

Outubro 2014

1. Resolva as seguintes EDOs lineares de 1ª ordem, indicando o intervalo de definição da solução maximal:

(a) $y' - 3y = 6$;

(d) $y' - xy = -x$;

(b) $y' - 2ty = t$;

(c) $y' + \frac{4}{x}y = x^4$;

(e) $y' + y = x$

2. Resolva o problema com condição inicial:

$$\begin{cases} y' = \cos(t+1)y \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

3. **(Equações de Bernoulli)** As equações diferenciais do tipo

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

transformam-se numa equação linear se multiplicarmos a expressão por y^{-n} e efectuarmos a mudança de variável $z = y^{1-n}$. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

(a) $y' + y = y^{-1}$;

(c) $y' + \frac{1}{x}y = (\ln x)y^2$;

(b) $y' + (\sin x)y = (\sin x)y^{-2}$;

(d) $y' - 2xy = e^{-4x^2}y^5$.

4. Resolva as seguintes equações diferenciais separáveis:

(a) $y' = y^2x^3$;

(e) $y' = e^{x-y}$;

(b) $y' = \frac{x^2+2}{y}$;

(f) $y' = 2t(y^2 + 1)$;

(c) $y' = 5\sqrt{y}$;

(g) $y' = \frac{1}{\cos(y)+y}$;

(d) $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$;

(h) $y' = \frac{e^x}{y^2}$.

5. Considere a equação diferencial $y' = \cos(y+x)$.

(a) Mostre que a mudança de variável $u = y+x$ transforma a equação dada numa equação separável.

(b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \cos(y+x) \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[Sugestão: recorde que $\cos(x) + 1 = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ e que $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.]

6. **(Equações homogêneas)** Uma equação diferencial $y' = f(t, y)$ diz-se *homogênea* se verifica

$$f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y) \quad \forall \lambda > 0 \quad (*)$$

As EDOs homogêneas transformam-se em EDOs separáveis usando a mudança de variável $y = tu$. Resolva as seguintes EDOs homogêneas, verificando previamente que verificam a condição (*).

(a) $y' = \frac{y+t}{t}$;

(c) $y' = \frac{t^2+y^2}{ty}$.

(b) $y' = \frac{2y^4+t^4}{ty^3}$;

(d) $y' = \frac{3y^2-t^2}{2ty}$

7. Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

(a) $y' - y = e^{3x}$

(d) $(xy + y^2) - x^2y' = 0$

(b) $y' = \frac{1}{xy^3}$

(c) $y \sin x \exp(\cos x) + y^{-1}y' = 0$

(e) $y \sin \frac{y}{x} + x \cos \frac{y}{x} - x \sin \frac{y}{x}y' = 0$