Universidade do Minho
Dep. de Matemática

Cálculo I
Teste 2

Eng. Informática
30/01/2009
[2h 00m]

Nome [ ] Número [ ]

Todas as respostas devem ser justificadas. Responda aos exercícios 5 e 6 nesta folha.

Exercício 1. [4 valores] Calcule as seguintes primitivas "imediatas":

a) $\displaystyle\int \mathsf{sh}(2x)\,\mathsf{ch}^2(2x)\,dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+1}\,dx$.

Exercício 2. [3 valores] Calcule apenas uma das seguintes primitivas:

a) $\displaystyle\int x\,\mathsf{arctg}\,x^2\,dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+6}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$.

Exercício 3. [3 valores] Determine o valor do integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

Sugestão: Utilize a substituição $x = \mathsf{sen}^2\,\theta$.

Exercício 4. [3 valores] Considere a região $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x-2,\ y \leq \sqrt{x}\right\}$.

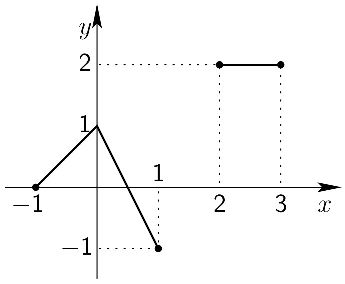
a) Apresente um esboço gráfico da região D.

b) Calcule a área de D.

Exercício 5. [2 valores] Sejam $\displaystyle F(x) = 2x + \frac{1}{k}\int_0^{2x} e^{-t^2}dt$ e $\displaystyle G(x) = \int_{-2x}^{0} (1+e^{-t^2})\,dt$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Indique um valor de k tal que $F'(x) = G'(x)$.

Exercício 6. [5 valores] Considere a função $f : [-1,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está representado na figura.



a) Determine $a \in [-1,1]$ tal que $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{8}$.

b) Considere a função $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$. Calcule o máximo de g.

c) Indique um prolongamento primitivável da função f ao intervalo $[-1,3]$.

d) Apresente um prolongamento da função f ao intervalo $[-1,3]$ que seja integrável mas não primitivável.

e) Defina uma função $g : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, que prolongue a função f e tal que $\displaystyle\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = 0$.