Algebra Linear   Resolução do Teste 2010   LEI
Versão B   2010/2011

GRUPO I

1) a)

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - l_1]{E_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1]{E_{31}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{P_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A partir da matriz obtida, podemos deduzir o seguinte:

→ $car(A|b) = car(A) \neq n$, em que $n=3$. Logo, podemos concluir que o sistema é possível indeterminado. $(car(A) = 2)$.

→ Como a 1ª e 2ª colunas possuem pivot e a 3ª não possui, $\underline{x}$ e $\underline{y}$ serão variáveis básicas e z será variável livre.

Temos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 5y - z = 2 \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 5y = 2 + z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y - z \\ y = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} - \frac{3}{5} z \\ y = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo o vector solução é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 - 3/5\, z \\ 2/5 + 1/5\, z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\boxed{(x; y; z) = (9/5; 2/5; 0) + z(-3/5; 1/5; 1)}$

1) b) Para encontrar uma base do núcleo de A, basta considerar a matriz A, aumentada com o vector nulo e resolver o sistema, como foi feito na alínea anterior.

Vem então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2 \leftarrow l_2 - l_1}{\overset{E_{21}(-1)}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1}{\overset{E_{31}(-2)}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\overset{P_{23}}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como já foi concluído na alínea anterior:
→ x e y são váriaveis básicas e z, variável livre.

Vem então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y - z = 0 \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ 5y = z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{5} z \\ y = \frac{1}{5} z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo, obtemos o vector:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \, z \\ 1/5 \, z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $B_{N(A)} = \{(-3/5 ; 1/5 ; 1)\}$.

1) c) Para encontrar uma base de $CS(A)$, basta achar as colunas com pivot. Neste caso, as colunas 1 e 2 são as que possuem pivot, como vimos até agora. Logo vem que:

$$CS(A) = \{(1;1;2)\ (-2;-2;1)\}$$

* <u>Nota</u>: Cada vector que compõe $CS(A)$ é retirado literalmente da matriz original, ou seja é só pegar nas colunas com pivot.

- $\dim CS(A) = car(A) = 2$, logo $CS(A) = \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$

Portanto a afirmação proposta é FALSA.

1) d) $A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1º → Determinar o espectro de A, $\sigma(A)$:

• $(\lambda I_n - A) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

• $|\lambda I_n - A| = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-1) + 2(\lambda-1) = (\lambda^2+\lambda-2)(\lambda-1)+2\lambda-2$

$= \lambda^3 \cancel{-\lambda^2} \cancel{+\lambda^2} - \lambda \cancel{-2\lambda} \cancel{+2} \cancel{+2\lambda} \cancel{-2} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2-1)$

• $|\lambda I_n - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 1$

Logo $\sigma(A) = \{-1; 0; 1\}$

Como os valores próprios calculados são todos distintos, podemos desde já concluir que a matriz é diagonalizável.

2º → Encontrar um vector próprio associado a cada valor próprio determinado:

• $N(-1 I_3 - A) = N\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$\xleftrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{2} l_1]{E_{21}(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - l_1]{E_{31}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$\xleftrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{P_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -3y - 2z = 0 \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = y \\ y = -\frac{2}{3} z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} z \\ y = -\frac{2}{3} z \\ z = z, \ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Logo o vector é: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3\, z \\ -2/3\, z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Portanto, $N(-1 I_3 - A) = \{(-2/3; -2/3; 1)\}$

$\bullet\, N(0I_3 - A) = N\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$\xleftrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - l_1]{E_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1]{E_{31}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$\xleftrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{P_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -5y - z = 0 \\ z = z\,;\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -\frac{1}{5}z \\ z = z\,;\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5}z \\ y = -\frac{1}{5}z \\ z = z\,;\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Logo o vector é: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5\, z \\ -1/5\, z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Portanto, $N(-A) = \{(-2/5\,; -1/5\,; 1)\}$

$\bullet\, N(1I_3 - A) = N\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\xleftrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{P_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1]{E_{31}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + \frac{7}{2}l_2]{E_{32}(7/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = z\,;\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z\,;\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ Logo o vector é: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Portanto, $N(1I_3 - A) = \{(0\,; 0\,; 1)\}$.

- Temos então agora, uma matriz U, constituida pelos vectores próprios encontrados anteriormente:

$U = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/5 & 0 \\ -2/3 & -1/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, que será a matriz diagonalizante.

Temos também a matriz D, constituida pelos valores proprios encontrados, e dispostos na diagonal, sendo todos os elementos que estão fora da diagonal principal, nulos. Portanto:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ será a matriz diagonal.

2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Pelo algoritmo de Gauss-Jordan temos então:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_3 \leftarrow l_3 - l_1}{\overset{E_{31}(-1)}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 - l_2}{\overset{E_{32}(-1)}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \leftarrow l_1 + l_3}{\overset{E_{13}(1)}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{l_1 \leftarrow -l_1 \\ l_2 \leftarrow -l_2 \\ l_3 \leftarrow -l_3}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Portanto, é fácil concluir que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

GRUPO II

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_3 \leftarrow l_3 - l_1}{\overset{E_{31}(-1)}{\longleftrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B

- $\dim N(A) = \text{nul}(A) = 0 \neq 1$ (Falsa)
- $\det(A) = 2 \neq 0$ (Falsa)
- Como $\text{car}(A) = 3$, considerando um vector $b \in \mathbb{R}^3$, $\text{car}(A|b) = \text{car}(A) = n = 3$, logo o sistema será obrigatoriamente possível e determinado $\Rightarrow$ 1 única solução (Verdadeira)

2) • Como V é um subespaço vectorial de dim = 3 vem que $V = \mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}^5$ (Verdadeira)

D • se $(1,1,1,1,0) \in V$ será que existe um α tal que $\alpha(1,1,1,1,0) = (3,3,3,3,0)$?
Sim, $\alpha = 3$, logo é (Verdadeira).

• Todos os vetores nulos pertecem aos espaços vectoriais, logo $(0,0,0,0,0) \in V$

Portanto, todas as afirmações estão correctas.

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1]{E_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

• $\dim N(A) = 0 \neq 2$ (Falsa)

B • Como apenas a 1ª e 2ª coluna têm pivot, nem todas as colunas de A formam uma base de $\mathbb{R}^2$ (Falsa)

• $\dim CS(A) = car(A) = 2$, logo $\dim CS(A) = \mathbb{R}^2$ (Verdadeira)

4) • $T(1,2) = T(1,0) + 2T(0,1) = (-1,0,1) + (2,2,2)$
$= (1;2;3) \neq (1;0;3)$ (Falsa)

B • $T(x,0) = (x,0,x)$? se $x = 1$; (Falsa)
$T(1,0) = (-1;0;1)$, logo $x \neq x \Rightarrow$ impossível

• Por dedução em relação a alínea d), podemos concluir que b) é a resposta certa.

5) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - l_1]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D

- $car(A) = 1$ (Verdadeira)
- $\dim N(A) = nul(A) = 2$ (Verdadeira)

Por dedução em relação à alínea d), podemos concluir que todas as afirmações propostas estão correctas.

6) $(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{P_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1]{E_{31}(-2)}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - l_2]{E_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

- Como o $car(A|b) \neq car(A)$; o sistema é impossível. ($car(A|b) = 1$ e $car(A) = 2$) (Falsa)
- $N(A) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$

D

Logo $N(A) = \{(-1, 0, 1)\} \neq (0,0,0)$ (Falsa)

- $proj_{CS(A)} b = b$. Só se os vectores forem linearmente independentes. Como não o são (linha nula) (Falsa).

Logo, nenhuma das propostas está certa.

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I_n - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

$|\lambda I_n - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - (\lambda - 2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda$

$= \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$

$|\lambda I_n - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2 - \sqrt{8} \vee \lambda = 2 + \sqrt{8}$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I_n - J) = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I_n - J| = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda$$

- Por consequente, ambas as matrizes tem o mesmo polinómio caracteristo: B é verdadeira

D

Como ambas tem o mesmo, ambas tem as mesmas soluções. Soluções essas que correspondem aos valores próprios; logo $\sigma(A) = \sigma(J)$ e C é verdadeira.

Por dedução, concluimos que a alinea D está correcta, na medida em que todas as opções estão certas.

8) • $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ (FALSA)

• $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$ (FALSA)

• $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$?

D

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e $A \neq 0$ e $B \neq 0$ e $AB = 0$ (FALSA)

Logo, todas as opções estão erradas