4. Capacidade e Dieléctricos

4.1. Definição de Capacidade.

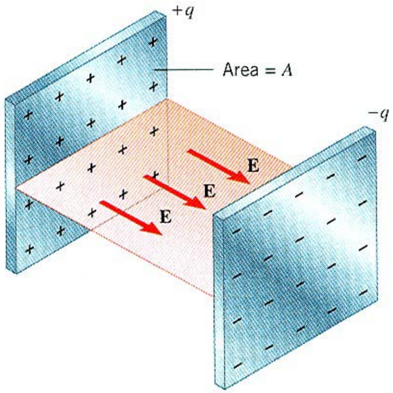
4.2. Cálculo de Capacidades.

4.3. Combinações de Condensadores.

- Ligação em Paralelo
- Ligação em Série

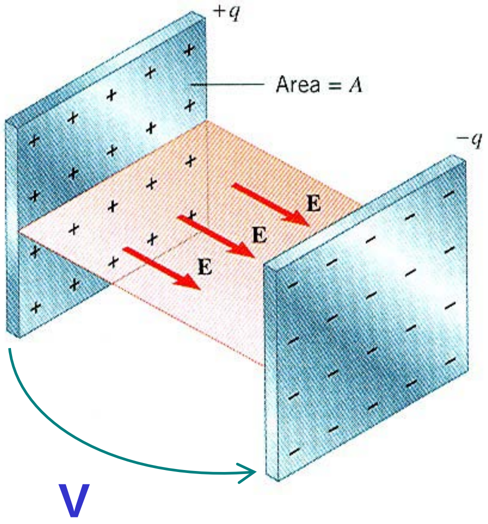
4.4. Energia de um Condensador Carregado.

4.5. Condensadores com Dieléctricos.



- Propriedades dos **condensadores**: dispositivos que armazenam cargas eléctricas.
- Usadas em circuitos eléctricos: para sintonizar a frequência dos receptores de rádio; como filtros, nas fontes de potência; armazenadores de energia nas unidades de flash electrónico...
- O condensador é constituído, essencialmente, por dois condutores separados por um isolador.
- A capacidade de um condensador depende da sua forma geométrica e da natureza do material que separa os condutores carregados, o dieléctrico.

4.1. Definição de Capacidade



Dois condutores com uma **diferença de potencial V** entre eles; cargas iguais e opostas (consegue-se ligando os condutores aos terminais duma bateria) $\rightarrow$ Essa combinação de condutores chama-se ***condensador***.

A capacidade, ***C***, dum condensador é:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Q: módulo da carga em qualquer dos dois condutores.

V: módulo da diferença de potencial entre os condutores.

→ **Capacidade** é sempre uma grandeza positiva.

→ ***C=Q/V*** é constante para um dado condensador.

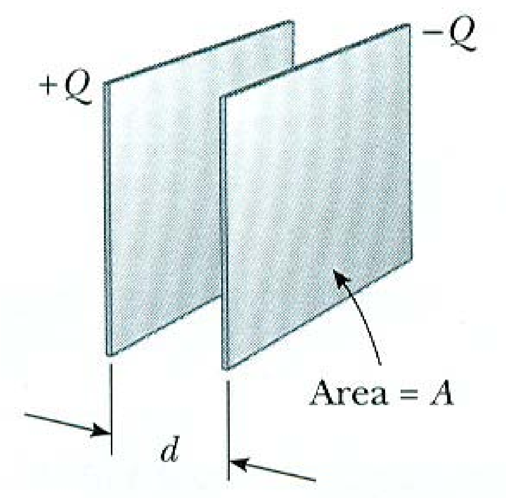
→ A capacidade dum dispositivo é uma medida da capacidade que o dispositivo possui em armazenar carga e energia potencial eléctrica.

(SI) $$\boxed{[capacidade] = 1F = 1\,\frac{C}{V}}$$ ← Farad (F)

→ Condensadores típicos 1μF – 1pF

4.2. Cálculos de Capacidades

- Admite-se que uma **carga *Q*** de grandeza conveniente, esteja nos condutores.
- Calcula-se **V** entre eles
- **C= *Q*/V**
- Cálculo relativamente fácil quando a geometria do condensador é simples: placas planas paralelas, dois cilindros coaxiais, ou duas esferas concêntricas.
- Condensador de placas planas paralelas:



- Duas placas planas, paralelas, da mesma área ***A***, separadas da distância ***d***
- Uma placa **+*Q***, outra **–*Q***
- **σ = *Q*/A**

Condensador de placas paralelas

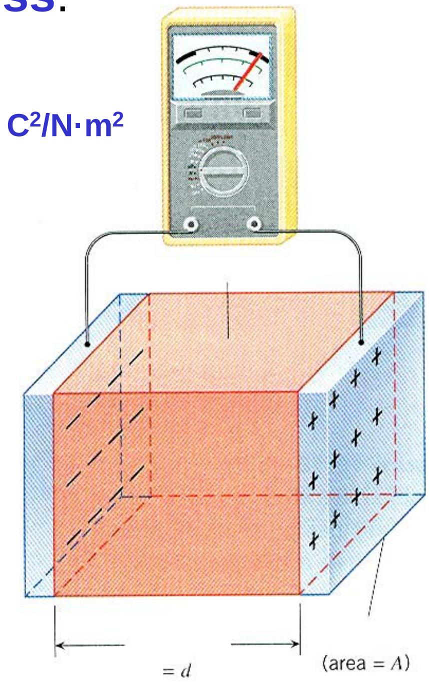
- Placas muito juntas (em comparação com o comprimento e a largura das placas) $\Rightarrow$ podemos desprezar os efeitos das extremidades e admitir: campo eléctrico uniforme entre as placas, sendo nulo em todos os outros pontos do espaço. Pela **Lei de Gauss**:

$$EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

ε_0 = 8,85×10^{-12} C^2/N·m^2

$$V = |E| d = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 A}\right)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$



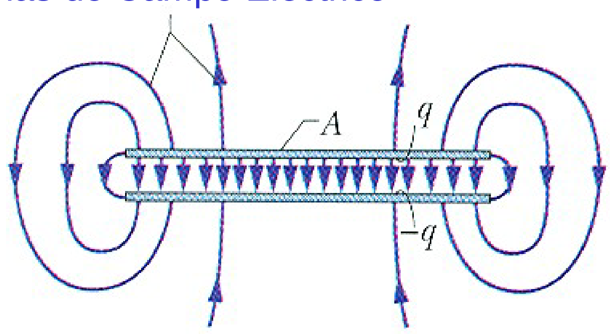
→ A capacidade de um condensador de placas planas e paralelas é proporcional à área das placas e inversamente proporcional à separação entre as placas.

$C = \frac{Q}{V}$ $\Rightarrow$ a **quantidade de carga (Q)** que um condensador pode armazenar, para uma dada ***V***, aumenta quando ***C*** aumenta $\Rightarrow$

Uma grande área ***A*** $\rightarrow$ capaz de armazenar uma grande carga.

A quantidade de ***Q*** necessária para provocar uma dada ***V*** aumenta com a diminuição da distância entre as placas, ***d***

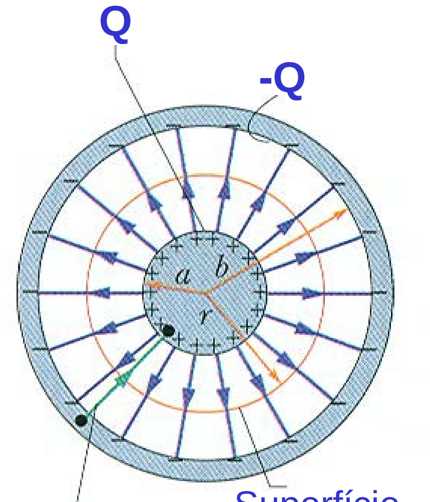
Linhas do Campo Eléctrico



- Campo uniforme na região central.
- Campo não uniforme nas extremidades das placas.

Condensador esférico

- Considere-se um condensador constituído por duas cascas esféricas concêntrica, de raios **a** e **b**. Como superfície Gaussiana desenha-se uma esfera de raio **r**, concêntrica com ambas as cascas. Pela Lei de Gauss:



$$E \cdot A = \frac{|Q|}{\varepsilon_0} \Rightarrow |Q| = \varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2$$

- **$4\pi r^2$** é a área de uma superfície Gaussiana esférica. Nestas condições, o campo eléctrico para uma distribuição esférica é: $E = k \cdot \frac{|Q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q|}{r^2}$

- Para o potencial temos:

$$\Delta V = -\int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\bigg|_a^b = -\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

Capacidade $\Rightarrow$ $$c = \frac{|Q|}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a}$$

Condensador esférico infinito

- Capacidade de um condutor esférico, isolado, de raio R e carga *Q*.

  O segundo condutor é uma esfera concêntrica , oca, com raio = ∞

Potencial no condutor esférico: $V = k\dfrac{Q}{R} \qquad (V = 0,\ no\ \infty) \Rightarrow$

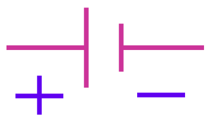
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\left(k\dfrac{Q}{R}\right)} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

- **C** $\propto$ ***R***
- **C** é independente do ***Q*** e ***V***

Se R = 0.15 m $\Rightarrow$ C = $4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}15 = 17$ pF

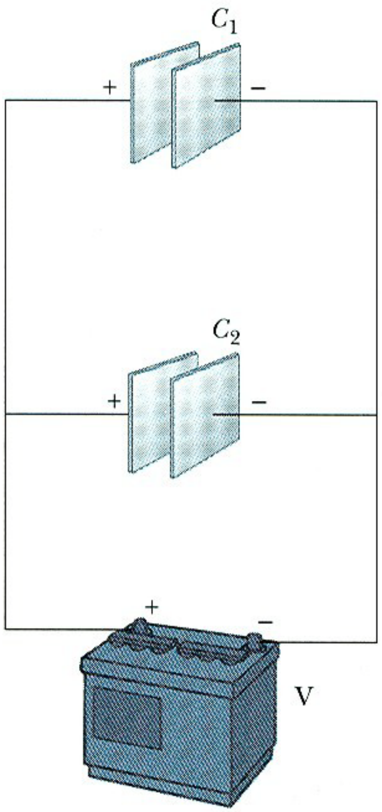
4.3. Combinações de Condensadores

- Cálculo da capacidade equivalente de certas combinações de condensadores nos circuitos.

	Símbolo do condensador
	Símbolo da bateria (terminal (+): potencial mais elevado)

Ligação de condensadores em Paralelo

- As placas da esquerda ligam-se ao terminal (+) da bateria, estando, por isso, ao mesmo V.
- As placas da direita estão ligadas ao terminal (-) da bateria, ao mesmo V.
- Ligação do condensador ao circuito $\Rightarrow$ transferência de electrões através da bateria, das placas da esquerda (+) para as da direita (-).
- A fonte de energia, para essa transferência de carga, é a energia química interna, armazenada na bateria, que se converte em energia eléctrica.
- O fluxo de carga cessa quando V entre as placas do condensador for igual a V aos terminais da bateria.



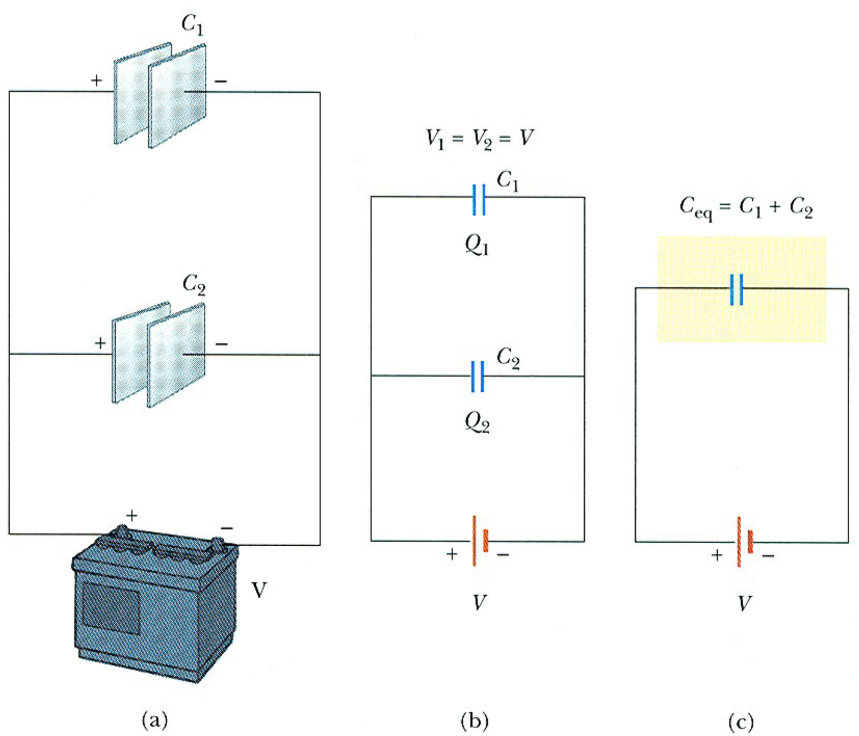
$V_1 = V_2 = V$

$$C = \frac{Q}{V}$$

Q_1 e Q_2 cargas máximas nos dois condensadores.

Carga total, Q, armazenada nos dois condensadores: $Q = Q_1 + Q_2$

- Se quisermos substituir $C1$ e $C2$ por um único C_{eq}, cuja **capacidade seja equivalente** $\Rightarrow$ esse condensador deve exercer o mesmo efeito externo que os dois condensadores iniciais: deve armazenar Q unidades de carga.



- A diferença de potencial, em cada ***C***, num circuito em paralelo, é igual em ambos e igual à voltagem da bateria, ***V***.

- A voltagem no C_{eq} é também ***V***.

$\Rightarrow$ $Q_1 = C_1.V$; $Q_2 = C_2.V$

$Q = C_{eq}.V$

$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow C_{eq}.\cancel{V} = C_1.\cancel{V} + C_2.\cancel{V}$

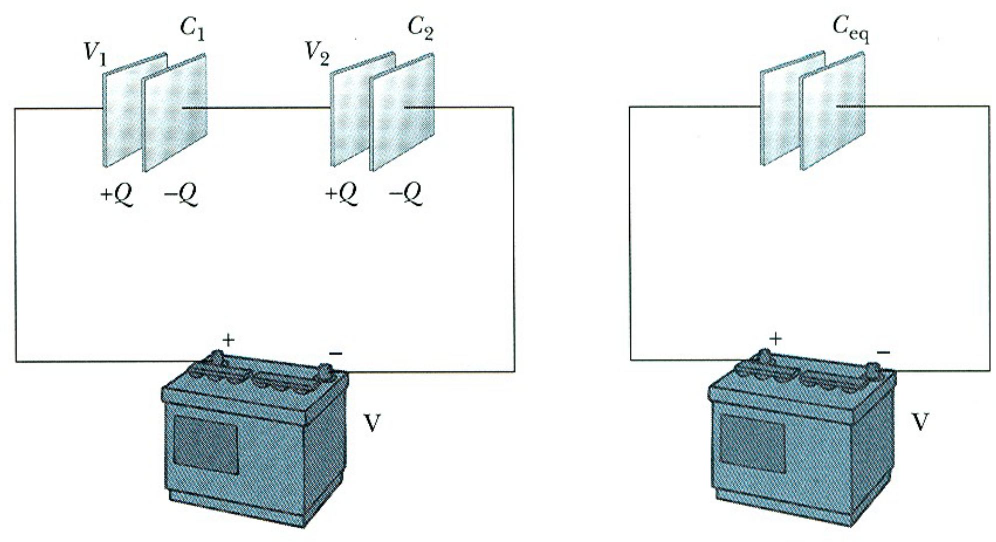
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

Generalizando: $$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots}$$ **Ligação em paralelo**

! A capacidade equivalente duma ***ligação de condensadores em paralelo*** é maior que a capacidade de qualquer dos condensadores.

Ligação de condensadores em Série



(a) (b)

- Na ligação dos **condensadores em série**, a carga deve ser a mesma em todas as placas.
- Quando a bateria é ligada, há transferência de electrões da placa esquerda (+) de C_1 para placa direita (-) de C_2.
- À medida que essa carga negativa se acumula na placa direita de C_2, uma quantidade equivalente de carga negativa é forçada a sair da placa da esquerda de C_2, que fica com um excesso de carga (+)

- A carga negativa que sai de C_2 acumula-se na placa da direita de C_1, e uma quantidade correspondente de carga negativa sai da placa da esquerda de C_1.
- Todas as placas da direita ganham uma carga (–*Q*); todas as placas da esquerda ganham uma carga (+*Q*)
- Suponhamos um condensador equivalente (**C_{eq}**) que tenha a mesma função que os condensadores ligados em série $\Rightarrow$ depois de carregado, C_{eq} deve ter (-*Q*) na sua placa direita e (+*Q*) na placa esquerda.

$$\boxed{V = \frac{Q}{C_{eq}}}$$

(V entre os terminais da bateria)

Pela figura da ligação em série, vemos que:

$V = V_1 + V_2$ (V_1 e V_2: diferenças de potencial em C_1 e C_2)

A diferença de potencial num conjunto de condensadores em série é igual à soma das diferencias de potencial em cada condensador.

$Q = C \cdot V$ em cada condensador $\Rightarrow V_1 = \dfrac{Q}{C_1}$; $V_2 = \dfrac{Q}{C_2}$

$$V = V_1 + V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{Q}}{C_{eq}} = \frac{\cancel{Q}}{C_1} + \frac{\cancel{Q}}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

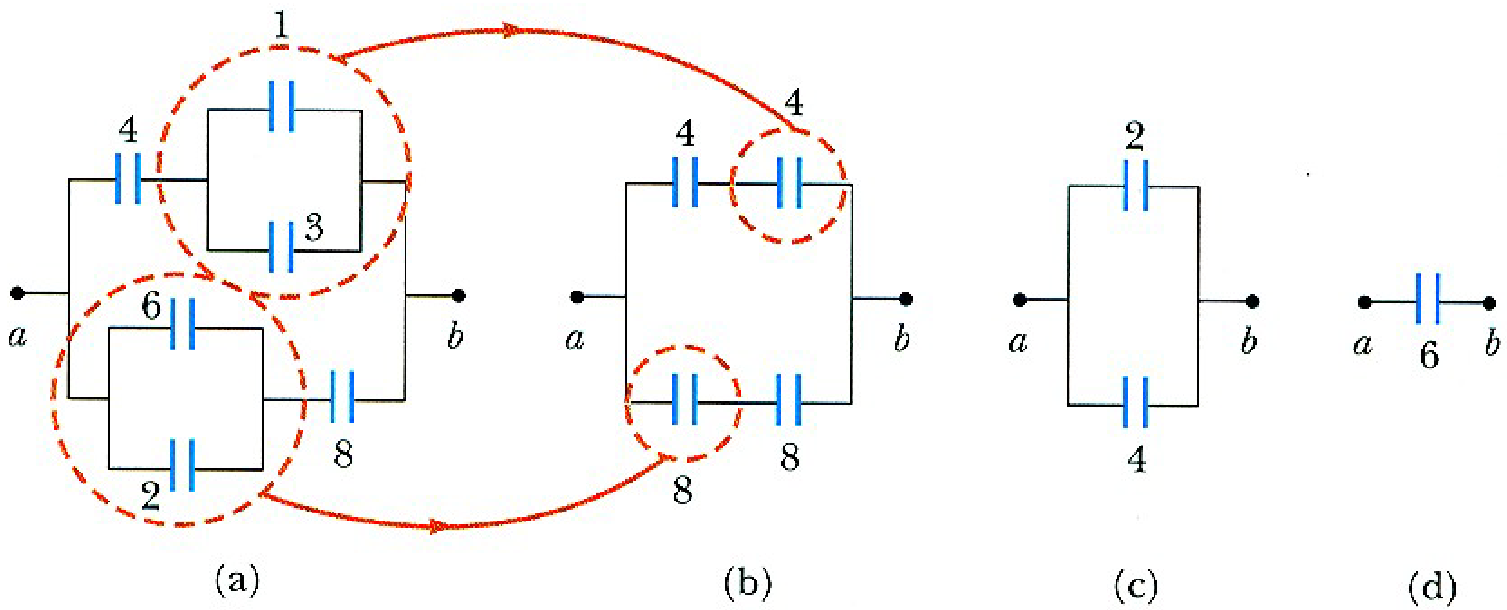
Ligação em Série

Generalizando: $$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots}$$ **Ligação em série**

! A capacidade equivalente duma ***ligação em série de condensadores*** é sempre menor que a capacidade de cada condensador isolado.

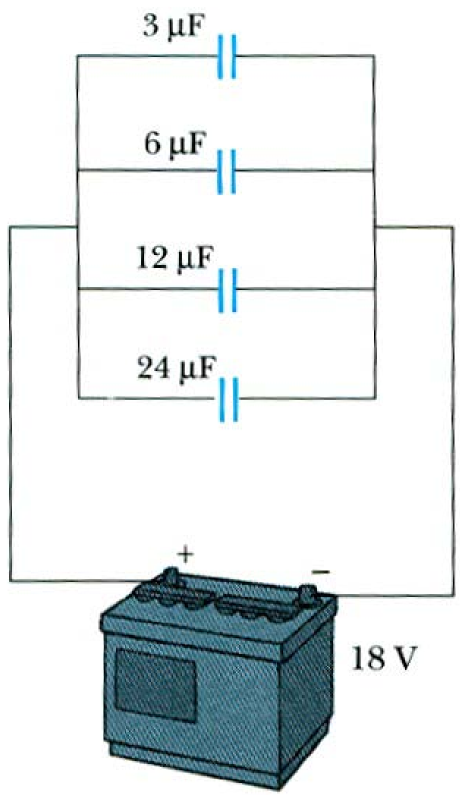
Exemplo:

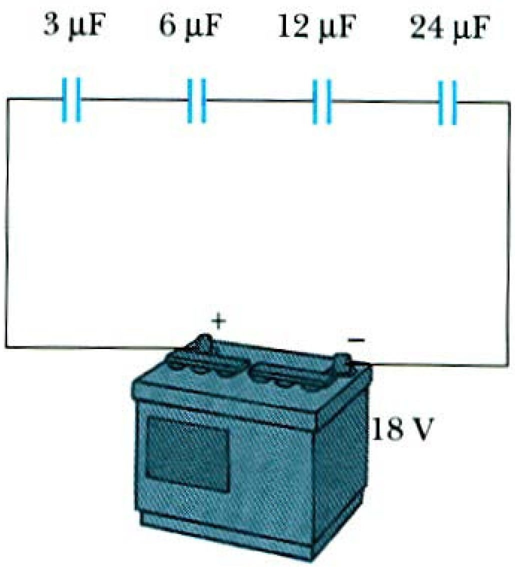
Determinação da capacidade equivalente do seguinte circuito:



Exercício 1:

Determine a capacidade equivalente da associação de condensadores das figuras **a)** e **b)** bem como a carga no condensador de 12 μF.



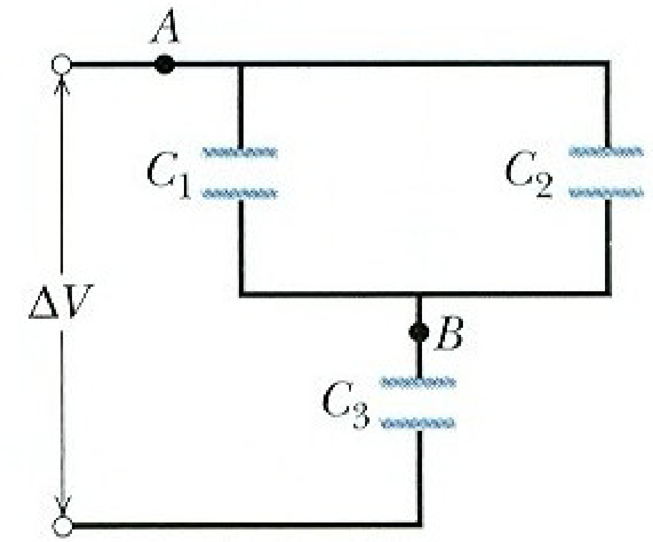


(a) **R:** C_{eq}=45 μF; q(12μF)= 216 μC

(b) **R:** C_{eq}=1,6 μF; q(12μF)= 29 μC

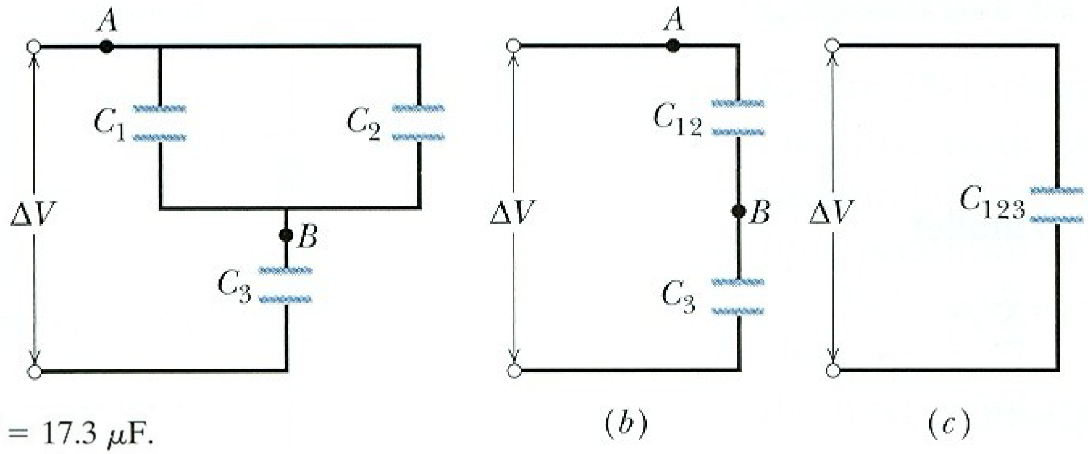
Exercício 2:

Encontre a capacidade equivalente, e a carga no condensador C_1 para a combinação de condensadores da figura ao lado ligados a uma bateria com ΔV=12,5 V, tendo em conta que:



C_1= 12 μF, C_2=5,3 μF e C_3= 4,5 μF

Exercício 2: resolução



$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0\ \mu\text{F} + 5.30\ \mu\text{F} = 17.3\ \mu\text{F}.$$

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17.3\ \mu\text{F}} + \frac{1}{4.50\ \mu\text{F}}$$

$$C_{123} = \frac{1}{0.280\ \mu\text{F}^{-1}} = 3.57\ \mu\text{F}.$$

$$|q_{123}| = C_{123}|\Delta V| = (3.57\ \mu\text{F})(12.5\ \text{V}) = 44.6\ \mu\text{C}$$ $\Rightarrow$ Carga total do circuito

$$|\Delta V_{12}| = \frac{|q_{12}|}{C_{12}} = \frac{44.6\ \mu\text{C}}{17.3\ \mu\text{F}} = 2.58\ \text{V}$$ ($Q_{12}=Q_3$)

$$|q_1| = C_1|\Delta V_1| = (12.0\ \mu\text{F})(2.58\ \text{V}) = 31.0\ \mu\text{C}.$$ ($\Delta V_{12}= \Delta V_1$)

4.4. Energia num Condensador Carregado

- Um condensador pode armazenar **energia**.
- Suponhamos que ***q*** seja a carga no condensador, num determinado instante, durante o processo de carregamento.

No mesmo instante $V = \dfrac{q}{C}$ no condensador.

O **trabalho** necessário para transferir ***dq***, da placa (–q) para a placa (+q) (potencial mais elevado) é:

$$|dW| = |\Delta V| \cdot |dq| = \frac{q}{C} dq$$

Trabalho total para carregar *C* de q = 0 até certa carga final *q* = *Q*:

$$\boxed{|W| = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}}$$

O **trabalho** (***W***) efectuado no processo de carga do condensador (***C)*** pode ser considerado como uma transferência de **energia potencial** (***U)*** para ***C***.

Dado que $Q = C \cdot V \Rightarrow$

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$$

Energia potencial electrostática num condensador carregado.

→ Aplica-se a qualquer ***C***, independentemente da geometria.

→ ***U*** aumenta com ***C*** e ***V***

→ Na prática, há um valor limite para a energia máxima (ou a $\boldsymbol{Q_{max}}$) que pode ser armazenada: há uma descarga eléctrica entre as placas do **C** para um determinado valor elevado de V ($\Rightarrow \exists$ $\boldsymbol{V_{max}}$ de operação).

A energia num *C* pode ser considerada como a energia no $\vec{E}$ criado entre as placas do *C*, no processo de carga: $\left(\vec{E} \propto Q\right)$

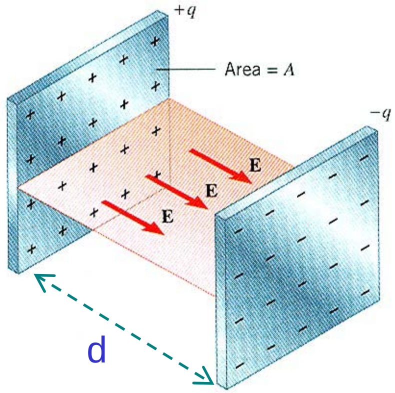
- **Condensador de placas paralelas**

$$\left.\begin{aligned} V &= |E|d \\ C &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\left(E^2 d^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0 A d\right)E^2}$$

Volume ocupado pelo $\vec{E}$: ***A·d*** $\Rightarrow$

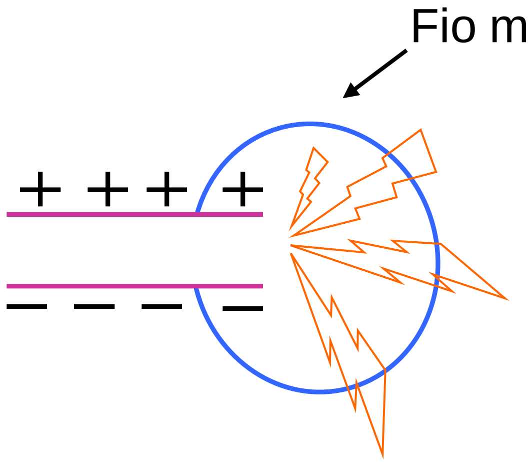
A energia por unidade de volume é $u = U/(A \cdot d)$ ou seja, a **densidade de energia** é:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$



Deduzida para um condensador de placas paralelas. $\Rightarrow$ a expressão é, em geral, válida para outros casos.

A **densidade de energia** num campo electrostático qualquer é proporcional em cada ponto ao quadrado da intensidade do campo eléctrico nesse ponto.



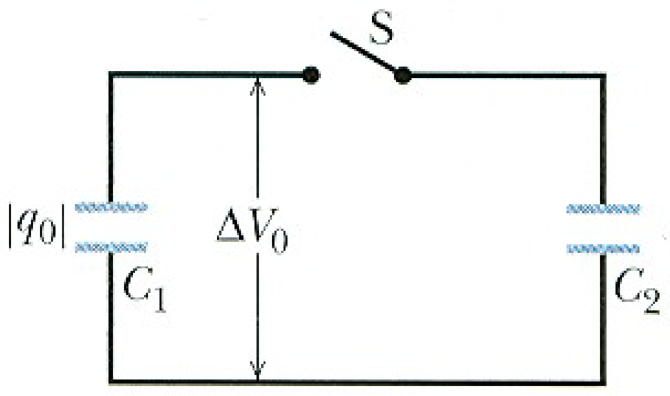
⇒ A descarga pode ser observada, muitas vezes como uma centelha (faísca).

⇒ Tocando acidentalmente nas placas opostas dum C carregado, os dedos funcionam como condutores causando um choque eléctrico.

- **Intensidade do choque depende da capacidade do *C* e da *V* aplicada.**
  ! O choque pode ser fatal no caso de V muito elevado como na fonte de potência dum aparelho de TV

Exercício 3:

O condensador **C_1** com uma capacidade de **3,55 μF** é carregado através de uma bateria com uma diferença de potencial de **ΔV=6,3 V**. Posteriormente retira-se a bateria e liga-se esse condensador num circuito conforme a figura ao lado, onde se encontra um condensador **C_2**, inicialmente descarregado, com uma capacidade de **8,95 μF**. Quando o interruptor **S** é fechado, a carga flúi através do circuito até terem a mesma diferença de potencial **ΔV_o** (paralelo).



Calcule:

a) a energia que foi inicialmente armazenada em C_1, antes de se montar o circuito;

b) ΔV_o após ligar o interruptor S;

c) a energia total armazenada em ambos os condensadores após serem ligados?

Exercício 3: resolução

$a)$

$$U_1 = \tfrac{1}{2} C_1 (\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 3,55 \times 10^{-6} \cdot 6,3^2 = 70,4\ \mu J$$

$b)$

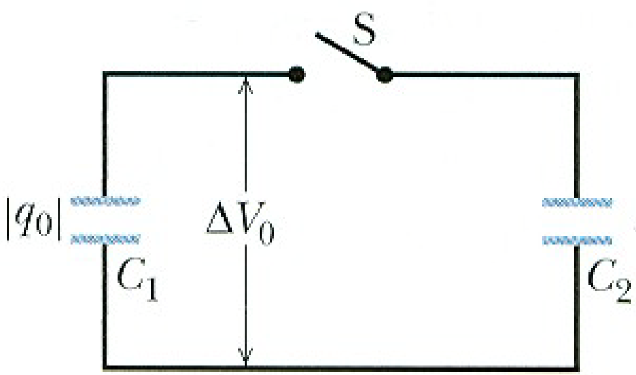
$$q_0 = q_1 + q_2$$

$$\Leftrightarrow C_1 \cdot \Delta V = C_1 \cdot \Delta V_o + C_2 \cdot \Delta V_o$$

$$\Delta V_o = \Delta V \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

$$\Delta V_o = 6,3 \cdot \frac{3,55 \times 10^{-6}}{3,55 \times 10^{-6} + 8,95 \times 10^{-6}}$$

$$\Delta V_o = 1,79\ V$$



$c)$

$$U_{total} = \tfrac{1}{2} C_{eq} (\Delta V_o)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \left(3,55 \times 10^{-6} + 8,95 \times 10^{-6}\right) \cdot 1,79^2 = 20,0\ \mu J$$

4.5. Condensadores com Dieléctricos

- Dieléctrico é um material não condutor (isolante). Ex: vidro, papel encerado, borracha, poliéster, etc.
- **Quando se insere um material dieléctrico entre as placas dum condensador, a sua capacidade aumenta, porém a sua carga permanece inalterada.**
- Se o dieléctrico encher completamente o espaço entre as placas, a capacidade aumenta por um factor adimensional denominado ***constante dieléctrica*** ***(***κ***)***.

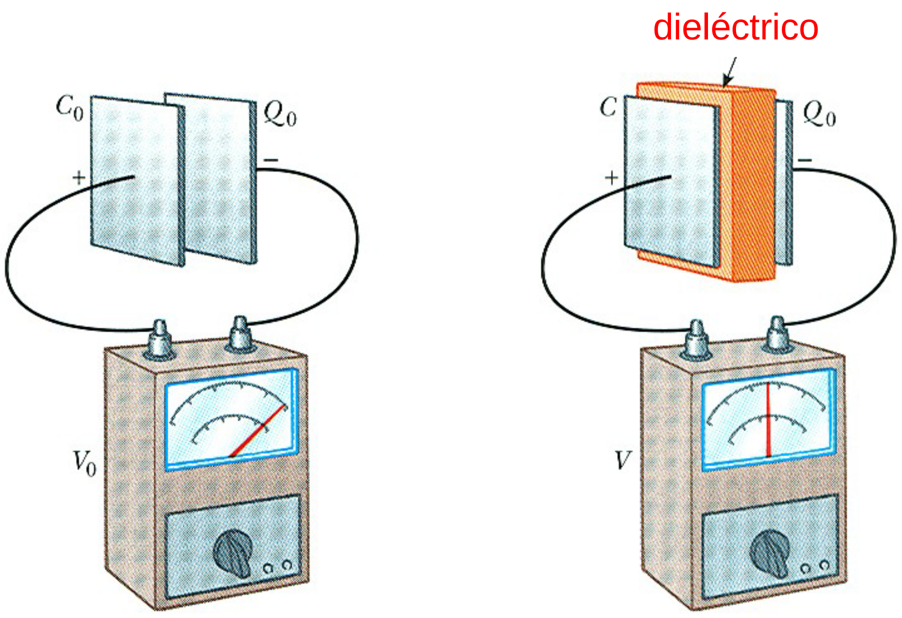
- **Efeito de um dieléctrico num condensador.**

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q_0}{V_0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C = \kappa C_0}}$$

$$V = \frac{V_0}{\kappa} \quad \left(V < V_0 \Rightarrow \kappa > 1\right)$$

→ A capacidade aumenta de um factor κ, quando o dieléctrico enche toda a região entre as placas, contudo a carga Q_0 no condensador não se altera.



(a) (b)

Quando se insere um dieléctrico entre as placas de um condensador carregado a carga (**Q_o**) fica inalterada, contudo a diferença de potencial (**V**) registada por um voltímetro reduz-se de **V_o** para **$V=V_o/\kappa$**. Por outro lado a capacidade do condensador aumenta neste processo de um factor de **κ**.

- **Caso de um dieléctrico inserido num condensador de placas paralelas**

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \kappa \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

→***C*** aumenta com a diminuição de ***d***.

Na prática, o menor valor de d está limitado pela descarga eléctrica que pode propagar-se através do **dieléctrico** que separa as placas.

Para um dado d, a V_{max} que pode ser aplicada a um C, sem provocar descarga, depende da **rigidez dieléctrica** (intensidade max. do $\vec{E}$) do dieléctrico (no ar é igual a 3×10^6 V/m)

Se $\vec{E}$ exterior > a rigidez dieléctrica ⇒ as propriedades isolantes desaparecem; o meio começa a conduzir.

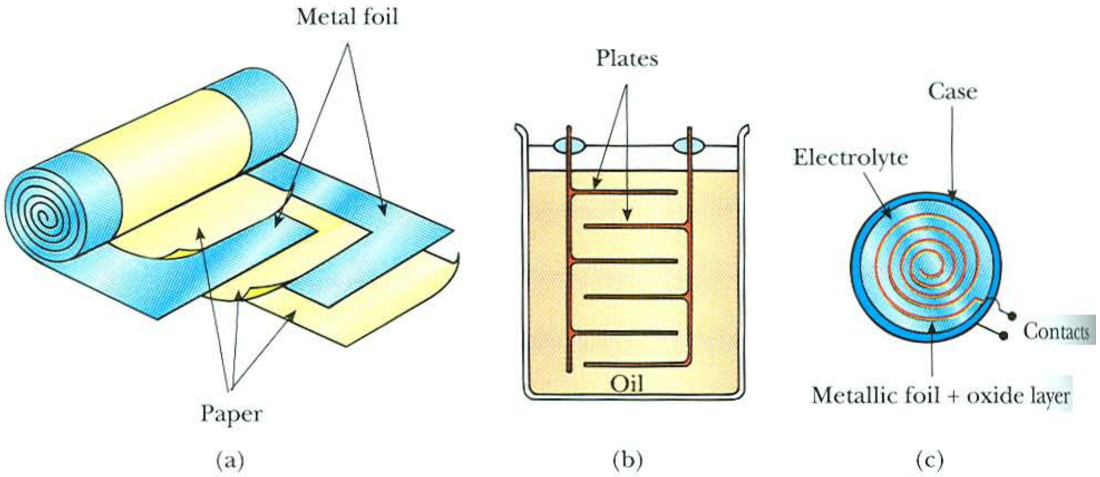
A maioria dos materiais isolantes têm rigidez dieléctrica e κ maior que os do ar.

- **Tabela de constante dieléctrica e rigidez dieléctrica para vários materiais**

Material	Constante Dieléctrica (κ)	Rigidez Dieléctrica (V/m)
Vácuo	1000	-
Ar (seco)	1,00059	3×10^6
Silício	12	-
Poliestireno	2,56	24×10^6
Teflon	2,1	60×10^6
Papel	3,7	16×10^6
Água	80	-
Pirex	4,7	14
Óleo de Silicone	2,5	15×10^6

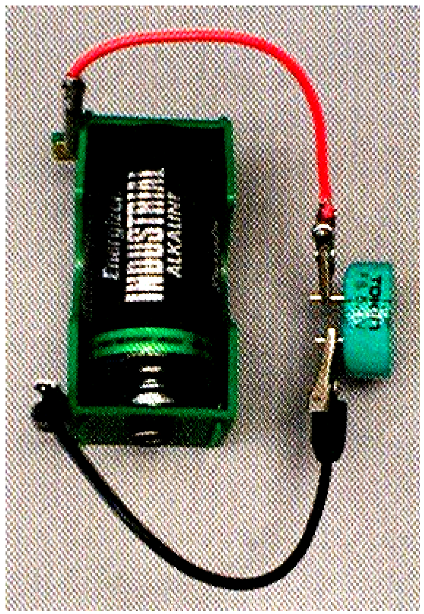
- O dieléctrico aumenta a capacidade dum condensador.
- O dieléctrico eleva a voltagem operacional máxima dum condensador.
- O dieléctrico pode proporcionar suporte mecânico entre as duas placas condutoras.

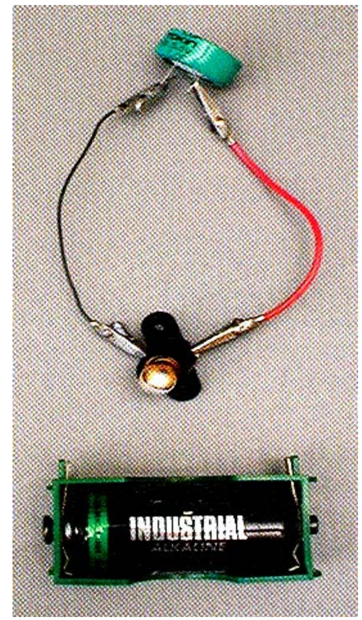
4.5. Tipos de condensadores para a electrónica



4.6. Exemplos

Carga de um condensador através de uma pilha:





Descarga da energia acumulada num condensador através de uma lâmpada:

Desfribilhador

Teclado