Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear

teste **A** — 10 de janeiro de 2011

nome: ______________________________ número: ____________

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1∼(1.5+1.5+1.5+1.5), 2∼2; em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

   (b) Encontre uma base do núcleo de A.

   (c) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A. Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.

   (d) Mostre que $A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal),

2. Mostre que $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule A^{-1} **ou** pelo algoritmo de Gauss-Jordan **ou** à custa dos complementos algébricos.

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente **à melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   (a) As colunas de A formam uma base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) $CS(A) = \mathbb{R}^2$. (V)
   (c) $\dim N(A) = 2$.
   (d) Nenhuma das anteriores.

2. Sendo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
$$T(1,0) = (-1,0,1),\ T(0,1) = (1,1,1).$$
   (a) $T(1,2) = (1,0,3)$.
   (b) A matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à de $\mathbb{R}^3$ é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (V)
   (c) $T(x,0) = (x,0,x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Todas as anteriores.

3. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
   (a) A é diagonalizável.
   (b) $\dim N(A) = 2$.
   (c) $\mathrm{car}(A) = 1$.
   (d) Todas as anteriores. (V)

4. Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
   (a) $Ax = b$ tem soluções.
   (b) $N(A) = \{(0,0,0)\}$.
   (c) $\mathrm{proj}_{CS(A)} b = b$.
   (d) Nenhuma das anteriores. (V)

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) $\sigma(A) = \sigma(J)$, ou seja, A e J têm os mesmos valores próprios.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ é vector próprio associado ao valor próprio 2 de J.

   (c) J e A têm o mesmo polinómio característico.

   (d) Todas as anteriores. (V)

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) $\dim N(A) = 1$.

   (b) $\det(A) = 0$.

   (c) Para qualquer escolha de $b \in \mathbb{R}^3$, a equação $Ax = b$ tem uma única solução. (V)

   (d) Nenhuma das anteriores.

7. Dado um subespaço vectorial V de $\mathbb{R}^5$, com $\dim V = 3$,

   (a) $(0,0,0,0,0) \in V$.

   (b) Se $(1,1,1,1,0) \in V$ então $(3,3,3,3,0) \in V$.

   (c) $V \neq \mathbb{R}^5$.

   (d) Todas as anteriores. (V)

8. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (d) Nenhuma das anteriores. (V)

`Respostas:`

1. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
2. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
3. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
4. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
5. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
6. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
7. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
8. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
9. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯
10. a) ◯ b) ◯ c) ◯ d) ◯