0. Revisões

0.1 Seja A o conjunto $\{0, 1\}$.

a) Indique os elementos dos conjuntos A^2 e A^3.

b) Qual é o número de *relações unárias* e de *relações binárias sobre* o conjunto A, i.e., qual é o número de subconjuntos de A e de A^2, respetivamente?

c) Determine o número de funções f do tipo $f : A \to A$ e do tipo $f : A^2 \to A$.

0.2 Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $1 + ... + n = n(n + 1)/2$.

0.3 Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

a) $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$; **b)** $\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) = (n + 1)^2$;

c) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$; **d)** $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

0.4 Para $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $2^n < n!$.

a) Mostre que: para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 3$, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é verdadeira.

b) Indique, justificando, quais os naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira.

0.5 Seja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida recursivamente por $f(0) = 1$ e $f(n + 1) = 2f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Calcule $f(1)$ e $f(2)$.

b) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = 2^n$.

0.6 Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a função definida por $s(1) = 2$ e $s(n + 1) = \frac{2}{s(n)}$.

a) Determine $s(1), s(2)$ e $s(3)$.

b) Determine o contradomínio de s. Prove a sua afirmação por indução.

0.7 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 1$ e seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função definida recursivamente por $f(1) = a$ e $f(n + 1) = f(n) + ab^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) Verifique que $f(n) = \frac{a(1 - b^n)}{1 - b}$ para $n \in \{1, 2, 3\}$.

b) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \frac{a(1 - b^n)}{1 - b}$.

0.8 Seja A um conjunto finito.

a) Prove que, se A tem n subconjuntos e $a \notin A$, então $A \cup \{a\}$ tem $2n$ subconjuntos.

b) Prove que: $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

c) Qual é o número de subconjuntos de A^3, quando A é um conjunto com 3 elementos?

1. Indução e recursão estruturais

1.1 Seja S o subconjunto de $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ definido indutivamente pelas 3 regras seguintes.

$$\begin{array}{ll} (1) & 2 \in S \\ (2) & q \in S \;\Rightarrow\; \frac{1}{q} \in S \\ (3) & p \in S \text{ e } q \in S \;\Rightarrow\; p \cdot q \in S \end{array}$$

a) Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\}$ é fechado para a operação $f : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ tal que $f(q) = \frac{1}{q}$, para qualquer $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

b) Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{2}, 2\}$ não é fechado para a operação $g : (\mathbb{Q}\setminus\{0\})^2 \to \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ definida, para quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, por $g(p,q) = p \cdot q$.

c) Determine o conjunto S.

1.2 Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e seja $f : A \times A \to A$ a operação em A definida pela tabela que se segue.

f	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	b	c
c	a	c	b	b
d	a	c	b	a

a) Calcule os conjuntos indutivos, sobre A, de base $\{b\}$ e conjunto de operações $\{f\}$.

b) Indique qual é o conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$. Justifique a sua resposta.

c) Indique uma árvore de formação de c. A árvore de formação que encontrou é a única árvore de formação de c?

d) A definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$ é determinista? Justifique.

1.3 Apresente definições indutivas de cada um dos seguintes conjuntos:

a) o conjunto dos naturais múltiplos de 5;

b) o conjunto dos números inteiros;

c) o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar;

d) o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que têm um número par de ocorrências do símbolo a.

Em cada um dos casos anteriores, indique justificando se a definição indutiva apresentada é ou não determinista.

1.4 Sejam X um conjunto, f uma operação binária em X e B um subconjunto não vazio de X. Seja ainda S o conjunto de todos os subconjuntos de X que contêm B e são fechados para f e seja

$$G = \bigcap_{Y \in S} Y = \{y \in X : \forall_{Y \in S}\; y \in Y\}.$$

a) Mostre que G é um elemento de S.

b) Mostre que G é o menor conjunto que contém B e é fechado para f.

1.5 Seja V o conjunto numerável formado pelos símbolos $v_0, v_1, v_2, ...$ (designados por variáveis) e seja A o alfabeto $V \cup \{c, f, g, h, (,), , \}$. Consideremos que E é o conjunto gerado, sobre A^*, pela seguinte definição indutiva determinista.

$$\frac{}{c \in E}\, c \qquad \frac{}{v_n \in E}\, v_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{t \in E}{p(t) \in E}\, p \quad (p \in \{f, h\}) \qquad \frac{t_1 \in E \quad t_2 \in E}{g(t_1, t_2) \in E}\, g$$

a) Dê exemplos de elementos de A^* que pertençam ao conjunto E e de elementos de A^* que não pertençam ao conjunto E. Justifique as suas respostas.

b) Investigue se o conjunto E é fechado para cada uma das operações que se seguem.

i) $\begin{array}{rccc} s_1: & A^* \times A^* & \longrightarrow & A^* \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & f(t_1, t_2) \end{array}$ **ii)** $\begin{array}{rccc} s_2: & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & t & \mapsto & g(t, c) \end{array}$

c) Para cada um dos seguintes elementos de E, indique o conjunto dos seus sub-objetos diretos e o conjunto dos seus sub-objetos.

i) c **ii)** $f(v_2)$ **iii)** $g(g(v_0, c), c)$ **iv)** $f\Big(g(f(v_1), h(v_1))\Big)$

d) Para cada um dos elementos de E da alínea anterior, indique 2 sequências de formação cujos comprimentos sejam diferentes.

1.6 Seja E o conjunto de expressões definido no Exercício **1.5**.

Considere o seguinte *esquema de árvore de formação* para elementos de E.

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi_4 \in E}\, r_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi_1 \in E}\, r_1 \quad \dfrac{}{\varphi_2 \in E}\, r_2}{\varphi_3 \in E}\, r_3}{\varphi_5 \in E}\, r_5}{\varphi_6 \in E}\, r_6$$

Considere ainda que X é o conjunto dos elementos de E com este esquema de árvore de formação tais que o seu conjunto de variáveis é um subconjunto de $\{v_1, v_2\}$.

a) Indique, justificando, um elemento de X.

b) Determine o número de elementos do conjunto X.

c) Qual é o número mínimo de elementos possível numa sequência de formação de um elemento de X? Justifique.

1.7 Seja E o conjunto de expressões definido no Exercício **1.5**.

a) Defina funções $n, a : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada elemento e de E façam corresponder, respetivamente, o número de nodos e a *altura* (número de nodos no ramo mais comprido) da árvore de formação de e.

b) Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto E. Mostre que, para todo o $e \in E$, $a(e) \leq n(e)$.

1.8 Seja X o conjunto das palavras sobre $\{0,1\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{1 \in G}\ 1 \qquad \frac{x \in G}{x0 \in G}\ f \qquad \frac{x \in G}{x1 \in G}\ g$$

Considere ainda a única função $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:

- $i(1) = 1$;
- para todo o $x \in G$, $i(x0) = 2i(x)$;
- para todo o $x \in G$, $i(x1) = 2i(x) + 1$.

a) Indique os elementos de G que admitem sequências de formação de comprimento inferior a 3.

b) Defina por recursão estrutural a função $h : G \longrightarrow G$ tal que, para cada $x \in G$, $h(x) = 1x$.

c) Determine $i(11)$ e $i(101)$.

d) Enuncie o princípio de indução estrutural para G.

e) Mostre que, para todo o $x \in G$, $i\big(h(x)\big) = 2^n + i(x)$, em que n é o comprimento da palavra x.

1.9 Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, *, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{a \in G}\ 1 \qquad \frac{x \in G}{xa \in G}\ 2 \qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x * y) \in G}\ 3$$

Seja ainda $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:

- $i(a) = 1$;
- $i(xa) = i(x) + 1$, para todo o $x \in G$;
- $i\big((x * y)\big) = i(x) + i(y)$, para todos os $x, y \in G$.

a) Construa a árvore de formação do elemento $u = ((aa * a)a * a)$ de G.

b) Indique um elemento de X que não pertence a G.

c) Calcule $i(u)$.

d) Enuncie o teorema de indução estrutural para G.

e) Mostre que, para todo o $x \in G$, $i(x)$ é o número de ocorrências da letra a na palavra x.

2. Sintaxe do Cálculo Proposicional

2.1 Represente as seguintes frases através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar *frases atómicas*:

a) Se o Sr. João é feliz, a sua mulher é infeliz e se o Sr. João é infeliz, a sua mulher também o é.

b) Vou de comboio e perco o avião ou vou de camioneta e não perco o avião.

c) Uma condição necessária para que uma sucessão seja convergente é que seja limitada.

d) Se x é um número racional e y é um inteiro, então z não é real.

e) Se o Pedro não jogar, então o Miguel joga e a equipa perde o jogo.

f) Uma condição suficiente para um número ser ímpar é que seja primo.

2.2 Encontre exemplos de *frases verdadeiras* que possam ser representadas através das seguintes fórmulas:

a) $(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \vee p_3))$.

b) $((p_4 \wedge (\neg p_0)) \vee p_6)$.

c) $(p_{13} \leftrightarrow p_8)$.

d) $((p_{98} \rightarrow p_{99}) \rightarrow p_{2000})$.

2.3 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

a) $(\neg\,(p_1 \vee p_2))$.

b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$.

c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($.

d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp)$.

e) $(\perp)$.

f) $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$.

2.4 Para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

i) p_{2012}.

ii) $\neg \perp \vee \perp$.

iii) $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$.

a) construa sequências de formação e árvores de formação;

b) indique o número mínimo de elementos numa sua sequência de formação e diga quantas destas sequências de formação de comprimento mínimo existem.

2.5 Para cada fórmula φ do exercício anterior, calcule:

a) $var(\varphi)$, $r(\varphi)$ e $h(\varphi)$.

b) $\varphi[p_{2011}/p_0]$, $\varphi[p_{2011}/p_1]$ e $\varphi[p_{2011}/p_{2009}]$.

2.6 Mostre que, para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $h(\varphi) > 0$.

b) $h(\varphi) = 1 + r(\varphi)$.

2.7 Defina por recursão estrutural as seguintes funções

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi) =$ número de ocorrências de parêntesis em φ.

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi) =$ número de ocorrências de variáveis proposicionais em φ.

c) $c : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{P}(BIN)$ tal que $c(\varphi) = \{\Box \in BIN : \Box \text{ ocorre em } \varphi\}$, onde $BIN = \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

d) $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi[\perp /p_7] =$ resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$.

2.8 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove por indução estrutural cada uma das seguintes afirmações:

a) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $v(\varphi) \geq$ número de elementos de $var(\varphi)$.

b) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p(\varphi) \geq$ número de elementos de $c(\varphi)$.

c) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp /p_7])$.

d) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $c(\varphi) = c(\varphi[\perp /p_7])$.

e) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $c(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$.

f) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $var(\varphi) = \{p_7\}$ então $v(\varphi[\perp /p_7]) = 0$.

g) para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp /p_7] = \varphi$.

2.9 Pode demonstrar-se a proposição que se segue, a partir da definição de subfórmulas.

Proposição: *Uma fórmula φ é uma subfórmula de uma fórmula ψ se e só se:*

i) $\varphi = \psi$*; ou*

ii) $\psi = \neg\psi_1$*, para alguma fórmula* ψ_1*, e* φ *é uma subfórmula de* ψ_1*; ou*

iii) $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$*, para algumas fórmulas* ψ_1 *e* ψ_2 *e para algum conectivo* $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$*, e* φ *é uma subfórmula de* ψ_1 *ou de* ψ_2*.*

Com base nesta proposição, demonstre que:

a) a fórmula $p_1 \to p_2$ não é uma subfórmula da fórmula $\neg p_1 \to p_2$;

b) se S é uma sequência de formação de ψ e φ é uma subfórmula de ψ, então φ é um dos elementos de S;

c) toda a fórmula ψ admite uma sequência de formação que contém apenas subfórmulas de ψ;

d) uma fórmula ψ tem n subfórmulas se e só se as sequências de formação de ψ mais curtas têm n elementos.

2.10 Defina, por recursão estrutural em fórmulas, a função $subf : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ que a cada fórmula φ faz corresponder o conjunto de subfórmulas de φ e demonstre que, para quaisquer fórmulas φ e ψ, $\varphi \in subf(\psi)$ se e só se φ é uma subfórmula de ψ.

3. Semântica do Cálculo Proposicional

3.1 Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Considere as seguintes fórmulas: $\varphi_1 = (p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3))$;
$\varphi_2 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0)$;
$\varphi_3 = (p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \perp))$.

Calcule os valores lógicos das fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3 para as valorações v_1 e v_2.

3.2 Considere as seguintes fórmulas

$\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$; $\varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2)$;

$\varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_2)$.

a) Para cada um dos conjuntos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $\{\varphi_2, \varphi_3\}$, dê exemplo de uma valoração que atribua o valor lógico 1 a todos os seus elementos.

b) Mostre que não existem valorações que, em simultâneo, atribuam o valor lógico 1 a φ_1 e φ_3.

3.3 Seja v uma valoração. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2)$=0 é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.

b) Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

c) Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \to (p_1 \to p_3)) = 1$.

3.4 De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições.

a) $(p_1 \to \perp) \vee p_1$.

b) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$.

d) $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$.

3.5 Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

3.6 Seja $\varphi = (\neg p_2 \to \perp) \wedge p_1$.

a) Dê exemplo de:

i) uma valoração v tal que $v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$;

ii) uma valoração v tal que $v(\varphi) \neq v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$.

b) Seja ψ uma fórmula. Indique uma condição suficiente para que uma valoração v satisfaça $v(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_2])$. A condição que indicou é necessária?

3.7 Sejam v uma valoração, φ e ψ fórmulas e p_i uma variável proposicional. Seja v' a valoração definida, para cada $p_n \in \mathcal{V}^{CP}$, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } n = i, \\ v(p_n) & \text{se } n \neq i. \end{cases}$$

Demonstre que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.

3.8 Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas cujos conectivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$, ou seja, $\mathcal{F}$ é o conjunto definido indutivamente, sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, pelas seguintes regras:

$$\frac{}{p_i \in \mathcal{F}}\ p_i\ (i \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F} \quad \psi \in \mathcal{F}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}}\ \vee \qquad \frac{\varphi \in \mathcal{F} \quad \psi \in \mathcal{F}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}}\ \wedge$$

a) Enuncie o princípio de indução estrutural para $\mathcal{F}$.

b) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}$.

c) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}$? Justifique.

3.9 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conectivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$. **b)** $p_1 \vee (p_2 \to \perp)$.

c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$. **d)** $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp)$.

3.10 Investigue se os conjuntos de conectivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

3.11 Considere a extensão do conjunto das fórmulas proposicionais $\mathcal{F}^{CP}$ com o conectivo ternário $\bullet$ (ou seja, considere que à definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é acrescentada uma regra que indica que $\bullet(\varphi, \psi, \sigma)$ é uma fórmula proposicional se φ, ψ e σ o forem). Considere ainda que, dada uma valoração v e dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ se tem,

$$v(\bullet(\varphi, \psi, \sigma)) = 1 \quad \text{se e só se} \quad v(\varphi) = v(\psi) = v(\sigma) = 0.$$

a) Calcule $v(\bullet(p_0, p_0, p_0))$ e $v(\neg(\bullet(p_0, p_0 \vee p_1, \perp)))$ para a valoração v tal que $v(p_i) = 0$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

b) Mostre que $\bullet(\varphi, \psi, \sigma) \Leftrightarrow \neg(\varphi \vee \psi \vee \sigma)$.

c) Dê exemplo de tautologias e de contradições onde o único conectivo usado seja $\bullet$.

d) O conjunto $\{\bullet\}$ é completo? Justifique.

3.12 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

a) $\neg p_0$. **b)** $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$. **c)** $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.

d) $(p_1 \to \perp)$. **e)** $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$. **f)** $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

3.13 Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

3.14 Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\psi = \bigwedge_{i=1}^{m} (\bigvee_{j=1}^{n_i} \ell_{ij}) \in \mathcal{F}^{CP}$, onde cada ℓ_{ij} é um literal.

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, seja $\Gamma_i = \{\ell_{i1}, ..., \ell_{in_i}\}$.

a) Mostre que, para toda a valoração v, $v(\psi) = 1$ se e só se, para todo o $i \in \{1, ..., m\}$, v satisfaz pelo menos um dos elementos de Γ_i.

b) Considere que ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$. Mostre que φ é uma tautologia se e só se não existe uma valoração v tal que, para todo $i \in \{1, ..., m\}$, v satisfaz pelo menos um dos elementos de Γ_i.

3.15 Considere as fórmulas

$$\varphi = (p_3 \to (p_1 \vee p_2)) \vee \neg(\neg p_1 \to p_2),$$

$$\psi = \neg p_2 \wedge p_3 \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee p_1).$$

a) Mostre que ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$.

b) Recorrendo ao exercício 3.14 diga, justificando, se φ é uma tautologia.

c) Resolva as alíneas anteriores considerando

$$\varphi = (p_2 \to p_1) \to (\neg p_2 \wedge p_3), \qquad \psi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3).$$

3.16 De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \to \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.

b) $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.

c) $\mathcal{F}^{CP}$.

d) O conjunto $\mathcal{F}$ do exercício 3.8.

3.17 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.

b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

3.18 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.
b) $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.
c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3), p_3 \wedge \neg p_2 \models \neg p_1$.
d) $\varphi \to \psi$, $(\varphi \to \psi) \to \sigma \models \sigma \vee \varphi$, para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$.
e) $\varphi \to \psi$, $\neg\psi \to \sigma$, $\sigma \models \varphi$, para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$.

3.19 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

a) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$.
b) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.
c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.
d) Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

3.20 Considere as seguintes afirmações:

- Se a dívida externa aumenta ou as taxas de juro descem, então os impostos são aumentados ou o desemprego diminui.
- Os impostos são aumentados se a dívida externa aumenta.
- Se as taxas de juro descem, então os impostos não são aumentados ou a dívida externa não aumenta.
- O desemprego diminui ou os impostos não são aumentados com as taxas de juro a descer.

a) É possível que as afirmações anteriores sejam simultaneamente verdadeiras?
b) A proposição "Os impostos são aumentados" é ou não uma consequência das afirmações anteriores?

3.21 Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere as seguintes afirmações.

- Se n é par, então 3 divide n ou 2 divide n.
- 2 divide n se e só se n é par e 3 divide n.

a) Diga, justificando, se as duas afirmações são consistentes.
b) A primeira afirmação é uma consequência da segunda?
c) Suponha que as duas afirmações são verdadeiras e que 3 não divide n. Nestas condições, n é par ou ímpar?

3.22 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

a) Os três depoimentos são consistentes?
b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?
e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

4. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

4.1 Sejam φ, ψ e σ fórmulas. Justifique as seguintes relações de derivabilidade, através da construção de derivações em Dedução Natural que refletam os argumentos informais apresentados.

a) $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
Argumento: Admitamos $\neg\psi$. Admitamos ainda φ. De φ e da hipótese $\varphi \to \psi$ segue ψ, o que contraria $\neg\psi$. Assim, como a assunção de φ conduz a uma contradição, podemos concluir $\neg\varphi$.

b) $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vee \sigma \vdash \varphi \vee \sigma$
Argumento: Por um lado, admitindo φ, por maioria de razão, temos $\varphi \vee \sigma$. Por outro lado, admitindo ψ, como da segunda hipótese temos $\neg\psi$ ou σ, chegamos, no primeiro caso, a uma contradição e, no segundo caso, segue $\varphi\vee\sigma$ por maioria de razão. Assim, destas duas observações e da primeira hipótese, podemos concluir $\varphi \vee \sigma$.

4.2 Sejam φ, ψ e σ fórmulas. Encontre derivações em DNP das fórmulas abaixo indicadas. Em duas alíneas à escolha, indique todos as sub-derivações da derivação que apresentar.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$.
b) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.
c) $\varphi \to \varphi$.
d) $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.
e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$.
f) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.
g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$.
h) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

4.3 Sejam φ e ψ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*.

a) Indique uma derivação da Lei de Peirce a partir do conjunto $\{\neg\varphi\}$.

b) Demonstre que a Lei de Peirce é um teorema. (Sugestão: Utilize a derivação construída na alínea anterior.)

4.4 Mostre que:

a) $p_0 \to p_1, p_5, p_4 \to (\neg p_1 \vee p_3) \vdash (p_0 \wedge p_4) \to p_3$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash (p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_0) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_0)$.

4.5 Sejam Γ um conjunto de fórmulas e sejam φ, ψ e σ fórmulas. Mostre que:

a) $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \bot$.

b) $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$.

4.6 Seja Γ um conjunto de fórmulas e sejam φ e ψ fórmulas. Mostre que:

a) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é inconsistente.

b) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

c) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

d) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

Sugestão: Aplique o teorema da correção e o teorema da completude.

5. Sintaxe do Cálculo de Predicados

5.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a) Explicite a definição indutiva do conjunto dos L-termos.

b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem L-termos:

i) 0.	**ii)** $f(0)$.	**iii)** $f(1)$.
iv) $g(f(x_1, x_0), x_0)$.	**v)** $g(x_0, f(x_1))$.	**vi)** $R(x_0, x_1)$.

c) Calcule o conjunto das variáveis de cada um dos seguintes L-termos:

i) 0.	**ii)** $g(x_1, f(x_1))$.
iii) $g(x_1, x_2)$.	**iv)** $g(x_1, g(x_2, x_3))$.

c) Para cada um dos L-termos t da alínea anterior, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

5.2 Seja L o tipo de linguagem do exercício anterior. Considere que t é um L-termo com uma árvore de formação da forma

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t_1 \in \mathcal{T}_L}\,r_1}{t_2 \in \mathcal{T}_L}\,r_2 \qquad \dfrac{}{t_3 \in \mathcal{T}_L}\,r_3}{t_4 \in \mathcal{T}_L}\,r_4}{t \in \mathcal{T}_L}\,r_5$$

a) Indique um L-termo que admita uma árvore de formação desta forma.

b) Qual o número máximo de subtermos de t?

c) Assumindo que t_1 e t_3 são L-termos distintos, qual o comprimento mínimo de uma sequência de formação de t?

5.3 Seja L o tipo de linguagem definido no exercício 5.1.

a) Enuncie os teoremas de indução estrutural e de recursão estrutural para o conjunto dos L-termos.

b) Defina, por recursão estrutural em L-termos, funções $r, h : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t fazem corresponder o número de ocorrências de variáveis em t e o número de ocorrências de símbolos de função em t, respetivamente.

c) Dê exemplos de L-termos t_1 e t_2 tais que $\#\mathrm{VAR}(t_1) = r(t_1)$ e $\#\mathrm{VAR}(t_2) < r(t_2)$.

d) Demonstre que, para todo o L-termo t, $\#\mathrm{VAR}(t) \leq r(t)$.

5.4 Dado um L-termo t, a notação $\mathrm{SUBT}(t)$ representa o conjunto de subtermos de t.

a) Defina, por recursão estrutural, uma função f que a cada termo t faça corresponder o conjunto $\mathrm{SUBT}(t)$.

b) Demonstre que: para todo o L-termo t, $\mathrm{VAR}(t) \subseteq \mathrm{SUBT}(t)$.

5.5 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.

b) Quem quer vai, quem não quer manda.

c) Nem todos os pássaros voam.

d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.

e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.

f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.

g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.

h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.

i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

5.6 Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

a) Dê exemplos de L-fórmulas atómicas e de L-fórmulas não atómicas.

b) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas das seguintes fórmulas:

  i) $x_2 - 0 < x_1$.

  ii) $\exists_{x_0} \forall_{x_1} (x_1 - x_0 < 0)$.

  iii) $\forall_{x_2} (\exists_{x_0} (x_0 < x_1) \to \exists_{x_1} (x_2 < x_1 - x_0)) \wedge \mathsf{P}(x_2)$.

  iv) $\forall_{x_0} (x_0 < x_1) \vee \exists_{x_1} (x_1 < x_0)$.

c) A proposição "Para toda a L-fórmula φ, $\mathrm{LIV}(\varphi) \cap \mathrm{LIG}(\varphi) = \emptyset$" é verdadeira?

5.7 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.6 b), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

5.8 Considere o tipo de linguagem L do exercício 5.6. Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.6 b), indique quais das seguintes proposições são verdadeiras.

a) A variável x_1 é substituível pelo L-termo 0 em φ.

b) A variável x_1 é substituível pelo L-termo x_2 em φ.

c) A variável x_2 é substituível por qualquer L-termo em φ.

d) Toda a variável é substituível pelo L-termo $x_1 - x_3$ em φ.

5.9 Seja L um tipo de linguagem.

a) Defina, por recursão estrutural em L-fórmulas, a função $\mathrm{SUBFA} : \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_L)$ que a cada L-fórmula φ faz corresponder o conjunto das subfórmulas atómicas de φ.

b) Sejam φ uma L-fórmula e x uma variável. Demonstre que: se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$ para todo o $\psi \in \mathrm{SUBFA}(\varphi)$, então $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$.

6. Semântica do Cálculo de Predicados

6.1 Seja $L = (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(f_1) = \mathcal{N}(f_2) = 0$, $\mathcal{N}(f_3) = 1$, $\mathcal{N}(f_4) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$ e seja D o conjunto $\{d_1, d_2\}$.

a) Indique uma L-estrutura de domínio D.

b) Quantas L-estruturas de domínio D existem?

6.2 Considere o tipo de linguagem L_{Arit}, seja E_{Arit} a estrutura usual para este tipo de linguagem e sejam a_1 e a_2 atribuições em $\mathbb{N}_0$ tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada um dos L_{Arit}-termos t que se seguem, calcule $t[a_1]_{E_{Arit}}$ e $t[a_2]_{E_{Arit}}$.
i) 0. ii) x_5. iii) $s(x_2)$.
iv) $+(s(0), x_3)$. v) $s(0 \times (x_2 \times x_3))$. vi) $(s(0) + x_7) \times s(x_1 + x_2)$.

b) Para cada uma das L_{Arit}-fórmulas φ que se seguem, calcule $\varphi[a_1]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2]_{E_{Arit}}$.
i) $\perp$. iii) $s(x_1) < (x_1 + 0)$. v) $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.
ii) $x_1 = x_2$. iv) $\neg(x_1 = x_1)$. vi) $(x_1 < x_2) \to ((x_1 + x_3) < (x_2 + x_3))$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, indique, para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor de $\varphi[a_1\binom{x_1}{n}]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2\binom{x_1}{n}]_{E_{Arit}}$.

d) Para cada uma das fórmulas φ da alínea b), indique $(\forall_{x_1}\varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$, $(\forall_{x_1}\varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$, $(\exists_{x_1}\varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$ e $(\exists_{x_1}\varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$.

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é válida para a estrutura E_{Arit}.

f) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é universalmente válida.

6.3 Seja $L = (\{0, \times\}, \{\leq\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\times) = 2$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$. Seja $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ a L-estrutura tal que: a interpretação $\overline{0}$ de 0 é o número inteiro *zero*; a interpretação $\overline{\times}$ de $\times$ é a função *multiplicação* em inteiros; e a interpretação $\overline{\leq}$ de $\leq$ é a relação *menor ou igual do que* em inteiros. Seja $a : \mathcal{V} \to \mathbb{N}_0$ a atribuição, em E, tal que:

$$\forall_{i \in \mathbb{N}_0} \quad a(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \{0\} \\ \\ 2i & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \end{cases} .$$

Para cada um dos seguintes L-termos t, calcule $t[a]_E$.

a) 0. **b)** x_2.
c) $x_1 \times x_2$. **d)** $(0 \times (x_2 \times x_1))$.

6.4 Sejam L, E e a o tipo de linguagem, a estrutura e a atribuição, respetivamente, definidas no exercício 6.3 e sejam φ e ψ as L-fórmulas $0 \leq x_1$ e $x_2 \leq x_2 \times x_1$, respetivamente. Discuta se as fórmulas φ, $\forall_{x_2}\psi$ e $\forall_{x_1}\forall_{x_2}(\varphi \wedge \psi)$ são satisfeitas na estrutura E para a atribuição a. Discuta ainda a validade em E e a validade universal destas fórmulas.

6.5 Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras, para quaisquer fórmulas φ e ψ num tipo de linguagem L, para qualquer variável x.

a) $\exists_x \varphi \Leftrightarrow \forall_x \varphi$;

b) $\models \exists_x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists_x \varphi \wedge \exists_x \psi)$;

c) $\models (\exists_x \varphi \wedge \exists_x \psi) \rightarrow \exists_x(\varphi \wedge \psi)$;

d) $\models (\forall_x \varphi \vee \forall_x \psi) \rightarrow \forall_x(\varphi \vee \psi)$;

e) $\models \forall_x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall_x \varphi \vee \forall_x \psi)$;

f $\models \exists_x \forall_y \varphi \rightarrow \forall_y \exists_x \varphi$;

g) $\models \forall_x \exists_y \varphi \rightarrow \exists_y \forall_x \varphi$;

h) Para toda a L-estrutura E, $E \models \varphi$ ou $E \models \neg\varphi$.

6.6 Seja L um tipo de linguagem com uma constante 0 e um símbolo de relação binário $=$ e seja φ a L-fórmula $\neg((\exists_{x_1}(x_1 = 0)) \vee (x_2 = 0)) \rightarrow (\neg(\exists_{x_1}(x_1 = 0)) \wedge \neg(x_2 = 0))$.
a) φ é uma instância de uma tautologia? **b)** φ é válida em todas as L-estruturas?

6.7 Considere as seguintes afirmações, relativas a um conjunto de números reais.

- O valor absoluto de qualquer número negativo é maior do que algum número positivo.
- Há irracionais negativos, mas todos os irracionais são maiores do que os racionais.

a) Represente as duas afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem adequado, explicitando o tipo de linguagem utilizado.

b) Justifique se as duas afirmações são ou não contraditórias.

6.8 Sejam L um tipo de linguagem, φ uma L-fórmula e x uma variável. Mostre que:
a) $\exists_x \neg\varphi \not\Leftrightarrow \forall_x \varphi$; **b)** $\{\exists_x \neg\varphi, \forall_x \varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

6.9 Sejam L um tipo de linguagem e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_L$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

i) Γ é irrealizável;

ii) Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\Gamma \models \varphi$;

iii) $\Gamma \models \perp$;

iv) Existe $\varphi \in \mathcal{F}_L$ tal que $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \models \neg\varphi$.

6.10 Seja $L = (\{c_1, c_2\}, \{R\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c_1) = \mathcal{N}(c_2) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 2$, um tipo de linguagem. Seja Γ o conjunto formado pelas seguintes L-sentenças:

- $\forall_{x_0} R(x_0, x_0)$;
- $\forall_{x_0} \forall_{x_1} (R(x_0, x_1) \rightarrow R(x_1, x_0))$;
- $\forall_{x_0} \forall_{x_1} \forall_{x_2} ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \rightarrow R(x_0, x_2))$.

a) Indique um modelo de Γ, i.e., uma L-estrutura que valide todas as fórmulas de Γ.

b) Mostre que existem modelos de $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$ e de $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.

c) Mostre que $\Gamma, R(c_1, c_2), R(c_2, c_3) \models R(c_3, c_1)$.

6.11 Considere as três proposições (i) "Todos os homens são mortais", (ii) "Camões é um homem" e (iii) "Camões é mortal".

a) Represente (i), (ii) e (iii) por L-fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3, respetivamente; explicite L.

b) Mostre que $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$.