Problemas de Ondas

Ricardo Mendes Ribeiro

24 de Março de 2011

Funções de onda

1. Verifique que as seguintes equações descrevem a mesma onda progressiva:

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= A \sin\left[kx - \omega t\right] \\
\Psi(x,t) &= A \sin\left[2\pi \frac{x-ct}{\lambda}\right] \\
\Psi(x,t) &= A \sin\left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \\
\Psi(x,t) &= A \sin\left[2\pi \left(\frac{k}{2\pi} x - ft\right)\right] \\
\Psi(x,t) &= -A \sin\left[\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right]
\end{aligned}$$

2. A função de uma onda é: $\Psi(x,t) = 10 \sin(4\pi\, x - 200\pi\, t)$, com x em metros, t em segundos e Ψ em metros. Calcule:

   (a) A amplitude, o comprimento de onda, a frequência e a velocidade de propagação da onda.
   R:[1]

   (b) A expressão da amplitude para as posições $x = 0, x = 0.25$ m, $x = 0.5$ m.
   R:[2]

   (c) A posição da onda nos instantes $t = 0$ e $t = 0.01$ s.
   R:[3]

3. A função de uma onda transversal progressiva é dada por

$$\Psi(x,t) = 5.0 \sin(0.4\pi\, x + 8.0\pi\, t)$$

   onde x e Ψ são expressos em cm e t em s. Calcule a amplitude, o comprimento de onda, a frequência, a velocidade de propagação da onda e o sentido de propagação da onda.

   R:[4]

4. Uma onda sinusoidal propaga-se ao longo de uma corda. Um dado ponto da corda move-se desde o deslocamento máximo até ao deslocamento zero num intervalo de tempo de 0.2 s. Suponha que o comprimento de onda seja igual a 1.2 m. Determine o período, a frequência e a velocidade de propagação da onda.

   R:[5]

5. Escreva a função de uma onda sinusoidal que se propaga no sentido positivo do eixo OX, com amplitude 1.5 m, período 0.04 s e velocidade de propagação 250 m/s, admitindo que no instante inicial ($t = 0$) a função de onda em $x = 0$ era $\Psi = 0.8$ m e a *velocidade transversal* inicial nesse ponto era negativa.

   R:[6]

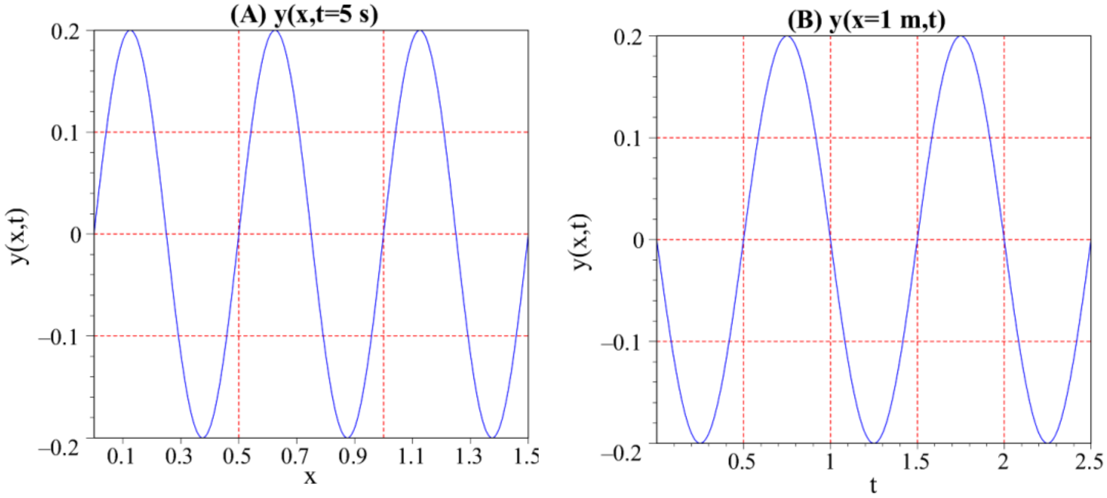

Figura 1:

6. Mostram-se na figura 1 dois gráficos correspondentes a uma onda progressiva transversal que se propaga com uma velocidade positiva segundo a direcção x. x e y estão em metros e t em segundos. No gráfico (A) indica-se a função de onda em função da posição para um tempo de 5 s e no (B) a função de onda em função do tempo para $x = 1$ m. Calcule a amplitude, a frequência e a frequência angular, o período, o comprimento de onda e o número de onda angular e a velocidade de propagação.

   R:[7]

7. A figura 2 mostra a função de onda no instante inicial para uma onda progressiva que se propaga com uma velocidade $c = 5$ m/s segundo a direcção x (x e y estão em metros). Calcule a amplitude, frequência e frequência angular, o período, o comprimento de onda e o número de onda.

   R:[8]

8. Uma onda sinusoidal progressiva tem comprimento de onda 0.27 m e propaga-se com uma velocidade de 13 m/s. Calcule o número de onda e a frequência desta onda.

   R:[9]

9. O comboio de alta velocidade TGV (acrónimo de *Train à Grand Vitesse*) desloca-se num determinado troço do seu percurso a 300 km/h. Calcule a frequência a que passam as carruagens do comboio por um determinado ponto sabendo que o comprimento das carruagens é 30 m.

   R:[10]

10. Um sistema mecânico vibra ligado a uma mola helicoidal e produz uma onda sinusoidal longitudinal que se propaga continuamente ao longo da mola. A frequência da fonte de vibração é igual a 20 Hz e a distância entre duas rarefacções sucessivas na mola é igual a 20 cm. O deslocamento longitudinal máximo de uma partícula da

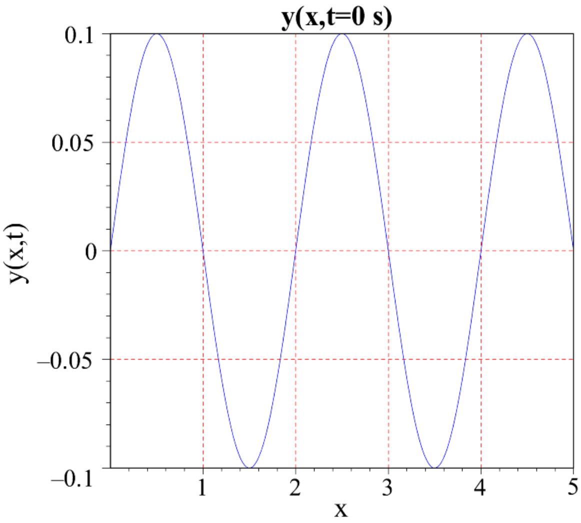

Figura 2:

mola é igual a 2.5 mm e a onda propaga-se no sentido negativo do eixo OX. Suponha que a fonte de vibração esteja no ponto $x = 0$ e que nesse ponto, no instante $t = 0$, o deslocamento seja nulo.

(a) Calcule a velocidade de propagação da onda.

(b) Escreva a equação da onda.
R:[11]

11. Uma pessoa está à entrada de um porto de pesca e vê ondas sinusiodais a aproximarem-se do porto. Conta 50 cristas de onda a passarem pelo local em que se encontra durante 1 minuto e estima a distância entre cristas sucessivas como sendo aproximadamente 3 m (observando um barco ancorado próximo). Calcule o comprimento de onda e o número de onda, a frequência e frequência angular, o período, e a velocidade de propagação.

R:[12]

12. Dois pontos de um fio são observados quando uma onda progressiva passa por eles. Os pontos são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ m. O movimento transversal destes dois pontos é descrito, respectivamente, por:

$$\Psi_1 = 0.2 \sin(3\pi t)$$

$$\Psi_2 = 0.2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Determine o sentido do movimento da onda, a velocidade de propagação da onda, o comprimento de onda e a frequência.

R:[13]

13. Uma onda progressiva transversal é representada matematicamente pela seguinte expressão:

$$\Psi(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2 + 1}$$

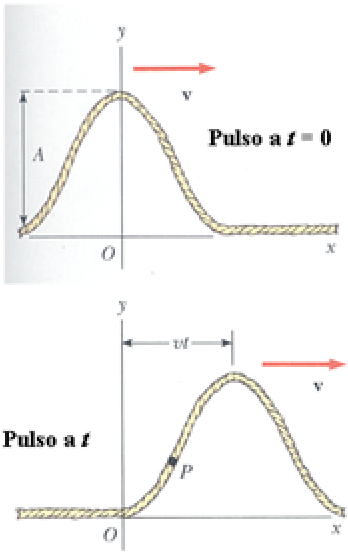

Figura 3:

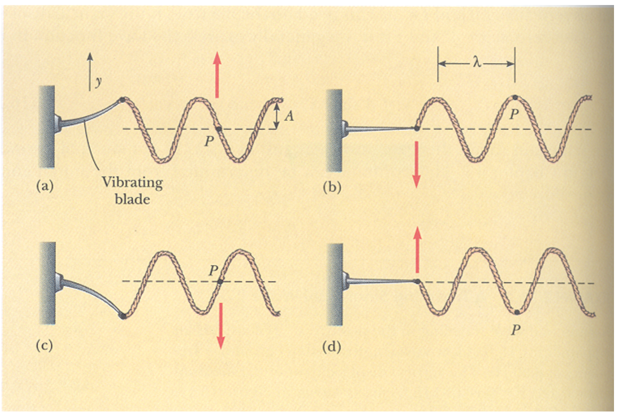

Figura 4:

onde x e Ψ são representados em centímetros e t em segundos. A figura 3 mostra esta onda no instante inicial e num instante genérico t. Calcule a amplitude e a velocidade de propagação da onda.

R:[14]

14. Uma onda sinusoidal desloca-se no sentido positivo do eixo dos xx com uma amplitude de 15.0 cm, um comprimento de onda de 40 cm e uma frequência de 8.00 s^{-1}. O deslocamento vertical do meio a $t = 0$ e $x = 0$ é de 15.0 cm. Calcule:

    (a) O número de onda, a frequência angular, o período e a velocidade de propagação da onda.

    (b) Escreva uma expressão geral para a onda.
    R:[15]

15. Mostra-se na figura 4 um sistema gerador de ondas numa corda. A vareta metálica à qual se encontra ligada a corda no lado esquerdo é posta a oscilar com um movimento

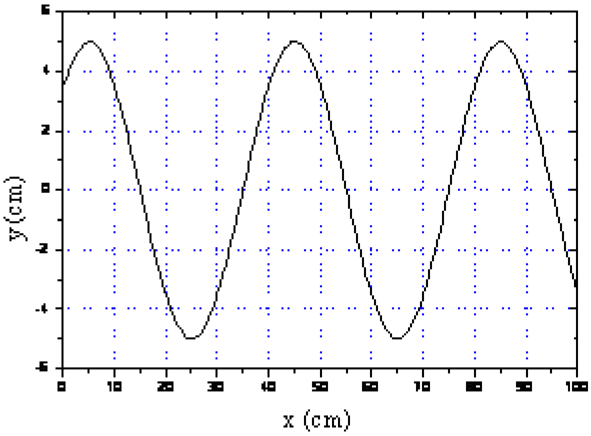

Figura 5:

harmónico simples com frequência 5.00 Hz. A amplitude da oscilação é 12.0 cm e a velocidade de propagação da onda 20.0 m/s.

(a) Determine a frequência angular e o número de onda.

(b) Escreva uma expressão geral para a onda.

(c) Se soubesse que na origem ($x = 0$) a posição inicial ($t = 0$) é zero e a velocidade transversal inicial ($t = 0$) é um valor diferente de zero mas positivo, qual a equação que descreve a onda de forma completa? Quais as semelhanças e diferenças em relação à equação da alínea anterior?
R:[16]

16. Uma onda sinusoidal contínua propaga-se numa corda com velocidade de 50 cm/s. Verifica-se que o deslocamento das partículas da corda no ponto $x = 10$ cm, varia com o tempo de acordo com a equação

$$\Psi(x,t) = 5.0 \sin(1.0 - 4.0t)$$

Determine:

(a) A frequência da onda.

(b) O comprimento de onda.

(c) A equação geral que descreve o deslocamento transversal das partículas da corda, em função da posição e do tempo.
R:[17]

17. Uma onda transversal harmónica simples propaga-se ao longo de uma corda para a esquerda. A figura 5 mostra um gráfico do deslocamento em função da posição, no instante $t = 0$. A velocidade da onda é 12 m/s.

(a) Determine a amplitude, o comprimento de onda, o período e a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda.

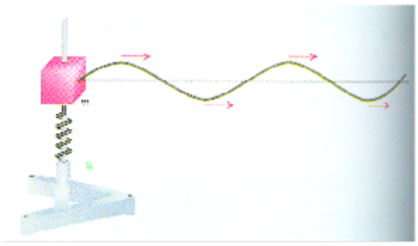

Figura 6:

(b) A equação de propagação da onda sabendo que no instante inicial ($t = 0$), $\Psi(x = 0.05 \text{ m}, t = 0) = 0.05$ m.
R:[18]

18. Uma onda sinusoidal transversal é gerada numa das extremidades de uma longa corda horizontal através de uma massa que se desloca para cima e para baixo com um movimento harmónico simples de 14 cm de amplitude conforme se mostra na figura 6. Este movimento produz uma onda de comprimento de onda $\lambda = 2.5$ m que se propaga no sentido positivo do eixos dos xx com uma velocidade $c = 245$ m/s.

    (a) Qual a frequência da onda progressiva?
    (b) Qual a velocidade transversa máxima de um ponto da corda?
    (c) Qual a aceleração transversa máxima de um ponto da corda?
    R:[19]

19. Uma onda transversal propaga-se numa corda. O deslocamento transversal y é dado por $\Psi = 2\sin(3x - 4t)$, onde x e Ψ são dados em centímetros e t em segundos. Determine a expressão da velocidade transversal de uma partícula da corda em função de x e t.

    R:[20]

Sobreposição de ondas

20. Duas oscilações transversais de uma onda são dadas por:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \sin\left(2x - 3t - \frac{2\pi}{3}\right)\\ \Psi_2 &= \sin(2x - 3t)\end{aligned}$$

Em que a grandeza Ψ mede-se em cm, a distância x em cm e o tempo t em s.

   (a) Ache a expressão da onda total, resultante da sobreprosição destes dois movimentos vibratórios.
   R:[21]

   (b) Classifique os oscilações 1, 2 e total em progressivas ou estacionárias e calcule a amplitude, o comprimento de onda, a frequência e a velocidade de propagação das ondas.
   R:[22]

21. Suponha que tem duas ondas com a mesma frequência $f = 500$ kHz e comprimento de onda $\lambda = 3$ cm, e que partem em fase de origens diferentes. Estas duas ondas encontram-se num ponto que dista 2.5 m da origem da primeira onda e 99 cm da origem da segunda onda.

Qual é a diferença de fase entre as duas ondas nesse ponto?

R:[23]

22. Duas ondas progressivas possuem a mesma amplitude ($A = 3$ cm) e propagam-se no mesmo sentido com a mesma velocidade ($c = 15$ cm/s). As duas possuem o mesmo comprimento de onda ($\lambda = 1.5$ cm) e a diferença de fase entre elas é igual a $\pi/2$ radianos. Obtenha a expressão da onda resultante destes dois movimentos e diga se se trata de uma onda progressiva ou estacionária.

R:[24]

Interferência espacial

23. Dois altifalantes estão colocados como se mostra na figura 7 com uma separação de 3 m. Os altifalantes são colocados a vibrar sinusoidalmente por um amplificador que faz com que emitam ondas sonoras em fase. Um homem encontra-se originalmente no ponto O a 8 m dos altifalantes na linha perpendicular a ambos os altifalantes e que passa pelo ponto médio do segmento que une os altifalantes onde ouve um máximo de intensidade. O homem desloca-se depois para o ponto P situado a 0.350 m do ponto O. Nesse ponto detecta o primeiro mínimo da intensidade sonora.

   (a) Calcule a diferença de percursos das ondas sonoras produzidas em ambos os altifalantes para o ponto P.

   (b) Calcule o comprimento de onda das ondas sinusoidais.

   (c) Determine a frequência da fonte sabendo que nestas condições a velocidade do som no ar (20°C) é de 344 m/s.

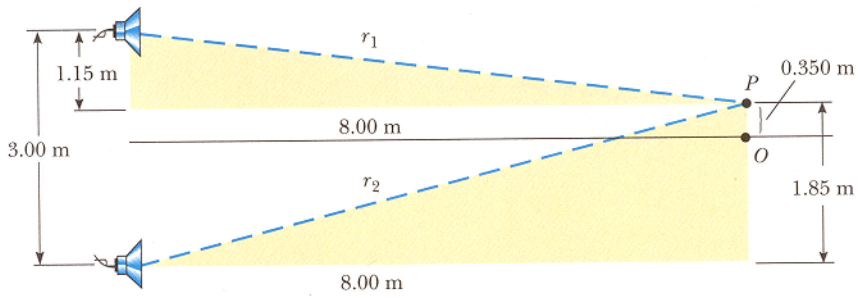

Figura 7:

(d) Se a frequência da fonte de ondas for ajustada de modo que o homem detecte o primeiro mínimo de intensidade sonora a 0.75 m do ponto O, qual é a nova frequência?
R:[25]

24. Quais destes casos se explica por um fenómeno de interferência e quais se explicam por um fenómeno de difracção?

(a) As cores numa mancha de óleo na estrada.

(b) As cores de um holograma.

(c) As cores numa bola de sabão.

(d) As cores reflectidas por um DVD.

25. Duas fendas separadas por uma distância de 1 mm são iluminadas com luz vermelha de comprimento de onda 6.5×10^{-7} m. As franjas de interferência são observadas sobre uma tela colocada a 1 m das fendas.

(a) Determine a distância entre duas franjas brilhantes e entre duas franjas escuras.

(b) Determine a distância da terceira franja escura e da quinta franja brilhante à franja central.

26. Dois altifalantes estão colocados com uma distância de 0.5 m entre si e emitem ambos uma onda sonora (fig. 8). Os altifalantes são colocados a vibrar por um amplificador que faz com que emitam ondas em fase. A 10 m de distância dos altifalantes está colocada uma fila de cadeiras e a uma distância de $D = 1$ m do ponto central está situado o primeiro mínimo de intensidade.

(a) Diga se um ouvinte na cadeira central ouve um máximo ou um mínimo de intensidade do som.

(b) Qual o comprimento de onda e a frequência das ondas sonoras admitindo que a velocidade do som é 344 m/s ?

(c) Qual a diferença de percursos do som emitido pelos dois altifalantes correspondente ao máximo seguinte de intensidade?

(d) Admita agora que o amplificador faz com que as ondas produzidas pelos dois altifalantes estejam desfasadas de 180°. Diga se se tem um máximo ou mínimo de intensidade no ponto central e a $D = 1$ m desse ponto central.
R:[26]

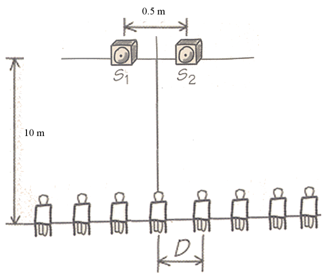

Figura 8:

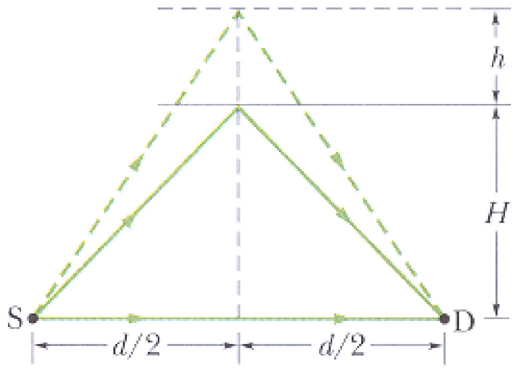

Figura 9:

27. Um arranjo interferométrico usado em radioastronomia consiste em dois radiotelescópios separados por uma certa distância a. As antenas desses telescópios podem ser orientadas para diferentes direcções, mas são sempre mantidas paralelas. Os sinais recebidos pelas antenas são transmitidos a uma estação receptora onde são misturados. Mostre que as direcções de incidência para as quais o sinal resultante é máximo são dadas por $\sin(\theta) = n\lambda/a$

28. Uma fonte S e um detector D de ondas de rádio estão no solo à distância d, um do outro (fig. 9). As ondas de rádio de comprimento de onda λ chegam ao detector depois de um percurso em linha recta ou depois de serem reflectidas por uma certa camada na atmosfera. Quando essa camada atmosférica está à altura H as ondas chegam ao detector em fase. Se a altura da camada reflectora aumentar gradualmente, a diferença de fase entre as ondas no detector muda de forma gradual até que as ondas estão desfasadas de π quando a camada reflectora está à altura $H + h$.

    (a) Exprima λ em função das grandezas geométricas do problema d, h, e H.

    (b) Calcule o comprimento de onda sabendo que fonte e detector se encontram afastados de 100 km, e que $H = 6$ km e $h = 52$ m.
    R:[27]

29. Um pedaço quadrado de filme de celofane com um índice de refracção de 1.5 tem uma secção com o formato de uma cunha, de modo que a sua espessura nos dois lados opostos é a_1 e a_2. Se for iluminado com luz monocromática de comprimento

de onda $\lambda = 6.0 \times 10^{-7}$ m com incidência normal, o número de franjas que aparece por reflexão sobre o filme é 10. Qual a diferença $a_1 - a_2$?

Ondas estacionárias

30. Considere as seguintes ondas:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A\sin(kx - \omega t) \\ \Psi_2 &= A\sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

Suponha que estas duas ondas se sobrepõem.

(a) Determine a equação da onda resultante.

(b) Mostre que a onda resultante é uma onda estacionária.

(c) Calcule os nodos e os antinodos em função do comprimento de onda.
R:[28]

31. Considere uma onda estacionária formada numa corda vibrante e descrita matematicamente por $\Psi = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$. A corda está fixa em duas extremidades e tem comprimento L.

(a) Aplique as condições limite nas extremidades da corda, ou seja, $\Psi(x=0,t) = \Psi(x=L,t) = 0$, e calcule o comprimento de onda dos três primeiros modos normais de vibração em função do comprimento da corda.
R:[29]

(b) Localize os nodos e os antinodos para os três primeiros modos normais de vibração.
R:[30]

32. Duas ondas progressivas sinusoidais deslocam-se ao longo da mesma direcção mas em sentidos opostos num meio unidimendional.

As ondas são transversais e podem ser descritas por

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A\sin(kx - \omega t) \\ \Psi_2 &= A\sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

As ondas têm ambas velocidade de propagação 1.8 m/s a frequência angular 29 rad/s.

(a) Mostre que a onda resultante é uma onda estacionária.

(b) Determine o comprimento de onda das duas ondas progressivas.

(c) Calcule a relação entre o comprimento de onda da onda estacionária resultante e o das ondas progressivas.
R:[31]

33. Duas ondas progressivas deslocam-se em direcções opostas ao longo da mesma direcção e dão origem a uma onda estacionária por sobreposição. As duas ondas são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 4.0\sin(3.0x - 2.0t) \\ \Psi_2 &= 4.0\sin(3.0x + 2.0t) \end{aligned}$$

onde x e Ψ são medidos em centímetros e t em segundos.

(a) Calcule o valor máximo da onda resultante para $x = 2.3$ cm.

(b) Calcule a posição dos nodos e dos antinodos.
R:[32]

34. Duas ondas progressivas sinusoidais deslocam-se numa corda no mesmo sentido e interferem. A amplitude da cada uma das ondas é 9.7 mm e a diferença de fase entre ambas 110°.

    (a) Qual a amplitude da onda formada pela interferência destas duas ondas?

    (b) Qual deveria ser a diferença de fase $\Delta\phi$ entre as ondas que interferem para que a amplitude da onda resultante fosse igual à amplitude das ondas originais ?
    R:[33]

35. Deduza a equação para os níveis energéticos do átomo de Bohr, assumindo que os electrões se comportam como ondas estacionárias.

Soluções

Notes

[1] $A = 10$ m; $\lambda = 0.5$ m; $f = 100$ Hz; $\omega = 200\pi$ rad/s; $c = 50$ m/s
[2]

$$\begin{aligned} \Psi(0,t) &= 10\sin(-200\pi t) \\ \Psi(0.25,t) &= 10\sin(-200\pi t + \pi) \\ \Psi(0.5,t) &= 10\sin(2\pi - 200\pi t) \end{aligned}$$

[3] $\Psi(x,t=0) = 10\sin(4\pi x); \Psi(x,t=0.01\ s) = 10\sin(4\pi x - 2\pi)$
[4] $A = 5$ cm; $\lambda = 5$ cm; $f = 4$ Hz; $c = -20$ cm/s
[5] $T = 0.8$ s; $f = 1.25$ Hz; $c = 1.5$ m/s
[6] $\Psi(x,t) = 1.5\sin\left(\frac{\pi}{5}x - 50\pi\,t + 0.563\right)$
[7] $A = 0.2$ m; $f = 1\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = 2\pi$ rad/s; $T = 1$ s; $\lambda = 0.5$ m; $k = 4\pi$ rad/m; $c = 0.5$ m/s
[8] $A = 0.1$ m; $f = 2.5\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = 5\pi$ rad/s; $T = 0.4$ s; $\lambda = 2$ m; $k = \pi$ rad/m
[9] $k = 23.3$ rad/m; $f = 48.2\ \mathrm{s}^{-1}$
[10] $f = 2.8\ \mathrm{s}^{-1}$
[11] $c = 4$ m/s; $\Psi(x,t) = 2.5\times10^{-3}\sin(10\pi x + 40\pi t)$
[12] $\lambda = 3$ m; $k = 2.1$ rad/m; $f = 0.83\ \mathrm{s}^{-1}$; $\omega = 5.2$ rad/s; $T = 1.2$ s; $c = 2.5$ m/s
[13] $c = -24$ m/s; $\lambda = 16$ m; $f = 1.5$ Hz
[14] $A = 2$ cm; $c = 3$ cm/s
[15] $k = 0.157$ rad/cm; $\omega = 50.3$ rad/s; $T = 0.125$ s; $c = 320$ cm/s;
$\Psi(x,t) = 15\sin\left(0.157x - 50.3t + \frac{\pi}{2}\right)$
[16] $\omega = 31.4$ rad/s; $k = 1.57$ rad/m;
$\Psi(x,t) = 0.120\sin(1.57x - 31.4t)$;
$\Psi(x,t) = 0.120\sin(1.57x - 31.4t + \pi)$
[17] $f = 2\pi$ Hz
$\lambda = 25\pi$ cm;
$\Psi(x,t) = 5\sin(0.08x - 4t + 0.2)$
[18] $A = 5$ cm; $\lambda = 0.4$ m; $T = 3.33\times10^{-2}$ s; $v_{y,max} = 9.4$ m/s
$\Psi(x,t) = 0.05\sin(5\pi x - 60\pi t + \pi/4)$
[19] $f = 98$ Hz; $\omega = 196\pi$ rad/s; $v_{y,max} = 86.2$ m/s; $a_{y,max} = 53081\ \mathrm{m/s}^2$
[20] $v(x,t) = -8\cos(3x - 4t)$ (cm/s)
[21] $\Psi = \sin\left(2x - 3t - \frac{\pi}{3}\right)$
[22] $Progressivas$; $A = 1$ cm; $\lambda = \pi$ cm; $f = 3/2\pi$ Hz; $c = 1.5$cm/s
[23] $\frac{2\pi}{3}$
[24] $\Psi(x,y) = 4.24\sin\left[\frac{4\pi}{3}(x - 15t) + \frac{\pi}{4}\right]$
[25] 13 cm; $\lambda = 26$ cm; $f = 1.3$ kHz; $f = 0.63$ kHz
[26] $máximo$; $\lambda = 10$ cm, $f = 3.5$ kHz; 10 cm; $mínimo$; $máximo$
[27] $\lambda = 4\left[\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (H+h)^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2}\right]$; $\lambda = 25$ m
[28] $\Psi = 2A\sin(kx)\cos(\omega t); x_{nodos} = m\frac{\lambda}{2}; x_{antinodos} = (m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}; m = 0,1,2,...$
[29] $\lambda_n = \frac{2L}{n}, n = 1,2,...$
[30]

$$\begin{aligned} &(Modo fundamental Nodos: x = 0, L; Antinodos: x = L/2) \\ &(2^\circ Harmónica Nodos: x = 0, L/2, L; Antinodos: x = L/4, 3L/4) \\ &(3^\circ Harmónica Nodos: x = 0, L/3, 2L/3, L; Antinodos: L/6, L/2, 5L/6) \end{aligned}$$

[31] 0.39 m; $mesmo$

[32] 4.6 cm; $x_{nodos} = m\frac{\pi}{3}$ cm; $x_{antinodos} = (m + \frac{1}{2})\frac{\pi}{3}$ cm; $m = 0, 1, 2, ...$
[33] 11 mm; $120° = 2.1$ rad