Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Análise
1.º Teste

Lic.: **Eng. Informática**
23/abril/2014
[2h]

Nome Completo e em Letras Maiúsculas
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Número ———

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Exercício 1. [2+1 valores] Considere uma função f definida, em $\mathbb{R}^2$, por $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$.

a) Defina e represente graficamente o domínio de f.

b) Defina o contradomínio de f.

Exercício 2. [1+1 valores] Esboce o cilindro definido, em $\mathbb{R}^3$, por $z = -y^2$

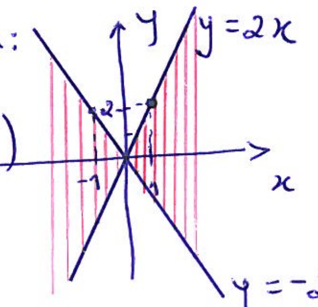
a) identificando os respetivos traços e

b) definindo as curvas de nível correspondentes às cotas -1, 0 e 2.

1 a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 - y^2 > 0\}$

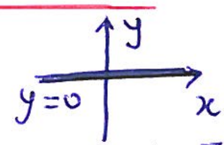
Ora $4x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow (2x-y)(2x+y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y > 0 \\ 2x + y > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - y < 0 \\ 2x - y < 0 \end{cases}$

Rep. gráfica: (região sombreada)

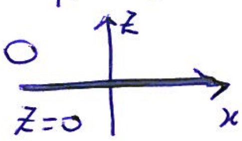


b) $CD_f = \{z \in \mathbb{R} : z = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}} \wedge (x,y) \in D_f\}$
$=]0, +\infty[$

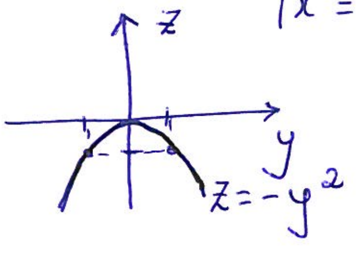
2 $z = -y^2$ a) Traço em xOy: $\begin{cases} z = -y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$



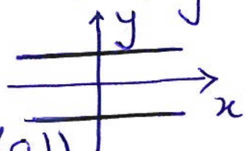
Traço em xOz: $\begin{cases} z = -y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$



Traço em yOz: $\begin{cases} z = -y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -y^2$



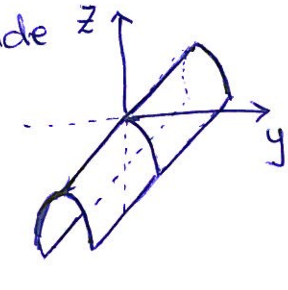
b) $\begin{cases} z = -y^2 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 = -y^2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$



$\begin{cases} z = -y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ traço em xOy (a))

$\begin{cases} z = -y^2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 = -y^2$; impossível ("a curva" é um conjunto vazio)

Donde



∴ trata-se de um cilindro parabólico

Exercício 3. [1 valores] Estabeleça as correspondências apropriadas entre as funções definidas de $a)$ a $d)$ e as curvas de nível apresentadas de $i)$ a $iv)$.

$a)$ $f(x,y) = x^2$ — $i)$ retas

$b)$ $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ — $ii)$ parábolas

$c)$ $f(x,y) = y - x^2$ — $iii)$ hipérboles

$d)$ $f(x,y) = x^2 - y^2$ — $iv)$ elipses

a) $x^2 = K \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{K}$; $K > 0$ - retas

b) $x^2 + 2y^2 = K \Leftrightarrow \frac{x^2}{K} + \frac{y^2}{\frac{K}{2}} = 1$ - elipses

c) $y - x^2 = K \Leftrightarrow y = x^2 + K$ - parábolas

d) $x^2 - y^2 = K$ - ~~elipses~~ hipérboles (por exclusão de partes)

Exercício 4. [1 valores] Comente a seguinte afirmação:

Todas as superfícies de nível da função definida por $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$ são parabolóides.

$\frac{z}{x^2+y^2} = K \wedge K = 0 \Leftrightarrow z = 0$ q̄ define 1 plano; a afirmação é falsa!

Exercício 5. [2 valores] Calcule, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x - y^4}{x^2 - y^4}$.

Exercício 6. [2 valores] Defina, se existir, o plano tangente à superfície definida por $xy + yz + zx = 11$, no ponto de coordenadas $(1, 2, 3)$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4}$?

Limites trajetoriais:

i) $x = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4} \underset{x=1}{=} \lim_{y\to 1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = 1$$

ii) $y = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4} \underset{y=1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Ora $1 \neq \frac{1}{2}$

Donde

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4}$ não existe!

RESOLUÇÕES POSSÍVEIS:

(6) $xy + yz + zx = 11 \Leftrightarrow z = \frac{11 - xy}{x+y}$; $x+y \neq 0$

Ora

$$z_x = \frac{(x+y)\times(-y) - (11-xy)\times 1}{(x+y)^2}$$

e

$$z_y = \frac{(x+y)(-x) - (11-xy)\times 1}{(x+y)^2}$$

Donde

$$z_x(1,2) = \frac{-6-9}{9} = -\frac{5}{3}$$

e

$$z_y(1,2) = \frac{-3-9}{9} = -\frac{4}{3}$$

O plano tangente existe e pode ser definido por

$$z = z_0 + z_x(1,2)(x-1) + z_y(1,2)\cdot(y-2)$$

isto é

$$z = 3 - \frac{5}{3}(x-1) - \frac{4}{3}(y-2)$$
$$\Leftrightarrow 5x + 4y + 3z - 22 = 0$$

A superfície definida por

$xy + yz + zx = 11$

pode ser entendida como uma superfície de nível ($=11$) da função definida por

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto w = xy + yz + zx$$

que é diferenciável (é um polinómio)

Donde $\nabla f(x,y,z) = (y+z, x+z, y+x)$

e $\nabla f(1,2,3) = (5, 4, 3)$

O plano tangente pode ser definido por

$\Pi: 5x + 4y + 3z + \alpha = 0$

Mas $P = (1,2,3) \in \Pi$, portanto

$5\times 1 + 4\times 2 + 3\times 3 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = -22$

Exercício 7. [1 valores] Seja f uma função real, de duas variáveis reais, com derivadas de 2ª ordem contínuas em todo o seu domínio.

Será possível que $f_x(x,y) = x - y$ e $f_y(x,y) = x + y$?

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y) = -1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1$.

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ podemos concluir, pelo teorema de Schwarz que não é possível existir f.

Exercício 8. [2 valores] Calcule a derivada direcional de f definida por $f(x,y,z) = (x + y^2 + z^3)^2$, no ponto de coordenadas $(1,-1,1)$ e na direção e no sentido do vetor definido por $\vec{e_1} - \vec{e_3}$.

Exercício 9. [1.5+1.5 valores] Seja f definida por $f(x,y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$.

a) Encontre os pontos críticos de f.

b) Classifique, usando o teste das segundas derivadas, os pontos críticos de f.
Sugestão: No caso de não ter resolvido a alínea anterior use, para a classificação, o ponto de coordenadas $(5,2)$.

8) Sendo $f(x,y,z) = (x+y^2+z^3)^2$, tem-se $\nabla f(x,y,z) = (2 \cdot (x+y^2+z^3) \cdot 1, 2 \cdot (x+y^2+z^3) \cdot 2y, 2(x+y^2+z^3) \cdot 3z^2) =$

e, por conseguinte $\nabla f(1,-1,1) = (6,-12,18)$

Ora $\vec{u} = \vec{e_1} - \vec{e_3}$ é tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e vers $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Donde

$f_{\vec{u}}(1,-1,1) = \nabla f(1,-1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= (6,-12,18) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{18}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$

---

9) Sendo $f(x,y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$, tem-se $\nabla f(x,y) = (-y+2, 2y-x+1)$ e

a) os pontos críticos são tais que $\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+2=0 \\ 2y-x+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=5 \end{cases}$, isto é, há um ponto crítico de coordenadas $(5,2)$

b) $f_{xx}(x,y) = 0$; $f_{xy}(x,y) = -1$; $f_{yy}(x,y) = 2$

Pelo que

$D(5,2) = 0 \times 2 - (-1)^2 = -1 < 0$

Logo $(5,2)$ é um ponto de sela

Exercício 10. [3 valores] Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o valor mínimo tomado pela função definida por $f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$, na hipérbole definida por $x^2 - y^2 = 1$.

10

Sejam f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$$

e

$$g(x,y) = x^2 - y^2$$

Então

$$\nabla f(x,y) = \big(2x\,,\ 2(y-2)\big) = (2x,\ 2y-4)$$

e

$$\nabla g(x,y) = (2x,\ -2y)$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \\ \cancel{2}y - \cancel{4}^{2} = -\cancel{2}\lambda y \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y + \lambda y = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2y = 2 \\ \text{—} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{—} \\ y = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

impossível
$(\text{pq } -y^2 \neq 1)$

Ora, nos pontos de coordenadas $(\pm\sqrt{2}, 1)$ tem-se

$$f(\sqrt{2}, 1) = f(-\sqrt{2}, 1) = 2 + (-1)^2 = 3$$

e $\underline{\underline{3}}$ é o mínimo procurado.

Recorde que: $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$