Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo

Licenciatura em Engenharia Informática

2º Teste :: 16 de janeiro de 2013

Exercício 1. [2,5 valores] Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$.

Exercício 2. [2,5 valores] Calcule $\displaystyle\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Exercício 3. [3 valores] Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x^2})\,\sqrt[3]{x}}$, fazendo a mudança de variável $y=\sqrt[3]{x}$.

Exercício 4. [3 valores] Calcule $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x^2+1)\,dx$.

Exercício 5. [3 valores] Considere a região do plano

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0 \wedge y\leq 3x \wedge y\leq 4-x^2\right\}.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) Calcule a área da região R.

Exercício 6. [2 valores] Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$.

Exercício 7. [2 valores] Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=x+1-e^x$.

a) Verifique que $f(0)=f'(0)=0$.

b) Mostre que 0 é o único zero de f.

Exercício 8. [2 valores] Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(\tfrac{1}{n})$ é convergente;

b) Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável tal que a equação $f'(x)=0$ tem duas soluções. Então a equação $f(x)=0$ tem exatamente três soluções;

c) Seja $f:\mathbb{R}_0^+\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua e $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Se $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}_0^+$ então F é crescente;

d) Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função integrável. Então $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x+1)\,dx$.