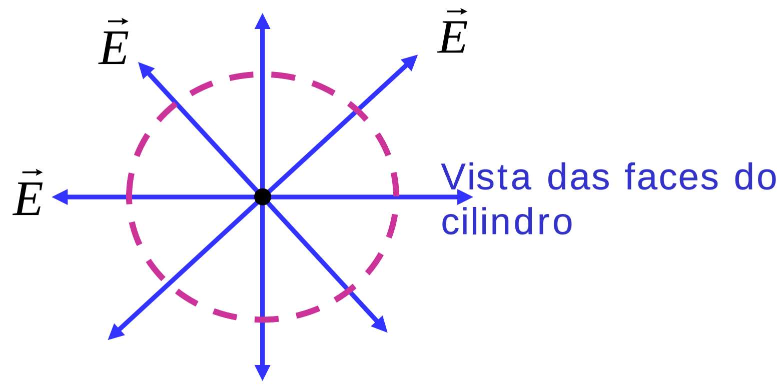


c) Distribuição de cargas num isolante com simetria cilíndrica

•Achar $\vec{E}$ à distância r de uma **recta uniformemente carregada**, com carga **+*q***, com **comprimento <u>infinito</u>** e **densidade de carga linear constante (λ=*q*/*l* = cte.)**

•Simetria : $\vec{E}$ $\perp$ recta e tem direcção radial.





$$q_{in} = \lambda l$$

Sobre a Superfície Gaussiana *S*: $E = cte,\ \vec{E} \perp S\ \forall P_{sup}\ \left(\vec{E} \,//\, d\vec{A}\right)$

Fluxo nas partes terminais do cilindro Gaussiano é nulo.

$$\left(\vec{E} \,//\, faces;\ \vec{E} \perp d\vec{A}\right)$$

Lei de Gauss:

$$\phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$$q_{in} = \lambda l$$

$A = 2\pi r \cdot \ell$ (área da superfície cilíndrica) $\Rightarrow$

$$E \oint dA = E(2\pi r l) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k\frac{\lambda}{r}} \quad 1$$

- $E \propto \dfrac{1}{r}$
- Cálculo mais trabalhoso pela Lei de Coulomb.
- Recta finita $\Rightarrow$ E $\neq$ 1 $E \neq cte;\ \vec{E} \not\perp Sup.\ \forall P_{\text{sup}}$

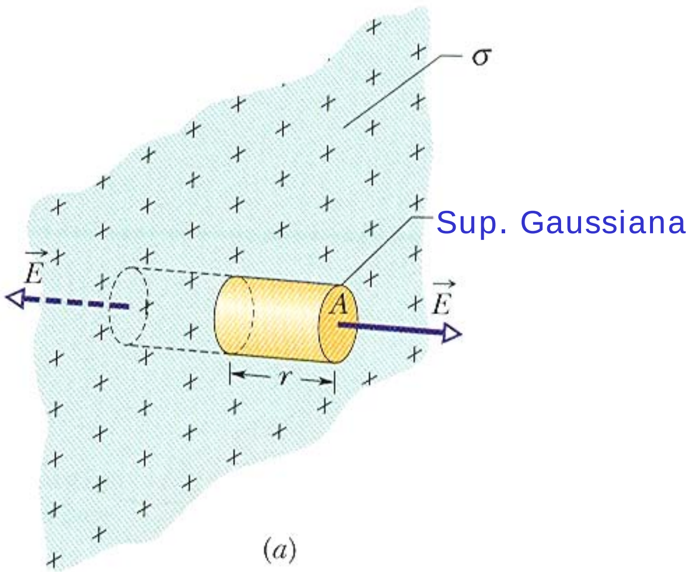
Lei de Gauss não tem utilidade para o cálculo de uma recta finita carregada.

Pontos vizinhos da recta, e afastados das extremidades $\Rightarrow$ 1 boa estimativa do valor real do campo.

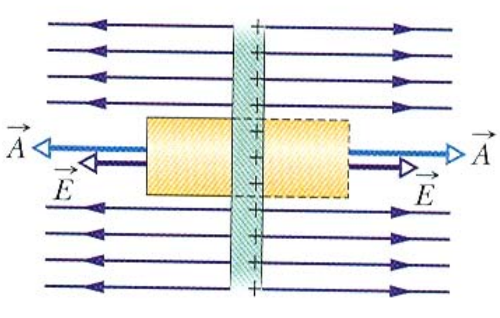
Pouca simetria na distribuição de carga $\Rightarrow$ é necessário calcular dediante a Lei de Coulomb

d) Folha Isolante Plana e Infinita Electricamente Carregada

Densidade de carga **σ** por unidade de área uniforme



(a)



(b)

- $\vec{E} \perp$ plano folha, direcção $\vec{E}$ oposta em cada face.
- Cilindro recto equidistante do plano.
- $\vec{E}$ // superfície cilíndrica *S* $\Rightarrow \Phi_{sup}=0$
- Φ para fora, de cada base do cilindro $\Rightarrow \Phi = E \cdot A$ $\left(\vec{E} \perp base\right)$
- Fluxo total $\Rightarrow \Phi_{total}=2EA$
- $E \neq E(r)$ (a qualquer distância do plano o campo é uniforme)

$$\boxed{\Phi = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0}}$$

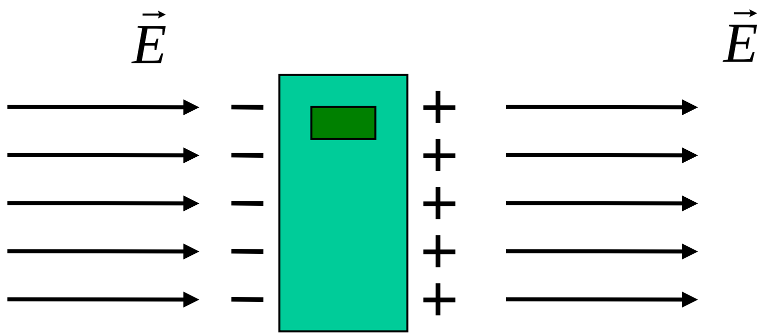
2.4. Condutores em Equilíbrio Electrostático

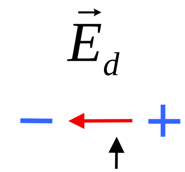
- Um bom **condutor eléctrico** (ex: cobre) contém cargas (e^-) que não estão ligadas a nenhum átomo e podem deslocar-se no seu interior.
- **Condutor em equilíbrio electrostático**: quando não há um movimento líquido de cargas no interior do metal.

Propriedades de um condutor em equilíbrio electrostático:

1. O campo eléctrico é nulo em qualquer ponto no interior do condutor.
2. Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.
3. O campo eléctrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do condutor e tem o módulo igual a $\mathbf{E=\sigma/\varepsilon_0}$, onde σ é **densidade a carga por unidade de** área no ponto da superfície.
4. Num condutor com forma irregular, a carga tende a acumular-se nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontiaguda.

Propriedade 1 $\Rightarrow$ Placa condutora num campo eléctrico





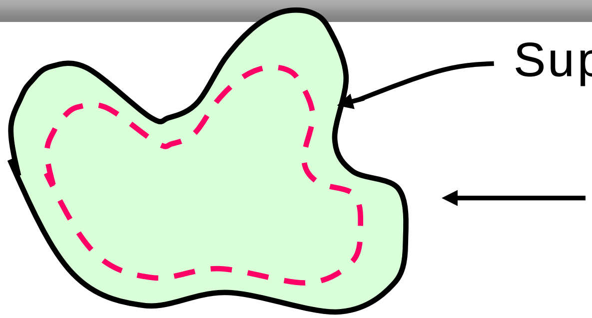
O campo interno opõe-se ao campo externo

$$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_d = \vec{0}}$$ $\longleftarrow$ No interior do condutor

Bom condutor $\Rightarrow$ equilíbrio em ~ 10^{-16} s (~ instantâneo)

¡! Se $\vec{E} \neq \vec{0} \Rightarrow$ as cargas livres seriam aceleradas.

Propriedade 2 $\Rightarrow$ Lei de Gauss



- (1.) $\vec{E} = \vec{0}$ em todos os pontos do interior do condutor
- $\vec{E} = \vec{0}$ em qualquer ponto da Superfície Gaussiana $\Rightarrow$ **Φ=0**
- Lei de Gauss $\Rightarrow$ **q_{in} = 0**

Como não pode haver carga líquida no interior da Superfície Gaussiana que está arbitrariamente próxima da superfície do condutor $\Rightarrow$ qualquer excesso de carga, num condutor, deve estar na superfície do condutor.

A Lei de Gauss não nos diz como o excesso de carga se distribui sobre a superfície (será provado mais a frente).

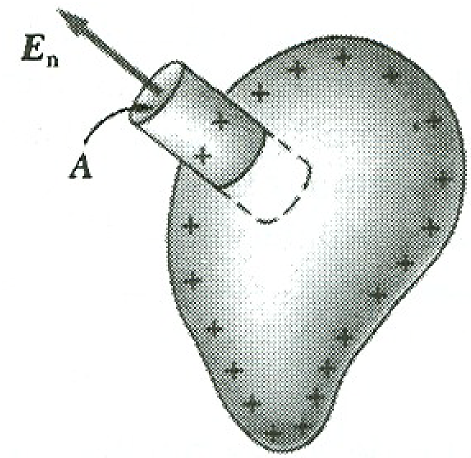
Propriedade 3 ⇒ Lei de Gauss

Considerando uma superfície Gaussiana cilíndrica:

⇒ **$\Phi_{superfície} = 0$** (através da superfície cilíndrica)

⇒ **Φ (fluxo líquido) = $E_n \cdot A$** (através da base)

campo eléctrico na face externa perpendicular à superfície.



Lei de Gauss: $$\boxed{\Phi = \oint E_n dA = E_n A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{q_{in} = \sigma\, A}$$

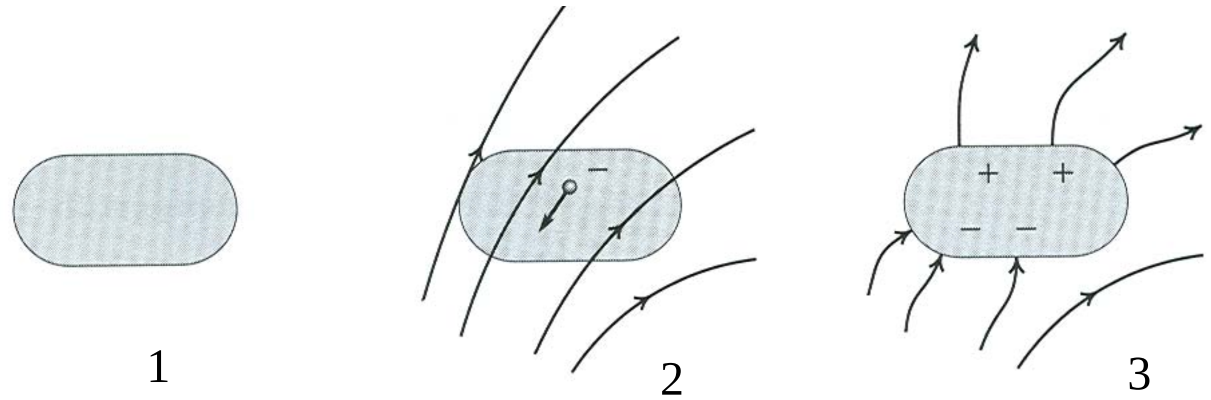
Carga (local) por Unidade de área

Área da base do cilindro

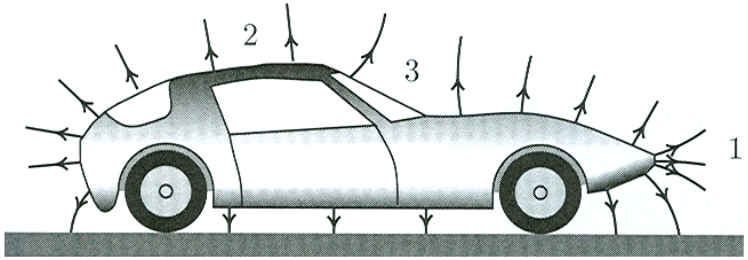
⇒ $$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

⇒ Exercício 2.5

Propriedade 4 $\Rightarrow$ Lei de Gauss: relacionar o campo eléctrico sobre a face externa da superfície de um condutor em equilíbrio com a distribuição de carga no condutor à superfície.

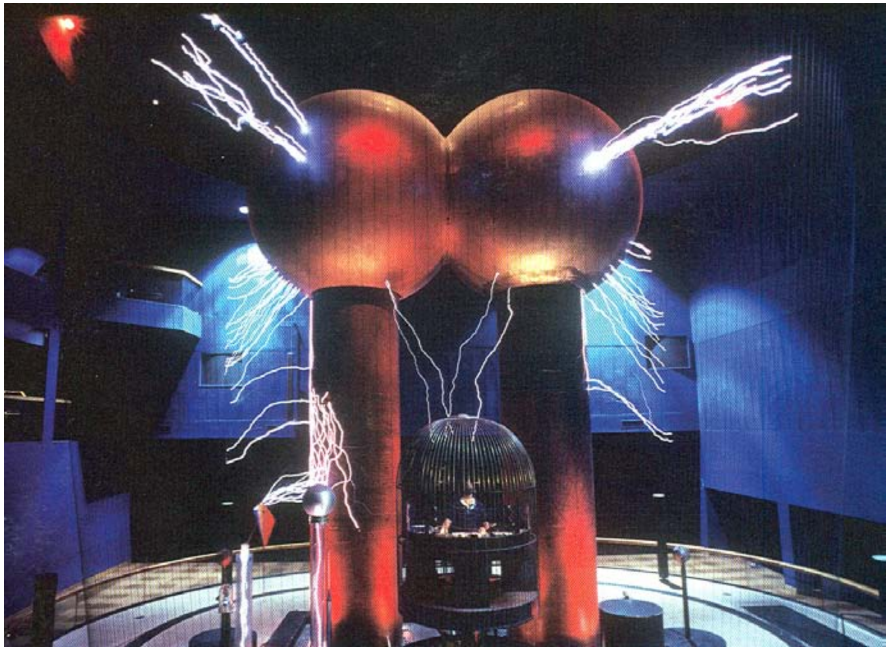


A introdução de um campo externo num condutor sem carga (1) produz deslocamento dos electrões livres (2) de modo a que a carga induzida na superfície anule o campo no interior do condutor (3)

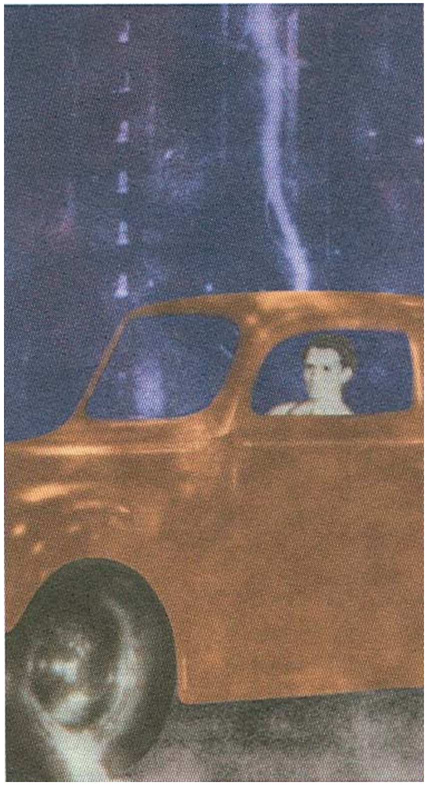


- $\vec{E}$ interior $\Rightarrow \Phi = 0$ ($q_{in}=0$) através da superfície gaussiana interior.
- $\vec{E}$ perpendicular á superfície (se $\vec{E}$ tivesse uma componente tangencial, as cargas livres deslocar-se-iam sobre a superfície, criariam correntes, e o condutor não estaria em equilíbrio).

Exemplo (Gaiola de Faraday)



Gaiola de Faraday. Os corpos dentro da gaiola condutora isolada estão protegidos dos raios externos, mesmo ao tocarem a parte interior da gaiola. Este fenómeno é chamado de blindagem electrostática.



Os passageiros de automóveis e aviões ficam protegidos dos raios em dias de tempestade, dado estarem isolados da terra.

Exemplo (Gaiola de Faraday) ⇒ Como funciona?

Universidade do Minho

A gaiola de Faraday consiste numa blindagem eléctrica que é conseguida ao criarmos uma superfície oca feita com uma rede ou malha metálica, isolada da terra. No caso da gaiola da página anterior, a cavidade ocupa a maior parte do volume do material. Se a rede ou malha metálica for relativamente fina, as cargas poderão se espalhar uniformemente na superfície externa da gaiola. Esta estrutura previne que sinais eléctricos muito fortes, por exemplo provenientes de um relâmpago, criem campo eléctricos muito intensos dentro da gaiola.

Isto é conseguido pelo facto que de o campo eléctrico externo induzir a mobilidade de cargas na superfície da gaiola cujo campo eléctrico vai cancelar o campo eléctrico externo no interior da superfície da gaiola. Este fenómeno eléctrico ocorre naturalmente e está previsto pela Lei de Gauss. Deste modo um demonstrador dentro da gaiola não sofre qualquer choque eléctrico ao tocar a superfície interna quando esta é atingida por uma descarga eléctrica proveniente de um raio.

É precisamente este princípio que faz com que os viajantes de um automóvel ou de um avião permaneçam em segurança em condições adversa de tempestades eléctricas.

Exemplo (balde de Faraday)

A figura seguinte mostra outra experiência de Faraday relacionada com o equilíbrio electrostático de um material condutor. Ao aproximarmos uma esfera carregada positivamente de um balde de forma circular, que se encontra electricamente isolado (a), verificamos que ocorre um desvio no ponteiro do electrómetro ligado ao balde quando a esfera se encontra no seu interior (b). A deflexão no ponteiro deve-se ao facto que a carga positiva da esfera induzir uma carga negativa (atracção) na superfície interna do balde e uma distribuição de carga positiva (repulsão) na superfície externa do balde. Faraday constatou que o ponteiro não se desviou mais, mesmo quando a esfera tocou no fundo do balde (C) e quando foi retirada do balde (d). Contudo constatou que após retirar a esfera do balde esta encontrava-se agora descarregada. Aparentemente, quando a esfera tocou no fundo do balde houve uma passagem de uma quantidade de carga negativa, do balde para a esfera, exactamente igual à quantidade de carga positiva que se encontrava na esfera, logo ficando electricamente neutra (equilíbrio electrostático). O balde ao perder a carga negativa ficou só com uma quantidade de carga positiva exactamente igual à que a esfera possuíra.