Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Licenciatura em Engenharia Informática

Exame :: Parte **I** :: 1 de julho de 2015

Nome ______________________ Número __________

Assinale, com uma cruz, se está a responder a esta parte do exame ☐

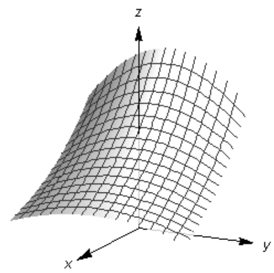
Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

Exercício 1. [6 valores] Indique o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:

a) Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{(x-2)^2+y^2}$, o domínio $\mathcal{D}$ de f é fechado e limitado.

b) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 1$, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x,2x) = 2$.

c) Se f é a função cujo esboço gráfico se representa na figura, $f_x(0,0) = 0$.



d) Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em $(1,1)$ tal que $Df(1,1)(x,y) = x + 2y$, então

$$\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(1,1) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercício 2. [3 valores] Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Exercício 3. [5 valores] Considere

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3-2x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

a) Mostre que f é uma função contínua.

b) Calcule $\nabla f(0,0)$.

c) Mostre que f não é derivável em $(0,0)$.

Exercício 4. [3 valores] Seja $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\boldsymbol{g}(x,y) = \left(x^2 + 2y, e^{xy}\right)$ e $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$ cuja matriz jacobiana no ponto $(2,1)$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a matriz jacobiana de $\boldsymbol{g}$.

b) Use a regra da cadeia para obter a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ no ponto $(0,1)$.

Exercício 5. [3 valores] Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função f definida por $f(x,y) = x^2 + y^3$ no ponto de coordenadas $(3,1,10)$.

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Licenciatura em Engenharia Informática

Exame :: Parte II :: 1 de julho de 2015

Nome ____________________ Número ________

Assinale, com uma cruz, se está a responder a esta parte do exame ☐

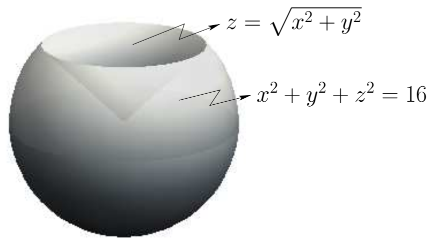
Justifique, convenientemente, todas as suas respostas.

Exercício 1. [6 valores] Indique o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:

a) Se a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ atinge um mínimo absoluto em P, então P também é ponto de mínimo absoluto da função g, definida por $g(x,y) = -f(x,y)$.

b) O volume do sólido representado na figura é dado por

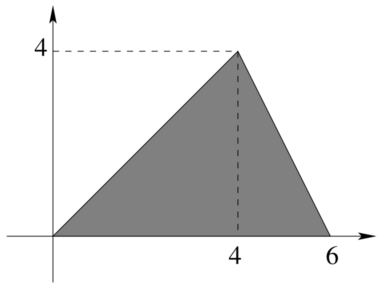
$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_0^4 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta.$$



c) Se C é a curva definida por $C(t) = (t,t)$, $0 \le t \le 1$, então $\int_C xy\, dr = \int_0^1 t^2\, dt$.

d) Se C_1, C_2 e C_3 são curvas orientadas com o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final e $\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, então $\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_3} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$.

Exercício 2. [3 valores] Considere a região plana $\mathcal{R}$ sombreada na figura.



a) Apresente um único integral duplo que represente a área de $\mathcal{R}$.

b) Reescreva o integral da alínea anterior, mudando a ordem de integração.

Exercício 3. [3 valores] Identifique e classifique os pontos críticos da função definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

Exercício 4. [4 valores] Seja $\mathcal{P}$ a pirâmide definida pelos 3 planos coordenados e pelo plano tangente à superfície definida por $xyz = 2$ no ponto de coordenadas $(1,2,1)$.

a) Determine uma equação do plano tangente referido.

b) Defina um integral duplo que represente o volume de $\mathcal{P}$.

Exercício 5. [4 valores] Considere o sólido $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 6\}$.

a) Esboce a região $\mathcal{S}$.

b) Escreva uma expressão integral, usando um sistema de coordenadas adequado, que exprima o volume de $\mathcal{S}$.

c) Calcule o volume de $\mathcal{S}$.