Capítulo 1 - Funções reais de variável real

1.2 Limite de uma função

Nesta seção vamos estudar a noção mais importante do cálculo – o limite de uma função. Considerando uma função f de domínio $D \subset \mathbb{R}$ vamos falar de limite de $f(x)$ quando x tende para a, para certo $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

Ponto de acumulação e ponto isolado

Ideia intuitiva de limite

Definição de limite

Propriedades do limite

Limites laterais

Limites no infinito

Limites infinitos

Ponto de acumulação

Dados um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}$, diz-se que x é ponto de acumulação de A quando

$$\forall r > 0 , \quad \big( ]\, x - r, x + r\, [\setminus \{x\} \big) \cap A \neq \emptyset.$$

Em particular, diz-se que x é ponto de acumulação à esquerda de A quando

$$\forall r > 0 , \quad]\, x - r, x\, [\cap A \neq \emptyset$$

e que x é ponto de acumulação à direita de A quando

$$\forall r > 0 , \quad]\, x, x + r\, [\cap A \neq \emptyset$$

- O conjunto dos pontos de acumulação de A designa-se por derivado de A e representa-se por A' .
- O conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de A representa-se por A'_- .
- O conjunto dos pontos de acumulação à direita de A representa-se por A'_+ .

Ponto de acumulação

Exemplo

Considere-se o conjunto

$$A = [0,3[\,\setminus\{1\}\cup\{4\}$$

O conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de A é $A'_{-} =]0,3]$.

O conjunto dos pontos de acumulação à direita de A é $A'_{+} = [0,3[$.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é $A' = A'_{-} \cup A'_{+} = [0,3]$.

Ponto isolado

Diz-se que x é um ponto isolado de A quando $x \in A$ mas $x \notin A'$, ou seja, quando

$$\exists r > 0 : \,]x - r, x + r[\cap A = \{x\}$$

Exemplo

Considere-se novamente o conjunto

$$A = [0, 3[\setminus \{1\} \cup \{4\}$$

O conjunto dos pontos isolados de A é $\{4\}$ *.*

Observação

- *Os pontos de acumulação de um dado conjunto A são os candidatos ao estudo de limites, quando esse conjunto é o domínio de uma certa função.*

- *Os pontos de acumulação de um só lado aparecerão no estudo dos limites ditos laterais.*

- *Por outro lado, os pontos isolados de um conjunto não servem para estudar limites.*

Ideia intuitiva de limite

Dada uma função $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, quando escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

queremos dizer que os valores de $f(x)$ se aproximam de ℓ à medida que x se aproxima do ponto a, por valores à esquerda ou à direita de a.

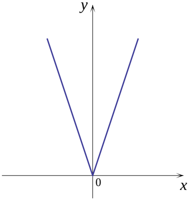
O limite apresentado pretende descrever o comportamento de f quando x está próximo de a mas é diferente de a; tal ponto a pode pertencer ou não ao domínio de f; se pertencer, o valor $f(a)$ não tem qualquer influência sobre o limite ℓ. Tudo depende exclusivamente daquilo que se passa em pontos $x \neq a$ nas vizinhanças de a, ou seja, é necessário que a seja um ponto de acumulação de D, $a \in D'$.

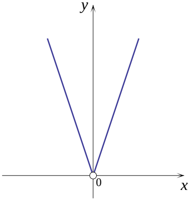
Ideia intuitiva de limite

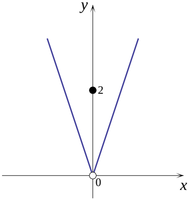
Exemplos

Analisemos, intuitivamente, a existência de limite na origem para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h: \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x\neq 0 & \longmapsto & 3|x| \\ x=0 & \longmapsto & 2 \end{array}$$







Observamos que cada uma das funções se aproxima de 0*, tanto quanto se queira, desde que se tome* x *suficientemente próximo de* 0*, sempre com* $x \neq 0$*, pelo que somos levados a conjeturar que seja*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$

Definição de limite

Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$.

Diz-se que o número real ℓ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell,$$

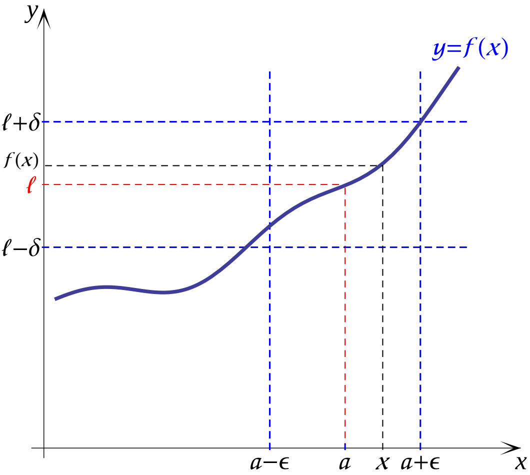
se for possível tornar os valores $f(x)$ arbitrariamente próximos de ℓ, desde que x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos do domínio D mas sem nunca atingir o ponto a.

Simbolicamente,

$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - a| < \varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \delta.$$

Definição de limite



Se $0 < |x - a| < \varepsilon$, então $|f(x) - \ell\,| < \delta$.

Propriedades do limite

Usando a definição de limite, estabelem-se alguns resultados fundamentais, entre os quais destacamos as seguintes.

Teorema

[Unicidade do limite]

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_2$ então $\ell_1 = \ell_2$.

Teorema

[Mantém-se o limite para restrições]

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$ e $A \subset D$ com $a \in A'$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ então também $\lim_{x \to a} f|_A(x) = \ell$.

Propriedades do limite

Teorema

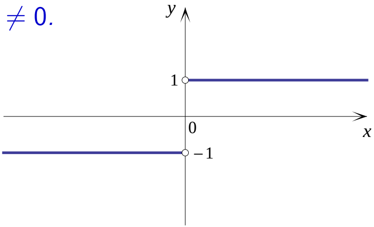
Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $a\in D'$ *e* $A, B\subset D$ *tais que* $a\in A'\cap B'$.

Se $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=\ell_1$ *e* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)=\ell_2$, *com* $\ell_1\neq\ell_2$,

então não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Exemplo

Seja $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\neq 0$.



Não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, *porque*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{x\to 0} 1=1 \qquad e \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{x\to 0}(-1)=-1.$$

Propriedades do limite

Teorema

[Limitação de funções com limite]
Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se existir $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ então a função f é limitada numa vizinhança do ponto a, isto é,

$$\exists M > 0\,,\ \ \exists \varepsilon > 0 :\ \ (x \in D\,,\ \ 0 < |x-a| < \varepsilon\,) \Longrightarrow\ |f(x)| \leq M.$$

Corolário

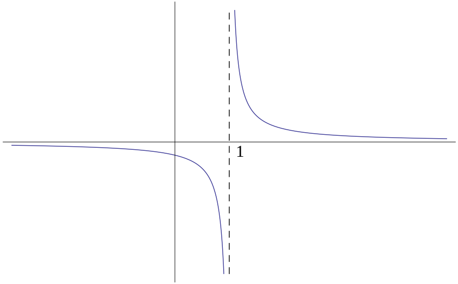
Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que se torna ilimitada em qualquer vizinhança de certo ponto $a \in D'$. Então não existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$.

Propriedades do limite

Exemplos

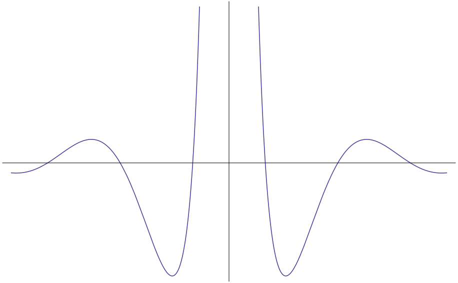
1. *Não existe* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$.

A função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, *torna-se ilimitada em qualquer vizinhança do ponto* 1.



Propriedades do limite

2. *Analogamente, também* *não existe* $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2}$. *A função definida por* $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *torna-se ilimitada em qualquer vizinhança do ponto* 0.



Propriedades do limite

Teorema

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D'$. *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e* g *é limitada em* $D \setminus \{a\}$ *então*

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0.$$

Repare-se que a conclusão do teorema é válida ainda que não exista $\lim_{x \to a} g(x)$.

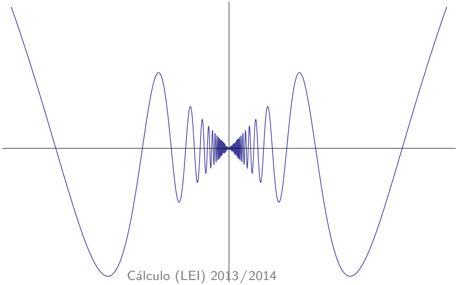
Propriedades do limite

Exemplo

$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$

Não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$*, mas a conclusão é justificada pelo teorema anterior, uma vez que*

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$



Propriedades do limite

Teorema
[Aritmética dos limites]

1. i. Se k é uma constante e $a \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

   ii. Se $a \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

2. Sejam $f, g \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Suponhamos que existem $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $m = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Então:

   i. $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \ell + m$;

   ii. $\lim\limits_{x \to a} (f-g)(x) = \ell - m$;

   iii. $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot m$;

   iv. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{m}$, para $m \neq 0$.

Propriedades do limite

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{sen} x + x^2 \cdot \dfrac{1}{e^x} + 7 \right) = 0 + 0 \cdot \dfrac{1}{1} + 7 = 7$

2. *Para calcular* $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos \dfrac{1}{x}$*, o teorema anterior não é aplicável, por não existir* $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$.

   Mas uma vez $\lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$ *e que* $-1 \leq \cos \dfrac{1}{x} \leq 1$*, é imediato que*

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos \frac{1}{x} = 0$$

Propriedades do limite

Teorema

[Enquadramento]

Sejam $f, g, h \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in D'$ *tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,, \quad \forall x \in D \setminus \{a\}.$$

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$ *então também* $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Exemplo

$\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0.$

Tem-se $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq 1\,,\ x \neq 0\,,$ *pelo que*

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq x^4\,,\ x \neq 0$$

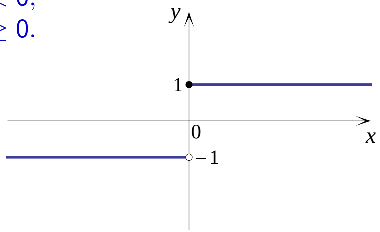
Como $\lim_{x \to 0} \left(-x^4\right) = 0 = \lim_{x \to 0} x^4$, *o teorema garante que o limite proposto vale* 0.

Limites laterais

No estudo de limites é útil introduzir a noção de limite lateral. Esta noção intervém muitas vezes para mostrar que certos limites não existem.

É o que se passa, por exemplo, com a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$



para a qual se tem

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1.$$

Estes limites representam precisamente os limites das restrições de f a $\mathbb{R}^-$ e a $\mathbb{R}^+$.

Limites laterais

Noutras situações, pode até existir o limite "completo", digamos $\lim_{x \to a} f(x)$, mas ser conveniente considerar separadamente

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x),$$

o que é possível desde que a seja ponto de acumulação, de ambos os lados, do domínio de f. Estão em causa os chamados limites laterais .

Seja $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se a é um ponto de acumulação à direita de D , diz-se que o número real
ℓ é o limite lateral à direita de $f(x)$ quando x tende para a (por valores superiores a a) e escreve-se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \ (x \in D \wedge 0 < x - a < \varepsilon) \implies |f(x) - \ell| < \delta.$$

Limites laterais

Analogamente, se a é um ponto de acumulação à esquerda de D , diz-se que o número real
ℓ é o limite lateral à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a (por valores inferiores a a) e escreve-se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \; (x \in D \wedge -\varepsilon < x - a < 0) \implies |f(x) - \ell| < \delta.$$

A existência de um limite "completo" pode ser decidida com base nos limites laterais, através do seguinte resultado.

Teorema

Tem-se $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *se e só se existem e são iguais a* ℓ *os correspondentes limites laterais, isto é,*

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \iff \left(\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \;\wedge\; \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \right).$$

Limites laterais

Exemplos

1. *Não existe* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ *.*

   De facto, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$ *e* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ *.*

2. *Seja*

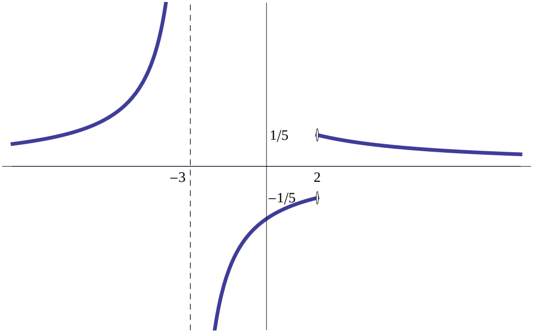
$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}.$$

   Observe-se que $|x-2| = x-2$ *se* $x > 2$ *e que* $|x-2| = -(x-2)$ *se* $x < 2$*. Assim,*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Limites laterais



Uma vez que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

concluímos que não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Limites laterais

Os limites laterais são também úteis para descrever o comportamento de uma função em pontos extremos do seu domínio.

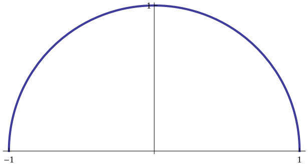
Exemplo

Considere-se a função definida por

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Esta função tem domínio $[-1, 1]$, *de forma que, em* $x = -1$, *só podemos falar de* $\lim_{x \to -1^+} g(x)$ *e, em* $x = 1$, *de* $\lim_{x \to 1^-} g(x)$. *Tem-se*

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = 0.$$



Limites no infinito

Vamos agora dar significado à expressão $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ quando o domínio D é ilimitado inferiormente, e à expressão $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ quando D é ilimitado superiormente.

Dizemos que o número real ℓ é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de ℓ, desde que, em D, x se torne suficientemente grande. Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se e só se

$$\forall \delta > 0\,,\ \exists A > 0 : (x \in D \ \wedge\ x > A) \Longrightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \delta.$$

De maneira análoga definimos o limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se e só se

$$\forall \delta > 0\,,\ \exists A > 0 : (x \in D \ \wedge\ x < -A) \Longrightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \delta.$$

Limites no infinito

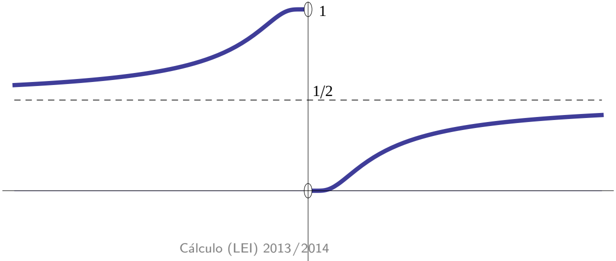
Observação

Para os limites no infinito valem, com as devidas adaptações, os resultados apresentados anteriormente sobre o limite para x a tender para um certo $a \in \mathbb{R}$.

Exemplos

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$ e $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$.

   De facto, $x \to \pm\infty \implies 1/x \to 0 \implies e^{1/x} \to 1$.

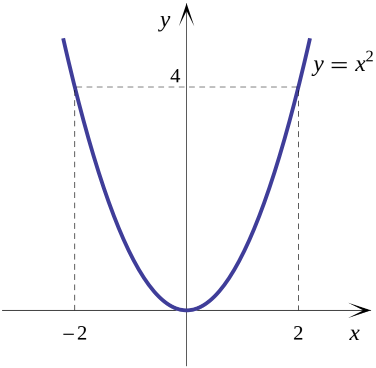


Limites no infinito

Exemplos

2. *Em $\mathbb{R}$, também não existe $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ nem existe $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$.*

   Basta atender a que x^2 se torna ilimitado quando $x \to -\infty$ ou quando $x \to +\infty$.

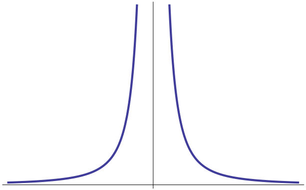


Limites infinitos

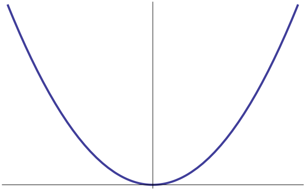
Suponhamos que pretendemos averiguar a existência de $\lim_{x\to 0} h(x)$ e de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, onde

$$h(x) = \frac{1}{x^2}, \;\; x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \qquad g(x) = x^2, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Como h se torna ilimitada quando $x \to 0$ e g se torna ilimitada quando $x \to +\infty$, os limites em causa não existem.



$h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$



$g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Limites infinitos

No entanto, estas funções tornam-se ilimitadas com um comportamento monótono, levando-nos a afirmar que $h(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para 0 e que $g(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$.

Adotando a notação utilizada anteriormente para o limite, escrevemos

$$\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty\,.$$

Tratemos os casos gerais. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Dizemos que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando x tende para a se for possível tornar $f(x)$ arbitrariamente grande desde que x se torne suficientemente próximo de a, percorrendo apenas pontos de D, mas sem nunca atingir a. Escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se e só se

$$\forall A > 0,\ \exists \varepsilon > 0 :\ (x \in D\ \wedge\ 0 < |x-a| < \varepsilon) \implies f(x) > A.$$

Limites infinitos

Analogamente, escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

Limites infinitos

Aritmética

1. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e g é minorada então $\lim_{x \to a} \Big(f(x) + g(x) \Big) = +\infty$.

2. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $g(x) > k > 0$, $\forall x \in D$, então $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = +\infty$.

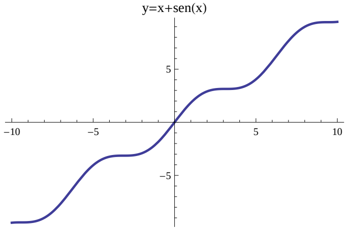
3. Se $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, então $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ se e só se $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

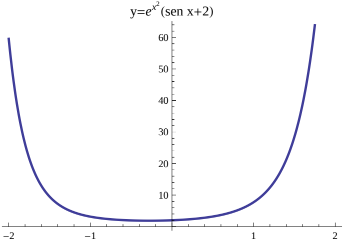
4. Se f é limitada, com $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D$, e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ então $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \operatorname{sen} x) = +\infty$,
   uma vez que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ *e* $\operatorname{sen} x$ *é uma função limitada.*

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x^2} \operatorname{sen} x + 2e^{x^2}\right) = +\infty$,
   dado que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$ *e* $(\operatorname{sen} x + 2)$ *é uma função limitada.*





Limites infinitos

Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ \text{e} \lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

o que se pode dizer sobre o limite

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = ?$$

- Diz-se que $+\infty + (-\infty)$ é uma indeterminação .
- Outras indeterminações são:

$$0 \cdot \infty, \ \ \frac{\infty}{\infty}, \ \ \frac{0}{0}, \ \ 1^{\infty}, \ \ 0^{0}, \ \ \infty^{0}.$$