introdução aos sistemas dinâmicos

resolução dos exercícios de sistemas de edos lineares, homogéneas e autónomas — parte dois

1.

1.1

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1\,\mathrm{e}^{t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{4t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{4t} \end{cases}$$

1.2

2.

2.1

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-5t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1\,\mathrm{e}^{-t} - C_2\,\mathrm{e}^{-5t} \\ y(t) = 2C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{-5t} \end{cases}$$

2.2

3.

3.1 A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$. Um vector próprio da matriz A associado a cada um desses valores próprios pode ser dado, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{4t}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{4t} \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{4t} \end{cases}$$

3.2

4.

4.1 A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio $\lambda = -2$ de multiplicidade 2. Um vector próprio da matriz A associado a esse valor próprio pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, sabemos que a segunda solução particular do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = t\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde este último vector é solução de

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = -2$. Assim sendo, podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2(t\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + C_2(-t\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}) \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$$

4.2

5.

5.1

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio $\lambda = 2$ de multiplicidade 2. Um vector próprio da matriz A associado a esse valor próprio pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, sabemos que a segunda solução particular do sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = t\,\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde este último vector é solução de

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 2$. Assim sendo, podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\,\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2(t\,\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2(t\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}) \\ y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

5.2

6.

6.1 A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = \pm 3\,\mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 3\,\mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3\mathrm{i} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\big(\cos 3t \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\big) + C_2\big(\operatorname{sen} 3t \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \cos 3t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1(-\cos 3t - 3 \operatorname{sen} 3t) + C_2(-\operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t) \\ y(t) = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$

6.2

7.

7.1 A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\big(\mathrm{e}^t \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big) + C_2\big(\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^t \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = -C_1\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t + C_2\mathrm{e}^t \cos t \\ y(t) = C_1\mathrm{e}^t \cos t + C_2\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

7.2

8.

8.1

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = -1 + \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + \mathrm{i} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\big(\mathrm{e}^{-t}\cos t \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big) + C_2\big(\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,t \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-t}\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1(-2\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,t) + C_2(-2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,t + \mathrm{e}^{-t}\cos t) \\ y(t) = 5C_1\mathrm{e}^{-t}\cos t + 5C_2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

8.2

9.

9.1

Introduzindo uma segunda variável $y = x'(t)$, temos que o problema descrito por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem pode ser representado, de forma equivalente, pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

9.2

A matriz dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem um par de valores próprios complexos conjugados $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$. Um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda_1 = \mathrm{i}$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo, a solução geral do sistema escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\big(\cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathrm{sen}\,t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\big) + C_2\big(\mathrm{sen}\,t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,\mathrm{sen}\,t - C_2\cos t \\ y(t) = C_1\cos t + C_2\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

Procurando escrever as constantes arbitrárias em função do valor da solução no instante inicial, $(x_{\text{o}}, y_{\text{o}})$, temos que

$$\begin{cases} x_{\text{o}} = -C_2 \\ y_{\text{o}} = C_1 \end{cases}$$

pelo que a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$\begin{cases} x(t) = y_{\text{o}} \operatorname{sen} t + x_{\text{o}} \cos t \\ y(t) = y_{\text{o}} \cos t - x_{\text{o}} \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Podemos deste modo concluir que a solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem dada no enunciado é dada por

$$x(t) = x_{\text{o}} \cos t + y_{\text{o}} \operatorname{sen} t,$$

com x_{o} a posição e y_{o} a velocidade do sistema/pêndulo no instante $t = 0$.

9.3