



Universidade do Minho

Departamento de Produção e Sistemas  
Escola de Engenharia

## Exercícios

# MÉTODOS NUMÉRICOS EI

Licenciatura em Engenharia Informática

**Isabel Espírito Santo**

## 1 Erros e números

**1.1** Com base no limite superior do erro absoluto no cálculo da expressão

$$f(\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{2}},$$

e sabendo que são usados os seguintes valores aproximados

$$\pi = 3.1416, \quad \sqrt{3} = 1.732 \quad e \quad \sqrt{2} = 1.4142,$$

quantos algarismos significativos tem o valor calculado de  $f$ ?

**1.2** O perímetro  $P$  de um triângulo rectângulo de hipotenusa  $h$  e com um dos ângulos agudos  $\alpha$ , pode ser dado pela expressão

$$P = (\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) h.$$

Supondo que  $\alpha = 0.34$  rad, qual o erro absoluto com que se deve medir  $h$ , de valor aproximado 16.7 m, para que o erro absoluto em  $P$  não exceda 0.5?

determinação de  $\eta$ ?

**1.3** Uma corrente eléctrica atravessa uma resistência ( $R$ ) de  $20\Omega$ . A resistência foi medida com um erro relativo que não excede 0.01. A intensidade da corrente ( $I$ ) é  $3.00 \pm 0.01$  A. Sabendo que a tensão da corrente é dada por  $V = RI$ , determine um limite superior do erro absoluto no cálculo da tensão da corrente. Quantos algarismos significativos garante para o valor calculado da tensão?

**1.4** Tomando  $\sqrt{2} = 1.41$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$  e  $\pi = 3.14$ :

- Calcule um limite superior do módulo do erro absoluto que se comete no cálculo de  $N = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\pi}$ .
- Com quantas casas decimais exactas devem ser tomados os valores aproximados de  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  e  $\pi$  para obter uma aproximação de  $N$  com 3 casas decimais exactas?

**1.5** Seja

$$A = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

a área de um hexágono regular de lado  $a$ . Seja 1m o valor aproximado para o lado do hexágono. Considerando um valor aproximado de  $\sqrt{3}$  com quatro algarismos significativos, com que aproximação se deve medir o lado de modo a que o limite superior do erro absoluto no cálculo da área não exceda  $100\text{cm}^2$ ?

**1.6** Pretende-se calcular a área de um círculo, de raio aproximadamente igual a 25 cm, com erro absoluto que em módulo não excede  $0.5\text{ cm}^2$ . Com que aproximação se deve medir o raio do círculo e quantos algarismos significativos se devem usar no valor aproximado de  $\pi$ ?

**1.7** O rendimento  $\eta$  de um transformador depende da potência de entrada  $z$ , da potência de saída  $a$  e da perda de potência  $b$ , pelas relações:

$$\eta = \frac{a}{z} = \frac{a}{a+b}$$

Podem medir-se  $z$  e  $a$  a menos de 1%, enquanto que o erro na medida de  $b$  pode ser de 20%, sendo  $\eta$  cerca de 0.95. Qual das relações usaria para a

## 2 Sistemas de equações lineares

**2.1** Um engenheiro supervisiona a produção de 3 modelos de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e plástico. As quantidades para produzir um carro de cada modelo são:

	metal (kg./carro)	tecido(kg./carro)	borracha(Kg./carro)
‘Jeep’	2.71	4.11	2.69
‘coupé’	1.63	2.44	1.64
‘V6’	0.32	0.19	0.36

Existem em *stock*, respectivamente 38.48, 56.69, 38.54 kg. de metal, tecido e borracha.

Quantos automóveis podem ser produzidos com a quantidade de *stock* existente?

Resolva o sistema por um método directo e estável usando 4 casas decimais nos cálculos.

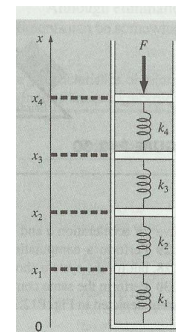
**2.2** Considere a figura representando um sistema de 4 molas ligadas em série sujeito a uma força  $F$  de 2000 Kg. Numa situação de equilíbrio, as equações força-balanço deduzidas definem inter-relações entre as molas:

$$\begin{cases} k_2(x_2 - x_1) = k_1 x_1 \\ k_3(x_3 - x_2) = k_2(x_2 - x_1) \\ k_4(x_4 - x_3) = k_3(x_3 - x_2) \\ F = k_4(x_4 - x_3) \end{cases}$$

em que  $k_1 = 150$ ,  $k_2 = 50$ ,  $k_3 = 75$

e  $k_4 = 225$  são as constantes das molas

(kg/s<sup>2</sup>).



Resolva o sistema pelo método EGPP, usando 5 casas decimais nos cálculos.

**2.3** Considere os três sistemas e equações lineares

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule as três soluções de uma só vez, usando um método directo e estável.

**2.4** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 = 2 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.5x_3 = 2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Use o método da eliminação de Gauss com pivotagem parcial para calcular a sua solução.

**2.5** Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.0x_3 = 12.6 \\ 0.6x_1 + 0.9x_2 + 2.8x_3 = 10.8 \\ 2.0x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 = 4.0 \end{cases}$$

Resolva o sistema por um método directo e estável.

**2.6** Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix}$$

e o vector  $b = (14.6, -11.4, 14.0, -0.9)^T$ , resolva o sistema correspondente por um método directo e estável.

### 3 Equações não lineares

**3.1** Localize através do método gráfico os zeros das funções não lineares em  $x$ ,

a)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ;

b)  $f(x) = \sin x + x - 2$ ;

c)  $f(x) = e^x + x - 1$ ;

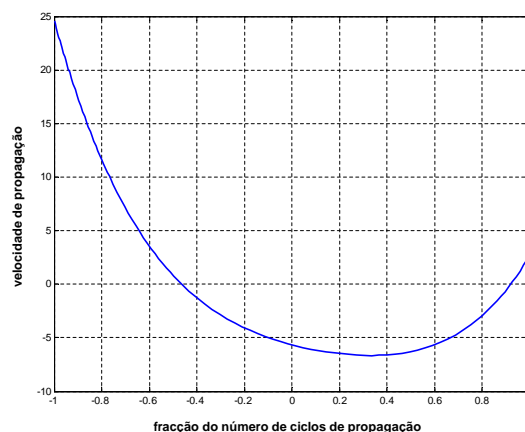
d)  $f(x) = x + \ln x$ .

**3.2** A função

$$a(x) = 2.02x^5 - 1.28x^4 + 3.06x^3 - 2.92x^2 - 5.66x + 6.08$$

é utilizada num estudo do comportamento mecânico de materiais, representando  $a(x)$  o comprimento da fissura e  $x$  ( $> 0$ ) uma fracção do número de ciclos de propagação.

Pretende-se saber para que valores de  $x$  a velocidade de propagação da fissura é nula. Utilize um método que não recorre ao cálculo de derivadas, usando no critério de paragem  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$  ou no máximo três iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.



**3.3** Um certo equipamento de 20000 euros vai ser pago durante 6 anos. O pagamento anual é de 4000 euros. A relação entre o custo do equipamento  $P$ , o pagamento anual  $A$ , o número de anos  $n$  e a taxa de juro  $i$  é a seguinte:

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

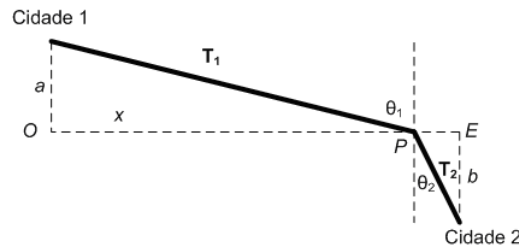
Utilize o método que não recorre à derivada para determinar a taxa de juro utilizada nos cálculos. O valor da taxa de juro pertence ao intervalo  $[0.05, 0.15]$ . Use  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.005$ . Use seis casas decimais nos cálculos.

**3.4** O volume  $v$  de um líquido num tanque esférico de raio  $r$  está relacionado com a profundidade  $h$  do líquido da seguinte forma:

$$v = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

- Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade  $h$ , num tanque de raio  $r = 1$  para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo  $[0.25, 0.5]$ . Faça 3 iterações e use seis casas decimais nos cálculos.
- Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo  $[2.5, 3]$ . Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.

**3.5** Considere duas cidades localizadas como se mostra na figura. Uma petrolífera pretende construir uma conduta que ligue as duas cidades. Devido às diferenças no terreno, o custo para construir a conduta será  $C_1$  milhões de euros por quilómetro para o troço  $\mathbf{T}_1$  e  $C_2$  milhões de euros por quilómetro para o troço  $\mathbf{T}_2$ . Para tornar a construção mais económica, o ponto  $P$  de intersecção dos dois troços deve estar localizado de modo a que  $C_1 \sin \theta_1 = C_2 \sin \theta_2$ .



- Usando a informação da figura e escrevendo esta equação em função de  $x$  (a distância de  $O$  a  $P$ ), mostre que se obtém

$$C_2^2(L - x)^2(a^2 + x^2) = C_1^2x^2(b^2 + (L - x)^2),$$

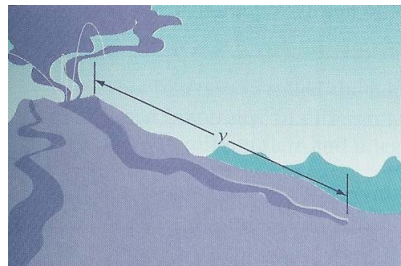
sendo  $L$  a distância de  $O$  a  $E$ .

- Resolva a equação considerando  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $L = 4$ ,  $C_1 = 1$  e  $C_2 = 2$ . Utilize o método de Newton e a aproximação inicial  $x_1 = 3.75$  e  $n_{\max} = 2$ . Apresente uma estimativa do erro relativo. Use seis casas decimais nos cálculos.

**3.6** A figura representa um vulcão em erupção.

A relação entre a distância  $y$  (milhas) percorrida pela lava e o tempo  $t$  (horas) é dada por:

$$y = 7(2 - 0.9^t).$$

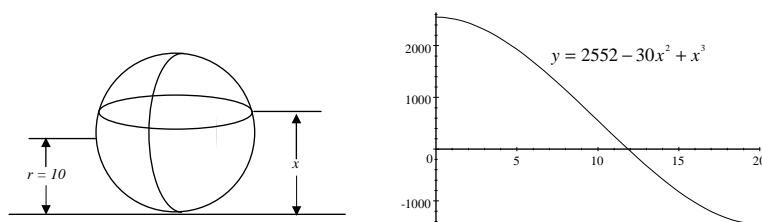


Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de  $y = 10$ . O gabinete de protecção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas. Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia.

Considere  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$  ou no máximo três iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

**Nota:**  $(a^x)' = a^x \ln(a)$ , para  $a$  constante.

**3.7** Uma bola esférica de raio  $r = 10$  cm feita de uma substância cuja densidade é  $\rho = 0.638$ , foi colocada num recipiente com água.



Usando o método iterativo de Newton, calcule a distância  $x$  da parte submersa da bola sabendo que

$$f(x) \equiv \frac{\pi(x^3 - 3x^2r + 4r^3\rho)}{3} = 0.$$

Pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ , ou ao fim de três iterações. Use o método de Newton e seis casas decimais nos cálculos.



- 3.8** Num colector solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente ( $x_1$ ) e da placa de vidro ( $x_2$ )

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 &= 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 &= 0 \end{cases}.$$

Considerando a seguinte aproximação inicial  $(x_1, x_2)_1 = (0.3, 0.3)$ , implemente duas iterações do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada. Use seis casas decimais nos cálculos.

- 3.9** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1^n = 4 \\ -x_2 - x_2^m - x_1 = 8 \end{cases}$$

em que  $n$  e  $m$  são parâmetros.

Considere  $m = 3$  e  $n = 2$ . Resolva o sistema utilizando para aproximação inicial o ponto  $x_1 = (1, -2)^T$ . Para o critério de paragem use  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$  (ou no máximo duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

- 3.10** Existe um par de valores que anula as primeiras derivadas parciais da função de duas variáveis

$$f(x, y) = -e^{-x} + y^2 - 2x + 2y.$$

Usando um método iterativo, e a partir da aproximação inicial  $(x, y)_1 = (-1, 1)$ , determine esse par de modo que a estimativa do erro relativo da aproximação calculada não exceda 0.05 (duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

- 3.11** Usando o método de Newton, determine um dos pontos de intersecção da circunferência

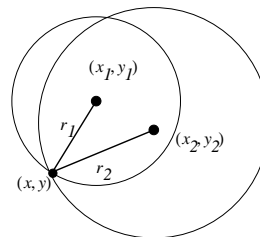
$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

com a hipérbole

$$x_1^2 - x_2^2 = 1.$$

Considere os valores iniciais  $(x_1, x_2)_1 = (1.5, 0.5)$  e para a paragem do processo iterativo use  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$  ou no máximo duas iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

**3.12** Em problemas de navegação, é necessário encontrar a posição de um ponto  $(x, y)$ , através dos valores das distâncias  $r_1$  e  $r_2$  a dois pontos de posição conhecida  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , como mostra a figura.



- Formule o problema como um sistema de equações não lineares em função das coordenadas do ponto  $(x, y)$ .
- Considerando  $(x_1, y_1) = (10, 10)$ ,  $(x_2, y_2) = (10, -10)$ ,  $r_1 = 14$  e  $r_2 = 16$ , calcule as coordenadas do ponto  $(x, y)$  através do método iterativo de Newton considerando a aproximação inicial  $(x, y)_1 = (0, 0)$ . Apresente o valor ao fim de duas iterações com a correspondente estimativa do erro relativo. Use seis casas decimais nos cálculos.

**3.13** A concentração de um poluente num lago depende do tempo  $t$  e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}.$$

Efectuaram-se duas medições da concentração que foram registadas na seguinte tabela

$t$	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Utilize o método de Newton para determinar  $\beta$  e  $\omega$ . Considere a aproximação inicial  $(\beta, \omega)_1 = (-1.9, -0.15)$ , efectue duas iterações e apresente uma estimativa do erro relativo.

## 4 Polinómio interpolador de Newton

4.1 Dada a tabela de valores de uma função  $f(x)$

$x_i$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0
$f(x_i)$	0	1	1	2	2	3	3	4

- Pretende-se aproximar  $f(0.6)$  usando um polinómio de grau 3. Use a fórmula interpoladora de Newton baseada em diferenças divididas.
- Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.
- Estime  $f(0.6)$  usando todos os pontos da tabela.

4.2 A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 e 1980.

ano	1940	1950	1960	1970	1980
população	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

- Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.
- A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?

4.3 Os registos efectuados numa linha de montagem são os seguintes:

nº de unidades	1	3	4	6	7	10
horas necessárias	2	3	4	5	6	10

- Tendo sido recebidos pedidos para a montagem de 2 unidades e 8 unidades, use interpolação cúbica para estimar o tempo (em horas) necessário para satisfazer cada pedido.
- Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior para cada um dos pedidos.

4.4 Considere a seguinte tabela de uma função polinomial

$x$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$p(x)$	$-1$	$-3$	$-1$	$5$	$15$	$29$

Sem recorrer à expressão analítica de  $p(x)$ :

a) mostre que  $p(x)$  é um polinómio interpolador de grau 2.

b) determine  $p(10)$ .

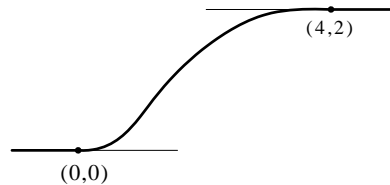
4.5 Considere a tabela de valores da função  $f(x)$

$x_i$	$0$	$1$	$3$	$4$
$f(x_i)$	$a$	$2$	$4$	$b$

Determine  $a$  e  $b$  por forma a que o polinómio interpolador de Newton que aproxima  $f$  seja de grau 3, com coeficiente do termo de maior grau igual à unidade e coeficiente do termo de menor grau igual a zero. Escreva o polinómio.

## 5 Splines

- 5.1** Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos  $(0,0)$  e  $(4,2)$ , como mostra a figura



Com base nos quatro pontos da tabela

$x_i$	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa uma *spline* cúbica natural para definir a trajectória do desvio e calcular  $f(2)$ .

- 5.2** A resistência de um certo fio de metal,  $f(x)$ , varia com o diâmetro desse fio,  $x$ . Foram medidas as resistências de 6 fios de diversos diâmetros:

$x_i$	1.5	2.0	2.2	3.0	3.8	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	3.0	2.0	1.75	1.5

Como se pretende estimar a resistência de um fio de diâmetro 1.75, use uma “spline” cúbica natural para calcular esta aproximação.

- 5.3** A distância requerida para parar um automobilista é função da velocidade a que ele se desloca. Os seguintes dados experimentais foram recolhidos para quantificar essa relação:

$vel (Km/h)$	15	20	25	30	40	50
$distância (m)$	16	20	34	40	60	90

Estime a distância necessária para parar um carro que se desloca a uma velocidade de 45  $Km/h$ , utilizando uma spline cúbica completa.

- 5.4** Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na

tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
Nº de pontos, $x_i$	10	12	18	27	30	34
Nº de golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

- (a) Use uma spline cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7ª equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.
- (b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.

**5.5** Considere a função  $f(x)$  definida por

$x$	-2	0	1	2
$f(x)$	-8	0	1	8

Sabendo que  $s_3^1(-2) = 12$  e  $s_3^{n''}(2) = 20$  estime o valor de  $f(-1)$  através de uma 'spline' cúbica.

**5.6** A seguinte função segmentada  $s_3(x)$  no intervalo  $[0, 3]$ , poderá representar uma spline cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

**5.7** Considere as duas seguintes funções 'spline' cúbicas:

$$S_3(x) = \begin{cases} -x + 5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3.75x^3 - 11.25x^2 + 10.25x + 1.25, & 1 \leq x \leq 3 \\ -3.75x^3 + 56.25x^2 - 192.25x + 203.75, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

e

$$R_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \quad 0 \leq x \leq 5$$

e a tabela da função  $f(x)$ :

$x_i$	0	1	3	5
$f(x_i)$	5	4	32	180
$f'(x_i)$	0	-	-	120

Verifique se alguma das duas funções  $S_3(x)$  e  $R_3(x)$ , corresponde à função 'spline' cúbica completa, interpoladora de  $f(x)$  nos pontos da tabela dada.

- 5.8** Um braço de um robô deve passar nos instantes  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$  e  $t_5$  por posições pré-definidas  $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$  e  $\theta(t_5)$ , onde  $\theta(t)$  é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o eixo dos X's.

$t_i$	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

- Com base nos dados da tabela, aproxime a trajectória do robô por uma *spline* cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante  $t = 1.5$ .
- Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante  $t = 1.5$
- Calcule um limite superior do erro de truncatura que se comete quando se usa a derivada da *spline* calculada para aproximar a velocidade do robô.

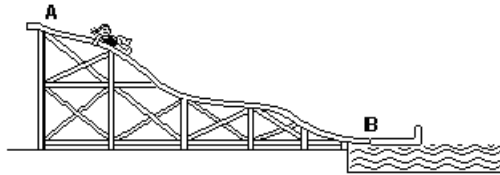
## 6 Integração numérica

**6.1** Considere o erro de truncatura da fórmula do rectângulo, baseada em  $a$ , de Newton-Cotes

$$e_R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta), \quad \eta \in [a, b]$$

para aproximar o integral  $\int_a^b f(x)dx$ . Deduza a fórmula do erro de truncatura da correspondente fórmula composta.

**6.2** A figura mostra uma pessoa que desliza, sem atrito, do alto de um escorrega (ponto A), acoplando-se a um carrinho que se encontra em repouso no ponto B. A partir deste instante, a pessoa e o carrinho movem-se juntos na água até parar.



a) Sabendo que a velocidade do conjunto pessoa-carrinho imediatamente após o acoplamento é 4 m/s e que a velocidade,  $v$ , em cada instante  $t$  na água é dada pela tabela seguinte, calcule (usando todos os pontos da tabela) a distância percorrida na água pelo conjunto pessoa-carrinho até parar.

$t$	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
$v$	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

c) Seleccione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, e calcule a mesma distância usando uma única fórmula composta de integração no intervalo  $[0, 4.2]$ .



**6.3** Na tabela seguinte são apresentados registos pontuais das vendas de um produto que foi lançado no início do ano de 2009. A variável  $x$  representa a semana (de 2009).

$x_i$	1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	16	17	18	19
$v(x_i)$	10	9	8	8	8	6	5	5	4	4	4	4	3	1

- Calcule a melhor aproximação ao integral  $\int_1^{19} v(x)dx$ , com base em toda a informação fornecida na tabela sobre  $v(x)$ .
- Estime o erro de truncatura cometido com a aproximação obtida na alínea anterior no intervalo  $[5, 15]$ .
- Selecione o maior número possível de pontos da tabela para calcular uma aproximação ao integral da alínea a), usando só uma fórmula composta de integração no intervalo  $[1, 19]$ .

**6.4** Uma corrida de *dragsters* tem duas fases distintas: na primeira fase, a mais curta, o movimento do carro é perfeitamente não determinístico, dependendo das derrapagens e da forma como o condutor consegue dominar o carro. Na segunda fase, o carro tem um movimento muito rápido, cuja aceleração está perfeitamente definida.



Considere-se a prova do condutor Don Nase de duração 7.5 s. Na primeira fase os valores da aceleração em cada instante encontram-se na tabela:

$t_i$	0	0.5	1	1.5
$a(t_i)$	0	0.35	0.55	0.9

Na segunda fase da corrida a aceleração é definida pela seguinte expressão:

$$a(t) = 0.5t^2 - 0.15t \quad \text{para } t \in [1.5, 7.5].$$

- a) Estime a velocidade na primeira fase da corrida, utilizando a fórmula de integração mais adequada.
- b) Estime a velocidade na segunda fase da corrida, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.3.
- c) Estime o erro de truncatura cometido na alínea a).

**6.5** A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função  $F(t) = 8e^{-t\frac{I(a)}{\pi}}$  para  $t \geq a$ , em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x, a) dx \quad \text{com } f(x, a) = \frac{e^{ax}}{x}.$$

Calcule  $I(1)$  usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.05.

**6.6** Considere a seguinte função dada pela tabela

$x_i$	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9
$f(x_i)$	$a$	16.8	19.4	22	$b$	27.6	30.7

e seja  $I = \int_1^{1.9} f(x) dx$ . Ao utilizar as fórmulas compostas de Simpson e dos três pontos foram obtidas as seguintes aproximações a  $I$ , respectivamente  $S(0.15) = 20.005$  e  $3/8(0.15) = 20.030625$ . Determine os valores de  $a$  e  $b$ . Use 6 casas decimais nos cálculos.

**6.7** Considere a seguinte tabela da função  $f(x)$

$x_i$	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	0.0000	0.8415	0.9093

- a) Determine um valor aproximado de  $I = \int_0^2 f(x) dx$ , usando a fórmula composta do trapézio com  $h = 1$ .
- b) Sabendo que um valor aproximado de  $I$ , usando a fórmula composta do trapézio com  $h = 0.5$  é  $T(0.5) = 1.2667$ , determine uma nova aproximação de  $I$ , usando a fórmula composta de Simpson com  $h = 0.5$ .

**6.8** Admita que, para acções de uma determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção, depois de impostos, é representado por  $x$  (US \$), uma variável aleatória que tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases}$$

- a) Calcule, numericamente, a probabilidade  $PROB$  do lucro anual ser um valor menor do que 1 ou maior do que 2.5 ( $PROB = P(x \leq 1) + P(x \geq 2.5)$  ).

Use a fórmula composta do trapézio para calcular essa probabilidade por forma a que o erro total de truncatura seja inferior a 0.02. Assuma que os erros das duas parcelas são iguais.

Nota:  $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ .

- b) Relativamente à primeira parcela para o cálculo de  $PROB$ , se tivesse usado a fórmula composta de Simpson com o mesmo valor de  $h$  que usou na alínea anterior, iria obter um erro menor, ou seja uma melhor aproximação ao valor de  $P(x \leq 1)$  ? Justifique a resposta.

## 7 Aproximação dos mínimos quadrados

**7.1** Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu  $x$  Km. Os resultados obtidos foram:

$x$ (Km)	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25
$f(x)$ (l Km <sup>-1</sup> )	0.260	0.208	0.172	0.145	0.126	0.113

Construa um modelo quadrático, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.

**7.2** A tabela seguinte contém os registos efectuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês ( $x_i$ )	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

Ajuste o modelo

$$M(x) = c_1x + c_2\sin(x)$$

aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados, e use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto.

**7.3** A resistência de um certo fio (de uma certa substância),  $f(x)$ , varia com o diâmetro desse fio,  $x$ . A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

$x_j$	1.5	2.0	3.0	4.0
$f_j$	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de  $f(x)$ , no sentido dos mínimos quadrados:

i uma recta

ii o modelo linear  $M(x, c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2x$

a) Calcule a recta.

b) Calcule o modelo  $M(x)$ .

c) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua resposta.

**7.4** Um sistema simples de comunicações pode ser representado por um transmissor e um receptor. O transmissor recebe um símbolo,  $m$ , e modula o sinal a transmitir,  $s_m(t)$ , num canal com ruído. O receptor recebe o sinal modulado com o ruído adicionado,  $y(t)$ , e prevê qual foi o símbolo transmitido. Neste sistema simples suponha que o transmissor apenas transmite dois sinais

$$\begin{aligned}s_1(t) &= 0.2\alpha_1 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_1 \sin(22\pi t) \\ s_2(t) &= 0.2\alpha_2 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_2 \cos(20\pi t)\end{aligned}$$

- a) Transmitindo o primeiro sinal ( $s_1(t)$ ) e fazendo uma análise ao transmissor, observaram-se os seguintes valores:

$t_i$	0.11	0.52	0.79
$s_{1i}$	-3.1127	0.0625	3.0351

Determine os valores de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , no sentido dos mínimos quadrados.

- b) Suponha que  $\alpha_1 = -10$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\alpha_2 = 10$  e  $\beta_2 = 10$ . Sabendo que o receptor recebeu o sinal indicado na tabela seguinte, determine qual foi o sinal transmitido (isto é, aquele que se ajusta melhor ao sinal recebido, no sentido dos mínimos quadrados).

$t_i$	0.1	0.45	0.63
$y(t_i)$	1.9963	-2.0100	1.2742

**7.5** Uma companhia de gás sugeriu um modelo do tipo

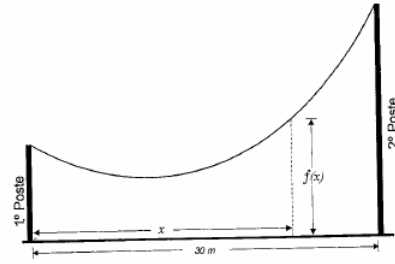
$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$$

para estimar o consumo de gás em qualquer altura do ano. No sentido dos mínimos quadrados e considerando a amostra de 6 pontos,

mês	1	3	4	6	9	12
consumo de gás	20.0	7.5	6.5	7.0	10.0	$A$

- a) Comece por apresentar o sistema de equações lineares que deve construir para calcular os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$ , em função de  $A$ .
- b) Considerando  $A = 15.0$  apresente o modelo sugerido.

**7.6** Um fio está suspenso entre dois postes. A distância entre os postes é de 30 metros. A distância do fio ao solo  $f(x)$ , em metros, depende de  $x$  como mostra a figura. A tabela mostra 5 valores conhecidos de  $f$ .



$x_i$	0	8	12	16	20
$f(x_i)$	15.43	10.2	10.2	11.86	15.43

- Calcule a parábola que melhor se ajusta aos valores de  $f(x_i)$  no sentido dos mínimos quadrados e determine a distância do fio ao solo quando  $x = 10$ .
- A partir da parábola da alínea anterior, verifique se  $x = 10$  é o ponto em que a distância do fio ao solo é mínima.
- Determine os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  do modelo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 e^{1-0.1x} + c_2 e^{0.1x-1}$$

que melhor se ajusta à função  $f(x)$  de acordo com

$$\min_{c_1, c_2} \sum_{i=1}^5 (f(x_i) - M(x_i; c_1, c_2))^2.$$

**7.7** Pretende-se ajustar o modelo linear

$$M(x; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3$$

à função  $f(x)$  dada pela tabela

$x_i$	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1.4	0	0.75	2.3

no sentido dos mínimos quadrados. Determine os coeficientes do modelo apresentado. Apresente uma estimativa para  $f(0.5)$ .

**7.8** Considere as seguintes observações relativas à função  $f$

$x_i$	-3	0	2	5
$f_i$	-10	$a$	0	$b$

Determine  $a$  e  $b$  sabendo que a aproximação polinomial de grau 1 dos mínimos quadrados é  $p_1(x) = -4 + 2x$ . Use 6 casas decimais nos cálculos.

## 8 Optimização não linear sem restrições

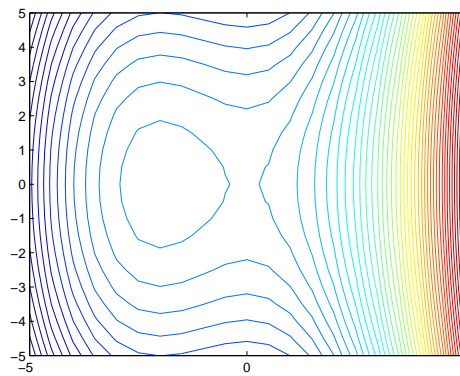
8.1 Dada a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos sela.

8.2 Considere a função

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$$



Mostre que a função dada tem um máximo local em  $(-2, 0)$ ; tem um ponto sela em  $(0, 0)$ ; e não tem mínimos.

8.3 Dada a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

8.4 Mostre que qualquer ponto da linha  $x_2 - 2x_1 = 0$  é um mínimo de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2.$$

8.5 Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação  $P$  com duas componentes  $P_1$  e  $P_2$ . Pretende-se determinar os deslocamentos  $x_1$  e  $x_2$  das molas que minimizam a energia potencial total  $EP$ , definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1 \left( \sqrt{x_1^2 + (l_1 - x_2)^2} - l_1 \right)^2 + \frac{1}{2}K_2 \left( \sqrt{x_1^2 + (l_2 + x_2)^2} - l_2 \right)^2 - P_1x_1 - P_2x_2.$$

Sabendo que as características do sistema são:  $l_1 = 10$ ,  $l_2 = 10$ ,  $K_1 = 8$ ,  $K_2 = 1$ ,  $P_1 = 5$  e  $P_2 = 5$ , resolva o problema através do método de Nelder-Mead com  $\varepsilon = 0.5$  (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais:  $(5, 2)$ ,  $(3.25, 2.5)$  e  $(0, 0)$ .

**8.6** Calcule o mínimo da função  $f(x)$  definida por

$$f(x_1, x_2) = \max((x_1 - 1)^2, x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vectores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e  $\varepsilon = 0.5$ .

**8.7** Calcule o mínimo da função  $f(x)$  definida por

$$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vectores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e  $\varepsilon = 0.5$ .

**8.8** Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use  $\varepsilon = 0.5$  ou  $n_{\max} = 4$ .

**8.9** Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função  $f(x_1, x_2)$ . Considere  $\eta = 10^{-6}$ ,  $\mu = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon = 1$  e  $x^{(1)} = (1, 1)^T$ .



**8.10** A soma de três números  $(x_1, x_2$  e  $x_3)$  positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar  $x_3$  em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

A partir da aproximação inicial  $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$ , use o método de Segurança de Newton (com  $\eta = 0.00001$ ) para calcular esses números, considerando no critério de paragem os seguintes valores  $\varepsilon = 0.001$  (duas iterações). Na condição de Armijo tome  $\mu = 0.001$ .

**8.11** Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \quad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O custo de reparação e manutenção do equipamento usado para a produção depende do número total de portáteis produzidos e é dado pela seguinte equação:

$$r = (x_1 + x_2)[0.2 + 2.3 \times 10^{-5}(x_1 + x_2) + 5.3 \times 10^{-9}(x_1 + x_2)^2].$$

O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \quad p_2 = 25 - 0.0015x_2$$

- Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.
- Desprezando os custos de reparação e manutenção ( $r = 0$ ), resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com  $\eta = 0.00001$ ). Considere a seguinte aproximação inicial  $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$  e  $\varepsilon = 0.001$ . Na condição de Armijo tome  $\mu = 0.001$ .
- Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

- 8.12** Três estações eléctricas vão fornecer a uma certa região da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$\begin{aligned}f_1 &= 0.1 + 0.25x \\f_2 &= 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 \\f_3 &= 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3\end{aligned}$$

em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  que minimizam o custo total a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use  $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$ , no critério de paragem considere  $\varepsilon = 0.05$  e tome  $\eta = 0.0001$ . Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com  $\mu = 0.01$ . Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo,  $x = 100 - y - z$ .

- 8.13** Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção  $z$ . O rendimento é uma função crescente de  $z$  mas tende em direcção a uma assíntota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1 + z^2)$$

que depende da produção  $z$  dada por  $z = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ , em que  $x_1$  representa o capital e  $x_2$  o trabalho.

Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto  $(2, 1)$ . Use na paragem do processo iterativo  $\varepsilon = 0.1$ . No critério de Armijo use  $\mu = 0.001$ .

- 8.14** Suponha que pretendia representar um número  $A$  positivo na forma de um produto de quatro factores positivos  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ . Para  $A = 2401$ , determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de optimização sem restrições em função das 3 variáveis  $x_1, x_2$  e  $x_3$ .

A partir da aproximação inicial  $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$ , use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses factores. Na paragem do processo iterativo use  $\varepsilon = 0.1$ . No critério de Armijo use  $\mu = 0.001$ .

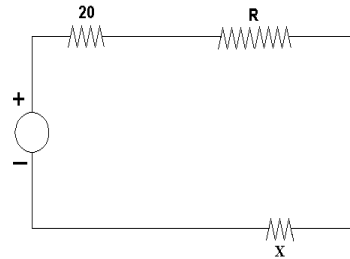
**8.15** O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema eléctrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  designam, respectivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton baseado na fórmula DFP, considerando na paragem do processo iterativo  $\varepsilon = 0.0001$ . Tome a seguinte aproximação inicial  $(0, 0)$ . No critério de Armijo use  $\mu = 0.001$ .

**8.16** Considere um circuito eléctrico em que existem duas resistências variáveis,  $R$  e  $X$ . O valor médio da energia do circuito é dado por

$$P = \frac{10^4 R}{(R + 20)^2 + X^2}.$$



Determine os valores de  $R$  e  $X$  para os quais se obtém uma energia de saída máxima. Use o método quasi-Newton (fórmula DFP) e os valores iniciais  $(R, X)^{(1)} = (10, 5)$ . Considere  $\mu = 0.001$  e  $\varepsilon = 0.5$ .

## 9 Optimização com restrições

### 9.1 Resolva o problema em MATLAB

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0 \\ & 0 \leq x_i, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

com  $x^1 = (2, 2, 2)^T$ .

### 9.2 Resolva o seguinte problema em MATLAB

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & (x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 6x_2 + 4x_3 - x_1^3 - 3 \geq 0 \\ & 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & 0 \leq x_i, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

com  $x^1 = (0.1, 0.7, 0.2)^T$ .

### 9.3 Resolva o seguinte problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} f(x) \equiv -x_1$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_2 - x_1^3 &\geq 0 \\ x_1^2 - x_2 &\geq 0 \\ -x_1^3 + x_2 - x_3^2 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

usando o método SQP com procura unidimensional do MATLAB, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo e das restrições. Tome  $x^1 = (10, 10, 10, 10)^T$ .

### 9.4 Uma empresa pretende iniciar a produção e venda de 3 novos tipos de secretária, A, B e C com preços de venda por unidade respectivamente de $p_1$ , $p_2$ e $p_3$ . É possível disponibilizar, mensalmente, 150 horas/máquina e 280 horas de mão-de-obra.

As relações entre o nível de produção  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (de cada tipo de secretária) e os preços de venda são as seguintes:

$$x_1 = 18 - p_1; \quad x_2 = 9 + \frac{1}{3}p_1 + p_2; \quad x_3 = 13 - p_3.$$

Os consumos por unidade produzida são

Tipo	Horas/máquina	Mão-de-obra(horas)
A	0.3	0.4
B	0.4	1
C	0.6	0.7

Neste problema também são conhecidos os preços unitários de produção, que são respectivamente 5, 12 e 9 unidades monetárias.

Calcule o plano óptimo de produção ( $x_1, x_2, x_3$  e lucro máximo) e respectivos preços de venda, sem fornecer as derivadas das funções envolvidas no modelo usando o método da Programação Quadrática Sequencial.

Considere a aproximação inicial  $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)^{(1)} = (10, 10, 10, 100, 100, 100)^T$ .

- 9.5** Uma empresa pretende abrir um novo supermercado numa região com 3 cidades localizadas nas coordenadas  $(-1, 3)$ ,  $(1, 3)$  e  $(0, 4)$ . O número de habitantes de cada cidade é, respectivamente, 60 mil, 20 mil e 30 mil.

As Câmaras Municipais das cidades não permitem que se localize o supermercado dentro de uma zona delimitada por um raio de 0.5 Km a partir do centro de cada uma das cidades (use a distância ao quadrado), com o propósito de evitar congestionamentos nos centros.

Pretende-se conhecer a melhor localização do supermercado  $(x_1, x_2)$  de forma a atrair um maior número de clientes das 3 cidades. Adoptando um perfil gravitacional, supõe-se que o supermercado tem uma capacidade de atrair clientes que é proporcional à população (use 60 em vez de 60000, etc.) e inversamente proporcional à soma de 1 com o quadrado da distância que o separa dos clientes.

Use o MATLAB sem fornecer as derivadas das funções envolvidas no modelo. Considere a aproximação inicial  $(1, 1)$ .