1. Considere o problema misto para a equação de difusão (problema da condução do calor):

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ é dada. Usando o formulário, determine a solução formal do problema com $\alpha^2 = 3,\ \ L = \pi$ e

(a) $f(x) = \sin x - 6\sin(4x)$

(b) $f(x) = \sin x - 7\sin(3x) + 5\sin(5x)$

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin(nx)$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

2. Considere o problema misto para a equação de onda (problema da corda vibrante):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{2}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas. Usando o formulário, determine a solução formal do problema com $c = 3, L = \pi$ e

(a) $f(x) = 3\sin(2x) + 12\sin(3x);\ \ g(x) = 0$

(b) $f(x) = 0;\ \ g(x) = -2\sin(3x) + 9\sin(7x) - \sin(10x)$

(c) $f(x) = 6\sin(2x) + 2\sin(6x);\ \ g(x) = 11\sin(9x) - 14\sin(15x)$

(d) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin(nx);\quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

(e) $f(x) = 0;\ \ g(x) = x(\pi - x)$

3. Considere o problema (2) com quaisquer $c > 0$ e $L > 0$.

(a) Mostre que a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)dx$$

é constante, isto é, que $E'(t) = 0$.

(b) Use a alínea anterior para mostrar que a solução do problema (2) é única.

4. Use a função energia dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2 dx$$

para mostrar a unicidade da solução do problema (1).

5. Usando o método da separação de variáveis deduza a solução formal dos seguintes problemas:

(a)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L,\ f \in C(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3}$$

(b)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L,\ f \in C(\mathbb{R}). \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L,\ g \in C(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{4}$$

6. Resolva o problema (4) com $c = 2,\ \ L = 1,\ \ f(x) = \cos^2(\pi x);\ \ g(x) = \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)$.