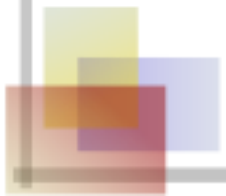


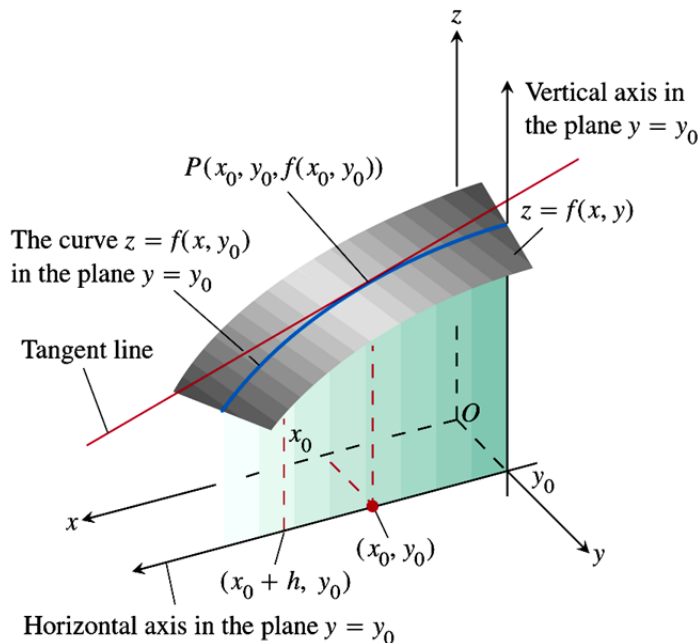
11.3 Derivadas Parciais

Luiza Amalia Pinto Cantão

Depto. de Engenharia Ambiental
Universidade Estadual Paulista – UNESP
luiza@sorocaba.unesp.br



Derivadas Parciais de uma Função de Duas Variáveis em Relação a x

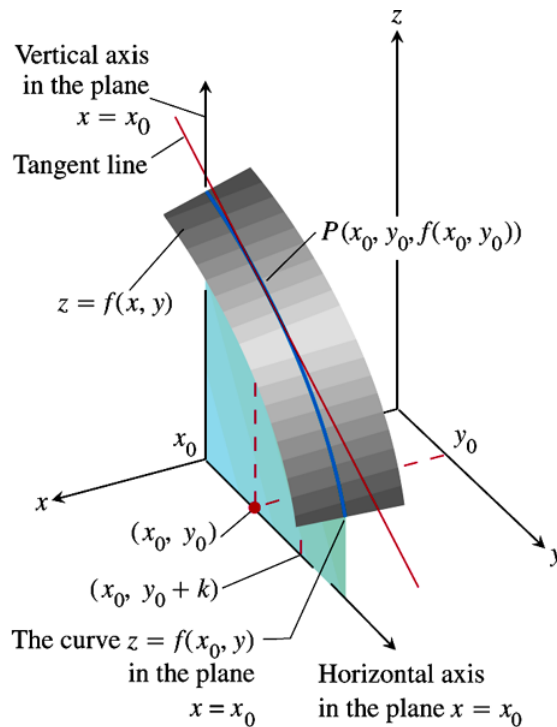


Definição: A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a x no ponto (x_0, y_0) é:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Derivadas Parciais de uma Função de Duas Variáveis em Relação a y

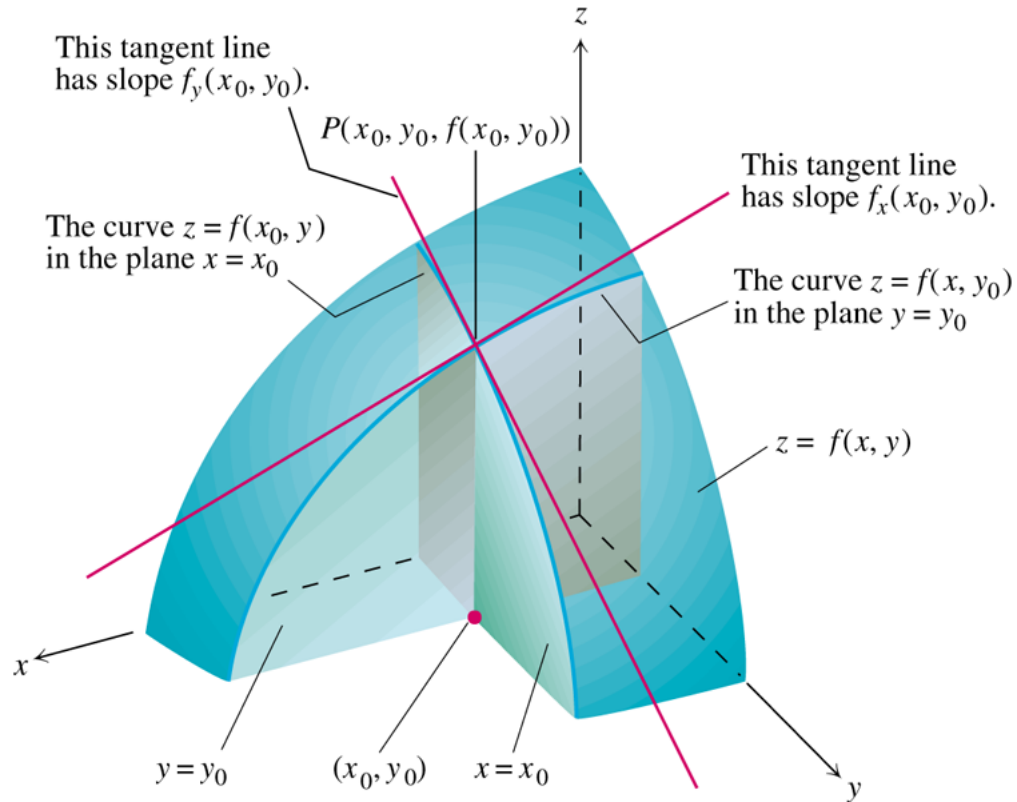


Definição: A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a y no ponto (x_0, y_0) é:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

Derivadas Parciais de uma Função de Duas Variáveis – Combinação dos dois casos



Derivadas Parciais de uma Função de Duas Variáveis – Observações

Notação: Se $z = f(x, y)$, escrevemos:

$$\bullet f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

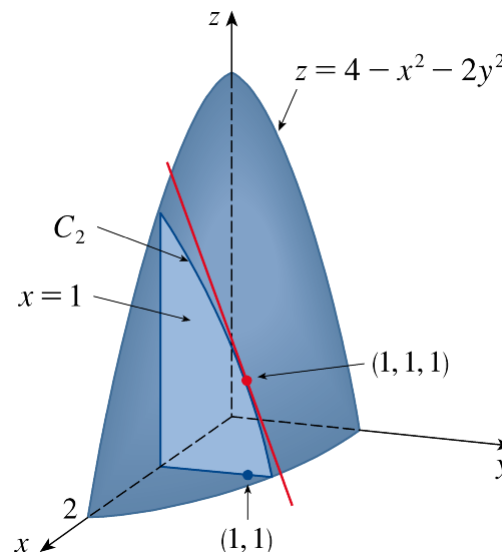
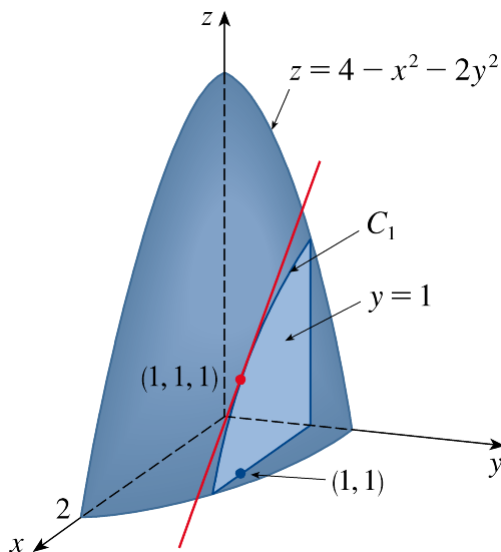
$$\bullet f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Observação: Regra para determinar a Deriva Parcial de $z = f(x, y)$:

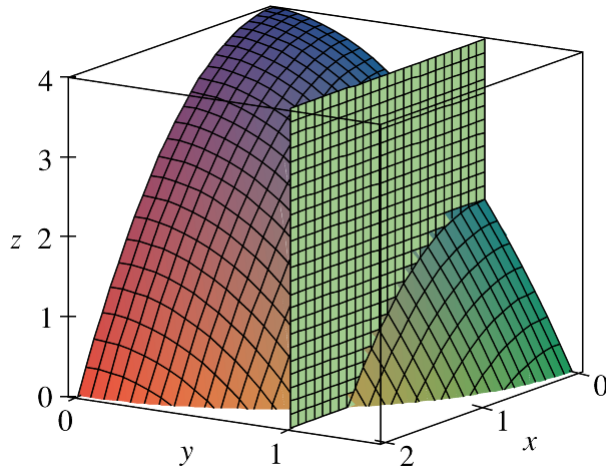
1. Para achar f_x , olhe y como uma constante e diferencie $f(x, y)$ com relação a x ;
2. Para achar f_y , olhe x como uma constante e diferencie $f(x, y)$ com relação a y .

Interpretação

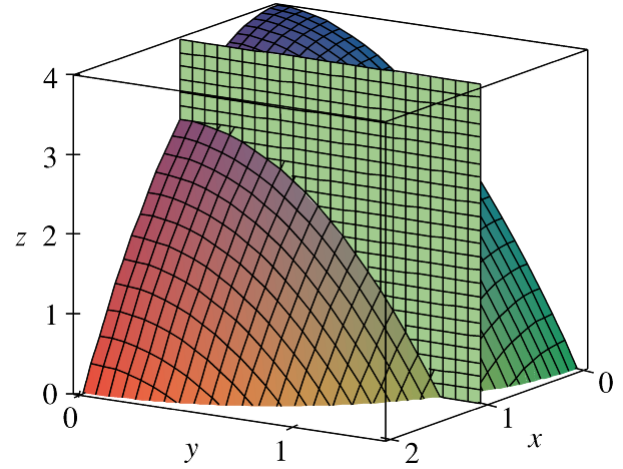
Exemplo: Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, ache $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.



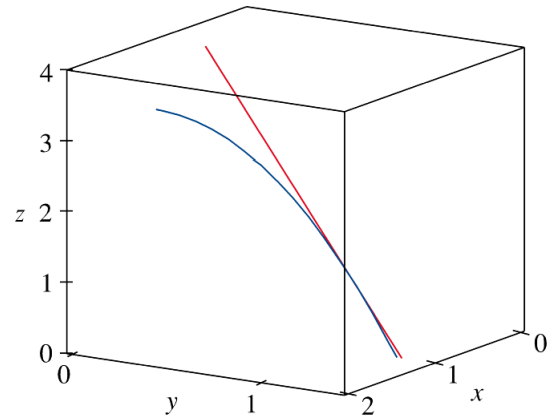
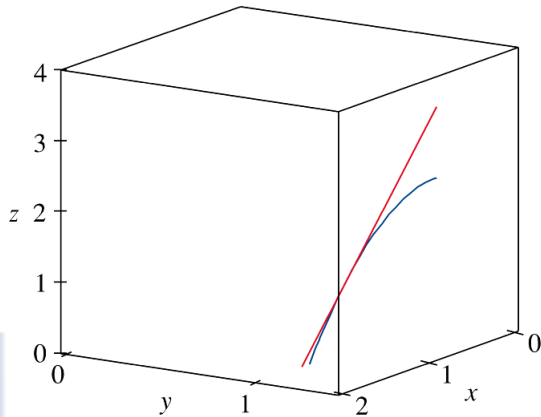
Interpretação – Continuação



f_x :



f_y :

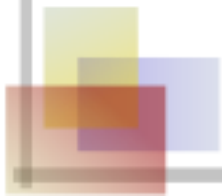


Exemplos

Exemplo (1): Se $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplo (2): Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$



Derivada de mais do que duas variáveis

Três Variáveis: Seja $f(x, y, z)$ uma função de três variáveis x , y e z , então sua derivada parcial em relação a x é definida como:

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

Se $w = f(x, y, z)$ então $f_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w em relação a x quando y e z são mantidos fixos. Analogamente, podemos calcular f_y e f_z .

n -variáveis: Seja $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sua derivada parcial em relação à i -ésima variável x_i é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f \end{aligned}$$

Exemplo (3): Determine f_x , f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Definição: Quando derivamos uma função $f(x, y)$ duas vezes, produzimos suas derivadas de segunda ordem. Essas derivadas são em geral denotadas por:

$$\begin{aligned}(f_x)_x &= f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\(f_x)_y &= f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\(f_y)_x &= f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\(f_y)_y &= f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

A notação f_{xy} significa que primeiro derivamos com relação a x e depois em relação a y , ao passo que no cálculo de f_{yx} a ordem é invertida.

Exemplo (4): Determine as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Derivadas Parciais de Ordem Superior

Teorema das Derivadas Mistas: Se $f(x, y)$ e suas derivadas parciais f_x , f_y , f_{xy} e f_{yx} forem definidas em uma região aberta contendo um ponto (a, b) e todas forem contínuas em (a, b) , então:

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Derivadas de ordem superior: Não há um limite teórico para o número de vezes que podemos diferenciar uma função desde que as derivadas parciais existam. Podemos denotá-las, por exemplo, como:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{xyy}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{xxyy}, \quad \dots$$

Exemplo (5): Calcule f_{xyz} se $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$.

Exercícios Propostos: George B. Thomas – Volume 2

Páginas 281 à 283;

Exercícios: 1 à 62.