

Programação Linear - método simplex

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
vc@dps.uminho.pt

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

11 de março de 2015

Programação Linear - método simplex

antes

- Existe sempre um vértice que é uma solução óptima do problema.

Guião

- O algoritmo Simplex explora uma sequência de vértices admissíveis.
- Em cada vértice, é necessário avaliar se o vértice actual é o óptimo, e se não for, decidir qual o vértice adjacente seguinte.
- A operação básica do algoritmo é o *pivô* (a mudança de um vértice para um vértice adjacente).
- A operação algébrica para efectuar o pivô é a eliminação de Gauss.

depois

- Há situações particulares que serão analisadas depois.

- Algoritmo simplex
- coluna pivô: teste de optimalidade
- linha pivô: vértice admissível adjacente
- Resolução do Exemplo
- Implementação algébrica de um pivô
- Referência à eliminação de Gauss

Algoritmo simplex

- Como há sempre um vértice admissível que é uma solução óptima, interessa apenas analisar vértices admissíveis:

Algoritmo Simplex (informal)

- seleccionar um vértice admissível inicial
- enquanto (existir um vértice admissível adjacente melhor)
mudar para vértice admissível adjacente melhor

Operações básicas do algoritmo:

- 1 teste de optimalidade: existe algum vértice admissível adjacente ao vértice actual com melhor valor de função objectivo?
- 2 pivô: mudança de uma solução básica do sistema de equações (vértice) para uma solução básica adjacente:
 - há uma variável não-básica que entra na base (passa a ser básica)
 - há uma variável básica que sai da base (passa a ser não-básica)

Um vértice é admissível se todas as coordenadas forem não-negativas.

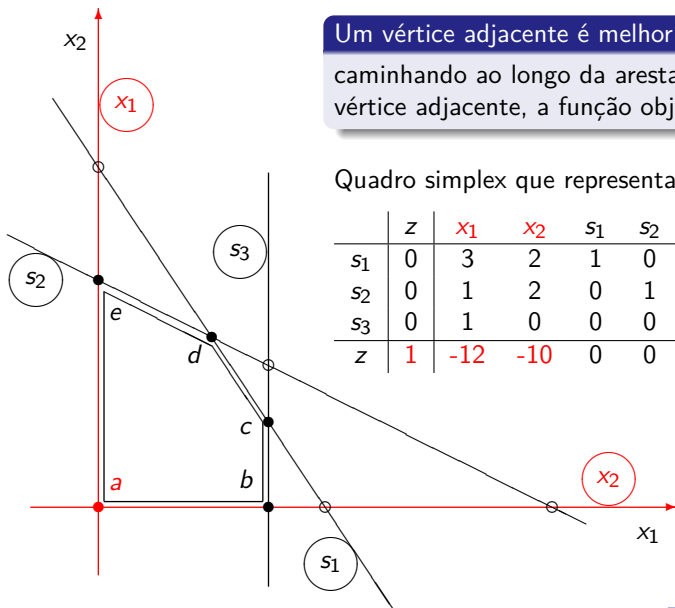
Eliminação de Gauss: pivô e elemento pivô

- O pivô envolve resolver o sistema de equações em ordem ao novo conjunto de variáveis básicas, usando *eliminação de Gauss*.
- Na inversão de matrizes ou na resolução de sistemas de equações, há regras para seleccionar o *elemento pivô* (cruzamento da *coluna pivô* com a *linha pivô*).

No método simplex, a selecção do *elemento pivô* visa:

- *coluna pivô* (variável não-básica que entra na base): atingir a solução óptima mais rapidamente;
- *linha pivô* (variável básica que sai da base): passar apenas por vértices admissíveis.

Coluna pivô: teste de optimalidade do vértice a



Um vértice adjacente é melhor se:

caminhando ao longo da aresta, no sentido do vértice adjacente, a função objectivo melhora.

Quadro simplex que representa o vértice a :

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

Coluna pivô: variação da função objectivo

- Para ver como varia o valor da função objectivo ao longo de uma aresta, vamos ver como variam os valores das variáveis não-básicas.

Quando caminhamos ao longo de uma aresta,

- há uma **única** variável não-básica que aumenta de valor;
- as restantes variáveis não-básicas permanecem nulas (elas são nulas nos dois vértices nas extremidades da aresta, e em toda a aresta).

Exemplo 1: Ao longo da aresta \overline{ab} , x_1 aumenta e x_2 permanece nula.

Exemplo 2: Ao longo da aresta \overline{ae} , x_2 aumenta e x_1 permanece nula.

- Este resultado é válido para qualquer dimensão (por exemplo, no espaço a 3 dimensões, há uma variável não-básica que aumenta e as outras 2 mantêm-se iguais a 0).
- A coluna pivô é a coluna da **única** variável não-básica que aumenta.

Coluna pivô: teste de optimalidade no quadro simplex

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- A equação da função objectivo no quadro simplex está expressa em termos das variáveis não-básicas x_1 e x_2 :

$$z - 12x_1 - 10x_2 = 0.$$

- Aresta \overline{ab} : quando x_1 aumenta (mantendo $x_2 = 0$), o valor da função objectivo z aumenta: $\partial z / \partial x_1 = 12$.
- Aresta \overline{ae} : quando x_2 aumenta (mantendo $x_1 = 0$), o valor da função objectivo z aumenta: $\partial z / \partial x_2 = 10$.
- O vértice a não é o vértice óptimo.

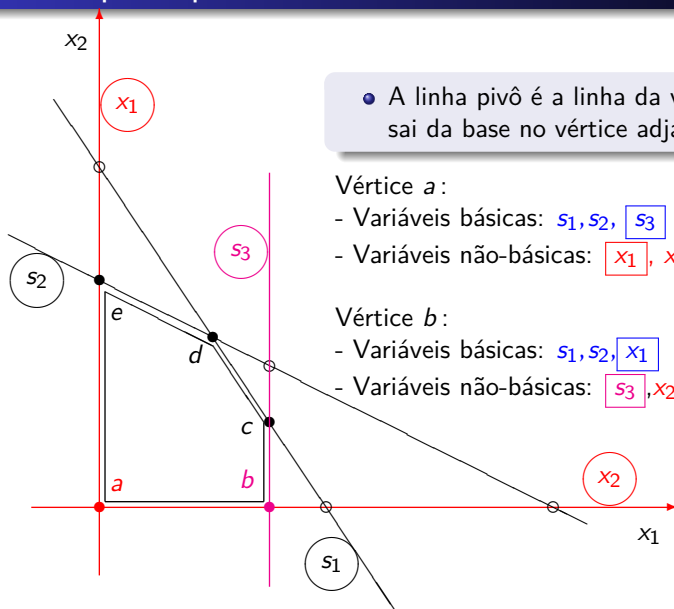
Coluna pivô: selecção

- *Regra de Dantzig*: seleccionar a variável não-básica com maior variação da função objectivo por unidade de incremento da variável não-básica ao longo da aresta, ou seja:

A coluna pivô (variável não-básica a entrar na base) é:

- a coluna com o coeficiente mais negativo da linha da função objectivo (em problemas de maximização).
- Esta escolha visa atingir a solução óptima mais rapidamente.
- Em caso de empate, a escolha é arbitrária (ou desempata-se seleccionando a aresta que conduz ao vértice adjacente com melhor valor da função objectivo).
- (há outras regras como: *Devex rule*, *partial pricing*, *nested pricing*).

Linha pivô: pivô do vértice $a \rightarrow$ vértice b



- A linha pivô é a linha da variável básica que sai da base no vértice adjacente.

Vértice a :

- Variáveis básicas: s_1, s_2, s_3
- Variáveis não-básicas: x_1, x_2 (iguais a 0)

Vértice b :

- Variáveis básicas: s_1, s_2, x_1
- Variáveis não-básicas: s_3, x_2 (iguais a 0)

Linha pivô: caminhar até o vértice adjacente admissível

- no vértice adjacente admissível, todas as variáveis são não-negativas (exemplo: $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$).

Quando caminhamos ao longo da aresta,

- há uma **única** variável não-básica que aumenta de valor;
- as restantes variáveis não-básicas permanecem nulas;
- cada variável básica pode aumentar, diminuir ou manter o valor.

Identificação da variável básica que sai da base

- É a variável básica que, ao decrescer, atinge primeiro o valor zero quando se caminha ao longo da aresta.
- O elemento pivô tem sempre valor **positivo**, porque ...

Linha pivô: variação das variáveis básicas

Quando a variável não-básica da coluna pivô aumenta de uma unidade:
a variação da variável básica é dada pelo coeficiente da linha respectiva.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- Exemplo: como varia a variável básica s_1 quando x_1 aumenta?
- Da equação da restrição $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120$: quando x_1 aumenta 1 unidade (e x_2 se mantém = 0), s_1 diminui 3 unidades.

Nota: se o coeficiente for:

- positivo**, a variável básica **decrece**;
- nulo**, a variável básica **mantém o valor**;
- negativo**, a variável básica **aumenta**;

Linha pivô: *menor razão positiva*

razão (lado direito/coluna pivô) **positiva** (coef. da coluna pivô >0):

- valor da variável que entra na base que torna a variável básica nula.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
s_1	0	3	2	1	0	0	120	$120/3 = 40$
s_2	0	1	2	0	1	0	80	$80/1 = 80$
s_3	0	1	0	0	0	1	30	$30/1 = 30$
z	1	-12	-10	0	0	0	0	

Quando a variável que entra na base atinge a *menor razão positiva*:

- há uma variável básica que atinge 0 e as outras são não-negativas (≥ 0): atinge-se o vértice admissível adjacente.

exemplo: a *menor razão positiva* é 30

- Coluna pivô: coluna de x_1 (entra na base e vai ter valor 30).
- Linha pivô: linha de s_3 (atinge o valor 0, e torna-se não-básica).

Linha pivô: identificação

- Dada uma coluna pivô,

A linha pivô (variável básica que sai da base):

- é a linha com **menor razão** (lado direito/coluna pivô)
positiva (coeficiente da coluna pivô > 0)
- (em caso de empate, há degenerescência) [veremos depois]
- Se não existir coeficiente da coluna pivô > 0 , solução ótima é ilimitada [veremos depois]

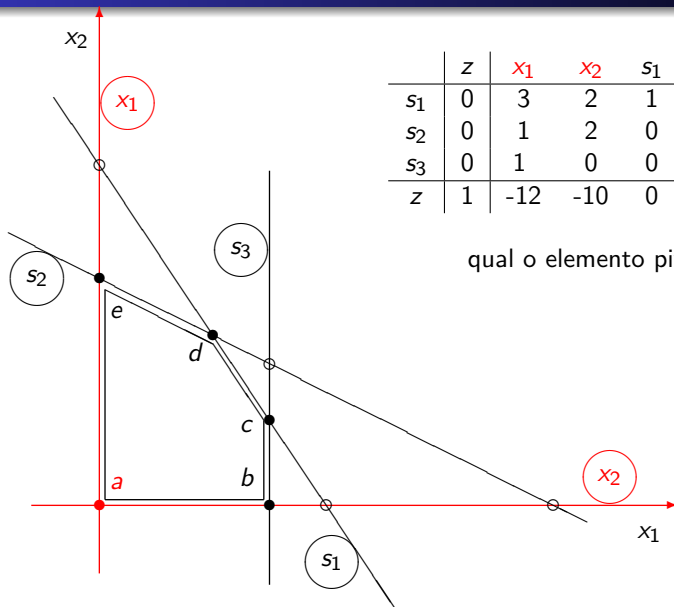
Algoritmo simplex:

- Selecção de um vértice admissível inicial
 - Se não existir, problema é impossível [veremos depois]
- Repetir
 - Selecção da coluna pivô:
 - Coeficiente mais negativo da linha da função objectivo
 - (em caso de empate, escolha arbitrária)
 - Se não existir coef. <0 , solução óptima.
 - Selecção da linha pivô:
 - Menor razão (lado direito/coluna pivô) positiva (coef.col. >0)
 - (em caso de empate, há degenerescência) [veremos depois]
 - Se não existir coef.col. >0 , solução óptima é ilimitada [veremos depois]
 - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

Um dado vértice e n vértices adjacentes formam um *simplex*. É o poliedro mais simples no espaço a n dimensões.

Resolução do Exemplo

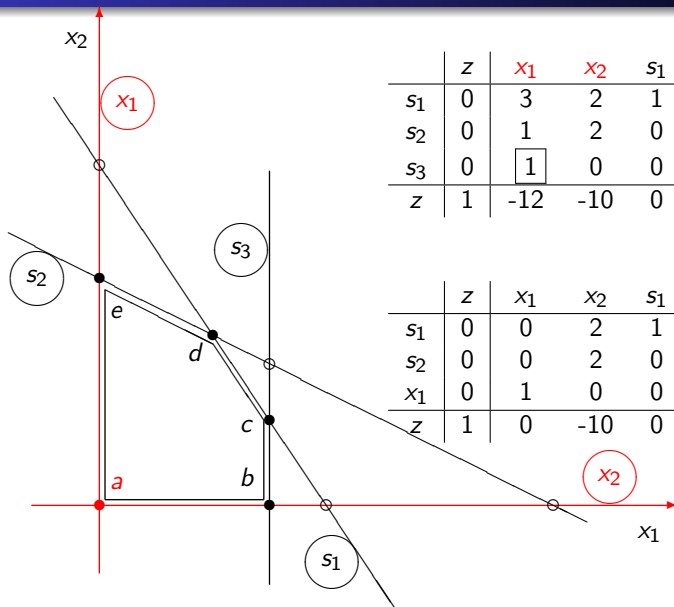
Vértice a



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

qual o elemento pivô?

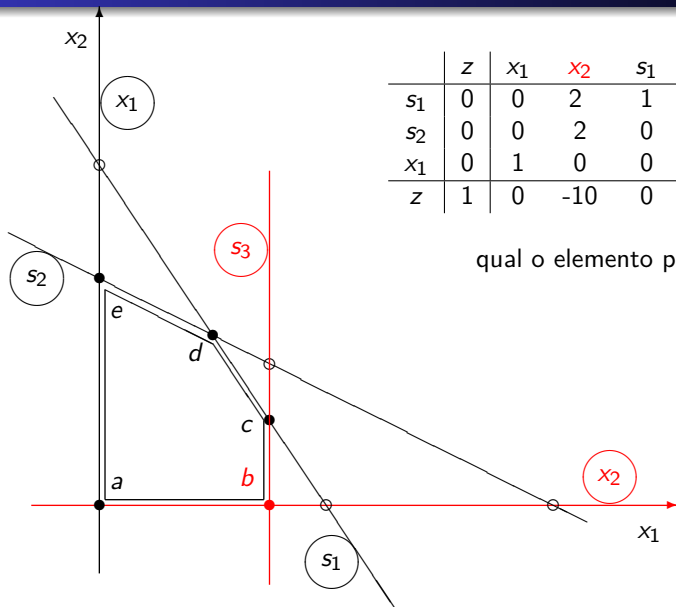
Vértice $a \rightarrow$ vértice b



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

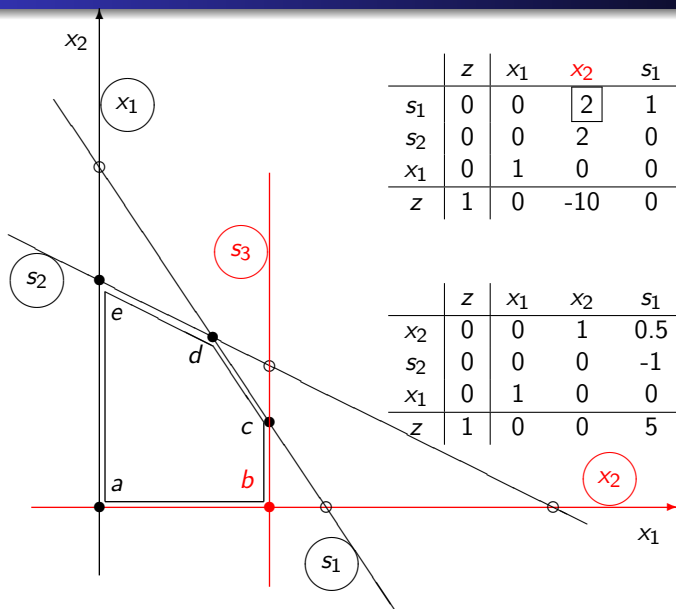
Vértice b



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

qual o elemento pivô?

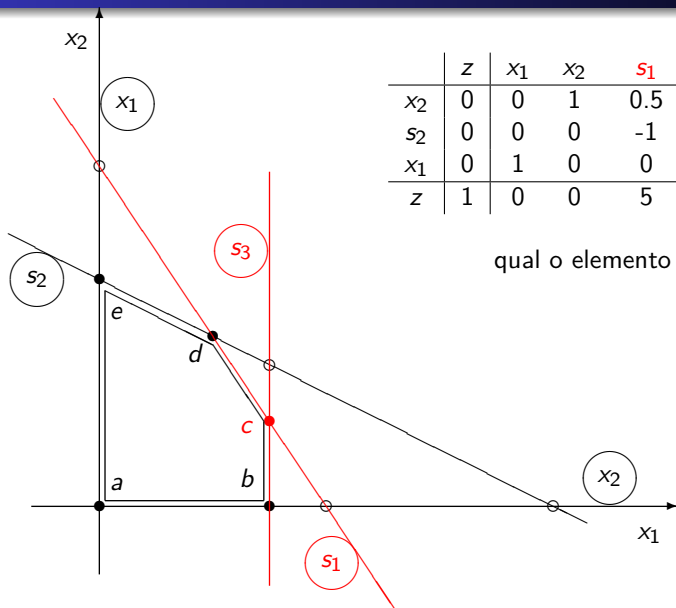
Vértice $b \rightarrow$ vértice c



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
s_2	0	0	2	0	1	-1	50
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	-10	0	0	12	360

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

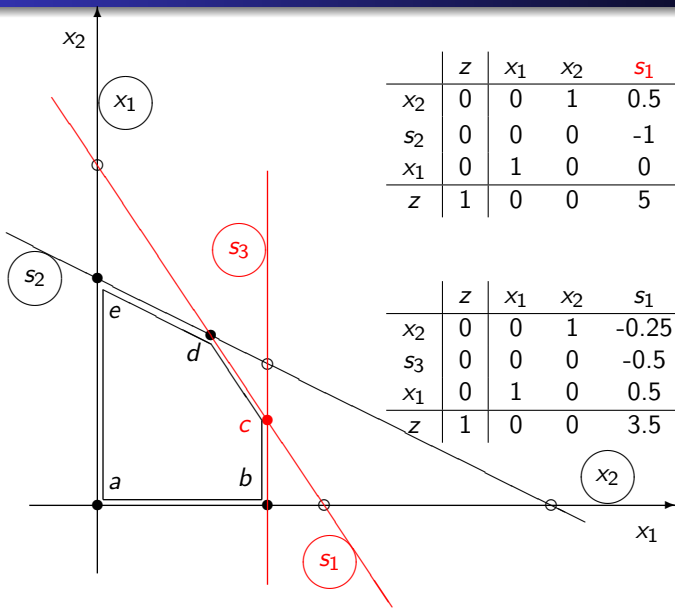
Vértice c



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

qual o elemento pivô?

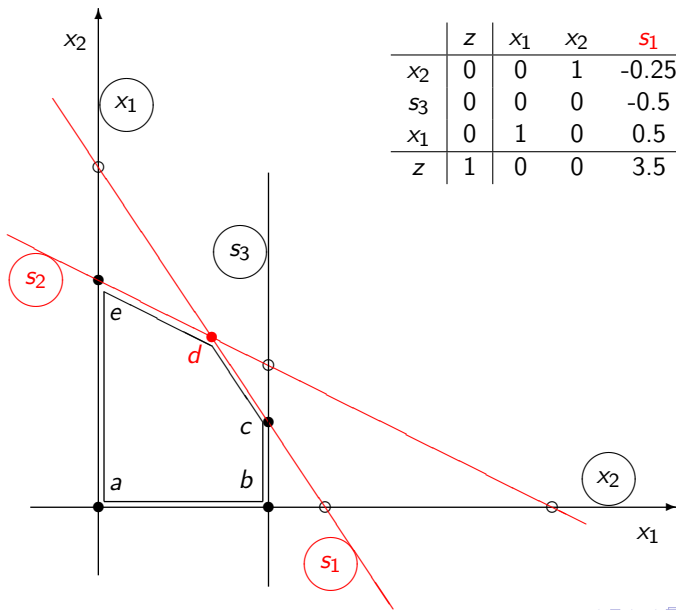
Vértice $c \rightarrow$ vértice d



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Vértice d : solução ótima



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	-0.25	0.75	0	30
s_3	0	0	0	-0.5	0.5	1	10
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	20
z	1	0	0	3.5	1.5	0	540

Caracterização algébrica da solução óptima

- Solução é óptima se aumentar qualquer variável não-básica (são todas iguais a 0 e apenas podem aumentar) piora a função objectivo.
- Exemplo: $z + 3.5 s_1 + 1.5 s_2 = 540$

- quando s_1 aumenta, mantendo-se $s_2 = 0$, a f.o. diminui:

$$\partial z / \partial s_1 = -3.5$$

- quando s_2 aumenta, mantendo-se $s_1 = 0$, a f.o. diminui:

$$\partial z / \partial s_2 = -1.5$$

- (se s_1 e s_2 aumentarem ambas, também diminui.)

Referência ao método de eliminação de Gauss

- Elemento pivô: $\boxed{}$ (cruzamento linha pivô e coluna pivô).

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- A variável x_1 entra na base e a variável s_3 sai da base:
 - Novas variáveis básicas: s_1, s_2, x_1
 - Novas variáveis não-básicas: x_2, s_3
- Pretende-se que a coluna da variável x_1 , que entra na base, faça parte da matriz identidade:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0		1	0		
s_2	0	0		0	1		
x_1	0	1		0	0		
z	1	0		0	0		

- Nota: para uma explicação mais detalhada do Método da Eliminação de Gauss, ver o tutorial,
- em particular, a partir da pág.22, onde se apresentam os cálculos necessários a efectuar o pivô realizado nos diapositivos seguintes.



É necessário eliminar coeficiente de x_1 da primeira linha

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

- Usando a equação da linha pivô: $x_1 + s_3 = 30 \Leftrightarrow x_1 = 30 - s_3$, substituindo na primeira linha: $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \Leftrightarrow 3(30 - s_3) + 2x_2 + s_1 = 120 \Leftrightarrow 2x_2 + s_1 - 3s_3 = 30$
- É equivalente a somar à 1.ª linha a linha pivô multiplicada por -3:

Linha 1	0	3	2	1	0	0	120
$-3 \times \text{Linha Pivô}$	0	-3	0	0	0	-3	-90
Resultado	0	0	2	1	0	-3	30

- Quadro seguinte:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	2	1	0	-3	30
				...			
x_1	0	1	0	0	0	1	30

- O resultado que estabelece que existe um vértice que é uma solução óptima do problema permite que o algoritmo simplex restrinja a procura apenas aos vértices admissíveis.
- As decisões (selecção da coluna e da linha pivô) garantem que se muda de um vértice admissível (do problema primal) para outro vértice admissível mais próximo da solução óptima.
- A mudança de base faz-se usando eliminação de Gauss.

- Resolver problemas de programação linear de maximização pelo método simplex (primal).
 - seleccionar a variável a entrar na base;
 - seleccionar a variável a sair da base;
 - utilizar o método de eliminação de Gauss para mudar para uma base adjacente;
 - identificar como variam as variáveis (básicas e não-básicas) na mudança de base;
 - reconhecer quando uma solução é óptima;
 - reconhecer quando há soluções óptimas alternativas.

1. Mudança de base: direcção e aumento máximo

O que significa $x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_j$?

- A solução básica $B^{-1}b$ é o vértice x_{v_actual} .
- O vector $B^{-1}N_j$ indica uma direcção d .
- O vector θd , $\theta \geq 0$, é um múltiplo escalar do vector d .

ou seja, na mudança de base

- partindo do vértice x_{v_actual} , ao longo da direcção $d \in \mathbb{R}^n$, percorremos os pontos $x = x_{v_actual} + \theta d$, que devem pertencer ao domínio, i.e., $A(x_{v_actual} + \theta d) = b$.
- Como $Ax_{v_actual} = b$, d deve ser uma direcção tal que $Ad = 0$.

- Quando $\theta = \theta_{max}$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{v_adj} = x_{v_actual} + \theta_{max} d$$

- Quando só uma variável aumenta, d é a direcção de uma aresta.

1. $B^{-1}N_j$ indica a direcção d : $Ad = 0$

- A coluna N_j da variável não-básica j e as colunas das variáveis básicas são um conjunto de vectores *linearmente dependentes*:

$$N_j - B (B^{-1}N_j) = 0$$

- Exemplo: vértice c (base x_2, s_2 e x_1) e var não-básica s_3 aumenta:
- quando a variável não-básica s_3 aumenta de θ unidades, a variável básica x_2 aumenta de 1.5θ unidades, s_2 decresce de 2θ unidades, e x_1 decresce de θ unidades.

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1.5 \theta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Exemplo: aresta vértice $c \rightarrow d$ (s_3 aumenta)

- quando a variável não-básica s_3 aumenta de θ unidades, a variável básica x_2 aumenta de 1.5θ unidades, s_2 decresce de 2θ unidades, e x_1 decresce de θ unidades.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Exercício: verificar que $Ax_{v_actual} = b$ e $Ad = 0$.

- Quando $\theta = \theta_{max} = 10$, atingimos o vértice adjacente x_{v_adj} :

$$x_{vertex_d} = x_{vertex_c} + \theta_{max} d$$

2. Mudança de base: como variam as variáveis básicas quando a variável não-básica aumenta θ unidades?

- O sistema de equações das restrições é $Bx_B + Nx_N = b$.

Num pivô, do conjunto de variáveis não-básicas \mathcal{N} ,

- uma variável não-básica x_j , $j \in \mathcal{N}$, aumenta θ unidades, $\theta \in \mathbb{R}_+$,
- as restantes variáveis não-básicas x_i , $i \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$, mantêm-se nulas.

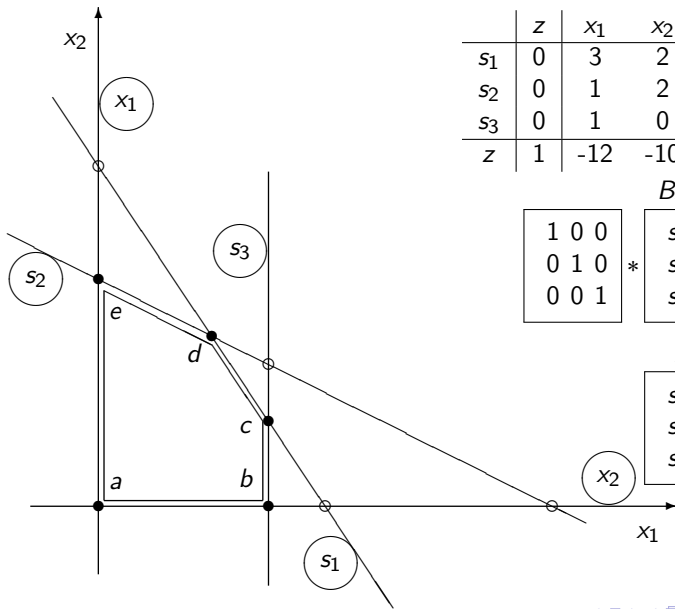
- Assim, no pivô, o sistema de equações é $Bx_B + N_j x_j = b$, ou

$$Bx_B = b - \theta N_j$$

- Pré-multiplicando por B^{-1} , o sistema de equações que descreve a mudança de base é expresso noutra base:

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_j$$

2. Exemplo: vértice $a \rightarrow$ vértice b (aumenta x_1)



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	3	2	1	0	0	120
s_2	0	1	2	0	1	0	80
s_3	0	1	0	0	0	1	30
z	1	-12	-10	0	0	0	0

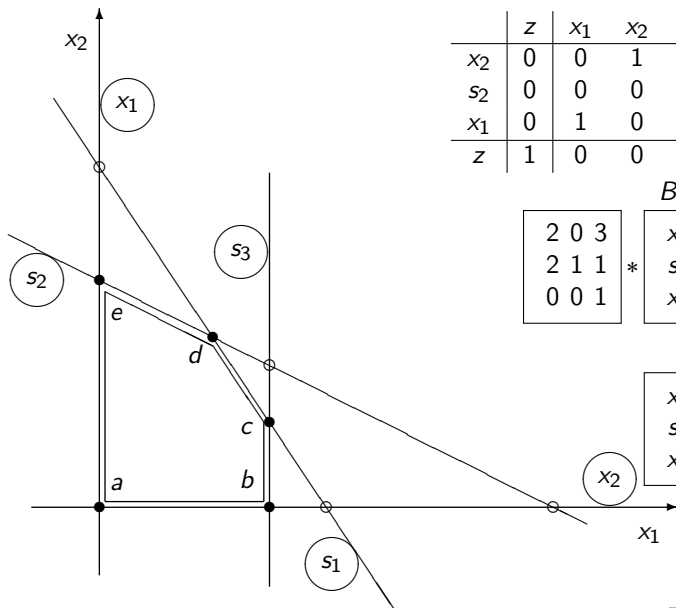
$$Bx_B = b - \theta N_{x_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_{x_1}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Exemplo: vértice $c \rightarrow$ vértice d (aumenta s_3)



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	0	1	0.5	0	-1.5	15
s_2	0	0	0	-1	1	2	20
x_1	0	1	0	0	0	1	30
z	1	0	0	5	0	-3	510

$$Bx_B = b - \theta N_{s_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}N_{s_3}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Caracterização geométrica da solução ótima

- Solução é ótima se o gradiente da função objectivo estiver contido no cone (combinação não-negativa) gerado pelos vectores simétricos dos *gradientes das restrições* activas no vértice ótimo.
- O gradiente da restrição $a^i x \leq b_i$ (ou seja, $a^i x + s_i = b_i$) é:

$$\partial s_i / \partial x = -a^i$$

- Exemplo:

$$\text{restrição } 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \quad \rightarrow \quad \partial s_1 / \partial x = (-3, -2)^t.$$

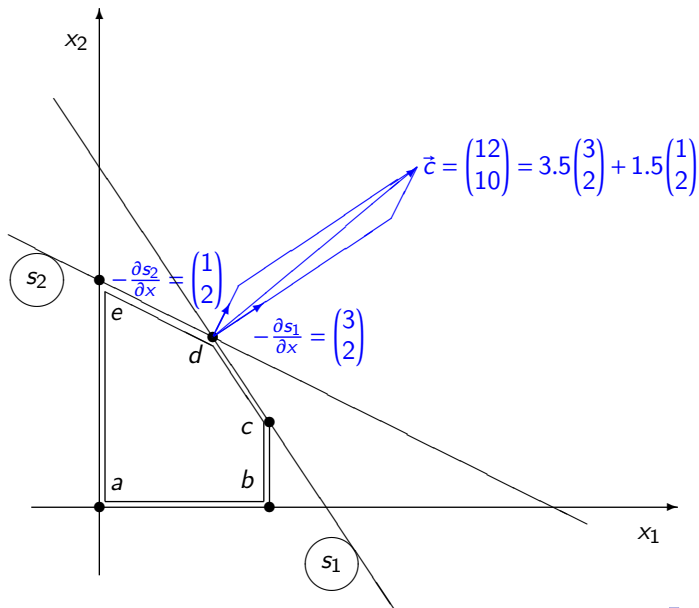
$$\text{restrição } 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 80 \quad \rightarrow \quad \partial s_2 / \partial x = (-1, -2)^t.$$

- Gradiente da função objectivo, \vec{c} , é uma combinação não-negativa dos vectores simétricos dos gradientes das restrições activas ($s_1 = 0$ e $s_2 = 0$)

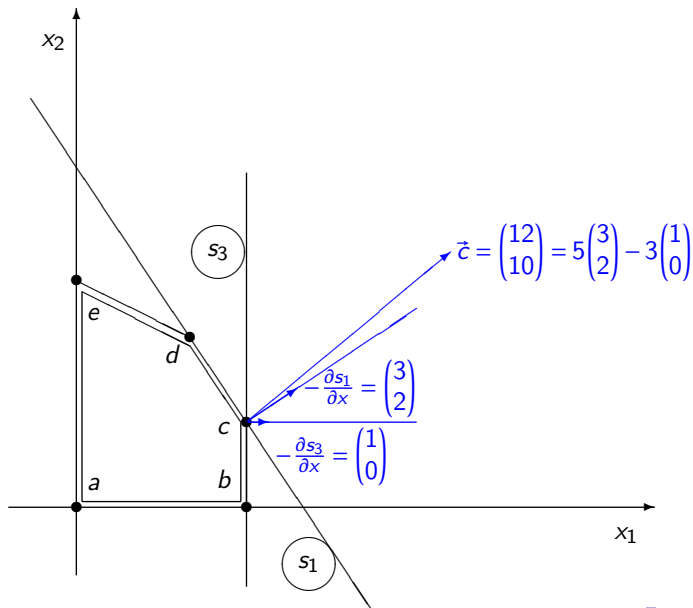
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = 3.5 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- os coeficientes 3.5 e 1.5 são os mesmos do quadro simplex.

3. Solução óptima: gradiente \vec{c} está contido no cone



3. Solução em que o gradiente \vec{c} não está contido no cone



Fim