Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

l.e.i.

Álgebra Linear

exame **D** — 7 de fevereiro de 2011

nome: ______________________ número: __________

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1∼(2+2), 2∼(2+2+2+2); em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre, usando o algoritmo de eliminação de Gauss, uma matriz U escada de linhas equivalente por linhas a $M = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$.

   (b) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma base do núcleo de A.

   (b) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A. Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.

   (c) Calcule os valores próprios de A.

   (d) Verifique se A é diagonalizável e em caso afirmativodiagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal)

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente **à melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,
   (a) As colunas de A formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
   (c) $\det(A) = 1$.
   (d) Todas as anteriores. (V)

2. Sendo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
   $$T(1,0) = (0,1,1),\ T(0,1) = (1,0,1).$$
   (a) $T(1,2) = (2,1,3)$. (V)
   (b) A matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à de $\mathbb{R}^3$ é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (c) $T(x,x) = (x,2x,x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Todas as anteriores.

3. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,
   (a) A é diagonalizável.
   (b) $CS(A) = \mathbb{R}^3$.
   (c) $Ax = 0$ é possível determinado.
   (d) Nenhuma das anteriores. (V)

4. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,
   (a) $Ax = b$ é sempre possível, independentemente da escolha de $b \in \mathbb{R}^2$. (V)
   (b) $\mathrm{nul}(A) = 2$.
   (c) $(0,1,-1) \in N(A)$.
   (d) Nenhuma das anteriores.

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b \in \mathbb{R}^3$,

   (a) $Ax = b$ é possível determinado.

   (b) As colunas de A formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\text{proj}_{CS(A)} b = b$.

   (d) Todas as anteriores. (V)

6. Dada uma matriz quadrada A, seja U uma matriz escada obtida de A após aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss, então garantidamente

   (a) $\det(A) = \det(U)$.

   (b) $\sigma(A) = \sigma(U)$, ou seja, são iguais os conjuntos dos valores próprios de A e de U.

   (c) $\dim CS(A) = \dim CS(U)$. (V)

   (d) Nenhuma das anteriores.

7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) $\sigma(A) = \sigma(J)$, ou seja, A e J têm os mesmos valores próprios.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ é vector próprio associado ao valor próprio 0 de A.

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in N(A)$.

   (d) Todas as anteriores. (V)

8. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

   (a) Se A é invertível então A^2 também é invertível. (V)

   (b) Se A e B são invertíveis então $A + B$ também é invertível.

   (c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B.

   (d) Apenas duas das afirmações anteriores são verdadeiras.

Respostas:

1.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
2.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
3.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
4.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
5.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
6.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
7.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯
8.	a) ◯	b) ◯	c) ◯	d) ◯