1. (3,5 valores) Considere a seguinte EDO não-linear:
$$x' - 2tx(3+x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
   (a) Use a mudança de variáveis $u = x^{-1}$ para transformar a EDO (1) em:
   $$u' + 6tu = -2t$$
   (b) Resolva a EDO da alínea anterior e, em seguida, escreva a solução geral da equação (1).

2. (3,5 valores) Considere a equação de um oscilador harmónico forçado
$$x'' + x = \cos(2t)$$
   (a) Determine a solução geral x_h da equação homogénea correspondente.
   (b) Determine uma solução particular x_p da forma $x_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$, onde A e B são constantes reais a determinar.
   (c) Escreva a solução geral da equação dada. Justifique.

3. (1 valor) Sem fazer cálculos, escreva a solução geral do seguinte sistema dinâmico linear:
$$\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -x - y \end{cases}$$

4. (4 valores) Considere um sistema dinâmico não-linear dado por
$$\begin{cases} x' &= x(4 - 2x - 2y) \\ y' &= y(9 - 6x - 3y) \end{cases}$$
   (a) Determine os <u>quatro</u> pontos de equilíbrio P do sistema.
   (b) Linearize o sistema em torno de cada um dos pontos P e, em seguida, classifique os pontos P.
   (c) Represente graficamente o diagrama de fase (local) numa vizinhança de cada um dos pontos P.
   (d) Represente graficamente o diagrama de fase (global) e descreva a dinâmica do sistema.

5. (2 valores) Sendo $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, determine a solução dos seguintes problemas de EDPs com condições iniciais:

   (a) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - 2x = 0 \\ u(x,0) = x^2 + 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = 2e^{3x} \end{cases}$

6. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:
$$\begin{cases} f(x) = x^2, & \text{para} \quad x \in [-\pi, \pi[\\ f(x + 2\pi) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   (a) Calcule a série de Fourier de f.
   (b) Represente graficamente a série da alínea anterior. Justifique.
   (c) Use os resultados anteriores para demonstrar
   $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + .. = \frac{\pi^2}{6}$$

7. (3 valores) Considere o seguinte problema misto para a equação de onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(a) Usando o teste M de Weierstrass, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$ é uniformemente convergente.

(b) Usando um formulário, escreva a solução formal do problema.

(c) Calcule $u(2,\pi)$.