UNIVERSIDADE DO MINHO	5 de Dezembro de 2009
Álgebra Linear	
$1^{\underline{o}}$ Teste - **A**	
LEI	Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ **Nº:** __________

I

Relativamente às questões deste grupo indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), colocando uma circunferência no símbolo correspondente. As respostas **incorrectamente assinaladas** *têm cotação negativa.*

1. **a)** Se A é uma matriz que verifica $(2I_2 + A)^T = -2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então a $2^{\underline{a}}$ coluna da matriz A é igual a $\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}^T$. V F

b) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, invertível. Existe uma matriz B, quadrada de ordem n, não nula, tal que AB é uma matriz nula. V F

c) Se A é uma matriz anti-simétrica ($A^T + A = O$) então A^2 é simétrica. V F

d) Se A é uma matriz de ordem 4 que verifica $(A+I_4)^2 = 0$ então A é invertível.V F

2. **a)** Os vectores $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (2,1,3)$, $v_3 = (1,0,\alpha)$ são linearmente dependentes para $\alpha = -1$. V F

b) Sejam u, v e w vectores linearmente dependentes de um espaço vectorial real V. Então v é combinação linear de u e w. V F

c) Se u, v e w são vectores linearmente dependentes de um espaço vectorial real V, então os vectores $u - v$, $v - w$ e $w - u$ são vectores linearmente independentes. V F

d) Em $\mathbb{R}^2$ não existe nenhum subespaço de dimensão 2 gerado pelos vectores $u = e_1 - e_2$ e $v = -e_2$ (sendo $\{e_1, e_2\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$). V F

3. **a)** Seja A uma matriz de ordem 9×10 tal que $car(A) = 5$, então o núcleo de A tem dimensão 4. V F

b) Existe uma matriz A, que define uma aplicação linear f, em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $dim\ \ Im(f) = dim\ \ Nuc(f)$, V F

c) A aplicação linear f, definida em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $Nuc_f = \{(x,y) : x = 0\}$ é um isomorfismo. V F

d) Se $H = \langle 1, 2+x, 3+2x+x^3 \rangle$, é um subespaço de P_3, sendo P_3 o subespaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, então $x \notin H$. V F

4. **a)** A matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} x_1 = 3 - x_4 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$ tem característica igual a 3.

V F

b) O espaço gerado pelos vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tem dimensão igual a 2. V F

c) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tem-se $car(A) = 1$ ou $car(A) = 2$, para quaisquer valores reais de r e s.

V F

d) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o espaço das colunas de A tem dimensão igual a 2.

V F

II

Para cada questão deste grupo, complete as respectivas afirmações.

1. Considere o seguinte sistema,

$$\begin{cases} x + y + (1+a)z & = & 1 \\ x + (1+a)y + z & = & 1+a \\ (2-a)(1+a)z & = & 2-a \end{cases}$$

de variáveis x, y, z e com $a \in \mathbb{R}$.

a) Se $a = 1$ é solução do sistema o vector . . . .

b) O sistema $AX = B$ é impossível se e só se . . . .

c) O sistema $AX = B$ possível e indeterminado, com grau de indeterminação. . . . . se e só se . . . .

d) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se . . . .

2. Seja f a aplicação linear definida de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1,2) = (1,3,5) \quad \text{e} \quad f(2,7) = (-1,1,1).$$

a) Os vectores $(1,0)$ e $(0,1)$ podem escrever-se como combinação linear dos vectores $(1,2)$ e $(2,7)$ do seguinte modo . . . .

b) Usando a alínea a) tem-se que $f(1,0) =$ . . . . e $f(0,1) =$ . . . .

c) *(Responda à seguinte questão justificando a sua resposta.)*

Determine, para a aplicação linear f, duas matrizes diferentes que a representem.

Resolução:

III

Responda à questão deste grupo justificando a sua resposta e apresentando todos os cálculos efectuados.

Considere U e V, subespaços vectoriais reais de $\mathbb{R}^4$, tais que:

$$U = \{(x, y, z, t) : x = y, \;\; y + z = t \;\text{ e }\; x, y, z, t \in \mathbb{R}\},$$
$$V = \langle \;(1, 1, 0, 0), \;\; (0, 0, 1, 1)\; \rangle$$

a) Mostre que U é um subespaço vectorial real de $\mathbb{R}^4$.

b) Determine uma base e a dimensão de V.

c) Determine o subespaço V através de condições que definam o seu elemento genérico.

d) Defina o subespaço $U \cap V$ e determine um conjunto de geradores de $U \cap V$.

Resolução:

Cotações	Parte I	Parte II	Parte III
	8	4 +(1+1+2)	1+1+0.5+1.5