

Lic. Engenharia Informática

LÓGICA

1. Indução e recursão estrutural

José Carlos Costa

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

22 de Fevereiro de 2011

- 1 $3 \in A_3$;
- 2 se $k \in A_3$, então $n \cdot k \in A_3$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;
- 3 os elementos de A_3 são obtidos por aplicação das regras 1 e 2, um número finito de vezes.

$$A_3 = \{ \quad ? \quad \}$$

Será que existe um conjunto de regras que permite definir o conjunto \mathbb{N}_0 de forma análoga?

Definições

- Chamaremos **alfabeto** a um conjunto de símbolos e **letras** aos seus elementos.
- Dado um alfabeto A , chamaremos **palavra** sobre A a uma sequência finita de letras: ε representa a **palavra vazia** e $e_1 e_2 \cdots e_n$ uma **palavra de comprimento** $n \in \mathbb{N}$, para $e_1, \dots, e_n \in A$. O conjunto de todas as palavras sobre A representa-se por A^* .
- Um subconjunto de A^* diz-se uma **linguagem**.
- Se u e v são palavras então uv é a sequência resultante da concatenação das sequências u e v .

Seja $A = \{a, b\}$ e L o conjunto tal que:

- 1 $a \in L$ e $b \in L$;
- 2 se $u, v \in L$, então $uv \in L$;
- 3 os elementos de L são obtidos por aplicação das regras 1 e 2, um número finito de vezes.

$$L = \{ \text{?} \}$$

Seja $A = \{a, b, c\}$ e L o subconjunto A^* tal que:

- 1 $c \in L$;
- 2 se $u \in L$, então $aua \in L$;
- 3 se $u \in L$, então $bub \in L$;
- 4 os elementos de L são obtidos por aplicação das regras 1, 2 e 3, um número finito de vezes.

$$L = \{ \text{?} \}$$

Definição indutiva de um conjunto

Por **definição indutiva de um conjunto** I entende-se uma coleção de regras que permite descrever I , indicando um processo de construir os seus elementos. As regras podem ser de vários tipos:

- **regras básicas**, que indicam que certos objectos pertencem ao conjunto;
- **regras indutivas**, que permitem construir elementos de I a partir de outros elementos de I já conhecidos;
- **regra de fecho**, regra única em cada definição, que estabelece que os elementos de I são os construídos a partir da utilização das regras básicas e das indutivas um número finito de vezes.

$$\text{regra básica} \quad \mapsto \quad \underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}} \quad \overline{s \in I}^{b_s}$$

$$\text{regra indutiva} \quad \mapsto \quad \text{se } \underbrace{s_1, \dots, s_n \in I}_{\text{premissas}}, \text{ então } \underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}} \quad \frac{s_1 \in I \dots s_n \in I}{s \in I}$$

Definição indutiva de um conjunto

Sejam $A = \{a, b\}$ e L o subconjunto das palavras sobre A definido por:

- 1 a sequência vazia ε é um elemento de L ;
- 2 se $w \in L$, então $awb \in L$;
- 3 se $w \in L$, então $bwa \in L$;
- 4 se $u, w \in L$, então $uw \in L$.

A esta definição corresponde o seguinte conjunto de regras:

- 1 $\frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \rightsquigarrow$ um conjunto base $B = \{\varepsilon\}$
- 2 $\frac{w \in L}{awb \in L} i_1 \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_1 : L \rightarrow L \\ w \mapsto awb \end{array}$
- 3 $\frac{w \in L}{bwa \in L} i_2 \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_2 : L \rightarrow L \\ w \mapsto bwa \end{array}$
- 4 $\frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L} i_3 \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_3 : L \times L \rightarrow L \\ (u, w) \mapsto uw \end{array}$

Definição

Sejam X um conjunto, $\emptyset \neq B \subseteq X$ e \mathcal{O} um conjunto de operações em X . Um subconjunto I de X diz-se **indutivo sobre X de base B e conjunto de operações \mathcal{O}** se

- 1 $B \subseteq I$,
- 2 I é fechado para as operações do conjunto \mathcal{O} .

Definição

Sejam X um conjunto, $\emptyset \neq B \subseteq X$ e \mathcal{O} um conjunto de operações em X . O menor conjunto indutivo sobre X de base B e conjunto de operações \mathcal{O} diz-se um **conjunto definido indutivamente por \mathcal{O} , de base B** .

O par (B, \mathcal{O}) designa-se uma **definição indutiva sobre o conjunto suporte X** .

Recorde-se o exemplo anterior. O conjunto L é definido indutivamente:

$$\textcircled{1} \quad \frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \rightsquigarrow \text{um conjunto base } B = \{\varepsilon\}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{w \in L}{awb \in L} i_1 \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_1 : L \rightarrow L \\ w \mapsto awb \end{array}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{w \in L}{bwa \in L} i_2 \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_2 : L \rightarrow L \\ w \mapsto bwa \end{array}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L} i_3 \rightsquigarrow \begin{array}{l} f_3 : L \times L \rightarrow L \\ (u, w) \mapsto uw \end{array}$$

$$B = \{\varepsilon\}$$

$$\mathcal{O} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

Genericamente, a uma definição indutiva (B, \mathcal{O}) de um conjunto I sobre o conjunto suporte X associa-se um conjunto de regras:

$$1 \quad \overline{x \in I}^{b_x}, \text{ para cada } x \in B,$$

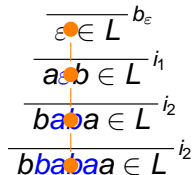
$$2 \quad \frac{w_1 \in I \cdots w_n \in I}{f(w_1, \dots, w_n) \in I}_i \text{ para cada } f \in \mathcal{O} \text{ de aridade } n.$$

$$\frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \quad \frac{w \in L}{awb \in L} i_1 \quad \frac{w \in L}{bwa \in L} i_2 \quad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L} i_3$$

- i. $\varepsilon \in L$ (por b_ε)
- ii. $ab \in L$ (por i_1 , ou seja, $f_1(\varepsilon)$)
- iii. $baba \in L$ (por i_2 , ou seja, $f_2(ab)$)
- iv. $b^2aba^2 \in L$ (por i_2 , ou seja, $f_2(baba)$)

Como conclusão final obtém-se que $b^2aba^2 \in L$. A sequência $(\varepsilon, ab, baba, b^2aba^2)$ diz-se uma **sequência de formação** de $b^2aba^2 \in L$.

Alternativamente, podemos elaborar a seguinte árvore:



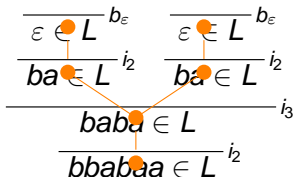
Sequência de formação

$$\frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \quad \frac{w \in L}{awb \in L} i_1 \quad \frac{w \in L}{bwa \in L} i_2 \quad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L} i_3$$

- i. $\varepsilon \in L$ (por b_ε)
- ii. $ba \in L$ (por i_2 , ou seja, $f_2(\varepsilon)$)
- iii. $baba \in L$ (por i_3 , ou seja, $f_3(ba, ba)$)
- iv. $b^2aba^2 \in L$ (por i_2 , ou seja, $f_2(baba)$)

A conclusão final é novamente que $b^2aba^2 \in L$, e a sequência $(\varepsilon, ba, baba, b^2aba^2)$ é também uma sequência de formação de $b^2aba^2 \in L$.

A árvore correspondente é:



Definições

Sejam (B, \mathcal{O}) uma definição indutiva de um conjunto I e $x \in I$.

- 1 Sequência de formação de x é uma sequência de elementos de I cujo último elemento é x e em que cada elemento
 - ou pertence a B ,
 - ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma função de \mathcal{O} .
- 2 Árvore de formação de x é uma árvore construída a partir da aplicação das regras e em que:
 - cada nodo é uma afirmação do tipo $s \in I$;
 - as folhas resultam da aplicação de regras básicas;
 - os restantes nodos resultam da aplicação de regras indutivas;
 - cada aresta representa a relação entre uma premissa e a conclusão de uma regra;
 - a raiz é $x \in I$.

Proposição

Sejam I um conjunto definido indutivamente sobre um conjunto X e $x \in X$. Então, $x \in I$ se e só se x admite uma árvore (ou sequência) de formação.

$$\frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \quad \frac{w \in L}{awb \in L} i_1 \quad \frac{w \in L}{bwa \in L} i_2 \quad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L} i_3$$

Será que $b^2ab \in L$?

Definição

Sejam I um conjunto definido indutivamente sobre um conjunto X e $x \in I$. Os elementos de uma árvore de formação de x designam-se **sub-objetos de x** .

Recorde-se que na linguagem L a palavra b^2aba^2 admite duas árvores de formação:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \quad \frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \\
 \frac{}{ba \in L} i_2 \quad \frac{}{ba \in L} i_2 \\
 \hline
 baba \in L \quad i_3 \\
 \hline
 bbabaa \in L \quad i_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{}{\varepsilon \in L} b_\varepsilon \\
 \frac{}{a \varepsilon b \in L} i_1 \\
 \hline
 baba \in L \quad i_2 \\
 \hline
 bbabaa \in L \quad i_2
 \end{array}$$

Definição

Chama-se **definição indutiva determinista** de um conjunto I a uma definição indutiva de I tal que se existirem duas instâncias de regras com igual conclusão então a regra usada é a mesma e, caso seja uma regra indutiva, as premissas da regra também são as mesmas.

Proposição

Uma definição indutiva de um conjunto I é determinista se e só se cada elemento de I admite uma única árvore de formação.