Introdução aos Sistemas Dinâmicos (2012/2013)

Parte I

1 Introdução às EDOs

1. Determine uma função f e uma função g que verifiquem, respectivamente:

$$\begin{cases} f'(t) = t \\ \\ f(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'(t) = -\dfrac{1}{t} \\ \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

   Desenhe os gráficos das funções obtidas. Qual a relação entre a tangente ao gráfico de f e a tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1)$?

2. Determine uma função real f que verifique :

   (a) $\begin{cases} f'(t) = (2+t)^3 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} f'(t) = \sqrt{2+t} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} f'(t) = (at+b)^n \quad (a, b > 0, n \neq -1) \\ \\ f(1) = 1 \end{cases}$

   Indique o intervalo aberto maximal onde a solução pode ser definida e esboce o seu gráfico. Qual a solução na alínea (c) se $n = -1$?

3. Suponha que a aceleração de um automóvel é dada, em m/s^2, pela seguinte função de tempo

$$a(t) = 2t$$

   Se no instante $t = 0$ o automóvel inicia a sua marcha, determine a distância percorrida pelo automóvel em 5 segundos.

4. Indique se existe alguma função constante y que verifique $y' = y + 2$. Determine as funções constantes y que verificam:

$$y' = (y-a)(y^2 - 2by + b^2)$$

   com $a, b \in \mathbf{R}$.

5. Determine se a função y indicada é solução da equação diferencial em todos os pontos de $\mathbf{R}$. Indique em cada caso a ordem da equação diferencial apresentada.

   (a) $y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}, \quad y'' + 2y' + y = 0;$

   (b) $y(t) = 1, \quad y'' + 2y' + y = 0;$

   (c) $y(t) = \sin t, \quad y''' + y'' + y' + y = 0.$

6. Verifique que a função $f(x) = \ln x$ é solução da equação diferencial

$$xy'' + y' = 0$$

   Qual o intervalo aberto maximal onde f é solução? Pode indicar uma solução de tal equação no intervalo $]-\infty, 0[$?

7. Determine α e β de maneira a que $y(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ seja solução do problema com condições de fronteira

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

Existe solução deste tipo se modificarmos as condições de fronteira para $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 1$?

8. Determine uma equação diferencial $y'' + py' + qy = 0$ tendo como soluções:

(a) e^t, e^{-t};

(b) $\sin 2t, \cos 2t$;

(c) $1, t$;

(d) $e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t$.

9. Existe alguma função y tal que $y' = y$? E tal que $y' = ky$, com k constante?

10. **Tempo de semi-vida**

Os materiais radioactivos desintegram-se proporcionalmente à quantidade da massa presente, segundo uma constante de desintegração $k > 0$ que depende do material. Se $m(t)$ representa a massa no tempo t (t em anos), m verifica então:

$$m'(t) = -km(t)$$

(a) Justifique que $m(t) = C_0 e^{-kt}$ sendo C_0 a massa inicial do material radioactivo.

(b) Verifique que o tempo $t_{1/2}$ necessário para o material se reduzir à metade do material inicial é exactamente

$$t_{1/2} = \left(\frac{1}{k}\right) \ln 2$$

Este tempo é chamado de *tempo de semi-vida*.

(c) Calcule o tempo de semi-vida do rádio sabendo que a constante de desintegração do rádio é $4,28 \times 10^{-4}$ por ano.

11. Esboce aproximadamente o campo de direcções das seguintes EDOs (consultar Anexo I)

(a) $y' = -x$;

(b) $y' = -y$.

2 EDOs de primeira ordem

1. Resolva as seguintes EDOs de lineares de primeira ordem, indicando o intervalo de definição da solução maximal:

   (a) $y' - 3y = 6$;

   (b) $y' - 2ty = t$;

   (c) $y' + \dfrac{4}{x}y = x^4$;

   (d) $y' - xy = -x$;

   (e) $y' + y = x$

2. Resolva o problema com condição inicial:

$$\begin{cases} y' = \cos(t+1)y \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

3. **Equações de Bernoulli**

   As equações diferenciais do tipo

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (n \neq 0, 1)$$

   transformam-se numa equação linear se multiplicarmos a expressão por y^{-n} e efectuarmos a mudança de variável $z = y^{1-n}$. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

   (a) $y' + y = y^{-1}$;

   (b) $y' + (\sin x)y = (\sin x)y^{-2}$;

   (c) $y' + \dfrac{1}{x}y = (\ln x)y^2$;

   (d) $y' - 2xy = e^{-4x^2}y^5$.

4. Resolva as seguintes equações diferenciais separáveis:

   (a) $y' = y^2x^3$;

   (b) $y' = \dfrac{x^2+2}{y}$;

   (c) $y' = 5\sqrt{y}$;

   (d) $y' = \dfrac{x+1}{y^4+1}$;

   (e) $y' = e^{x-y}$;

   (f) $y' = 2t(y^2+1)$;

   (g) $y' = \dfrac{1}{\cos(y)+y}$;

   (h) $y' = \dfrac{e^x}{y^2}$.

5. Considere a equação diferencial $y' = \cos(y+x)$.

   (a) Mostre que a mudança de variável $u = y + x$ transforma a equação dada numa equação separável.

   (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \cos(y+x) \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

   [Sugestão: recorde que $\cos(x) + 1 = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ e que $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.]

6. **Equações homogéneas**

Uma equação diferencial $y' = f(t, y)$ diz-se *homogénea* se verifica

$$f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y) \qquad \forall \lambda > 0 \qquad (*)$$

As EDOs homogéneas transformam-se em EDOs separáveis usando a mudança de variável $y = tu$. Resolva as seguintes EDOs homogéneas, verificando previamente que verificam a condição $(*)$.

(a) $y' = \dfrac{y + t}{t}$;

(b) $y' = \dfrac{2y^4 + t^4}{ty^3}$;

(c) $y' = \dfrac{t^2 + y^2}{ty}$.

(d) $y' = \dfrac{3y^2 - t^2}{2ty}$

7. Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais de primeira ordem.

(a) $y' - y = e^{3x}$

(b) $y' = \dfrac{1}{xy^3}$

(c) $y \sin x \ \exp(\cos x) + y^{-1}y' = 0$

(d) $(xy + y^2) - x^2 y' = 0$

(e) $y \sin \dfrac{y}{x} + x \cos \dfrac{y}{x} - x \sin \dfrac{y}{x} y' = 0$

3 Aplicações e exemplos

1. Recorde-se da seguinte Lei de Newton: *a variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio em que o corpo se encontra.*

   Sabendo que um bolo sai do forno com a temperatura de 200^oC e que três minutos depois a sua temperatura é de 150^oC, determine quanto tempo demorará até que o bolo atinja a temperatura de 25^oC, se a temperatura ambiente for de 20^oC.

2. A técnica de datação de antiguidades através do Carbono 14 baseia-se na propriedade de metade dos átomos iniciais de C14 se desintegrar ao fim de 5600 anos, sendo a taxa de desintegração proporcional ao número de átomos existente em cada instante.

   No castelo de Winchester, em Inglaterra, existe uma mesa que muitos gostariam que tivesse sido a "Távola Redonda"do Rei Artur.

   (a) Se a mesa datar da época do Rei Artur, que teria vivido cerca de 500DC, qual a percentagem de C14 original presente na mesa actualmente?

   (b) Em 1976 a mesa foi analisada usando a técnica do C14 tendo sido encontrada 91.6% da quantidade original de C14. De quando data a mesa?

3. **Modelos Populacionais (I) – A Lei de Malthus**

   Diz-se que uma população p verifica a Lei de Malthus se a variação da população depende proporcionalmente do número de indivíduos presentes, isto é, se p verifica a equação diferencial:

   $$\frac{dp}{dt} = kp, \qquad k > 0.$$

   (a) Mostre que a expressão de p é dada por $p(t) = p_0 e^{kt}$ onde p_0 é o valor da população no instante $t = 0$.

   O que acontece quando $t \to +\infty$? Será este um modelo populacional consistente para grandes períodos de tempo?

   (b) Suponha que uma população de moscas duplica o seu tamanho nos primeiros 100 dias de uma experiência e triplica o seu tamanho nos primeiros 200 dias. Mostre que a população de moscas não pode satisfazer a lei de Malthus.

4. **Modelos Populacionais (II) - Crescimento exponencial**

   Suponha que a população N de uma bactéria num meio ambiente ilimitado segue a EDO de primeira ordem

   $$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

   (a) Determine a solução com condição inicial $N(0) = N_0$. O que acontece quando $t \to \infty$ se $\lambda > 0$?

   (Observe que, se α é a taxa de natalidade e β a taxa de mortalidade então $\lambda = \alpha - \beta$)

   (b) Se a população da bactéria duplica numa hora, quanto aumentará em duas horas?

(c) Se de uma população que cresce exponencialmente é retirada uma parte a uma taxa constante γ então

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - \gamma$$

Determine o estado estacionário e discuta o comportamiento assimptótico das outras soluções.

5. **Modelos Populacionais (III) - Crescimento super-exponencial**

Outro modelo de dinâmica populacional em meio ilimitado é:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N^2$$

Determine as soluções da equação. Note que as soluções não estão definidas para toda a recta real: este modelo prevê uma catástrofe (população infinita) após um intervalo de tempo finito...

6. **Modelos populacionais (IV) - A equação logística**

Um modelo frequente da dinâmica populacional é dado pela *equação logística*:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(1 - N/N_{max})$$

onde a constante positiva N_{max} é a população máxima permitida num dado meio limitado. Observe-se que se $N << N_{max}$ então $\frac{dN}{dt} \sim \lambda N$ e que $\frac{dN}{dt} \to 0$ quando $N \to N_{max}$.

(a) Seja $x(t) = N(t)/N_{max}$ a "população relativa". Mostre que a função $x(t)$ satisfaz a equação logística

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(1 - x)$$

(b) Determine as soluções de equilíbrio da equação anterior.

(c) Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = x_0 \in (0, 1)$ é

$$x(t) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x_0} - 1)e^{-\lambda t}}$$

(d) Discuta o comportamento assimptótico das soluções da equação logística.

7. Suponha que uma população de ratos r, existente num certo habitat, satisfaz a seguinte lei de crescimento:

$$\frac{dr}{dt} = ar, \qquad a > 0$$

(a) Mostre que a população de ratos tende para $+\infty$ quando $t \to +\infty$.

(b) Numa tentativa de conter a propagação dos ratos nessa área introduziu-se uma população de corujas que come os ratos a uma taxa de $br^2 (b > 0)$, de modo que a nova lei de crescimento é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = ar - br^2$$

Calcule $r(t)$ se $r(0) = R_0$. Mostre que, independentemente do número de ratos existente no instante $t = 0$, o número de ratos da população tende para $\frac{a}{b}$ quando $t \to +\infty$.

(c) Suponha que inicialmente existiam 1000 ratos e que $a = 1$ e $b = 0.01$ (por semana). Diga ao fim de quanto tempo a população de ratos é reduzida a metade.

8. **Trajectórias ortogonais**

Duas famílias de trajectórias dizem-se *ortogonais* se as tangentes em cada ponto são perpendiculares.

Considere os problemas com C.I

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{f(t, y)} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se y_1 e y_2 são soluções respectivas de (1) e (2), então as tangentes a (t_0, y_0) são perpendiculares. Assim, se uma familia de curvas verifica a EDO (1) então a família ortogonal são as soluções da EDO (2).

Considere a família de circunferências $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$.

(a) Verifique que esta família é solução da equação diferencial $y' = -\frac{x}{y}$.

(b) Calcule as trajectórias ortogonais desta família de circunferências.

9. *O objetivo deste exercício é calcular a família de curvas do plano que intersectam as rectas $y = Cx$ formando um ângulo de $\pi/4$.*

(a) Sejam r e r' duas rectas do plano que formam um ângulo de $\pi/4$. Se o declive de r é m, verifique que o declive de r' é m' com

$$m' = \frac{m-1}{m+1} \qquad \text{ou} \qquad m' = \frac{m+1}{1-m}$$

$$\left(\text{Sugestão: } \tan(\psi + \alpha) = \frac{\tan\psi + \tan\alpha}{1 - (\tan\alpha)(\tan\psi)} \right)$$

(b) Se $y' = f(x, y)$ é a equação diferencial verificada por uma família de curvas, qual a equação diferencial verificada pelas curvas que formam um ângulo de $\pi/4$ com as curvas iniciais?

(c) Encontre uma equação diferencial $y' = f(x, y)$ cujo conjunto de soluções seja a família de rectas $y = Cx$.

(d) Determine a família de trajectórias que forma um ângulo de $\pi/4$ com a família de rectas da alínea anterior.

4 Métodos numéricos

Sugestão: Use qualquer linguagem de programação para escrever os algoritmos de Euler e de Runge-Kutta (de ordem 4)

1. Considere o problema de CI:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{4t}{1+t^2}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Calcule aproximações de $y(1)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.2$ e $h = 0.1$. Estime o erro.

   (b) Calcule aproximações de $y(1)$ usando RK-4 com passo $h = 0.2$ e $h = 0.1$. Compare com os resultados anteriores.

   (c) Verifique que a solução exacta do problema é $y(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$. Compare o valor exacto de $y(1)$ com as aproximações obtidas.

2. Considere o problema de CI:

$$\begin{cases} y' = -ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Calcule aproximações de $y(2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.5$ e $h = 0.1$. Estime o erro.

   (b) Calcule aproximações de $y(2)$ usando RK-4 com passo $h = 0.5$ e $h = 0.1$. Compare com os resultados anteriores.

   (c) Determine a solução exacta y do problema e compare o valor de $y(2)$ com as aproximações obtidas anteriormente.

3. Considere o problema de CI:

$$\begin{cases} y' = 4t\sqrt{y} \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

   (a) Calcule aproximações de $y(2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.5$ e $h = 0.1$. Estime o erro.

   (b) Calcule aproximações de $y(2)$ usando RK-4 com passo $h = 0.5$ e $h = 0.1$. Compare com os resultados anteriores.

   (c) Verifique que a solução exacta do problema é $y(t) = (t^2 + 1)^2$. Compare o valor exacto de $y(2)$ com as aproximações obtidas anteriormente.

4. Considere o problema de CI:

$$\begin{cases} y' = ty^2 + t^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

   (a) Calcule aproximações de $y(1)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.5$ e $h = 0.1$.

   (b) Calcule aproximações de $y(1)$ usando RK-4 com passo $h = 0.5$ e $h = 0.1$. Compare com os resultados anteriores.

   (c) Resolva as questões anteriores modificando a condição inicial para $y(-1) = 0$.

5 EDOs lineares de segunda ordem

1. Mostre que são independentes os seguintes subconjuntos de $\mathcal{C}^\infty(J)$:

   (a) $\{e^x, \ln(x)\}$, $J = \mathbf{R}^+$;
   (b) $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$, $J = \mathbf{R}$ e $\alpha \neq \beta$;
   (c) $\{e^x \cos x, e^x \sin x\}$, $J = \mathbf{R}$;
   (d) $\{1, x\}$, $J = \mathbf{R}$.

2. Resolva as seguintes equações lineares homogéneas com coeficientes constantes indicando, em cada caso,um sistema fundamental de soluções e verificando que tal sistema é linearmente independente.

   (a) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
   (b) $y'' + y' + 2y = 0$;
   (c) $y'' - 25y = 0$;
   (d) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3. Resolva, em função de b, o problema com condições iniciais: :

$$\begin{cases} y'' - 2by' + b^2 y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Resolva, em função de k, o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' = \cos kt \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

5. Resolva o problema com condições de fronteira:

$$y'' = y, \qquad t \in [0, 1]$$

$$y'(0) + y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

6. Sejam $a, b \in \mathbf{R}$ e considere a equação diferencial

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

   Determine a e b de modo que x e $x \ln x$ sejam soluções da equação (no intervalo $J =]0, +\infty[$). Neste caso, qual a solução geral da equação diferencial? Qual a solução y tal que $y(e) = 1$ e $y'(e) = 0$?

7. Se f é uma solução particular não nula de uma EDO linear homogénea de ordem 2, as mudançãs sucessivas de variável $y = fz$ e $w = z'$ transformam a equação inicial numa EDO linear homogénea de grau 1. Resolva as seguintes equações lineares homogéneas:

   (a) $y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$ (considere a solução particular $f(x) = x^2$);
   (b) $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ (considere a solução particular $f(x) = \frac{1}{x}$).

8. Use o método da variação das constantes para resolver as EDOs:

   (a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$;

   (b) $x^2y'' - xy' = x^3e^x$,

   Nota: 1 e x^2 são duas soluções independentes da equação linear homogénea associada.

   (c) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x \ln x$

   Nota: x e x^2 são duas soluções independentes da equação linear homogénea associada.

9. Resolva o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 4x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

10. Resolva o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

11. Determine a solução general das seguintes edos lineares:

    (a) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$;

    (b) $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$;

    (c) $y'' + 4y = e^{2x}$;

    (d) $y'' + 4y = \cos(2x)$.

12. Determine a solução general das seguintes edos lineares:

    (a) $y'' - y = e^x$;

    (b) $y'' - y = xe^x$;

    (c) $y'' - 2y' + y = e^x$;

    (d) $y'' - 2y' + y = xe^x$;

13. *Partícula num campo de forças dependente do tempo*

    Considere a equação de Newton:

$$mq'' = -2\alpha q' + F(t)$$

    de uma partícula de massa m sujeita a uma força $F(t)$ donde $\alpha \geq 0$ é um coeficiente de atrito. Sabendo que $q(0) = q_0$ e que $q'(0) = v_0$ determine a trajectória quando a força é:

    (a) $F(t) = g$ (ou seja, constante);

    (b) $F(t) = 3 - t^2$;

    (c) $F(t) = F_0 \cos(\gamma t)$.

14. **Oscilações mecânicas**

Considere-se um objecto de massa m preso a uma mola elástica que por sua vez está presa num suporte rígido. Se y designar a distância do objecto à possição de equilíbrio no instante t, o movimento do objecto, ao aplicarmos uma força externa $F(t)$, está governado pela equação diferencial:

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

onde k é a constante de elasticidade da mola e c a constante de amortecimento que o meio exerce sobre o objecto (o *coeficiente de atrito*).

I. Oscilações mecânicas livres

Se o objecto não está submetido a nenhuma força externa, o movimento está governado pela equação diferencial linear de ordem 2 homogénea com coeficientes constantes:

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

(a) Se não há atrito ($c = 0$) o movimento diz-se *não amortecido com oscilações livres*. Determine as soluções $y(t)$ da equação neste caso em função da posição e velocidade inicial do objecto ($y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$).

(b) Se há atrito, distinguimos os casos seguintes:

   i. $c^2 < 4km$ (*amortecimento sub-crítico*);

   ii. $c^2 = 4km$ (*amortecimento crítico*);

   iii. $c^2 > 4km$ (*amortecimento super-crítico*).

   Resolva a equação em cada caso e esboce algumas soluções. Que acontece se c é negativo?

II. Oscilações mecânicas forçadas

Se o objecto está submetido a uma força periódica $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ o movimento do objecto está governado pela equação diferencial linear de ordem 2 com coeficientes constantes:

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

(a) Determine a solução geral quando não há amortecimento ($c = 0$) e $\omega \neq \sqrt{k/m}$. (*Movimento não amortecido com oscilações forçadas*).

(b) Determine a solução do problema se $c = 0$ e $w = \sqrt{k/m}$. (*Frequência ressonante*)

III. Oscilações mecânicas forçadas amortecidas

Estude as soluções quando há amortecimento (sub-crítico, crítico ou super-crítico) e $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

6 Sistemas lineares planos

1. Determine a solução geral dos seguintes sistemas de EDOs, desenhando aproximadamente a trajectória que verifica $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

(a) $\begin{cases} x' &= t \\ y' &= 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' &= e^t \\ y' &= 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x' &= x^2 \\ y' &= e^y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' &= t \\ y' &= 1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' &= e^t \\ y' &= t \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= y^2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' &= 2t^3 \\ y' &= 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= 2y \end{cases}$

2. Resolva o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} x' &= \cos(2t) \\ y' &= t^3 \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = -1$$

3. Resolva o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = -1$$

4. Considere um sistema *autónomo* de EDOs

$$\begin{cases} x' &= v(x, y) \\ y' &= u(x, y) \end{cases}$$

   (a) Verifique que se $(x(t), y(t))$ é uma solução deste sistema então toda a trajectória $(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$ definida por $\widetilde{x}(t) = x(t - t_0)$, $\widetilde{y}(t) = y(t - t_0)$ também é solução. Compare este resultado com os sistemas lineares do exercício 1.

   (b) Seja $\overline{p} = (x_0, y_0)$ uma solução de equilibrio do sistema. Verifique que a origem $(0, 0)$ é então um ponto de equilíbrio do sistema:

$$\begin{cases} x' &= v(x + x_0, y + y_0) \\ y' &= u(x + x_0, y + y_0) \end{cases}$$

5. Desenhe aproximadamente as curvas de fase dos seguintes sistemas de EDOs:

(a) $\begin{cases} x' &= 1 \\ y' &= 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$

6. *Método de Euler*

   Considere-se o problema com condições iniciais:

$$\begin{cases} x' &= f(t,x,y) \\ y' &= g(t,x,y) \end{cases} \qquad x(t_0)=x_0, \quad y(t_0)=y_0$$

   O método de Euler com passo h, permite calcular valores aproximados $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ da solução nos pontos $t_0,t_1,\ldots,t_n$, onde $t_{k+1}=t_k+h$, definindo:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k+hf(t_k,x_k,y_k) \\ y_{k+1} &= y_k+hg(t_k,x_k,y_k) \end{cases}$$

   Aproxime, usando este método, a solução do problema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases} \qquad x(0)=1, \quad y(0)=0$$

7. Determine a solução geral dos seguintes sistemas lineares de EDOs, estudando em cada caso a estabilidade da solução estacionária:

   (a) $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= 2y \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x' &= -3x \\ y' &= -y \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= 2y \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x' &= \rho_1 x \\ y' &= \rho_2 y \end{cases}$ (ρ_1, ρ_2 constantes)

8. Determine a solução geral dos seguintes sistemas lineares de EDOs, estudando em cada caso a estabilidade da solução estacionária:

   (a) $\begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= 2y \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x' &= 3x-2y \\ y' &= -y \end{cases}$

9. Determine a solução geral do sistema de EDOs

$$\begin{cases} x' &= \rho x+y \\ y' &= \rho y \end{cases}$$

   com ρ constante não nula.

10. Considere o sistema linear de EDOs

$$\begin{cases} x' &= \omega y \\ y' &= -\omega x \end{cases}$$

   com ω constante. Verifique que as trajectórias indicadas de seguida são soluções do sistema:

$$(x_1(t),y_1(t)) = (\cos(\omega t), -\sin(\omega t)) \qquad t\in\mathbf{R}$$
$$(x_2(t),y_2(t)) = (\sin(\omega t), \cos(\omega t)) \qquad t\in\mathbf{R}$$

   Indique a solução geral do sistema.

11. Determine a solução geral dos seguintes sistemas lineares de EDOs, estudando em cada caso a estabilidade da solução estacionária:

(a) $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' &= -4y \\ y' &= 4x \end{cases}$

12. Considere o sistema linear de EDOs

$$\begin{cases} x' &= \rho x + \omega y \\ y' &= -\omega x + \rho y \end{cases}$$

com ω constante. Verifique que as trajectórias indicadas de seguida são soluções do sistema:

$$(x_1(t), y_1(t)) = (e^{\rho t}\cos(\omega t), -e^{\rho t}\sin(\omega t)) \qquad t \in \mathbf{R}$$

$$(x_2(t), y_2(t)) = (e^{\rho t}\sin(\omega t), e^{\rho t}\cos(\omega t)) \qquad t \in \mathbf{R}$$

Indique a solução geral do sistema.

13. Resolva o problema com condição inicial:

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -x + y \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (1, 0)$$

14. Considere o sistema de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' &= bx - rxy \\ y' &= -sy + cxy \end{cases}$$

Verifique que $\overline{p} = (s/c, b/r)$ é uma solução de equilíbrio $(a, b, r, s > 0)$. Estude a estabilidade do sistema em $\overline{p}$.

7 Sistemas dinâmicos discretos

1. Encontre uma fórmula exacta para x_k, onde $x_{k+1} = ax_k + b$, $x_0 = c$ se

   (a) $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$;
   (b) $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$;
   (c) $a = 3/2$, $b = -1$, $c = 0$.

   Determine para cada sistema se $|x_k| \to \infty$. Estude se o sistema tem ponto fixo e se se aproxima ou não do ponto fixo.

2. Sejam $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com a, c não nulos. Se $h(x) = f(g(x))$ designamos por h^k a k-composição de h.

   (a) Indique condições sobre a, b, c, d que assegurem que $|h^k|$ está limitado. Indique condições sobre a, b, c, d que assegurem que que h^k tende para infinito.
   (b) Determine os pontos fixos de h em função de a, b, c e d.

3. Considere o sistema dinâmico discreto:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= 3x_k + y_k + 1 \\ y_{k+1} &= x_k + 3y_k + 2 \end{cases} \qquad (x_0, y_0) = (-1, 2)$$

   Determine uma fórmula exacta para (x_k, y_k). Qual o comportamento do sistema quando $k \to \infty$?

4. Considere o sistema dinâmico

$$\begin{cases} x_{k+1} &= -y_k + b \\ y_{k+1} &= x_k + c \end{cases}$$

   Qual o comportamento do sistema quando $k \to \infty$ se $(b, c) = (0, 0)$? Qual o comportamento do sistema quando $k \to \infty$ se $(b, c) = (2, 1)$?

5. Considere o sistema dinâmico discreto:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= 0.2x_k + 0.3y_k + 0.3 \\ y_{k+1} &= -0.4x_k + 0.5y_k + -0.1 \end{cases}$$

   Desenhe algumas iterações do sistemas considerando diferentes valores iniciais (x_0, y_0). Interprete o resultado.

6. Considere, para cada função indicada de seguida, o sistema dinâmico discreto unidimensional por ela definido e estude a existência e carácter dos pontos periódicos.

   (a) $f(x) = x - x^2$;
   (b) $f(x) = 2(x - x^2)$;
   (c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{9}x$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$.

7. Determine o tipo de bifurcações que aparecem na família $S_\lambda(x) = \lambda \sin x$ no parâmetro $\lambda = 1$

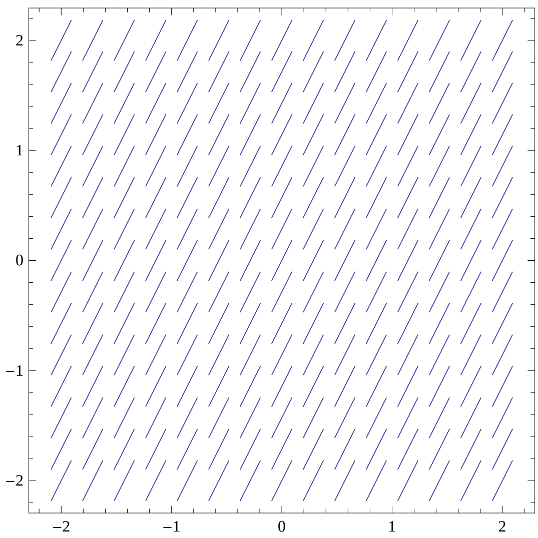
8. Estude o tipo de bifurcações que aparecem na família logística $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ nos parâmetros $\lambda = -1$ e $\lambda = -3$.

Anexo I - Campos de direcções

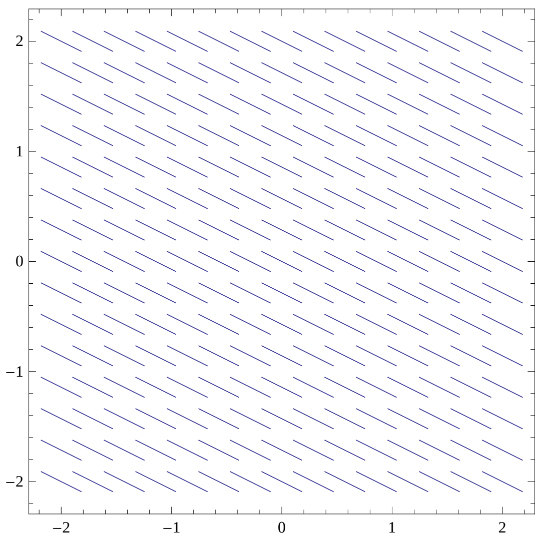
O *campo de direcções* de uma EDO $y' = f(t, y)$ é a representação gráfica das rectas tangentes às soluções da EDO em cada ponto (t, y).

Nota - eis alguns exemplos obtidos com a ajuda do Mathematica ...

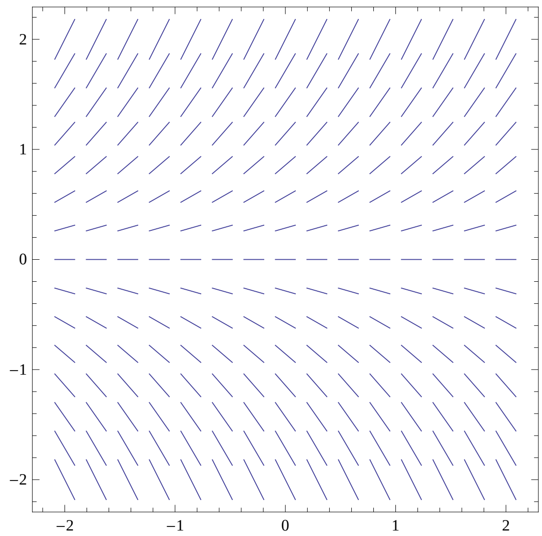
1. $y' = 2$



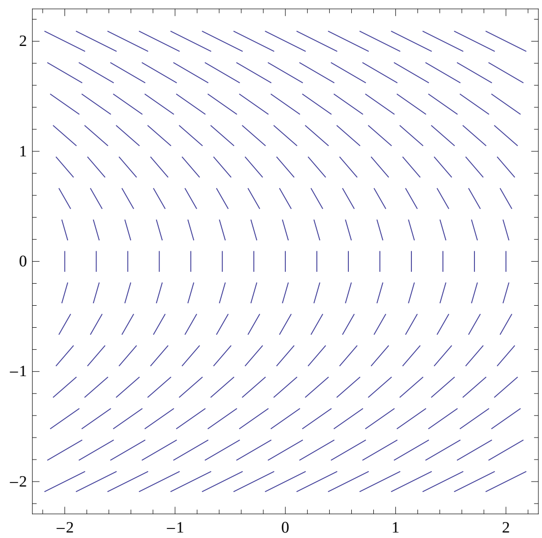
2. $y' = -1/2$



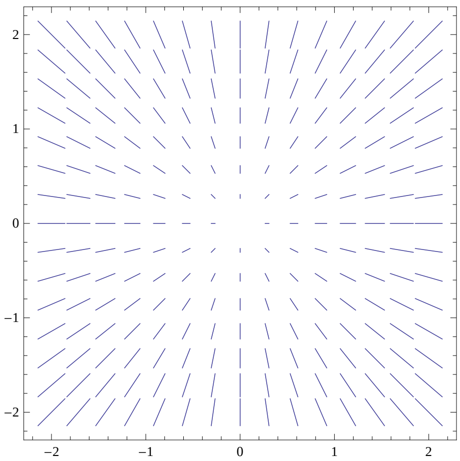
3. $y' = y$



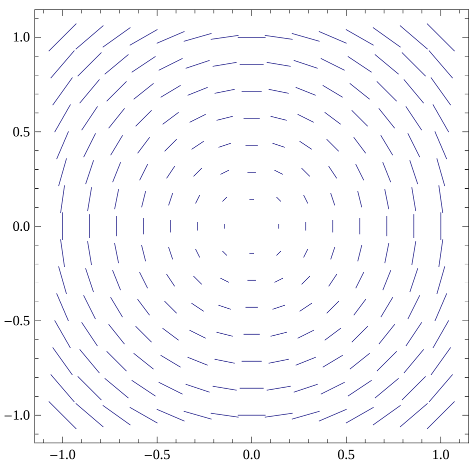
4. $y' = -1/y$



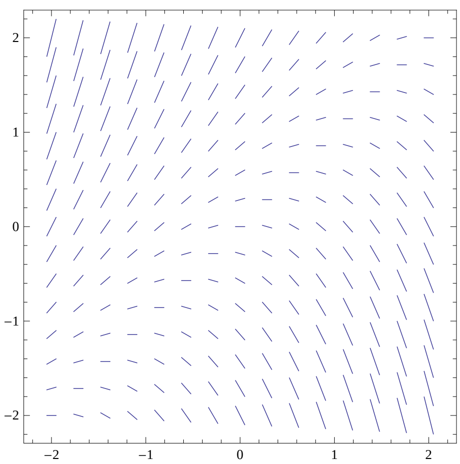
5. $y' = y/t$



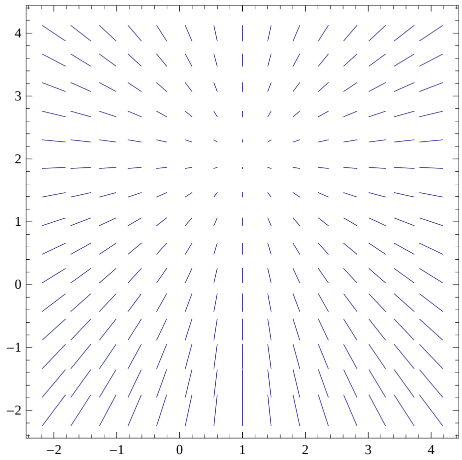
6. $y' = -t/y$



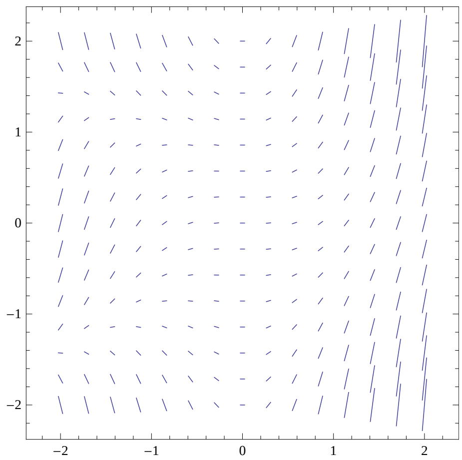
7. $y' = y - t$



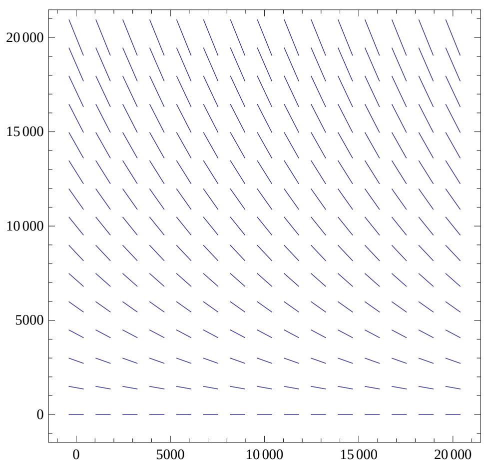
8. $y' = \dfrac{y-2}{t-1}$



9. $y' = ty^2 + t^2$



10. $y' = -(\ln(2)/5600)y$ (desintegração C-14)



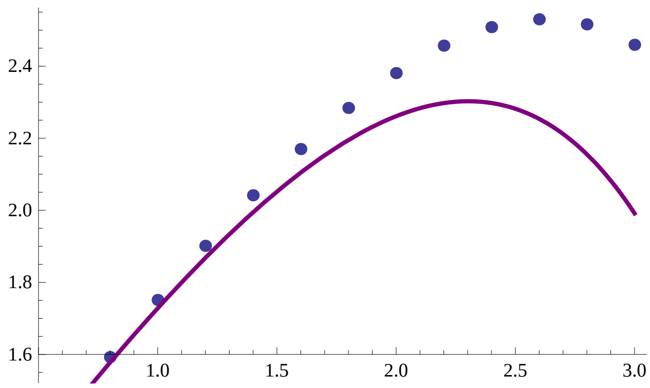
Anexo II - Métodos numéricos: Euler e Runge-Kutta

Considere-se o problema com condição inicial:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

com f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continuas nos domínios considerados.

A *resolução numérica* do problema com C.I. (*) consiste em encontrar aproximações $y_1, \ldots, y_r$ dos valores da solução y em pontos $t_1, \ldots, t_r$, ou seja, $y_n \sim y(t_n)$, para $n = 1, 2, \ldots r$.



Em geral, procura-se aproximações dos valores da solução em pontos equidistantes h:

$$t_0, \quad t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h \quad \ldots \quad t_r = t_0 + rh$$

Este tipo de métodos chamam-se *métodos numéricos de passo* h. Estudaremos dois tipos de métodos de passo h: o método de Euler e o método de Runge-Kutta de ordem 4.

Método de Euler

Está baseado na aproximação de uma função $y(t)$ no ponto (t_0, y_0), pela tangente a y em (t_0, y_0), que está definida pela equação:

$$y'(t_0)(t - t_0) + y_0.$$

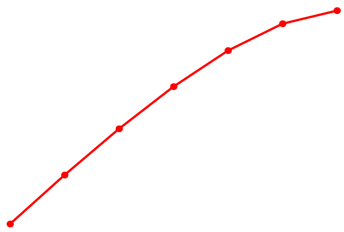
Se y é solução de uma EDO de tipo $y' = f(t, y)$ então $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ e portanto a tangente a (t_0, y_0) é:

$$f(t_0, y_0)(t - t_0) + y_0$$

Se calculamos o valor da tangente em t_1, obtemos uma aproximação de $y(t_1)$, ou seja definindo

$$y_1 = f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) + y_0$$

obtemos y_1 *aproximação* de $y(t_1)$.



Se repetimos agora o processo em (t_1, y_1) obtemos valores aproximados da solução nos pontos $t_1, t_2, \ldots t_r$. O algoritmo que define o método de Euler está definido então por:

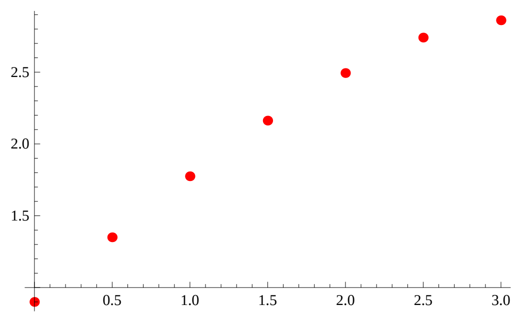
$$t_n = t_0 + hn, \qquad y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Exemplo: Considere-se o problema com C.I.

$$\begin{cases} y' = y - t \\ y(0) = 0.9 \end{cases}$$

O método de Euler com passo 0.5 entre 0 e 3 determina os seguintes valores aproximados da solução y do problema anterior:

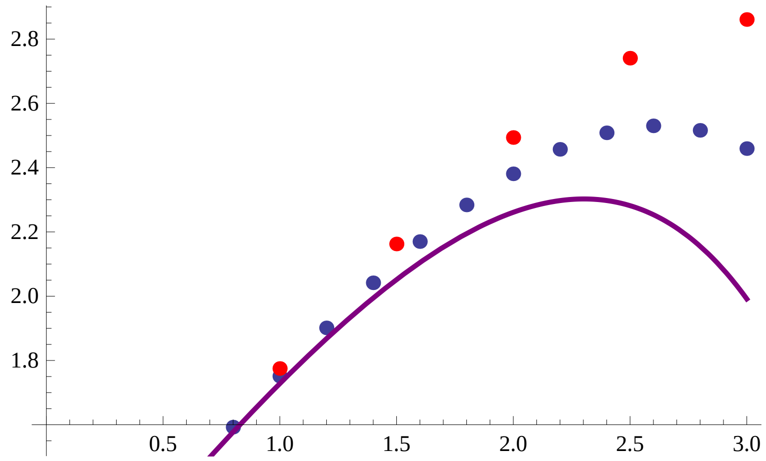
t_n	y_n
0	0.9
0.5	1.35
1	1.775
1.5	2.1625
2	2.49375
2.5	2.74063
3	2.86094



De facto, a equação diferencial deste problema CI é uma EDO linear, cuja solução exacta é

$$y(t) = t + 1 - 0.9e^t.$$

O gráfico seguinte compara a aproximação calculada com passo 0.5 (vermelho), a aproximação calculada com passo 0.2 (azul) e os valores exactos da solução (violeta).



Nota Estimativa do erro no método de Euler.

Nas condições adequadas (f suficientemente regular, com derivada $\partial f/\partial y$ limitada) o método de Euler converge para a solução. Isto é, se $y_h(x)$ é uma aproximação do valor $y(x)$ calculada com método de Euler de passo h, com y solução do problema CI (*), então

$$\lim_{h \mapsto 0} y_h(x) = y(x)$$

existindo fórmulas que limitam, teoricamente, o erro em cada etapa. Na prática, para estimar o erro cometido no método de Euler, consideram-se duas aproximações y_h, $y_{h/2}$ de $y(x)$ obtidas usando métodos de passo h e $h/2$, respectivamente. Observe-se que

$$x = x_0 + n(h), \qquad x = x_0 + 2n(h/2)$$

A diferença $|y_h - \widetilde{y}_{h/2}|$ proporciona uma estimativa do erro $|y(x) - \widetilde{y}_h|$.

Método de Runge-Kutta de ordem 4

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + h/2, y_n + k_1 h/2)$$
$$k_3 = f(t_n + h/2, y_n + k_2 h/2), \quad k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3 h)$$
$$t_{n+1} = t_n + h \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Anexo III - Estabilidade de sistemas dinâmicos planos

Considere um sistema *autónomo* de EDOs

$$\begin{cases} x' &= v(x,y) \\ y' &= u(x,y) \end{cases}$$

Seja $\overline{p} = (x_0, y_0)$ uma solução de equilibrio do sistema, isto é

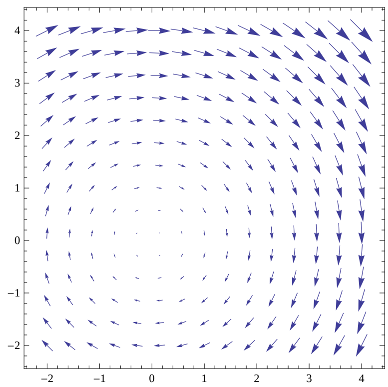
$$\begin{cases} 0 &= v(x_0,y_0) \\ 0 &= u(x_0,y_0) \end{cases}$$

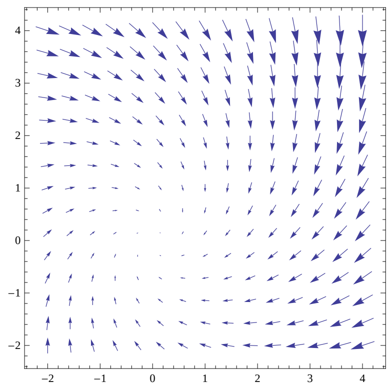
O equilíbrio diz-se *localmente estável em* $\overline{p}$ se para todo o $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x(0),y(0)) - \overline{p}\| < \delta \Longrightarrow \|(x(t),y(t)) - \overline{p}\| < \epsilon \qquad \forall t \geq 0$$

O equilibrio diz-se *assimptoticamente estável* si é localmente estável e existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x(0),y(0)) - \overline{p}\| < \delta \Longrightarrow (x(t),y(t)) \to \overline{p} \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$





Nota :*Linearização e estabilidade em sistemas não lineares*

Considere um sistema *autónomo* de EDOs

$$\begin{cases} x' &= v(x,y) \\ y' &= u(x,y) \end{cases}$$

com $\overline{p} = (x_0, y_0)$ uma solução de equilíbrio do sistema. A *linearização* do sistema em torno a $\overline{p}$ é o sistema linear definido pelo Jacobiano $D(v,u)_{\overline{p}}$ de (v,u) em $\overline{p}$. O Teorema de Hartmann-Grobmam afirma que, se os valores próprios do sistema linearizado tem parte real não nula (sistema *hiperbólico*) o campo linearizado é "localmente equivalente" ao linearizado.

• *Estudo da estabilidade nos sistemas lineares*

A origem $\overline{p} = (0,0)$ é sempre uma solução de equilíbrio do sistema. Por outro lado, se um sistema linear com coeficientes constantes está representado por uma matriz A, a estabilidade do ponto de equilíbrio $\overline{p} = (0,0)$ é preservada por qualquer transformação do tipo $P^{-1}AP$. Em resumo, podemos limitarnos a estudar os tipos de equilíbrio para A na forma canónica.

1. Num sistema do tipo $\begin{cases} x' &= \rho_1 x \\ y' &= \rho_2 y \end{cases}$ (ρ_1, ρ_2 constantes) a origem diz-se:

   (a) *nodo estável* se $\rho_1, \rho_2 < 0$;

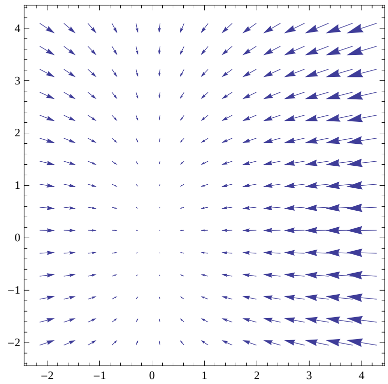
   (b) *nodo instável* se $\rho_1, \rho_2 > 0$;

   (c) *ponto de sela* se $\rho_1 \rho_2 < 0$

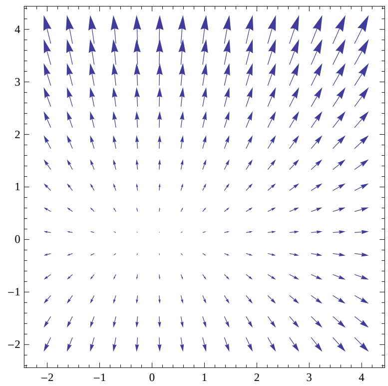
   No primeiro caso a solução de equilíbrio é assimptoticamente estável, nos dois outros casos a solução de equilibrio é inestável.

   EXEMPLOS:

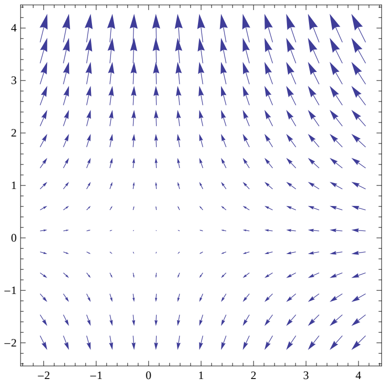
   (a) $\begin{cases} x' &= -3x \\ y' &= -y \end{cases}$



   (b) $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= 2y \end{cases}$



(c) $\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= 2y \end{cases}$



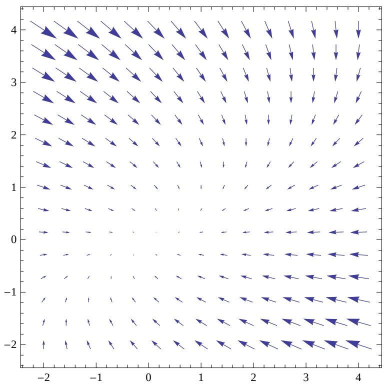
2. Num sistema do tipo $\begin{cases} x' &= \rho x + y \\ y' &= \rho y \end{cases}$ (ρ constante) a origem diz-se:

   (a) *nodo estável* se $\rho < 0$ (equilíbrio assimptoticamente estável);

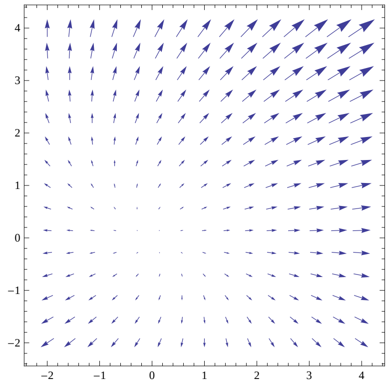
   (b) *nodo instável* se $\rho > 0$.

EXEMPLOS:

(a) $\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -y \end{cases}$



(b) $\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y \end{cases}$



3. Num sistema do tipo $\begin{cases} x' &= \rho x + \omega y \\ y' &= -\omega x + \rho y \end{cases}$ com ρ, ω constantes, a origem diz-se:

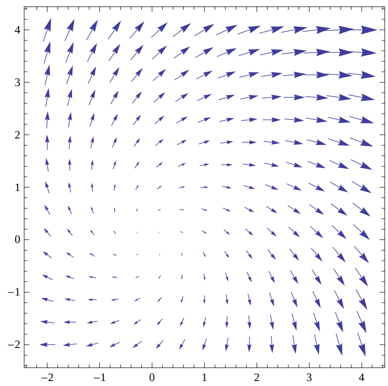
   (a) um *foco estável* se $\rho < 0$ (equilíbrio assimptoticamente estável);

   (b) um *foco instável* se $\rho > 0$ (equilíbrio instável).

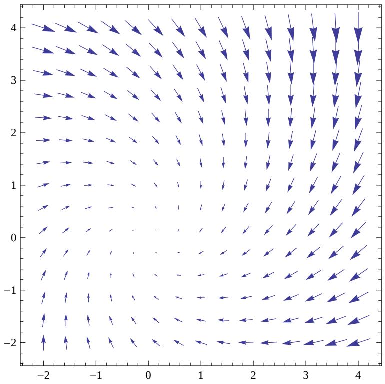
   No caso em que $\rho = 0$ a origem é uma solução de equilibro estável mas não assimptoticamente estável e diz-se *centro*.

   EXEMPLOS:

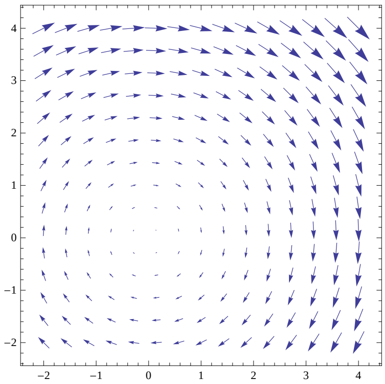
   (a) $\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -x + y \end{cases}$



(b) $\begin{cases} x' &= -x+y \\ y' &= -x-y \end{cases}$



(c) $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$



(d) $\begin{cases} x' &= -4y \\ y' &= 4x \end{cases}$