



**Exercício 6.1** Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigue se algum deles é ponto extremante, recorrendo apenas ao estudo do comportamento da função em torno de cada ponto crítico.

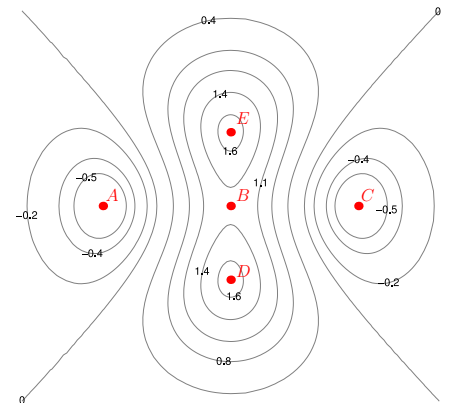
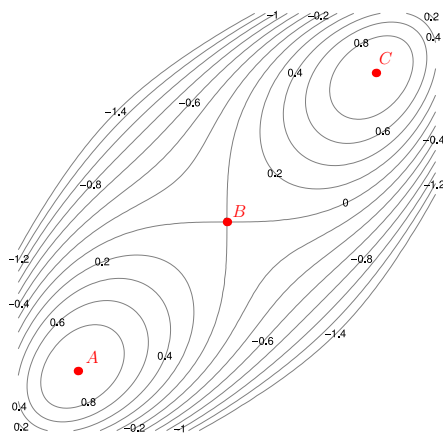
a)  $f(x, y) = x^2 + y^4$ ;

c)  $f(x, y) = xy$ ;

b)  $f(x, y) = 2 - x - y^2$ ;

d)  $f(x, y) = x^2 y^2$ .

**Exercício 6.2** Em cada uma das figuras são apresentadas curvas de nível de uma função, relativamente à qual os pontos assinalados são pontos críticos. Conjeture sobre a natureza de cada um desses pontos críticos.



**Exercício 6.3** Determine os pontos críticos de cada uma das funções dadas e determine se se está perante um maximizante local, minimizante local ou um ponto de sela:

a)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ ;

k)  $f(x, y) = e^x \cos y$ ;

b)  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2$ ;

l)  $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ ;

c)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ ;

m)  $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$ ;

d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$ ;

n)  $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;

e)  $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$ ;

o)  $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$ ;

f)  $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ ;

p)  $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ ;

g)  $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$ ;

q)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ ;

h)  $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$ ;

r)  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 - y^2 - z^2 + 4$ ;

i)  $f(x, y) = y + x \sin y$ ;

s)  $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ .

j)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$  (analise apenas os pontos críticos  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$  e  $(0, \sqrt{\pi})$ );

**Exercício 6.4** Para cada uma das funções  $f$  que verificam as condições enunciadas, classifique o ponto crítico  $(x_0, y_0)$  ou refira se as informações prestadas são insuficientes para essa classificação:

- a)  $f_{xx}(x_0, y_0) = 9$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$  e  $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$ ;
- b)  $f_{xx}(x_0, y_0) = -3$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = -8$  e  $f_{xy}(x_0, y_0) = 2$ ;
- c)  $f_{xx}(x_0, y_0) = -9$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$  e  $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$ ;
- d)  $f_{xx}(x_0, y_0) = 25$ ,  $f_{yy}(x_0, y_0) = 8$  e  $f_{xy}(x_0, y_0) = 10$ .

**Exercício 6.5** Determine os extremos das funções  $f$  definidas a seguir, vinculados pelas condições indicadas:

- a)  $f(x, y) = \ln(xy)$  e  $2x + 3y = 5$ ;
- b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ;
- c)  $f(x, y) = xy$  e  $x^2 + y^2 = 4$ ;
- d)  $f(x, y) = xy$  e  $x + y = 1$ ;
- e)  $f(x, y) = x^3 + y^3$  e  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- f)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  e  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- g)  $f(x, y) = 2x + y$  e  $x^2 + 4y^2 = 1$ ;
- h)  $f(x, y) = xy$  e  $9x^2 + y^2 = 4$ ;
- i)  $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$  e  $2x + 3y + 4z = 12$ ;
- j)  $f(x, y, z) = z$  e  $x^2 + y^2 = 5 - z$ ,  $x + y + z = 1$ ;
- k)  $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;
- l)  $f(x, y, z) = x + 2y$ ,  $x + y + z = 1$  e  $y^2 + z^2 = 4$ ;
- m)  $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ ,  $x + y - z = 0$  e  $x^2 + 2z^2 = 1$ .

**Exercício 6.6** Determine o mínimo e o máximo valor absoluto da função  $f$  tal que  $f(x, y) = \sin x + \cos y$  no retângulo  $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

**Exercício 6.7** Encontre o mínimo e o máximo valor absoluto da função  $f$  no disco definido pela inequação  $x^2 + y^2 \leq 1$ , sendo  $f$  definida por:

- a)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$ ;
- b)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ .

**Exercício 6.8** Determine os três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

**Exercício 6.9** Determine os três números positivos cujo produto é 8 e cuja soma é mínima.

**Exercício 6.10** Determine três números positivos cuja soma é 13 e tais que a soma dos seus quadrados é mínima.

**Exercício 6.11** Determine o ponto do plano definido pela equação  $2x - y + z = 1$  mais próximo do ponto de coordenadas  $(-4, 1, 3)$ .

**Exercício 6.12** Considere a elipse definida pela equação  $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$ . Determine os pontos de ordenada mínima e de ordenada máxima na elipse.

**Exercício 6.13** Determine a distância do ponto de coordenadas  $(1, 2, 0)$  ao cone definido pela equação  $z^2 = x^2 + y^2$ .

**Exercício 6.14** Determine o ponto pertencente ao plano definido pela equação  $2x - y + 2z = 20$  que se encontra mais próximo da origem.

**Exercício 6.15** Mostre que um paralelepípedo de volume 27 unidades cúbicas, possui superfície mínima se for um cubo.

**Exercício 6.16** Mostre que um paralelepípedo de superfície 24 unidades quadradas, possui volume mínimo se for um cubo.