

Álgebra Linear

_____ exame A _____

7 de fevereiro de 2011 _____

nome: _____ número: _____

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1~(2+2), 2~(2+2+2+2); em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.

- (a) Encontre, usando o algoritmo de eliminação de Gauss, uma matriz U escada de linhas equivalente por linhas a $M = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$.
- (b) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Encontre uma base do núcleo de A .
- (b) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A . Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.
- (c) Calcule os valores próprios de A .
- (d) Verifique se A é diagonalizável e em caso afirmativo diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal)

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente à **melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

- (a) A é diagonalizável.
- (b) $CS(A) = \mathbb{R}^3$.
- (c) $Ax = 0$ é possível determinado.
- (d) Nenhuma das anteriores. (V)

2. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

- (a) $(0, 1, -1) \in N(A)$.
- (b) $Ax = b$ é sempre possível, independentemente da escolha de $b \in \mathbb{R}^2$. (V)
- (c) $\text{nul}(A) = 2$.
- (d) Nenhuma das anteriores.

3. Dada uma matriz quadrada A , seja U uma matriz escada obtida de A após aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss, então garantidamente

- (a) $\det(A) = \det(U)$.
- (b) $\sigma(A) = \sigma(U)$, ou seja, são iguais os conjuntos dos valores próprios de A e de U .
- (c) $\dim CS(A) = \dim CS(U)$. (V)
- (d) Nenhuma das anteriores.

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) $\sigma(A) = \sigma(J)$, ou seja, A e J têm os mesmos valores próprios.
- (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in N(A)$.
- (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ é vector próprio associado ao valor próprio 0 de A .
- (d) Todas as anteriores. (V)

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b \in \mathbb{R}^3$,

- (a) $Ax = b$ é possível determinado.
- (b) $\text{proj}_{CS(A)}b = b$.
- (c) As colunas de A formam uma base de \mathbb{R}^3 .
- (d) Todas as anteriores. (V)

6. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,

- (a) As colunas de A formam uma base de \mathbb{R}^3 .
- (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- (c) $\det(A) = 1$.
- (d) Todas as anteriores. (V)

7. Sendo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(1, 0) = (0, 1, 1), T(0, 1) = (1, 0, 1).$$

- (a) $T(1, 2) = (2, 1, 3)$. (V)

(b) A matriz que representa T em relação à base canónica de \mathbb{R}^2 e à de \mathbb{R}^3 é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (c) $T(x, x) = (x, 2x, x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
- (d) Todas as anteriores.

8. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

- (a) Se A é invertível então A^2 também é invertível. (V)
- (b) Se A e B são invertíveis então $A + B$ também é invertível.
- (c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .
- (d) Apenas duas das afirmações anteriores são verdadeiras.

Respostas:

- | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 2. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 3. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 4. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 5. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 6. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 7. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 8. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |