Cálculo I

Licenciatura em Engenharia Informática

Primeiro teste

05/11/2011

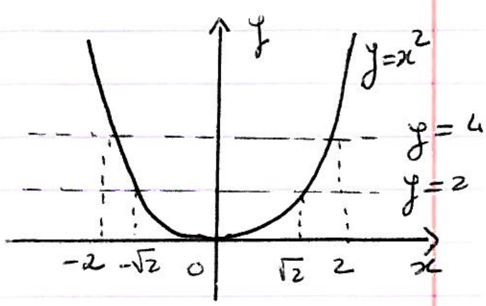
Grupo I

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < 2x^2 - 1 \leq 7\}$

$3 < 2x^2 - 1 \leq 7 \iff$

$4 < 2x^2 \leq 8 \iff 2 < x^2 \leq 4 \iff$

$x \in [-2, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2]$



$A = [-2, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2]$

2. $B = \left([-\sqrt{3}, 0] \cap \mathbb{Q} \right) \cup \{ 1 + 1/n : n \in \mathbb{N} \}$

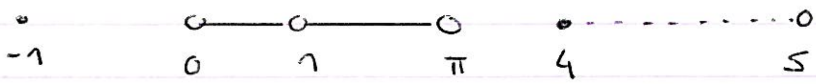
Conjuntos dos majorantes: $[2, +\infty[$

Conjunto dos minorantes: $]-\infty, -\sqrt{3}]$

Supremo: 2 — Máximo: 2

Ínfimo: $-\sqrt{3}$ — Mínimo: não existe

3. $C = \{-1\} \cup \left( ]0, \pi[\setminus \{1\} \right) \cup \left([4, 5[\cap \mathbb{Q} \right)$



$\overset{\circ}{C} =]0, 1[\cup]1, \pi[$ — $\overline{C} = \{-1\} \cup [0, \pi] \cup [4, 5]$

$Fr(C) = \{-1, 0, 1, \pi\} \cup [4, 5]$ — $C' = [0, \pi] \cup [4, 5]$

4.

a) Por exemplo: $\dfrac{\sqrt{2}}{1000^7}$

b) Por exemplo: $\mathbb{Z}$

GRUPO II

EXERCÍCIO 5

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-|x|}{x^3+|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(x^2-1)}{\cancel{x}(x^2+1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-|x|}{x^3+|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x^3-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(x^2+1)}{\cancel{x}(x^2-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Então $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-|x|}{x^3+|x|} = 0$.

EXERCÍCIO 6

A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4-7x-1$ é contínua.

Como $f(0) = -1 < 0$ e $f(-2) = 16+14-1 = 29 > 0$ (ou então, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$), pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x_1 \in]-2,0[$ (ou existe $x_1 \in]-\infty,0[$) tal que $f(x_1)=0$

Como $f(0) = -1 < 0$ e $f(2) = 16-14-1 = 1 > 0$ (ou então, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$), pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x_2 \in]0,2[$ (ou existe $x_2 \in]0,+\infty[$) tal que $f(x_2)=0$.

EXERCÍCIO 7

$$f'(x) = (\text{sen}(\ln x))' = \cos(\ln x)\,\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \left(\cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\right)' = -\text{sen}(\ln x)\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \cos(\ln x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\left(\text{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)\right)$$

EXERCÍCIO 8

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

são funções descontínuas em $x=0$. Mas $f(x)g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é contínua por ser constante.

EXERCÍCIO 9

a) $f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Declive da reta normal ao graf em $(a, f(a))$: $m = -\dfrac{1}{f'(a)}$

isto é, $m = -2\sqrt{a}$.

Então $y = -2\sqrt{a}\,x + b$ é perpendicular à reta tangente ao graf em $(a, \sqrt{a})$. Como queremos que a reta passe nesse ponto, temos de ter

$$\sqrt{a} = -2\sqrt{a}\,.\,a + b \iff b = \sqrt{a}(1+2a)$$

e a equação procurada é

$$y = -2\sqrt{a}\,x + \sqrt{a}(1+2a)$$

b) Para que a reta passe no ponto $(1,2)$, tem de verificar

$$2 = -2\sqrt{a} + \sqrt{a}(1+2a) \iff 2a\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2 = 0$$

Seja $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad a \longmapsto 2a\sqrt{a} - \sqrt{a} - 2$

A função g é contínua, $g(0) = -2 < 0$ e $g(4) = 16 - 2 - 2 = 12 > 0$. Então o Teorema de Bolzano-Cauchy garante-nos que existe $a \in]0,4[$ tal que $g(a) = 0$, como queríamos mostrar.

(Podiam também argumentar que $\lim_{a \to +\infty} g(a) = +\infty$).