Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática
e Aplicações

Noções Topológicas

Exercício 1.1 No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ chamamos *produto interno* de dois vectores $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ ao número real definido por $\sum_1^n x_i\, y_i$ e que representamos, por exemplo, por $x|y$.

a) Verifique que, para quaisquer dois vectores x e y, o seu produto interno goza das seguintes propriedades:

i) $x|y = y|x$.
ii) $(\alpha x + \beta y)|z = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$, $\quad \forall \alpha, \beta$ números reais.
iii) $x|x \geq 0$, sendo que $x|x = 0$ sse $x = 0$.

b) Verifique que a definição (axiomática) de produto interno, introduz, em $\mathbb{R}^2$, uma norma fazendo-se

$$||x|| = +\sqrt{x|x}$$

c) Dados dois vectores, x e y de $\mathbb{R}^n$, não nulos verifique que existe uma ângulo, θ, compreendido entre 0 e π e que satisfaz a seguinte igualdade

$$\cos\theta = \frac{x|y}{||x||\,||y||}$$

Exercício 1.2 Verifique que, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, têm lugar os resultados sintetizados na tabela seguinte:

Conjunto S	$int\, S$	$ext\, S$	$fr\, S$
finito	$\emptyset$	$\mathbb{R}^n \setminus S$	S
de pontos de coordenadas inteiras	$\emptyset$	$\mathbb{R}^n \setminus S$	S
de pontos de coordenadas racionais	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}^n$	$\emptyset$

Exercício 1.3 Seja V um ponto de $\mathbb{R}^2$. Quais as coordenadas de V, sabendo que dista 3 unidades da origem do referencial e que o seu vetor posicional, $\overrightarrow{OV}$, forma um ângulo de 30º com o semieixo positivo das abcissas.

Exercício 1.4 Sejam A, B e C, pontos em $\mathbb{R}^3$, definidos respectivamente por $(3, -1, 2)$, $(-4, 0, 2)$ e $(2, 0, -1)$. Determine o ângulo entre cada par de vetores posicionais destes pontos.

Exercício 1.5 Considere A, B e C, pontos de $\mathbb{R}^3$ definidos respectivamente por $(23, 92, 48)$, $(-60, 0, 0)$ e $(60, 1, -92)$.

a) Qual destes pontos está mais próximo do plano YOZ?

b) Qual dos pontos dados pertence ao plano definido por $y = 0$?

Funções reais de duas variáveis reais: Generalidades

Exercício 1.6 Encontre uma possível definição analítica para uma função real de duas variáveis reais que possa ser representada pela seguinte tabela (na 1ª linha e na 1ª coluna listam-se, respetivamente, as ordenadas e as abcissas):

	-3	-1	0	1	3
-3	18	10	9	10	18
-1	10	2	1	2	10
0	9	1	0	1	9
1	10	2	1	2	10
3	18	10	9	10	18

Exercício 1.7 Define-se por $f(x,t) = te^{-t(5-x)}$ a modelação matemática relativa a uma concentração (em mg/l) de um determinado medicamento no sangue.

Sabendo que $x \in [0,4]$ reporta-se à quantidade (em mg) do medicamento ministrado e t é o tempo (em horas) medido após a sua administração no paciente

a) Qual o domínio da função f, no contexto deste problema?

b) Calcule $f(4,1)$ e interprete o resultado.

c) Interprete $f(2,t)$ e $f(x,3)$.

Exercício 1.8 As figuras são representações gráficas de correspondências de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, cuja legenda poderá estar mal colocada.

Corrija, justificando, a ligação entre cada uma das expressões analíticas e cada uma das representações gráficas.

Obs: Organize-se o estudo em termos de identificação das "funções"(campos escalares), da definição de respetivos domínios e contradomínios, da análise das quádricas, da determinação de traços, do esboço de diagramas de nível e/ou de outros elementos adequados ao caso particular.

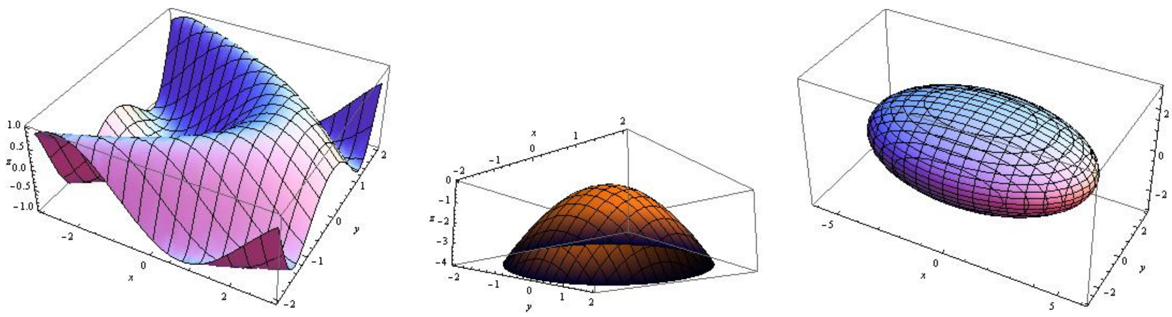

Figura 1: $z = 3x - y$? $\qquad$ $z = \cos x + \cos y$? $\qquad$ $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$?

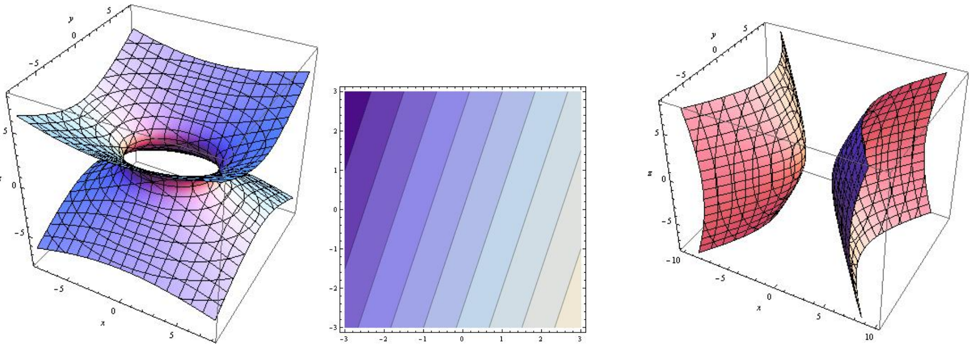

Figura 2: $z = \operatorname{sen}(x + y^2)$? $\qquad z = \log|y - x^2|$? $\qquad \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$?

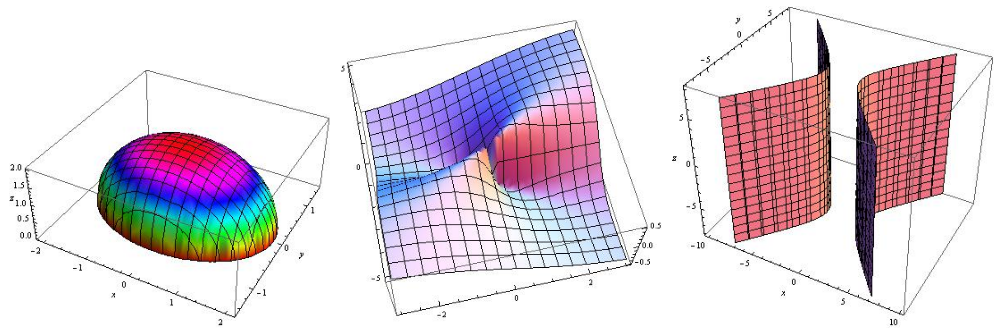

Figura 3: $z = \sinh x$? $\qquad z = 8 - x \log y$? $\qquad z = -x^2 - y^2$?

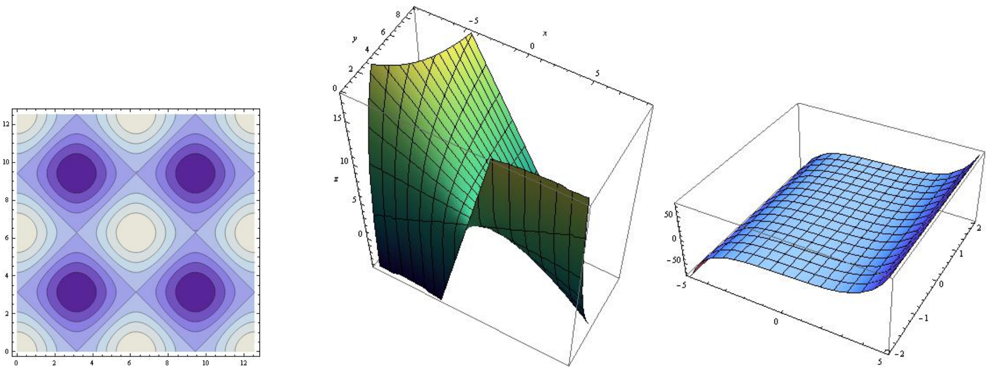

Figura 4: $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$? $\qquad z = e^{1-x^2+y^2}$? $\qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$?

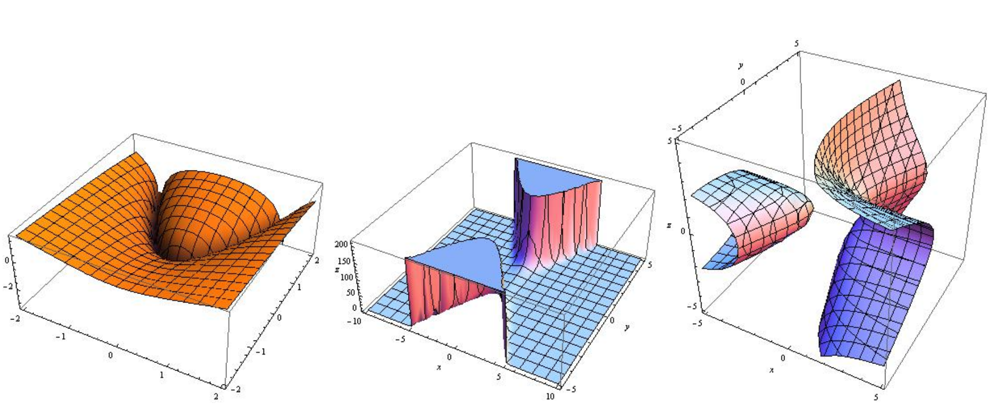

Figura 5: $xz^2 + 2xy - y^2 = 4$? $\qquad z = \frac{xy}{x^2+y^2}$? $\qquad \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$?