Álgebra Linear - Exercícios
(Espaços Vectoriais)

Índice

1 Espaços Vectoriais

1.1 Dependência e Independência Linear

Exercício 1 *Sejam* **u** *e* **v** *dois vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real* **E**. *Determine o escalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para o qual os vectores* $\alpha u + 2v$ *e* $u - v$ *são linearmente dependentes.*

Solução
Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\beta_1 (\alpha u + 2v) + \beta_2 (u - v) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\beta_1 \alpha + \beta_2) u + (2\beta_1 - \beta_2) v = 0$$

Dado que u e v são linearmente independentes da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1 \alpha + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de duas equações a duas incógnitas, β_1 e β_2, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado, a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja indeterminado, isto é $r_A < 2$.

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$[A|\,B] = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \left(-\frac{\alpha}{2}\right) L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+2}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Tem-se claramente $r_A = r_{A|B}$, o que significa que o sistema é possível (como já sabíamos por ser um sistema homogéneo). Se $\alpha \neq -2$ tem-se $r_A = 2$ o que implica um sistema possível e determinado; se $\alpha = -2$, tem-se $r_A = 1 < 2$ pelo que teremos um sistema possível e indeterminado. O escalar escolhido deverá portanto ser $\alpha = -2$.

Exercício 2 *Sejam* **u**, **v** *e* **w** *três vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real* **E**. *Determine o escalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para o qual os vectores* $\alpha u + 2v + 2w$ *e* $u + \alpha v - w$ *são linearmente dependentes.*

Solução

Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{gathered}\beta_1 (\alpha u + 2v + 2w) + \beta_2 (u + \alpha v - w) = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\beta_1 \alpha + \beta_2) u + (2\beta_1 + \beta_2 \alpha) v + (2\beta_1 - \beta_2) w = 0\end{gathered}$$

Dado que u, v e w são linearmente independentes, da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1 \alpha + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 + \beta_2 \alpha = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a duas incógnitas, β_1, β_2 e β_3, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & \alpha \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado, a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja indeterminado, isto é $r_A < 2$.

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned}[A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + \left(-\frac{\alpha}{2}\right) L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-1) L_1} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+2}{2} & 0 \end{array}\right]\end{aligned}$$

Se $\alpha = -1$ ou $\alpha = -2$ tem-se claramente $r_A = r_{A|B} = 2$, o que significa que o sistema é possível (como já sabíamos por ser um sistema homogéneo) e determinando. No entanto, se $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq -2$ também se obterá um sistema possível e determinado. Concluimos assim que os vectores dados serão sempre linearmente independentes, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 3 *Sejam* **u** *e* **v** *dois vectores linearmente independentes de um espaço vectorial real* **E**. *Mostre que os vectores* **u** *e* **u** + **v** *são linearmente independentes.*

<u>*Solução*</u>
Construamos a combinação linear nula destes dois vectores e verifiquemos que só é satisfeita com os escalares nulos:

$$\beta_1 (u) + \beta_2 (u + v) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\beta_1 + \beta_2) u + \beta_2 v = 0$$

Sabendo que u e v são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é claramente $\beta_1 = \beta_2 = 0$ pelo que se pode concluir que os vectores u e $u + v$ são linearmente independentes.

Exercício 4 *Considerem-se 3 vectores de um espaço vectorial:* **u**, **v** *e* **w**. *Prove que $u - v$, $v - w$ e $w - u$ são sempre linearmente dependentes.*

<u>*Solução*</u>
Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos que não é só satisfeita com os escalares nulos:

$$\beta_1 (u - v) + \beta_2 (v - w) + \beta_3 (w - u) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\beta_1 - \beta_3) u + (-\beta_1 + \beta_2) v + (-\beta_2 + \beta_3) w = 0$$

Sabendo que u, v e w são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_3 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Construímos agora a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned}
[A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 < 3$, o sistema é possível e indeterminado, tendo outras soluções que não a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente dependentes.

Exercício 5 *Sendo* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{z}$ *vectores linearmente independentes de um espaço vectorial* $\mathbf{E}$, *mostre que os três vectores* $x + y$, $x + z$ *e* $y + z$ *também são linearmente independentes*

Solução
Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos que não é só satisfeita com os escalares nulos:

$$\begin{gathered}
\beta_1 (x + y) + \beta_2 (x + z) + \beta_3 (y + z) = 0 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow (\beta_1 + \beta_2) x + (\beta_1 + \beta_3) y + (\beta_2 + \beta_3) z = 0
\end{gathered}$$

Sabendo que x, y e z são linearmente independentes, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{array}\right.$$

Construímos agora a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned}
[A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-1)\, L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 = 3$, o sistema é possível e determinado, tendo apenas a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes.

Exercício 6 *Sejam* **v** *e* **w** *dois vectores linearmente independentes de um espaço vectorial* **E**. *Mostre que o sistema de vectores* $\{v, w, v + w\}$ *é linearmente dependente.*

Solução
Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos que não é só satisfeita com os escalares nulos:

$$\beta_1 v + \beta_2 w + \beta_3 (v + w) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\beta_1 + \beta_3) v + (\beta_2 + \beta_3) w = 0$$

Sabendo que v e w são linearmente independentes, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Construímos agora a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$[A|\, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 < 3$, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $d = n - r_A = 3 - 2 = 1$. Existem portanto outras soluções para o sistema que não a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Logo, os vectores $\{v, w, v + w\}$ são linearmente dependentes.

Exercício 7 *Identifique as condições sobre* **a** *e* **b** *de modo a que os vectores,* $(a, 2, b)$, $(a + 1, 2, 1)$ *e* $(3, b, 1)$ *sejam linearmente independentes.*

Solução
Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\beta_1 (a, 2, b) + \beta_2 (a + 1, 2, 1) + \beta_3 (3, b, 1) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a\beta_1 + (a + 1) \beta_2 + 3\beta_3, 2\beta_1 + 2\beta_2 + b\beta_3, b\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} a\beta_1 + (a+1)\,\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + b\beta_3 = 0 \\ b\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas, β_1, β_2 e β_3, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} a & a+1 & 3 \\ 2 & 2 & b \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja determinado, isto é $r_A = 3$. Tal depende no entanto dos valores dos parâmetros a e b.

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned}
[A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & b & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & b & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow \frac{1}{2}L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-b)\,L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-a)\,L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 1-b & \frac{2-b^2}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (b-1)\,L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-b^2}{2} + (b-1)\,\frac{6-ab}{2} & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\,\frac{6-ab}{2} \neq 0$. Vejamos então qual a relação entre a e b de modo a que esta condição seja satisfeita. Note-se que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\,\frac{6-ab}{2} = 0$ é uma equação na variável a. É simples verificar que $a = \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$. Assim, concluímos que:

- $b = 0 \vee b = 1$

  Não existe solução para a, logo $r_A = r_{A|B} = 3$, o sistema é possível e determinado e, por consequência os três vectores dados são linearmente independentes.

- $b \neq 0 \wedge b \neq 1$
  - $\rightarrow$ Se $a = \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$, teremos $r_A = r_{A|B} < 3$, o sistema é possível e indeterminado e, por consequência os três vectores dados são linearmente dependentes.
  - $\rightarrow$ Se $a \neq \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$, teremos $r_A = r_{A|B} = 3$, o sistema é possível e determinado e, por consequência os três vectores dados são linearmente independentes.

Exercício 8 *Verifique se os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$ são linearmente independentes?*

$$x_1 = (1, 0, 1, 2)\,;\, x_2 = (0, 1, 1, 2)\,;\, x_3 = (1, 1, 1, 3)$$

Solução
Os vectores serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\begin{gathered} \beta x_1 + \beta x_2 + \beta x_3 = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \beta_1 (1, 0, 1, 2) + \beta_2 (0, 1, 1, 2) + \beta_3 (1, 1, 1, 3) = 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\beta_1 + \beta_3, \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3) = 0 \end{gathered}$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de quatro equações a quatro incógnitas, β_1, β_2, β_3 e β_4, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja determinado, isto é $r_A = 3$. Tal depende no entanto dos valores dos parâmetros a e b.

Construímos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$
\begin{aligned}
[A|\,B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} a & a+1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & b & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \\
&\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & b & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow \frac{1}{2} L_1} \\
&\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ a & a+1 & 3 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-b)\,L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-a)\,L_1} \\
&\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 1-b & \frac{2-b^2}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (b-1)\,L_2} \\
&\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-ab}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-b^2}{2} + (b-1)\,\frac{6-ab}{2} & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\,\frac{6-ab}{2} \neq 0$. Vejamos então qual a relação entre a e b de modo a que esta condição seja satisfeita. Note-se que $\frac{2-b^2}{2} + (b-1)\,\frac{6-ab}{2} = 0$ é uma equação na variável a. É simples verificar que $a = \frac{-4-b^2+6b}{(b-1)b}$. Assim, concluímos que:

1.2 Sistemas de Geradores e Bases

Exercício 9 *Considere os vectores:*

$$
\begin{aligned}
&u_1 = (1,1,a)\,;\; u_2 = (0,1,1)\,;\; u_3 = (1,0,b) \\
&\textit{com } u_i \in \mathbb{R}^3, i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Que condições devem verificar **a** *e* **b** *para* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *constituírem uma base de* $\mathbb{R}^3$.

Solução

Sabemos que $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Como o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é constituído por três vectores de $\mathbb{R}^3$ sabemos que $\{u_1, u_2, u_3\}$ serão geradores de $\mathbb{R}^3$ se constituirem uma base de $\mathbb{R}^3$. Mas $\{u_1, u_2, u_3\}$ só constituirá uma base de $\mathbb{R}^3$ se os seus vectores forem linearmente independentes. Os vectores de $\{u_1, u_2, u_3\}$ serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \beta_1 (1,1,a) + \beta_2 (0,1,1) + \beta_3 (1,0,b) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\beta_1 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2, \beta_1 a + \beta_2 + \beta_3 b) = 0$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ a\beta_1 + \beta_2 + b\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas, β_1, β_2 e β_3, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & b \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes e portanto uma base de $\mathbb{R}^3$, como pretendemos. Tal depende no entanto do valor dos parâmetros a e b.

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned} [A|\, B] \quad &= \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-a) L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-1) L_1} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b-a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-1) L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a+1 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $b - a + 1 \neq 0$, o que implica $b \neq a - 1$. Nestas circunstâncias, o sistema é possível e determinado e os vectores dados são linearmente dependentes, constituindo uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 10 *Sejam* $v_1 = (7, 4, -7)$ *e* $v_2 = (8, 7, 8)$ *dois vectores de* $\mathbb{R}^3$*. Determine o valor de* $\mathbf{t}$ *de modo a que o vector* $v = (-2, t, 8)$ *pertença ao subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *gerado por* v_1 *e* v_2*.*

Solução

O subespaço gerado pelos vectores v_1 e v_2 são os vectores da forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Assim, o vector v pertencerá ao subespaço gerado por v_1 e v_2 se existirem escalares α_1 e α_2 tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &= v \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow &\ \alpha_1 (7,4,-7) + \alpha_2 (8,7,8) = (-2,t,8) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow &\ \begin{cases} 7\alpha_1 + 8\alpha_2 = -2 \\ 4\alpha_1 + 7\alpha_2 = t \\ -7\alpha_1 + 8\alpha_2 = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Vejamos quais as condições para que o sistema seja possível. Para isso, estudamos o sistema através da sua matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & t \\ -7 & 8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + \left(-\frac{4}{7}\right) L_1}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 0 & \frac{17}{7} & \frac{8+7t}{7} \\ 0 & 16 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{7}{17} L_2}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 136 + 119t \\ 0 & 16 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-16) L_2}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 136 + 119t \\ 0 & 0 & -2170 - 1904t \end{array}\right]$$

O sistema será possível se $-2170 - 1904t = 0$. Logo, v poderá ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 se $t = -\frac{155}{136}$.

Exercício 11 *Verifique se o conjunto de vectores* $\{(6,3,9), (5,2,8), (4,1,7)\}$ *constitui uma base de* $\mathbb{R}^3$.

Solução

Exercício 12 *Seja* $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Dê um exemplo de um vector, diferente de $\mathbf{v}$ *e do vector nulo, que pertença ao subespaço gerado por* $\mathbf{v}$.

b) Dê um exemplo de um vector que não pertença ao subespaço gerado por $\mathbf{v}$.

Solução

a) O subespaço gerado por v é dado por:

$$\left\{w \in \mathbb{R}^2 : w = \alpha \cdot v, \forall_{\alpha \in \mathbb{R}^2}\right\}$$

O subespaço gerado por v são protanto todos os "múltiplos" do vector v. Escolhendo $\alpha = -1$, obtém-se $w = (-1)\, v = (-1)\,(1,2) = (-1,-2)$. conclui-se portanto que $(-1,-2)$ pertence ao subespaço gerado por v.

b) Em contraponto com a) serão todos os vectores que não sejam múltiplos de v, por exemplo $(1,1)$. Podemos confirmar este resultado, mostrando que a equação $(1,1) = \alpha\,(1,2)$ é impossível:

$$\begin{aligned} &\alpha\,(1,2) = (1,1) \iff \\ &\iff (\alpha, 2\alpha) = (1,1) \end{aligned}$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é obviamente impossível. Estudemos a sua matriz ampliada:

$$\begin{aligned} [A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)\,L_1} \\ & \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Dado que $r_A \neq r_{A|B}$ o sistema é impossível, pelo que não existe nenhum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfaça $(1,1) = \alpha\,(1,2)$. Logo, $(1,1)$ não pertence ao subespaço gerado por $(1,2)$.

Exercício 13 *Considere o espaço vectorial* $\mathbb{R}^3$ *e o conjunto de vectores* $M = \{(4,5,6), (r,5,1), (4,3,2)\}$. *Determine* **r** *de modo a que o conjunto gerado pelos vectores de* **M** *não seja* $\mathbb{R}^3$.

Solução

Sabemos que $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Como o conjunto M é constituído por três vectores de $\mathbb{R}^3$ sabemos que M serão geradores de $\mathbb{R}^3$ se constituirem uma base de $\mathbb{R}^3$. Mas M só constituirá uma base de $\mathbb{R}^3$ se os seus vectores forem linearmente independentes. Os vectores de M serão linearmente independentes se a única combinação linear nula destes se obtiver com os escalares nulos:

$$\beta_1\,(4,5,6) + \beta_2\,(r,5,1) + \beta_3\,(4,3,2) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (4\beta_1 + r\beta_2 + 4\beta_3, 5\beta_1 + 5\beta_2 + 3\beta_3, 6\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3) = 0$$

Da expressão anterior resulta que:

$$\begin{cases} 4\beta_1 + r\beta_2 + 4\beta_3 = 0 \\ 5\beta_1 + 5\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \\ 6\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas, β_1, β_2 e β_3, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 4 & r & 4 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes e portanto uma base de $\mathbb{R}^3$, o que contraria o que nós pretendemos. Pretende-se portanto que o sistema seja indeterminado, isto é $r_A < 3$. Tal depende no entanto do valor do parâmetro r.

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned}
[A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & r & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-6)\,L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-5)\,L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{20-r}{4} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{24-r}{4} & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{4}{20-r} L_2}
\end{aligned}$$

Para prosseguir a condensação temos de assumir que $r \neq 20$. Adiante estudaremos o caso em que $r = 20$.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{20-r} & 0 \\ 0 & \frac{24-r}{4} & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \left(-\frac{24-r}{4}\right) L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{r}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{20-r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2r-32}{20-r} & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} < 3$, é necessário que $\frac{2r-32}{20-r} = 0$, o que implica $r = 16$. Nestas circunstâncias, o sistema é possível e indeterminado e os vectores dados são linearmente dependentes.

regressemos agora ao caso em que $r = 20$. Substituindo r na matriz após as três primeiras operações elementares obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{20}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{20-20}{4} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{24-20}{4} & -4 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Prosseguindo a condensação, obter-se-á:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Tem-se, claramente, $r_A = r_{A|B} = 3$ pelo que o sistema é possível e determinado. consequentemente, os vectores dados serão lineramente independentes. O valor do parâmetro r que nos interessa é portanto$r = 16$.

Exercício 14 *O conjunto, $P_2(\mathbb{R})$, dos polinómios de grau inferior ou igual a 2 constitui um espaço vectorial real.*

a) Determine um polinómio $b(x)$ de modo a que o conjunto $\{1, 1+x^2, b(x)\}$ constitua uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

b) Determine as coordenadas de $2x^2 - 7x$ nessa base.

Solução

a) O polinómio $b(x)$ deverá ser tal que o sistema de vectores $\{1, 1+x^2, b(x)\}$ seja linearmente independente. Construamos a combinação linear nula destes três vectores e verifiquemos para que polinómios $b(x) = ax^2+bx+c$ a equação é satisfeita apenas com os escalares nulos:

$$\beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot \left(1+x^2\right) + \beta_3 \cdot b(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot \left(1+x^2\right) + \beta_3 \cdot \left(ax^2+bx+c\right) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\beta_1 + \beta_2 + c\beta_3) + (b\beta_3) \cdot x + (\beta_2 + a\beta_3) \cdot x^2 = 0$$

Sabendo que um polinómio é nulo se os coeficientes dos termos de todos os graus forem nulos, teremos:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + c\beta_3 = 0 \\ b\beta_3 = 0 \\ \beta_2 + a\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Temos portanto um sistema homogéneo de três equações a três incógnitas, β_1, β_2 e β_3, cuja matriz do sistema é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$. Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes e portanto uma base de $P_2(\mathbb{R})$, como se pretende. Tal depende no entanto do valor dos parâmetros a, b e c.

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned} [A|\,B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right] \underrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Para que, como se pretende, $r_A = r_{A|B} = 3$, é necessário que $b \neq 0$. Nestas circunstâncias, o sistema é possível e indeterminado, os vectores dados são linearmente dependentes e portanto constituirão uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

Escolhemos a alternativa mais simples e escolhamos $a = c = 0$ e $b = 1$. Neste caso $b(x) = x$. O conjunto de vectores $\left\{1, 1 + x^2, x\right\}$ será portanto uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

b) Pretende-se determinar os escalares β_1, β_2 e β_3 tais que:

$$\beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot \left(1 + x^2\right) + \beta_3 \cdot x = 2x^2 - 7x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta_2 \cdot x^2 + \beta_3 \cdot x + (\beta_1 + \beta_2) = 2x^2 - 7x$$

Sabendo que dois polinómios são iguais se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais, a igualdade acima é equivalente ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = -7 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Facilmente se verifica que a solução será dada por $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = 2$ e $\beta_3 = -7$. Assim, as coordenadas de $2x^2 - 7x$ na base $\left\{1, 1+x^2, x\right\}$ serão $\left[\begin{array}{ccc} -2 & 2 & -7 \end{array}\right]^T$.

Exercício 15 *Mostre que o conjunto $M = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.*

Solução

Temos duas alternativas para mostrar este facto:

1^a alternativa:

Notemos que $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Se os vectores dados não forem linearmente independentes, então não podem constitur uma base de $\mathbb{R}^3$ uma vez que esta deverá ter 3 elementos.

2^a alternativa:

Podemos verificar se os vectores de M geram qualquer vector $x \in \mathbb{R}^3$. Se tal não for verdade, então os vectores não podem constituir uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 16 *Verifique se os seguintes vectores são geradores do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.*

a) $x_1 = (1,1,1)\,;\ x_2 = (1,-1,-1)\,;\ x_3 = (3,1,1)$

b) $x_1 = (1,1,1)\,;\ x_2 = (1,-1,-1)\,;\ x_3 = (3,1,2)$

Solução

1.3 Subespaços Vectoriais

Exercício 17 *Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são subespaços de $\mathbb{R}^2$?*

i) $W_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\right\}$

ii) $W_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y, 2x = y\right\}$

iii) $W_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y+1\right\}$

iv) $W_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\right\}$

Solução

i) Vejamos se $0 \in W_1$. Se $x = 0$ e $y = 0$, teremos $x = 2y$ pelo que $(0,0) \in W_1$. Com efeito, $0 = x \cdot 0$. Consideremos agora dois vectores $(x,y), (x', y') \in W_1$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha(x,y) + \beta(x', y') \in W_1$. Faça-se $(a,b) = \alpha(x,y) + \beta(x', y')$. Queremos mostrar que (a,b) satisfaz $a = 2b$:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \alpha(x,y) + \beta(x',y') \\ (\text{Porque } (x,y),(x',y') & \in & W_1) \\ & = & (2\alpha y + 2\beta y', \alpha y + \beta y') \\ & = & (2(\alpha y + \beta y'), \alpha y + \beta y') \end{array}$$

Concluímos assim que (a,b) satisfaz $a = 2b$, logo, F_2 é um espaço vectorial.

ii) O sistema $x = 2y \wedge 2x = y$ tem como solução única o vector nulo, $(0,0)$. Assim, como $W_2 = \{(0,0)\}$ conclui-se que W_2 é um subespaço.

iii) Vejamos se $0 \in W_3$. É fácil verificar que não: um vector de W_3 tem a forma $(2y+1, y), y \in \mathbb{R}$. Este vector poderá ser escrito como:

$$(2y+1, y) = y(2,1) + (1,0), y \in \mathbb{R}$$

Vejmos agora se existe algum escalar α tal que $(2\alpha + 1, \alpha) = 0$:

$$\begin{gathered} (2\alpha+1,\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha(2,1) + (1,0) = (0,0) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \alpha(2,1) = (-1,0) \Longleftrightarrow \\ \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \end{gathered}$$

Este sistema é impossível pelo que $0 \notin W_3$. Portanto, W_3 não constitui um subespaço vectorial.

iv) O conjunto W_4 é constituído pelos vectores da forma $(x,0), x \in \mathbb{R}$ e $(0,y), y \in \mathbb{R}$. É obvio que os vectores $(1,0)$ e $(0,1)$ pertencem ao subespaço vectorial W_4, mas a sua soma, $(1,0) + (0,1) = (1,1)$, não. Dado que W_4 não é fechado para a soma, então não pode ser espaço vectorial.

Exercício 18 *Seja* $\mathbf{F}$ *o espaço vectorial real das funções reais de variável real, diferenciáveis. Determine, entre os seguintes conjuntos, aqueles que são subespaços de* $\mathbf{F}$.

i) $F_1 = \left\{ f \in F : f(x) \cdot f^{'}(x) = 1, \forall_{x \in \mathbb{R}} \right\}$

ii) $F_2 = \left\{ f \in F : f(x) = x \cdot f^{'}(x), \forall_{x \in \mathbb{R}} \right\}$

<u>*Solução*</u>

i) Vejamos se $0 \in F_1$. Obviamente que não: se $f(x) = 0$ teremos $f^{'}(x) = 0$, pelo que $f(x) \cdot f^{'}(x) = 0 \neq 1$. Logo, $0 \notin F_1$, portanto F_1 não é subespaço.

ii) Vejamos se $0 \in F_2$. Se $f(x) = 0$ teremos $f^{'}(x) = 0$, pelo que $f(x) = x \cdot f^{'}(x)$ é satisfeita. Com efeito, $0 = x \cdot 0$. Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in F_2$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F_2$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $p(x)$ se pode escrever na forma $x \cdot p^{'}(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &\quad \text{(Porque } f(x), g(x) \in F_2\text{)} \\ &= \alpha x \cdot f^{'}(x) + \beta x \cdot g^{'}(x) \\ &= x\left(\alpha f^{'}(x) + \beta g^{'}(x)\right) \\ &= x \cdot p^{'}(x) \end{aligned}$$

Concluímos assim que F_2 é um espaço vectorial.

Exercício 19 *Considere o espaço vectorial $\mathcal{S}$, sobre $\mathbb{R}$, das sucessões reais. Determine, entre os seguintes subconjuntos, aqueles que são subespaços de $\mathcal{S}$:*

i) O conjunto das progressões aritméticas, $\mathcal{P}$.

ii) O conjunto das sucessões com um número infinito de termos nulos, $\mathcal{Q}$.

<u>*Solução*</u>

i) As progressões aritméticas reais são sucessões reais do tipo $u_n = n \cdot r, r \in \mathbb{R}$. Está claro que se $r = 0$, teremos $u_n = 0$, pelo que $0 \in \mathcal{P}$. Consideremos agora duas progressões $u_n, v_n \in \mathcal{P}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathcal{P}$. Faça-se $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$. Queremos mostrar que w_n é uma progressão aritmética. Basta para o efeito determinar o seu termo:

$$\begin{aligned} w_n &= \alpha u_n + \beta v_n \\ &\quad \text{(Porque } u_n, v_n \in \mathcal{P}\text{)} \\ &= \alpha n r_1 + \beta n r_2 \\ &= n\left(\alpha r_1 + \beta r_2\right) \end{aligned}$$

Concluímos assim, que w_n é uma progressão aritmética de termo $(\alpha r_1 + \beta r_2)$.

Exercício 20 *Seja* **E** *o espaço vectorial real das funções reais de variável real contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$*, munido das operações habituais de adição de funções e da multiplicação de uma função por um escalar. Seja* **F** *o conjunto das funções:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma x + \delta, & x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Que condições devem verificar as constantes e $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *e* $\mathbf{c}$ *para que* **F** *seja um subespaço de* **E***?*

<u>*Solução*</u>

- f tem de ser contínua

  Apenas nos precisamos de preocupar com os pontos de abcissa $x = 0$ e $x = 1$:

  - $x = 0$
    $\alpha \cdot 0 + \beta = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Longleftrightarrow \boxed{\beta = c}$
  - $x = 1$
    $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = \gamma \cdot 1 + \delta \Longleftrightarrow \boxed{a + b + c = \gamma + \delta}$

- f tem de ser diferenciável

  Apenas nos precisamos de preocupar com os pontos de abcissa $x = 0$ e $x = 1$:

  - $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0^-} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0^+} \Longleftrightarrow \alpha = \left. 2 \cdot a \cdot x + b \right|_{x=0^+} \Longleftrightarrow$
    $\Leftrightarrow \boxed{\alpha = b}$
  - $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1^-} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1^+} \Longleftrightarrow \left. 2 \cdot a \cdot x + b \right|_{x=1^-} = \gamma \Longleftrightarrow$
    $\Leftrightarrow \boxed{2a + b = \gamma}$

As quatro condições anteriores podem ser colocadas em forma de sistema de 4 equações a 7 incógnitas, a saber:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema por condensação obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-1)\, L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Temos $r_A = r_{A|B} = 4 < 7$ pelo que o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r_A = 7 - 4 = 3$.

A solução geral do sistema será dada por:

$$\begin{cases} \alpha = b \\ \beta = c \\ \gamma = 2a + 2b \\ \delta = -a - b + c \end{cases}, \forall_{a,b,c \in \mathbb{R}}$$

Matricialmente, teremos:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 2a+2b \\ -a-b+c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Relativamente às condições para o critério de suespaço:

- Está claro que $0 \in F$. Basta fazer $a = b = c = 0$, para que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ e portanto se tenha a função $f(x) = 0$.
- Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $p(x)$ se pode escrever na forma da equação (1):

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= \begin{cases} bx + c, & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 0 \le x \le 1 \\ (2a+2b)x + (-a-b+c), & x > 1 \end{cases} + \begin{cases} b'x + c', & x < 0 \\ a'x^2 + b'x + c', & 0 \le x \le \\ (2a'+2b')x + (-a'-b'+c'), & x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (b+b')x + (c+c'), & x < 0 \\ (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c'), & 0 \le x \le 1 \\ (2(a+a') + 2(b+b'))x + (-(a+a') - (b+b') + (c+c')), & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo $a'' = (a+a')$, $b'' = (b+b')$ e $c'' = (c+c')$, $p(x)$ escrever-se-á na forma:

$$p(x) = \begin{cases} b''x + c'', & x < 0 \\ a''x^2 + b''x + c'', & 0 \le x \le 1 \\ (2a''+2b'')x + (-a''-b''+c''), & x > 1 \end{cases}$$

Adicionalmente, fazendo,

$$\begin{cases} \alpha'' = b'' \\ \beta = c'' \\ \gamma'' = 2a'' + 2b'' \\ \delta'' = -a'' - b'' + c'' \end{cases}$$

... teremos,

$$p(x) = \begin{cases} \alpha'' x + \beta'', & x < 0 \\ a'' x^2 + b'' x + c'', & 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma'' x + \delta'', & x > 1 \end{cases}$$

... o que mostra que $p(x) \in F$.

Exercício 21 *Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço vectorial real das matrizes quadradas de ordem 2 da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Verifique se os subconjuntos a seguir indicados são subespaços de $M_2(\mathbb{R})$. No caso afirmativo apresente um conjunto de geradores linearmente independentes.*

i) Conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 que verificam $a = b$.

ii) Conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 que verificam $b = c + 1$.

Solução

i) Seja $\mathcal{M}$ o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $\begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix}, \forall_{a,c,d \in \mathbb{R}}$. Se $a = c = d = 0$ teremos a matriz nula de ordem, 0_2. Logo, $0 \in \mathcal{M}$. Sejam agora $A = \begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} a' & a' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha A + \beta A' \in \mathcal{M}$. Faça-se $A'' = \alpha A + \beta A'$.

$$\begin{aligned} A'' &= \alpha A + \beta A' \\ &= \alpha \begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a' & a' \\ c' & d' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha a + \beta a' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note-se que, na matriz A'' se tem $a_{11}^{''} = a_{12}^{''}$, o que implica que $A'' \in \mathcal{M}$. Concluímos assim que $\mathcal{M}$ é um subespaço vectorial.

Note-se que:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathcal{M}$ e portanto um conjunto de geradores de $\mathcal{M}$.

ii) Seja $\mathcal{M}$ o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $\begin{bmatrix} a & c+1 \\ c & d \end{bmatrix}, \forall_{a,c,d\in\mathbb{R}}$.
Note-se que $0 \notin \mathcal{M}$. Efectivamente, o sistema $c = 0 \wedge c+1 = 0$ é impossível.
Conclui-se assim que $\mathcal{M}$ não é subespaço vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 22 *Seja $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vectorial real das matrizes quadradas de ordem* **n**. *Verifique se os subconjuntos a seguir indicados são subespaços de $M_n(\mathbb{R})$. No caso afirmativo apresente uma base e indique a dimensão.*

i) Conjunto das matrizes diagonais.

ii) Conjunto das matrizes escalares.

Solução

i) Seja $\mathcal{M}$ o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}, \forall_{d_i\in\mathbb{R}}$.
Se $d_i = 0$ teremos a matriz nula de ordem, 0_n. Logo, $0 \in \mathcal{M}$. Sejam agora $D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}, D' = diag\{d_1', d_2', \cdots, d_n'\} \in \mathcal{M}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha D + \beta D' \in \mathcal{M}$. Faça-se $D'' = \alpha D + \beta D'$.

$$\begin{aligned} D'' &= \alpha D + \beta D' \\ &= \alpha \cdot diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\} + \beta \cdot diag\{d_1', d_2', \cdots, d_n'\} \\ &= diag\{\alpha d_1 + \beta d_1', \alpha d_2 + \beta d_2', \cdots, \alpha d_n + \beta d_n'\} \end{aligned}$$

A matriz D'' é obviamente diagonal, o que implica que $D'' \in \mathcal{M}$. Concluímos assim que $\mathcal{M}$ é um subespaço vectorial.

Note-se que:

$$\begin{aligned} diag\{d_1, d_2, \cdots, d_n\} &= \\ &= d_1 \cdot diag\{1, 0, \cdots, 0\} + \cdots + d_n \cdot diag\{0, 0, \cdots, 1\} \end{aligned}$$

Assim, $\{diag\{1, 0, \cdots, 0\}, \cdots, diag\{0, 0, \cdots, 1\}\}$ é uma base de $\mathcal{M}$. Como é constituída por n vectores, $\mathcal{M}$ tem dimensão n.

ii) Seja $\mathcal{M}$ o conjunto dado, cujas matrizes têm a forma genérica $diag\{d, d, \cdots, d\}, \forall_{d\in\mathbb{R}}$.
Se $d = 0$ teremos a matriz nula de ordem, 0_n. Logo, $0 \in \mathcal{M}$. Sejam agora $D = diag\{d, d, \cdots, d\}, D' = diag\{d', d', \cdots, d'\} \in \mathcal{M}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha D + \beta D' \in \mathcal{M}$. Faça-se $D'' = \alpha D + \beta D'$.

$$
\begin{aligned}
D'' &= \alpha D + \beta D' \\
&= \alpha \cdot diag\{d, d, \cdots, d\} + \beta \cdot diag\{d', d', \cdots, d'\} \\
&= diag\{\alpha d + \beta d', \alpha d + \beta d', \cdots, \alpha d_n + \beta d'\}
\end{aligned}
$$

A matriz D'' é obviamente diagonal, o que implica que $D'' \in \mathcal{M}$. Concluímos assim que $\mathcal{M}$ é um subespaço vectorial.

Note-se que:

$$
\begin{aligned}
diag\{d, d, \cdots, d\} &= \\
&= d \cdot diag\{1, 1, \cdots, 1\}
\end{aligned}
$$

Assim, a matriz identidade de ordem n é uma base de $\mathcal{M}$. Como é constituída por 1 vector, $\mathcal{M}$ tem dimensão 1.

Exercício 23 *Seja* $\mathbf{C}$ *o espaço vectorial real das funções reais de variável real, com derivada contínua no intervalo* $[-a, a], a > 0$. *Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de* $\mathbf{C}$.

i) $V_1 = \left\{f \in C : f(-x) = f(x), \forall_{x \in [-a,a]}\right\}$

ii) $V_2 = \left\{f \in C : f(-x) = -f(x), \forall_{x \in [-a,a]}\right\}$

<u>*Solução*</u>

i) Vejamos se $0 \in V_1$. Se $f(x) = 0$ teremos $f(-x) = 0$, pelo que $f(x) = f(-x)$ é satisfeita, logo $0 \in V_1$. Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in V_1$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in F_2$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $p(x) = p(-x)$:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\
& \quad (\text{Porque } f(x), g(x) \in F_2) \\
&= \alpha f(-x) + \beta g(-x) \\
&= p(-x)
\end{aligned}
$$

Concluímos assim que V_1 é um espaço vectorial.

ii) Vejamos se $0 \in V_2$. Se $f(x) = 0$ teremos $-f(x) = 0$, pelo que $f(x) = 0$. Logo $f(-x) = 0$ é satisfeita, pelo que $0 \in V_2$. Consideremos agora duas funções $f(x), g(x) \in V_2$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha f(x) + \beta g(x) \in V_2$. Faça-se $p(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Queremos mostrar que $-p(x) = p(-x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &\quad \text{(Porque } f(x), g(x) \in V_2\text{)} \\ &= \alpha[-f(-x)] + \beta[-g(-x)] \\ &= -\alpha f(-x) - \beta g(-x) \\ &= -(\alpha f(-x) + \beta g(-x)) \\ &= -p(-x) \end{aligned}$$

Logo, $p(x) = -p(-x)$, pelo que $p(-x) = -p(x)$. Concluímos assim que V_2 é um espaço vectorial.

Exercício 24 *Seja $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ um vector fixo do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$. Verifique se o conjunto,*

$$F = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Solução

Vejamos se $0 \in F$. Como o vector $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ satisfaz obviamente a equação $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, concluímos que $0 \in F$. Consideremos agora dois vectores $x, y \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha x + \beta y \in F$. Faça-se $v = \alpha x + \beta y$. Queremos mostrar que $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ satisfaz a equação $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$:

$$\begin{aligned} v &= \alpha x + \beta y \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (v_1, v_2, \cdots, v_n) = \alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \beta(y_1, y_2, \cdots, y_n) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) + (\beta y_1, \beta y_2, \cdots, \beta y_n) \end{aligned}$$

Concluímos que $v_i = \alpha x_i + \beta y_i, i = 1, \cdots, n$. Vejamos então se o vector,

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \cdots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

satisfaz a equação $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i v_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\alpha x_i + \beta y_i\right) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \\
& \quad \text{(Porque } x, y \in F\text{)} \\
&= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Concluímos assim que F é um espaço vectorial.

Exercício 25 *Seja* $\mathbf{E}$ *um espaço vectorial real. Sabendo que* E_1 *e* E_2 *são subespaços de* $\mathbf{E}$*, verifique se o conjunto* $F = \{x \in E : x = x_1 - 3x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ *é um subespaço de* $\mathbf{E}$*.*

Solução

Vejamos se $0 \in F$. Como $0 \in E_1$ e $0 \in E_2$ então $0 - 3 \cdot 0 \in F$. Mas $0 - 3 \cdot 0 = 0$, pelo que $0 - 3 \cdot 0 \in F$. Consideremos agora dois vectores $x, y \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha x + \beta y \in F$. Faça-se $z = \alpha x + \beta y$. Queremos mostrar que z se pode escrever na forma $x = z_1 - 3z_2, z_1 \in E_1, z_2 \in E_2$:

$$\begin{aligned}
z &= \alpha x + \beta y \\
& \quad \text{(Porque } x, y \in F,\ \exists_{x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2} \text{ tais que)} \\
&= \alpha \left(x_1 - 3x_2\right) + \beta \left(y_1 - 3y_2\right) \\
&= \alpha x_1 + \beta y_1 - 3 \left(\alpha x_2 + \beta y_2\right) \\
& \quad \left(\begin{array}{l} \text{Mas } E_1 \text{ e } E_2 \text{ são subespaços vectoriais,} \\ \text{logo } \alpha x_1 + \beta y_1 \in E_1 \text{ e } \alpha x_2 + \beta y_2 \in E_2. \end{array}\right) \\
&= z_1 - 3z_2
\end{aligned}$$

... onde $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 \in E_1$ e $z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2 \in E_2$.Concluímos assim que F é um espaço vectorial.

Exercício 26 *Quais dos seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$ *são subespaços de* $\mathbb{R}^3$*?*

i) $W_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 11\right\}$

ii) $W_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = z^2\right\}$

iii) $W_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\right\}$

Solução

i) Vejamos se $0 \in W_1$. Obviamente que não uma vez que $0 + 0 \neq 11$. Concluímos assim que W_1 não é um espaço vectorial.

ii) Vejamos se $0 \in W_2$. Dado que, se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então $x^2 - z^2 = 0^2 - 0^2 = 0$, pelo que a condição $x^2 = z^2$ é verificada e portanto $0 \in W_2$. Consideremos agora dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in W_2$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha u + \beta v \in W_2$. Faça-se $w = \alpha u + \beta v$. Queremos mostrar que $w_1^2 = w_3^2$:

$$\begin{aligned} w &= \alpha u + \beta v \\ &= \alpha (u_1, u_2, u_3) + \beta (v_1, v_2, v_3) \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1^2 - w_3^2 &= (\alpha u_1 + \beta v_1)^2 - (\alpha u_3 + \beta v_3)^2 \\ &= \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 - \alpha^2 u_3^2 - 2\alpha\beta u_3 v_3 - \beta^2 v_3^2 \\ &= \alpha^2 \left(u_1^2 - u_3^2\right) + \beta^2 \left(v_1^2 - v_3^2\right) + 2\alpha\beta (u_1 v_1 - u_3 v_3) \\ & \quad \text{(Porque } u, v \in W_2\text{)} \\ &= 2\alpha\beta (u_1 v_1 - u_3 v_3) \end{aligned}$$

Logo, $w_1^2 - w_3^2 \neq 0$, pelo que $w_1^2 \neq w_3^2$. Concluímos assim que W_2 não é um espaço vectorial.

iii) Vejamos se $0 \in W_3$. Dado que, se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então $x + 2y + z = 0 + 2 \cdot 00 = 0$, pelo que a condição $x + 2y + z = 0$ é verificada e portanto $0 \in W_3$. Consideremos agora dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in W_3$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha u + \beta v \in W_3$. Faça-se $w = \alpha u + \beta v$. Queremos mostrar que $w_1 + 2w_2 + w_3 = 0$:

$$\begin{aligned} w &= \alpha u + \beta v \\ &= \alpha (u_1, u_2, u_3) + \beta (v_1, v_2, v_3) \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + w_3 &= \alpha u_1 + \beta v_1 + 2 (\alpha u_2 + \beta v_2) + (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ &= \alpha (u_1 + 2u_2 + u_3) + \beta (v_1 + 2v_2 + v_3) \\ & \quad \text{(Porque } u, v \in W_2\text{)} \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, $w_1+2w_2+w_3=0$, pelo que concluímos ue W_3 é um espaço vectorial.

1.4 Miscelânea

Exercício 27 *Considere o espaço vectorial P_n sobre $\mathbb{R}$ dos polinómios em* $\mathbf{x}$ *de grau não superior a* $\mathbf{n}$. *Considere o conjunto $P_n^{'}$, subconjunto de P_n, dos polinómios $p(x)$ que verificam a seguinte condição: $p(x)+p(-x)=0$.*

a) Mostre que $P_n^{'}$ é um subespaço de P_n.

b) Determine uma base e a dimensão de $P_n^{'}$.

Solução

a) De um modo geral, para mostrar que S é subespaço de um espaço vectorial V temos de mostrar que:

   i) $0 \in S$.

   ii) $\alpha u + \beta v \in S, \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}, \forall_{u,v\in S}$

   Se $p(x)=0$ ter-se-á $p(-x)=0$ pelo que $p(x)+p(-x)=0$. Logo, $p(x)=0\in P_n^{'}$.

   Consideremos agora dois polinómios $p(x), q(x) \in P_n^{'}$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha p(x)+\beta q(x) \in P_n^{'}$. Como, por hipótese $p(x)=p(-x)$ e $q(x)=q(-x)$, ter-se-á $\alpha p(x)=\alpha p(-x)$ e $\beta q(x)=\beta q(-x)$. Consequentemente, $\alpha p(x)+\beta q(x)=\alpha p(-x)+\beta q(-x)$, o que mostra que $\alpha p(x)+\beta q(x)\in P_n^{'}$.

b) Estudemos os casos em que n é par ou ímpar:

   n par Neste caso, os polinómios $p(x)\in P_n^{'}$ terão a forma:

$$p(x) = 0+\alpha_1\cdot x+0x^2+\alpha_3x^3+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+0x^n$$

   Uma base possível será $\left\{x, x^3, x^5, \cdots, x^{n-1}\right\}$ e a dimensão de $P_n^{'}$ será $\frac{n}{2}$.

   n ímpar Neste caso, os polinómios $p(x)\in P_n^{'}$ terão a forma:

$$p(x) = 0+\alpha_1\cdot x+0x^2+\alpha_3x^3+\cdots+0x^{n-1}+\alpha_nx^n$$

   Uma base possível será $\left\{x, x^3, x^5, \cdots, x^n\right\}$ e a dimensão de $P_n^{'}$ será $\frac{n+1}{2}$.

Exercício 28 *Seja P_n o espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ dos polinómios em* $\mathbf{x}$ *de grau não superior a* $\mathbf{n}$. *Considere o conjunto* $\mathbf{F}$, *dos polinómios dos polinómios $p(x)$ pertencentes a P_n que verificam a seguinte condição: $p(0) = 0$.*

a) Mostre que $\mathbf{F}$ *é um subespaço de P_n.*

b) Determine uma base e a dimensão de $\mathbf{F}$.

Solução

a) Vejamos se $0 \in F$. Se $p(x) = 0$ teremos $p(0) = 0$, pelo que $0 \in F$. Consideremos agora dois polinómios $p(x), q(x) \in F$ e dois escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pretende-se verificar que $\alpha p(x) + \beta q(x) \in F$. Faça-se $s(x) = \alpha p(x) + \beta q(x)$. Queremos mostrar que $s(0) = 0$:

$$\begin{aligned} s(0) &= \alpha p(0) + \beta q(0) \\ &\quad \text{(Porque } p(x), q(x) \in F\text{)} \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $s(0) = 0$. Concluímos assim que F é um espaço vectorial.

b) Consideremos um vector genérico de P_n, digamos $p(x)$, com a seguinte forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Para que se verifique $p(0) = 0$ é necessário que:

$$\begin{gathered} p(0) = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + a_{n-2} 0^{n-2} + \cdots + a_1 0 + a_0 = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow a_0 = 0 \end{gathered}$$

Assim, os polinómios $p(x)$ que satisfazem $p(0) = 0$ terão de ter termo independente nulo. Concluímos que, se $p(x) \in F$, então a forma de $p(x)$ será:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x$$

O subespaço F terá como base o conjunto $\left\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots, x\right\}$ e a sua dimensão será n.

Exercício 29 *Considerem-se os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, 0, 0), \forall_{x_1 \in \mathbb{R}}\right\} \\ F_2 &= \left\{y \in \mathbb{R}^3 : y = (2y_2 + y_3, y_2, y_3), \forall_{y_2, y_3 \in \mathbb{R}}\right\} \end{aligned}$$

Mostre que F_1 *e* F_2 *são subespaços de* $\mathbb{R}^3$*, indicando bases apropriadas e as respectivas dimensões.*

Solução

Exercício 30 *Seja* $M_n(\mathbb{R})$ *o espaço vectorial real das matrizes quadradas de ordem* **n***.*

a) Mostre que o conjunto $H_n = \left\{A \in M_n : A = -A^T\right\}$ *é um subespaço de* M_n *e indique a sua dimensão.*

b) Fazendo $n = 3$*, determine uma base para o espaço* H_3*.*

c) Considere duas matrizes **A** *e* **B** *de* H_n*. A matriz* $A \cdot B$ *é simétrica? Justifique.*

Solução

Exercício 31 *Considere o espaço vectorial* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *uma base desse espaço. Seja* $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ *um vector de*$\mathbb{R}^n$*.*

a) Que condições devem verificar as coordenadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *do vector* **x** *para* $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$ *constituir uma nova base do espaço* $\mathbb{R}^n$*?*

b) Determine a matriz de mudança da antiga para a nova base.

Solução

a) Os vectores $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$ constituirão uma base de $\mathbb{R}^n$ se:

$$\alpha x + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Substituamos x na hipótese e estudemos o resultado:

$$\begin{aligned}
&\alpha x + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i u_i = 0 \Leftrightarrow \\
&\alpha x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha x_i + \alpha_i)\, u_i = 0
\end{aligned}$$

Sabemos que a única combinação linear nula dos vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ é aquela que se obtém com os escalares todos nulos, uma vez que os vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ são linearmente independentes. Assim, deveremos ter:

$$\begin{cases}
\alpha x_1 = 0 \\
\alpha x_2 + \alpha_2 = 0 \\
\cdots \\
\alpha x_n + \alpha_n = 0
\end{cases}$$

O sistema acima, nas variáveis $\{\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ deverá ser possível e determinado de modo a que os vectores $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$ sejam linearmente independentes. Matricialmente, o sistema pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistemaa é sempre possível, por ser um sistem homogéneo. será determinado se $r_A = n$, isto é, se a matriz dos sistema for regular. Por seu turno, a matriz do sistema será regular se o seu determinante for não nulo. Aplicando o Teorema de Laplace à primeira linha obtém-se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

conlcuímos portanto que o determinante da matriz do sistema é não nulo, se $x_1 \neq 0$ e portanto os vectores $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$ serão linearmente independentes se $\boxed{x_1 \neq 0 \wedge x_i \in \mathbb{R}, i = 2, ..., n}$.

b) Comecemos por escrever os vectores da nova base, $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$, na base anterior, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$:

$$\begin{cases} x = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \\ u_2 = u_2 \\ \cdots \\ u_n = u_n \end{cases}$$

Assim, podemos escrever matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

... é a matriz de mudança de base da base $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$ para a base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. Um vector $v \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$ na base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ terá, na base $\{x, u_2, \cdots, u_n\}$ coordenadas $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}^T$ dadas por:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Calculemos B^{-1} por condensação, não esquecendo que $x_1 \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{x_1} L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{L_i \leftarrow L_i + (-x_i)\, L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{x_2}{x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{x_3}{x_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{x_n}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Logo,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{x_3}{x_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{x_n}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 32 *Seja* $\mathbf{V}$ *um espaço vectorial real de dimensão 3 e* x_1*,* x_2*,* x_3 *e* x_4 *elementos distintos de* $\mathbf{V}$*. Adicionalmente assuma que* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *é um sistema de geradores de* $\mathbf{V}$ *satisfazendo a condição:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

a) Mostre que $\{x_1, x_2, x_3\}$ *é uma base de* $\mathbf{V}$*.*

b) Um raciocínio semelhante permite mostrar que $\{x_1, x_3, x_4\}$ *é uma base de* $\mathbf{V}$*. Denotando as duas bases por:*

$$\alpha = \{x_1, x_2, x_3\} \;\; e \; \beta = \{x_1, x_3, x_4\}$$

... determine a matriz de mudança de base da base α *para a base* β*.*

Solução

a) Comecemos por mostrar que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um sistema de geradores de V. Seja então $v \in V$. Sabemos que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tais que, uma vez que, por hipótese, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é um sistema de geradores de V:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = v$$

Dado que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, então:

$$x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$$

Substituindo na expressão de v, obtém-se:

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = v \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 \left(-x_1 - x_2 - x_3\right) = v \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \left(\alpha_1 - \alpha_4\right) x_1 + \left(\alpha_2 - \alpha_4\right) x_2 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) x_3 = v \Longleftrightarrow \end{gathered}$$

Conclui-se assim que é possível escrever o vector v como combinação linear dos vectores $\{x_1, x_2, x_3\}$. Com v é um vector genérico de V, conclui-se que $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um sistema de geradores de V. Adicionalmente, como $\dim(V) = 3$ e $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um sistema de geradores, em número de 3, conclui-se que $\{x_1, x_2, x_3\}$ tem de ser uma base de V.

b) Comecemos por escrever os vectores da nova base, $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$, na base anterior, $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ x_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ x_4 = (-1) \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 \end{cases}$$

Assim, podemos escrever matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

... é a matriz de mudança de base da base $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$ para a base $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$. Um vector $v \in V$ de coordenadas $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T$ na base $\alpha = \{x_1, x_2, x_3\}$ terá, na base $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$ coordenadas $\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}^T$ dadas por:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Calculemos B^{-1}, com recurso à Teoria dos Determinantes:

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

Logo, $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\hat{B} = \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

Exercício 33 *Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de vectores linearmente independentes do espaço vectorial* $\mathbf{V}$ *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *e* $\mathbf{x}$ *um elemento de* $\mathbf{V}$ *não pertencente a* $\mathcal{S}$*. Mostre que* $\mathcal{S} \cup \{x\}$ *é um conjunto de vectores linearmente dependentes se e só se* $\mathbf{x}$ *pertence ao subespaço gerado pelo conjunto* $\mathcal{S}$*.*

Solução

Seja $\mathcal{S} = \{e_1, \cdots, e_p\}$.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{S} \cup \{x\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes. Pretende mostrar-se que x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto $\mathcal{S}$.

Se $\mathcal{S} \cup \{x\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes então é possível escrever uma combinação nula destes vectores com pelo menos um escalar não nulo, isto é:

$$\exists_{\alpha_i \in \mathbb{K}} : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} x = 0$$

Suponhamos que $\alpha_{p+1} = 0$. Então é possível escrever uma combinação linear nula dos vectores de $\mathcal{S}$ com pelo menos um escalar não nulo. Consequentemente, os vectores de $\mathcal{S}$ serão, por definição, linearmente dependentes, o que é um absurdo. Logo, $\alpha_{p+1} \neq 0$. Sendo assim, poderemos escrever:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} x = 0 \Longleftrightarrow \\
&x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{p+1}} e_2 - \cdots - \frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}} e_p
\end{aligned}$$

A expressão anterior mostra que x pode ser escrito como combinação linear dos vectores de $\mathcal{S}$, ou, por outras palavras, x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto $\mathcal{S}$.

($\Longleftarrow$) Suponhmos que x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto $\mathcal{S}$. Pretende mostrar-se que $\mathcal{S} \cup \{x\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes.

Se x pertence ao subespaço gerado pelo conjunto $\mathcal{S}$, então x pode ser escrito como combinação linear dos vectores de $\mathcal{S}$:

$$\exists_{\alpha_i \in \mathbb{K}} : x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_p e_p$$

Reorganizando os termos da expressão anterior obtemos:

$$\exists_{\alpha_i \in \mathbb{K}} : x - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_p e_p = 0$$

Obtivemos assim uma combinação linear nula dos vectores do conjunto $\mathcal{S} \cup \{x\}$ com pelo menos um escalar não nulo (precisamente o escalar do vector x que é 1). Então os vectores do conjunto $\mathcal{S} \cup \{x\}$ são linearmente dependentes.

Exercício 34 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz real de ordem* $\mathbf{n}$. *Mostre que a dimensão do subespaço gerado por* $\left\{I, A, A^2, A^3, \cdots\right\}$ *é inferior ou igual a* $\mathbf{n}$.

Solução

Exercício 35 *Se* $\mathbf{V}$ *é um espaço vectorial real de dimensão finita e* $\beta = \{x_1, \cdots, x_m\}$ *uma base de* $\mathbf{V}$, *diga o que entende por coordenadas de um vector* $x \in V$ *relativamente à base* β. *Indique ainda por que razão estas coordenadas se encontram definidas univocamente.*

Solução

Exercício 36 *Verifique se o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}^4$ *é um subespaço de* $\mathbb{R}^4$*?*

$$W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + y = 0, x + y + z = w\right\}$$

Solução

Exercício 37 *Verifique se o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}^3$ *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$*?*

$$W = \{(r, r + 2, 0) : r \in \mathbb{R}\}$$

Solução

Exercício 38 *Determine o escalar* $\mathbf{k}$ *de modo a que os vectores com as seguintes coordenadas sejam linearmente independentes?*

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

Solução

Exercício 39 *Determine o escalar* $\boldsymbol{\lambda}$ *de modo a que os seguintes vectores sejam linearmente independentes?*

$$x_1 = (\lambda, -1, -1) \,; x_2 = (-1, \lambda, -1) \,; x_3 = (-1, -1, \lambda)$$

Solução
Pretende-se portanto determinar os valores de λ tais que:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\begin{gathered}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \alpha_1 (\lambda, -1, -1) + \alpha_2 (-1, \lambda, -1) + \alpha_3 (-1, -1, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow \\ (\alpha_1 \lambda - \alpha_2 - \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 \lambda - \alpha_3, -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \lambda) = 0\end{gathered}$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0$$

Vejamos quais as condições sobre λ para que o sistema seja possível e determinado. É esta a única solução que nos interessa, pois significa que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ é a única solução do sistema fazendo, consequentemente, com que os vectores dados sejam linearmente independentes. O sistema é possível se a caracterísitca da matriz do sistema é igual à ordem, isto é, se a matriz do sistema é regular.

A regularidade da matriz pode ser determinada através do cálculo do seu determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= 0 = \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (-1) L_3 \end{pmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1-\lambda & -1+\lambda^2 \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= (\text{Teorema de Laplace à } 1^a \text{ coluna}) \\ (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1+\lambda^2 \\ \lambda+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (-1)\left[(1+\lambda)^2 - (1+\lambda)\left(-1+\lambda^2\right)\right] \\ &= (-1)(1+\lambda)\left[1+\lambda+1-\lambda^2\right] \end{aligned}$$

Concluímos assim que o determinante da matriz do sistema será nulo se $(1+\lambda)\left[1+\lambda+1-\lambda^2\right] = 0$. A solução é $\lambda = 2 \vee \lambda = -1$. Deste modo, de modo a que o sistema tenha solução determinada é necessário que $\lambda \neq 2 \wedge \lambda \neq -1$. Esta é também a condição sobre λ para que os vectores $\{x_1, x_2, x_3\}$sejam linearmente independentes.

Exercício 40 *Seja* $\mathbf{W}$ *o subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *gerado pelos vectores?*

$$x_1 = (1, -2, 0, 3)\,;\; x_2 = (2, -5, -3, 6)\,;\; x_3 = (2, -1, 4, 7)$$

Verifique se o vector $v = (1, -2, 0, 3)$ *pertence a* $\mathbf{W}$.

Solução
Pretende-se determinar, se existir, um conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ tais que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v$.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \alpha_1 (1, -2, 0, 3) + \alpha_2 (2, -5, -3, 6) + \alpha_3 (2, -1, 4, 7) = (1, -2, 0, 3) \Longleftrightarrow$$
$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, -2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3, -3\alpha_2 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 7\alpha_3) = (1, -2, 0, 3)$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Em geral, dever-se-á estudar o sistema de equações acima: se for possível, conclui-se que $v \in W$, caso contrário v não pertence ao espaço gerado pelos vectores dados.

Neste caso em particular, tem-se $v = x_1$,pelo que, se fizermos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ teremos $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = v$ e portanto $v \in W$.

Exercício 41 *Dê uma caracterização do subespaço* $W \subset E$ *gerado pelos vectores com as seguintes coordenadas:*

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \; x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solução
Vamos construir uma matriz cujas linhas são os transpostos dos vectores dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por operações elementares sobre linhas podemos transformar a matriz A numa matriz $A\prime$. Concluímos que as linhas de $A\prime$ se podem escrever como combinação linear das linhas de A. Consequentemente, as linhas de A podem ser escritas como combinação linear das linhas de $A\prime$ o que significa que os vectores associados às linhas de A geram o mesmo subespaço que os vectores associados às linhas de $A\prime$. condensemos então a matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)\, L_1}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix} \underrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-2)\, L_1}$$

Esta operação elementar é suficiente para verificar que W tem dimensão 2 e tem como base os vectores x_1 e x_2 dados ou, de modo equivalente os vectores obtidos por aplicação da operação elementar e que são dados por:

$$x_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} ; x_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Em resumo, v pertence ao subespaço gerado por $\{x_1, x_2\}$ se e só pertence ao subespaço gerado por $\{x_1', x_2'\}$.

Exercício 42 *Qual a dimensão do subespaço de* $\mathbb{R}^5$ *gerado pelos vectores:*

$$\begin{aligned} x_1 &= (2,-1,3,5,-2)\,; x_2 = (2,-1,3,5,-2)\,; \\ x_3 &= (5,-3,8,4,1)\,; x_4 = (1,0,1,11,7) \end{aligned}$$

<u>*Solução*</u>

Exercício 43 *Determine uma base de* $\mathbb{R}^3$ *contendo os vectores* $\{(1,2,5)\,, (0,1,2)\}$.

<u>*Solução*</u>
Necessitamos de encontrar um vector (a, b, c) tal que:

$$(a,b,c) \neq \alpha_1 (1,2,5) + \alpha_2 (0,1,2)\,, \forall_{\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}}$$

Porquê? Porque $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ e os vectores $\{(1,2,5)\,,(0,1,2)\}$ já são linearmente independentes. Se encontrarmos um terceiro vector, (a, b, c), que não possa ser escrito como combinação linear dos vectores $\{(1,2,5),(0,1,2)\}$ determinamos um sistema de vectores $\{(1,2,5),(0,1,2),(a,b,c)\}$ linearmente independentes. Como são em número de 3, constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos então a equação:

$$\alpha_1(1,2,5)+\alpha_2(0,1,2)=(a,b,c) \iff$$
$$\iff (\alpha_1, 2\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_1+2\alpha_2)=(a,b,c)$$

Esta expressão é equivalente, matricialmente, ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Pretende-se obviamente, que o sistema seja impossível. Estudemos a sua matriz ampliada:

$$\begin{aligned} [A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 5 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+(-5)L_1]{L_2 \leftarrow L_2+(-2)L_1} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 2 & c-5a \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3+(-1)L_2} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & c-2b-a \end{array}\right] \end{aligned}$$

O sistema é impossível se $r_A \neq r_{A|B}$. Como $r_A = 2$ pretende-se que $r_{A|B} = 3$. Para que tal aconteca é necessário que $c-2b-a \neq 0$. Existem muitos vectores (a,b,c) nestas circunstâncias, por exemplo, $a=1$ e $b=c=0$. O vector que procuramos é portanto $(a,b,c)=(1,0,0)$.

Exercício 44 *Determine as coordenadas do vector* $(3,2,1)$ *na base* $\{(1,0,2),(2,1,0),(0,3,5)\}$ *em* $\mathbb{R}^3$.

<u>*Solução*</u>
Pretende-se determinar escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\beta_1(1,0,2)+\beta_2(2,1,0)+\beta_3(0,3,5)=(3,2,1) \iff$$
$$\iff (\beta_1+2\beta_2, \beta_2+3\beta_3, 2\beta_1+5\beta_3)=(3,2,1)$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1, β_2 e β_3 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \\ \beta_2 + 3\beta_3 = 2 \\ 2\beta_1 + 5\beta_3 = 1 \end{cases}$$

A solução deste sistema fornecerá as coordenadas pretendidas. Sabemos que o sistema será possível e determinado uma vez que um vector se escreve de forma unica numa certa base. Construamos a matriz ampliada do sistema e resolvâ-mo-lo por condensação:

$$\begin{aligned}
[A|\,B] \quad = \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-2)\,L_1} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8} L_3} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + (-3)\,L_3} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-2)\,L_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

A solução do sistema será portanto $\beta_1 = -\frac{15}{4}$, $\beta_2 = \frac{27}{8}$ e $\beta_3 = -\frac{3}{8}$. Concluímos assim que:

$$\left(-\frac{15}{4}\right)(1,0,2) + \frac{27}{8}(2,1,0) + \left(-\frac{3}{8}\right)(0,3,5) = (3,2,1)$$

Exercício 45 *Mostre que as soluções do sistema de equações lineares com coeficientes reais,*

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

... constituem um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Indique uma base e a dimensão deste subespaço.

<u>*Solução*</u>

Exercício 46 *Determine, para cada valor do escalar $m \in \mathbb{R}$, o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que constitui solução do seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} 3x + 2y + mz = 0 \\ mx - y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

<u>*Solução*</u>

Exercício 47 *Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, uma base $\alpha = \{(1,0,1), (0,2,0), (1,2,3)\}$ e uma base $\alpha = \{(1,0,0), (2,0,1), (0,0,3)\}$. As coordenadas de um vector $v \in \mathbb{R}^3$ na base α são $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, enquanto que na base β são dadas por $\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}^T$. Descreva matricialmente a relação entre estes dois sistemas de coordenadas.*

<u>*Solução*</u>

Exercício 48 *Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$:*

$$a_1 = (1,5,9)\,;\, a_2 = (2,6,10) \;\; e\; b = (4,8,12)$$

*a) Verifique se **b** pertence ao espaço gerado pelos vectores $\{a_1, a_2\}$.*

b) Verifique se $\{a_1, a_2\}$ pode gerar o espaço $\mathbb{R}^3$.

c) Verifique se o conjunto de vectores $\{a_1, a_2, b\}$ é linearmente independente.

<u>*Solução*</u>

a) É necessário verificar se existem escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{gathered}\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = b \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \beta_1 (1,5,9) + \beta_2 (2,6,10) = (4,8,12) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (\beta_1 + 2\beta_2, 5\beta_1 + 6\beta_2, 9\beta_1 + 10\beta_2) = (4,8,12)\end{gathered}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1 e β_2 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 4 \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 = 8 \\ 9\beta_1 + 10\beta_2 = 12 \end{cases}$$

Se este sistema for possível, então b pertence ao espaço gerado pelos vectores $\{a_1, a_2\}$, caso contrário, a resposta é negativa. Construamos a matriz ampliada e reolvâ-mo-lo por condensação:

$$\begin{aligned}[A|\,B] \quad &= \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-9)\,L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-5)\,L_1} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -8 & -24 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-2)\,L_2} \\ &\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{aligned}$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2$, o sistema é possível e determinado, logo o vector b pertence ao espaço gerado pelos vectores $\{a_1, a_2\}$ uma vez que pode ser escrito como combinação linear destes últimos.

b) A resposta é imediatamente negativa, uma vez que $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Tal significa que um sistema de geradores de $\mathbb{R}^3$ deverá ter, no mínimo, 3 vectores, o que não é o caso. Poderemos no entanto recorrer à definição e verificar que, dado um vector genérico de $\mathbb{R}^3$, digamos (x, y, z), ne sempre é possível escrever (x, y, z) como combinação dos vectores $\{a_1, a_2\}$.

Verifiquemos assim, se existem escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{gathered}\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = (x,y,z) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \beta_1 (1,5,9) + \beta_2 (2,6,10) = (x,y,z) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (\beta_1 + 2\beta_2, 5\beta_1 + 6\beta_2, 9\beta_1 + 10\beta_2) = (x,y,z)\end{gathered}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1 e β_2 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = x \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 = y \\ 9\beta_1 + 10\beta_2 = z \end{cases}$$

Se este sistema for possível para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então os vectores $\{a_1, a_2\}$ serão geradores de $\mathbb{R}^3$,caso contrário, a resposta é negativa. Construamos a matriz ampliada e reolvâ-mo-lo por condensação:

$$\begin{aligned} [A|\,B] \quad = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 5 & 6 & y \\ 9 & 10 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-9)\,L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-5)\,L_1} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -4 & y-5x \\ 0 & -8 & z-9x \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-2)\,L_2} \\ & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & z-2y+x \end{array}\right] \end{aligned}$$

Assim, o sistema será possível se z-2y+x=0. Qualquer vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que não satisfaça esta condição não pode ser escrito como combinação linear dos vectores $\{a_1, a_2\}$. Concluímos assim que $\{a_1, a_2\}$ não são suficientes para gerar o espaço $\mathbb{R}^3$.

c) Tipicamente, construímos uma combinação linear nula destes vectores e verificamos se é satisfeita apenas com os escalares nulos. Se a resposta for afirmativa os vectores são linearmente independentes, caso contrário serão lineramente dependentes.

$$\begin{gathered} \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 b = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \beta_1\,(1,5,9) + \beta_2\,(2,6,10) + \beta_3\,(4,8,12) = 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3, 5\beta_1 + 6\beta_2 + 8\beta_3, 9\beta_1 + 10\beta_2 + 12\beta_3) = (4,8,12) \end{gathered}$$

A última igualdade é equivalente ao seguinte sistema de 3 equações nas variáveis β_1, β_2 e β_3 em que a matriz do sistema é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 0 \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 + 8\beta_3 = 0 \\ 9\beta_1 + 10\beta_2 + 12\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Se o sistema for determinado (possível é sempre, por ser homogéneo), a única solução será $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados serão linearmente independentes. Pretende-se portanto que o sistema seja determinado, isto é $r_A = 3$.

Construamos a matriz ampliada do sistema e estudamos a respectiva característca:

$$\begin{aligned} [A|\,B] \quad = & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + (-9)\,L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + (-5)\,L_1} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & -24 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (-2)\,L_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Dado que $r_A = r_{A|B} = 2 < 3$, o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $d = n - r_A = 3 - 2 = 1$, o que significa que existem outras soluções para o sistema que não a solução $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pelo que os vectores dados são linearmente dependentes.