

Programação Linear - Introdução

Investigação Operacional

J.M. Valério de Carvalho
`vc@dps.uminho.pt`

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

7 de fevereiro de 2015

- Definições de Investigação Operacional
- Metodologia da Investigação Operacional
- Modelos de Programação Linear
- Exemplos
- Programação Linear: algumas áreas de aplicação
- Programação Linear: alguns Marcos

Definições de Investigação Operacional

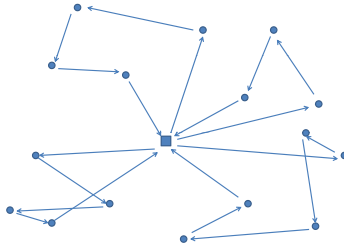
- A Investigação Operacional no sentido mais lato pode ser caracterizada como sendo a aplicação de métodos, técnicas e ferramentas científicas a problemas que envolvem a operação de sistemas, por forma a prover os responsáveis pelo controlo da operação com soluções óptimas para os problemas (*Churchman, Ackoff, Arnoff, 1957*).
- A Investigação Operacional pode ser descrita como uma abordagem científica da tomada de decisões que envolvem a operação de um sistema organizacional (*Hillier, Lieberman, 1974*).
- A Investigação Operacional é uma abordagem científica de resolução de problemas de gestão (*Wagner, 1975*).

- Identificar o problema a abordar.
- Observar o sistema e recolher dados.
- Formular um modelo matemático do problema.
- Verificar e validar o modelo.
- Seleccionar uma decisão adequada.
- Implementar e avaliar.

Exemplo: problema de planeamento de rotas de veículos

Objectivo

- Dados um conjunto de veículos com capacidades e
- um conjunto de clientes com procuras e janelas temporais de visita, encontrar a solução de custo mínimo, em que haja
- um conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito,
- sendo cada cliente visitado por um único veículo.



Construção de modelos de Investigação Operacional (IO)

Após identificar o problema, a observação do sistema permite reconhecer:

- a forma de representar uma decisão admissível,
- as regras gerais que determinam quais as decisões admissíveis, e
- a forma de atribuir um valor a cada decisão.

Modelos de Investigação Operacional

- Um modelo matemático identifica as decisões admissíveis.
- Para associar um valor a cada decisão, há uma *medida de eficiência*,
- que permite identificar a(s) melhor(es) decisão(ões).

Os modelos de *Programação Linear* são os mais usados em IO:

- *programação* é usado no sentido de planeamento, como em programação de actividades, e
- as funções envolvidas nos modelos são *lineares*.

Programação Linear: elementos dos modelos

Variáveis de decisão:

- são incógnitas que associamos às decisões (soluções) admissíveis.
- e.g., x_1 - quantidade de produto 1 a fabricar numa semana.

Parâmetros:

- são dados do sistema que não podem ser alterados.
- e.g., volume de mão-de-obra disponível por semana.

Programação Linear: estrutura dos modelos

Restrições:

- definem o conjunto de decisões (soluções) admissíveis.
- Uma restrição exprime uma relação entre uma **função linear** das variáveis de decisão e uma constante (e.g., um parâmetro).
- e.g., $3x_1 + 2x_2 \leq 120$.

Função objectivo:

- (ou medida de eficiência) é uma **função linear** das variáveis de decisão que associa um valor a cada solução do conjunto de soluções admissíveis.
- e.g., a função linear $12x_1 + 10x_2$ associa um valor a cada solução.

Fim em vista:

- determinar a(s) solução(ões) que optimiza(m) a função objectivo.
 - Maximizar lucro
 - Minimizar custo

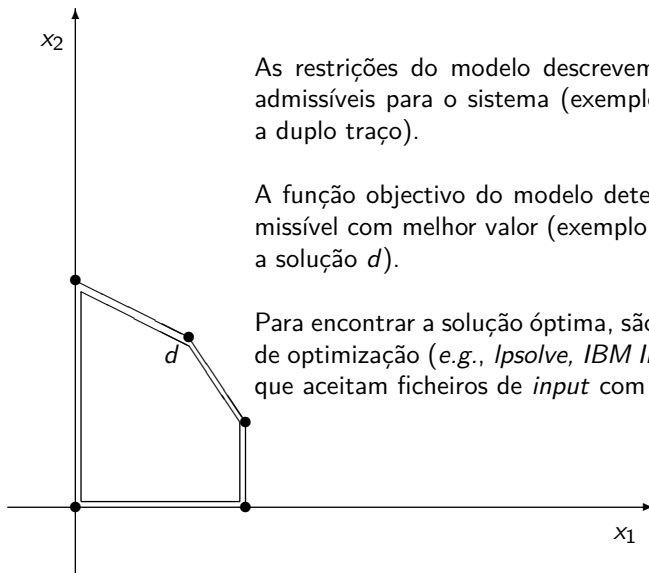
Programação linear: forma geral do modelo

- Problema de optimização (ou maximização ou minimização) de uma função objectivo linear sujeita a restrições lineares:

$$\begin{aligned} \{\max, \min\} z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeito a} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \in R_{\leq} \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \forall i \in R_{\geq} \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \forall i \in R_{=} \\ &x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

- z : função objectivo
- $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$: variáveis de decisão.
- $c_1, \dots, c_j, \dots, c_n$: coeficientes da função objectivo $\sum_{j=1}^n c_j x_j$.
- b_i : coeficiente do lado direito das restrições, indexado por i
- $x_j \geq 0$: restrições de não-negatividade, para todos os j .

Programação Linear: modelo e resolução do modelo



As restrições do modelo descrevem **todas** as soluções admissíveis para o sistema (exemplo: região delimitada a duplo traço).

A função objectivo do modelo determina a solução admissível com melhor valor (exemplo: a solução óptima é a solução d).

Para encontrar a solução óptima, são usadas ferramentas de optimização (e.g., *Ipsolve*, *IBM ILOG Cplex*, *Gurobi*), que aceitam ficheiros de *input* com formatos definidos.

Programação Linear: elementos dos modelos (exemplos)

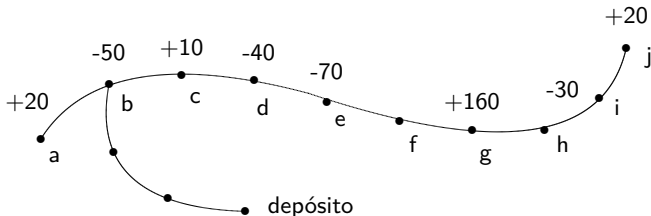
- Variáveis de decisão:
 - quantidades a produzir de um artigo
 - rotas a percorrer por veículos
 - fluxos a enviar pelos arcos duma rede
 - actividades (ou projectos) a seleccionar
 - instantes para iniciar as actividades
- Parâmetros
 - recursos disponíveis
 - número de unidades pedidas por um cliente
 - tempo de processamento de uma actividade
- Restrições:
 - relação entre a função que exprime a quantidade de um recurso que as actividades consomem e o recurso disponível
 - relação entre a função que exprime a quantidade de um bem que as actividade produzem e a procura a satisfazer
 - relação que traduz as regras de funcionamento do sistema (e.g., conservação de fluxo, precedência entre operações)

Exemplo 1: transporte de terras

- As obras de terraplanagem representam uma parte significativa dos custos de construção de vias de comunicação.
- Grandes volumes de terra devem ser deslocados de zonas de empréstimo para zonas de depósito para obter os nivelamentos desejados.
- Os custos de transporte de terra são aproximadamente proporcionais à distância percorrida.
- Objectivo: estabelecer o plano de deslocação de terra para minimizar custos de terraplanagem.

Exemplo 1: transporte de terras (cont.)

- Os pontos a, b, \dots, j encontram-se distanciados entre si de 10 Km.
- As quantidades associadas aos pontos indicam os volumes de terra a deslocar (em milhares de m^3), sendo as zonas de empréstimo e de depósito assinaladas pelos sinais + e -, respectivamente.
- Pode ainda recorrer-se a uma zona de depósito, situada fora do traçado da via, a uma distância de 30 Km do ponto b .



- Quais as variáveis de decisão? Quais os dados? Quais as restrições?

Exemplo 1: transporte de terras - elementos dos modelos

Variáveis de decisão:

- volume de terra a transportar desde cada zona de empréstimo para cada zona de depósito.

Parâmetros:

- volume de terra a deslocar de cada zona;
- distâncias;
- custo de transporte por m^3 e por Km.

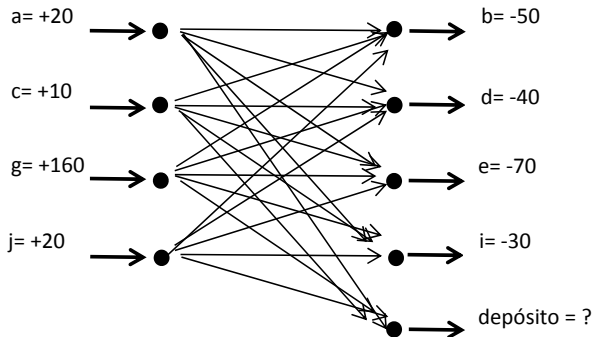
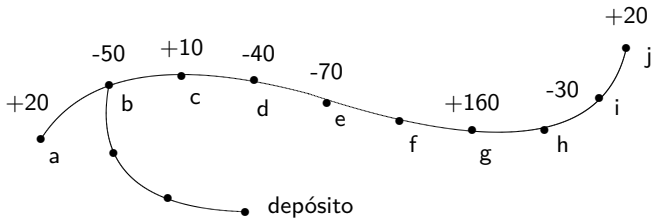
Restrições:

- a soma dos volumes de terra que saem de uma dada zona de empréstimo para cada zona de depósito perfaz o volume a deslocar;
- a soma dos volumes de terra que chegam a uma dada zona de depósito de cada zona de empréstimo perfaz o volume a depositar;

Função objectivo:

- função de custo de transporte.

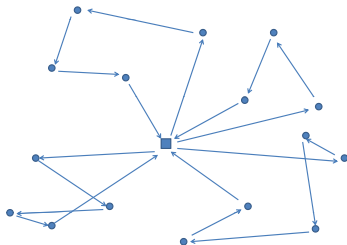
Exemplo 1: transporte de terras - esboço de modelo



Exemplo 2: planeamento de rotas de veículos

Objectivo

- Dados um conjunto de veículos com capacidades e
- um conjunto de clientes com procuras e janelas temporais de visita, encontrar a solução de custo mínimo, em que haja
- um conjunto de rotas, todas começando e terminando no depósito,
- sendo cada cliente visitado por um único veículo.



- Quais as variáveis de decisão? Quais os dados? Quais as restrições?

Exemplo 2: planeamento de rotas de veículos - elementos

Há modelos diferentes consoante a escolha das variáveis de decisão.

Variáveis de decisão (um exemplo):

- cada rota (uma sequência de arcos) admissível.

Parâmetros:

- carga para cada cliente; capacidade dos veículos;
- distâncias e tempos de viagem;
- ...

Restrições:

- carga não excede a capacidade do veículo;
- cada cliente é visitado por um único veículo na sua janela temporal;
- ...

Função objectivo:

- função de custo de transporte.

Programação linear: algumas áreas de aplicação

- Logística e distribuição
- Telecomunicações e redes de comunicação
- Gestão da cadeia de abastecimento
- Gestão de serviços de saúde
- Planeamento da operação de companhias de transporte (aéreo, caminho de ferro, urbano)
- Planeamento da produção
- Gestão de projectos
- Corte e empacotamento
- Gestão de pessoal
- Gestão de florestas
- ...

Programação linear: alguns marcos

- Gauss: Eliminação de Gauss para resolver um sistema de equações
 - Kantorovich (1930) : atribuição eficiente de recursos, e.g., modelos de planeamento industrial e modelos de corte (galardoado com o prémio Nobel (1975) juntamente com Tim Koopmans)
 - Dantzig (1947) : método Simplex
 - Khachian (1979) : método do elipsóide
 - Karmarkar (1984) : método de pontos interiores
-
- Simplex algorithm: one of the top ten algorithms of the 20th century (The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms, Barry A. Cipra, from SIAM News, Volume 33, Number 4)

- A programação linear é uma ferramenta de uso generalizado na indústria e nos serviços.
- A sua utilização traduz-se em economias muito relevantes.

Resultados de aprendizagem

- Definir a Investigação Operacional
- Descrever a metodologia da investigação operacional
- Identificar a estrutura dos modelos de programação linear
- Desenvolver a capacidade de analisar sistemas complexos e de criar modelos para os descrever.
 - identificar alternativas de decisão e objectivos em problemas de decisão;
 - identificar variáveis de decisão;
 - identificar parâmetros (dados)

Fim