Análise de sensibilidade

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

7 de fevereiro de 2015

Análise de sensibilidade

antes

- Na resolução de um dado problema, assumimos que os dados eram constantes que não podiam ser alteradas.
- Na realidade, os dados podem não estar totalmente correctos, ou podemos querer avaliar se os deveremos alterar.

Guião

- Após determinar a solução óptima, queremos analisar como é que a solução óptima varia quando varia o valor de um dado (passaremos a tratá-lo como um parâmetro),
- ou seja, analisar a sensibilidade da solução óptima ao parâmetro.
- Parâmetros a analisar: quantidade de recurso disponível e coeficiente da função objectivo.

depois

- Os *solvers* de programação linear produzem relatórios que ajudam a efectuar a análise de sensibilidade.

Motivação

- Resolvendo o seguinte modelo com um *solver* de PL:

```
       max:  30x1 +20x2 +10x3;
restricao1:   1x1 + 1x2 + 2x3 <=  40;
restricao2:   2x1 + 2x2 + 1x3 <= 150;
restricao3:   2x1 + 1x2       <=  20;
```

- obtém-se o seguinte relatório com a solução óptima:

Objective	
Variables	result
	500
x1	0
x2	20
x3	10

- Para além de conhecer a solução óptima, fazer 20 unidades da actividade 2 e 10 unidades da actividade 3, com vendas de 500,
- podemos querer saber ...

E se ...?

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- E essa variação é válida dentro de que limites de variação do recurso?
- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

- Os *Relatórios de análise de sensibilidade* têm informação que permite dar directamente resposta a estas questões.
- Os *solvers* de programação linear elaboram-nos usando a definição matricial de PL.

Relatórios de análise de sensibilidade

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conteúdo

- Objectivo da análise de sensibilidade
- Relatórios de análise de sensibilidade
- Alteração num termo independente das restrições
  - Exemplo
- Alteração num coeficiente da função objectivo
  - Exemplo1: variável não-básica no quadro óptimo
  - Exemplo2: variável básica no quadro óptimo
- Apêndices

Objectivo

- A *análise de sensibilidade* estuda as alterações na solução óptima que resultam de variações nos dados do problema (quadro inicial).

A análise de sensibilidade permite:

- analisar as alterações dos valores dos elementos do quadro óptimo quando há uma variação no quadro inicial:
  - num termo independente de uma restrição, b_i,
  - num coeficiente da função objectivo, c_j.
- determinar os limites máximos de variação dos elementos do quadro inicial sem alterar o conjunto de variáveis básicas da solução óptima.

- *Análise pós-optimização* é uma designação alternativa de análise de sensibilidade.

Alteração do termo independente b_i

- O valor do termo independente b_i da restrição $A^i x \leq b_i$ indica frequentemente a quantidade de recurso disponível.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em comprar mais unidades de recurso.

Questões pós-optimização

- Se a quantidade do recurso 1 variasse, como variaria o valor da solução óptima?
- E essa variação é válida dentro de que limites de variação do recurso?

Lembrete (ver diapositivos sobre Dualidade):

- O preço-sombra de um recurso (variável dual associada à restrição do recurso) traduz a variação do valor da função objectivo quando a quantidade disponível do recurso varia.

Exemplo: variação de b_1, da primeira restrição

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

- A quantidade actualmente disponível de recurso 1 é 40 $(b_1 = 40)$.

Lembrete: o preço-sombra do recurso 1 é 5 :

- se a quantidade de recurso 1 aumentar uma unidade, a função objectivo aumenta 5 unidades;
- se a quantidade de recurso 1 diminuir uma unidade, a função objectivo diminui 5 unidades.

Relatório *Duals*

- A coluna *value* apresenta os valores das variáveis do problema dual, *i.e.*, os valores da linha da função objectivo do quadro simplex:
  - {x1,...,x3} $\leftrightarrow$ variáveis de folga do dual (de facto, são os valores simétricos, porque o *solver* usa o vector $-(c_B B^{-1} A - c)$.)
  - {recurso1,...,recurso3} $\leftrightarrow$ variáveis de decisão do dual ($c_B B^{-1}$).

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

- O relatório *Duals* indica que o preço-sombra do recurso 1 é 5.

Relatório *Duals:* interpretação

Duals			
Variables	value	from	till
objective	500	500	500
x1	-5	-20	10
x2	0	-inf	+inf
x3	0	-inf	+inf
recurso1	5	20	240
recurso2	0	-inf	+inf
recurso3	15	0	40

Relativamente ao recurso 1:

- quando a quantidade de recurso 1 (b_1) varia desde 20 até 240,
- o valor do óptimo da função obj. é $500 + 5(b_1 - 40), \forall b_1 \in [20, 240]$,
- e as variáveis básicas óptimas continuam a ser x_3, s_2 e x_3.

- ... como vamos ver ...

Alteração de b_i: quais as alterações no quadro óptimo?

Quais os vectores / matrizes que sofrem alterações no quadro óptimo?

- Quando há uma alteração de um elemento do vector b (vector dos termos independentes das restrições),
- as únicas alterações no quadro óptimo são no vector $B^{-1}b$ e no elemento $c_B B^{-1} b$ (ver quadros no diapositivo seguinte).

- Lembrete: a matriz B é a submatriz de $[\ A \mid I\ ]$ com as colunas das variáveis básicas:

$$B = \begin{array}{ccc} x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{|ccc|} \hline 10 & 0 & 20 \\ \hline \end{array}$$

- O vector c_B tem os coeficientes do vector c das mesmas variáveis.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c|c} A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \end{array}\right]$$

Alterações no vector $B^{-1}b$ e no valor de $c_B B^{-1}b$

O novo vector $B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do vector anterior $B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} B^{-1}b_{novo} &= B^{-1}b_{novo} + B^{-1}b_{ant} - B^{-1}b_{ant} = \\ &= B^{-1}b_{ant} + B^{-1}(b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

O novo valor da função objectivo $c_B B^{-1}b_{novo}$ pode ser expresso em função do valor anterior $c_B B^{-1}b_{ant}$ e de uma parcela de variação:

$$\begin{aligned} c_B B^{-1}b_{novo} &= c_B B^{-1}b_{novo} + c_B B^{-1}b_{ant} - c_B B^{-1}b_{ant} = \\ &= c_B B^{-1}b_{ant} + c_B B^{-1}(b_{novo} - b_{ant}) \end{aligned}$$

Exemplo 1: variação de b_1 (passa a ser $40+\alpha$):

$$b_{ant} = \boxed{\begin{matrix} 40 \\ 150 \\ 20 \end{matrix}}, \quad b_{novo} = \boxed{\begin{matrix} 40+\alpha \\ 150 \\ 20 \end{matrix}}$$

- Novo vector $B^{-1}b_{novo}$:

$$B^{-1}b_{novo} = B^{-1}b_{ant} + B^{-1}(b_{novo} - b_{ant})$$

$$B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 20 \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 10+\alpha/2 \\ 100-\alpha/2 \\ 20 \end{matrix}}$$

- Novo valor de $c_B B^{-1}b_{novo}$:

$$c_B B^{-1}b_{novo} = c_B B^{-1}b_{ant} + c_B B^{-1}(b_{novo} - b_{ant})$$

$$c_B B^{-1}b_{novo} = \boxed{500} + \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 & 15 \end{matrix}} * \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} = \boxed{500+5\alpha}$$

Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de b_1

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	$40+\alpha$
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	$10+\alpha/2$
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	$100-\alpha/2$
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	$500+5\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação máxima de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $B^{-1}b_{novo}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo no lado direito do quadro, e é necessário usar o simplex dual para determinar o novo quadro óptimo.

Determinação da variação máxima de α, e de b_1

- Variação máxima de α :

$$B^{-1}b_{novo} = \boxed{\begin{array}{c} 10+\alpha/2 \\ 100-\alpha/2 \\ 20 \end{array}} \geq \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq -20 \\ \alpha \leq 200 \end{cases}$$

ou seja,

$$-20 \leq \alpha \leq 200.$$

- Variação máxima de b_1 :

$$40-20 \leq b_1 \leq 40+200,$$

ou seja,

$$20 \leq b_1 \leq 240.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Duals*.

Alteração num coeficiente da função objectivo

- O valor de um coeficiente c_j da função objectivo está frequentemente relacionado com o preço de venda ou com o lucro associado a uma actividade.
- O valor pode alterar-se ou podemos estar interessados em alterá-lo para tornar uma actividade mais competitiva.

Questões pós-optimização

- Se o preço da actividade 3 descesse, será que ainda seria atractiva?
- Qual o limite dessa descida para ainda ser atractiva?
- Qual o preço mínimo da actividade 1 para ela ser atractiva?

Relatório *Objective*

- Os coeficientes da função objectivo são $(c_1, c_2, c_3) = (30, 20, 10)$.
- Não há alteração das actividades atractivas (variáveis básicas na solução óptima) se os coeficientes de custo se mantiverem dentro do intervalo definido pelas colunas **from** e **till**.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

- ... como vamos ver ...

Alteração de c_j: quais as alterações no quadro óptimo?

- Há alterações nas matrizes e nos vectores do quadro óptimo que envolvem os coeficientes de custo que se alteram nos dados iniciais.
- É necessário distinguir 2 casos:

Caso I: Variável é **não-básica** no quadro óptimo

- só se altera um elemento do vector c,
- e só há alterações no vector $c_B B^{-1} A - c$ do quadro final;

Caso II: Variável é **básica** no quadro óptimo

- alteram-se um elemento do vector c e um elemento do vector c_B (que é construído a partir de c),
- e há alterações nos vectores $c_B B^{-1} A - c$, $c_B B^{-1}$ e $c_B B^{-1} b$ do quadro final.

Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1} b \\ \hline \end{array}$$

Alterações nos vectores $c_B B^{-1} A - c$ e $c_B B^{-1}$

Cada novo vector pode ser expresso em função do vector anterior e de uma parcela de variação:

Caso I: Variável é **não-básica** no quadro óptimo

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} A - c_{novo} &= c_B B^{-1} A - c_{novo} + c_{ant} - c_{ant} = \\ &= (c_B B^{-1} A - c_{ant}) + (c_{ant} - c_{novo}) \end{aligned}$$

Caso II: Variável é **básica** no quadro óptimo

$$\begin{aligned} c_{B_{novo}} B^{-1} &= c_{B_{novo}} B^{-1} + (c_{B_{ant}} - c_{B_{ant}}) B^{-1} \\ &= c_{B_{ant}} B^{-1} + (c_{B_{novo}} - c_{B_{ant}}) B^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} &= c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} - c_{B_{ant}} B^{-1} A + c_{B_{ant}} B^{-1} A + c_{ant} - c_{ant} \\ &= c_{B_{ant}} B^{-1} A - c_{ant} + (c_{B_{novo}} - c_{B_{ant}}) B^{-1} A + (c_{ant} - c_{novo}) \end{aligned}$$

Exemplo 2: variação de c_1

- Como a actividade 1 não é atractiva, interessa analisar o aumento do valor do coeficiente c_1, que passa a ser igual a $30+\alpha$,

Caso I: Variável x_1 é não-básica no quadro óptimo

$$c_{ant} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10}$$

$$c_{novo} = \boxed{30+\alpha \quad 20 \quad 10}$$

Novo vector $c_B B^{-1} A - c_{novo}$:

$$c_B B^{-1} A - c_{novo} = \boxed{5 \quad 0 \quad 0} + \boxed{-\alpha \quad 0 \quad 0} =$$

$$= \boxed{5-\alpha \quad 0 \quad 0}$$

Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_1

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5-\alpha$	0	0	5	0	15	500

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação máxima de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{novo}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Determinação da variação máxima de α, e de c_1

- Variação máxima de α :

$$c_B B^{-1} A - c_{novo} \quad = \quad \boxed{5-\alpha \quad 0 \quad 0}$$

$$\left\{ \; 5-\alpha \geq 0 \right. \qquad\qquad \left\{ \; \alpha \leq 5 \right.$$

ou seja,

$$-\infty \leq \alpha \leq 5.$$

- Variação máxima de c_1 :

$$-\infty \leq c_1 \leq 30+5,$$

ou seja,

$$-\infty \leq c_1 \leq 35.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

Relatório *Objective:* interpretação

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_1 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 enquanto o valor associado à actividade x_1 for inferior a 35.

- Para além desse limite, a actividade não-básica x_1 tornar-se-á atractiva para entrar na base, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Exemplo 3: variação de c_3

- Como a actividade 3 é atractiva, interessa analisar o decremento do valor do coeficiente c_3, que passa a ser igual a $10 - \alpha$,

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

$$c_{ant} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10}$$

$$c_{novo} = \boxed{30 \quad 20 \quad 10-\alpha}$$

$$c_{B_{ant}} = \boxed{10 \quad 0 \quad 20}$$

$$c_{B_{novo}} = \boxed{10-\alpha \quad 0 \quad 20}$$

(continua)

Exemplo 3: variação de c_3 (cont.)

Caso II: Variável x_3 é básica no quadro óptimo

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1}$:

$$c_{B_{novo}} B^{-1} = \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 15 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{ccc} -\alpha & 0 & 0 \end{array}} * \boxed{\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccc} 5-\alpha/2 & 0 & 15+\alpha/2 \end{array}}$$

Novo vector $c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo}$ (após efectuar todos os cálculos):

$$c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} = \boxed{\begin{array}{ccc} 5+\alpha/2 & 0 & 0 \end{array}}$$

Exemplo: quadro óptimo quando há uma variação de c_3

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

- Este quadro é óptimo dentro dos limites de variação máxima de α, *i.e.*, enquanto todos os elementos de $c_B B^{-1} A - c_{novo}$ e de $c_{B_{novo}} B^{-1}$ forem não-negativos.
- Se o valor de α estiver para além desses limites, haverá um elemento negativo na linha da função objectivo, e é necessário usar o simplex primal para determinar o novo quadro óptimo.

Determinação da variação máxima de α, e de c_3

- Variação máxima de α :

$$c_{B_{novo}} B^{-1} A - c_{novo} = \boxed{5+\alpha/2 \quad 0 \quad 0} \geq \tilde{0}$$

$$c_{B_{novo}} B^{-1} = \boxed{5-\alpha/2 \quad 0 \quad 15+\alpha/2} \geq \tilde{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5+\alpha/2 \geq 0 \\ 5-\alpha/2 \geq 0 \\ 15+\alpha/2 \geq 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 10 \\ \alpha \geq -30 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$-10 \leq \alpha \leq 10.$$

- Variação máxima de c_3 :

$$10-10 \leq c_3 \leq 10-(-10),$$

ou seja,

$$0 \leq c_3 \leq 20.$$

Estes são os limites apresentados no relatório *Objective*.

Relatório *Objective:* interpretação

Relativamente ao coeficiente da função objectivo c_3 :

- A solução óptima terá como variáveis básicas óptimas x_3, s_2 e x_2 enquanto o valor associado à actividade x_3 se mantiver entre 0 e 20.

- Se o valor for inferior a 0, a actividade x_3 deixa de ser atractiva (ver apêndice).
- Se o valor for superior a 20, a actividade x_3 permanece atractiva, mas a solução óptima terá outras variáveis básicas (ver apêndice).

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

Conclusão

- A análise de sensibilidade permite avaliar alternativas ao cenário actual, e ajuda em processos de decisão.
- Análises semelhantes às efectuadas podem ser feitas quando há mais de um parâmetro a variar simultaneamente.
- É também possível fazer uma análise de sensibilidade para a variação dos coeficientes tecnológicos, os elementos a_{ij} da matriz A.

Resultados de aprendizagem

- Descrever os objectivos da análise de sensibilidade.
- Interpretar os relatórios de análise de sensibilidade produzidos por um *solver* de programação linear.
- Para uma variação de um elemento do lado direito das restrições e para uma variação de um coeficiente da função objectivo:
  - Saber identificar as matrizes e os vectores que têm alterações no quadro óptimo quando há uma variação num dado vector ou matriz do quadro inicial.
  - Determinar as alterações no quadro óptimo quando há uma variação num dado vector ou matriz do quadro inicial.
  - Determinar os limites máximos de variação de um elemento no quadro inicial para a solução básica de manter a mesma.

Apêndices

Como usar a informação dada pelos preços-sombra?

Após determinar a solução óptima,

- Será que devo usar mais unidades de um dado recurso?
- Ou será que devo usar menos?

Resposta: depende do preço-sombra e do custo do recurso no mercado:

- Se o custo for menor, devo comprar mais unidades.
- Se o custo for maior, devo comprar menos unidades.

Atenção: o preço-sombra não é constante de uma forma ilimitada:

- há um limite acima do qual o preço-sombra decresce,
- e um limite abaixo do qual o preço-sombra aumenta.

- Exemplo: para o recurso 1, as soluções óptimas do problema para valores de 20-ϵ e 240+ϵ indicam:
- se a quantidade for um pouco menor do que 20, o preço-sombra é 10; se for um pouco maior do que 240, é 3.333.

Exemplo (variação do recurso 1, *cæteris paribus*$^{(*)}$)

- Resolvendo o problema para vários valores do *parâmetro* recurso 1:

unidades de recurso 1:	20-ϵ	20	...	40	...	240	240+ϵ
preço-sombra	10	5	...	5	...	5	3.333
valor f.objectivo		**400**	...	**500**	...	**1500**	

Em cada cenário, o custo unitário das unidades de recurso 1 é diferente, e o lucro = vendas (valor f.objectivo) - custo das unidades usadas:

unidades de recurso 1:	20-ϵ	20	...	40	...	240	240+ϵ
custo de mercado=4/unid.		80	...	160	...	960	
lucro		**320**	...	**340**	...	**540**	
custo de mercado=5/unid.		100	...	200	...	1200	
lucro		**300**	...	**300**	...	**300**	
custo de mercado=6/unid.		120	...	240	...	1440	
lucro		**280**	...	**260**	...	**60**	

- que fazer em cada cenário? porque é que os preços estabilizam?

(*) tudo o resto igual

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $20+\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = -10-\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

1. Decréscimo do preço associado à actividade x_3

- Qual a variável não-básica que se tornaria atractiva se o preço associado à actividade x_3 fosse igual a $0-\epsilon$ (*i.e.*, $\alpha = 10+\epsilon$)?
- Qual a variável básica que sairia da base?

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	30	-20	$-(10-\alpha)$	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha/2$	0	0	$5-\alpha/2$	0	$15+\alpha/2$	$500-10\alpha$

2. Relatório *Objective* (cont.)

- O elemento da coluna **from value** só é significativo para variáveis não-básicas na solução óptima.
- Quando x_1 é atractiva (coluna pivot), entra na base, e toma o valor $20/2 = 10$.
- Este valor corresponde à menor razão positiva (linha pivot), saindo da base a variável x_2 (ver diapositivo seguinte).

Objective				
Variables	**from**	till	from value	till value
objective	500	500	500	500
x1	-inf	35	10	0
x2	17.5	+inf	-inf	0
x3	0	20	-inf	0

2. Exemplo

Quadro Inicial

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$-(30+\alpha)$	-20	-10	0	0	0	0

Quadro Óptimo

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_3	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s_2	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x_2	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	$5+\alpha$	0	0	5	0	15	500

Fim