Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo I

Exame de Recurso

Eng. Informática

9/2/2010

[2h 00m]

Nome

Número

Exercício 1. [2 valores] Calcule $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{1-x^2}$.

Exercício 2. [3 valores] Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável e sejam $F,G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funções definidas por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ e $G(x)=\int_0^{2x-3} f(t)\,dt$.

a) Justifique que F e G são funções deriváveis e determine F' e G'.

b) Seja $P_{2,1}(x)=x^2+2x-2$ o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 1 da função F.

1. Indique, justificando, $F(1), F'(1)$ e $F''(1)$.
2. Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 2 da função G.

Exercício 3. [2 valores] Calcule $\int\left(\sqrt{x+1}+xe^{x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

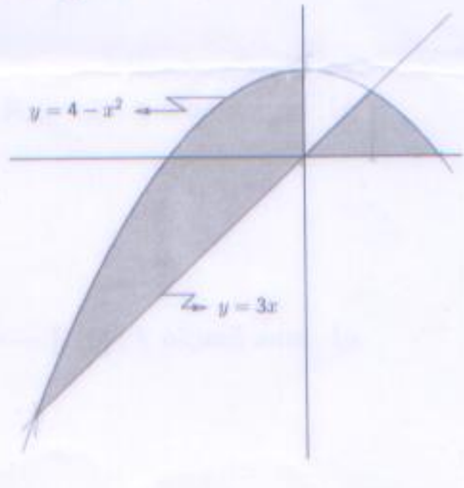
Exercício 4. [2 valores] Calcule apenas uma das seguintes primitivas:

a) $\int (x+1)e^{-x}\,dx$;

b) $\int \frac{x+5}{(x-1)(x^2+x-2)}\,dx$.

Exercício 5. [2 valores] Calcule $\int_{-5}^{0} 2x\sqrt{4-x}\,dx$, usando a substituição $t=\sqrt{4-x}$.

Exercício 6. [3 valores] Determine a área da região sombreada na figura.



Responda aos exercícios 7 e 8 nesta folha.

Exercício 7. [3 valores] Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

a) O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < |x+1|\}$ é um conjunto minorado mas não majorado cujo mínimo é $\frac{1}{2}$.

b) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função par, então $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$;

c) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

O valor da expressão $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+\tfrac{1}{4x}}\,dx$ corresponde ao comprimento da curva que constitui o gráfico da função f entre os pontos de abcissa 0 e 2.

Exercício 8. [3 valores] Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

a) um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ que seja aberto e não limitado;

b) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f(1) = f(2) = 0$ e $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja derivável mas não primitivável.