

Outubro 2014

1. (*Partícula num campo de forças dependente do tempo*) Considere a equação de Newton:

$$mx'' = -\lambda x' + F(t)$$

de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$, onde $\lambda \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $x(0) = x_0$ e que $x'(0) = v_0$ determine a trajectória quando a força é:

- (a) $F(t) = g$ (ou seja, constante);
- (b) $F(t) = 3 - t^2$;
- (c) $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$.

2. (*Oscilações mecânicas*) Considere-se um objecto de massa m preso a uma mola elástica que por sua vez está presa num suporte rígido. Se $x(t)$ designar a distância do objecto à posição de equilíbrio no instante t , o movimento do objecto, ao aplicarmos uma força externa $F(t)$, está governado pela EDO linear:

$$mx'' + \lambda x' + kx = F(t)$$

onde k é a constante de elasticidade da mola e λ o coeficiente de atrito.

- (a) (*Oscilações mecânicas livres*) Se o objecto não está submetido a nenhuma força externa, o movimento está governado pela EDO homogénea com coeficientes constantes:

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

- i. Se $\lambda = 0$, o movimento diz-se *não amortecido com oscilações livres*. Determine as soluções $x(t)$ da equação, neste caso, em função da posição e velocidade inicial do objecto ($x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$).
- ii. Se há atrito, distinguimos os casos seguintes:
 - A. $\lambda^2 < 4km$ (*amortecimento sub-crítico*);
 - B. $\lambda^2 = 4km$ (*amortecimento crítico*);
 - C. $\lambda^2 > 4km$ (*amortecimento super-crítico*).

Resolva a equação em cada caso e esboce algumas soluções. Que acontece se λ é negativo?

- (b) (*Oscilações mecânicas forçadas*) Se o objecto está submetido a uma força periódica $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$, o movimento do objecto está governado pela EDO:

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\gamma t)$$

- i. Determine a solução geral quando não há amortecimento ($\lambda = 0$) e $\gamma \neq \sqrt{k/m}$.
- ii. (*Frequência ressonante*) Determine a solução do problema se $\lambda = 0$ e $\gamma = \sqrt{k/m}$.
- iii. Estude as soluções quando há amortecimento $\lambda \neq 0$ (sub-crítico, crítico ou super-crítico).

3. (*Circuitos eléctricos*) A corrente $I(t)$ num circuito RLC, com uma resistência R , indutância L e capacidade C é determinada pela EDO

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = V(t),$$

onde $V(t)$ é a tensão que alimenta o circuito.

- (a) Determine a corrente $I(t)$ num circuito com uma tensão constante $V(t) = V_0$ e esboce algumas soluções.
- (b) Determine a corrente $I(t)$ num circuito alimentado por uma tensão alternada $V(t) = V_0 \sin(\gamma t)$ (compare com a equação das oscilações forçadas amortecidas).
- (c) Determine a frequência de ressonância do circuito.
- (d) Suponha que $L = 1/10$, $R = 2$, $C = 1/260$ e $V(t) = 100 \sin(60t)$. Se $I(0) = I'(0) = 0$, determine $I(t)$ para qualquer instante $t > 0$. Esboce o gráfico de $I(t)$.