Resolução Exame B 2014

Grupo I

Questão 1 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ch(x)$. Então f é uma função:

a) bijectiva

b) injectiva e não sobrejectiva

c) não injectiva e sobrejectiva

d) não injectiva e não sobrejectiva

Questão 2 - A expressão $\operatorname{arctg}\left(2 + tg\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$ é igual a:

a) $-\frac{\pi}{4}$ b) 0 c) $\frac{\pi}{4}$ d) π

Questão 3 - Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < -1 \\ x^2 + 1 & , \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$

Então f é uma função:

a) contínua

b) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

Questão 4 - Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 0 \\ x^2 & , \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

Então:

a) existe $f'(0)$

b) não existe $f'_-(0)$

c) existe $f'_+(0)$

d) não existe $f'(0)$

Questão 5 - A equação $x = \cos(x)$:

a) não tem soluções no intervalo $[0, \pi/2]$

b) tem uma única solução no intervalo $[0, \pi/2]$

c) tem exactamente duas soluções distintas no intervalo $[0, \pi/2]$

d) tem, pelo menos, duas soluções no intervalo $[0, \pi/2]$

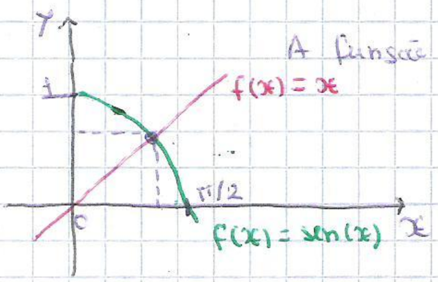
Justificação:

$f(x) = x - \cos x$

$f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

A função é estritamente crescente.



Questão 6 - O valor de $\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)|\, dx$ é igual a:

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) 2 d) 4

Justificação: $\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)|\, dx = 2\int_{0}^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx$

Porque a função sen x é positiva no intervalo $[0, \pi]$. ← $= 2\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

$= 2\left[\cos x\right]_0^{\pi}$

$= 2(\cos \pi - \cos 0)$

$= 2(-1-1)$

Pela mesma justificação do 2º passo ← $= 4$

Questão 7 - Seja $f: [-3, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_{-3}^{0} f(x)\, dx = 5$ e $\int_{0}^{2} f(x)\, dx = -2$. Então o valor de $\int_{-3}^{2} (1 - 2f(x))\, dx$ é igual a:

a) -12 b) -7 c) -6 d) -1

Justificação: $\int_{-3}^{2} f(x)\, dx = \int_{-3}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{2} f(x)\, dx$

$= 5 + (-2)$

$= 5 - 2$

$= 3$

$\int_{-3}^{2} (1 - 2f(x))\, dx = \int_{-3}^{2} dx - 2\int_{-3}^{2} f(x)\, dx$

$= 5 - (2 \times 3)$

$= 5 - 6$

$= -1$

Questão 8 - Sejam $U_n = \frac{8}{3\sqrt{n}}$ e $V_n = 1$, com $n \in \mathbb{N}$.

Então:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ são convergentes

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ são divergentes

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ é divergente

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ é divergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ é convergente

Grupo II

Questão 9 - Considere a função real de variável real definida por
$$f(x) = -\pi + 2 \arcsen(2-5x)$$

a) Determine o domínio e o contradomínio da função f.

- $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2-5x \leq 1\} = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]$

$-1 \leq 2-5x \leq 1 \Leftrightarrow -2-1 \leq -5x \leq 1-2$
$\Leftrightarrow -3 \leq -5x \leq -1$
$\Leftrightarrow -3/-5 \leq x \leq -1/-5$
$\Leftrightarrow 1/5 \leq x \leq 3/5$

$Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in Dom(f)\} = [-2\pi, 0]$

$-\pi/2 \leq \arcsen(2-5x) \leq \pi/2 \Leftrightarrow -2\pi/2 \leq 2\arcsen(2-5x) \leq 2\pi/2$
$\Leftrightarrow -\pi + (-2\pi/2) \leq -\pi + 2\arcsen(2-5x) \leq -\pi + (2\pi/2) \Leftrightarrow -2\pi \leq f(x) \leq 0$

b) Caracterize a função inversa de f.

- $y = f(x) \Leftrightarrow y = -\pi + 2\arcsen(2-5x)$
$\Leftrightarrow \arcsen(2-5x) = 1/2\,(y+\pi)$
$\Leftrightarrow 2-5x = \sen(y/2 + \pi/2)$
$\Leftrightarrow x = -1/5\,(\sen(y/2+\pi/2) - 2)$
$\Leftrightarrow x = -1/5 \sen\left(\frac{y+\pi}{2}\right) + 2/5$

$$f^{-1} : [-2\pi, 0] \longrightarrow [1/5, 3/5]$$
$$x \longmapsto f^{-1}(x) = -\frac{1}{5} \sen\left(\frac{y+\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}$$

c) Determine os zeros da função f.

- $-\pi + 2\arcsen(2-5x) = 0 \Leftrightarrow \arcsen(2-5x) = \pi/2$
$\Leftrightarrow 2-5x = \sen(\pi/2)$
$\Leftrightarrow 2-5x = 1$
$\Leftrightarrow -5x = 1-2 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = 1/5$

Questão 10 - Calcule:

(a) $\int \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\, e^{\text{arctg}(x)}\,dx$

$= \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{\ln x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

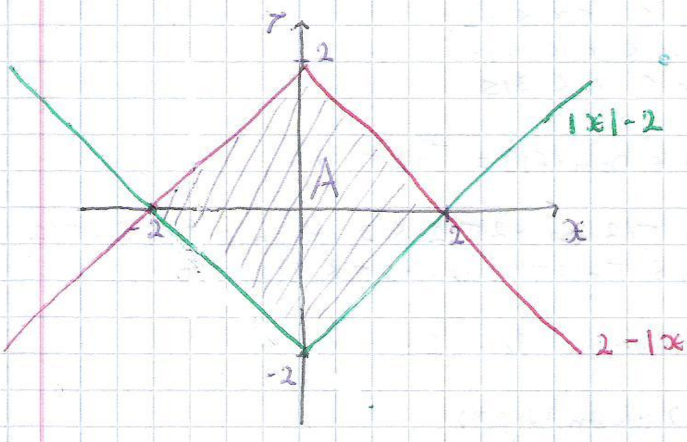
$= e^{\text{arctg}(x)} + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\int x \,\text{sen}(x)\,dx = -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1\,dx$

$= x(-\cos(x)) + \text{sen}(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Primitivação por partes: $f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$
$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

Questão 11 - Esboce a região do plano limitada pelas curvas de equação $y = |x| - 2$ e $y = 2 - |x|$ e determine a sua área.



$A = \int_{-2}^{0} (2+x)-(-x-2) \int_{0}^{2} (2-x)-(x-2)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} (2+x+x+2) \int_{0}^{2} (2-x-x+2)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} (4+2x)\,dx + \int_{0}^{2} (4-2x)\,dx$

$= \left[4x + x^2\right]_{-2}^{0} + \left[4x - 2x\right]_{0}^{2}$

$= \left((4\times 0 + 0^2) - (4\times(-2) + (-2)^2)\right) + \left((4\times 2 - 2\times 2) - (4\times 0 - 2\times 0)\right)$

$= 4 + 4 = 8$

Questão 12 - Diga se o integral $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente ou divergente e, em caso de convergência, determine o seu valor.

$\lim_{a\to+\infty} \int_{-1}^{a} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \left[\text{arctg}(x)\right]_{-1}^{a}$

$= \lim_{a\to+\infty} \left((\text{arctg}(a) - \text{arctg}(-1)\right) = \text{arctg}(+\infty) + \pi/4 = \pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$

Como existe $\lim_{a\to+\infty} \int_{-1}^{a} \frac{1}{1+x^2}$ o integral é convergente e o seu valor é $\frac{3\pi}{4}$.

Questão 13 - Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$ é convergente mas não é absolutamente convergente.

- A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$ é uma série alternada, com $a_n = \frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. A sucessão $(a_n)_n$ é decrescente, porque $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} =$

$= \frac{n+2-n-3}{(n+3)(n+2)} = -\frac{1}{(n+3)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. O seu limite é igual a $\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{n+2} = \lim_n \frac{1}{+\infty+2} = 0$

Logo, pelo critério de Leibnitz, a série dada é convergente.

Calculando a série dos módulos, obtém-se

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} 1^n \frac{1}{n+2}$, que é uma série divergente, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} 1^n \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$, $n+2 > n$,

$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ são séries de termos não negativos, $\lim_n \frac{1/n+2}{1/n} = \lim_n \frac{n}{n+2} = 1$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, pois é uma série harmónica. Logo, o 2º critério de comparação permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$ é divergente. Sendo assim, a série dada é convergente mas não é absolutamente convergente.

Questão 14 - Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (x-2)^n$.

a) Justifique porque é que a série é divergente para $x = \frac{3}{2}$ e para $x = \frac{5}{2}$.

- Para $x = 3/2$ tem-se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (3/2-2)^n =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (-1/2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$, que é uma série divergente, uma vez que não existe $\lim_n (-1)^n$.

Para $x = 5/2$ tem-se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (5/2-2)^n =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (1/2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$, que é uma série divergente, uma vez que

$\lim_n 1 = 1 \neq 0$.

b) Determine o intervalo de convergência da série dada.

Aplicando o critério D'Alembert à série dos módulos obtém-se:

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1} \ (x+2)^{n+1}}{a_n \ (x+2)^n} \right| = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ |x+2| = |x+2| \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =$$

$$= |x+2| \lim_n \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \right| = |x+2| \cdot 2 = 2|x+2|$$

A série é, portanto, absolutamente convergente para valores de x tais que $2|x+2| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1/2$*, ou seja, é absolutamente convergente para $x \in]3/2; 5/2[$ e divergente para $x \in]-\infty, 3/2[\cup]5/2, +\infty[$.

Atendendo à alínea a), conclui-se que o intervalo de convergência da série dada é $]3/2, 5/2[$.

★ $2|x+2| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1/2$
$\Leftrightarrow -1/2 < x+2 < 1/2$
$\Leftrightarrow -1/2 - 2 < x < 1/2 - 2$
$\Leftrightarrow -5/2 < x < -3/2$
$\Leftrightarrow 3/2 < x < 5/2$