DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Distribuições de Probabilidade

Exemplo

Duas meias são seleccionadas aleatoriamente de uma gaveta contendo 5 meias castanhas e 3 verdes. Liste os elementos do espaço amostral, as probabilidades correspondentes, os valores da variável aleatória W, que representa o número de meias castanhas seleccionadas.

Elementos	Probabilidade	w
CC	5/8 x 4/7 = 20/56	2
CV	5/8 x 3/7 = 15/56	1
VC	3/8 x 5/7 = 15/56	1
VV	3/8 x 2/7 = 6/56	0

Distribuições de Probabilidade

Exemplo

Considere o lançamento de 2 dados. Liste os elementos do espaço amostral, as probabilidades correspondentes, os valores da variável aleatória X, que representa a soma dos pontos.

x	P(X=x)	x	P(X=x)
2	1/36	3	2/36
4	3/36	5	4/36
6	5/36	7	6/36
8	5/36	9	4/36
10	3/36	11	2/36
12	1/36		

$f(x)=(6-|x-7|)/36 \qquad x=2,...,12$

Distribuições de Probabilidade Discretas

Se X é uma variável aleatória discreta, a função dada por

$f(x) = \mathrm{P}(X = x)$, para cada valor de x na gama de valores de X, é chamada função de probabilidade de X.

Distribuições de Probabilidade Discretas

Exemplo

Encontre a fórmula para a distribuição de probabilidade do número total de caras (F) obtidas no lançamento de 4 moedas equilibradas

Resultados possíveis $2^4 = 16$

FFFF	4	CFFC	2
FFFC	3	CFCF	2
FFCF	3	CCFF	2
FCFF	3	FCCC	1
CFFF	3	CFCC	1
FFCC	2	CCFC	1
FCFC	2	CCCF	1
FCCF	2	CCCC	0

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16

$f(x)={}_4C_x/16 \qquad x=0,1,2,3,4$

Função de Probabilidade

Uma função pode servir como função de probabilidade (f.p.) de uma variável aleatória discreta X se e só se os seus valores $f(x)$ satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para qualquer valor do seu domínio;
2. $\sum f(x) = 1$ onde o somatório se estende a todos os valores no seu domínio.

Função de Probabilidade

Exemplo

Verifique se a função dada por

$$f(x) = \frac{x+2}{25} \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória

Função de Distribuição

- Existem muitas situações onde há interesse em conhecer a probabilidade de que o valor de uma variável aleatória seja menor ou igual a algum número real x.

- A probabilidade de que X tome um valor menor ou igual a x, dada por $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$, é uma função definida para todos os números reais, designada por função de probabilidade acumulada da variável aleatória X.

Função de Probabilidade Acumulada

Se X é uma variável aleatória discreta, a função dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad -\infty < x < \infty$$

onde $f(t)$ é o valor da função de probabilidade de X em t, é chamada a função de probabilidade acumulada de X.

Propriedades

Os valores de $F(x)$ da função de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X satisfazem as condições:

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$ para quaisquer números reais a e b.

Função Acumulada

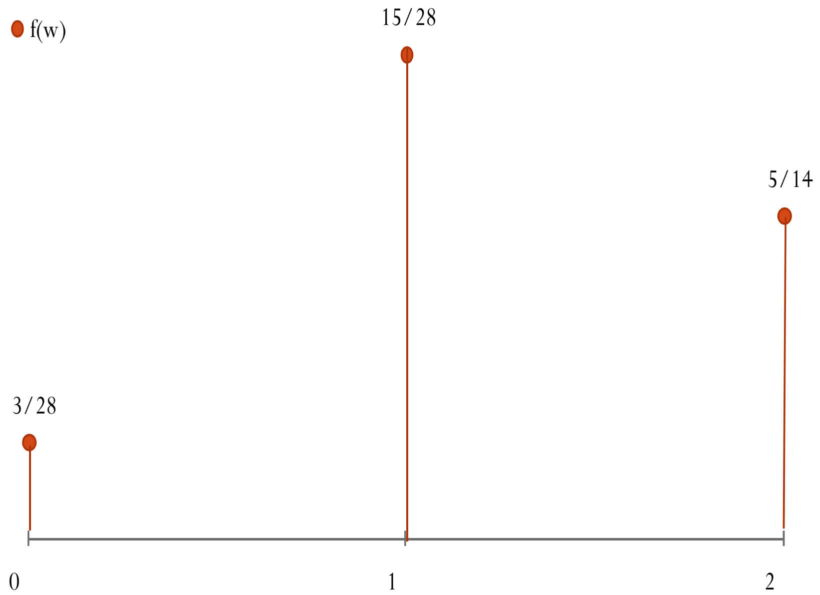
Exemplo

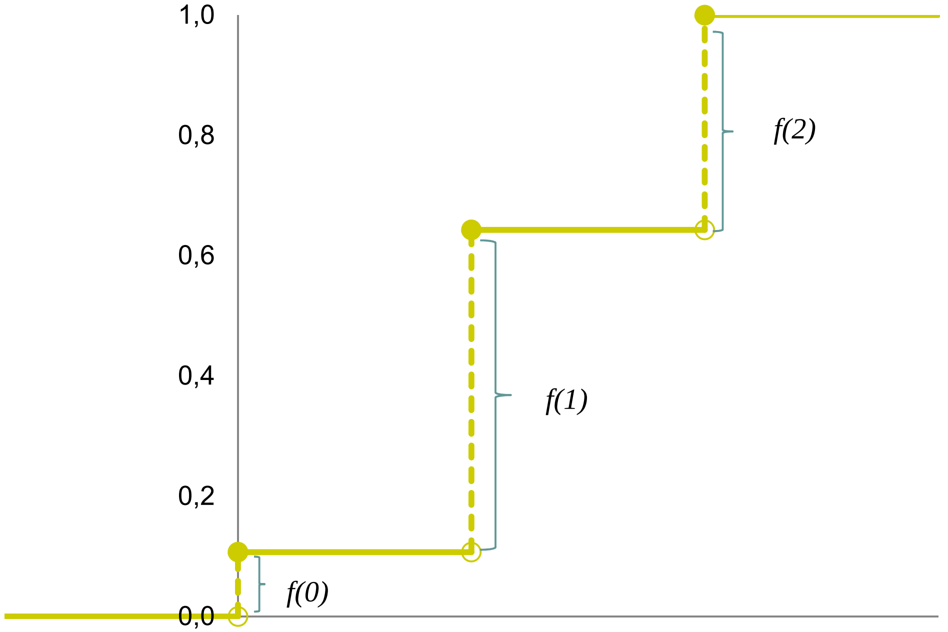
Encontre a função de probabilidade acumulada da variável W, número de meias castanhas retiradas da gaveta, e trace o respectivo gráfico.

w	Prob.	f(w)	F(w)	
0	3/28	3/28	3/28	f(0)
1	15/28	15/28	9/14	f(0)+f(1)
2	5/14	5/14	1	f(0)+f(1)+f(2)

$$F(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 3/28 & 0 \le w < 1 \\ 9/14 & 1 \le w < 2 \\ 1 & w \ge 2 \end{cases}$$

Função de Probabilidade e Função Acumulada





Funções de Densidade de Probabilidade

Uma função com valores de $f(x)$ definidos sobre o conjunto de todos os números reais, é chamada uma função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável contínua X, se e só se

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

para quaisquer constantes reais a e b, com $a \le b$.

Funções de Densidade de Probabilidade

De notar que $f(c)$, o valor da função densidade de probabilidade de X em c não é $P(X=c)$, como no caso discreto.

No caso contínuo as probabilidades são sempre dadas por integrais avaliados sobre intervalos, donde $P(X=c) = 0$ para qualquer constante real c; por outro lado, também não interessa se os pontos extremos do intervalo a a b são incluídos.

Se X é uma variável aleatória contínua e, a e b são duas constantes reais com $a \leq b$, então

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Funções de Densidade de Probabilidade

Uma função pode servir como função de probabilidade de uma variável aleatória contínua X se e só se os seus valores $f(x)$ satisfazem as seguintes condições:

1. $$f(x) \geq 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Funções de Densidade de Probabilidade

Exemplo

A função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine o valor de k e calcule P(0.5<X<1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} ke^{-3x}dx = k\frac{e^{-3x}}{-3}\Big|_0^{\infty} = \frac{k}{3} = 1$$

$$\int_{0.5}^{1} 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1} = 0.173$$

Função de Probabilidade Acumulada

Se X é uma variável aleatória contínua, a função dada por

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad -\infty < x < \infty$$

onde $f(t)$ é o valor da função densidade de probabilidade de X em t, é chamada função de distribuição acumulada de X.

Propriedades

Os valores de $F(x)$ da função de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X satisfazem as condições:

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Se $a < b$, então $F(a) \leq F(b)$ para quaisquer números reais a e b.

Propriedades

Se $f(x)$ e $F(x)$ são, respectivamente, as valores da função densidade e da função acumulada de X em x, então

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

para quaisquer constantes reais a e b, com $a \leq b$, e

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

onde a derivada existe.

Função de Probabilidade Acumulada

Exemplo

Determine a função acumulada correspondente à função densidade

$$f(x) = 3e^{-3x}, x > 0$$

e calcule P(0.5<X<1).

$$F(x) = \int_0^x 3e^{-3t}dt = 1 - e^{-3x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & x > 0 \end{cases}$$

$$P(0.5 < X < 1) = F(1) - F(0.5) = 0.173$$

Observações

- Uma função de distribuição acumulada é uma função não decrescente de x, que é contínua à direita, com $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

- Se x é um ponto de descontinuidade de $F(x)$, então a probabilidade $P(X=x)$ é igual ao salto que a função de distribuição tem no ponto x. Se x é um ponto de continuidade de $F(x)$, então $P(X=x) = 0$.

Função de Probabilidade Acumulada

Exemplo

Encontre a função densidade de probabilidade para a variável aleatória cuja função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$