introdução aos sistemas dinâmicos

resolução de exercícios da folha bifurcações

3.

Consideremos a família a-um-parâmetro de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 - a$, para $x \in \mathbb{R}$, com a um parâmetro pertence a $\mathbb{R}$.

3.1

Comecemos por encontrar os pontos fixos de f_a: para tal, vamos escrever

$$f_a(\bar{x}) = \bar{x}^2 - a = \bar{x},$$

ou seja,

$$\bar{x}^2 - \bar{x} - a = 0$$

Como facilmente se reconhece, as duas soluções da equação acima são

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{1+4a}\big), \qquad a > -1/4$$

e

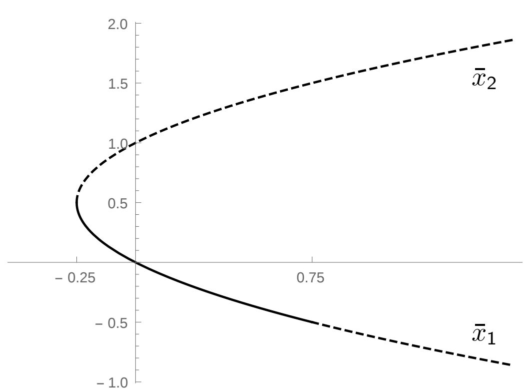
$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{1+4a}\big), \qquad a > -1/4,$$

ou seja, f_a não tem qualquer ponto fixo, para $a < -1/4$, e tem dois pontos fixos quando $a = -1/4$. Ora, uma vez que $f_a'(x) = 2x$, podemos retirar as seguintes conclusões relativamente à estabilidade do ponto fixo $\bar{x}_1$:

$$-1/4 < a < 3/4 \quad \Longrightarrow \quad |f_a'(\bar{x}_1)| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}_1 \text{ é um ponto fixo atractivo de } f_a$$

$$a > 3/4 \quad \Longrightarrow \quad |f_a'(\bar{x}_1)| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}_1 \text{ é um ponto fixo repulsivo de } f_a$$

Quanto à estabilidade do segundo ponto fixo, facilmente se conclui que $|f_a'(\bar{x}_2)| > 1$, para todo $a > -1/4$, donde $\bar{x}_2$ é um ponto fixo repulsivo. Deste modo, o diagrama de bifurcação de f_a relativamente aos seus pontos fixos surge como



3.2

Como ficou claro na alínea anterior, a primeira das bifurcações de f_a, no sentido crescente dos valores do parâmetro, ocorre para $\bar{x} = -1/2$, quando $a_o = -1/4$. Atendendo ao formulário, temos que:

1. $f_{a_o}(\bar{x}) = (1/2)^2 + 1/4 = 1/2 = \bar{x}$
2. $f'_{a_o}(\bar{x}) = 2 \times 1/2 = 1$
3. $f''_{a_o}(\bar{x}) = 2 \neq 0$
4. $\dfrac{\partial}{\partial a} f_a(\bar{x}) = -1 \neq 0\,, \quad$ para $a = a_o$,

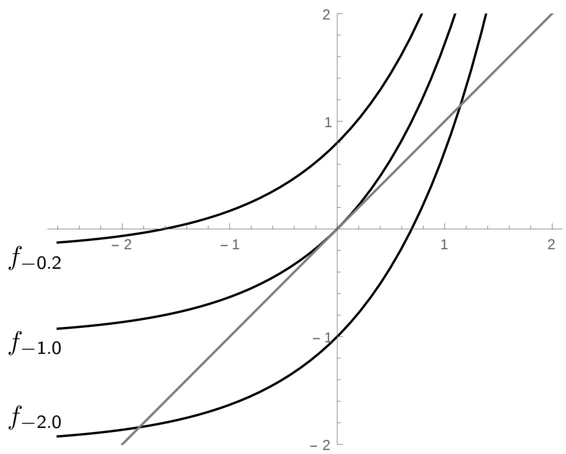
ficando assim provado tratar-se de uma bifurcação de tipo tangente.

6.

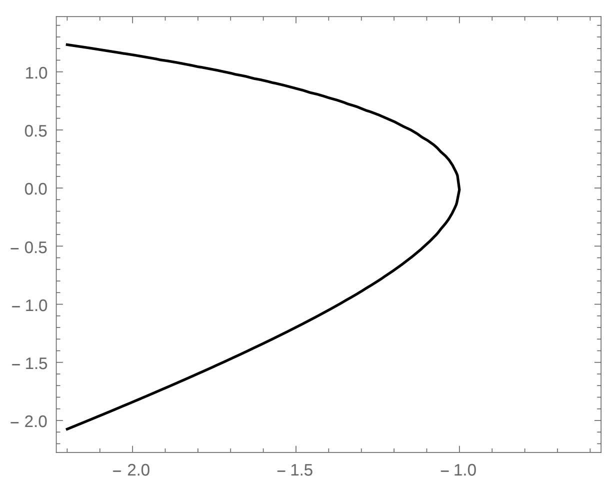
Consideremos a família a-um-parâmetro de sistemas dinâmicos $f_a(x) = e^x + a$, para $x \in \mathbb{R}$, com a um parâmetro pertencente a $\mathbb{R}$.

6.1

Desenhando o gráfico de f_a, para diferentes valores do parâmetro, facilmente se chega à conclusão que, para $a > -1$, f_a não tem pontos fixos, tendo dois pontos fixos quando $a < -1$.



Ainda pelo gráfico, isto é, avaliando através do gráfico o valor da derivada de f_a em cada um dos pontos fixos, é possível concluir que o menor dos pontos fixos é sempre um ponto fixo atractivo, enquanto o maior é um ponto fixo repulsivo. Assim sendo, o diagrama de bifurcação vem como



6.2 Da alínea anterior, sabemos que a bifurcação de f_a ocorre para $\bar{x} = 0$, quando $a_o = -1$. Atendendo ao formulário, temos que:

1. $f_{a_o}(\bar{x}) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = \bar{x}$
2. $f'_{a_o}(\bar{x}) = e^0 = 1$
3. $f''_{a_o}(\bar{x}) = e^0 = 1 \neq 0$
4. $\dfrac{\partial}{\partial a} f_a(\bar{x}) = 1 \neq 0\,,\quad$ para $a = a_o$,

ficando assim provado tratar-se de uma bifurcação de tipo tangente.

7.

Este exercício é a continuação do exercício 3, pedindo para acrescentar, ao anteriormente feito, o estudo dos pontos periódicos de período 2 da família de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 - a$.

Consideremos a família a-um-parâmetro de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 - a$, para $x \in \mathbb{R}$, com a um parâmetro pertence a $\mathbb{R}$.

7.1 Comecemos por determinar os pontos periódicos de período 2 de f_a: para tal, vamos escrever

$$f_a^2(\bar{x}) = f_a(\bar{x}^2 - a) = (\bar{x}^2 - a)^2 - a = \bar{x}^4 - 2a\bar{x}^2 + a^2 - a = \bar{x},$$

ou seja,

$$\bar{x}^4 - 2a\bar{x}^2 - \bar{x} + a^2 - a = 0.$$

Ora, como sabemos, duas soluções correspondem aos dois pontos fixos anteriormente identificados, pelo que sabemos de antemão que o polinómio se factoriza, isto é, que

$$\bar{x}^4 - 2a\bar{x}^2 - \bar{x} + a^2 - a = (\bar{x}^2 - \bar{x} - a)(\bar{x}^2 + \bar{x} - a + 1).$$

Assim sendo, podemos concluir que os pontos periódicos de período 2 de f_a são as soluções da equação

$$\bar{x}^2 + \bar{x} - a + 1 = 0.$$

Como facilmente se reconhece, as duas soluções da equação acima, ou seja, os dois pontos periódicos de período 2 de f_a, são

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{2}\big(-1 - \sqrt{-3 + 4a}\big), \qquad a > 3/4$$

e

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2}\big(-1 + \sqrt{-3 + 4a}\big), \qquad a > 3/4.$$

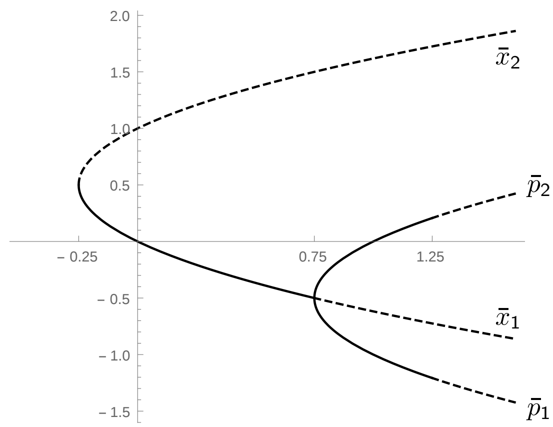
Quanto à estabilidade destes pontos, temos que, para $a > 3/4$,

$$|(f_a^2)'(\bar{p}_1)| = |(f_a^2)'(\bar{p}_2)| = |f'_a(\bar{p}_1) \times f'_a(\bar{p}_2)| = |\big(-1 - \sqrt{-3 + 4a}\big) \times \big(-1 + \sqrt{-3 + 4a}\big)|$$

ou seja,

$$|(f_a^2)'(\bar{p}_1)| = |(f_a^2)'(\bar{p}_2)| = |1 - (-3 + 4a)| = |4 - 4a|.$$

Deste modo, podemos concluir que, para $3/4 < a < 5/4$, $\bar{p}_1$ e $\bar{p}_2$ são pontos periódicos de período 2 atractivos de f_a, sendo, para $a > 5/4$, pontos periódicos de período 2 repulsivos de f_a. Assim sendo, o diagrama de bifurcação de f_a relativamente aos seus pontos fixos (ver Exercício 3) e aos seus pontos periódicos de período 2 é dado por



7.2

Da alínea anterior, sabemos que a bifurcação de f_a indicada ocorre para $\bar{x} = -1/2$, quando $a_o = 3/4$. Atendendo ao formulário, temos que:

1. $f_{a_o}(\bar{x}) = (\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4a}))^2 - a = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4a} + \frac{1}{4} + a - a = \bar{x}$, para $a \in (1/2, 1)$ (escolhi $\varepsilon = 1/4$)

2. $f'_{a_o}(\bar{x}) = 2 \times (-1/2) = -1$

3. $\dfrac{\partial}{\partial a}(f_a^2)'(\bar{x}) = \dfrac{\partial}{\partial a}(x^4 - 2ax^2 + a^2 - a)'(\bar{x}) = \dfrac{\partial}{\partial a}(4x^3 - 4ax)(\bar{x}) = \dfrac{\partial}{\partial a}(-\dfrac{1}{2} + 2a) = 2 \neq 0$,

ficando assim provado tratar-se de uma bifurcação de tipo duplicação do período.

---

formulário

$$f_a(\bar{x}) \;=\; \bar{x}\,, \quad \text{para } a \in (a_o - \epsilon,\, a_o + \epsilon)$$

$$f'_{a_o}(\bar{x}) \;=\; -1$$

$$\frac{\partial}{\partial a}(f_a^2)'(\bar{x}) \neq 0\,, \quad \text{para } a = a_o.$$

$$f_{a_o}(\bar{x}) \;=\; \bar{x}$$

$$f'_{a_o}(\bar{x}) \;=\; 1$$

$$f''_{a_o}(\bar{x}) \;\neq\; 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}f_a(\bar{x}) \neq 0\,, \quad \text{para } a = a_o.$$