1. (3 valores) Considere o sistema dinâmico linear

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$$

   (a) Resolva o sistema.

   (b) Represente graficamente a solução do sistema que passa no ponto $(x, y) = (1, 1)$.

2. (2 valores) Escreva a solução geral e, represente graficamente o espaço de fase, de um sistema linear

$$\vec{X}' = A\vec{X},$$

   cuja matriz A tem valores (resp. vectores) próprios $\lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = (1, 1)$ e $\lambda_2 = 2, \vec{v}_2 = (1, -1)$.

3. (4 valores) Considere um sistema dinâmico não-linear dado por

$$\begin{cases} x' &= x(1 - 2x - y) \\ y' &= y(-2 + 6x) \end{cases}$$

   (a) Determine os três pontos de equilíbrio P do sistema.

   (b) Linearize o sistema em torno de cada um dos pontos P e, em seguida, classifique os pontos P.

   (c) Represente graficamente o diagrama de fase (local) numa vizinhança de cada um dos pontos P.

   (d) Represente graficamente o diagrama de fase (global) e descreva a dinâmica do sistema.

4. (3 valores) Sendo $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função desconhecida de classe C^2, resolva as seguintes EDPs:

   (a) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$ (b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + u = 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

5. (1 valor) Escreva uma EDP de 2^a ordem linear homogénea para a qual $u(x, t) = \sin(x + 3t)$ é solução.

6. (3 valores) Em dinâmica de fluídos com velocidade v constante, a equação da continuidade é da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{com } (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ v \neq 0.$$

   (a) Mostre que qualquer função $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ da forma $u(x, t) = f(x - vt)$, onde $f \in C^1(\mathbb{R})$, é solução da equação.

   (b) Resolva a equação fazendo a mudança de variáveis definida por $s = x - vt$ e $r = t$.

   (c) Determine a solução da equação que satisfaz a condição inicial $u(x, 0) = \sin(x^2)$.

7. (2,5 valores) Seja $L > 0$. Considere uma função $f : [0, L[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua.

   (a) Defina série de Fourier de senos de f.

   (b) Se $L = \pi$ e $f(x) = x(\pi - x)$, determine a série de Fourier de senos de f.

8. (1,5 valores) Considere o seguinte problema com a equação de onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

   (a) Escreva a solução formal do problema.
   (Nota: Pode usar aqui os resultados da questão 7(b)).

   (b) Determine o valor de $u(\frac{\pi}{2}, 0)$.