UNIVERSIDADE DO MINHO	04/07/2007

LÓGICA / MATEMÁTICA DISCRETA II

2ª chamada

CURSOS: Engenharia Informática / Engenharia de Sistemas e Informática	Duração: 2 horas

Notas: **Justifique** convenientemente cada uma das suas respostas.
Responda às partes I e II em folhas separadas.

Parte I

1. Seja T o conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional dado pela seguinte definição indutiva determinista:

$$\frac{}{p_i \to p_i \in T}\ i \quad (i \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{\varphi \in T \quad \psi \in T}{\varphi \to \psi \in T}\ \vee_1 \qquad \frac{\varphi \in T \quad \psi \in T}{\neg\varphi \to \psi \in T}\ \vee_2 \qquad \frac{\varphi \in T \quad \psi \in T}{\neg\varphi \to \neg\psi \in T}\ \vee_3$$

(a) Dê um exemplo de um elemento φ de T cuja árvore de formação (como elemento de T) tenha 3 nodos. Quantos nodos tem a árvore de formação de φ como elemento de $\mathcal{F}^{CP}$?

R: A árvore de formação de $(p_1 \to p_1) \to (p_0 \to p_0)$ como elemento de T tem 3 nodos:

$$\frac{\dfrac{}{p_1 \to p_1 \in T}\ 1 \qquad \dfrac{}{p_0 \to p_0 \in T}\ 0}{(p_1 \to p_1) \to (p_0 \to p_0) \in T}\ \vee_1$$

A sua árvore de formação como elemento de $\mathcal{F}^{CP}$ tem 7 nodos:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{p_1 \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_1 \qquad \dfrac{}{p_1 \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_1}{p_1 \to p_1 \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\to \qquad \dfrac{\dfrac{}{p_0 \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_0 \qquad \dfrac{}{p_0 \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_0}{p_0 \to p_0 \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\to}{(p_1 \to p_1) \to (p_0 \to p_0) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_\to$$

(b) Defina, por recursão estrutural em T, a função $f : T \to \mathbb{N}$ que a cada $\varphi \in T$ faz corresponder o número de ocorrências de conectivos lógicos em φ.

R: f é a única função de T em $\mathbb{N}$ tal que $\forall_{i\in\mathbb{N}_0}$, $f(p_i \to p_i) = 1$, e $\forall_{\varphi,\psi\in T}$, $f(\varphi \to \psi) = f(\varphi)+f(\psi)+1$, $f(\neg\varphi \to \psi) = f(\varphi) + f(\psi) + 2$ e $f(\neg\varphi \to \neg\psi) = f(\varphi) + f(\psi) + 3$.

(c) Prove, por indução estrutural em T, que todos os elementos de T são tautologias.

R: 1 - $\models p_i \to p_i$, $\forall_{i\in\mathbb{N}_0}$: dada uma valoração v qualquer, $v(p_i \to p_i) = 1$, pois para $v(p_j \to p_k)$ ser zero é necessário que $v(p_j) = 1$ e $v(p_k) = 0$, e em particular que $v(p_j) \neq v(p_k)$, o que evidentemente é absurdo para $p_j = p_k = p_i$.

2 - $\forall_{\varphi,\psi\in T}$, $\models \varphi$ e $\models \psi \Rightarrow \models \varphi \to \psi$ e $\models \neg\varphi \to \psi$.

Sejam φ e ψ elementos quaisquer de T, e admitamos que $\models \varphi$ e $\models \psi$.

Seja ainda v uma valoração qualquer. Por hipótese de indução, $v(\psi) = 1$, logo, por definição de valoração, $v(\varphi \to \psi) = v(\neg\varphi \to \psi) = 1$.

3 - $\forall_{\varphi,\psi\in T}$, $\models \varphi$ e $\models \psi \Rightarrow \models \neg\varphi \to \neg\psi$.

Sejam φ e ψ elementos quaisquer de T, e admitamos que $\models \varphi$ e $\models \psi$.

Seja ainda v uma valoração qualquer. Por hipótese de indução, $v(\varphi) = 1$, donde $v(\neg\varphi) = 0$; logo, por definição de valoração, $v(\neg\varphi \to \neg\psi) = 1$.

De 1, 2 e 3, e do Teorema de Indução Estrutural para T, resulta que $\models \varphi$, $\forall_{\varphi\in T}$.

2. Considere as seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (\neg p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_2)$$

$$\psi = p_1 \wedge (p_0 \to p_2)$$

(a) Indique uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

R: $\varphi = (\neg p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_2) \Leftrightarrow ((\neg p_0 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \wedge p_2)) \wedge ((p_0 \wedge p_2) \rightarrow (\neg p_0 \wedge p_1)) \Leftrightarrow$
$(\neg(\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \wedge p_2)) \wedge (\neg(p_0 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1)) \Leftrightarrow$
$(((p_0 \vee \neg p_1) \vee p_0) \wedge ((p_0 \vee \neg p_1) \vee p_2)) \wedge (((\neg p_0 \vee \neg p_2) \vee \neg p_0) \wedge ((\neg p_0 \vee \neg p_2) \vee p_1))$
Esta última fórmula é uma forma normal conjuntiva.
[Pode ser um pouco simplificada para $((p_0 \vee \neg p_1) \wedge ((p_0 \vee \neg p_1) \vee p_2)) \wedge ((\neg p_0 \vee \neg p_2) \wedge ((\neg p_0 \vee \neg p_2) \vee p_1))$.]

(b) O conjunto $\{\varphi, \psi\}$ é consistente?

R: Não. Suponhamos que v é uma valoração que satisfaz ψ. Então, como $v(\psi) = 1$, vem que $v(p_1) = v(p_0 \rightarrow p_2) = 1$, e portanto $v(p_0) = 0$ ou $v(p_2) = 1$.

Se $v(p_0) = 0$, podemos concluir que $v(\neg p_0 \wedge p_1) = \min(1 - v(p_0), v(p_1)) = \min(1,1) = 1$ e que $v(p_0 \wedge p_2) = \min(v(p_0), v(p_2)) = 0$; logo $v(\varphi) = 0$.

Resta a hipótese de $v(p_2) = 1$. Mas então $v(\neg p_0 \wedge p_1) = \min(1 - v(p_0), v(p_1)) = \min(1 - v(p_0), 1) = 1 - v(p_0)$ e $v(p_0 \wedge p_2) = \min(v(p_0), v(p_2)) = \min(v(p_0), 1) = v(p_0)$; logo $v(\varphi) = 0$.

De qualquer das formas, v não satisfaz φ.

(c) Será verdade que qualquer fórmula do Cálculo Proposicional é derivável a partir de $\{\varphi, \psi\}$?

R: Sim, por $\{\varphi, \psi\}$ ser inconsistente. Imaginemos que existia uma fórmula σ não derivável a partir de $\{\varphi, \psi\}$. Então, pelo Teorema da Completude, σ não seria consequência semântica de $\{\varphi, \psi\}$. Mas isso quereria dizer que existiria uma valoração que satisfaria $\{\varphi, \psi\}$ mas não σ, o que é impossível, visto que nenhuma valoração satisfaz $\{\varphi, \psi\}$.

3. Apresente derivações em DNP para provar que:

(a) i. $\neg(\neg p_0 \vee p_1) \vdash p_0$
ii. $\neg(\neg p_0 \vee p_1) \vdash \neg p_1$;

R:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\cancel{p_0}^{(1)}}{\neg p_0 \vee p_1}\, I\vee_1 \qquad \neg(\neg p_0 \vee p_1)}{\dfrac{\bot}{p_0}\,(RAA)(1)}\, E\neg \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(2)}}{\neg p_0 \vee p_1}\, I\vee_2 \qquad \neg(\neg p_0 \vee p_1)}{\dfrac{\bot}{\neg p_1}\, I\neg(2)}\, E\neg$$

(b) $\vdash (p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$ (sugestão: pode utilizar abreviaturas para as derivações da alínea a)).

R: (Chamando D_1 e D_2 às derivações de (a)i. e (a)ii., respectivamente)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg(\neg\cancel{p_0} \vee p_1)^{(1)} \\ D_1 \\ p_0\end{matrix} \qquad \cancel{p_0 \rightarrow p_1}^{(2)}}{p_1}\, E\rightarrow \qquad \begin{matrix}\neg(\neg\cancel{p_0} \vee p_1)^{(1)} \\ D_2 \\ \neg p_1\end{matrix}}{\dfrac{\bot}{\neg p_0 \vee p_1}\,(RAA)(1)}\, E\neg}{(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (\neg p_0 \vee p_1)}\, I\rightarrow(2)$$

Parte II

Seja $L_0 = (\{0, D, +\}, \{P, >\}, \mathcal{N})$ a linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(D) = \mathcal{N}(P) = 1$, e $\mathcal{N}(+) = \mathcal{N}(>) = 2$. Seja ainda $E_0 = (\mathbb{N}_0, \overline{\ })$ a L_0-estrutura onde $\overline{0}$ é o número inteiro zero, $\overline{D}$ é a função $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada n faz corresponder $2n$, $\overline{+}$ é a operação de adição em $\mathbb{N}_0$, $\overline{P}$ é o conjunto dos números pares e $\overline{>}$ é a relação "maior" em $\mathbb{N}_0$.

(a) Indique uma atribuição a_0 em E_0 tal que $(D(x_1) + x_2)[a_0] = 5$.

R: $(D(x_1) + x_2)[a_0] = 5$ se e só se $2\, a_0(x_1) + a_0(x_2) = 5$. Assim, por exemplo, podemos tomar para a_0 a atribuição que à variável x_2 atribui o valor 5 e que às restantes variáveis atribui o valor 0.

(b) Indique uma L_0-fórmula φ_0 tal que $\varphi_0[t/x] = \varphi_0$, para qualquer L_0-termo t e qualquer variável x.

R: A condição acima é satisfeita se e só se φ_0 não tem qualquer ocorrência livre de variáveis. Uma L_0-fórmula nestas condições é, por exemplo, $P(0)$.

(c) Represente as seguintes afirmações como L_0-fórmulas:

i. Cada número ímpar é maior do que um número par.

ii. A soma de dois números pares é um número ímpar.

R:

(i) $\forall_{x_0}(\neg P(x_0) \to \exists_{x_1}(P(x_1) \wedge x_0 > x_1))$

(ii) $\forall_{x_0}\forall_{x_1}((P(x_0) \wedge P(x_1)) \to \neg P(x_0 + x_1))$

(d) Indique uma L_0-estrutura onde a fórmula correspondente à segunda frase da alínea anterior seja falsa.

R: A própria L-estrutura E_0 invalida a segunda fórmula, uma vez que a soma de dois números pares é ainda um número par.

(e) Prove que a fórmula $(\neg\exists_{x_0} P(x_0)) \to (\neg P(0))$ é universalmente válida (ou, equivalentemente, prove que a fórmula $(\neg\exists_{x_0} P(x_0)) \to (\neg P(0))$ é derivável em DNQ).

R: A construção abaixo é uma derivação da fórmula, que não tem hipóteses por cancelar. Fica assim provado que a fórmula é um teorema de DNQ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{P(0)}^{(2)}}{\exists_{x_0} P(x_0)}\ I\exists^{(a)} \quad \cancel{\neg\exists_{x_0} P(x_0)}^{(1)}}{\perp}\ E\neg}{\neg P(0)}\ I\neg^{(2)}}{(\neg\exists_{x_0} P(x_0)) \to (\neg P(0))}\ I \to^{(1)}$$

(a) x_0 é substituível por 0 em $P(x_0)$ sem captura de variáveis (por exemplo, observe-se que $P(x_0)$ não tem qualquer quantificação).

Cotação:

Parte I	**1.** 4,5 valores	**2.** 4,5 valores	**3.** 3 valores
Parte II	8 valores		