



Duração: 90 minutos

Nome:

Número:

Grupo I

Para cada questão deste grupo, assinale qual das afirmações é verdadeira. Cada resposta certa vale 1.5 valores; nenhuma afirmação selecionada vale 0 valores; cada resposta errada ou nula vale -0.5 valores. A cotação mínima neste grupo é de 0 valores.

Questão 1 Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Então f é uma função:

- a) contínua; c) contínua em apenas dois pontos;
b) contínua em apenas um ponto; d) descontínua em apenas dois pontos.

Questão 2 A expressão $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ é igual a:

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$; c) $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 3 No respetivo domínio, a expressão $\frac{\text{sh}(2x)}{2\text{sh}^2(x)}$ é igual a:

- a) $\coth(x)$; b) $\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$; c) $\text{th}(x)$; d) $\frac{1}{\text{sh}^2(x)}$.

Questão 4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$. Se g é uma função definida por $g(x) = f(x^2 - 1)$ então uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 é:

- a) $y = 1 - x$; b) $y = 1$; c) $y = 3 - 2x$; d) $y = 3 - x$.

Questão 5 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^5 + x^3 + 6$. Então a função f :

- a) não tem zeros no intervalo $] - 2, -1[$;
b) tem um único zero no intervalo $] - 2, -1[$;
c) tem exatamente dois zeros distintos no intervalo $] - 2, -1[$;
d) tem, pelo menos, dois zeros distintos no intervalo $] - 2, -1[$.

Questão 6 Uma primitiva da função f definida por $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$ é:

- a) $F(x) = 1 + e^x - \ln(1 + e^x)$; c) $F(x) = 1 + e^x - \arctg(1 + e^x)$;
b) $F(x) = -\frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$; d) $F(x) = \frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$.

Grupo II

Responda, no próprio enunciado, às seguintes questões indicando os cálculos que tiver que efetuar bem como as respetivas justificações.

Questão 7 Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{x+1}{x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}.$

Questão 8 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{\pi}{3} + 2 \arcsen \frac{1}{x}.$

- a) Determine o domínio e o contradomínio de f .
- b) Caraterize a função inversa de f .

Questão 9 Considere a função bijetiva $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \text{sh } \sqrt{x}.$

- a) Caraterize a derivada da função f .
- b) Mostre que $f^{-1}(x) = \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1}).$
- c) Caraterize a derivada da função inversa de f .

Questão 10 Calcule:

a) $\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx;$

b) $\int x^2 \ln(x^2+1) dx.$

(FIM)