Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
27 de janeiro de 2016
[duração 2h]

Cálculo– Época de recurso – Proposta de correção

LEIA ATENTAMENTE

- Se pretende realizar **P1** deve responder às questões **1, 2, 3, 4** e **5**.

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

P1 — 20 valores

1. (10 valores)

Indique se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

(a) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Falso. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \neq 1.$$

(b) $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Falso. Tem-se $\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$.

Falso. Tem-se

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

(d) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivável com $f'(1) = 2$ e $g(x) = f(2x)$. Então g é derivável e $g'(\frac{1}{2}) = 2$.

Falso. Usando a derivada da função composta vem

$$g'(x) = [f(2x)]' = (2x)' f'(2x) = 2f'(2x).$$

Em particular, para $x = \frac{1}{2}$ vem $g'(\frac{1}{2}) = 2f'(1) = 4$.

(e) $\frac{x}{\ln x}$ é um infinitamente grande quando x tende para infinito.

Verdade. O cálculo de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$ conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ à qual é aplicável a regra de L'Hopital. Assim, derivando numerador e denominador separadamente vem $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \longmapsto +\infty$. Pela regra de L'Hopital, conclui-se que $\frac{x}{\ln x}$ é um infinitamente grande quando x tende para infinito.

(f) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja representação se apresenta na figura. Nestas condições,

i. f é contínua.

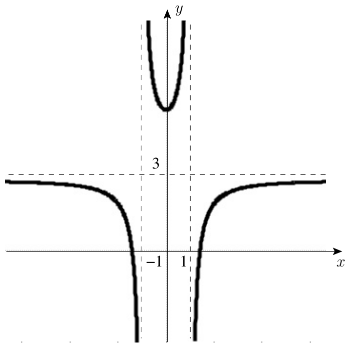
Verdade, por observação do gráfico.

ii. f é um infinitamente grande positivo quando x tende para -1^-.

Falso. Por observação do gráfico constata-se que f é um infinitamente grande **negativo** quando x tende para -1^-

iii. $y = 3$ define uma assíntota horizontal para f.

Verdade. Por observação do gráfico constata-se que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 3$, logo a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal para f.



iv f é injetiva.

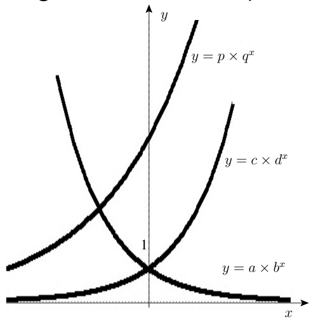
Falso. Por observação do gráfico constata-se que f é uma função par, logo há objetos diferentes com imagens iguais.

v f é derivável.

Verdade. Por observação do gráfico verifica-se que o gráfico da função não apresenta pontos angulosos.

2. (2 valores)

A figura representa graficamente 3 funções exponenciais. Usando um dos símbolos $<, >$ e $=$ complete as afirmações



Comece-se por notar, que a função exponencial só se define para bases positivas. Assim, é imediato que $b, d, q > 0$ pelo que $b^x, d^x, q^x > 0$.

- $a > 0$ porque $a \times b^x$ é sempre positiva
- $b > 0$ porque é a base de uma função exponencial
- $c > 0$ porque $c \times d^x$ é sempre positiva
- $a = c$ porque para $x = 0$ se tem $a \times b^x = c \times d^x$
- $c < p$ porque para $x = 0$ se tem $c \times d^x < p \times q^x$
- $b < 1$ porque $a \times b^x$ é decrescente
- $d > 1$ porque $c \times d^x$ é crescente
- $q > 1$ porque $p \times q^x$ é crescente

3. (3 valores)

O raio de curvatura, R, de uma função real de variável real definida por $y = f(x)$ calcula-se a partir da expressão

$$R = \frac{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}{f''(x)}.$$

Nestas condições, calcule o raio de curvatura da função definida por $y = \cos x$ quando $x = \frac{\pi}{4}$.

Neste caso, sendo $f(x) = \cos x$ tem-se $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $f''(x) = -\cos x$ pelo que

$$R = \frac{(1 + [-\operatorname{sen} x]^2)^{3/2}}{-\cos x} = -\frac{(1 + \operatorname{sen}^2 x)^{3/2}}{\cos x}.$$

Em particular, o raio de curvatura da função em $x = \frac{\pi}{4}$ é

$$R = -\frac{\left(1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{3/2}}{\cos\frac{\pi}{4}} = -\frac{\left(1 + \frac{2}{4}\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

4. (2 valores)

Usando a equação que define a reta tangente ao gráfico da função definida por $y = e^x, x \in \mathbb{R}$, no ponto $x = 0$ justifique que $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A função $f(x) = e^x$ é uma função crescente em $\mathbb{R}$, logo o gráfico de f estará acima do gráfico da reta tangente em $x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Ora a equação que define a reta tangente ao gráfico da função f em $x = a$ é $y = f(x) + f'(x)(x - a)$.

Neste caso, $f(x) = e^x = f'(x)$ e tomando $a = 0$ vem $f(0) = f'(0) = 1$ e

$$y = 1 + x.$$

Assim, $e^x > 1 + x$.

5. (3 valores)

Calcule **três e só três** das seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, \operatorname{sh}^2 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\;dx$

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln x)^2}\,dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

(d) Calcule-se esta primitiva recorrendo ao método de primitivação por partes:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x\;dx &= \int 1\;\operatorname{arctg} x\;dx = x\;\operatorname{arctg} x - \int x\frac{1}{x^2+1}\,dx + \mathcal{C} = x\;\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \mathcal{C}\\ &= x\;\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathcal{C} = x\;\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C}\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\qquad \operatorname{sh}\, x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$