CAPÍTULO 4

Teoria da Dualidade

1. Introdução

Uma dos conceitos mais importantes em programação linear é o de dualidade. Qualquer problema de PL tem associado um outro problema de PL, chamado o **Dual**. Neste contexto, o problema original denomina-se por **Primal**.

Um dos principais papéis da teoria da dualidade é a interpretação e implementação da análise de sensibilidade, que é uma parte muito importante de um estudo de PL.

2. Formulação do problema Dual

Dado um problema de PL, de maximização, na forma típica :

Maximizar $Z = C\,X$

Sujeito a $A\,X \leq b$

$X \geq 0$

existe um outro problema de PL que lhe está associado, o dual, que consiste em :

Minimizar $W = b\,Y$

Sujeito a $A^T\,Y \geq C$

$Y \geq 0$

Por outro lado, dado um problema de PL, de minimização, na forma típica :

Minimizar $Z = C\,X$

Sujeito a $A\,X \geq b$

$X \geq 0$

existe um outro problema de PL que lhe está associado, o dual, que consiste em :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & W = b\,Y \\ \text{Sujeito a} & A^T Y \leq C \\ & Y \geq 0 \end{array}$$

As regras de transformação que se aplicaram, foram as seguintes :

i) A cada variável do **primal** corresponde uma restrição no **dual**;

ii) A cada restrição do **primal** corresponde uma variável do **dual**;

iii) Os coeficientes da função objectivo do **primal** correspondem aos termos independentes das restrições do **dual**;

iv) Os termos independentes das restrições do **primal** correspondem aos coeficientes da função objectivo do **dual**;

v) A transposta da matriz das restrições do **primal**, é a matriz das restrições do **dual**;

vi) Se o **primal** for um problema de maximização (minimização) na forma típica, então o problema **dual** será um problema de minimização (maximização) na forma típica.

Relações Primal–Dual

Maximização ⟵ **Passagem ao Dual**	⟶ **Minimização**
$\leq$ i-ésima restrição $\geq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 i-ésima variável livre
≥ 0 j-ésima variável ≤ 0 livre	$\geq$ $\leq$ j-ésima restrição $=$
Matriz das restrições — A	Matriz das restrições — A^T
Coeficientes da função objectivo	Termos independentes
Termos independentes	Coeficientes da função objectivo

<u>**Exemplo :**</u>

Primal

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximizar } Z = & 2\,x_1 & + & x_2 & & \\ \text{Sujeito a} & x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \geq & 3 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Minimizar } Z = & 5\,y_1 & + & 3\,y_2 & + & 3\,y_3 & & \\ \text{Sujeito a} & y_1 & + & y_2 & & & \geq & 2 \\ & y_1 & & & + & y_3 & \geq & 1 \\ & & & y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 & & & & \end{array}$$

3. Propriedades fundamentais da dualidade

Nesta secção serão apresentados os principais resultados da dualidade, que relacionam as soluções de qualquer par de problemas duais, em particular as óptimas.

Resultado 1. O valor da função objectivo, Z, de qualquer solução admissível do problema primal, X = (x_1, x_2, ..., x_n), não excede o valor da função objectivo, W, de qualquer solução admissível do problema dual, Y = (y_1, y_2, ..., y_n), isto é,

$$Z = \sum_j c_j \, x_j \leq W = \sum_i b_i \, y_i$$

Resultado 2. Se X* e Y* são soluções admissíveis para os problemas primal e dual, respectivamente, tais que Z* = W*, então X* e Y* são as soluções óptimas do primal e do dual, respectivamente.

Resultado 3.

a) Para qualquer par de problemas duais, a existência de solução óptima (finita) para um deles garante a existência de solução óptima (finita) para o outro e os respectivos valores das funções objectivo são iguais : Z* = W*.

b) As componentes do vector $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$ encontram-se no quadro óptimo do primal na linha (z_j – c_j), associados aos valores de $\mathbf{z_j}$, nas colunas correspondentes às variáveis folga (quando uma restrição não tem associada qualquer variável folga, considera-se a variável que deu origem à matriz identidade de partida).

c) Os valores das variáveis folga na solução óptima do dual, são os valores dos elementos da linha (z_j – c_j), correspondentes apenas às variáveis principais do primal.

Resultado 4. Um problema de programação linear tem solução óptima (finita) se e só se existirem soluções admissíveis para os problemas primal e dual.

Resultado 5. Se para algum dos problemas existir solução não limitada, então o outro não possui soluções admissíveis.

4. Um exemplo

Considere-se o problema das secretárias e das estantes, já resolvido no Capítulo 2. O dual deste problema, é o seguinte :

$$\begin{array}{llcl}
\text{Minimizar} & W = 720\,y_1 + 880\,y_2 + 160\,y_3 & & \\
\text{Sujeito a} & 2\,y_1 + 4\,y_2 + y_3 & \geq & 6 \\
 & 4\,y_1 + 4\,y_2 & \geq & 3 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Passando o problema para a sua forma padrão, tem-se :

Minimizar $W = 720\, y_1 + 880\, y_2 + 160\, y_3$

Sujeito a
$$2\, y_1 + 4\, y_2 + y_3 - y_4 = 6$$
$$4\, y_1 + 4\, y_2 - y_5 + y_6 = 3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \quad (y_6 \text{ é variável artificial})$$

Este problema é equivalente ao seguinte (de Maximização) :

– Maximizar $W = -720\, y_1 - 880\, y_2 - 160\, y_3$

Sujeito a $y \in Y$ (Y é a região admissível do problema dual)

Aplicando o método das Duas–Fases, tem-se :

<u>1ª Fase :</u>

Construção do seguinte problema auxiliar :

Minimizar $W' = y_6$

Sujeito a $y \in Y$

Este problema, é equivalente ao seguinte (de maximização) :

– Maximizar $W' = -\, y_6$

Sujeito a $y \in Y$ (Y é a região admissível do problema dual)

Resolvendo este último problema pelo algoritmo Simplex, vem :

<u>Passo inicial :</u>

	Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	2º m.
	y_3	2	4	1	–1	0	0	6
←	y_6	4	4	0	0	–1	1	3
	$w'_j - c'_j$	–4	–4	0	0	1	0	–3
			↑					

<u>1ª iteração :</u>

Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	2º m.
y_3	–2	0	1	–1	1	–1	3
y_2	1	1	0	0	–1/4	1/4	3/4
$w'_j - c'_j$	0	0	0	0	0	1	0

Desta forma, completou-se a 1ª fase, pois y_6 está fora da base, com $w^* = 0$. Assim, a solução óptima do problema de Minimização é a mesma do de Maximização, agora determinada :

$w' = (0, 3/4, 3, 0, 0, 0)$.

2ª fase :

Utiliza-se o quadro anterior, apenas alterando a última linha :

Passo inicial :

Y_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	2º m.
y_3	–2	0	1	–1	1	–1	3
y_2	1	1	0	0	–1/4	1/4	3/4
$w_j - c_j$	720	880	160	0	0	0	0
$w_j - c_j$	160	0	0	160	60	–60	–1140

Como para todo o j, $w_j - c_j \geq 0$ (para j = 6 não interessa), a solução associada a esta base é óptima. Portanto, tem-se o seguinte :

$$y^* = \left(0, \frac{3}{4}, 3, 0, 0, 0\right) \text{ com } W_{min} = 1140 \ (W_{max} = -1140 \text{ e } W_{min} = -W_{max}).$$

Conclusão :

$x^* = (160, 60, 160, 0, 0)$ com Z_{max} (primal) = W_{min} (dual) = 1140.

$x_1^* = w_4$ com $w_4 - c_4 = 160 \Rightarrow w_4 - 0 = 160$ ($c_4 = 0$) $\Rightarrow x_1^* = w_4 = 160$

$x_2^* = w_5$ com $w_5 - c_5 = 60 \Rightarrow w_5 - 0 = 60$ ($c_5 = 0$) $\Rightarrow x_2^* = w_5 = 60$

$x_3^* = w_1 - c_1 \Rightarrow x_3^* = 160$

$x_4^* = w_2 - c_2 \Rightarrow x_4^* = 0$

$x_5^* = w_3 - c_3 \Rightarrow x_5^* = 0$

5. Algoritmo Dual Simplex

O algoritmo Simplex estudado até aqui, o primal, não é único, nem mesmo, em certos casos, o mais eficiente. Com efeito :

- raramente a utilização do algoritmo Simplex dispensa a técnica das variáveis artificiais;
- a imposição de limites às variáveis aumenta substancialmente o número de restrições;
- em problemas de grande dimensão, este algoritmo torna-se em geral bastante “pesado”;
- alterações posteriores nos parâmetros exigem, em muitos casos, a resolução do problema a partir do inicio.

Por outro lado, os problemas de PL apresentam por vezes estruturas tão particulares, que podem ser resolvidos, mais eficientemente, por métodos especificamente concebidos para o efeito.

Neste sentido, têm vindo a ser desenvolvidos métodos de resolução, cujo objectivo fundamental consiste em reduzir o número de iterações necessário no algoritmo primal Simplex, como é o caso do método Dual Simplex, que deriva do método Simplex.

O ***algoritmo dual Simplex*** consiste num processo, que partindo duma SBA do dual, a qual corresponde inicialmente a uma SBNA do primal, desenvolve-se iterativamente, até se atingir um par de soluções admissíveis do primal e do dual, que são as soluções óptimas respectivas, ou se concluir que o problema apresenta solução não limitada, sendo então o primal impossível.

Em muitos problemas, é mais fácil obter uma solução admissível para o dual do que para o primal. Nestes casos, este algoritmo revela-se útil, em princípio preferível ao algoritmo primal. Também na análise de pós-optimização, este algoritmo dispensa muitas vezes a resolução do problema a partir do inicio, perante variações discretas ou contínuas de parâmetros do modelo.

Ao aplicar-se o algoritmo primal Simplex, passa-se de SBA em SBA do Primal e, simultaneamente, de SBNA em SBNA do Dual, até se atingir uma SBA do Dual (que também é do primal); neste momento, o processo termina, pois está-se em presença da solução óptima do primal, que também é solução óptima do dual. Esquematicamente, tem-se

Primal :	SBA	$\rightarrow \cdots \rightarrow$	SBA	$\rightarrow$ SBA (X^* finito)	/	SBA (Solução não limitada)
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$ $z^* = w^*$		$\updownarrow$ $\qquad\downarrow$
Dual :	SBNA	$\rightarrow \cdots \rightarrow$	SBNA	$\rightarrow$ SBA (Y^* finito)	/	SBNA (Problema impossível)

O algoritmo Dual Simplex, é um processo que, embora aplicado ao problema primal, tem um comportamento homólogo ao algoritmo Primal Simplex aplicado ao problema dual. Este processo consiste em partir duma SBA do Dual, a que corresponde uma SBNA do Primal, prosseguindo até se atingir um par de soluções admissíveis do primal e do dual, que são as soluções óptimas respectivas, ou se concluir que o problema dual apresenta solução óptima não limitada, sendo então o primal impossível. Esquematicamente, tem-se :

Dual :	SBA	$\rightarrow \cdots \rightarrow$	SBA	$\rightarrow$ SBA (Y^* finito)	/	SBA (Solução não limitada)
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$ $w^* = z^*$		$\updownarrow$ $\qquad\downarrow$
Primal :	SBNA	$\rightarrow \cdots \rightarrow$	SBNA	$\rightarrow$ SBA (X^* finito)	/	SBNA (Problema impossível)

O algoritmo Dual Simplex, para problemas de maximização, consiste nos seguintes passos :

Passo 1. Construir o quadro Simplex correspondente à SBA do dual (SBNA do primal) em presença, isto é, uma solução em que $z_j - c_j \geq 0$, para $j = 1, 2, ..., n$.

Passo 2. Se $\overline{b}_i \geq 0, i \in I_B$, o processo termina : está-se em presença de uma solução óptima finita para o problema dual, logo, uma solução óptima finita para o primal.

O processo prossegue no caso de existir algum $\overline{b}_i < 0, \quad i \in I_B$.

Passo 3. Escolher a VNB a sair na base, de acordo com o critério

$\min\limits_{i} \left\{ \overline{b}_i : \overline{b}_i < 0 \right\}$ (escolha da linha do elemento redutor — *linha t*)

Passo 4. Escolher a variável a entrar na base, de acordo com o critério

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{tk}} = \min_j \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{tj}} \right| : \bar{a}_{tj} < 0 \right\}$$ (escolha da coluna do elemento redutor — *coluna k*)

Se $\bar{a}_{tj} \geq 0$, para j = 1, 2, ..., n, o processo termina : está-se em presença de uma solução não limitada para o problema dual ($w \to -\infty$), logo, o problema primal não possui soluções admissíveis. O processo prossegue no caso de existir algum $\bar{a}_{tj} < 0$.

Passo 5. Substituir $\bar{A}_t$ por $\bar{A}_k$ na base, obtendo nova base, tal que $z_j - c_j \geq 0$, j = 1, 2, ..., n; para tal, aplicar o método de eliminação de Gauss–Jordan tomando $\bar{a}_{tk}$ como elemento redutor ("pivot"). Voltar ao passo 2.

Para resolver o problema de degenerescência no dual, que se manifesta pela existência de pelo menos um $z_j - c_j = 0$ para $j \notin I_B$, é possível desenvolver um processo similar ao apresentado para o primal Simplex. Neste caso, perante a situação de empate no critério de entrada, isto é,

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{tk}} = \cdots = \frac{z_r - c_r}{\bar{a}_{tr}} = \min_j \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{tj}} \right| : \bar{a}_{tj} < 0 \right\}$$

procede-se à determinação de

$$\min_{j=k,\dots,q} \left\{ \left| \frac{\bar{a}_{1j}}{\bar{a}_{tj}} \right| : \bar{a}_{tj} < 0 \right\},$$

para j correspondente às variáveis empatadas, indicando o valor obtido a variável a introduzir na base. Se o empate persistir, procede-se da mesma forma com $\bar{a}_{2j}$, e assim sucessivamente.

<u>Exemplo :</u>

Considere-se o seguinte problema de PL :

$$\begin{array}{llcrcl}
\text{Minimizar } Z = & 10\,x_1 & + & 5\,x_2 & & \\
\text{Sujeito a} & 20\,x_1 & + & 50\,x_2 & \geq & 200 \\
 & 50\,x_1 & + & 10\,x_2 & \geq & 150 \\
 & 30\,x_1 & + & 30\,x_2 & \geq & 210 \\
 & & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Passando o problema para a sua forma padrão, tem-se :

$$\begin{array}{llcl} \text{Minimizar } Z = & 10x_1 + 5x_2 & & \\ \text{Sujeito a} & 20x_1 + 50x_2 - x_3 & = & 200 \\ & 50x_1 + 10x_2 - x_4 & = & 150 \\ & 30x_1 + 30x_2 - x_5 & = & 210 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

no qual não se encontra I_3, mas que ao multiplicar-se todas as restrições por (–1) isso já acontece :

$$\begin{array}{llcl} \text{Minimizar } Z = & 10x_1 + 5x_2 & & \\ \text{Sujeito a} & -20x_1 - 50x_2 + x_3 & = & -200 \\ & -50x_1 - 10x_2 + x_4 & = & -150 \\ & -30x_1 - 30x_2 + x_5 & = & -210 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

Para se resolver este problema, tem-se que se converter num de maximização :

$$-\text{Maximizar} \quad Z + 10x_1 + 5x_2 = 0$$

$$\text{Sujeito a} \quad x \in X$$

Portanto, como não existem variáveis artificiais no problema, mas os termos independentes são negativos, tem que se aplicar o algoritmo Dual Simplex :

Passo inicial :

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	2º m.
	x_3	–20	–50	1	0	0	–200
	x_4	–50	–10	0	1	0	–150
←	x_5	–30	**–30**	0	0	1	–210
	$z_j - c_j$	10	5	0	0	0	0
			↑				

x_5 é a variável que sai da base, pois, x_5 = min { –200, –150, –210 } = –210

x_2 é a variável que entra na base, pois, $x_2 = \min\left\{\left|\frac{10}{-30}\right|, \left|\frac{5}{-30}\right|\right\} = \frac{5}{30}$

Aplicando o método de Gauss–Jordan, obtém-se o seguinte quadro (**1ª iteração**) :

	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	2º m.
	x_3	30	0	1	0	–5/3	150
←	x_4	**–40**	0	0	1	–1/3	–80
	x_2	1	1	0	0	–1/30	7
	$z_j - c_j$	5	0	0	0	5/30	–35
		↑					

x_4 é a variável que sai da base, pois, x_4 = min { –80} = –80

x_1 é a variável que entra na base, pois, $x_1 = \min\left\{\left|\frac{5}{-40}\right|, \left|\frac{5/30}{-1/30}\right|\right\} = \frac{5}{40}$

Aplicando de novo o método de Gauss–Jordan, obtém-se o seguinte quadro (**2ª iteração**) :

X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	2º m.
x_3	0	0	1	3/4	–23/12	90
x_1	1	0	0	–1/40	1/120	2
x_2	0	1	0	1/40	–1/24	5
$z_j - c_j$	0	0	0	1/8	1/8	–45

Como os termos independentes são todos não negativos, a solução obtida é admissível, logo é óptima do problema primal. Portanto, a solução óptima é a seguinte :

$$X^* = (2, 5, 90, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad Z_{min} = -Z_{max} = -(-45) = 45 .$$

O problema dual é composto por 3 variáveis de decisão e por 2 restrições (logo, por 2 variáveis folga).

Variáveis de decisão : y_1, y_2 e y_3.

Variáveis folga : y_4 e y_5.

Função objectivo : Max $W = 200\, y_1 + 150\, y_2 + 210\, y_3$.

Solução óptima :

$$y_1^* = z_3 \text{ com } z_3 - c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_3 = 0 \; (c_3 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_1^* = 0$$

$$y_2^* = z_4 \text{ com } z_4 - c_4 = 1/8 \quad \Rightarrow \quad z_4 = 1/8 \; (c_4 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_2^* = 1/8$$

$$y_3^* = z_5 \text{ com } z_5 - c_5 = 1/8 \quad \Rightarrow \quad z_5 = 1/8 \; (c_5 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_3^* = 1/8$$

$$y_4^* = z_1 - c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_4^* = 0$$

$$y_5^* = z_2 - c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_5^* = 0$$

$$Y^* = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0, 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad W_{max} = \left(200 \times 0 + 150 \times \frac{1}{8} + 210 \times \frac{1}{8} = \frac{360}{8}\right) = 45 = Z_{min} .$$