



Folha 6 - Primitivas

Exercício 1 Calcule:

- | | | |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| a) $\int \sqrt{t}(t^2 - 1) dt;$ | h) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx;$ | o) $\int \sin x \cos^5 x dx;$ |
| b) $\int x(2x + 1)^2 dx;$ | i) $\int \left(e^{3x} + \frac{\cos(3x)}{2} \right) dx;$ | p) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx;$ |
| c) $\int \left(\frac{1}{3y} - \frac{5}{\sqrt{y}} \right) dy;$ | j) $\int (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx;$ | q) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx;$ |
| d) $\int \frac{1}{y}(y + 1)^2 dy;$ | k) $\int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx;$ | r) $\int \cos x \sin x dx;$ |
| e) $\int x^{-1/2}(x^2 - x) dx;$ | l) $\int x^4 \cos(x^5) dx;$ | s) $\int (1 + e^x)^2 dx;$ |
| f) $\int \left(2e^u + \frac{6}{u} \right) du;$ | m) $\int (1 + x)^{27} dx;$ | t) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx;$ |
| g) $\int (e^t + 1)^2 dt$ | n) $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx;$ | u) $\int \sin x e^{\cos x} dx.$ |

Exercício 2 Em cada alínea, determine a única função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica as condições apresentadas.

- a) $f''(x) = 12x + 2, \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = 2.$
b) $f''(x) = -\sin(2x) + 2\cos(3x), \quad f'(0) = 1, \quad f(\pi) = 0.$
c) $f''(x) = e^x - e^{-3x} + 1, \quad f'(0) = \frac{10}{3}, \quad f(0) = 0.$
d) $f'(x) = \sin x + 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

Exercício 3 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

- a) a função f , definida por $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$, possui uma primitiva F tal que $F(0) \neq F(2\pi)$;
b) as funções definidas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos^3 x + \cos x \sin^2 x + 2$ são duas primitivas de uma mesma função em \mathbb{R} .

Exercício 4 A velocidade $v(t) = x'(t)$ no tempo t de um objecto deslocando-se ao longo do eixo dos xx e a sua posição inicial são dadas por

$$x'(t) = -2(3t + 1)^{1/2} \quad \text{e} \quad x(0) = 4.$$

Calcule a posição do objeto $x(t)$. Qual a posição do objeto no tempo $t = 4$?

Exercício 5 Usando o método de primitivação por partes, calcule:

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| a) $\int \ln x \, dx;$ | d) $\int x^3 e^x \, dx;$ | g) $\int \operatorname{sh} u \, e^{2u} \, du;$ |
| b) $\int \ln^2 z \, dz;$ | e) $\int t^2 \operatorname{sen} t \, dt;$ | h) $\int \operatorname{ch} t \operatorname{sen} t \, dt;$ |
| c) $\int w \ln w \, dw;$ | f) $\int y \cos y \, dy ;$ | i) $\int \operatorname{arctg} x \, dx .$ |

Exercício 6 Calcule as seguintes primitivas, efetuando a substituição de variável indicada:

- | | |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| a) $\int \frac{x}{x-1} \, dx; \quad u = x - 1;$ | d) $\int x \sqrt[5]{x-2}; \quad t^5 = x - 2;$ |
| b) $\int \sqrt{2x+7} \, dx; \quad u = 2x + 7;$ | e) $\int \frac{3e^u}{1+e^{2u}} \, du; \quad t = e^u;$ |
| c) $\int 2y \sqrt{4-y} \, dy; \quad u^2 = 4 - y;$ | f) $\int \operatorname{sen} \sqrt{x+1} \, dx; \quad x = t^2 - 1.$ |

Exercício 7 Calcule as primitivas das seguintes funções racionais:

- | | | |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $\int \frac{27}{x^4 - 3x^3} \, dx;$ | c) $\int \frac{x+1}{x(x-1)^2} \, dx;$ | e) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, dx.$ |
| b) $\int \frac{u^4 - 8}{u^3 - 2u^2} \, du;$ | d) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} \, dx;$ | |

Exercício 8 Calcule:

- | | | |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| a) $\int x \operatorname{sen}(2x) \, dx;$ | g) $\int \frac{t-1}{t+1} \, dt;$ | m) $\int \frac{1}{(2+\sqrt{x})^7 \sqrt{x}} \, dx;$ |
| b) $\int x \sqrt[4]{1+x} \, dx;$ | h) $\int \frac{1}{x(\ln x)^3} \, dx;$ | n) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx;$ |
| c) $\int t \sqrt{t+1} \, dt;$ | i) $\int \cos(3x) \operatorname{sen}^2(3x) \, dx;$ | o) $\int \frac{x + (\operatorname{arcsen}(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}} \, dx;$ |
| d) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+4}} \, dx;$ | j) $\int x(e^x + 1) \, dx;$ | p) $\int \frac{x e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$ |
| e) $\int x^3 e^{x^4+2} \, dx;$ | k) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \, dx;$ | q) $\int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} \, dx;$ |
| f) $\int (x+1) \cos x \, dx;$ | l) $\int u^2 \operatorname{sh} u \, du;$ | r) $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx.$ |