
NOME:**NÚMERO:**

1. (2.5 valores)

Considere a EDO de segunda ordem linear:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = xe^x$$

- (a) Prove que 1 e x^2 são duas soluções independentes da equação linear homogénea associada. Indique a solução geral da EDO linear homogénea associada.

- (b) Use o método de variação das constantes para encontrar uma solução particular da EDO inicial. Indique a solução geral dessa EDO.

2. (1.5 valores)

Recorde-se da seguinte Lei de Newton: a variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio em que o corpo se encontra.

Sabendo que um bolo sai do forno com a temperatura de 200°C e que três minutos depois a sua temperatura é de 150°C , determine quanto tempo demorará até que o bolo atinja a temperatura de 25°C , se a temperatura ambiente for de 20°C .

3. (1 valor)

Considere o sistema de EDOs com CI

$$\begin{cases} x' = ty \\ y' = \cos x \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

Seja $(x(t), y(t))$ a solução do problema anterior e (x_k, y_k) a aproximação de $(x(t_k), y(t_k))$ calculada usando o método de Euler com passo 0.5, isto é, tal que $t_k = 0.5k$.

Obtenha, usando o método de Euler com o passo indicado, uma aproximação da solução do problema em $t = 1$ em função de x_0 e y_0 .

4. (3 valores)

(a) Verifique que a série de Fourier em senos da função

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi$$

é a série trigonométrica:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x$$

(b) Indique a solução formal do problema da corda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin 2x - \sin 10x, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right.$$