introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios de edos separáveis

1.

1.1 Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis, uma vez que

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m) = f(t)\,g(T),$$

escolhendo $f(t) = 1$ e $g(T) = -k(T - T_m)$. Comecemos por procurar soluções constante:

$$g(T) = -k\,(T - T_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T(t) = T_m, \quad t \geqslant 0.$$

De seguida, vamos procurar outro tipo de solução:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{T - T_m}\,dT = -k\,dt \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{T - T_m}\,dT = -\int k\,dt,$$

que, caso exista, sairá da igualdade

$$\ln|T - T_m| = -k\,t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a função exponencial a ambos os lados da igualdade encontramos

$$|T - T_m| = \mathrm{e}^{-k\,t + c} = \mathrm{e}^{c}\,\mathrm{e}^{-kt} = C\,\mathrm{e}^{-k\,t}, \quad C > 0.$$

Analisando ambas as situções para o lado esquerdo da igualdade, podemos concluir que

$$T > T_m \quad \Longrightarrow \quad T(t) = T_m + C\,\mathrm{e}^{-k\,t}, \quad C > 0, \quad t \geqslant 0;$$

$$T < T_m \quad \Longrightarrow \quad T(t) = T_m - C\,\mathrm{e}^{-k\,t}, \quad C > 0, \quad t \geqslant 0.$$

Deste modo, vemos que é possível reunir numa única expressão estes dois resultados e a solução constante obtida inicialmente:

$$T(t) = T_m + C\,\mathrm{e}^{-k\,t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Vejamos agora como escrever a constante arbitrária em termos do valor inicial $T_{\circ} = T(0)$: substituindo na igualdade acima, temos que

$$T(0) = T_m + C = T_{\circ} \quad \longrightarrow \quad C = T_{\circ} - T_m,$$

pelo que a solução geral da equação diferencial vem dada por

$$\begin{cases} T(t) = T_m + (T_{\circ} - T_m)\,\mathrm{e}^{-k\,t}, \quad t > 0 \\[2ex] T(0) = T_{\circ} \end{cases}$$

1.2

$$T(2.3) = 20 + (80 - 20)\,\mathrm{e}^{-2\times 2.3} = 20.6031$$

1.3
A partir de

$$19.2 = 20 + (10 - 20)\,\mathrm{e}^{-2\,t}$$

retira-se que o instante em que o corpo atinge a temperatura 19.2 é dado por

$$t = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{20 - 19.2}{10}\right) = 1.26286$$

1.4
Uma vez mais, usando a expressão encontrada para a solução do problema, a resposta vai ser obtida a partir de

$$24.8 = 20 + (T_\mathrm{o} - 20)\,\mathrm{e}^{-2\times 3.0},$$

donde se retira o valor da temperatura inicial do corpo:

$$T_\mathrm{o} = 20 + (24.8 - 20)\,\mathrm{e}^{6.0} = 1956.46$$

1.5
Uma vez que a solução apresentada é dada em termos da temperatura inicial do corpo, vamos começar por encontrar esse valor:

$$T_\mathrm{o} = 20 + (28.4 - 20)\,\mathrm{e}^{2\times 1.5} = 188.719$$

Assim sendo, podemos calcular a temperatura do corpo no instante 3.5:

$$T(3.5) = 20 + (188.719 - 20)\,\mathrm{e}^{-2\times 3.5} = 20.1539$$

2.

2.1
Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis, uma vez que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{x} = f(t)\,g(x),$$

escolhendo $f(t) = 2$ e $g(x) = 1/x$. Comecemos por procurar soluções constante: ora, como $g(x) = 1/x$ é sempre diferente de zero, podemos concluir que não existe qualquer solução constante. De seguida, vamos procurar outro tipo de solução:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{x} \quad \longrightarrow \quad x\,dx = 2\,dt \quad \longrightarrow \quad \int x\,dx = \int 2\,dt,$$

que, caso exista, sairá da igualdade

$$\frac{x^2}{2} = 2\,t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

ou seja, de

$$x^2 = 4\,t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Procurando agora escrever a constante arbitrária em termos do valor inicial $x_\mathrm{o} = x(0)$, temos que a última expressão nos permite escrever $x(0)^2 = x_\mathrm{o}^2 = c$, pelo que

$$x^2 = 4\,t + x_\mathrm{o}^2.$$

Para encontrar as soluções da equação diferencial, temos então uma expressão que corresponde a duas soluções:

$$x(t) = \pm\sqrt{4\,t + x_o^2}, \quad t > -x_o^2/4.$$

Uma vez que nenhuma solução poderá cruzar a recta $x = 0$, podemos caracterizar cada uma das soluções da equação diferencial a partir do sinal do valor inicial x_o, vindo assim

$$x_o > 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \sqrt{4\,t + x_o^2}, & t > -x_o^2/4 \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

$$x_o < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = -\sqrt{4\,t + x_o^2}, & t > -x_o^2/4 \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

2.2

Após confirmar que a expressão dada é válida no instante pretendido, temos que

$$x(2.4) = \sqrt{4 \times 2.4 + 1} = 3.2558$$

2.3

Após confirmar que a expressão dada é válida no instante pretendido, temos que

$$x(4.85) = -\sqrt{4 \times 4.85 + 2.13^2} = -4.8925$$

2.4

Após confirmar que a expressão dada é válida no instante pretendido, neste caso $-6.95 > -7.16^2/4 = -12.816$, temos que

$$x(-6.95) = \sqrt{-4 \times 6.95 + 7.16^2} = 4.8441$$

3.

3.1

Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis, uma vez que

$$\frac{dx}{dt} = 2tx^2 = f(t)\,g(x),$$

escolhendo $f(t) = 2t$ e $g(x) = x^2$. Comecemos por procurar soluções constante:

$$g(x) = x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De seguida, vamos procurar outro tipo de solução:

$$\frac{dx}{dt} = 2tx^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x^2}\,dx = 2t\,dt \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int 2t\,dt,$$

que, caso exista, sairá da igualdade

$$-\frac{1}{x} = t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Querendo escrever a constante arbitrária em termos do valor inicial $x_o = x(0)$, temos que $-1/x(0) = -1/x_o = c$, pelo que a última expressão surge como

$$-\frac{1}{x} = \frac{x_o t^2 - 1}{x_o},$$

vindo então o conjunto das soluções da equação diferencial dado por

$$x_\circ < 0 \implies \begin{cases} x(t) = \dfrac{x_\circ}{1 - x_\circ t^2}, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_\circ \end{cases}$$

$$x_\circ = 0 \implies x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_\circ > 0 \implies \begin{cases} x(t) = \dfrac{x_\circ}{1 - x_\circ t^2}, & -\sqrt{1/x_\circ} < t < \sqrt{1/x_\circ} \\ x(0) = x_\circ \end{cases}$$

nota: o enunciado sugere que só estamos interessados nas soluções que estejam definidas no instante $t = 0$, pelo que não se escrevem as restantes soluções.

3.2

Após confirmar que a expressão dada é válida no instante pretendido, temos que

$$x(3) = \frac{-1}{1+9} = -0.1$$

3.3

Após confirmar que a expressão dada é válida no instante pretendido, neste caso que $1.2 \in (-2, 2)$, temos

$$x(1.2) = \frac{0.25}{1 - 0.25 \times 1.2^2} = 0.390625$$

3.4

Após confirmar que a expressão dada é válida no instante pretendido, isto é, que $-0.15 \in (-1, 1)$, temos

$$x(-0.15) = \frac{1}{1 - (-0.15)^2} = 1.02302$$

4.

4.1

Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis, uma vez que

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1) = f(t)\,g(x),$$

escolhendo $f(t) = 1$ e $g(x) = x(x-1)$. Procurando soluções constante, temos que, de $g(x) = x(x-1) = 0$ retira-se imediatamente que existem duas soluções, ambas válidas para todo o instante:

$$x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

De seguida, vamos procurar outro tipo de solução:

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{x(x-1)}\,dx = dt \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int dt.$$

Neste caso, o primeiro dos integrais é calculado a partir da escrita do quociente na soma de duas fracções mais simples, a saber

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Deste modo, temos que a solução da equação diferencial, caso exista, sairá da igualdade

$$\ln|x-1| - \ln|x| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo, aplicando a função exponencial a ambos os lados da igualdade, obtém-se

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| = c\,\mathrm{e}^t, \quad c > 0.$$

Escrevendo a constante arbitrária em termos do valor inicial $x_\circ = x(0)$, temos que a última expressão é dada por

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| = \left|\frac{x_\circ - 1}{x_\circ}\right| \mathrm{e}^t.$$

O conjunto das soluções da equação diferencial, distinguidas pelo valor inicial $x_\circ$, é assim dado da seguinte forma:

$$x_\circ < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{x_\circ}{x_\circ - (x_\circ - 1)\,\mathrm{e}^t}, & t > \ln \frac{x_\circ}{x_\circ - 1} \\ x(0) = x_\circ \end{cases}$$

$$x_\circ = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$0 < x_\circ < 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{x_\circ}{x_\circ + (1 - x_\circ)\,\mathrm{e}^t}, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_\circ \end{cases}$$

$$x_\circ = 1 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_\circ > 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{x_\circ}{x_\circ - (x_\circ - 1)\,\mathrm{e}^t}, & t < \ln \frac{x_\circ}{x_\circ - 1} \\ x(0) = x_\circ \end{cases}$$

nota: o enunciado sugere que só estamos interessados nas soluções que estejam definidas no instante $t = 0$, pelo que não se escrevem as restantes soluções.

4.2

Confirmando que a solução acima indicada é válida para o instante pedido, $2 > \ln 1/2 = -0.693147$, temos

$$x(2) = \frac{x_\circ}{x_\circ - (x_\circ - 1)\,\mathrm{e}^t} = \frac{-1}{-1 + 2\,\mathrm{e}^2} = -0.072579$$

4.3

Uma vez que a solução acima indicada é válida para todo instante, temos

$$x(4.02) = \frac{x_\circ}{x_\circ + (1 - x_\circ)\,\mathrm{e}^t} = \frac{0.75}{0.75 + 0.25\,\mathrm{e}^{4.02}} = 0.051106$$

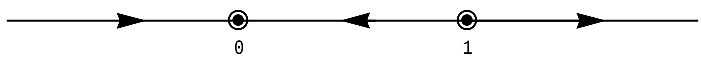
4.4

Confirmando que a solução acima indicada é válida para o instante pedido, $-1.65 < \ln 1.35714 = 0.305382$, temos

$$x(-1.65) = \frac{x_\circ}{x_\circ - (x_\circ - 1)\,\mathrm{e}^t} = \frac{3.8}{3.8 - 2.8\,\mathrm{e}^{-1.65}} = 1.16484$$

4.5

A partir das expressões encontradas para as soluções do sistema, podemos concluir o seguinte: quando $x_o < 0$, qualquer solução $x(t)$ vai ter como limite, quando $t \to \infty$, o valor zero; por outro lado, quando o valor inicial satisfaz $0 < x_o < 1$, qualquer solução $x(t)$ vai ter como limite, quando $t \to \infty$, o valor um; por fim, uma solução $x(t)$ correspondente a um valor inicial $x_o > 1$, vai divergir, quando t se aproxima do limite superior do intervalo, isto é, $\ln \frac{x_o}{x_o - 1}$.



nota: o retrato de fases acima desenhado permite-nos concluir que a solução constante $x(t) = 0$ é um ponto fixo atractivo, isto é, é um atractor do sistema, sendo a solução constante $x(t) = 1$ um ponto fixo repulsivo

5.

Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis, uma vez que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{2x-1} = f(t)\, g(x),$$

escolhendo $f(t) = 4t$ e $g(x) = 1/(2x-1)$. Comecemos por procurar soluções constante: ora, como $g(x)$ nunca se anula, podemos concluir que não existe qualquer solução constante. De seguida, vamos procurar outro tipo de solução:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t}{2x-1} \quad \longrightarrow \quad (2x-1)\, dx = 4t\, dt \quad \longrightarrow \quad \int (2x-1)\, dx = \int 4t\, dt,$$

que, caso exista, sairá da igualdade

$$x^2 - x = 2\, t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

Para escolher a constante c que levará a solução da equação diferencial a respeitar a condição inicial $x(0) = -1$, temos apenas que substituir na última expressão, donde concluimos que $c = 2$. Deste modo, a equação acima pode ser escrita como

$$x^2 - x - 2t^2 - 2 = 0,$$

que vamos resolver em ordem a x:

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 8(t^2+1)}).$$

Deste modo, a solução da equação diferencial sujeita à condição inicial é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{9 + 8t^2}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A resposta vem então como:

$$x(-1.65) = -2.27399$$

$$x(2.25) = -3.017810$$