Transportes - grafos bipartidos

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

22 de outubro de 2014

Transportes - grafos bipartidos

antes

- O algoritmo simplex resolve problemas de programação linear.

Guião

- O problema de transportes é um caso particular do problema de programação linear em que o modelo é definido num grafo (rede).
- O algoritmo para o problema de transportes é uma especialização do algoritmo simplex que tira partido dessa estrutura em rede.
- A sua implementação, usando estruturas de dados adequadas, pode traduzir-se em resoluções muito mais rápidas.

depois

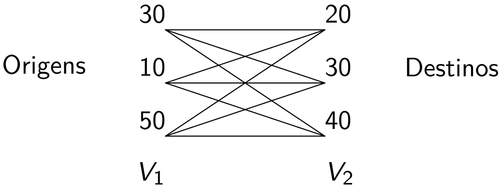
- Veremos um algoritmo para grafos (redes) gerais.

Conteúdo

- Modelo do Problema de Transportes
- Solução inicial
    - Método do canto NW
    - Método dos custos mínimos
- Pivôs
- Teste de optimalidade
    - Método do Stepping-stone
    - Método dos multiplicadores
- Resolução de um exemplo
- Apêndices
    - Cálculo do custo usando a função objectivo dual (veremos depois)
    - Quadro simplex equivalente

Problema de Transportes

- Conjunto V_1 de pontos de produção (origens) ($|V_1| = m$)
- Conjunto V_2 de pontos de consumo (destinos) ($|V_2| = n$)
- Cada origem i produz a_i unidades.
- Cada destino j necessita de b_j unidades.
- Custo unitário de transporte entre a origem i e o destino j é c_{ij}.



- *Grafo bipartido* $G = (V_1, V_2, A) : \forall (i,j) \in A, i \in V_1, j \in V_2,$
- é um grafo cujo conjunto de vértices é *partido* em V_1 e V_2, e em que todos os arcos ligam uma origem $i \in V_1$ a um destino $j \in V_2$.

- As unidades a transportar são entidades de um único tipo.

Modelo de transportes

Variáveis de decisão:

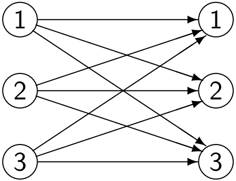
- x_{ij} - quantidade a transportar da origem i para o destino j.

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i\in V_1}\sum_{j\in V_2} c_{ij}x_{ij} \\ \text{suj. a} & \sum_{j\in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\ & \sum_{i\in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{array}$$

- Objectivo: minimizar o custo de transporte das unidades entre os pontos de produção (origens) e os pontos de consumo (destinos).

Diversas representações

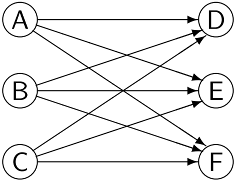
	1	2	3	
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
3	x_{31} c_{31}	x_{32} c_{32}	x_{33} c_{33}	a_3
	b_1	b_2	b_3	



	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
origem 1	1	1	1							$= a_1$
origem 2				1	1	1				$= a_2$
origem 3							1	1	1	$= a_3$
destino 1	1			1			1			$= b_1$
destino 2		1			1			1		$= b_2$
destino 3			1			1			1	$= b_3$
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	

Exemplo

	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	

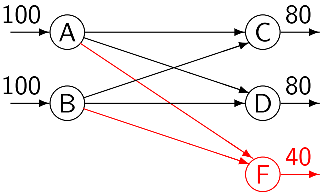


	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							= 30
B				1	1	1				= 10
C							1	1	1	= 50
D	1			1			1			= 20
E		1			1			1		= 30
F			1			1			1	= 40
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

Balanceamento

- Produção $= \sum_{i \in V_1} a_i$ deve ser **sempre** igual ao consumo $= \sum_{j \in V_2} b_j$

- Se (produção $>$ consumo), criar destino fictício que absorva excesso.



Destino fictício F absorve excesso. Geralmente, custos unitários de transporte dos novos arcos são nulos (*i.e.*, $c_{AF} = c_{BF} = 0$).

- Se (produção $<$ consumo), problema é impossível, porque não é possível satisfazer a procura (assumindo que não é possível recorrer a ofertas externas ao modelo).

Número de equações linearmente independentes

- Das $n+m$ equações, há $n+m-1$ equações linearmente independentes,
- porque qualquer equação pode ser expressa como uma combinação linear das restantes.

- Exemplo:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
A	1	1	1							$= 30$
B				1	1	1				$= 10$
C							1	1	1	$= 50$
D	1			1			1			$= 20$
E		1			1			1		$= 30$
F			1			1			1	$= 40$
min	3	6	5	2	5	5	1	2	3	

- A equação de E é igual à soma das equações de A, B e C subtraída das equações de D e F.

Caracterização das soluções básicas

- O grafo associado a uma solução básica é uma *árvore*$^{(*)}$.

Uma *árvore* é um grafo com as seguintes propriedades:

- ***ligado*** (existe um caminho entre cada par de vértices),
- **sem ciclos**,
- com um **número de arcos = número de vértices -1.**

- Pode ser provado que quaisquer 2 das propriedades caracterizam uma árvore e implicam a terceira.

Independência e dependência linear num grafo

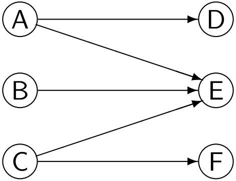
- Os arcos de uma árvore correspondem a um conjunto de vectores linearmente independentes do modelo de programação linear.
- Os arcos de um ciclo correspondem a um conjunto de vectores linearmente dependentes: um arco do ciclo pode ser expresso como uma combinação dos restantes arcos.

(*) quando há vários componentes (floresta), em soluções degeneradas, também se pode associar à solução básica uma árvore (veremos).

Exemplo: resolver em ordem às variáveis de $\mathscr{B}$

- Conjunto das variáveis básicas $\mathscr{B} = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$.
- Grafo correspondente é uma árvore: ligado, sem ciclos e $|\mathscr{B}| = 5$.
- Conjunto das variáveis não-básicas $\mathscr{N} = \{x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{31}\}$.
- Quando as variáveis não-básicas são iguais a 0, qual a solução do sistema de equações em ordem às variáveis básicas de $\mathscr{B}$?

	D	E	F	
A	? 3	? 6	5	30
B	2	? 5	5	10
C	1	? 2	? 3	50
	20	30	40	

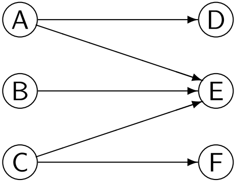


- A solução é a solução (única) do sistema com 5 equações linearmente independentes e com 5 variáveis (determinado).

Solução básica (vértice)

- Solução básica é admissível, porque $x_{ij} \geq 0, \forall i,j$.
- Há $m+n-1$ variáveis básicas
- (neste exemplo, o quadro tem 5 casas básicas).
- As restantes variáveis são não-básicas.

	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	40 3	50
	20	30	40	



Custo da solução básica:

- custo $= 20(3)+10(6)+10(5)+10(2)+40(3)=310$

Algoritmo de transportes

Algoritmo

```
Obter um quadro inicial
Enquanto (quadro não óptimo)
        mudar para um quadro adjacente melhor
```

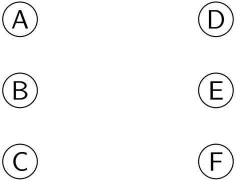
Dois métodos para obter um quadro inicial:

- Método do canto NW
- Método dos custos mínimos

Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

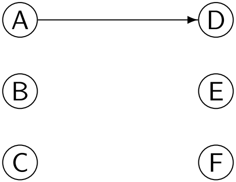
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Método do canto NW

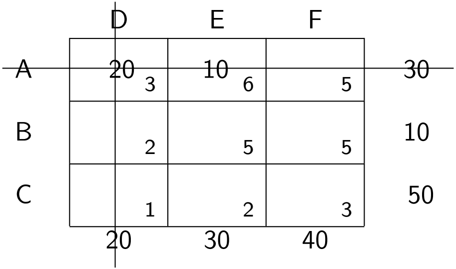
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	20 3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	

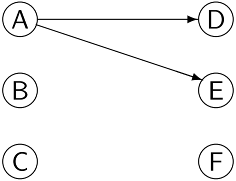


Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.



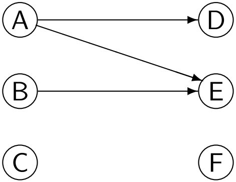
	~~D~~	E	F	
~~A~~	~~20~~ 3	~~10~~ 6	5	~~30~~
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	~~20~~	30	40	



Método do canto NW

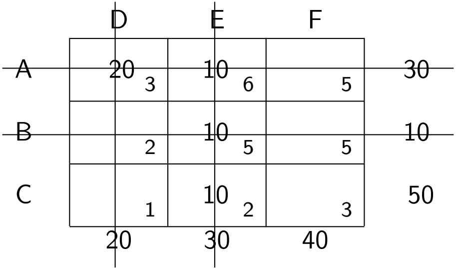
1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	~~D~~	E	F	
~~A~~	~~20~~ 3	~~10~~ 6	5	~~30~~
~~B~~	2	~~10~~ 5	5	~~10~~
C	1	2	3	50
	~~20~~	30	40	

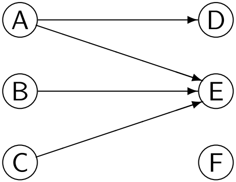


Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

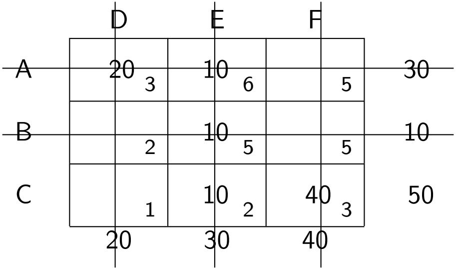


	~~D~~	~~E~~	F	
~~A~~	20 3	10 6	5	~~30~~
~~B~~	2	10 5	5	~~10~~
C	1	10 2	3	50
	~~20~~	~~30~~	40	

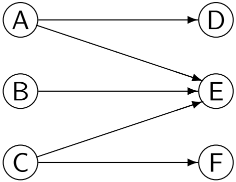


Método do canto NW

1. Colocar a maior quantidade possível na casa mais a NW ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.



	D	E	F	
A	20 3	10 6	5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	10 2	40 3	50
	20	30	40	

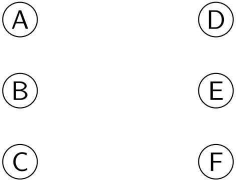


- Desvantagem: não toma em consideração os custos das casas, que podem ser muito elevados nas casas a NW.

Método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

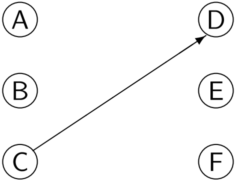
	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	1	2	3	50
	20	30	40	



Método dos custos mínimos

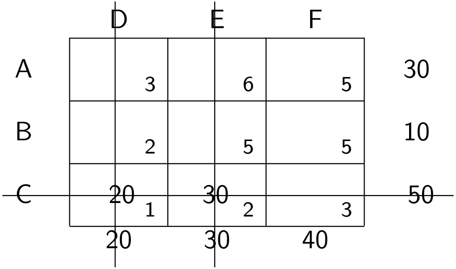
1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	D	E	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
C	20 1	2	3	50
	20	30	40	

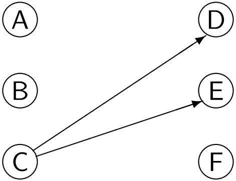


Método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
    - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
    - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
    - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.



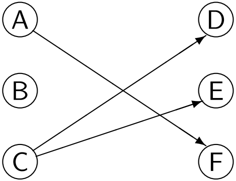
	~~D~~	~~E~~	F	
A	3	6	5	30
B	2	5	5	10
~~C~~	~~20~~ 1	~~30~~ 2	3	~~50~~
	~~20~~	~~30~~	40	



Método dos custos mínimos

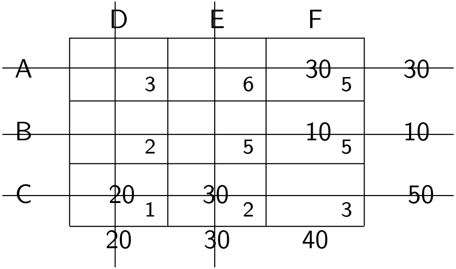
1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	~~D~~	~~E~~	F	
~~A~~	3	6	~~30~~ 5	~~30~~
B	2	5	5	10
~~C~~	~~20~~ 1	~~30~~ 2	3	~~50~~
	~~20~~	~~30~~	40	

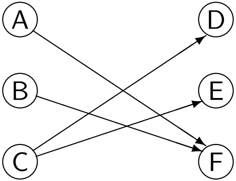


Método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.



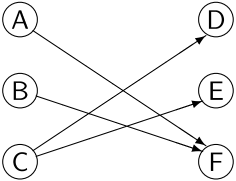
	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	



Método dos custos mínimos

1. Colocar a maior quantidade possível na casa com custo mínimo ⇒
   - ou a procura de um destino (coluna) é totalmente satisfeita,
   - ou a oferta de uma origem (linha) é totalmente usada,
   - ou ambas.
2. Cortar a linha ou a coluna (ou ambas)
3. Repetir se ainda houver uma casa.

	~~D~~	~~E~~	F	
~~A~~	3	6	~~30~~ 5	~~30~~
~~B~~	2	5	~~10~~ 5	~~10~~
~~C~~	~~20~~ 1	~~30~~ 2	3	~~50~~
	~~20~~	~~30~~	40	

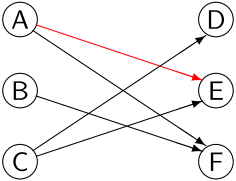


- Solução básica deve ter 5 variáveis básicas. Esta solução é admissível, mas ...

… deve ter 5 variáveis básicas

- Considerar uma variável com valor nulo como variável básica
- (neste caso, por exemplo, x_{AE}).
- A solução básica admissível é uma solução degenerada.

	D	E	F	
A	3	0 6	30 5	30
B	2	5	10 5	10
C	20 1	30 2	3	50
	20	30	40	

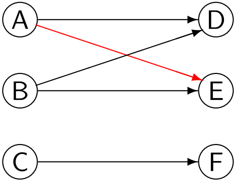


- Grafo associado à solução básica é uma árvore (depois de adicionar o arco).

Nota: selecção da variável a tornar básica

- Nem todas as variáveis podem ser escolhidas!
- No seguinte exemplo, escolher a variável x_{AE} dá origem a um grafo que não é uma árvore.

	D	E	F
A	*	0	
B	*	*	
C			*



- A escolha errónea impossibilita o uso do método dos multiplicadores [veremos depois], porque há multiplicadores que não podem ser calculados.

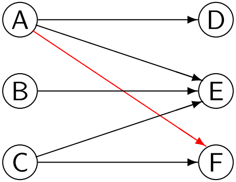
Análise do pivô: como variam as variáveis não-básicas?

- Pivô: Quadro inicial → quadro adjacente
- Movimento ao longo de uma aresta do poliedro do modelo de programação linear (de transportes):
- **todas as variáveis não-básicas permanecem nulas, excepto uma que aumenta de valor.**

Análise do pivô: como variam as variáveis básicas quando uma variável não-básica aumenta?

- Exemplo: quando a variável x_{AF} (não-básica) aumenta de uma quantidade θ, como variam os valores das variáveis básicas?

	D	E	F	
A	20 $_{3}$	10 $_{6}$	$+\theta$ $_{5}$	30
B	$_{2}$	10 $_{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	10 $_{2}$	40 $_{3}$	50
	20	30	40	



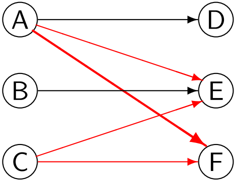
Propriedades das árvores:

- Há 1 caminho (e 1 só) entre cada par de vértices. Porquê?
- A adição de 1 arco a uma árvore dá origem a 1 (e 1 só) ciclo. Porquê?

Análise do pivô: variação dos valores das variáveis básicas

- O arco (A, F) (variável não-básica) forma um ciclo com os arcos (C, F), (C, E) e (A, E) (das variáveis básicas).

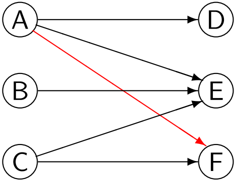
	D	E	F	
A	$20 \quad {}_{3}$	$10-\theta \; {}_{6}$	$+\theta \quad {}_{5}$	30
B	${}_{2}$	$10 \quad {}_{5}$	${}_{5}$	10
C	${}_{1}$	$10+\theta \; {}_{2}$	$40-\theta \; {}_{3}$	50
	20	30	40	



- As variáveis básicas do ciclo são designadas por *Stepping-stones.*
- Os valores das variáveis básicas que ficam fora do ciclo não mudam.

Análise do pivô: qual o aumento máximo de x_{AF}?

	D	E	F	
A	20 $_3$	$10-\theta$ $_6$	$+\theta$ $_5$	30
B	$_2$	10 $_5$	$_5$	10
C	$_1$	$10+\theta$ $_2$	$40-\theta$ $_3$	50
	20	30	40	

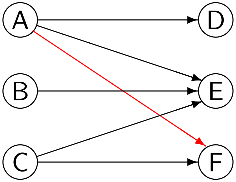


- Quanto pode aumentar a variável não-básica x_{AF} sem nenhuma das variáveis básicas se tornar negativa?
- $\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$

Pivô: exemplo

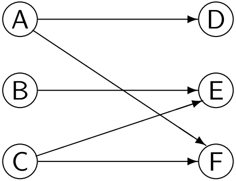
	D	E	F	
A	20 3	$10-\theta$ 6	$+\theta$ 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	20 3	6	10 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



Teste de optimalidade

Teste de optimalidade:

- análise da variação da função objectivo quando se caminha ao longo de cada aresta (aumentar uma variável não-básica de cada vez mantendo as restantes iguais a 0).

- Se o valor da função objectivo não melhorar em nenhuma aresta, a solução actual (vértice actual) é uma solução óptima.

Dois métodos para fazer o teste de optimalidade:

- análise da atractividade de cada variável não-básica, uma a uma.
- método dos multiplicadores.

Teste de optimalidade (cont.)

Análise da atractividade de uma dada variável não-básica:

- Os valores das variáveis ao longo do ciclo mudam, com reflexo nos custos.
- A soma das variações dos custos ao longo do ciclo fornece a variação do valor da função objectivo.

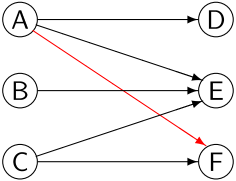
- Esta análise deve ser repetida para cada variável não-básica.
- O *Método dos Multiplicadores* é uma forma alternativa (e mais eficiente) de fazer a análise para todas as variáveis não-básicas.

- Vamos ilustrar a avaliação da atractividade de uma variável não-básica.

Exemplo: variável não-básica x_{AF}

	D	E	F	
A	$20\ _{3}$	$10-\theta_{6}$	$+\theta\ _{5}$	30
B	$_{2}$	$10\ _{5}$	$_{5}$	10
C	$_{1}$	$10+\theta_{2}$	$40-\theta_{3}$	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



Por cada unidade de aumento da variável não-básica x_{AF},

- gastam-se mais 5 unidades em (A, F),
- economizam-se 3 unidades em (C, F),
- gastam-se mais 2 unidades em (C, E),
- economizam-se 6 unidades em (A, E),
- pelo que o valor da função objectivo diminui 2 unidades: $\delta_{AF} = +5 - 3 + 2 - 6 = -2$.

Método dos multiplicadores

Output do método dos multiplicadores:

- os δ_{ij} de todas as variáveis não-básicas ij.

- Vantagem: mais eficiente do que calcular as variações de custo para todos os ciclos.

Validade do método: resulta da teoria da dualidade (veremos depois)

- Os multiplicadores são variáveis duais associadas às restrições.

Método dos multiplicadores

Multiplicadores associados às restrições:

- há um multiplicador u_i associado a cada linha i, $i = 1, \ldots, m$;
- há um multiplicador v_j associado a cada coluna j, $j = 1, \ldots, n$.

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).
1. Para as casas básicas ($ij \in \mathscr{B}$), fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

2. Para as casas não-básicas ($ij \in \mathscr{N}$), fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

Output do método dos multiplicadores:

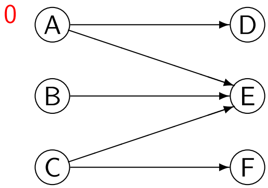
- os δ_{ij} de todas as casas não-básicas.

Exemplo: passo 0 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

0. Fixar o valor de um qualquer multiplicador (*e.g.*, no valor 0).

u_i v_j				
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- fixar um multiplicador: $u_A = 0$.

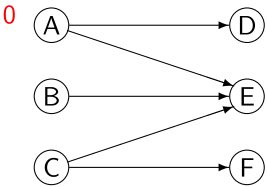
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i	v_j			
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A + v_D = 3$ $\Rightarrow v_D =$

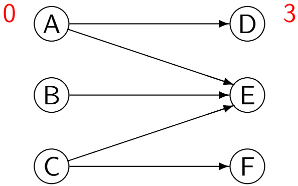
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i v_j	3			
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A + v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \qquad \Rightarrow v_E =$
-
-
-

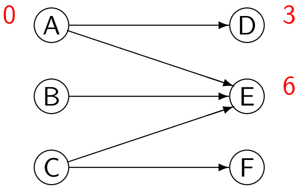
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i v_j	3	6		
0	20 3	10 6	5	30
	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A + v_D = 3 \qquad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \qquad \Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5 \qquad \Rightarrow u_B =$
-
-

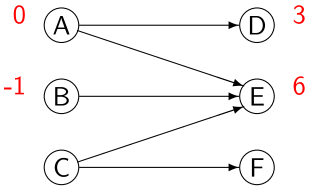
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i v_j	3	6		
0	20 3	10 6	5	30
-1	2	10 5	5	10
	1	10 2	40 3	50



- $u_A + v_D = 3$ $\Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6$ $\Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5$ $\Rightarrow u_B = -1$
- $u_C + v_E = 2$ $\Rightarrow u_C =$
-

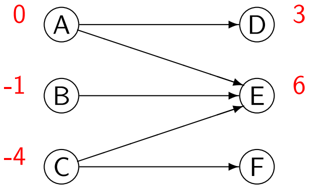
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i v_j	3	6		
0	20 3	10 6	5	30
-1	2	10 5	5	10
-4	1	10 2	40 3	50



- $u_A + v_D = 3$ $\Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6$ $\Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5$ $\Rightarrow u_B = -1$
- $u_C + v_E = 2$ $\Rightarrow u_C = -4$
- $u_C + v_F = 3$ $\Rightarrow v_F =$

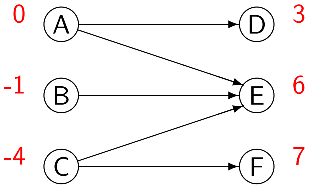
Exemplo: passo 1 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores:

1. Para as casas básicas, fazer:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

u_i v_j	3	6	7	
0	20 3	10 6	5	30
-1	2	10 5	5	10
-4	1	10 2	40 3	50



- $u_A + v_D = 3 \quad \Rightarrow v_D = 3$
- $u_A + v_E = 6 \quad \Rightarrow v_E = 6$
- $u_B + v_E = 5 \quad \Rightarrow u_B = -1$
- $u_C + v_E = 2 \quad \Rightarrow u_C = -4$
- $u_C + v_F = 3 \quad \Rightarrow v_F = 7$

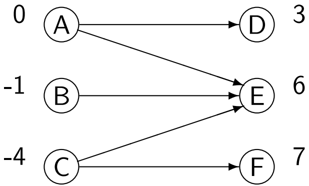
Exemplo: passo 2 do método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores

2. Para as casas não-básicas, fazer:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

u_i \ v_j	3	6	7	
0	20 3	10 6	-2 5	30
-1	0 2	10 5	-1 5	10
-4	+2 1	10 2	40 3	50



- $\delta_{AF} = 5 - 0 - 7 = -2$
- $\delta_{BD} = 2 - (-1) - 3 = 0$
- $\delta_{BF} = 5 - (-1) - 7 = -1$
- $\delta_{CD} = 1 - (-4) - 3 = +2$
- A variável não-básica x_{AF} é a mais atractiva.

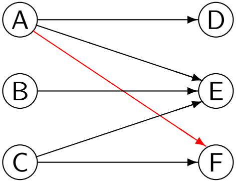
Selecção de variável não-básica

- O critério de selecção da variável não-básica é a ganância (δ_{ij} mais negativo)

Resolução do exemplo: diapositivo repetido da iteração 1

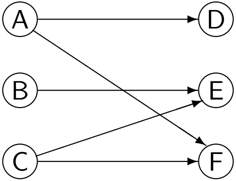
	D	E	F	
A	20 3	$10-\theta$ 6	$+\theta$ 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 40\} = 10$



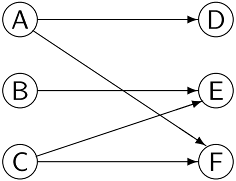
- A variável x_{AF} entra na base e x_{AE} sai da base.

	D	E	F	
A	20 3	6	10 5	30
B	2	10 5	5	10
C	1	20 2	30 3	50
	20	30	40	



Quadro 2: teste de optimalidade

	3	4	5	
0	20 3	+2 6	10 5	30
1	-2 2	10 5	-1 5	10
-2	0 1	20 2	30 3	50
	20	30	40	

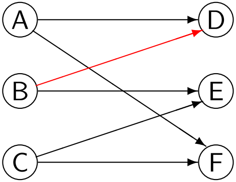


- A variável não-básica mais atractiva é a variável $x_{BD} : \delta_{BD} = -2$.

Iteração 2

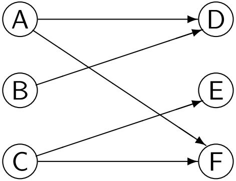
	D	E	F	
A	$20-\theta$ 3	6	$10+\theta$ 5	30
B	$+\theta$ 2	$10-\theta$ 5	5	10
C	1	$20+\theta$ 2	$30-\theta$ 3	50
	20	30	40	

$\theta_{max} = \min\{10, 20, 30\} = 10$



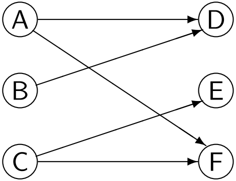
- A variável x_{BD} entra na base e x_{BE} sai da base.

	D	E	F	
A	10 3	6	20 5	30
B	10 2	5	5	10
C	1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



Quadro 3: teste de optimalidade

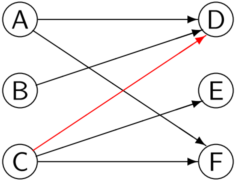
	3	4	5	
0	10 3	+2 6	20 5	30
-1	10 2	+2 5	+1 5	10
-2	0 1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



- Solução óptima.
- Custo da solução óptima: 10(3)+20(5)+10(2)+30(2)+20(3)=270
- Há soluções óptimas alternativas, porque $\delta_{CD} = 0$.

Uma solução óptima alternativa

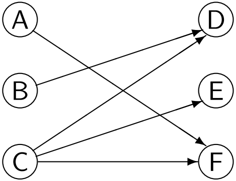
	D	E	F	
A	$10-\theta$ 3	6	$20+\theta$ 5	30
B	10 2	5	5	10
C	$+\theta$ 1	30 2	$20-\theta$ 3	50
	20	30	40	



$$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$$

- O custo da seguinte solução é o mesmo. Porquê?

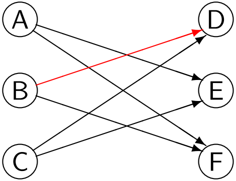
	D	E	F	
A	3	6	30 5	30
B	10 2	5	5	10
C	10 1	30 2	10 3	50
	20	30	40	



Degenerescência: pivô degenerado

- Com degenerescência, regras são semelhantes, mas θ_{max} pode ser 0.

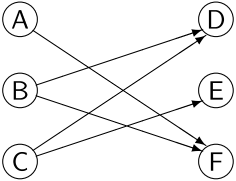
	5	6	5	
0	-2 3	$0-\theta$ 6	$30+\theta$ 5	30
0	-3 $+\theta$ 2	-1 5	$10-\theta$ 5	10
-4	$20-\theta$ 1	$30+\theta$ 2	$+2$ 3	50
	20	30	40	



$$\theta_{max} = \min\{0, 10, 20\} = 0$$

- A variável x_{BD} entra na base (com valor nulo) e x_{AE} sai da base.

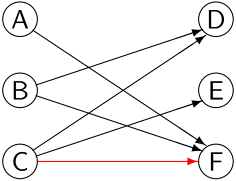
3	6	30 5	30
0 2	5	10 5	10
20 1	30 2	3	50
20	30	40	



Degenerescência: saída do vértice degenerado

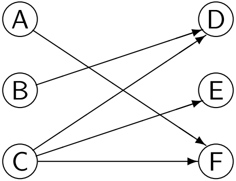
- O pivô anterior designa-se por *pivô degenerado:*
  a base é diferente, mas a solução básica (vértice) é a mesma.

	2	3	5	
0	+1 3	+3 6	30 5	30
0	$0+\theta$ 2	+2 5	$10-\theta$ 5	10
-1	$20-\theta$ 1	30 2	-1 $+\theta$ 3	50
	20	30	40	



$$\theta_{max} = \min\{10, 20\} = 10$$

	2	3	5	
0	+1 3	+3 6	30 5	30
0	10 2	+2 5	5	10
-1	10 1	30 2	-1 10 3	50
	20	30	40	



Conclusão

- O algoritmo apresentado é uma especialização do algoritmo simplex para um problema que é representado num grafo bipartido.
- Este problema é, por vezes, designado por problema de Hitchcock(†), que apresentou um modelo matemático e um procedimento para a sua resolução.
- Os grafos bipartidos são uma classe de grafos, e o algoritmo pode ser generalizado para grafos gerais.

(†) - Frank. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Physics, 20 (1941), 224-230.

Resultados de aprendizagem

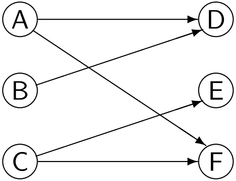
- Saber caracterizar a estrutura das soluções básicas de um problema de transporte em grafos bipartidos
    - identificar o número correcto de variáveis básicas
    - construir uma solução básica com o número correcto de casas básicas
- Resolver problemas de transporte em grafos bipartidos.
    - saber usar o método dos multiplicadores para identificar a variável a entrar na base;
    - saber seleccionar a variável a sair da base;
    - utilizar o método do *stepping-stone* para mudar para uma base adjacente;
    - reconhecer quando uma solução é óptima;
    - reconhecer quando há soluções óptimas alternativas.
    - saber aplicar os mesmos conceitos em soluções degeneradas.

Apêndices

1. Outra forma de calcular o custo: custo da solução dual

- Problema dual é: $\max\{\sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j : u_i + v_j \leq c_{ij}\}$.

	3	4	5	
0	10 3	+2 6	20 5	30
-1	10 2	+2 5	+1 5	10
-2	0 1	30 2	20 3	50
	20	30	40	



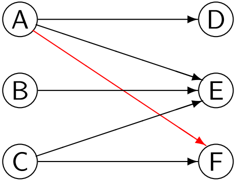
- Multiplicadores são variáveis duais (veremos depois).
- Solução dual é $(u_A, u_B, u_C, v_D, v_E, v_F)^t = (0, -1, -2, 3, 4, 5)^t$.
- Custo da solução: 30(0)+10(-1)+50(-2)+20(3)+30(4)+40(5)=270

2. Desafio

- Como é o quadro simplex correspondente a um quadro de transportes?

Exemplo: colunas das variáveis básicas e lado direito

	3	6	7	
0	20 3	$10-\theta$ 6	-2 $+\theta$ 5	30
-1	0 2	10 5	-1 5	10
-4	+2 1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	

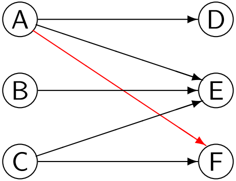


	x_{AD}	x_{AE}	x_{AF}	x_{BD}	x_{BE}	x_{BF}	x_{CD}	x_{CE}	x_{CF}	
x_{AD}	1	0	?		0			0	0	20
x_{AE}	0	1	?		0			0	0	10
x_{BE}	0	0	?		1			0	0	10
x_{CE}	0	0	?		0			1	0	10
x_{CF}	0	0	?		0			0	1	40
$-z$	0	0	?		0			0	0	-310

- Quais os valores dos coeficientes da coluna de x_{AF}?

Exemplo: coluna da variável não-básica x_{AF}

	3	6	7	
0	20 3	$10-\theta$ 6	-2 $+\theta$ 5	30
-1	0 2	10 5	-1 5	10
-4	+2 1	$10+\theta$ 2	$40-\theta$ 3	50
	20	30	40	



	x_{AD}	x_{AE}	x_{AF}	x_{BD}	x_{BE}	x_{BF}	x_{CD}	x_{CE}	x_{CF}	
x_{AD}	1	0	0		0			0	0	20
x_{AE}	0	1	+1		0			0	0	10
x_{BE}	0	0	0		1			0	0	10
x_{CE}	0	0	-1		0			1	0	10
x_{CF}	0	0	+1		0			0	1	40
$-z$	0	0	-2		0			0	0	-310

- Quando x_{AF} aumenta, x_{AE} e x_{CF} diminuem e x_{CE} aumenta.

Fim