Universidade do Minho
Dep. de Matemática

Cálculo I

2009/2010

Licenciatura em Engenharia Informática

Folha 4

Exercício 4.1 Seja $f(x) = x^2$.

a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

b) Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

Exercício 4.2 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Verifique se f é derivável em $x = 1$.

Exercício 4.3 Calcule y', sendo:

a) $y = 2x^3 - x^2 + 7$;

b) $y = \sqrt{x} + x^\pi$;

c) $y = \dfrac{-x}{\sqrt{x}}$;

d) $y = \dfrac{1}{x^2}$;

e) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

f) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

g) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$;

h) $y = x^3 e^x$;

i) $y = x \ln x$;

j) $y = x \ln(x^2 + x + 1)$;

k) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$;

l) $y = \operatorname{tg} x$;

m) $y = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{\ln x}$;

n) $y = e^{\operatorname{sen} x}$;

o) $y = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

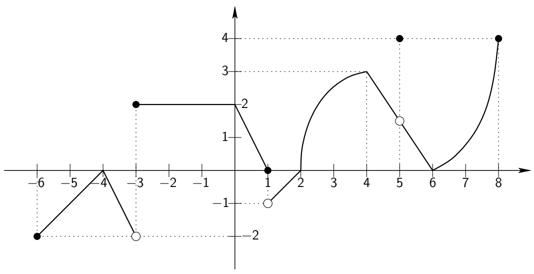
p) $y = x^{-\frac{2}{3}} e^x \operatorname{sen} x$.

Exercício 4.4 Considere a função $f(x) = 1 - e^x$.

a) Determine as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo Ox.

b) Determine uma equação da recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Exercício 4.5 Na figura está representado o gráfico da função f.



a) Indique Df e $D'f$.

b) Indique os pontos de descontinuidade de f.

c) Indique os pontos onde f é contínua mas não tem derivada.

Exercício 4.6 Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2+1} & \text{se } x < 3, \\ -3x & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leq 1, \\ 2x^3 & \text{se } 1 < x < 2, \\ 16 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercício 4.7 Determine a e b de modo que a função $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 3, \\ ax+b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ seja derivável.

Exercício 4.8 De uma função $f :]-2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sabe-se que

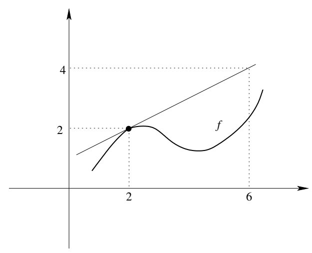
$$f(-1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{1 + \ln(x+2)}{x+2}.$$

a) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$.

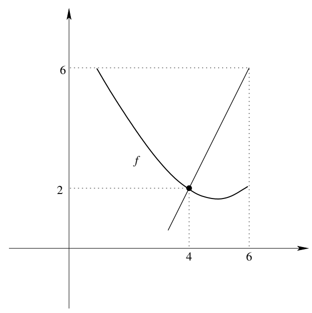
b) Poderá concluir que f é contínua em $x = -1$? Justifique.

c) Calcule $f''(2)$.

Exercício 4.9 A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da recta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (2, 2)$. Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, qual o valor da derivada $g'(2)$?



Exercício 4.10 A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da recta perpendicular a esse gráfico no ponto $(x, y) = (4, 2)$. Sendo $g(x) = f(5x - x^2)$, qual o valor da derivada $g'(1)$?



Exercício 4.11 Usando o teorema de Rolle mostre que a equação $x^2 = x\,\text{sen}x + \cos x$ possui exactamente duas raízes reais.

Exercício 4.12 Mostre que o polinómio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exactamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

Exercício 4.13 Existirá uma função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1, 2]$?

Exercício 4.14 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.

b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $] - 1, 1[$.

c) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

Exercício 4.15 Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x - \mathrm{e}^{x-1}$.

a) Verifique que $g(1) = g'(1) = 0$.

b) Mostre que 1 é o único zero de g.

Exercício 4.16 Determine o polinómio de Taylor de ordem n da função f indicada em torno do ponto a apresentado:

a) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 10, \quad a = 0;$

b) $f(x) = \text{sen}x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 7, \quad a = 0;$

c) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 8, \quad a = 0;$

d) $f(x) = \ln x,\ x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 7, \quad a = 1;$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1},\ x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}, \quad n = 6, \quad a = 0.$

Exercício 4.17 Relativamente a cada função dada no exercício anterior, compare o valor de f e do correspondente polinómio $P_{n,a}$ nos pontos b e c indicados:

a) $b = 1, \ c = 3;$

b) $b = \dfrac{\pi}{3}, \ c = \pi;$

c) $b = \dfrac{\pi}{4}, \ c = \pi;$

d) $b = 1{,}1\,, \ c = 2;$

e) $b = 0{,}1\,, \ c = -1.$

Exercício 4.18 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 6 em torno da origem é dado por

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6\,.$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

Exercício 4.19 Escreva o polinómio $-x^6 + 6\,x^5 - 9\,x^4 - 4\,x^3 + 23\,x^2 - 21\,x + 6$ em potências de $x - 1$.

Exercício 4.20 Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas tal que

$$f(3) = 1,\ f'(3) = -2,\ f''(3) = 3 \ \text{ e } \ f'''(3) = -5\,.$$

Determine os polinómios de Taylor de ordens 2 e 3 da função f em torno do ponto 3. Use os dois polinómios para aproximar o valor de $f(2,9)$.

Exercício 4.21 Utilizando um polinómio de Taylor calcule um valor aproximado de $\sqrt{e}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

Exercício 4.22 Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2 - \mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x - 1}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Exercício 4.23 Indique se são verdadeiras as proposições seguintes:

a) se f e g são funções pelo menos três vezes deriváveis, tais que $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)^3} = 3$, então $f(3) = g(3)$, $f'(3) = g'(3)$, $f''(3) = g''(3)$;

b) se $P_{2,1}(x) = x^2$ é o polinómio de Taylor de ordem 2, no ponto 1, de uma função f, então $f(1) = 0$;

c) se $f(x) = -3x^3 + x^2 + 2 + h(x)$, onde $h(x)$ é tal que $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{h(x)}{(x-3)^4} = 10$, então o polinómio de Taylor de ordem 3, em torno do ponto 3, da função f é $-3x^3 + x^2 + 2$.