Introdução às E.D.P.s.

1. Quais das seguintes funções são soluções da equação $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$?

   (a) $3e^{-\lambda t} \sin \sqrt{\lambda} t$;

   (b) $ae^{-3t}e^{-5x}$;

   (c) ae^{3x+3t};

   (d) $\sin x \cos t + \cos x \sin t$.

2. Verifique que se $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ então a função definida por $u(x, t) = f(t/x)$, para $x \neq 0$, é solução da EDP
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

3. Considere a EDP linear de primeira ordem
$$3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

   (a) Procure uma solução da EDP mediante o método de separação das variáveis. Determine uma solução que verifique a condição inicial $u(x, 0) = e^{3x}$.

   (b) Verifique que as funções do tipo $u(x, t) = f(x + 3t)$, com $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ são solução dao EDP.

   (c) Efectue a mudança de variáveis $s = 3x - t$, $r = x + 3t$ para encontrar a solução geral da EDP. Determine uma solução da EDP que verifique a condição inicial $u(x, 0) = x^2$.

4. Considere a equação
$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

   (a) Encontre soluções desta equação do tipo $u(x, t) = v(x)w(t)$. Resolva a equação considerando a condição inicial
$$u(x, 0) = e^x$$

   (b) Mostre que qualquer função da forma $u(x, t) = f(ax - t)$ é solução da equação.

   (c) Resolva a equação fazendo a mudança de variável definida por $s = ax - t$ e $r = t$. Resolva a equação com a condição inicial $u(x, 0) = ke^{-x^2}$.

5. Usando o método da separação das variáveis encontre soluções das equações:

   (a) $u_{xt} - u_x = 0$;

   (b) $xtu_{xt} + u = 0$;

   (c) $t^2 u_x = e^x u_t$;

   (d) $u_{xt} = x^2 tu$.

6. Mostre que a função

$$u(x,t) = e^{-8t}\sin(2x)$$

é solução do PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(2x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

7. *Equação do calor*

Resolva os seguintes problemas da condução do calor:

(a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 3\sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin x - 6\sin(4x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Estude o comportamento da solução quando t tende para infinito e indique, em cada uma das alíneas, para que valor de t o valor de u no meio da barra se reduz a metade.

8. Determine a solução formal do problema da condução do calor nos casos seguintes:

(a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sin(n\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 - \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

9. Mostre que a função

$$u(x,t) = \cos(6t)\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(8t)\sin(4x)$$

é solução do PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(3x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sin(4x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

10. *Equação da onda*

    Resolva os seguintes problemas:

    (a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 6,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(6,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq 6 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 5\sin(\dfrac{5\pi x}{3}) \end{cases}$$

    (b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 3,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 3\sin 4\pi x,\ 0 \geq x \geq 3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 14\sin \pi x \end{cases}$$

11. Determine a solução formal dos problemas das cordas vibrantes:

    (a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x(\pi - x) \end{cases}$$

    (b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin^2 x,\ 0 \geq x \geq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \cos x \end{cases}$$

    (c) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}\sin(nx),\ 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \end{cases}$$

12. *Equação de Laplace*

    A EDP $\Delta u = 0$, isto é,
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
    diz-se Equação de Laplace. As soluções da equação de Laplace dizem-se **funções harmónicas**.

(a) Verifique que as seguintes funções são harmónicas:

i. $u(x,y) = ax + by + cxy + dx^2 - dy^2$, com $a,b,c,d \in \mathbf{R}$;

ii. $u(x,y) = e^x \cos y$;

iii. $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(b) Use o método de separação das variáveis para encontrar, se possível, uma solução da Equação de Laplace $u : [0,1] \times [0,4] \longrightarrow \mathbf{R}$ verificando $u(x,4) = x \sin(\frac{\pi x}{2})$ e $u(1,y) = 0$.

13. Considere a função $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$ (periódica de período 2π).

(a) Mostre que

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) .$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para mostrar que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(c) Mostre também que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$