



Duração: 90 minutos

Nome:

Número:

Grupo I

Para cada questão deste grupo, assinale qual das afirmações é verdadeira. Cada resposta certa vale 1.5 valores; nenhuma afirmação selecionada vale 0 valores; cada resposta errada ou nula vale -0.5 valores. A cotação mínima neste grupo é de 0 valores.

Questão 1 Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \cos x$. Então f é uma função

- a) bijetiva.
- b) injetiva e não sobrejetiva.
- c) não injetiva e sobrejetiva.
- d) não injetiva e não sobrejetiva.

Questão 2 Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1, \\ \arcsen x & \text{se } -1 < x < 1, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Então f é uma função

- a) contínua.
- b) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- c) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- d) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Questão 3 Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Então

- a) existe $f'(0)$.
- b) existe $f'_-(0)$.
- c) existe $f'_+(0)$.
- d) não existe $f'(0)$.

Questão 4 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que $f(x) = g(5x - x^2)$ e $g(4) = g'(4) = 2$. Então uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é

- a) $y = 6x + \frac{11}{6}$.
- b) $y = -6x + \frac{13}{6}$.
- c) $y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$.
- d) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}$.

Questão 5 A equação $3x - \sin^2(x) - 2 = 0$

- a) não tem solução no intervalo $[0, \pi]$.
- b) tem uma única solução no intervalo $[0, \pi]$.
- c) tem exatamente duas soluções no intervalo $[0, \pi]$.
- d) tem, pelo menos, duas soluções no intervalo $[0, \pi]$.

Questão 6 Uma primitiva da função f definida por $f(x) = -\operatorname{sen} x$ é

a) $F(x) = -\cos x$.

c) $F(x) = -\operatorname{sen} x$.

b) $F(x) = \cos^3 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x$.

d) $F(x) = \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x$.

Grupo II

Responda, no próprio enunciado, às seguintes questões indicando os cálculos que tiver que efetuar bem como as respectivas justificações.

Questão 7 Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) [1.5 valores] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x};$

b) [1.5 valores] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \cos x}.$

Questão 8 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = -\pi + \operatorname{arctg}(2x - 3)$.

a) [2 valores] Determine o domínio e o contradomínio de f .

b) [1.5 valores] Caraterize a função inversa de f .

c) [1.5 valores] Caraterize a função derivada de f .

Questão 9 Calcule:

a) [1.5 valores] $\int \frac{1 + \operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx;$

b) [1.5 valores] $\int x \operatorname{sh} x \, dx.$

(FIM)