

Nome: _____ Número: _____

IMPORTANTE: A duração do teste é de 1 hora e 45 minutos. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. O teste é composto por dez exercícios. Os exercícios I - VII devem ser resolvidos no enunciado. Os exercícios VIII-X devem ser resolvidos numa folha separada. Nos exercícios em que a cotação não é indicada no enunciado, cada resposta certa conta 0,6 valores e cada resposta errada desconta 0,3 valores.

I. Indique quais das seguintes fórmulas são tautologias (T), quais são contradições (C) e quais não são tautologias nem contradições (N).

T	C	N	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$p \Leftrightarrow \neg p$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(p \Leftrightarrow \neg p) \Leftrightarrow (q \wedge \neg q)$

II. (0,6 valores) Considere a seguinte proposição sobre os elementos de um dado universo de números reais:

$$\exists x \forall y \quad x > y^2 \Rightarrow x^2 > y^2$$

Indique em linguagem simbólica, sem recorrer a símbolos de negação, uma proposição que seja equivalente à negação da proposição dada:

III. Suponha que após a realização do exame final desta disciplina é aplicado o método de avaliação segundo o qual um aluno tem direito a uma prova complementar se e só se a sua classificação no exame é inferior a 9,5 valores e superior ou igual a 8 valores. Suponha ainda que alguns alunos tiveram 7 valores no exame e que o aluno Djalme teve 11 valores no exame. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Se um aluno tem 7 valores no exame, então tem direito a uma prova complementar.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Se o Djalme tem 7 valores no exame, então tem direito a uma prova complementar.
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Existe um aluno com 7 valores no exame que tem direito a uma prova complementar.

IV. Considere o conjunto $A = \{1, 3, \{(1, 3)\}, \{2\}\} \cup \mathbb{Z}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \subseteq \mathbb{Z}$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(1, 3) \in A$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\{1, 3\} \in A$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\{1, 2\} \subseteq A$

V. Sejam A, B, C três conjuntos tais que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras (V) e quais podem ser falsas (F):

V	F	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\forall x \in A \quad x \in B \Rightarrow x \notin C$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\forall x \in A \quad x \notin B \Rightarrow x \in C$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \cap C = A \setminus B$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$A \cap B \subseteq A \setminus C$

VI. Considere os conjuntos $A = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \exists x, y \in \mathbb{N} \quad X = \{x, y\}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x^2 \leq 9\}$. Indique os seguintes conjuntos em extensão:

(a) (0,6 valores) $B =$ _____

(b) (0,6 valores) $\mathcal{P}(B) =$ _____

(c) (0,6 valores) $A \cap \mathcal{P}(B) =$ _____

(d) (0,6 valores) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) =$ _____

VII. Indique quais das seguintes afirmações sobre conjuntos são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V	F	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\forall A, B \quad A \times B = B \times A$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\forall A, B \quad A \times B \neq B \times A$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\forall A, B \quad (A \times A) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times (A \setminus B)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$\exists A, B \quad (A \times A) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times (A \setminus B)$

VIII. (1,5 valores) Verdadeiro ou falso? As fórmulas $(p \vee q) \Rightarrow r$ e $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ são logicamente equivalentes. Justifique a sua resposta.

IX. (2 valores) Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

X. (1,5 valores) Verdadeiro ou falso? Para quaisquer três conjuntos A, B e C tem-se $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Justifique a sua resposta.