Dualidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

8 de fevereiro de 2015

Dualidade

antes

- A programação linear visa seleccionar as actividades que melhor usam os recursos disponíveis.

Guião

- A um problema de programação linear, podemos associar um problema dual, um problema equivalente, visto de outra perspectiva.
- As variáveis de decisão do problema dual têm um significado económico, relacionado com o valor dos recursos.
- O problema dual visa encontrar o melhor valor a dar aos recursos quando podem ser usados num conjunto de actividades.

depois

- Iremos complementar estes conceitos com a análise de sensibilidade.

Conteúdo

- Problema dual
- Informação primal e dual num quadro simplex
- Significado económico das variáveis duais
- Relação entre os dois problemas
  - Teorema fraco da dualidade
  - Teorema forte da dualidade
  - Teorema da folga complementar
- Apêndice
  - Justificação do método dos multiplicadores (problema de transportes)

Problema Dual

- Dado um problema *(primal)* de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ suj. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

sendo $A \in \mathrm{IR}^{m\times n}, b \in \mathrm{IR}^{m\times 1}, c \in \mathrm{IR}^{1\times n}, x \in \mathrm{IR}^{n\times 1}$,

- o *problema dual* correspondente é:

$$\begin{array}{ll} \min & yb \\ suj. & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

sendo $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m) \in \mathrm{IR}^{1\times m}$ um vector de *variáveis duais*.

- A variável de decisão dual y_i está associada à restrição i do problema (primal), $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo

PRIMAL		DUAL	
	$\max \quad cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$		$\min \quad yb$ $yA \geq c$ $y \geq 0$
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
suj.	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$	suj.	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$
	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$		$2y_1 + 1y_2 \geq 10$
	$x_1, \; x_2, \; x_3 \geq 0$		$y_1, \; y_2, \; y_3 \geq 0$

Para construir o problema dual, vamos pôr o problema original numa das *Formas canónicas*:

- Problema de *max* e todas as restrições de $\leq$.
- Problema de *min* e todas as restrições de $\geq$.

- O problema dual do problema dual é o problema primal.
- No que se segue, o problema primal é de maximização e o problema dual é de minimização.

Correspondência entre variáveis primais e duais

Regra de correspondência:

(var. folga de uma restrição) $\Leftrightarrow$ (var. decisão dual associada à restrição).

PRIMAL	DUAL
$\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + \mathbf{s_1} = 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + \mathbf{s_2} = 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad\quad + \mathbf{s_3} = 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\ \text{suj.} & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - \mathbf{u_1} = 30 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - \mathbf{u_2} = 20 \\ & 2y_1 + 1y_2 \qquad\quad - \mathbf{u_3} = 10 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0 \end{array}$

Correspondência entre Variáveis		
PRIMAL		DUAL
var. folga	$\left\{ \begin{array}{c} s_1 \Leftrightarrow y_1 \\ s_2 \Leftrightarrow y_2 \\ s_3 \Leftrightarrow y_3 \end{array} \right\}$	var. decisão
var. decisão	$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \Leftrightarrow u_1 \\ x_2 \Leftrightarrow u_2 \\ x_3 \Leftrightarrow u_3 \end{array} \right\}$	var. folga

Valores das variáveis duais no quadro simplex

O quadro simplex fornece os valores das:

- variáveis de decisão do dual: $c_B B^{-1} = y = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$,
- variáveis de folga do dual: $c_B B^{-1} A - c = u = (u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0)$.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	**0**	**0**	**5**	**0**	**15**	500

- Problema dual: $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$.
- Restrições do problema dual são : $yA \geq c$, ou seja, $yA - u = c$.
- O vector das variáveis de folga do problema dual é $u = yA - c$.
- Substituindo $y = c_B B^{-1}$, obtém-se $u = c_B B^{-1} A - c$.
- O valor da função objectivo da solução dual é $yb = (c_B B^{-1}) b = 500$.

Exemplo: verificação

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

- Variáveis de decisão do dual: $(y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$
- Variáveis de folga do dual: $(u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0)$

Modelo dual	Verificação da solução dual
min $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$	min $40(5) + 150(0) + 20(15) = 500$
suj. $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$	suj. $1(5) + 2(0) + 2(15) \geq 30$ (folga $u_1 = 5$)
$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$	$1(5) + 2(0) + 1(15) \geq 20$ (folga $u_2 = 0$)
$2y_1 + 1y_2 \geq 10$	$2(5) + 1(0) \geq 10$ (folga $u_3 = 0$)
$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$	

Significado económico das variáveis duais

Os valores das variáveis de decisão do problema dual traduzem o valor que os recursos têm para o decisor (*preços-sombra*).

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- Quanto aumenta o valor da função objectivo se usar mais uma unidade do recurso da restrição 1?
- Quanto estaria disposto a pagar para a adquirir?
- E relativamente ao recurso da restrição 2?

Preço-sombra: valor que o decisor atribui a uma unidade do recurso,

dado pelo aumento do valor do óptimo da função objectivo resultante de se usar uma unidade adicional do recurso.

Preço-sombra do recurso 1

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- A restrição inicial do recurso 1 é: $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40$
- Na solução óptima, $s_1 = 0$, e usam-se $1(0) + 1(20) + 2(10) = 40$ unidades de recurso 1.

Aumentar a variável não-básica s_1 equivale a

- usar menos unidades do recurso 1, e $\delta z/\delta s_1 = -5$.
- Usar mais unidades do recurso é uma variação no sentido oposto.

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z/\delta(-s_1) = +5$ (o valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).

Preço-sombra do recurso 2

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	**0**	15	500

- O aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo; só aumenta a folga.
- Não há interesse em ter unidades adicionais de recurso 2.
- O preço-sombra do recurso 2 é 0 (variável dual com valor nulo).

Notas

- Os preços-sombra são definidos com respeito a uma solução óptima,
- e são válidos para variações (que podem ser maiores ou menores) em torno da solução óptima (vamos ver em análise de sensibilidade).

- Se a solução óptima for degenerada, a determinação dos preços-sombra é mais complexa.

Discussão

O preço-sombra é um conceito diferente do custo do recurso no mercado!

- E pode haver um recurso com custo baixo no mercado que tenha um preço-sombra elevado, porque esse recurso pode ser indispensável para uma utilização mais eficaz de outros recursos mais valiosos.
- Cada decisor tem um problema diferente e preços-sombra diferentes, e compete no mercado.

Os recursos com maior preço-sombra são os mais críticos:

- Uma pequena alteração na disponibilidade de um recurso com um preço-sombra elevado pode alterar significativamente o valor da solução óptima,
- enquanto uma alteração na disponibilidade de um recurso com um preço-sombra pequeno pode não ser relevante.

O que significa o valor $c_B B^{-1} A_j - c_j$ da actividade j?

- $c_B B^{-1} A_j$ é a soma do (valor de cada unidade de recurso i) * (quantidade de recurso i usado numa unidade da actividade j):

$$c_B B^{-1} A_j = \sum_{i=1}^{m} (c_B B^{-1})_i \ * \ a_{ij}, \quad \forall j.$$

- ou seja, o valor de todos os recursos usados numa unidade da actividade j.

- c_j é o valor de venda de uma unidade da actividade j.

$c_B B^{-1} A_j - c_j$ (na solução óptima de um problema de maximização):

- se $c_B B^{-1} A_j - c_j > 0$, o valor dos recursos usados é maior do que o valor da venda; é melhor não fazer esta actividade (variável não-básica); há outras actividades que usam melhor os recursos,
- se $c_B B^{-1} A_j - c_j = 0$, o valor de venda iguala o valor dos recursos usados; esta actividade (variável básica) dá o maior valor aos recursos.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

Actividade 1: $c_B B^{-1} A_1 - c_1 \quad = \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}} - 30 = 5$

Actividade 2: $c_B B^{-1} A_2 - c_2 \quad = \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}} - 20 = 0$

Como se forma o valor do óptimo, $c_B B^{-1} b$?

Perspectiva primal:

$c_B\ (B^{-1}b) =$ f(valor das vars decisão (c_{ij}), nível das vars decisão (x_{ij}))

exemplo:

$$c_B \ * \ (B^{-1}b) \quad = \quad \boxed{\begin{matrix} 10 & 0 & 20 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

Perspectiva dual:

$(c_B B^{-1})\ b=$ f(valor dos recursos (y_i), nível dos recursos (b_i))

exemplo:

$$(c_B B^{-1}) \ * \ b \quad = \quad \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{matrix}} = 500$$

Teorema fraco da dualidade

Teorema

Se x for uma solução válida do problema primal (max.) e y for uma solução válida do problema dual (min.), então

$$cx \leq yb$$

Prova:

- Se y é uma solução válida do dual, então $y \geq 0$, e podemos pré-multiplicar por y as restrições $Ax \leq b$, obtendo $yAx \leq yb$.
- Se x é uma solução válida do primal, então $x \geq 0$, e podemos pós-multiplicar por x as restrições $yA \geq c$, obtendo $yAx \geq cx$.
- Conjugando as duas relações, obtém-se $cx \leq yb$. $\square$

i.e., qualquer solução válida do problema de maximização tem um valor de função objectivo menor do que ou igual a qualquer solução válida do problema de minimização.

Teorema fraco da dualidade: exemplo

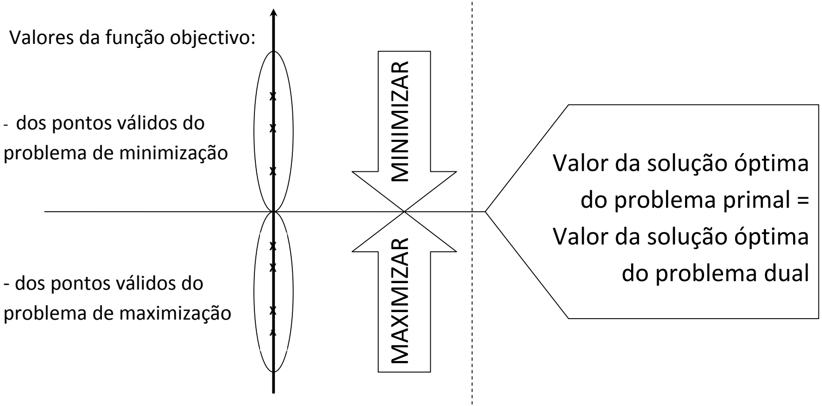
PRIMAL		DUAL	
max	*cx*	*min*	*yb*
	$Ax \leq b$		$yA \geq c$
	$x \geq 0$		$y \geq 0$
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
suj.	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$	suj.	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$
	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$		$2y_1 + 1y_2 \geq 10$
	$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$		$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$

- $(x_1, x_2, x_3)^t = (10, 0, 0)^t$ é um ponto válido do problema primal.
- $(y_1, y_2, y_3) = (30, 0, 0)$ é um ponto válido do problema dual.
- $cx = 30(10) + 20(0) + 10(0) = \mathbf{300}$
- $yb = 40(30) + 150(0) + 20(0) = \mathbf{1200}$
- este par de pontos verifica o teorema fraco da dualidade: $cx \leq yb$, *i.e.*, $\mathbf{300} \leq \mathbf{1200}$.

Relação entre primal e dual (quando óptimo é finito)

Teorema Fraco da Dualidade

Teorema Forte da Dualidade



Relação entre primal e dual (quando um prob. é ilimitado)

Corolário (do teorema fraco da dualidade)

Se o problema primal de maximização tiver um óptimo ilimitado, então o problema dual é impossível.

Prova:

- Não pode haver nenhum ponto válido do problema dual com um valor de função objectivo maior que o valor ilimitado do problema primal,
- porque os coeficientes da função objectivo do problema dual são finitos.
- Portanto, o domínio do dual é vazio, e o problema dual é impossível.

Usando o mesmo argumento, se o problema dual de minimização tiver um óptimo ilimitado, então o problema primal é impossível.

Teorema forte da dualidade

Teorema (Teorema Forte da Dualidade)

Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, i.e.,

$$cx^* = y^* b$$

sendo

- x^* : solução óptima do problema primal
- y^* : solução óptima do problema dual

Prova: O quadro simplex óptimo apresenta soluções válidas para o problema primal e para o problema dual com o mesmo valor finito de função objectivo:

$$y^* b = (c_B B^{-1}) b = c_B (B^{-1} b) = cx^* .$$

Teorema forte da dualidade: quadro óptimo

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

- Solução é válida para o problema primal se:
  - variáveis de decisão e de folga do primal: $B^{-1}b \geq 0$,
  - ou seja, todos os elementos do lado direito do quadro simplex não-negativos.
- Solução é válida para o problema dual se:
  - variáveis de decisão do dual: $y = c_B B^{-1} \geq 0$
  - variáveis de folga do dual: $u = c_B B^{-1} A - c \geq 0$,
  - ou seja, todos os elementos da linha da função objectivo do quadro simplex não-negativos.

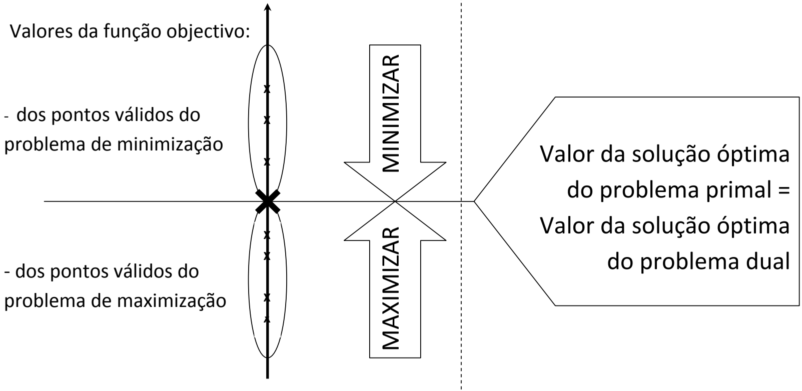
- No quadro óptimo, há pontos válidos dos problemas primal e do dual que têm o mesmo valor de função objectivo.

$\therefore$ São as soluções óptimas dos problemas respectivos.

Relação entre primal e dual (quando óptimo é finito)

Teorema Fraco da Dualidade

Teorema Forte da Dualidade



Teorema forte da dualidade: exemplo

PRIMAL		DUAL	
max	cx	min	yb
	$Ax \leq b$		$yA \geq c$
	$x \geq 0$		$y \geq 0$
max	$30x_1 + 20x_2 + 10x_3$	min	$40y_1 + 150y_2 + 20y_3$
suj.	$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$	suj.	$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$
	$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$		$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$
	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$		$2y_1 + 1y_2 \geq 10$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$		$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- $x^* = (x_1, x_2, x_3)^t = (0, 20, 10)^t$ é o ponto óptimo do problema primal.
- $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$ é o ponto óptimo do problema dual.
- $cx^* = 30(0) + 20(20) + 10(10) = \mathbf{500}$
- $y^* b = 40(5) + 150(0) + 20(15) = \mathbf{500}$
- o óptimo é finito, e verifica o teorema forte da dualidade:
  $cx^* = y^* b = \mathbf{500}$.

Teorema da folga complementar

Relembrar a correspondência entre variáveis primais e duais.

Teorema

No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.

Prova:

- No óptimo, $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$. Há duas igualdades:

$$\begin{cases} y^*Ax^* & = & y^*b \\ cx^* & = & y^*Ax^* \end{cases} \quad \begin{cases} y^*(b - Ax^*) & = & 0 \\ (y^*A - c)x^* & = & 0 \end{cases}$$

- Relativamente à primeira igualdade,
- $(b - Ax^*) = s^*$ é o vector das variáveis de folga do problema primal.
- Para o produto escalar $y^*s^* = 0$, como $y^* \geq 0$ e $s^* \geq 0$,
- se $y_i^* > 0 \Rightarrow s_i^* = 0$; se $s_i^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0, i = 1, \ldots, m$.

O mesmo resultado aplica-se à segunda igualdade $(y^*A - c)x^* = 0$.

Teorema da folga complementar: exemplo

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	2	1	0	0	0	1	20
	5	0	0	5	0	15	500

Folga complementar no quadro simplex óptimo:

- Para uma variável básica do problema primal $\geq 0 \Rightarrow$ coeficiente da linha da função objectivo (variável dual correspondente) é nulo.
- Exemplo: $x_2 = 20, u_2 = 0$, e $x_2 u_2 = 0$.
- Para um coeficiente da linha da função objectivo (variável do problema dual) $\geq 0 \Rightarrow$ variável não-básica primal correspondente é nula.
- Exemplo: $y_3 = 15, s_3 = 0$, e $y_3 s_3 = 0$.

Quadro de Síntese

Relação entre os valores dos óptimos do primal e do dual

Primal		Dual
óptimo finito	$\Leftrightarrow$	óptimo finito
óptimo ilimitado	$\Rightarrow$	problema impossível
problema impossível	$\Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{óptimo ilimitado} \\ \text{problema impossível} \end{array} \right.$

Conclusão

- As variáveis duais traduzem o valor dos recursos, e explicam como se forma o valor de uma actividade.
- As actividades seleccionadas são aquelas que atribuem um maior valor aos recursos.
- O problema do produtor de rações é o problema dual do problema da dieta (ver ficha de aula), e os dois problemas mostram duas perspectivas diferentes da mesma realidade.
- Há muitos outros exemplos de pares de problemas primal-dual.

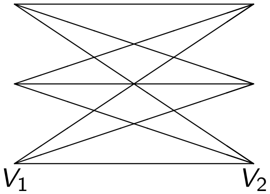
Resultados de aprendizagem

- Construir o problema dual de um problema de programação linear, após colocá-lo numa das formas canónicas.
- Identificar os valores das variáveis de decisão e de folga do problema dual no quadro simplex.
- Conhecer o conceito de preço-sombra de um recurso e o seu significado económico.
- Interpretar o valor de uma actividade como o valor dos recursos nela usados (perspectiva dual de formação do valor).
- Conhecer os teoremas fraco e forte da dualidade e o teorema da folga complementar, e saber ilustrá-los com exemplos.
- Conhecer as relações entre os valores dos óptimos dos problemas primal e dual.

Apêndice

Justificação do método dos multiplicadores

Grafo bipartido, $G = (V_1, V_2, A)$, em dois conjuntos de vértices V_1 e V_2.



Modelo primal do problema de transportes

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{ij: i \in V_1, j \in V_2} c_{ij} x_{ij} \\
suj. & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i \ , \ \forall i \in V_1 \\
& \sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j \ , \ \forall j \in V_2 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{array}
$$

Problema de transportes: estrutura

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}			Variáveis duais
	1	1	1							$=$	a_1	u_1
				1	1	1				$=$	a_2	u_2
							1	1	1	$=$	a_3	u_3
	1			1			1			$=$	b_1	v_1
		1			1			1		$=$	b_2	v_2
			1			1			1	$=$	b_3	v_3
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}			

variáveis duais (multiplicadores) do problema de transportes

- u_i : variável dual associada à restrição do vértice $i \in V_1$
- v_j : variável dual associada à restrição do vértice $j \in V_2$
- Cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0, na posição i do bloco de cima e na posição j do bloco de baixo, respectivamente.

Dual do problema de transportes

Dual

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in V_1} a_i u_i + \sum_{j \in V_2} b_j v_j \\ suj. & u_i + v_j \leq c_{ij} \ , \ \forall i \in V_1, j \in V_2 \\ & u_i, v_j \text{ sem restrição de sinal} \end{array}$$

- as variáveis duais não têm restrição de sinal; iremos justificar esse facto já a seguir.

Método dos multiplicadores

Método dos multiplicadores: passo 1

- Para cada variável básica x_{ij}, fazer: $u_i + v_j - c_{ij} = 0$,
- porque a variável dual correspondente (variável de folga da restrição dual) deve ser nula.

Solução dual: $c_B B^{-1} = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$.

Método dos multiplicadores: passo 2

- Para cada variável não-básica x_{ij}, calcular: $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.
- Como cada coluna A_{ij} tem apenas 2 elementos diferentes de 0,
- $(c_B B^{-1})A_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$
- os valores são simétricos, porque o problema é de minimização.

O valor de δ_{ij} serve para avaliar se a variável não-básica é atractiva.

Construção do dual do problema de transportes - I

Uma restrição de igualdade no problema primal tem associada uma variável dual sem restrição de sinal

- Vamos colocar o problema na forma canónica: problema de *min* com restrições de $\geq$,
- vamos construir o problema dual,
- e confirmar que isso se verifica.

Construção do dual do problema de transportes - II

Problema primal na forma canónica:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}			Variáveis duais
	1	1	1							$\geq$	a_1	u_1^+
	-1	-1	-1							$\geq$	$-a_1$	u_1^-
				1	1	1				$\geq$	a_2	u_2^+
				-1	-1	-1				$\geq$	$-a_2$	u_2^-
							1	1	1	$\geq$	a_3	u_3^+
							-1	-1	-1	$\geq$	$-a_3$	u_3^-
	1			1			1			$\geq$	b_1	v_1^+
	-1			-1			-1			$\geq$	$-b_1$	v_1^-
		1			1			1		$\geq$	b_2	v_2^+
		-1			-1			-1		$\geq$	$-b_2$	v_2^-
			1			1			1	$\geq$	b_3	v_3^+
			-1			-1			-1	$\geq$	$-b_3$	v_3^-
min	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{31}	c_{32}	c_{33}			

Construção do dual do problema de transportes - III

Problema dual correspondente:

	u_1^+	u_1^-	u_2^+	u_2^-	u_3^+	u_3^-	v_1^+	v_1^-	v_2^+	v_2^-	v_3^+	v_3^-		
	1	- 1					1	- 1					$\leq$	c_{11}
	1	-1							1	- 1			$\leq$	c_{12}
	1	- 1									1	- 1	$\leq$	c_{13}
			1	-1			1	- 1					$\leq$	c_{21}
			1	-1					1	- 1			$\leq$	c_{22}
			1	-1							1	-1	$\leq$	c_{23}
					1	- 1	1	- 1					$\leq$	c_{31}
					1	- 1			1	- 1			$\leq$	c_{32}
					1	- 1					1	-1	$\leq$	c_{33}
max	a_1	$-a_1$	a_2	$-a_2$	a_3	$-a_3$	b_1	$-b_1$	b_2	$-b_2$	b_3	$-b_3$		

Fazendo as mudanças de variável

$$u_i = u_i^+ - u_i^-, \quad \forall i$$

$$v_j = v_j^+ - v_j^-, \quad \forall j$$

obtêm-se as variáveis u_i e v_j sem restrição de sinal.

Construção do dual do problema de transportes - IV

Modelo dual com variáveis sem restrição de sinal:

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3		
	1			1			$\leq$	c_{11}
	1				1		$\leq$	c_{12}
	1					1	$\leq$	c_{13}
		1		1			$\leq$	c_{21}
		1			1		$\leq$	c_{22}
		1				1	$\leq$	c_{23}
			1	1			$\leq$	c_{31}
			1		1		$\leq$	c_{32}
			1			1	$\leq$	c_{33}
max	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3		

As variáveis u_i e v_j não têm restrição de sinal.

Fim