1. (4 valores) Considere a equação diferencial

$$x' = -2x + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (a) Classifique a equação dizendo se se trata de uma equação diferencial: ordinária ou parcial, linear ou não-linear, homogénea ou não-homogénea. Justifique.

   (b) Determine a solução geral da equação dada.

   (c) Determine a solução particular x_p que satisfaz a condição inicial $x(0) = 3/2$ e calcule $\lim_{t \to +\infty} x_p(t)$.

2. (4 valores) Considere a equação diferencial

$$x'' + 2x' + x = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   (a) Determine a solução geral da equação $x'' + 2x' + x = 0$.

   (b) Determine uma solução particular da equação (1).

   (c) Use as alíneas anteriores para escrever a solução geral da equação (1). Justifique.

3. (4 valores) Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Determine a solução geral do sistema.

   (b) Determine a solução de equilíbrio do sistema e classifique-a quanto à sua estabilidade.

   (c) Represente graficamente o espaço de fase das soluções do sistema. Justifique.

4. (4 valores) Considere a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = t, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) Calcule a solução geral da equação dada.

   (b) Determine uma solução particular da equação que satisfaça as condições iniciais

$$u(0, x) = x^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 5.$$

5. (4 valores) Considere $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

   (a) Determine a série de Fourier de senos de f.

   (b) Represente graficamente a série da alínea anterior.

   (c) Escreva a solução formal do seguinte problema com condições iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{3}$$