



Duração: 2 horas e 30 minutos

Nome:

Número:

Grupo I

Para cada questão deste grupo, assinale qual das afirmações é verdadeira. Cada resposta certa vale 1 valor; nenhuma afirmação selecionada vale 0 valores; cada resposta errada ou nula vale -0.25 valores. A cotação mínima neste grupo é de 0 valores.

Questão 1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \operatorname{sh}(x)$. Então f é uma função

- a) bijetiva.
- b) injetiva e não sobrejetiva.
- c) não injetiva e sobrejetiva.
- d) não injetiva e não sobrejetiva.

Questão 2 A expressão $\operatorname{arctg}\left(-2 + \operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$ é igual a

- a) $-\frac{\pi}{4}$.
- b) 0.
- c) $\frac{\pi}{4}$.
- d) π .

Questão 3 Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1, \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Então f é uma função

- a) contínua.
- b) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- c) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- d) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Questão 4 Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Então

- a) existe $f'(0)$.
- b) não existe $f'_-(0)$.
- c) existe $f'_+(0)$.
- d) não existe $f'(0)$.

Questão 5 A equação $x = \cos(x)$

- a) não tem soluções no intervalo $[0, \pi/2]$.
- b) tem uma única solução no intervalo $[0, \pi/2]$.
- c) tem exatamente duas soluções distintas no intervalo $[0, \pi/2]$.
- d) tem, pelo menos, duas soluções no intervalo $[0, \pi/2]$.

Questão 6 O valor de $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)| dx$ é igual a

- a) 0. b) $\pi/2$. c) 2. d) 4.

Questão 7 Seja $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_{-3}^0 f(x) dx = 10$ e

$\int_0^2 f(x) dx = -4$. Então o valor de $\int_{-3}^2 (1 - 2f(x)) dx$ é igual a

- a) -12. b) -7. c) -6. d) -1.

Questão 8 Sejam $u_n = \frac{8}{3\sqrt{n}}$ e $v_n = \frac{1}{4^n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então:

- a) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são convergentes. c) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente.
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são divergentes. d) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente.

Grupo II

Responda, no próprio enunciado, às seguintes questões indicando os cálculos que tiver que efetuar bem como as respectivas justificações.

Questão 9 [3 valores] Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = -2\pi + 3 \arccos(2 - 5x).$$

- a) Determine o domínio e o contradomínio da função f .

- b) Caracterize a função inversa de f .

- c) Determine os zeros da função f .

Questão 10 [2 valores] Calcule

a) $\int \frac{e^{\arctg(x)}}{1+x^2} dx.$

b) $\int x \cos(x) dx.$

Questão 11 [1.5 valores] Esboce a região do plano limitada pelas curvas de equação

$$y = |x| - 1 \quad \text{e} \quad y = 1 - |x|$$

e determine a sua área.

Questão 12 [1.5 valores] Diga se o integral

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

é convergente ou divergente e, em caso de convergência, determine o seu valor.

Questão 13 [2 valores] Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

é convergente mas não é absolutamente convergente.

Questão 14 [2 valores] Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (x-1)^n.$$

a) Justifique porque é que a série é divergente para $x = 1/2$ e para $x = 3/2$.

b) Determine o intervalo de convergência da série dada.

(FIM)