



Universidade do Minho  
Dep. de Matemática

Cálculo I  
Exame de Recurso

Eng. Informática

19/02/2009  
[2h 00m]

Nome

Número

**Todas as respostas devem ser justificadas.**  
**Responda aos exercícios 1, 2 e 3 na folha de enunciado.**

Exercício 1. [5 valores] Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

- a) um conjunto  $A$  cuja fronteira seja o intervalo  $[0, 1]$ ;
- b) uma função bijectiva  $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \longrightarrow [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ;
- c) uma função  $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$  não contínua tal que  $g : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$  seja contínua;
- $$x \longmapsto |f(x)|$$
- d) uma função  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  derivável, com derivada não constante, tal que  $f'(x_0) = \pi$  para algum  $x_0 \in ]0, 1[$ ;
- e) uma função  $f : [-2, 2[ \longrightarrow \mathbb{R}$  que seja primitivável mas não derivável.

Exercício 2. [2 valores] Calcule  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(5x) - 1}{2x - \pi}$ .

Exercício 3. [1.5 valores] Calcule o polinómio de Taylor de ordem 3, em torno de 1, da função  $f(x) = e^{2x}$ .

---

Exercício 4. [2 valores] Calcule apenas uma das seguintes primitivas:

a)  $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{(x - 2)^2(x + 1)} dx;$

b)  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

Exercício 5. [4 valores] Determine o valor dos seguintes integrais:

a)  $\int_0^1 (\operatorname{sh}(5x) - 3e^{2x}) dx;$

b)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$  (Sugestão: Utilize a substituição  $x = \cos^2 \theta$ ).

Exercício 6. [4 valores] Considere a região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \geq x, y \leq 2 - x^2\}$ .

a) Apresente um esboço gráfico da região  $D$ .

b) Calcule a área de  $D$ .

Exercício 7. [1.5 valores] Mostre que se  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\int_0^x f(t) dt = xf(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é constante.