Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo II
Prova Escrita 2

Eng. Informática
17/06/2010
[2h]

Nome   Número

Justifique convenientemente todas as respostas.

Exercício 1. [1,5 valores] Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^\infty$ relativamente à qual se sabe que $f(1,2) = 3$, que $f_x(1,2) = f_y(1,2) = 0$ e que $f_{xx}(1,2) < 0$, $f_{yy}(1,2) < 0$ e $f_{xy}(1,2) = 0$.

Nestas condições, qual dos seguintes esboços poderá corresponder a um gráfico de nível da função f?

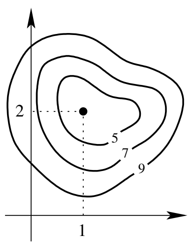


Fig.1

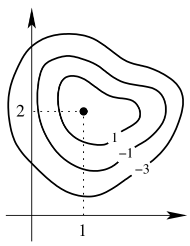


Fig. 2

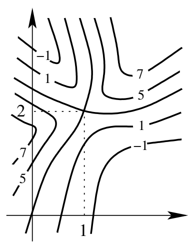


Fig. 3

Exercício 2. [1,5 valores] Sejam $\mathcal{Q}$ o quadrado com vértices nos pontos de coordenadas $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$ e $(4,4)$ e $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

Usando somas de Riemann, encontre uma aproximação por excesso para $\displaystyle\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\, d(x,y)$, partindo $\mathcal{Q}$ em duas partes à sua escolha.

Exercício 3. [3 valores] Considere a função integrável $f : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

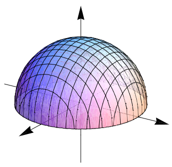
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^2 \int_0^y f(x,y)\, dxdy + \int_2^6 \int_0^{3-\frac{y}{2}} f(x,y)\, dxdy.$$

a) Esboce $\mathcal{R}$, o domínio da função f.

b) Reescreva o integral anterior como um único integral, trocando convenientemente a ordem de integração.

Exercício 4. [3 valores] Considere a semiesfera de raio 1 e centrada na origem, representada na figura.

Complete os seguintes integrais por forma a obter o volume dessa semiesfera,



a) (coord. cartesianas) $V = \int_{-1}^{\cdots\cdots} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\cdots\cdots} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \ldots\ldots\ldots$

b) (coord. esféricas) $V = \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \int_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \ldots\ldots\ldots \, d\theta \, d\varphi \, d\rho$

Exercício 5. [3 valores] Seja $\mathcal{T} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 2 \wedge s \leq t \leq 2\}$.

a) Esboce, no plano XOY, a região $\mathcal{R}$ que corresponde a $\mathcal{T}$, de acordo com a seguinte mudança de variáveis

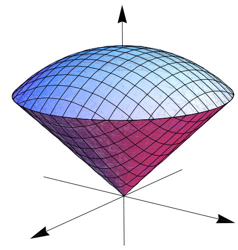
$$\begin{cases} x = s^2 \\ y = t \end{cases}$$

b) Nas condições da alínea anterior verifique que $\iint_{\mathcal{R}} d(x,y) = \iint_{\mathcal{T}} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| d(s,t)$.

Nota: Observe que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ representa a matriz jacobiana da função de mudança de variável $\Psi : R \longrightarrow T$ tal que $\Psi(s,t) = \big((x(s,t), y(s,t)\big) = (s^2, t)$.

Exercício 6. [3 valores] Considere $\mathcal{R} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \ \wedge \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

Usando um sistema de coordenadas conveniente, calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} z \, d(x, y, z)$.



Exercício 7. [5 valores] Considere a função $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\boldsymbol{F}(x, y) = (xy + 1, y + y^2)$ e seja $\mathcal{C}$ o segmento da parábola definida por $y = x^2$ que une o ponto de coordenadas $(-1, 1)$ ao ponto de coordenadas $(1, 1)$.

a) Esboce a curva $\mathcal{C}$ e alguns vectores de $\boldsymbol{F}$ aplicados em pontos de $\mathcal{C}$.

b) Parametrize a curva $\mathcal{C}$ orientando-a no sentido directo (contrário ao dos ponteiros do relógio).

c) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (xy + 1)\, dx + (y + y^2)\, dy$.