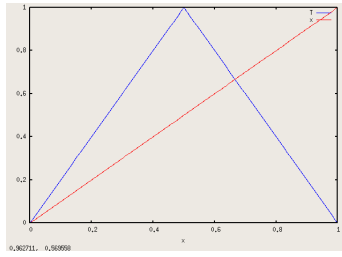
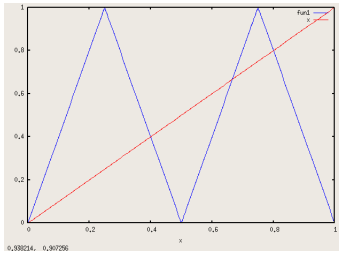
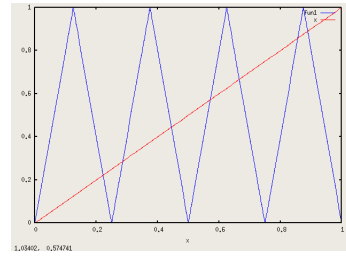


Introdução aos Sistemas Dinâmicos

SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS

1. Considere o sistema dinâmico *tenda* $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definido por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{se } x > 1/2 \end{cases}.$$

 T  T^2  T^3

- (a) Procure os pontos periódicos de T e mostre que $|\text{Fix}(T^n)| = 2^n$.
- (b) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0, 1]$.
- (c) Mostre que a transformação T é topologicamente transitiva.
- (d) O sistema dinâmico *tenda* é caótico?
2. Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_j = 0 \text{ ou } 1\}$ e $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ o sistema dinâmico shift definido por

$$(s_0 s_1 s_2 \dots) \longmapsto (s_1 s_2 s_3 \dots)$$

onde $(s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$. Considere a métrica d em Σ_2 definida por $d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$.

- (a) Em cada alínea determine $d(s, t)$ onde:

- i. $s = (0000 \dots) = (\bar{0})$ e $t = (1111 \dots) = (\bar{1})$,
- ii. $s = (0000 \dots) = (\bar{0})$ e $t = (010101 \dots) = (\bar{01})$,
- iii. $s = (011011011 \dots) = (\bar{011})$ e $t = (010101 \dots) = (\bar{01})$.

- (b) Mostre que $d(s, t) \leq 2$ para quaisquer $s, t \in \Sigma_2$.

- (c) Dê um exemplo de um ponto periódico de período 4.
- (d) Mostre que $|\text{Fix}(\sigma^n)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- (e) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ_2 .
- (f) Mostre que existe um ponto $s \in \Sigma_2$ cuja órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(s)$ é densa em Σ_2 .
- (g) O sistema dinâmico σ é caótico?