

Nota: **Justifique** adequadamente cada uma das suas respostas (se nada for dito em contrário).

1. Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, +, -, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X .

$$\frac{}{a \in G} \quad \frac{x \in G}{(x - b) \in G} \quad - \quad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x + y) \in G} \quad +$$

Seja ainda $g : G \rightarrow \mathbb{Z}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:

- $g(a) = 0$;
- $g((x - b)) = g(x) - 1$, para todo o $x \in G$;
- $g((x + y)) = g(x) + g(y)$, para todos os $x, y \in G$.

- (a) Construa uma árvore de formação do elemento $u = ((a - b) + (((a + a) - b) - b))$ de G .
 - (b) Calcule $g(u)$, onde u é a palavra da alínea anterior.
 - (c) Enuncie o Princípio de indução estrutural para G .
 - (d) Prove por indução estrutural que, para todo o $x \in G$, $g(x) \leq 0$.
 - (e) Considere a função $h : G \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que, para todo o $x \in G$, $h(x)$ é o número de ocorrências da letra b na palavra x . Defina a função h por recursão estrutural.
 - (f) Identifique, sem justificar, qual a relação que existe entre as funções g e h .
2. Seja φ a seguinte fórmula do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (p_0 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1).$$

- (a) Indique uma fórmula logicamente equivalente a φ onde apenas ocorram os conectivos \neg e \rightarrow .
 - (b) Mostre que $\varphi \models \neg p_1$.
 - (c) φ é uma tautologia?
3. Considere as seguintes proposições:
- Se a escola fecha, o país poupa.
 - O futuro será melhor se e só se a escola não fecha.
 - O país poupa ou o futuro não será melhor.
- (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.
 - (b) Mostre que, se as três proposições acima são simultaneamente verdadeiras, então o país poupa.
4. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

- (a) $\models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\models \neg \varphi$ ou $\models \psi$.
- (b) Se Γ é inconsistente, então todo o subconjunto de Γ é inconsistente.
- (c) Se φ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi$, então Γ é inconsistente.

Cotações

| 1. | 2. | 3. | 4. |
|-----------------|-------------|---------|-------------|
| 1,5+1,5+1+2+1+1 | 1,5+1,5+1,5 | 1,5+1,5 | 1,5+1,5+1,5 |