LEI **Teste 2** **Introd. Sistemas Dinâmicos**

Janeiro 2012

Nome completo:____ Número:__________

1. (5 valores) Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Determine a solução geral do sistema.

   (b) Represente graficamente o espaço de fase xy e estude a estabilidade da solução de equilíbrio.

   (c) Determine a solução particular do sistema que verifica $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.

(v.s.f.f.)

2. (5 valores) Considere a equação diferencial parcial (EDP) linear de primeira ordem

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

(a) Determine uma solução da EDP usando o método de separação das variáveis. Determine uma solução que verifique a condição inicial $u(x, 0) = e^{5x}$.

(b) Verifique que as funções do tipo $u(x, t) = f(x + 2t)$, com $f \in C^1(\mathbb{R})$ são solução da EDP.

(c) Efectue a mudança de variáveis $s = 2x - t, r = x + 2t$ para encontrar a solução geral da EDP. Determine uma solução da EDP que verifique a condição inicial $u(x, 0) = \sin(3x)$.

3. (3 valores) Considere a função $f : [0, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(\pi - x)$.

   (a) Represente graficamente a extensão ímpar 2π-periódica f_I da função f.

   (b) Determine a série de Fourier de f_I.

4. (3 valores) Considere o seguinte problema com a equação de onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Escreva a solução formal do problema. [Pode usar directamente os resultados da pergunta 3].

   (b) Usando a solução da alínea anterior, determine o valor de $u(\frac{\pi}{2}, 0)$.

(v.s.f.f.)

5. (4 valores) Usando o método da separação de variáveis deduza a solução formal do seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, & 0 < x < L,\ t > 0,\ \alpha > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L,\ f \in C(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3}$$