Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

1º Teste :: 30 de março de 2016

Nome: Proposta de Resolução   Número:

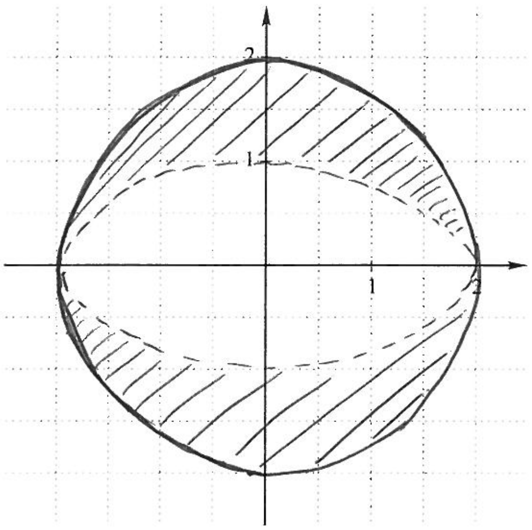
A resposta ao Exercício 1 deve ser dada na folha de enunciado.

Exercício 1. [3 valores] Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x^2 + 4y^2 > 4\}$.

a) Apresente um esboço do conjunto A.

b) Preencha a tabela usando os símbolos $\in$ e $\notin$.

c) Diga, justificando, se A é ou não um conjunto fechado.



	A	$\mathring{A}$	$\bar{A}$	∂A
$(1,0)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$(0,1)$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$(1,1)$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$(2,0)$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$(0,2)$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$(2,2)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

c) O conjunto A não é fechado porque

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } x^2+4y^2 > 4\} \neq \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } x^2+4y^2 \geq 4\}$

② $f(x,y) = \sqrt{25-4x^2-y^2}$ $\boxed{2}$

a) $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 25-4x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 \leq 25\}$

b) $\Sigma_0 = \{(x,y)\in D_f : \sqrt{25-4x^2-y^2} = 0\}$

$= \{(x,y)\in D_f : 4x^2+y^2 = 25\}$ ← é uma elipse

$\Sigma_4 = \{(x,y)\in D_f : \sqrt{25-4x^2-y^2} = 4\}$

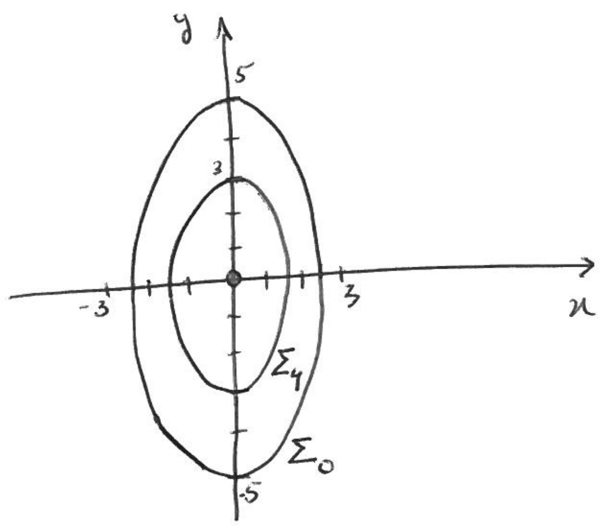
$= \{(x,y)\in D_f : 4x^2+y^2 = 9\}$ ← é uma elipse

$\Sigma_5 = \{(x,y)\in D_f : \sqrt{25-4x^2-y^2} = 5\}$

$= \{(x,y)\in D_f : 4x^2+y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$ ← é um ponto

$\Sigma_6 = \{(x,y)\in D_f : \sqrt{25-4x^2-y^2} = 6\}$

$= \{(x,y)\in D_f : 4x^2+y^2 = -11\} = \emptyset$



c) $\text{graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f \text{ e } z = \sqrt{25-4x^2-y^2}\}$

O gráfico de f é metade de um elipsóide.

d) f é limitada porque $\text{graf}(f) \subseteq B_6((0,0,0))$

3

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^4} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} 0}{1^2+0^4} = 0$

b) O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^4}$ não existe porque o

limite trajectorial $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{x=0}}} \frac{y^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \operatorname{sen} y}{y^4} =$

$$= \lim_{y\to 0} \underbrace{\frac{1}{y}}_{\substack{y\to 0^+ \,\to\, +\infty \\ y\to 0^- \,\to\, -\infty}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\to 1}$$ não existe.

(4) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$$

a) $f(x,y)$ é o quociente entre um polinómio e a raiz quadrada de um outro polinómio. Consequentemente f é contínua em todo o seu domínio.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ não existe porque o limite trajectorial $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ y=1}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ não existe. Logo não é possível prolongar f a $\mathbb{R}^2$ de forma contínua.

(5) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, f é contínua em (x,y) porque f é o quociente entre dois polinómios.

Na origem:

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| = \left| \frac{x^4 y}{x^4+y^4} - 0 \right| = \frac{x^4}{x^4+y^4}\cdot|y| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Logo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ e f é contínua em $(0,0)$.

b) $$Df((0,0);(u,v)) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(u,v)) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(hu)^4 hv}{(hu)^4+(hv)^4} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^5 u^4 v}{h^5(u^4+v^4)} = \frac{u^4 v}{u^4+v^4} \quad , \text{ para } (u,v) \neq (0,0)$$

Assim, $$Df((0,0);(u,v)) = \begin{cases} \dfrac{u^4 v}{u^4+v^4}, & (u,v) \neq (0,0) \\ 0, & (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

c) Por b):

$$f_x(0,0) = Df((0,0);(1,0)) = 0 \quad ; \quad f_y(0,0) = Df((0,0);(0,1)) = 0$$

d) Por b), a função $(u,v) \longmapsto Df((0,0);(u,v))$ não é linear, logo f não é derivável em $(0,0)$.

6)
$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (xyz^2, \; y e^{xy})$$

a) Matriz jacobiana: $$\begin{bmatrix} yz^2 & xz^2 & 2xyz \\ y^2 e^{xy} & (1+xy)e^{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Todas as derivadas parciais de cada função componente de f existem e são contínuas, logo f é derivável.

c) $$Jf(1,1,2) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ e & 2e & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jf(1,1,2) \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ e & 2e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(u+v+w) \\ eu + 2ev \end{bmatrix}$$

Assim

$$f'(1,1,2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v,w) \longmapsto (4u+4v+4w,\ eu+2ev)$$

d)
$$Df((1,1,2);(1,0,1)) = f'(1,1,2)(1,0,1) = (8, e)$$