UNIVERSIDADE DO MINHO		11 de janeiro de 2012
	Álgebra Linear	
	$2^{\underline{o}}$ Teste - **A**	
LEI	Esboço de possível resolução	Duração: 2 horas

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. Seja A uma matriz real de ordem $n \in \mathbb{N}$, tal que, $det(A) = -1$.

a) O núcleo da matriz A é o conjunto $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. V F

b) $det(2A) = -2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. V F

c) Se B for uma matriz de ordem n semelhante a A então $det(B) = -1$. V F

d) Zero é valor próprio de A. V F

e) $det((A^{-1})^3) = det(A)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. V F

2. Seja A uma matriz de ordem 3 cujos valores próprios são, -1, 1 e 2. Os vectores $x = (1,1,1)$, $y = (2,1,-1)$ e $z = (0,1,0)$ são vectores próprios da matriz A associados aos valores próprios, -1, 1 e 2, respectivamente.

a) O vector $(6,3,-3)$ é vector próprio da matriz A. V F

b) Os valores próprios da matriz $(A+2I_3)^{-1}$ são 1, 3 e 4. V F

c) x é vector próprio da matriz $(A+2I_3)^{-1}$ associado ao valor próprio 1. V F

d) A dimensão do subespaço próprio associado ao valor próprio 2 é 1. V F

e) $det(A+I_3) = 0$. V F

3. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Se f é aplicação linear definida em $\mathbb{R}^4$ por $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_2 - 3e_3$, $f(e_3) = e_1$ e $f(e_4) = e_4$, então

a) $f(e_1 + 2e_2 - e_3 + 3e_4) = (0,0,0,0)$. V F

b) A matriz da aplicação linear é $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ V F

c) $f(x,y,z,t) = (x+z, x+y, -3y, t)$, para qualquer $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. V F

d) $dim(Im(f)) \leq 4$. V F

e) Não existe nenhum vector $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, tal que, $f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$. V F

II

Responda às questões deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3\alpha^3 & 9 & 3 \\ 2\alpha^2 & 4 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, onde α é um número real.

a) Calcule o determinante da matriz A em função do parâmetro real α.

b) Indique, justificando, para que valores de α a matriz A é invertível.

c) Considerando $\alpha = 1$, determine o núcleo de A, indicando uma sua base e respectiva dimensão.

(a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \underline{3\alpha^3} & \underline{9} & \underline{3} \\ 2\alpha^2 & 4 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha^3(4-2) - 9(2\alpha^2 - 2\alpha) + 3(2\alpha^2 - 4\alpha)$$

$$= \alpha(6\alpha^2 - 18\alpha + 18 + 6\alpha - 12)$$
$$= \alpha(6\alpha^2 - 12\alpha + 1)$$
$$= 6\alpha(\alpha - 1)^2$$

(b) A matriz A é invertível, se $|A| \neq 0$, e de acordo com alínea a), se $6\alpha(\alpha-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$.

(c) Se $\alpha = 1$ tem-se $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \to A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$Nuc(A) = \{(x, 0, -x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Tendo-se $Nuc(A) = \langle (1,0,-1) \rangle$, com $(1,0,-1) \neq (0,0,0)$, e por isso um vector linearmente independente, uma base de núcleo de A é $\{(1,0,-1)\}$.

2. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule a inversa da matriz P.

b) Verifique que a matriz $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são -1, 1 e 2.

c) Diga, justificando, quais os valores próprios da matriz A.

d) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio de maior módulo da matriz A e indique, justificando, a multiplicidade geométrica desse valor próprio.

(a) **1.** pelo método de Guass-Jordan.

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{tendo-se} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. pelo método da matriz adjunta, sabendo-se que $P^{-1} = \frac{1}{|P|} adj(P)$.

$$|P| = \begin{vmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) + 1(-1+1) = 1$$

$$adj(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

(b)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Da alínea anterior, b), tem-se $P^{-1}AP = D$, com D uma matriz diagonal, sendo então matrizes A e D matrizes semelhantes, $A \sim D$, e por isso com valores próprios iguais. Sendo D uma matriz diagonal os seus valores próprios são os elementos da diagonal, -1, 1 e 2, os quais são os valores próprios da matriz A.

(d) O valor próprio de maior módulo da matriz A é $\lambda = 2$.

O subespaço próprio associado a 2, é formado pelos vectores $X \in \mathbb{R}^3$ tais que $(A - \lambda I)X = 0$, para $\lambda = 2$.

$$(A-2I) \to \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$Nuc_{\lambda=2} = \{((x, 0, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Tendo-se $Nuc_{\lambda=2} = \langle (1, 0, 1) \rangle$, com $(1, 0, -1) \neq (0, 0, 0)$, e por isso um vector linearmente independente, uma base de núcleo é $\{(1, 0, 1)\}$, sendo $dimN_{\lambda=2} = 1$.

3. Considere a aplicação

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, x, x+y) \end{array}$$

a) Verifique que T é uma aplicação linear.

Veja-se que,

$$\begin{aligned} & T((a,b)+(c,d)) = T((a+c, b+d)) = (a+c-(b+d), b+d, a+c+b+d) \\ = \ & (a-b, b, a+b) + (c-d, d, c+d) = T((a,b)) + T((c,d)), \ \forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

e

$$T(\alpha(a,b)) = T((\alpha a, \alpha b)) = (\alpha a - \alpha b, \alpha b, \alpha a + \alpha b) = \alpha(a-b, b, a+b) = \alpha T((a,b)), \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) Escreva a matriz que representa a aplicação linear T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Considerando (e_1, e_2) a base canónica de $\mathbb{R}^2$, tem-se que:

$T(e_1) = T((1,0)) = (1, 1, 1)$

$T(e_2) = T((1,0)) = (-1,0,1)$ e então a matriz da aplicação linear T é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Diga, justificando, se a aplicação linear T é injectiva.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Tem-se $Nuc(T) = \{(0,0)\}$, pelo que, T é injectiva.

d) Determine $car(T)$ e classifique, justificando, T quanto à sobrejectividade.

$car(T) = dim(\mathbb{R}^2) - nul(T) \underset{c)}{=} 2 - 0 = 2.$

Uma vez que, $car(T) = 2 < 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, então $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$ e, portanto, T não é sobrejectiva.

Cotação:

I	II - 1	II - 2	II - 3
3.75	2+1+2	1.5+1+1+2	1.5+1.5+1.5+1.25