LEI - Tópicos de Matemática Discreta **Teste 1 - 15/11/08**

Nome: ____ **Número:** _________ **TP:** __

****

IMPORTANTE: *A duração do teste é de 1 hora e 20 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por sete exercícios. Os exercícios I - V devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VI e VII devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores.*

****

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T) e quais não são tautologias (N).

T	N	
□	■	$(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
■	□	$(p \Rightarrow q) \vee \neg q$
□	■	$\neg(p \vee \neg p)$
■	□	$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$
□	■	$(p \Leftrightarrow \neg p) \Leftrightarrow (q \vee \neg q)$

II. (0,75 valores) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$\forall x \quad (x > 0 \Rightarrow \exists y \quad 2^y < x)$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição dada:

∃x (x>0 ∧ ∀y 2^y⩾x)

____

III. Considere o conjunto $A = \{1, 2, (1, 3), \{4\}, \mathbb{N}\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
□	■	$\{1, 2\} \in A$
■	□	$\{1, 2\} \subseteq A$
□	■	$\{1, 4\} \subseteq A$
□	■	$3 \in A$
□	■	$A \subseteq \mathbb{N}$
□	■	$\mathbb{N} \subseteq A$

IV. Sejam A, B, C três conjuntos tais que $A \setminus B = A \setminus C$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
■	□	$\forall x \in A \quad x \in B \Rightarrow x \in C$
■	□	$\forall x \in A \quad x \notin C \Rightarrow x \notin B$
□	■	$B = C$
■	□	$A \cap B = A \cap C$

V. Considere o conjunto $A = \{2, 3\} \times \mathcal{P}(\emptyset)$. Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (0,75 valores) $A =$ {(2,{}),(3,{})}

(b) (0,75 valores) $A \cup \mathcal{P}(\emptyset) =$ {(2,{}),(3,{}),{}}

(c) (0,75 valores) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(\emptyset) =$ {{},{(2,{})},{(3,{})},{(2,{}),(3,{})}}

(d) (0,75 valores) $\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(\emptyset)) =$ {{} , {(2,{})} , {(3,{})} , {{},(2,{})} , {{},(3,{})} , {(2,{}),(3,{})} , {{},(2,{}),(3,{})}}

VI. (2,5 valores) Sejam A, B e C três conjuntos tais que $A \cap (B \setminus C) = A \cap B$. Mostre que $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Para qualquer x

A∩(B\C)=A∩B

Logo A∩(B\C) C A∩B

então :
x ϵ A∩(B\C) ∧ x ϵ A∩B <=>
<=> x ϵ A ∧ x ϵ(B\C) ∧ x ϵ A ∧ x ϵB <=>
<=> x ϵ A ∧ (x ϵ B ∧ x ¬ϵ C) ∧ (x ϵ A ∧ x ϵ B) <=>
<=> x ϵ A ∧ x ϵ B ∧ x ¬ϵ C ∧ x ϵ A ∧ x ϵ B <=>
<=> x ϵ A ∧ x ϵ B ∧ x ¬ϵ C<=>

Se por absurdo A∩B∩C≠Ø então:
x ϵ A∩B∩C <=>
<=> x ϵ A ∧ x ϵ B ∧ x ϵ C

o que contradiz x ϵ A ∧ x ϵ B ∧ x ¬ϵ C logo A∩B∩C=Ø

VII. (2,5 valores) Verdadeiro ou falso? Para quaisquer dois conjuntos A e B tem-se

$$\mathcal{P}(A \times B) = \{X \times Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}.$$

Justifique a sua resposta.

Sendo a o nº elementos de A e b o nº elementos de B

Nº Elementos de {X x Y| X ϵ P(A) ∧ Y ϵ P(B)}=
= (2^a)*(2^b)=2^(a+b)

NºElementos de P(AxB)=
= 2^(ab)

logo se a=2 e b=4
então 2^(a+b)=2^(2+4)=2^6=64 elementos
e 2^(ab)=2^(2*4)=2^8=124 elementos

logo são diferentes