Valores e Vectores Próprios

Def.: Seja A uma matriz quadrada. Se um vector $x \neq 0$ e um número λ são tais que $Ax = \lambda x$, então diz-se que x é vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ veja-se que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u}$

i.e., $Au = 2u$ Logo $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 2 de A

NOTA: Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio

mas, a um valor próprio estão associados uma infinidade de de vectores próprios.

Se x é vector próprio de A associado ao valor próprio λ, então

$x \neq 0$ e $Ax = \lambda x$. Mas, considerando αx $(\alpha \neq 0)$

tem-se $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$, ou seja,

αx é também vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Teorema: Seja A uma matriz quadrada. Então, λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$

Dem.: λ é valor próprio de A sse

$$Ax = \lambda x \quad \text{para algum } x \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$Ax - \lambda x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{(A - \lambda I)x = 0}_{\text{Sistema homogéneo com soluções além da nula}} \quad \text{para algum } x \neq 0$$

Por um resultado anterior (cap. III), a matriz $A-\lambda I$ do sistema não é invertível. Mas uma matriz é não invertível (ou singular) se e só se o seu determinante é nulo.

> Os valores próprios de uma matriz A são as raízes da equação
>
> $$\underbrace{\det(A-\lambda I)}_{\text{polinómio característico de } A} = 0 \rightarrow \text{Equação Característica de } A$$

Ex.: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eq. característica: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}+3\det\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+3\left(0-3(2-\lambda)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)-9(2-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4)=0$$

Os valores próprios da matriz A são as raízes da equação característica $(2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4)=0$, i.e., $\lambda=2$, $\lambda=-2$ e $\lambda=4$.

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, o seu polinómio característico é de grau n. Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico, pelo que, A terá n valores próprios.

Se um valor próprio ocorre k vezes diz-se que tem multiplicidade k. Se $k=1$ trata-se de um valor próprio simples. Se $k>1$ trata-se de um valor próprio múltiplo.

Da definição decorre que, se λ é valor próprio de A, os vectores próprios associados a A verificam

$$(A-\lambda I)\,\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{x}\neq\underset{\sim}{0}$$

Ex.: Determinar os valores próprios das seguintes matrizes

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(B - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)\det\begin{pmatrix} -7 & 5-\lambda \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)\big((5-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)\times 6\big) - \big(-7(-2-\lambda) - (-6)(-1)\big) - \big(-7\times 6 - (5-\lambda)(-6)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)(-10-5\lambda+2\lambda+\lambda^2+6) - (14+7\lambda-6) - (-42+30-6\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) - (7\lambda+8) - (-6\lambda-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-3\lambda^2} + 9\lambda + 12 - \lambda^3 + \cancel{3\lambda^2} + 4\lambda - 7\lambda - 8 + 6\lambda + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0$$

Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 12 & 16 \\ -2 & \downarrow & 2 & -4 & -16 \\ \hline & -1 & 2 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda = -2$ é uma raiz

$$-\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(-\lambda^2+2\lambda+8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \ \vee \ -\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{-2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2+6}{-2} \vee \lambda = \frac{-2-6}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \ \vee \lambda = 4$$

valores próprios de B : $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ocorre duas vezes} \to \text{multiplicidade } \underline{\underline{2}}.}}{-2}$ e 4

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Como C é uma matriz triangular, os valores próprios correspondem aos el.tos da diagonal. Neste caso, 1 e 7

1 ocorre $\underline{\underline{3}}$ vezes $\to$ multiplicidade $= 3$

Ex: Calcular os vectores próprios associados ao valor próprio $\underset{=}{2}$ da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior

$$(A - 2I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 \text{ é qualquer valor real } (\neq 0) \end{cases}$

pois $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$

Tem-se então $\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$

Logo, todos os vectores que se possam escrever da forma $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq 0)$

são vectores próprios de $\underset{=}{A}$ associados ao valor próprio $\underset{=}{2}$.

Propriedades: Sejam $\underset{=}{A}$ uma matriz quadrada, $\underset{=}{\lambda}$ um valor próprio de A e $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado ao valor próprio λ de $\underset{=}{A}$.

(i) Se $\underset{=}{\alpha}$ é nº diferente de zero, $\alpha\lambda$ é um valor próprio da matriz αA e $\underset{\sim}{x}$ é um vector próprio associado.

(ii) Se $\underset{=}{p}$ é um nº, $\lambda - p$ é valor próprio da matriz $A - pI$ e $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado.

(iii) λ^2 é valor próprio de A^2.

(iv) Se $\underset{=}{A}$ é invertível, então $\lambda \neq 0$ e reciprocamente. λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} e $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado.

Dem.: Se $\lambda = 0$ então $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$, pelo que, $\underset{=}{A}$ é singular

$A\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x} \Rightarrow (\lambda^{-1}A^{-1})A\underset{\sim}{x} = (\lambda^{-1}A^{-1})\lambda\underset{\sim}{x} \Rightarrow \lambda^{-1}(A^{-1}A)\underset{\sim}{x} = \lambda^{-1}\lambda A^{-1}\underset{\sim}{x} \Rightarrow \lambda^{-1}I\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{x} \Rightarrow A^{-1}\underset{\sim}{x} = \lambda^{-1}\underset{\sim}{x}$

Teorema: A e A^T têm os mesmos valores próprios.

Dem.: $\det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)^T = \det(A^T-\lambda I)$

Teorema: Se $\underline{A}$ é uma matriz diagonal ou triangular, os valores próprios de $\underline{A}$ são os elementos da diagonal.

→ O produto dos $\underline{n}$ valores próprios de uma matriz de ordem $\underline{n}$ é igual ao determinante da matriz

→ A soma dos $\underline{n}$ valores próprios de uma matriz de ordem $\underline{n}$ é igual à soma dos $\underline{n}$ elementos diagonais.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (exemplo anterior)

valores próprios: $2, -2$ e 4

$$2\times(-2)\times 4 = -16 \longrightarrow \det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2+3(0-6) = 2-18 = -16$$

$$2+(-2)+4 = \boxed{4} \longrightarrow \text{soma dos el}^{\text{tos}}\text{ diagonais} = 1+2+1 = \boxed{4}$$

Teorema: Se $\underset{\sim}{x}_1$ e $\underset{\sim}{x}_2$ são vectores próprios de uma matriz $\underline{A}$, associados aos valores próprios λ_1 e λ_2, respectivamente, tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\underset{\sim}{x}_1$ e $\underset{\sim}{x}_2$ são linearmente independentes.

Dem.: Consideremos a combinação linear nula $\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{0}$ (*)

queremos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Multiplicando ambos os membros de (*) por $\underline{A}$:

$$A(\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2) = A.\underset{\sim}{0} \Rightarrow \alpha_1(A\underset{\sim}{x}_1) + \alpha_2(A\underset{\sim}{x}_2) = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 \underset{\sim}{x}_1) + \alpha_2(\lambda_2 \underset{\sim}{x}_2) = \underset{\sim}{0}$$

De (*) tem-se, também, $\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 = -\alpha_2 \underset{\sim}{x}_2$, donde

$$\lambda_1(-\alpha_2 \underset{\sim}{x}_2) + \alpha_2 \lambda_2 \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{0} \Longrightarrow \alpha_2 = 0$$

por hipótese $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \underset{\sim}{x}_2 \neq \underset{\sim}{0} \end{array} \right.$

Assim, por (*), tem-se $\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 = 0 \underset{x_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \alpha_1 = 0$

Vectores próprios de uma matriz associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.

Definição (Matrizes Semelhantes):

Sejam $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ duas matrizes quadradas de ordem $\underline{\underline{n}}$. Se existe uma matriz $\underline{\underline{P}}$ de ordem $\underline{\underline{n}}$, tal que,

$$B = P^{-1} A P$$

então $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ dizem-se <u>matrizes semelhantes</u>.

Teorema: Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz quadrada de ordem $\underline{\underline{n}}$. Seja $\underline{\underline{P}}$ uma matriz invertível de ordem $\underline{\underline{n}}$. Então λ é valor próprio de $\underline{\underline{A}}$, sendo $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado, se e só se, λ é um valor próprio de $P^{-1}AP$ com vector próprio associado $P^{-1}\underset{\sim}{x}$.

Dem.: Como $\underline{\underline{P}}$ é invertível, se $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ então $P^{-1}\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ e vice-versa.

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x} \Rightarrow P^{-1}A\underset{\sim}{x} = P^{-1}\lambda\underset{\sim}{x} \Rightarrow P^{-1}A(PP^{-1})\underset{\sim}{x} = \lambda P^{-1}\underset{\sim}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}\underset{\sim}{x}) = \lambda(P^{-1}\underset{\sim}{x})$$

Matrizes semelhantes têm: o mesmo determinante, a mesma característica, a mesma equação característica e os mesmos valores próprios

Ex: Voltando à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior, considere-se

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (verificar!) e

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Como A e $P^{-1}AP$ são matrizes semelhantes, então têm os mesmos valores próprios. Facilmente se vê que os valores próprios de $P^{-1}AP$ são $-2, 2$ e 4 (matriz diagonal). Logo $-2, 2$ e 4 também são valores próprios de A (confirma o que já tínhamos obtido anteriormente).

Teorema: Matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.

dem: Sejam A e B duas matrizes semelhantes. Então existe uma matriz invertível P, tal que, $B = P^{-1}AP$

Vejamos que têm os mesmos valores próprios, ou seja, que têm o mesmo polinómio característico:

$$\det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda I) = \det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P)$$
$$= \det(P^{-1}(A-\lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(A-\lambda I)\det(P)$$
$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A-\lambda I)\det(P) = \det(A-\lambda I)$$

//

Mas, duas matrizes que tenham os mesmos valores próprios não têm de ser semelhantes

Ex: As matrizes $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ têm os mesmos valores próprios mas não são semelhantes, i.e., não existe nenhuma matriz invertível P, tal que, $B = P^{-1}AP$

Alguns conceitos mais:

O conjunto dos valores próprios de uma matriz A designa-se espectro de A e denota-se $esp(A)$ ou $\lambda(A)$.

O subespaço vectorial formado pelos vectores próprios de uma matriz $\underline{A}$ associados ao valor próprio λ, incluindo o vector nulo, designa-se subespaço próprio associado ao valor próprio λ e denota-se U_λ, i.e.,

$$U_\lambda = \{ \underset{\sim}{x} : A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x} \}, \text{ ou ainda, } U_\lambda = \{ \underset{\sim}{x} : (A-\lambda I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \}$$

À dimensão de U_λ chama-se multiplicidade geométrica do valor próprio λ.

Teorema: A dimensão de um subespaço próprio U_λ, não excede a multiplicidade algébrica de λ.

Ex.: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 5$ (cada um com multiplicidade algébrica 1, i.e., cada um deles simples)

$esp(A) = \lambda(A) = \{-1, 5\}$

Subespaço próprio associado a $\lambda = -1$:

$$(A+I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \quad (\ldots) \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ - \end{cases}$$

$U_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ e $\dim(U_{\lambda=-1}) = 1$

Subespaço próprio associado a $\lambda = 5$

$$(A - 5I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \quad (\ldots) \quad \{ x_1 = x_2$$

$U_{\lambda=5} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ e $\dim(U_{\lambda=5}) = 1$

Seja $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tem-se $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ e

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ → matriz diagonal semelhante a $\underset{\sim}{A}$.