Apontamentos de

Complementos de Análise Matemática

J. Figueiredo, C. Ribeiro

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia
Universidade do Minho

2008/2009

Conteúdo

Estes apontamentos são baseados nos livros:

Braun M., Differential Equations and Their Applications
Springer-Verlag, 1992

Pinsky M.A., Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications
McGraw-Hill International Editions, 1998

Ross S.L., Differential Equations
John Wiley, 1984

Parte I

Equações Diferenciais Ordinárias

Capítulo 1

Introdução às equações diferenciais

1.1 Classificação de equações diferenciais

Definição 1 *Uma equação envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes (as incógnitas) em ordem a uma ou mais variáveis independentes designa-se* ***equação diferencial****.*

Exemplo 1 *São equações diferenciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} + v\frac{dv}{dt} = \cos t \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u + v \tag{1.4}$$

Definição 2 *Uma equação diferencial envolvendo derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma variável independente designa-se* ***equação diferencial ordinária*** *(EDO).*

Exemplo 2 *As equações (1.1) e (1.2) são exemplos de equações diferenciais ordinárias.*

Definição 3 *Uma equação diferencial envolvendo derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a mais do que uma variável independente designa-se* ***equação diferencial parcial*** *(EDP).*

Exemplo 3 *As equações (1.3) e (1.4) são exemplos de equações diferenciais parciais.*

As equações diferenciais, quer ordinárias quer parciais, são ainda classificadas de acordo com a ordem da derivada de ordem mais elevada que nelas figura.

Definição 4 *A ordem da derivada de ordem mais elevada que figura numa equação diferencial designa-se* ***ordem da equação diferencial****.*

Exemplo 4 *A equação (1.1) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. A equação (1.2) é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem. As equações (1.3) e (1.4) são equações diferenciais parciais de segunda e primeira ordem, respectivamente.*

Podemos ainda classificar as equações diferenciais ordinárias quanto à sua linearidade.

Definição 5 *Uma* ***equação diferencial ordinária linear*** *de ordem n, na variável dependente y e na variável independente x, é uma equação que é, ou pode ser expressa, da seguinte forma*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x), \tag{1.5}$$

onde a função $a_0(x)$ não é identicamente nula.

Exemplo 5 *Constituem exemplos de equações diferencias ordinárias lineares*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + xe^x\frac{dy}{dx} + x^3y = \cos x.$$

Note-se que: (1) tanto y como as suas derivadas são sempre de primeiro grau; (2) não surgem produtos de y ou das suas derivadas; (3) não figuram funções transcendentes de y ou das suas derivadas.

Definição 6 *Uma* ***equação diferencial ordinária não linear*** *é uma equação diferencial ordinária que não pode ser expressa na forma (1.5).*

Exemplo 6 *São equações diferenciais ordinárias não lineares, supondo $y = y(x)$,*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + y = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y = 0. \tag{1.8}$$

$$\frac{dy}{dx} + e^y = 0, \tag{1.9}$$

Na equação (1.6) a não linearidade provém do termo y^2; na equação (1.7) é devida ao produto $y\,dy/dx$; na equação (1.8) é causada pelo termo $(dy/dx)^2$; finalmente, na equação (1.9) é devida à função exponencial.

Note-se que no caso das equações diferenciais de primeira ordem, estas podem ser escritas de três formas equivalentes: $dy/dx = f(x,y)$, $dx/dy = 1/f(x,y)$ e $f(x,y)\,dx - dy = 0$. Esta característica faz com que em muitos casos possamos escolher a variável independente que seja mais vantajosa na óptica da análise e resolução da mesma. Em particular, pode acontecer que determinada equação diferencial de primeira ordem não seja linear para determinada escolha da variável independente, mas passe a ser linear se a rescrevermos considerando outra variável independente. Por exemplo, a equação diferencial não-linear (1.9) também se pode escrever como

$$\frac{dx}{dy} = -e^{-y},$$

onde supomos $x = x(y)$. Esta equação diferencial já é linear (na variável dependente x). Voltaremos a tratar esta questão posteriormente quando abordarmos este tipo de equação diferencial de forma mais pormenorizada.

Exercícios

Exercício 1 *Classifique cada uma das equações diferenciais como ordinárias ou parciais; mencione a ordem de cada equação; averigúe, no caso de se tratar de uma equação diferencial ordinária, se esta é linear.*

(*a*) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = x^2e^x + \cos x.$

(*b*) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6y = x^2 \operatorname{sen} x.$

(*c*) $\triangle u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

(*d*) $\dfrac{du}{dt} + u^2 = t.$

(*e*) $\dfrac{d^2v}{dx^2} - \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2 + v = 3x + 1.$

(*f*) $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 0.$

(*g*) $\dfrac{ds}{dt} + t\cos s = 0.$

(*h*) $x^2dy + y^2dx = 0.$

(*i*) $\nabla^4 v \equiv \dfrac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 v}{\partial y^4} = 0.$

1.2 Soluções de equações diferenciais

Consideremos agora o conceito de **solução de uma equação diferencial ordinária** de ordem n.

Definição 7 *Considere-se a equação diferencial ordinária de ordem n*

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0, \tag{1.10}$$

onde F é uma função real dos seus $n+2$ argumentos. Dizemos que uma solução desta equação diferencial é qualquer relação (implícita ou explícita) entre as variáveis x e y, que não contenha *derivadas, que verifique a equação (1.10). Assim, por exemplo, a função $y(x) = x$ é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$$

Vejamos agora o que distingue as soluções explícitas das soluções implícitas.

1. *Seja $f(x)$ uma função real, definida para todo x pertencente a um intervalo real aberto I, que tenha derivada de ordem n - e consequentemente também derivadas de ordem inferior a n - para todo $x \in I$. A função f designa-se uma **solução explícita** da equação diferencial (1.10) em I se satisfaz as condições:*

   (a) $F\left[x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right]$ *está definida para todo* $x \in I$;

   (b) $F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0$ *para todo* $x \in I$.

   Ou seja, a substituição de $f(x)$ e das suas derivadas em (1.10) reduz essa equação a uma identidade em I.

2. *Uma relação $g(x, y) = 0$ diz-se uma **solução implícita** da equação (1.10) se define pelo menos uma função real $f(x)$ num intervalo aberto I tal que $f(x)$ é uma solução explícita de (1.10) em I.*

Podemos assim dizer que uma solução da equação diferencial (1.10) é uma relação - explícita ou implícita - entre x e y que satisfaz a referida equação.

Exemplo 7 *A função $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.11}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Solução. *Primeiro, note-se que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Depois,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x - 3 \operatorname{sen} x, \\ f''(x) &= -2 \operatorname{sen} x - 3\cos x, \end{aligned}$$

pelo que substituindo y por $f(x)$ e d^2y/dx^2 por $f''(x)$ em (1.11) obtém-se a identidade

$$(-2 \operatorname{sen} x - 3\cos x) + (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x) = 0$$

que é válida para todo x real. Portanto, a função $f(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial (1.11) para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 8 *A função $g(x) = 2x^{1/2}$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}$$

apenas no intervalo $I =]0, +\infty[$.
Solução. *Neste caso tem-se $dg/dx = x^{-1/2}$ conforme pretendido. No entanto, $D_g = \{x : x \geq 0\}$ e $D_{g'} = \{x : x > 0\}$, pelo que $I = D_g \cap D_{g'} =]0, +\infty[$.*

Problema 1 *A função $h(x) = \ln x$ é uma solução explícita da equação diferencial de primeira ordem $dy/dx = x^{-1}$? Em que intervalo da recta real?*

Problema 2 *Determine em que intervalo da recta real é que a função $\theta(x) = x^3 + k_1 x + k_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, é uma solução explícita da equação diferencial de segunda ordem $x^{-1}y'' - 6y = 0$.*

Exemplo 9 *A relação $xy = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem*

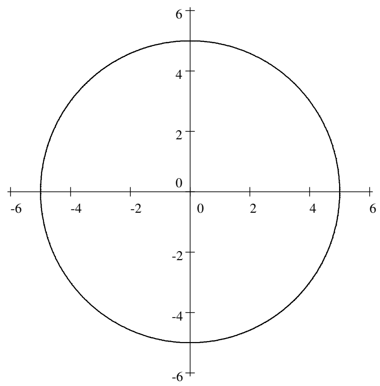
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \tag{1.12}$$

no intervalo $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Solução. *De facto, $xy = 1$ define uma função real $f(x) = 1/x$ para todo $x \in I$. Facilmente se conclui que $f(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial (1.12) em I.*

Exemplo 10 *A relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem*

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.13}$$

no intervalo I definido por $-5 < x < 5$.



Representação gráfica da função $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Solução. *De facto, $x^2 + y^2 - 25 = 0$ define duas funções reais*

$$f_1(x) = +\sqrt{25 - x^2} \qquad e \qquad f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

para todo $x \in I$. Tanto $f_1(x)$ como $f_2(x)$ são soluções explícitas da equação diferencial (1.13) em I. Vejamos que assim é para a função $f_1(x)$:

$$f_1(x) = +\sqrt{25 - x^2} \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

para todo $x \in I$. Substituindo $f_1(x)$ e $f_1'(x)$ em (1.13) obtém-se a identidade

$$x + \sqrt{25 - x^2} \times \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0,$$

isto é, $0 = 0$ *conforme requerido. A demonstração para* $f_2(x)$ *é similar.*

Note-se que se o intervalo proposto contivesse pontos fora do intervalo $]-5, 5[$ *então a relação* $x^2 + y^2 - 25 = 0$ *não seria uma solução implícita da equação diferencial dada nesse intervalo, pois tanto* $f_1'(x)$ *como* $f_2'(x)$ *não existem em* $]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$.

Problema 3 *A relação* $y^2 - x^2 = 0$ *é uma solução implícita da equação diferencial de primeira ordem* $dy/dx = yx^{-1}$*? Em que intervalo da recta real?*

Exemplo 11 *Considere-se agora a relação* $x^2 + y^2 + 25 = 0$*. Derivando implicitamente esta relação em ordem a* x *obtém-se*

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Substituindo a expressão de dy/dx *na equação (1.13) obtém-se*

$$x + y\left(-\frac{x}{y}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = 0.$$

Assim, podemos afirmar que a relação $x^2+y^2+25 = 0$ ***verifica formalmente*** *a equação (1.13). Poder-se-á deduzir que* $x^2 + y^2 + 25 = 0$ *é uma solução implícita da equação dada? A resposta é negativa. Na realidade,* $x^2 + y^2 + 25 = 0$ *parece ser uma solução implícita da equação diferencial pois verifica-a formalmente, conforme vimos, mas é ainda necessário que defina pela menos uma função real que seja solução explícita da equação dada no intervalo* I*. Vejamos,*

$$x^2 + y^2 + 25 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{-25 - x^2}.$$

Note-se desde já que esta relação também verifica formalmente a equação (1.13). No entanto, ela não faz sentido para nenhum valor real de x*, e em particular para nenhum* $x \in I$*, pelo que* $x^2 + y^2 + 25 = 0$ *não define nenhuma função real nesse intervalo. Assim,* $x^2 + y^2 + 25 = 0$ *não é uma solução implícita da equação diferencial dada, embora a verifique formalmente. Em todo caso, e conforme veremos mais adiante, pode ser útil averiguar se determinada expressão verifica formalmente uma dada equação diferencial, pois caso tal não suceda podemos concluir imediatamente que a expressão em causa não é uma solução implícita da equação diferencial dada. Ou seja, a verificação formal pode ser vista como uma condição necessária mas não suficiente.*

Problema 4 *Averigúe se a relação* $xy^2 + y = 1$ *verifica formalmente a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x}.$$

Considere-se agora a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{1.14}$$

A função $f_0(x) = x^2$ é uma solução desta equação diferencial para todo x real. São também soluções da equação diferencial (1.14) as funções

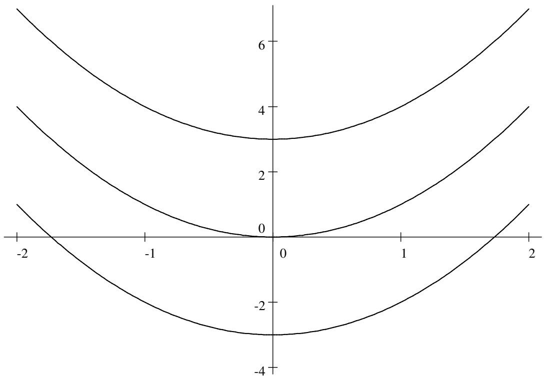
$$f_1(x) = x^2 + 1, \qquad f_2(x) = x^2 + 2, \qquad f_3(x) = x^2 + 3, \qquad f_{\sqrt{7}}(x) = x^2 + \sqrt{7}.$$

De facto, para cada número real c, a função f_c definida para todo x real por

$$f_c(x) = x^2 + c \tag{1.15}$$

é uma solução da equação diferencial (1.14). Ou seja, a expressão (1.15) define uma família (infinita) de funções, uma para cada constante real c, e toda a função desta família é uma solução de (1.14). A constante c designa-se **constante arbitrária**. A família de soluções assim definida escreve-se

$$y = x^2 + c. \tag{1.16}$$



Representação gráfica da família de parábolas $y = x^2 + c$; cada parábola é uma curva integral da equação diferencial $dy/dx = 2x$

Embora seja evidente que toda a função pertencente à família de soluções definida por (1.16) é uma solução de (1.14), não mostramos que a família de soluções (1.16) contém todas as soluções de (1.14).

Exemplo 12 *Considere-se de novo a equação diferencial de primeira ordem (1.14). Esta equação diferencial pode ser interpretada como definindo o declive, $2x$, de uma curva no ponto de coordenadas (x, y) para todo x real. Vimos anteriormente que esta equação diferencial admite uma família de soluções da forma*

$$y = x^2 + c, \tag{1.17}$$

onde c é a constante arbitrária da família. A família de funções (1.17) corresponde geometricamente a uma família de parábolas, cada uma delas com declive dado pela equação diferencial (1.14). Estas parábolas designam-se ***curvas integrais*** *da equação diferencial (1.14).*

Problema 5 *Indique curvas integrais da equação diferencial $dy/dx = \cos x$.*

Exercícios

Exercício 2 *Mostre que a função $f(x) = x + 2e^{-x}$ é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1.$$

Exercício 3 *Mostre que toda a função f pertencente à família de funções $f_c(x) = 2 + ce^{-2x^2}$, onde c é uma constante arbitrária, é uma solução da equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$$

Exercício 4 *Mostre que toda a função g definida por $g(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é uma solução da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Exercício 5 *Sabendo que para determinados valores da constante $m \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial*

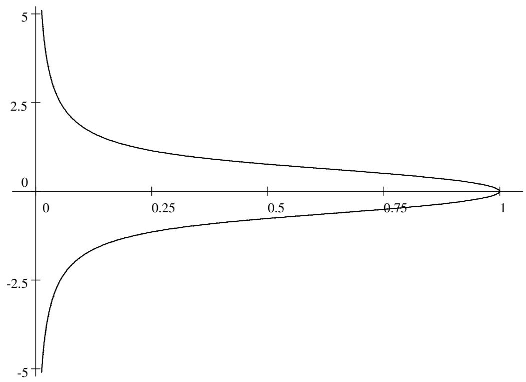
$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0,$$

determine todos os possíveis valores de m.

Exercício 6 *Mostre que $x^3 + 3xy^2 = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial*

$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$

no intervalo $I =]0, 1[$.

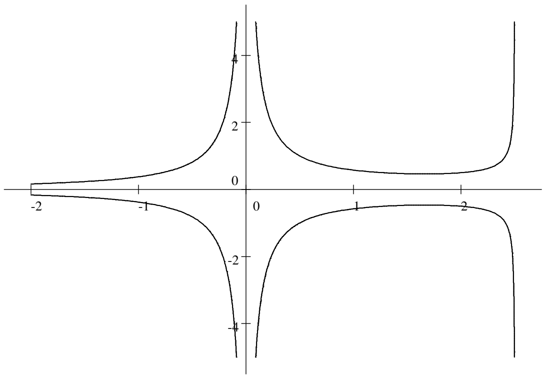


Representação gráfica da relação $x^3 + 3xy^2 = 1$

Exercício 7 *Mostre que* $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ *é uma solução implícita da equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

no intervalo $I = \left]0, \frac{5}{2}\right[$.

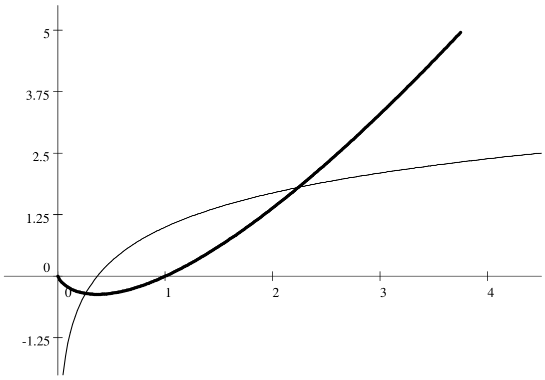


Representação gráfica da relação $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$

Exercício 8 *Mostre que* $y = x\ln x$ *verifica formalmente a equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} = x + y,$$

mas não é uma solução explícita desta equação no intervalo $I =]-1, 1[$.



Representação gráfica da função $y = x\ln x$ *(a cheio) e da respectiva derivada*

Exercício 9 *Mostre que* $y^2 + x = 1$, *não é uma solução implícita da equação diferencial*

$$y\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

no intervalo $I =]0, 2[$, *apesar de a verificar formalmente.*

1.3 Problemas de valores iniciais, problemas de valores de fronteira e existência de soluções

1.3.1 Problemas de valores iniciais e problemas de valores de fronteira

Considere-se o problema que consiste em determinar a solução f da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x \tag{1.18}$$

tal que em $x = 1$ a solução f tem valor 4 (note-se que estamos a assumir que a solução existe e é única). Este problema, que corresponde a determinar a curva que tem declive x em cada ponto e que passa pelo ponto $(x, y) = (1, 4)$, pode ser escrito na forma abreviada

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x, \\ y(1) = 4. \end{cases} \tag{1.19}$$

Verifica-se facilmente que a equação (1.18) admite uma família de soluções que é

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c, \tag{1.20}$$

onde c é uma constante arbitrária, pelo que apenas necessitamos de determinar o valor de c por forma a ter-se $y = 4$ em $x = 1$. Substituindo $x = 1$ e $y = 4$ em (1.20) obtém-se

$$4 = \frac{1}{2} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7}{2}.$$

Obtemos, portanto, a solução (parábola)

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2},$$

que verifica as duas condições expressas em (1.19).

Em aplicações envolvendo equações diferenciais de primeira ordem, ou de ordem mais elevada, os problemas mais frequentes são similares ao do exemplo precedente, já que envolvem uma equação diferencial e uma ou mais condições suplementares. Se todas as condições suplementares disserem respeito a um determinado valor da variável independente dizemos que estamos na presença de um **problema de valores iniciais** (PVI). Se as condições se referirem a dois valores distintos da variável independente dizemos que se trata de um **problema de valores de fronteira** (PVF).

Exemplo 13 *Considere-se o problema que consiste em determinar a solução de*

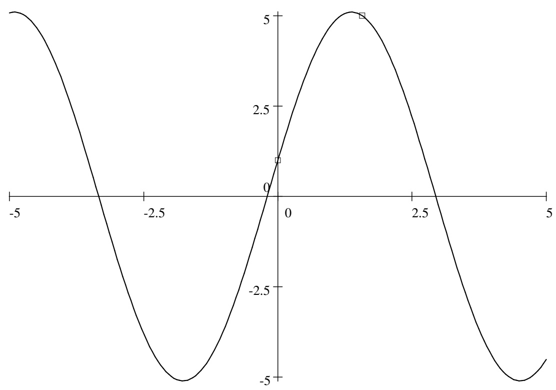
$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases} \tag{1.21}$$

Trata-se de um problema de valores iniciais que consiste em determinar a solução da equação diferencial $d^2y/dx^2 - y = 0$ *que assume o valor* 1 *em* $x = 0$ *e cuja primeira derivada tem valor* 2 *em* $x = 0$*. Conforme veremos, a solução mais geral da equação diferencial é* $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$*, onde* c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias, pelo que* $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$*. Ora, impondo as condições* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 2$ *resulta* $c_1 = 3/2$ *e* $c_2 = -1/2$*. Assim, a solução deste problema de valores iniciais é* $y\,(x) = 3/2\ e^x - 1/2\ e^{-x}$*.*

Exemplo 14 *Considere-se o problema que consiste em determinar a solução de*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 5. \end{cases} \tag{1.22}$$

Trata-se, neste caso, de um problema de valores de fronteira. Conforme veremos, a solução mais geral da equação diferencial é $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$*, onde* c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias, pelo que* $y'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$*. Assim, impondo as condições* $y(0) = 1$ *e* $y(\pi/2) = 5$ *resulta* $c_1 = 1$ *e* $c_2 = 5$*. Desta forma, a solução deste problema de valores de fronteira é* $y\,(x) = 5 \operatorname{sen} x + \cos x$*.*



Representação gráfica da função $f(x) = 5 \sin x + \cos x$*, solução do problema de valores de fronteira (1.22)*

No entanto, o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(\pi) = 5. \end{cases} \tag{1.23}$$

não tem solução pois as condições $y(0) = 1$ *e* $y(\pi) = 5$ *não são compatíveis com uma solução do tipo* $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ *(mostre que, de facto, assim é).*

Este exemplo mostra que os problemas de valores de fronteira devem ser abordados com algum cuidado.

Problema 6 *Determine uma solução do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Problema 7 *Determine uma solução do PVF*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Vejamos agora algumas considerações sobre o problema de valor inicial para uma equação diferencial de primeira ordem.

Definição 8 *Considere-se a equação diferencial de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.24}$$

onde f é uma função contínua de x e y nalgum domínio[1] *D do plano xy. Seja ainda (x_0, y_0) um ponto do domínio D. O problema de valor inicial associado a (1.24) consiste em determinar uma solução ϕ da equação diferencial (1.24), definida nalgum intervalo real contendo x_0, que satisfaça a condição inicial*

$$\phi(x_0) = y_0.$$

Este problema de valor inicial escreve-se habitualmente na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Para resolver este problema devemos determinar uma função ϕ que satisfaça não só a equação diferencial (1.24), mas também a condição inicial: tal função deve ter valor y_0 quando x toma o valor x_0. O método a usar para determinar ϕ depende do tipo de equação diferencial que intervém no problema, ou seja, da forma de $f(x, y)$.

Exemplo 15 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \tag{1.25}$$

$$y(3) = 4, \tag{1.26}$$

[1] Um domínio é um conjunto aberto e conexo. Em termos simplistas, um domínio pode ser visto como o interior de alguma curva fechada simples no plano.

sabendo que a equação diferencial envolvida admite uma família de soluções que pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{1.27}$$

Solução. *A condição (1.26) significa que queremos determinar a solução de (1.25) tal que* $y = 4$ *em* $x = 3$. *Assim sendo, o par de valores* $(3, 4)$ *deve verificar a relação (1.27). Substituindo* $x = 3$ *e* $y = 4$ *em (1.26), obtemos*

$$9 + 16 = c^2 \qquad \textit{ou} \qquad c^2 = 25.$$

Substituindo este valor de c^2 *em (1.27), tem-se* $x^2 + y^2 = 25$. *Resolvendo em ordem a* y, *resulta*

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Devemos escolher o sinal positivo para que $y = 4$ *quando* $x = 3$. *Assim, a função* f *definida por*

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \qquad -5 < x < 5,$$

é a solução do problema. Assim, a solução escreve-se $y = \sqrt{25 - x^2}$.

1.3.2 Existência de soluções

No Exemplo 15 foi possível determinar a solução do problema de valor inicial em causa. Mas terão todos os problemas de valor inicial e problemas de valor de fronteira solução? Vimos já que a resposta é negativa, uma vez que referimos que o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(\pi) = 5, \end{cases}$$

não tem solução. Surge, portanto, a questão da **existência** de soluções: dado um problema de valor inicial ou um problema de valores de fronteira, ele tem solução? Consideremos esta questão relativamente ao problema de valor inicial genérico presente na definição 8. Neste caso podemos dar uma resposta inequívoca. Todo problema de valor inicial que satisfaça a definição 8 tem pelo menos uma solução.

Coloca-se agora a questão da **unicidade**. Pode o referido problema ter mais do que uma solução? Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^{1/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

É fácil verificar que as funções f_1 e f_2 definidas, respectivamente, por

$$f_1(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0, \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2} & se \quad x \geq 0, \end{cases}$$

são ambas soluções do problema de valor inicial! De facto, este problema tem uma infinidade de soluções. A resposta relativa à unicidade é clara: o problema de valor inicial, conforme atrás definido, não tem necessariamente solução única. Para garantir unicidade temos de impor algumas condições adicionais. Estas condições são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 8 *(*Teorema de Existência e Unicidade*). Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.28}$$

onde

1. *A função f é contínua num domínio D do plano xy;*
2. *A derivada parcial $\partial f/\partial y$ também é contínua em D.*

Seja (x_0, y_0) um ponto de D. Então a equação diferencial (1.28) admite uma e uma só solução ϕ num intervalo $|x - x_0| < h$, para h suficientemente pequeno, que verifica a condição

$$\phi(x_0) = y_0.$$

Este teorema estabelece que em determinadas condições o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

tem uma solução única que é válida num determinado intervalo em torno de x_0 (isto é, numa vizinhança de x_0 suficientemenete pequena). No entanto, o teorema não indica qualquer método para determinar a solução do problema, apenas garante a existência de solução única.

Exemplo 16 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Apliquemos o Teorema 8. Comecemos por verificar as hipóteses. Neste caso

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad e \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$$

As duas funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em qualquer domínio D do plano xy. A condição inicial $y(1) = 3$ implica que $x_0 = 1$ e $y_0 = 3$. Ora, o ponto $(1, 3)$ pertence a algum destes domínios D. Portanto, verificam-se as hipóteses do teorema, pelo que a conclusão é válida. Ou seja, existe uma e uma só solução ϕ da equação diferencial $dy/dx = x^2 + y^2$, definida num intervalo $|x - 1| < h$ em torno de $x_0 = 1$, que satisfaz a condição inicial, isto é, tal que $\phi(1) = 3$.

Exemplo 17 *Considere-se os problemas de valor inicial*

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \qquad y(1) = 2,$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \qquad y(0) = 2.$

Que se pode dizer em relação à unicidade de solução destes PVIs?
Solução. Neste caso

$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}} \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Estas funções são contínuas excepto nos pontos com abcissa x nula (isto é, ao longo do eixo dos yy). No problema 1, $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$. Ora, o quadrado de lado unitário centrado em $(1,2)$ não intersecta o eixo dos yy, e assim tanto f como $\partial f/\partial y$ verificam as hipóteses neste quadrado. O seu interior pode por isso ser considerado como o domínio D do Teorema 8 e $(1,2) \in D$. Portanto, o Teorema 8 permite concluir que o problema 1 tem uma e uma só solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$ suficientemente pequena,.

Vejamos o que se passa no problema 2. Neste caso $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$. Neste ponto nem f nem $\partial f/\partial y$ são contínuas. Por outras palavras, o ponto $(0,2)$ não pertence a nenhum domínio D onde as condições do teorema sejam verificadas. Consequentemente, o Teorema 8 não permite concluir que o problema 2 tem uma só solução. Note-se que o teorema também não permite concluir que a solução não é única. Em suma, o Teorema 8 não permite obter nenhuma conclusão. Sabemos, isso sim, que o problema 2 tem solução pois está de acordo com a definição apresentada na página 14.

Problema 9 *Averigúe se o PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}, \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

tem solução única.

Exercícios

Exercício 10 *Mostre que a função $f(x) = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$ é uma solução do problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0, \\ y(0) = 6, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Averigúe se $h(x) = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ também é uma solução deste problema.

Exercício 11 *Sabendo que toda a solução da equção diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

pode ser escrita na forma $f(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$ *escolhendo adequadamente o valor das constantes* c_1 *e* c_2*, determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:*

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 12y = 0, \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 6. \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 12y = 0, \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 6. \end{cases}$$

Exercício 12 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 x + c_2 x^2$*, escolhendo* c_1 *e* c_2 *adequadamente, determine a solução do problema de valores de fronteira*

$$\begin{cases} x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0, \\ y(2) = 0, \quad y(3) = 4. \end{cases}$$

Exercício 13 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 + c_2 x^2$*, mostre que o problema de valores de fronteira*

$$\begin{cases} x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0, \\ y(1) = 1, \quad y(-1) = 1, \end{cases}$$

não tem solução única.

Exercício 14 *Sabendo que toda a solução da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

pode ser escrita na forma $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$*, mostre que o problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 5. \end{cases}$$

tem solução $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + \cos x$, mas que o problema de valores de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 5. \end{cases}$$

não tem solução.

Exercício 15 *Aplique o Teorema 8 para mostrar que cada um dos seguintes problemas de valor inicial tem uma e uma só solução definida num intervalo suficientemente pequeno, $|x-1| < h$, em torno de $x_0 = 1$:*

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{sen} y, \\ y(1) = -2. \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x-2}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Exercício 16 *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y, \\ y(2) = 5, \end{cases}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios de terceiro grau em x. Este problema tem solução única num intervalo $|x-2| < h$, em torno de $x_0 = 2$? Justifique.

1.4 Soluções dos exercícios do Capítulo 1

2. (a) EDO, 1^a ordem, não linear; (b) EDO, 4^a ordem, linear; (c) EDP, 2^a ordem;

(d) EDO, 1^a ordem, não linear; (e) EDO, 2^a ordem, não linear;

(f) EDO, 1^a ordem, linear; (g) EDO, 1^a ordem, não linear;

(h) EDO, 1^a ordem, não linear; (i) EDP, 4^a ordem.

5. $m_1 = -2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$.

10. Não verifica, pois $h'(0) = -8 \neq 2$.

11. (a) $y = 3e^{4x} + 2e^{-3x}$; (b) $y = -2.0e^{-3x}$.

12. $y = -\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}x^2$.

13. A solução é $y = 1 + c\left(x^2 - 1\right)$.

16. Sim. O Teorema de Existência e Unicidade é aplicável. $f(x,y) = P(x)y^2 + Q(x)y$ é contínua em $D = \mathbb{R}^2$, o mesmo sucedendo com $\partial f/\partial y = 2P(x)y + Q(x)$. Finalmente, o ponto $(x_0, y_0) = (2,5)$ pertence ao domínio D.

Capítulo 2

Resolução analítica de equações diferenciais de primeira ordem

2.1 Equações diferenciais exactas

As equações diferenciais de primeira ordem que estudaremos podem ser representadas quer na forma (dita “normal”)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{2.1}$$

quer como

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{2.2}$$

Exemplo 18 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2-2y^2}$$

está na forma (2.1). Podemos também representá-la na forma (2.2), ou seja,

$$\left(x^2+y^2\right)\,dx + \left(2y^2-x^2\right)\,dy = 0.$$

De igual modo, a equação diferencial

$$(\cos x + y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x + y}{x+2y}.$$

Note-se que na forma (2.1) é claro que x é a variável independente e y a variável dependente, isto é, a função $y(x)$ é a incógnita do problema. O mesmo não se passa quando a equação diferencial é expressa na forma (2.2). Em todo caso, assumiremos que se nada for dito em contrário x é a variável independente e y a variável dependente.

Problema 10 *Escreva a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x-y}$$

na forma: i) $dx/dy = g(x,y)$; *ii)* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

Problema 11 *Escreva a equação diferencial*

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

na forma: i) $dy/dx = f(x,y)$; *ii)* $dx/dy = h(x,y)$.

Introduzimos agora o conceito de diferencial total de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, o qual será essencial na definição de equação diferencial exacta.

Definição 9 *Seja F uma função de duas variáveis reais que possui derivadas parciais contínuas num domínio D de $\mathbb{R}^2$. O **diferencial total** dF da função F é definido pela relação*

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy \tag{2.3}$$

para todo $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 19 *Seja $F(x,y)$ a função de duas variáveis definida por*

$$F(x,y) = xy^2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^2, \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2xy,$$

tendo-se para o diferencial total de F, por aplicação de (2.3),

$$dF(x,y) = y^2\,dx + 2xy\,dy$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 20 *Seja $G(x,y)$ a função de duas variáveis definida por*

$$G(x,y) = xy^2 + 2x^3y, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = y^2 + 6x^2y, \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 2xy + 2x^3,$$

tendo-se para o diferencial total de G, por aplicação de (2.3),

$$dG(x,y) = \left(y^2 + 6x^2y\right)\,dx + \left(2xy + 2x^3\right)\,dy$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Problema 12 *Determine o diferencial total da função* $H(x,y) = \cos xy$.

Definição 10 *A expressão*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \tag{2.4}$$

designa-se ***um diferencial exacto*** *num domínio* D *se existe uma função* F *de duas variáveis tal que a expressão (2.4) é igual ao diferencial total de* F *para todo* $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. *Ou seja, atendendo às definições precedentes, concluímos que a expressão (2.4) é um diferencial exacto em* D *se existir uma função* F *tal que*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. *De notar que nestas condições,*

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

para todo $(x,y) \in D$.

Estamos agora em condições de definir o conceito de equação diferencial exacta.

Definição 11 *Se* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ *é um diferencial exacto em* $D \subset \mathbb{R}^2$, *então a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

designa-se uma ***equação diferencial exacta****. Note-se, desde já, que nessas condições existe uma função* $F(x,y)$ *tal que*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dF(x,y) = 0.$$

Este resultado será, conforme veremos em seguida, o ponto de partida para a determinação de soluções deste tipo de equações diferenciais.

Exemplo 21 *A equação diferencial*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 \tag{2.6}$$

é uma equação diferencial exacta em $\mathbb{R}^2$, *dado que* $y^2dx + 2xydy$ *é um diferencial exacto em* $\mathbb{R}^2$.
Solução. *De facto, é o diferencial total da função* $F(x,y) = xy^2$ *(cf. Exemplo 19). No entanto, é conveniente notar que a equação diferencial que se obtém dividindo (2.6) por* y, *isto é,*

$$y\,dx + 2x\,dy = 0,$$

não é exacta. Tal quer dizer que não existe nenhuma função $F(x,y)$, *definida nalgum domínio de* $\mathbb{R}^2$, *tal que* $dF(x,y) = y\,dx + 2x\,dy$. *Para mostrar que assim é, comecemos por supor que tal função existe. Nessas condições ter-se-ia*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y \quad e \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x,$$

pelo que

$$F(x,y) = xy + \phi(y) \quad e \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2x,$$

ou seja,

$$\frac{\partial\left[xy + \phi(y)\right]}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dy} = x.$$

Ora, ϕ não pode depender de x, pelo que $d\phi/dy$ também não pode depender de x, contradizendo o resultado obtido: $d\phi/dx = x$. Chegamos assim a um absurdo que resultou do facto de termos suposto que existe $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = y\,dx + 2x\,dy$. Conclui-se portanto, por redução ao absurdo, que tal função não existe e que consequentemente a equação diferencial dada não é exacta.

Averiguar se uma expressão do tipo $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é um diferencial exacto é um processo algo moroso dado que obriga a indagar se existe $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$. Seria desejável dispor de um critério, envolvendo unicamente as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$, que permitisse averiguar de forma directa se uma equação diferencial de primeira ordem é (ou não) exacta. Tal critério é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 13 *Considere-se a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{2.7}$$

onde $M(x,y)$ e $N(x,y)$ têm primeiras derivadas parciais contínuas em todos os pontos (x,y) de um domínio rectangular $D \subset \mathbb{R}^2$. Nestas condições,

1. *Se a equação diferencial (2.7) é exacta em D, então*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad \forall (x,y) \in D \tag{2.8}$$

2. *Reciprocamente, se*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad \forall (x,y) \in D$$

então a equação diferencial (2.7) é exacta em D. Em resumo,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ é exacta em } D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad \forall (x,y) \in D.$$

Demonstração Ponto 1. Se a equação diferencial (2.8) é exacta em D, então $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ é um diferencial exacto em D. Existe por isso uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Então,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Atendendo ao facto das primeiras derivadas parciais de M e N serem contínuas, podemos aplicar o Teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \forall (x,y) \in D,$$

resultando

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in D,$$

conforme pretendido.

Ponto 2. Neste caso consideramos como hipótese

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$, e pretendemos mostrar que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exacta em D. Isto quer dizer que temos de provar que existe uma função F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Atendendo a que F deve verificar as duas condições precedentes, podemos escolher qualquer uma delas e obter uma expressão para F primitivando adequadamente. Por exemplo,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = \int_x M(x,y)\,\partial x + \phi(y),$$

onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária que só depende de y. Para obter $F(x,y)$ resta-nos determinar $\phi(y)$ substituindo a expressão de $F(x,y)$ na outra condição, ou seja,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)\,\partial x + \phi(y)\right] = N(x,y),$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_x M(x,y)\,\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_x M(x,y)\,\partial x.$$

Uma vez que ϕ só depende de y, o mesmo deve acontecer com a sua derivada, pelo que se deverá ter

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_x M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

para todo $(x, y) \in D$. De facto, a equação precedente é equivalente a

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_x M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

ou

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int_x \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Uma vez que (2.8) é válida por hipótese, a equação precedente converte-se numa identidade. Podemos por isso escrever

$$\phi(y) = \int_y \left[N(x,y) - \int_x \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x \right] \partial y,$$

resultando

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_x M(x,y)\,\partial x + \phi(y) \\ &= \int_x M(x,y)\,\partial x + \int_y \left[N(x,y) - \int_x \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,\partial x \right] \partial y. \end{aligned}$$

(Sugestão: realizar a mesma demonstração começando por primitivar a expressão

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Os passos subsequentes são semelhantes aos acima expostos). ■

O teorema precedente dá-nos um critério para decidir se determinada equação diferencial do tipo (2.7) é ou não exacta. De facto, se a condição (2.8) for verificada então a equação diferencial (2.7) é exacta, caso contrário ela não é exacta. Por outras palavras, o teorema diz-nos que uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial (2.7) seja exacta em D é que a condição (2.8) seja válida para todo $(x,y) \in D$.

A demonstração da segunda parte do teorema sugere qual o procedimento para obter $F(x,y)$ a partir de $M(x,y)$ e $N(x,y)$. O procedimento é relativamente simples e directo conforme ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo 22 *Considere-se novamente a equação diferencial (2.6)*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Vimos anteriormente que era exacta por $y^2\,dx + 2xy\,dy$ ser o diferencial exacta da função $F(x,y) = xy^2$. Em todo o caso, uma vez que em geral a função $F(x,y)$ não é conhecida à priori, apliquemos o critério estabelecido anteriormente para averiguar se uma equação diferencial da forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exacta. Tem-se,

$$\begin{aligned} M(x,y) &= y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y, \\ N(x,y) &= 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y. \end{aligned}$$

Portanto, o critério (2.8) verifica-se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Podemos agora determinar uma função* $F(x, y)$ *tal que*

$$dF(x, y) = y^2\, dx + 2xy\, dy,$$

a qual obedece a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = y^2, \\ \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = 2xy. \end{cases}$$

Tem-se

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad F(x, y) = y^2 x + \phi(y).$$

Substituindo este resultado na segunda equação, obtém-se

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 x + \phi(y)\right] = 2xy,$$

ou seja,

$$2xy + \frac{d\phi(y)}{dy} = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\phi(y)}{dy} = 0,$$

pelo que $\phi(y) = c_1$, *onde* c_1 *é uma constante arbitrária. Tem-se então*

$$F(x, y) = xy^2 + c_1.$$

Sugestão: obter o mesmo resultado começando por primitivar a equação

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy.$$

Problema 14 *Considere a equação diferencial*

$$x\, dx + y\, dy = 0.$$

Averigúe se a equação diferencial é exacta. Em caso afirmativo, determine $F(x, y)$ *tal que* $dF(x, y) = x\, dx + y\, dy$.

Exemplo 23 *A aplicação do critério (2.8) permite agora mostra de forma simples que a equação diferencial*

$$y\, dx + 2x\, dy = 0$$

não é exacta.
Solução. *Tem-se* $M(x, y) = y$ *e* $N(x, y) = 2x$, *pelo que*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 \qquad e \qquad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2,$$

ou seja, a condição (2.8) não é verificada. Conforme referimos anteriormente, não existe nenhuma função $F(x, y)$ *tal que*

$$dF(x, y) = y\, dx + 2x\, dy.$$

Problema 15 *Averigúe se a equação diferencial*

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

é exacta.

Dado que já temos uma forma de testar se determinada equação diferencial é ou não exacta, o passo seguinte consiste em conseguir determinar soluções de equações diferenciais exactas. Conforme vimos, se a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é exacta num domínio rectangular $D \subset \mathbb{R}^2$, então existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x,y) \in D$. Assim, a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = 0,$$

ou seja, atendendo à definição de diferencial total de uma função (2.3),

$$dF(x,y) = 0.$$

Podemos então concluir que a relação $F(x,y) = c$ é uma solução da equação diferencial qualquer que seja o valor da constante (arbitrária) c. Dizemos que

$$F(x,y) = c$$

define uma **família de soluções da equação diferencial exacta** dada.

Exemplo 24 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial exacta*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Solução. *Vimos anteriormente que se tem*

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d(xy^2) = 0,$$

pelo que $F(x,y) = xy^2$. Assim, a relação

$$xy^2 = c,$$

onde c é uma constante arbitrária, define uma família de soluções da equação diferencial dada.

Nota: vimos com mais generalidade que neste caso $F(x,y) = xy^2 + c_1$, onde c_1 é uma constante arbitrária. Assim, a família de soluções seria dada por

$$xy^2 + c_1 = c_2,$$

onde c_2 é uma constante arbitrária, pelo que teríamos

$$xy^2 = c,$$

onde $c = c_2 - c_1$ é uma constante arbitrária, obtendo–se desta forma o resultado anterior.

Exemplo 25 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\left(3x^2+4xy\right)\,dx+\left(2x^2+2y\right)dy=0.$$

Solução. *Primeiro temos de averiguar se se trata de uma equação diferencial exacta. Sendo a equação dada do tipo $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$, tem-se*

$$M(x,y)=3x^2+4xy \qquad e \qquad N(x,y)=2x^2+2y.$$

O critério (2.8) verifica-se pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+4xy\right)=4x \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2+2y\right)=4x.$$

Portanto, a equação diferencial é exacta em $\mathbb{R}^2$. Determinamos agora $F(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)=3x^2+4xy, \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=2x^2+2y. \end{cases}$$

Obtém-se

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=2x^2+2y \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y)=\int_y \left(2x^2+2y\right)\,\partial y=2x^2y+y^2+\varphi(x),$$

pelo que $\varphi(x)$ deve obedecer a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2y+y^2+\varphi(x)\right]=3x^2+4xy,$$

resultando

$$4xy+\frac{d\varphi(x)}{dx}=3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x)=x^3+c_1,$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Temos então

$$F(x,y)=2x^2y+y^2+\varphi(x)=2x^2y+y^2+x^3+c_1.$$

Portanto, uma família de soluções da equação diferencial dada é $F(x,y)=c_2$, isto é,

$$2x^2y+y^2+x^3+c_1=c_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2y+y^2+x^3=c,$$

onde $c=c_2-c_1$ é uma constante arbitrária.

Verifiquemos que o resultado obtido está correcto, mostrando que a relação $2x^2y+y^2+x^3=c$ verifica formalmente a equação diferencial dada. De facto, tem-se

$$\begin{aligned} d\left(2x^2y+y^2+x^3\right)=d\left(c\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y+y^2+x^3\right)\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y+y^2+x^3\right)\,dy=0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \left(3x^2+4xy\right)\,dx+\left(2x^2+2y\right)\,dy=0, \end{aligned}$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta, o que mostra o resultado pretendido.

Problema 16 *Determine uma família de soluções da equação diferencial*

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

e mostre que a família de soluções obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.

Exemplo 26 *Determinar uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x\cos y + 3x^2 y}{x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y}, \\ y(0) = 3/4. \end{cases} \tag{2.9}$$

Solução. *Começamos por verificar se a equação diferencial é exacta. Mostra-se facilmente que a equação dada pode ser escrita na forma*

$$\left(2x\cos y + 3x^2 y\right)\,dx + \left(x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y\right)\,dy = 0.$$

Tem-se

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y \qquad e \qquad N(x,y) = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y,$$

resultando

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\operatorname{sen} y + 3x^2 \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 2x\operatorname{sen} y,$$

pelo que o critério (2.8) verifica-se e a equação diferencial é exacta para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determinamos agora $F(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y, \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y, \end{cases}$$

sabendo de antemão que uma família de soluções da equação diferencial dada é $F(x,y) = c$. Tem-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y, \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y), \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y, \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y), \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y)\right] = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \gamma(y), \\ \dfrac{d\gamma(y)}{dy} = -y, \end{cases}$$

pelo que

$$\gamma(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c_1 \qquad \Rightarrow \qquad F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{1}{2}y^2 + c_1.$$

Uma família de soluções da equação diferencial dada é então

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 + c_1 = c_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 = c,$$

onde c_2 *e* c *são constantes arbitrárias. Da infinidade de curvas integrais definidas por esta última relação queremos reter apenas a que passa pelo ponto* $(0, 3/4)$*, ou seja, que verifica a condição* $y(0) = 3/4$*. Assim,*

$$\begin{cases} x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 = c, \\ y(0) = 3/4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad c = \left[x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{x=0,\ y=3/4} = -\frac{9}{32},$$

obtendo-se a solução

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 = -\frac{9}{32}.$$

A Figura 2.1 ilustra a solução obtida.

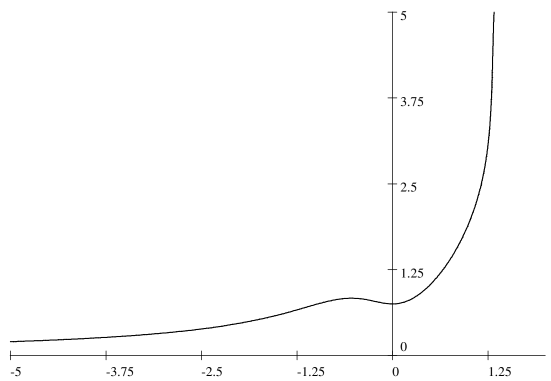


Figura 2.1: Representação gráfica da solução do problema de valores iniciais (2.9)

De novo, é conveniente averiguar se a expressão obtida verifica formalmente a equação diferencial dada, bem como a condição suplementar. Tem-se

$$d\left(x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 \right) = d\left(-\frac{9}{32} \right),$$

vindo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 \right) dy = 0$$

ou, derivando,

$$\left(2x \cos y + 3x^2 y \right) dx + \left(-x^2 \operatorname{sen} y + x^3 - y \right) dy = 0,$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta na sua forma normal. Resta verificar se o ponto $(x = 0,\ y = 3/4)$ *pertence à curva*

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 = -\frac{9}{32}.$$

É fácil mostrar que substituindo $x = 0$ e $y = 3/4$ na equação precedente resulta uma identidade, conforme requerido.

Exercícios

Exercício 17 *Averigúe quais das seguintes equações diferenciais são exactas e determine, para as que o forem, uma família de soluções. Mostre ainda que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $(3x + 2y)\, dx + (2x + y)\, dy = 0.$

(b) $(2xy + 1)\, dx + (x^2 + 4y)\, dy = 0.$

(c) $\left(\theta^2 + 1\right) \cos r\, dr + 2\theta \operatorname{sen} r\, d\theta = 0.$

(d) $\left(\dfrac{2s - 1}{t}\right) ds + \left(\dfrac{s - s^2}{t^2}\right) dt = 0.$

Exercício 18 *Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial. Mostre que a solução obtida verifica formalmente o problema de valor inicial dado.*

(a) $(2xy - 3)\, dx + (x^2 + 4y)\, dy = 0, \quad y(1) = 2.$

(b) $\left(ye^x + 2e^x + y^2\right) dx + (e^x + 2xy)\, dy = 0, \quad y(0) = 6.$

Exercício 19 *Para cada uma das equações diferenciais seguintes determine o valor da constante A por forma a serem exactas e determine uma família de soluções das equações diferenciais resultantes. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\left(x^2 + 3xy\right) dx + (Ax^2 + 4y)\, dy = 0.$

(b) $\left(\dfrac{Ay}{x^3} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0.$

Exercício 20 *Para cada uma das equações diferenciais seguintes determine a função mais geral $f(x, y)$ por forma a que sejam equações diferenciais exactas.*

(a) $\left(x^3 + xy^2\right) dx + f(x, y)\, dy = 0.$

(b) $f(x, y)\, dx + \left(2ye^x + y^2 e^{3x}\right) dy = 0.$

2.2 Equações diferenciais exactas e factores integrantes

Conforme vimos anteriormente, a equação diferencial

$$y\, dx + 2x\, dy = 0 \tag{2.10}$$

não é exacta. No entanto, se multiplicarmos ambos os membros desta equação por y, a equação diferencial resultante

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$$

é exacta, conforme também já vimos. Dizemos então que y é um **factor integrante** da equação diferencial (2.10).

Problema 17 *Baseando-se no exemplo acima, indique um factor integrante para a equação diferencial*

$$y^3\,dx + 2xy^2\,dy = 0.$$

Em geral, tem-se a seguinte definição.

Definição 12 *Se a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.11}$$

não é exacta num domínio D, mas a equação diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

é exacta em D, então $\mu(x,y)$ designa-se um factor integrante da equação diferencial (2.11).

Exemplo 27 *Considere-se a equação diferencial*

$$\left(3y + 4xy^2\right)\,dx + (2x + 3x^2y)\,dy = 0. \tag{2.12}$$

A equação diferencial é do tipo $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ com

$$M(x,y) = 3y + 4xy^2 \qquad e \qquad N(x,y) = 2x + 3x^2y,$$

pelo que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3 + 8xy \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2 + 6xy.$$

Isto quer dizer que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

somente ao longo da curva $2xy + 1 = 0$, pelo que a equação diferencial (2.12) não é exacta em nenhum domínio rectangular de $\mathbb{R}^2$. No entanto, considerando o factor integrante $\mu(x,y) = x^2y$, a correspondente equação diferencial é agora

$$x^2y\left(3y + 4xy^2\right)\,dx + x^2y(2x + 3x^2y)\,dy = 0,$$

ou seja,

$$\left(3x^2y^2 + 4x^3y^3\right)\,dx + (2x^3y + 3x^4y^2)\,dy = 0,$$

a qual é exacta em qualquer domínio rectangular de $\mathbb{R}^2$ dado que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + 4x^3y^3\right) = 6x^2y + 12x^3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + 3x^4y^2)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $\mu(x,y) = x^2y$ é um factor integrante da equação diferencial (2.12).

A multiplicação de uma equação diferencial não exacta por um factor integrante "transforma-a" numa equação diferencial exacta. No entanto, a multiplicação da equação original pelo factor integrante gera uma nova equação diferencial, pelo que esta operação pode conduzir a:

(1) perda de (uma ou mais) soluções da equação original, ou seja, há soluções da equação original que não se obtêm como resultado da resolução da nova equação diferencial;

(2) ganho de funções que sendo solução da nova equação diferencial, não são solução da equação diferencial original;

(3) tanto (1) como (2).

Por isso, quando usarmos um factor integrante temos de investigar se existe ganho/perda de soluções. Veremos mais adiante como lidar, na prática, com este problema.

Coloca-se agora a questão: como se determina um factor integrante? De momento não responderemos a esta pergunta e passaremos a abordar as equações diferenciais de variáveis separáveis e as equações diferenciais lineares (de primeira ordem). Conforme veremos, as equações diferenciais de variáveis separáveis admitem factores integrantes de obtenção imediata, enquanto que as equações diferenciais lineares têm factores integrantes de determinado tipo. O nosso objectivo foi, aqui, o de introduzir o conceito de factor integrante associado à resolução de equações diferenciais exactas.

Exercícios

Exercício 21 *Considere a equação diferencial*

$$\left(y^2 + 2xy\right)\, dx - x^2\, dy = 0.$$

(a) Mostre que a equação diferencial dada não é exacta

(b) Multiplique ambos os membros da equação diferencial dada por y^n, $n \in \mathbb{Z}$, e determine o valor de n por forma a que a nova equação diferencial seja exacta

(c) Determine uma família de soluções da equação diferencial (exacta) que obteve na alínea (b) e mostre que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial não exacta

(d) Mostre que $y(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial não exacta, mas não é uma solução da equação diferencial obtida em (b)

(e) Tendo em conta os resultados obtidos nas alíneas (c) e (d), indique a família de soluções mais geral para a equação diferencial proposta.

Exercício 22 *Considere a equação diferencial*

$$\cos\theta\, d\varphi - \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{tg}\varphi\, d\theta = 0, \quad \varphi \in \left]0, \pi/2\right[.$$

(a) *Mostre que a equação diferencial dada não é exacta, mas que admite* $\cos\varphi$ *como um factor integrante*

(b) *Determine uma família de soluções da equação diferencial (exacta) que se obtém multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por* $\cos\varphi$ *e mostre que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial proposta.*

2.3 Equações diferenciais de variáveis separáveis

Definição 13 *Uma equação diferencial da forma*

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0 \tag{2.13}$$

designa-se uma ***equação diferencial de variáveis separáveis****.*

Exemplo 28 *A equação diferencial*

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\left(y^2-3\right)\,dy = 0$$

é uma equação diferencial de variáveis separáveis pois é do tipo (2.13), com

$$f_1(x) = x-4, \quad g_2(y) = y^4, \quad f_2(x) = -x^3, \quad g_1(y) = y^2-3.$$

Problema 18 *Averigúe se a equação diferencial*

$$\frac{y}{x^2+1}\,dx + \frac{x+1}{y^2+1}\,dy = 0$$

é uma equação diferencial de variáveis separáveis.

Em geral, a equação diferencial de variáveis separáveis (2.13) não é exacta, mas possui um factor integrante óbvio, a saber

$$\mu(x,y) = \frac{1}{f_2(x)g_2(y)}, \quad g_2(y) \neq 0.$$

De facto, multiplicando ambos os membros de (2.13) por $\mu(x,y)$ obtém-se a equação diferencial

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0. \tag{2.14}$$

Esta equação diferencial é exacta pois

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\right]$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A equação diferencial (2.13) pode portanto ser resolvida usando o factor integrante acima e o procedimento descrito nas secções precedentes. No entanto, há uma outra forma de determinar uma solução que é, em geral, bastante mais simples e directa. De facto, tomando

$$M(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad \text{e} \qquad N(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}$$

a equação (2.14) toma a forma

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0. \tag{2.15}$$

Dado que M é apenas função de x e N é uma função que só depende de y, resulta que uma família de soluções de (2.15) é dada por

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c, \tag{2.16}$$

onde c é uma constante arbitrária. Sendo que a resolução da equação diferencial (2.13) se limita a realizar as primitivações presentes em (2.16), conclui-se que as equações diferenciais de variáveis separáveis são, à partida, simples de resolver. (Sugestão: obter a família de soluções (2.16) partindo do facto da equação diferencial (2.15) ser exacta.)

Problema 19 *Indique uma solução da equação diferencial*

$$x\,dx - y\,dy = 0.$$

Note-se que uma vez que a equação diferencial exacta (2.15) é geralmente obtida a partir da equação diferencial não exacta (2.13) usando o factor integrante $1/f_2(x)g_2(y)$, pode daí resultar perda ou ganho de soluções. Por outro lado, ao usar este factor integrante estamos a supor que $f_2(x)$ e $g_2(y)$ não se anulam. Admitindo que x é a variável independente, resta saber o que se passa quando $g_2(y)$ se anula. Para esse efeito escrevemos a equação diferencial (2.13) na forma

$$f_2(x)g_1(y)\,\frac{dy}{dx} + f_1(x)g_2(y) = 0.$$

Vemos de imediato que se y_0 é um número real qualquer tal que $g_2(y_0) = 0$, isto é, y_0 é uma raiz da equação $g_2(y) = 0$, então $y(x) = y_0$ é uma solução (constante) da equação diferencial original (2.13) - porquê? Esta solução pode eventualmente ser perdida devido à introdução do factor integrante. Assim sendo, temos de determinar as soluções $y = y_0$ da equação $g_2(y) = 0$ e averiguar se algumas destas soluções são solução da equação diferencial original. Vejamos como proceder através dos exemplos seguintes.

Exemplo 29 *Resolver a equação diferencial*

$$(x-4)\,y^4\,dx - x^3\left(y^2-3\right)\,dy = 0. \tag{2.17}$$

Solução. *Conforme já vimos (cf. Exemplo 28), trata-se de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que usando o factor integrante*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{y^4x^3}$$

e assumindo que $y(x)^4 \neq 0$ *e* $x^3 \neq 0$ *- supomos que* x *é a variável independente - obtemos a equação diferencial exacta*

$$\frac{x-4}{x^3}\,dx - \frac{y^2-3}{y^4}\,dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx - \left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy = 0,$$

a qual pode ser "integrada", obtendo-se

$$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx - \int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3}{y^4}\right)dy = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Assim*

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3} = c \tag{2.18}$$

deverá ser uma família de soluções da equação diferencial proposta. De facto, derivando implicitamente ambos os membros da solução encontrada (2.18) em ordem a x*, obtém-se*

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3} = c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{3}{y^4}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

que é equivalente a ter-se

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx + \left(-\frac{1}{y^2}+\frac{3}{y^4}\right)dy = 0,$$

ou seja, multiplicando por $x^3 \neq 0$ *e* $y^4 \neq 0$*,*

$$(x-4)\,y^4 dx - x^3\left(y^2-3\right)dy = 0,$$

que mais não é do que a equação diferencial proposta (2.17).

Coloca-se agora outra questão: ao multiplicar a equação original pelo factor integrante assumimos que $y(x)^4 \neq 0$*. Temos agora de considerar as raízes da equação* $y^4 = 0$*, isto é,* $y_0(x) = 0$*. Verifica-se facilmente que esta solução não faz parte da família de soluções (2.18), pois não existe nenhum valor da constante* c *que conduza a* $y(x) = 0$ *para todo* x*. No entanto, escrevendo a equação diferencial (2.17) como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}$$

conclui-se imediatamente que $y(x) = 0$ *é uma solução dessa equação já que*

$$y(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \quad e \quad \left.\frac{(x-4)y^4}{x^3(y^2-3)}\right|_{y=0} = 0.$$

Trata-se por isso de uma solução perdida no processo que envolveu o uso de um factor integrante. Uma família de solução da equação diferencial (2.17) é portanto

$$-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3} = c \quad e \quad y = 0.$$

Exemplo 30 *Resolver a equação diferencial*

$$y\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Solução. *Trata-se de uma equação de variáveis separáveis, pelo que usando o factor integrante*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{yx},$$

e assumindo que $y(x) \neq 0$ *obtemos a equação diferencial exacta*

$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{2}{y}\,dy = 0,$$

resultando

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{y}\,dy = \int 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln|x| + 2\ln|y| = c,$$

onde c *é uma constante arbitrária. Exponenciando, tem-se*

$$|x|\,y^2 = k_1,$$

onde $k_1 = e^c$ *é uma (nova) constante arbitrária positiva. É possível escrever a igualdade precedente na forma*

$$xy^2 = k_2,$$

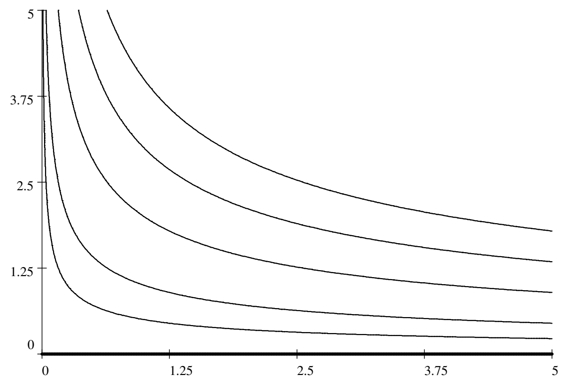
onde k_2 *é uma constante arbitrária não nula (porquê?). Note-se que esta família de soluções foi obtida supondo que* $y(x) \neq 0$.
Será que a relação $y(x) = 0$ *também é uma solução da equação diferencial proposta? É fácil de verificar que sim: nesse caso* $y = 0 \Rightarrow dy = 0$, *pelo que a equação* $y\,dx + 2x\,dy = 0$ *se transforma na identidade* $0 = 0$. *Ora, a solução* $y(x) = 0$ *não se encontra incluída na família de soluções anteriormente obtida,* $xy^2 = k_2$, *já que desta expressão resulta* $y(x) = 0$ *para todo* x *real apenas quando* $k_2 = 0$ *(recorde-se que* $k_2 \neq 0$ *por hipótese). Devemos então escrever a família de soluções:*

$$xy^2 = k_2, \quad k_2 \neq 0 \qquad e \qquad y = 0,$$

ou, de forma mais sucinta,

$$xy^2 = k,$$

onde k *é uma constante real arbitrária.*



Representação gráfica da família de curvas $xy^2 = k$. *Nos restantes quadrantes a representação é simétrica*

Problema 20 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$y\,dx + dy = 0.$$

Exemplo 31 *Resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} y\,dx + \left(x^2+1\right)\cos y\,dy = 0, \\ y(1) = \pi/2. \end{cases} \tag{2.19}$$

Solução. *Multiplicando a equação diferencial dada pelo factor integrante*

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{sen} y}$$

obtém-se, admitindo que $\operatorname{sen} y \neq 0$*,*

$$\frac{x}{(x^2+1)}\,dx + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = 0.$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)}\,dx + \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = c_0,$$

onde c_0 *é uma constante arbitrária. Primitivando, tem-se*

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = c_0$$

ou, tomando $c_1 = e^{c_0} > 0$*,*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|\operatorname{sen} y| = \ln c_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(x^2+1\right) + 2\ln|\operatorname{sen} y| = 2\ln c_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(x^2+1\right) + \ln(\operatorname{sen} y)^2 = \ln c_1^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left[\left(x^2+1\right)(\operatorname{sen} y)^2\right] = \ln c. \end{aligned}$$

Recorrendo à exponenciação, obtemos a seguinte família de soluções

$$\left(x^2+1\right)\operatorname{sen}^2 y = c, \quad c > 0. \tag{2.20}$$

cujo gráfico é apresentado na Figura (2.2).

Uma vez que consideramos que $\operatorname{sen} y \neq 0$*, temos agora de averiguar se as soluções de* $\operatorname{sen} y = 0$ *também são solução da equação diferencial (2.19). Tem-se*

$$\operatorname{sen} y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se escrevermos a equação (2.19) na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+1}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y},$$

concluímos que a solução constante $y(x) = n\pi$ *da equação* $\operatorname{sen} y(x) = 0$ *é também solução da equação diferencial (2.19). Resta saber se esta solução já se encontra incluída na família de soluções (2.20). Verifica-se facilmente que a resposta é negativa, ou seja, não há nenhum valor da constante* $c > 0$ *para o qual a família (2.20) se resuma ao conjunto de funções* $y(x) = n\pi$ *- ver também Figura 2.2. Teríamos então a família de soluções*

$$\left(x^2+1\right)\operatorname{sen}^2 y = c, \quad c > 0 \qquad e \qquad y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

É possível condensar este resultado escrevendo-o na forma

$$\left(x^2+1\right)\operatorname{sen}^2 y = c, \quad c \geq 0.$$

Para resolver o problema de valor inicial temos de determinar o valor da constante $c \geq 0$ *por forma a ter-se* $y(1) = \pi/2$*. Tem-se,*

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)\operatorname{sen}^2 y = c, \quad c \geq 0, \\ y(1) = \pi/2, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad c = 2.$$

A solução do problema proposto é assim

$$\left(x^2+1\right)\operatorname{sen}^2 y = 2.$$

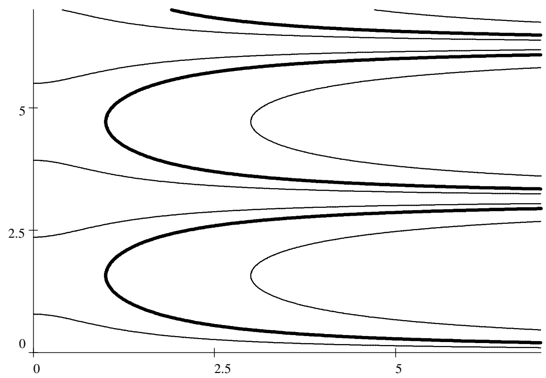


Figura 2.2: Representação gráfica da família de soluções (2.20) em $[0, 10] \times [0, 10]$. Nos restantes quadrantes a representação é simétrica devido à forma de (2.20)

Considere-se de novo a forma geral das equações diferenciais de variáveis separáveis,

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0.$$

Outra forma equivalente de representação é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x)g_2(y)}{f_2(x)g_1(y)} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{g_2(y)}{g_1(y)},$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{2.21}$$

Exemplo 32 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad x > 0,\ y > 0.$$

A equação diferencial é do tipo (2.21), sendo por isso uma equação diferencial de variáveis separáveis. Tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = xy \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = x\,dx \\ &\Leftrightarrow \qquad \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c \\ &\Leftrightarrow \qquad y = c\,e^{x^2/2}, \end{aligned}$$

onde $c > 0$.

Consideramos agora equações diferenciais do tipo

$$\frac{dy}{dx} = h(ax + by + c),$$

onde $b \neq 0$. Em geral estas equações diferenciais não são de variáveis separáveis, mas podem ser convertidas numa equação diferencial de variáveis separáveis recorrendo a uma mudança de variável apropriada. O seguinte teorema traduz este resultado.

Teorema 21 *Seja*

$$\frac{dy}{dx} = h(ax + by + c) \tag{2.22}$$

uma equação diferencial de primeira ordem, onde $a,\ b \neq 0$ *e* c *são constantes. Então a mudança de variável* $w = ax + by + c$ *converte a equação diferencial precendente numa equação diferencial de variáveis separáveis em* w *e* x*.*

Demonstração A mudança de variável proposta conduz a

$$w = ax + by + c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dw}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo a expressão de dy/dx dada por (2.22) obtém-se

$$\frac{dw}{dx} = a + bh(w),$$

resultando na equação diferencial de variáveis separáveis

$$\frac{1}{a + bh(w)}\,dw - dx = 0,$$

conforme requerido. ■

Exemplo 33 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 3y + 5.$$

A mudança de variável adequada é

$$w = 6x + 3y + 5,$$

vindo

$$\frac{dw}{dx} = 6 + 3\frac{dy}{dx}.$$

A equação diferencial dada escreve-se agora

$$\frac{dw}{dx} = 6 + 3w,$$

resultando,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+w}\,dw = 3\,dx \qquad &\Leftrightarrow \qquad \ln|2+w| = 3x + \ln c \\ &\Leftrightarrow \qquad w + 2 = ce^{3x}, \end{aligned}$$

onde $c > 0$. Atendendo a que $w = 6x + 3y + 5$, vem

$$6x + 3y + 7 - ce^{3x} = 0.$$

Exemplo 34 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Solução. *Neste caso a mudança de variável adequada é*

$$z = x + y,$$

resultando

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

Tem-se agora a equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{1}{z} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{z}{1+z}\,dz = dx \\ &\Leftrightarrow \qquad \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) dz = dx, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} z - \ln|1+z| = x + c \qquad &\Leftrightarrow \qquad x + y - \ln|1+x+y| = x + \ln c_1 \\ &\Leftrightarrow \qquad y - \ln|1+x+y| = \ln c_1, \\ &\Leftrightarrow \qquad e^y = c_1\,(1+x+y) \end{aligned}$$

onde $c_1 > 0$, *ou alternativamente,*

$$(1 + x + y)\, e^{-y} = c,$$

com $c = c_1^{-1} > 0$.

Problema 22 *Determine uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = x + y.$$

Exercícios

Exercício 23 *Determine uma família de soluções de cada uma das seguintes equações diferenciais. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $4xy\, dx + \left(x^2 + 1\right)\, dy = 0$.

(b) $\dfrac{ds}{dr} = -\dfrac{2r\left(s^2+1\right)}{r^4+1}$.

(c) $\operatorname{tg}\theta\, dr + 2r\, d\theta = 0$.

(d) $(x+4)\left(y^2+1\right)\, dx + y\left(x^2+3x+2\right)\, dy = 0$.

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)$.

Exercício 24 *Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial. Mostre que a solução obtida verifica formalmente o problema de valor inicial dado.*

(a) $(y+2)\, dx + y\,(x+4)\, dy = 0, \quad y(-3) = -1$.

(b) $8\operatorname{sen}^2 y\, dx + \sec^2 x\, dy = 0, \quad y(\pi/4) = \pi/4$.

(c) $\dfrac{dz}{dx} = xz, \quad z(0) = 0$.

Exercício 25 *Determine uma família de soluções das seguintes equações diferenciais realizando uma mudança de variável adequada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{(x+y)}$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} = x - 2y$.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$.

2.4 Equações diferenciais homogéneas de primeira ordem

Consideramos agora uma classe de equações diferenciais que podem ser reduzidas a equações diferenciais de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada.

Definição 14 *A equação diferencial de primeira ordem*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diz-se uma ***equação diferencial homogénea*** *(de primeira ordem) se quando escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

existe uma função $g(t)$ tal que $f(x,y)$ pode ser expressa como

$$f(x,y) = g(y/x).$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = g(y/x). \tag{2.23}$$

Exemplo 35 *A equação diferencial*

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. De facto, podemos escrevê-la na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{y} = \frac{3}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{y/x},$$

pelo que fazendo $t = y/x$ tem-se

$$\frac{dy}{dx} = g(t), \quad com \quad g(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{t}.$$

Problema 23 *Averigúe se a equação diferencial*

$$x\,dx - 2y\,dy = 0$$

é homogénea

Exemplo 36 *A equação diferencial*

$$y + \sqrt{x^2+y^2}\,dx - x\,dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem.
Solução. *Tem-se,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

A expressão final depende do sinal de x, mas é sempre da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(t), \quad com \quad g(t) = t \pm \sqrt{1+t^2},$$

onde $t = y/x$.

Problema 24 *Averigúe se as equações diferenciais*

$$
\begin{aligned}
&y^2\,dx - x^3\,dy = 0,\\
&\left(y^2 + x^2\right)\,dx - \left(y^2 - x^2\right)\,dy = 0,
\end{aligned}
$$

são homogéneas.

Vejamos agora outra forma de averiguar se estamos na presença de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. Para esse efeito necessitamos de introduzir o conceito de função homogénea.

Definição 15 *Uma função $F(x,y)$ diz-se uma **função homogénea de grau n** se*

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y), \quad \forall t$$

Exemplo 37 *A função $F(x,y) = x^2 + y^2$ é uma função homogénea de grau 2 pois*

$$F(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2F(x,y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Problema 25 *Averigúe se as equações diferenciais*

$$
\begin{aligned}
&y^2\,dx - x^3\,dy = 0,\\
&\left(y^2 + x^2\right)\,dx - \left(y^2 - x^2\right)\,dy = 0,
\end{aligned}
$$

são homogéneas usando a noção de função homogénea.

Podemos agora enunciar o resultado pretendido.

Teorema 26 *Considere-se a equação diferencial*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas do mesmo grau então a equação diferencial é homogénea de primeira ordem.

Demonstração Admitindo que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogéneas de grau n, tem-se

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &= M\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right)\\
N(x,y) &= N\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right),
\end{aligned}
$$

pelo que a equação diferencial dada pode-se escrever na forma

$$x^n \left[M\left(1,\frac{y}{x}\right)\,dx + N\left(1,\frac{y}{x}\right)\,dy\right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}.$$

Ora, o segundo membro da equação diferencial depende apenas de y/x, pelo que resulta

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

conforme requerido [cf. (2.23)]. Note-se que nestas condições $f(x, y)$ é uma função homogénea de grau 0. ∎

Exemplo 38 *A equação diferencial*

$$\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xy\, dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem uma vez que $M(x, y) = \left(x^2 - 3y^2\right)$ *e* $N(x, y) = 2xy$ *são funções homogéneas de grau 2. De notar que a equação diferencial pode ainda ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

onde

$$f(x, y) = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3(y/x)^2 - 1}{2(y/x)},$$

que é uma função homogénea de grau 0

Exemplo 39 *A equação diferencial*

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx - x\, dy = 0$$

é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem uma vez que $M(x, y) = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $N(x, y) = -x$ *são funções homogéneas de grau 1:*

$$\begin{aligned} M(tx, ty) &= ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \forall t \geq 0 \\ &= t\, M(x, y), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$N(tx, ty) = -tx = t\, N(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A equação diferencial dada podia ter sido escrita como

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y),$$

onde

$$h(x, y) = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (y/x)^2},$$

que é uma função homogénea de grau 0

Resta saber qual a forma de obter a solução de equações diferenciais homogéneas de primeira ordem. A resolução deste tipo de equações realiza-se recorrendo à seguinte propriedade: toda a equação diferencial homogénea de primeira ordem pode ser transformada numa equação diferencial de variáveis separáveis mediante uma mudança de variável adequada.

Teorema 27 *Se $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$ transforma a equação diferencial dada numa equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis v e x.*

Apresentaremos a demonstração deste resultado por descrever, com generalidade, o procedimento a adoptar na resolução deste tipo de equações diferenciais.

Demonstração Se $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, então a mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$ conduz a

$$M(x,vx)\,dx + N(x,vx)\,d\,(vx) = 0.$$

Como as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são, por hipótese, funções homogéneas do mesmo grau - n - tem-se

$$\begin{aligned} M(x,vx)\,dx + N(x,vx)\,d\,(vx) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^n\left[M(1,v)\,dx + N(1,v)\,d\,(vx)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(1,v)\,dx + N(1,v)\,d\,(vx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad M(1,v)\,dx + N(1,v)\,\left(v\,dx + x\,dv\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[M(1,v) + vN(1,v)\right]\,dx + xN(1,v)\,dv = 0. \end{aligned}$$

A última equação é do tipo (2.13), tratando-se por isso de uma equação diferencial de variáveis separáveis Usando o factor integrante

$$\mu(x,v) = \frac{1}{x\left[M(1,v) + vN(1,v)\right]}$$

podemos escrever

$$\frac{1}{x}\,dx + \frac{N(1,v)}{\left[M(1,v) + vN(1,v)\right]}\,dv = 0,$$

obtendo-se a família de soluções

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{N(1,v)}{\left[M(1,v) + vN(1,v)\right]}\,dv = c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Atendendo a que $v = y/x$ resulta a seguinte famíla de soluções da equação diferencial dada

$$\ln|x| + g(v) = c \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln|x| + g(y/x) = c,$$

onde

$$g(v) = \int \frac{N(1,v)}{\left[M(1,v) + vN(1,v)\right]}\,dv$$

é determinada a partir das funções M e N dadas.

Alternativamente, podemos partir da hipótese (equivalente) de que a equação diferencial em causa se pode escrever na forma
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$
onde
$$f(x,y) = g(y/x),$$
ou seja, $f(x,y)$ é uma função homogénea de grau 0. Assim, substituindo $y(x) = x\,v(x)$ na equação diferencial, resulta
$$\frac{d}{dx}(x\,v) = g(v) \qquad \Leftrightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{g(v) - v}{x}$$
que é uma equação de variáveis separáveis (porquê?), tal como pretendido. ■

Exemplo 40 *Resolver a equação diferencial*
$$\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xy\,dy = 0, \quad x > 0. \tag{2.24}$$

Solução. *Conforme vimos no Exemplo 38 trata-se de uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, pelo que usamos a mudança de variável $y(x) = v(x)\,x$, resultando*
$$\left(x^2 - 3v^2x^2\right) dx + 2x^2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(1 - 3v^2\right) dx + 2v\,(v\,dx + x\,dv) = 0.$$
Agrupando os termos em dx e dv, obtém-se
$$\left(1 - 3v^2 + 2v^2\right) dx + 2vx\,dv = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(1 - v^2\right) dx + 2vx\,dv = 0.$$
Trata-se agora de uma equação diferencial de variáveis separáveis, pelo que usando o factor integrante
$$\mu(x,v) = \frac{1}{(1-v^2)\,x},$$
obtém-se
$$\frac{1}{x}\,dx + 2\frac{v}{1-v^2}\,dv = 0, \quad 1 - v\,(x)^2 \neq 0,$$
ou seja
$$\ln|x| - \ln\left|1 - v^2\right| = c_0 = \ln c_1,$$
onde c_0 e $c_1 > 0$ são constantes arbitrárias. Exponenciando ambos os membros da equação anterior resulta
$$|x| = c_1\left|1 - v^2\right|$$
ou
$$c\,|x| = \left|1 - v^2\right|,$$

onde $c = c_1^{-1} > 0$ é uma constante arbitrária. Atendendo a que $y = vx$ e $x > 0$, tem-se a família de soluções

$$cx^3 = \left|x^2 - y^2\right|, \quad c > 0 \tag{2.25}$$

Falta agora averiguar se devido à aplicação do factor integrante

$$\mu(x, v) = \frac{1}{(1 - v^2)\, x},$$

ou seja, por se ter suposto que

$$1 - v\,(x)^2 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v\,(x) \neq \pm 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y \neq \pm x$$

houve perda de soluções. É facilmente verificável que as funções $y(x) = x$ e $y(x) = -x$ são soluções da equação diferencial (2.24), pelo que resta saber se estão contidas na família de soluções (2.25). Da análise da família de soluções (2.25) conclui-se que esta não contém as soluções $y(x) = x$ e $y(x) = -x$ (porquê?). Em todo caso, podemos incluí-las nessa família de soluções se permitirmos que $c \geq 0$ na expressão (2.25), dado que para $c = 0$ resulta $y(x) = \pm x$. Em resumo, a família de soluções da equação diferencial proposta é

$$cx^3 = \left|x^2 - y^2\right|, \quad c \geq 0.$$

Nota: alternativamente, podíamos ter escrito a equação diferencial dada como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}, \quad x > 0 \wedge y(x) \neq 0,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3(y/x)^2}{2(y/x)}, \quad x > 0 \wedge y(x) \neq 0.$$

Realizando a mudança de variável $y = vx$, e supondo agora que $v(x) \neq 0$, teríamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,(v\,x) = \frac{3v^2 - 1}{2v} \qquad &\Leftrightarrow \qquad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}\,dx = 2\frac{v}{v^2 - 1}\,dv \\
&\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}\,dx + 2\frac{v}{1 - v^2}\,dv = 0,
\end{aligned}$$

impondo-se que $v\,(x) \neq \pm 1$. O resto da resolução é igual ao já realizado no início deste exemplo, à excepção da condição $v(x) \neq 0$. No entanto, esta condição nada traz de novo pois a função $y(x) = 0$ não é solução da equação diferencial proposta (porquê?).

Problema 28 *Resolva a seguinte equação diferencial realizando uma mudança de variável adequada.*

$$y\,dx + x\,dy = 0, \quad x > 0.$$

Exemplo 41 *Resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - x\,dy = 0, \quad x>0, \\ y(1)=0. \end{cases}$$

Solução. *Vimos no Exemplo 39 que a equação diferencial acima é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem, pelo que fazemos a mudança de variável* $y = vx$*. Resulta assim,*

$$\left(vx+\sqrt{x^2+(vx)^2}\right)dx - x\,d(vx) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(v+\sqrt{1+v^2}\right)dx - d(vx) = 0,$$

isto é

$$\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)dx - v\,dx - xdx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{1+v^2}\,dx - xdx = 0.$$

Obtemos, conforme esperado, uma equação diferencial de variáveis separáveis. Usando o factor integrante

$$\mu(x,v) = \frac{1}{x\sqrt{1+v^2}},$$

tem-se (note-se que $\sqrt{1+v^2} \neq 0$ *é uma condição universal)*

$$\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|x| + \ln c = \ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right|, \quad c>0.$$

Atendendo a que $x>0$ *e exponenciando tem-se*

$$cx = v+\sqrt{1+v^2}.$$

Dado que $v = y/x$*, resulta a família de soluções*

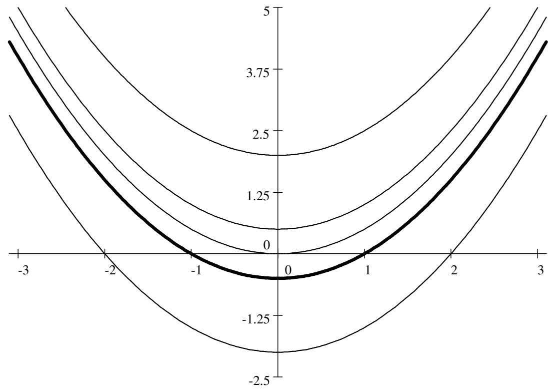
$$cx^2 = y+\sqrt{x^2+y^2},$$

não sendo necessário verificar se houve soluções da equação diferencial proposta que se perderam por aplicação do factor integrante (porquê?). A condição inicial $y=0$ *quando* $x=1$ *conduz a*

$$\left[cx^2\right]_{x=1} = \left[y+\sqrt{x^2+y^2}\right]_{x=1,\ y=0} \qquad \Rightarrow \qquad c=1,$$

pelo que se tem para a solução do problema de valor inicial proposto

$$x^2 = y+\sqrt{x^2+y^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right).$$



Representação gráfica da família de curvas $cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercícios

Exercício 26 *Determine uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $(x+y)\,dx - x\,dy = 0, \quad x < 0.$

(b) $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{v^3}{uv^2 - u^3}.$

(c) $\left(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy = 0, \quad x > 0.$

Exercício 27 *Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial. Mostre que a solução obtida verifica formalmente o problema de valor inicial dado.*

(a) $\left(x^2+3y^2\right)dx - 2xy\,dy = 0, \quad y(2) = 6.$

(b) $(2x-5y)\,dx + (4x-y)\,dy = 0, \quad y(0) = 4.$

Exercício 28 *Determine uma família de soluções das equações diferenciais seguintes usando dois métodos distintos. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{y-2x}.$

(b) $\left(x^2+2y^2\right)dx + \left(4xy - y^2\right)dy = 0.$

Exercício 29 *Averigúe em que condições é que a equação diferencial*

$$\left(Ax^2+Bxy+Cy^2\right)dx + \left(Dx^2+Exy+Fy^2\right)dy = 0$$

(a) é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem

(b) é uma equação diferencial exacta,

onde A, B, C, D, E e F são constantes não nulas.

Exercício 30 *Suponha que a equação diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é uma equação diferencial homogénea de primeira ordem. Mostre que a transformação $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ reduz esta equação diferencial a uma equação diferencial de variáveis separáveis nas variáveis r e θ.*

2.5 Equações diferenciais lineares

Definição 16 *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, na variável dependente y e na variável independente x, que esteja ou possa ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.26}$$

designa-se uma ***equação diferencial linear*** *(de primeira ordem).*

Exemplo 42 *A equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + (1+x)\,y = x^3$$

é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear já que pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 1\right) y = x^2.$$

É, portanto, da forma (2.26), com

$$P(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right), \qquad Q(x) = x^2.$$

Problema 29 *Averigúe se as equações diferenciais são lineares*

$$2\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x,$$
$$2\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = e^y.$$

Escrevemos agora a equação (2.26) na forma

$$[P(x)y - Q(x)]\;dx + dy = 0. \tag{2.27}$$

Esta equação diferencial é da forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

com
$$M(x,y) = [P(x)y - Q(x)]\,, \qquad N(x,y) = 1.$$
Dado que
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x), \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = 0,$$
concluímos que a equação diferencial (2.27) não é exacta, a menos que $P(x) = 0$, caso em que teríamos uma equação diferencial de variáveis separáveis. No entanto, a equação diferencial (2.27) possui um factor integrante que só depende da variável independente x, $\mu(x)$, que passamos a determinar.

Comecemos por multiplicar ambos os membros da equação diferencial (2.27) por $\mu(x)$. Resulta,
$$\mu(x)\,[P(x)y - Q(x)]\;dx + \mu(x)\,dy = 0.$$
Por definição, $\mu(x)$ é um factor integrante da equação diferencial precedente se e só se esta for exacta, isto é, se e só se
$$\frac{\partial}{\partial y}\,[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx},$$
ou seja, sempre que
$$\frac{1}{\mu(x)}\,d\mu(x) = P(x)\,dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln|\mu(x)| = \int P(x)\,dx.$$
Se assumirmos que $\mu(x) > 0$, tem-se
$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.28}$$
Portanto, a equação diferencial (2.27) possui um factor integrante da forma (2.28). Multiplicando a equação (2.26) por $\mu(x)$ dado por (2.28) tem-se
$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)y = e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$
ou
$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}Q(x) \tag{2.29}$$
já que
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}\right]\,y\\ &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}\frac{d}{dx}\left[\int P(x)\,dx\right]\,y\\ &= e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)\,y.\end{aligned}$$
Primitivando ambos os membros de (2.29) obtém-se
$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + c,$$
onde c é uma constante arbitrária. Temos então o seguinte teorema.

Teorema 30 *A equação diferencial linear*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

tem um factor integrante, $\mu(x)$, da forma

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Uma família de soluções desta equação diferencial é

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)\,dx + c\right].$$

Nota: é possível mostrar que esta família de soluções inclui todas as soluções da equação diferencial (2.26).

Tal como em ocasiões anteriores, o procedimento geral pode sugerir complexidade no método de resolução, mas este é relativamente simples conforme se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo 43 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial linear de primeira ordem*

$$\frac{dy}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y = e^{-2x}.$$

Solução. *Tem-se*

$$P(x) = 2 + \frac{1}{x}, \qquad Q(x) = e^{-2x},$$

pelo que o factor integrante a usar é

$$\mu(x) = \exp\int\left(2 + \frac{1}{x}\right)dx = \exp\left(2x + \ln|x|\right) = e^{2x}\,|x|\,,$$

cuja forma final depende do sinal de x. Dado tratar-se de um factor integrante podemos usar

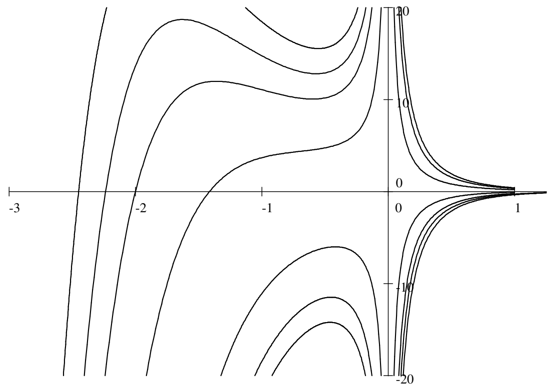
$$\mu(x) = xe^{2x},$$

resultando,

$$\begin{aligned} xe^{2x}\frac{dy}{dx} + xe^{2x}\left(2 + \frac{1}{x}\right)y = x \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right) = x \\ &\Leftrightarrow \qquad xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c, \end{aligned}$$

onde c é uma constante arbitrária. Tem-se então a família de soluções

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{c}{x}\right)e^{-2x}.$$



Representação gráfica da família de curvas $(\frac{1}{2}x + \frac{c}{x})e^{-2x}$

Problema 31 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial linear de primeira ordem*

$$-\frac{dy}{dx} - y = x + 1.$$

Exemplo 44 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} 2\left(x^2+1\right)\dfrac{dy}{dx} + 8xy = 2x \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Solução. *A equação diferencial dada pode ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear com

$$P(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \qquad Q(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

O factor integrante a usar é

$$\mu(x) = \exp\int P(x)\,dx = \exp\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx = \exp\left[2\ln\left(x^2+1\right)\right] = \left(x^2+1\right)^2.$$

Tem-se assim,

$$\left(x^2+1\right)^2\frac{dy}{dx} + 4x\left(x^2+1\right)y = x\left(x^2+1\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^2 y\right] = x\left(x^2+1\right),$$

pelo que primitivando resulta

$$\left(x^2+1\right)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c, \tag{2.30}$$

onde c é uma constante arbitrária. Esta família de soluções é representada na Figura (2.3). Para que se verifique a condição inicial $y(2) = 1$, tem-se

$$\left[\left(x^2+1\right)^2 y\right]_{x=2,\ y=1} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=2,\ y=1} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 19.$$

Desta forma, a solução do problema de valor inicial proposto é

$$\left(x^2+1\right)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 19$$

ou

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 19\right)\left(x^2+1\right)^{-2}.$$

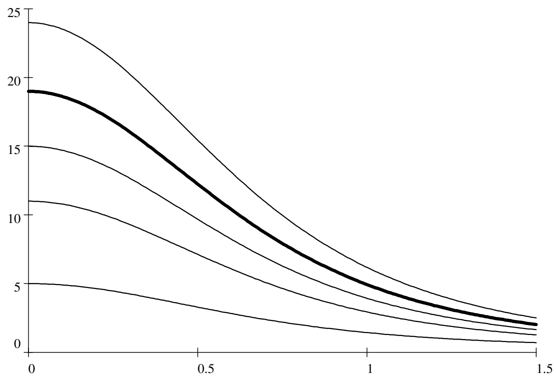


Figura 2.3: Representação gráfica da família de soluções (2.30). Nos restantes quadrantes a representação é simétrica devido à forma das soluções

Exemplo 45 *Pretende-se determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$y^2\,dx + (3xy - 1)\,dy = 0.$$

Solução. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{1-3xy} = 0,$$

pelo que a equação diferencial dada não é linear em $y(x)$. No entanto, se considerarmos que x é a variável dependente e y a variável independente, podemos escrever

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y}x,$$

isto é,

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2}$$

que é uma equação linear (em x) - ver (2.26). Podemos por isso determinar um factor integrante para esta equação, a saber,

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{3}{y}\, dy\right) = \exp\left(\ln |y|^3\right) = |y|^3 .$$

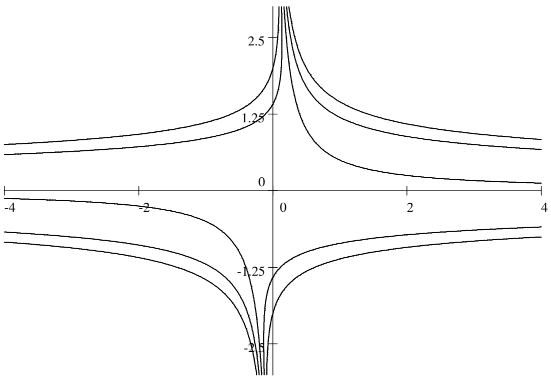
Assim, $\mu(y) = \pm\, y^3$, *dependendo do sinal de* y. *Adoptando*

$$\mu(y) = y^3,$$

resulta

$$\begin{aligned} y^3\frac{dx}{dy} + 3y^2x = y \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dy}\left(y^3x\right) = y \\ &\Rightarrow \qquad y^3x = \frac{y^2}{2} + c \\ &\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3}, \end{aligned}$$

onde c *é uma constante arbitrária.*



Representação gráfica da família de curvas $y^3x = \dfrac{1}{2}y^2 + c$

Exemplo 46 *Resolver o problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} - yx = g(x), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \leq x \leq 1, \\ x & se \quad x > 1. \end{cases}$$

Solução. *Neste caso temos de considerar duas equações diferenciais lineares:*

$$\frac{dy_1}{dx} - y_1x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

e

$$\frac{dy_2}{dx} - y_2 x = x, \quad x > 1,$$

sujeitas às condições

$$y_1(1) = 2, \quad \lim_{x \to 1^-} y_1(x) = \lim_{x \to 1^+} y_2(x) = y_1(1).$$

A solução do problema de valor inicial proposto será então

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & se \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y_2(x) & se \quad x > 1. \end{cases}$$

Comecemos pela equação diferencial

$$\frac{dy_1}{dx} - y_1 x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{y_1}\, dy_1 = \frac{1}{x}\, dx, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis cuja família de soluções é

$$y_1 = c_1 x.$$

Uma vez que se deverá ter $y_1(1) = 2$, resulta $c_1 = 2$, ou seja

$$y_1 = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Passemos agora à equação diferencial

$$\frac{dy_2}{dx} - y_2 x = x, \quad x > 1.$$

O factor integrante associado é

$$\mu(x) = \exp \int -x\, dx = e^{-x^2/2},$$

tendo-se

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} \left(\frac{dy_2}{dx} - y_2 x \right) &= x e^{-x^2/2}, \quad x > 1, \\ \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2}\, y_2 \right) &= x e^{-x^2/2}, \\ y_2 &= c_2\, e^{x^2/2} - 1. \end{aligned}$$

Resta determinar o valor de c_2. Dado que

$$\lim_{x \to 1^-} y_1(x) = y_1(1) = 2,$$

então impomos

$$\lim_{x \to 1^+} y_2(x) = 2,$$

resultando

$$\lim_{x \to 1^+} c_2 \, e^{x^2/2} - 1 = 2,$$

ou seja

$$c_2 = 3e^{-1/2}.$$

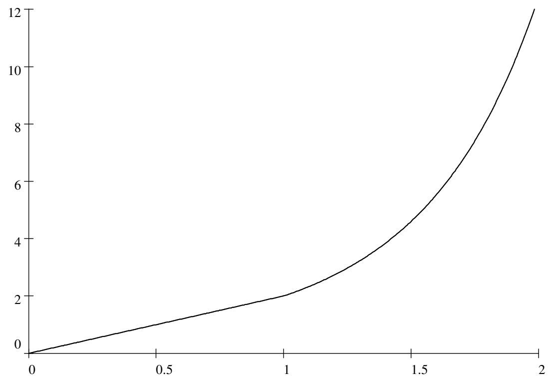
Tem-se, portanto,

$$y_2 = 3e^{(x^2-1)/2} - 1, \quad x > 1.$$

Assim sendo, a solução do problema de valor inicial proposto é

$$y(x) = \begin{cases} 2x & se \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 3e^{(x^2-1)/2} - 1 & se \quad x > 1, \end{cases}$$

cujo gráfico é



Exercícios

Exercício 31 *Determine uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3\dfrac{y}{x} = 6x^2.$

(b) $x^4 \dfrac{dy}{dx} + 2x^3 y = 1.$

(c) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}.$

(d) $\dfrac{dr}{d\theta} + \operatorname{tg}\theta = \cos\theta.$

Exercício 32 *Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial. Mostre que a solução obtida verifica formalmente o problema de valor inicial dado.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = 2.$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0,$ *com* $f(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & se \quad x > 1. \end{cases}$

Nota: a solução deverá obedecer à condição $\lim_{x\to 1^-} y(x) = \lim_{x\to 1^+} y(x) = y(1)$.

2.6 Equações diferenciais de Bernoulli

Consideramos agora um caso especial em que a equação diferencial pode ser reduzida a uma equação diferencial linear de primeira ordem usando uma mudança de variável adequada.

Definição 17 *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.31}$$

*onde $n \in \mathbb{Q}$, designa-se uma **equação diferencial de Bernoulli**.*

Observe-se que para $n = 0$ ou $n = 1$ a equação de Bernoulli (2.31) reduz-se a uma equação linear. No caso em que $n \neq 0$ e $n \neq 1$ tem-se o seguinte resultado.

Teorema 32 *Suponhamos que $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Então a mudança de variável definida por*

$$v = y^{1-n}$$

transforma a equação de Bernoulli (2.31) numa equação diferencial linear na variável v.

Demonstração Comecemos por multiplicar ambos os membros da equação diferencial (2.31) por y^{-n}. Tem-se,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{2.32}$$

Note-se que o segundo membro da equação diferencial assim obtida é da forma (2.26). Fazendo

$$v = y^{1-n}$$

tem-se

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad \Leftrightarrow \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{1}{1-n}.$$

Substituindo o resultado agora obtido na equação diferencial (2.32) vem

$$\frac{dv}{dx}\frac{1}{1-n} + P(x)v = Q(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{dx} + (1-n)\,P(x)v = (1-n)\,Q(x),$$

obtendo-se, portanto, a equação diferencial linear em v

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x),$$

onde

$$P_1(x) = (1-n)\,P(x), \qquad Q_1(x) = (1-n)\,Q(x),$$

o que mostra o resultado pretendido. ■

Exemplo 47 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3. \tag{2.33}$$

Solução. *Trata-se de uma equação diferencial de Bernoulli com* $n = 3$. *Multiplicando esta equação por* y^{-3}, *tem-se*

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x,$$

pelo que tomando

$$v = y^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx},$$

resulta

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{dx} - 2v = -2x.$$

Esta equação diferencial linear admite o factor integrante

$$\mu(x) = \exp\int -2\,dx = e^{-2x}.$$

Tem-se, por aplicação do factor integrante,

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}v\right) = -2xe^{-2x}.$$

Primitivando por partes resulta

$$e^{-2x}v = e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + c \qquad \Leftrightarrow \qquad v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x},$$

onde c *é uma constante arbitrária. Atendendo à mudança de variável* $v = y^{-2}$, *tem-se a família de soluções*

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}. \tag{2.34}$$

Podemos mostrar que esta família de soluções verifica formalmente a equação diferencial (2.33). Para esse efeito derivamos implicitamente ambos os membros da equação (2.34) em ordem a x, *vindo*

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 1 + 2ce^{2x}.$$

Eliminando a constante arbitrária c usando a equação (2.34) vem

$$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{1}{y^2} - x - \frac{1}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2} - 2x.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial precedente por $-y^3/2$ obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = -y + xy^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} + y = xy^3,$$

conforme requerido.

Problema 33 *Converter a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2 x$$

numa equação diferencial linear realizando uma mudança de variável adequada.

Exemplo 48 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = f(x)y^4, \quad y(1) = 1,$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & se \quad 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & se \quad x > 2. \end{cases}$$

Solução. *Neste caso temos de considerar dois problemas,*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4, \quad y(1) = 1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

e

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = y^4, \quad x > 2,$$

sujeitos à condição

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = \lim_{x \to 2^+} y(x).$$

Para a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\,y^4$$

tem-se, divindo por $y^4 \neq 0$,

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y^{-3} = x - 1.$$

Realizando a mudança de variável $z = y^{-3}$ resulta

$$z = y^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx},$$

pelo que a equação diferencial passa a escrever-se

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{3x}z = x - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = -3x + 3.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear, sendo o factor integrante a usar

$$\mu(x) = e^{\int \ln x \, dx} = x.$$

Tem-se assim,

$$x\frac{dz}{dx} + z = -3x^2 + 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}(xz) = -3x^2 + 3x,$$

ou seja

$$xz = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = -x^2 + \frac{3}{2}x + c_1 x^{-1}.$$

Retomando a variável dependente y, vem

$$y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + c_1 x^{-1}.$$

A constante c_1 é tal que $y(1) = 1$, resultando

$$c_1 = \frac{1}{2},$$

pelo que a solução do problema

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = (x-1)\, y^4, \quad y(1) = 1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

é

$$y^{-3} = -x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}, \quad 1 \leq x \leq 2. \tag{2.35}$$

Note-se que $y(x) = 0$ é solução da equação diferencial, mas não é a solução do problema proposto pois não verifica a condição $y(1) = 1$.

Consideremos agora a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3x}y = y^4, \quad x > 2.$$

O procedimento que conduz à sua resolução é em tudo idêntico ao anteriormente exposto, obtendo-se

$$y^{-3} = -\frac{3}{2}x + c_2 x^{-1}, \quad x > 2. \tag{2.36}$$

Reata determinar o valor da constante c_2 por forma a ter-se

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = \lim_{x \to 2^+} y(x).$$

Recorrendo à solução (2.35) tem-se

$$\lim_{x\to 2^-} y(x) = y(2) = \left[-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^{-1}\right]_{x=2} = -\frac{3}{4}.$$

Por outro lado, da solução (2.36) resulta

$$\lim_{x\to 2^+} y(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-\frac{3}{2}x + c_2 x^{-1}\right) = -3 + \frac{1}{2}c_2.$$

Assim, c_2 é tal que

$$-\frac{3}{4} = -3 + \frac{1}{2}c_2,$$

resultando

$$c_2 = \frac{9}{2}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial proposto é

$$\begin{cases} y^{-3} = -x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^{-1} & \textit{se} \quad 1 \leq x \leq 2, \\ y^{-3} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}x^{-1} & \textit{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

Exercícios

Exercício 33 *Determine uma família de soluções das equações diferenciais seguintes. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}.$

(b) $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4.$

(c) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{tx}.$

(d) $dy + \left(4y - 8y^{-3}\right) x\, dx = 0.$

Exercício 34 *Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial. Mostre que a solução obtida verifica formalmente o problema de valor inicial dado.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}, \quad y(1) = 2.$

(b) $-x\dfrac{dy}{dx} - y = (xy)^{3/2}, \quad y(1) = 4.$

2.7 Aplicação à determinação de trajectórias ortogonais

Definição 18 *Seja*

$$F(x, y, c) = 0 \tag{2.37}$$

uma família de curvas definida no plano xy. Uma curva que intersecte a família de curvas (2.37) segundo ângulos rectos designa-se uma ***trajectória ortogonal*** *da família de curvas dada.*

Exemplo 49 *Considere-se a família de circunferências*

$$x^2 + y^2 = c^2 \tag{2.38}$$

com centro na origem e raio $c > 0$. Cada uma das rectas que passa pela origem

$$y = kx, \tag{2.39}$$

onde k é uma constante arbitrária, é uma trajectória ortogonal da família de circunferências (2.38). Reciprocamente, cada uma das circunferência da família (2.38) é uma trajectória ortogonal da família de rectas (2.39).

O próximo passo consiste em determinar as trajectórias ortogonais correspondentes a uma família de curvas genérica dada $F(x, y, c) = 0$. O procedimento baseia-se no facto de que se duas famílias de curvas, γ_1 e γ_2, se intersectam ortogonalmente no plano xy, então os respectivos declives nos pontos de intersecção devem verificar a igualdade

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2}\right)^{-1}.$$

Assim, começamos por obter uma equação diferencial de primeira ordem que expresse o declive em cada um dos pontos da família (2.37) fazendo:

(1) derivação implícita ou explícita da relação (2.37) em ordem a x

(2) (eventual) eliminação da constante arbitrária c usando a relação (2.37) e a equação diferencial que se obteve em (1)

Assumiremos que a equação diferencial resultante, que representa a família de curvas (2.37), pode ser expressa na forma

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = f(x, y),$$

onde $f(x, y)$ é uma função dada. Portanto, uma curva C da família de curvas γ_1 que passa pelo ponto de coordenadas (x, y) tem nesse ponto declive $dy/dx = f(x, y)$. Assim sendo, o declive de cada uma das curvas de γ_2 deverá obedecer a

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_1} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2}\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma 1}\right)^{-1},$$

pelo que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\gamma_2} = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{2.40}$$

Esta equação diferencial de primeira ordem define a família de curvas γ_2. Uma família de curvas

$$G(x,y,c) = 0$$

que seja solução da equação diferencial (2.40) representa a família de trajectórias ortogonais da família dada (2.37), excepto possivelmente para algumas trajectórias ortogonais que são rectas verticais.

Resumo do procedimento

(1) A partir da equação

$$F(x,y,c) = 0,$$

que define a família de curvas dada, determinamos a correspondente equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

(2) A equação diferencial correspondente às trajectórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} \tag{2.41}$$

(3) Determinamos a família de soluções

$$G(x,y,c) = 0$$

associada à equação diferencial (2.41), obtendo assim a desejada família de trajectórias ortogonais (exceptuando, possivelmente, certas trajectórias que são rectas verticais, as quais têm que ser determinadas separadamente)

Exemplo 50 *Determinar as trajectórias ortogonais à família de curvas*

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{2.42}$$

onde c é uma constante arbitrária.
Solução. *Derivando ambos os membros da equação precedente em ordem a x, tem-se*

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

A equação diferencial correspondente à família de trajectórias ortogonais é então - ver equação (2.41),

$$\frac{dy}{dx} = -\left(-\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}.$$

Determinamos agora uma família de soluções desta equação diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \underset{y(x)\neq 0}{\Rightarrow} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|k_1| \quad \Rightarrow \quad y = k_1 x,$$

onde k_1 é uma constante arbitrária não nula. Temos ainda que considerar a solução $y(x) = 0$ (porquê?), pelo que a família de soluções é dada por

$$y = kx,$$

onde k é uma constante arbitrária. Obtivemos assim uma família de trajectórias ortogonais à família de circunferências (2.42). Resta averiguar se há rectas verticais que sejam ortogonais à família de circunferências dada. Para este efeito, note-se que na família de circunferências todos os pontos da forma $(0, y)$ têm declive nulo já que nessas condições

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = 0.$$

Portanto, a recta $x = 0$ também faz parte do conjunto de trajectórias ortogonais. Note-se que a família de trajectórias ortogonais determinada anteriormente, $y = kx$, não inclui esta recta. Em resumo, a solução do problema proposto é (ver Figura 2.4)

$$y = kx \qquad e \qquad x = 0.$$

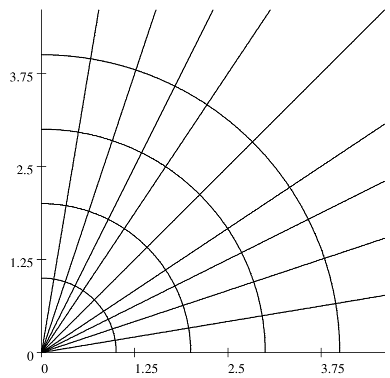


Figura 2.4: Representação gráfica da família de circunferências $x^2 + y^2 = c^2$ e respectivas trajectórias ortogonais em $[0, 4] \times [0, 4]$. Nos restantes quadrantes a representação é simétrica

Exemplo 51 *Determinar as trajectórias ortogonais à família de parábolas*

$$y = c(x-1)^2, \tag{2.43}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Solução. *Começamos por obter a equação diferencial de primeira ordem que nos dá o declive em cada ponto da família de parábolas. Derivando ambos os membros da equação dada em ordem a* x *obtemos*

$$\frac{dy}{dx} = 2c\,(x-1)\,.$$

Note-se desde já que todos os pontos da forma $(1, y)$ *têm derivada nula, pelo que a recta* $x = 1$ *é ortogonal à família de curvas dada. Eliminando c usando a equação (2.43) resulta*

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x-1},$$

pelo que o declive em cada ponto das trajectórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y}.$$

Resta determinar uma família de soluções desta equação diferencial, ou seja,

$$2y\,dy + (x-1)\;dx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2y^2 + (x-1)^2 = k^2,$$

onde k *é uma constante arbitrária. Resultam assim as trajectórias ortogonais*

$$2y^2 + (x-1)^2 = k^2 \qquad e \qquad x = 1$$

que se apresentam na Figura (2.5).

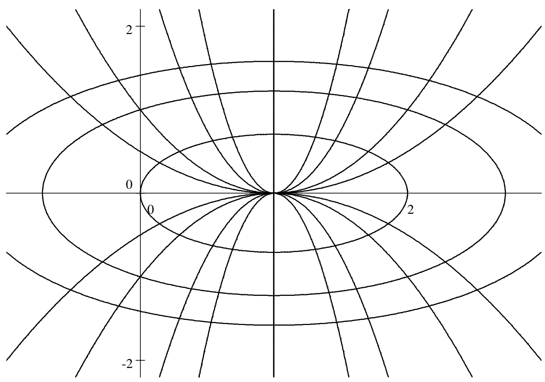


Figura 2.5: Representação gráfica da família de parábolas $y = c(x-1)^2$ e respectivas trajectórias ortogonais em $[-1, 3] \times [-2, 2]$

Exercícios

Exercício 35 *Determine as trajectórias ortogonais a cada uma das seguintes famílias de curvas.*

(a) $y = cx^3$.

(b) $cx^2 + y^2 = 1$.

(c) $y = e^{cx}$.

(d) $y = x - 1 + ce^{-x}$.

2.8 Exercícios de revisão do Capítulo 2

Exercício 36 *Determine uma família de soluções das seguintes equações diferenciais usando dois métodos de resolução distintos.*

(a) $6x^2y\,dx - (x^3+1)\,dy = 0$.

(b) $e^{2x}y^2\,dx + (e^{2x}y - 2y)\,dy = 0$.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1$.

Exercício 37 *Determine uma família de soluções de cada uma das equações diferenciais seguintes.*

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-7y}{3y-8x}$.

(b) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + xy = e^{-x}$.

(c) $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^3$.

(d) $\dfrac{dy}{dx} = (y+x)^2$, *sugestão: fazer* $w(x) = [y(x)+x]^2$ *e resolver a equação diferencial resultante em ordem a* $w(x)$.

(e) $\dfrac{dy}{dx} = 4y - 16x + 4$, *sugestão: fazer* $w(x) = 4y(x) - 16x + 4$ *e resolver a equação diferencial resultante em ordem a* $w(x)$.

Exercício 38 *Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial.*

(a) $\left(x^2+y^2\right)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad y(1) = 2$.

(b) $(e^{2x}y^2 - 2x)\,dx + e^{2x}y\,dy = 0, \quad y(0) = 2$.

(c) $4xy\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(2) = 1$.

(d) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2, \\ x/2, & x > 2. \end{cases}$

(e) $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy = \dfrac{y^3}{x}, \quad y(1) = 1$.

Exercício 39 *Determine o valor de k por forma a que as parábolas $y = c_1 x^2 + k$ sejam as trajectórias ortogonais da família de elípses $x^2 + 2y^2 - y = c_2$.*

Exercício 40 *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{2.44}$$

designa-se uma equação diferencial de Riccati.

(a) *Mostre que se $A(x) \equiv 0$ a equação diferencial (2.44) é linear, enquanto que para $C(x) \equiv 0$ é uma equação diferencial de Bernoulli*

(b) *Mostre que se $f(x)$ é uma solução (conhecida) da equação diferencial (2.44), então a transformação*

$$y = f + \frac{1}{v}$$

converte a equação diferencial (2.44) numa equação diferencial linear em v

(c) *Usando o resultado obtido na alínea (b) determine uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + \left(1 - 2x^2\right) y + x^3 - x + 1,$$

sabendo que $f(x) = x$ é uma solução desta equação diferencial.

Exercício 41 *Considere um objecto pontual P que se desloca ao longo do eixo OX. Seja x a abcissa de P em cada instante de tempo t.*

(a) *Suponha que a velocidade de P em cada instante, dx/dt, se relaciona com a sua abcissa através da lei*

$$\frac{dx}{dt} = x$$

e que a posição de P no instante inicial, $t = 0$, é $x(0) = 5$. Qual será a abcissa de P para $t = 5$?

(b) *Suponha agora que a lei que relaciona a velocidade, a abcissa e o tempo é*

$$\frac{dx}{dt} = x + t$$

e que $x(0) = 1$. Determine $x(t)$ usando dois métodos distintos: i) recorrendo a um factor integrante adequado; ii) realizando a mudança de variável $w = x + t$ e resolvendo a equação diferencial resultante em $w(t)$.

Exercício 42 *Um objecto pontual M de massa unitária, $m = 1$, desloca-se ao longo do eixo OX com velocidade $v(t)$ em cada instante de tempo t. O ponto M está sujeito a uma força de* *atrito* $F_a = -2v$ *e a uma força* $F_e = t$*, de tal forma que a sua velocidade em cada instante* t *é dada pela segunda lei de Newton*

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_a + F_e \\ &= -2v + t, \end{aligned}$$

ou seja, atendendo a que $m = 1$*,*

$$\frac{dv}{dt} = -2v + t.$$

(a) Determine a velocidade de M *em cada instante de tempo sabendo que* $v(0) = 0$*.*

(b) Supondo que no instante inicial, $t = 0$*,* M *se encontra na origem das abcissas, determine a sua posição em cada instante de tempo,* $x(t)$*, sabendo que*

$$\frac{dx}{dt} = v$$

(c) Determine $v(t)$ *no caso de* $F_a = -v^2$*,* $F_e = 1$ *e* $v(0) = 2$*.*

Exercício 43 *Um objecto pontual* Q *de massa* m *desloca-se com movimento rectilíneo sobre o eixo* OX*, estando sujeito a uma força* $-kx$ *que o atrai para o ponto* O*, onde* $k > 0$ *é uma constante de proporcionalidade e* x *a abcissa correspondente à posição de* Q*. Nestas condições a lei que rege o movimento de* Q *é*

$$v\frac{dv}{dx} = -\alpha x,$$

onde $\alpha = k/m$*. Sabendo que a velocidade inicial de* Q *é* $v(0) = v_0 > 0$ *e a sua posição inicial* $x(0) = x_0$*, mostre que:*

(a) $v^2 = v_0^2 + \alpha(x_0^2 - x^2)$*.*

(b) $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}t) + x_0 \cos(\sqrt{\alpha}t)$*.*

Sugestão: atenda aos seguintes resultados,

$$v = dx/dt, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{b}, \quad \operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta.$$

Exercício 44 *Um circuito eléctrico é composto por uma fonte electromotriz que em cada instante* t *fornece uma tensão* E*, um elemento com resistência* R *e outro elemento com indutância* L *ligados em série. Nestas condições a intensidade de corrente em cada instante* i *obedece a*

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Determine i *quando:*

(a) $E = 200$, $R = 100$, $L = 100$, $i(0) = 0$.

(b) $E = 200\cos t$, $R = 100$, $L = 100$, $i(0) = 0$.

Exercício 45 *Para uma dada população, seja x o número de indivíduos que dela fazem parte no instante t. Suponhamos que a lei que rege a evolução temporal de x é*

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

onde k é uma constante positiva. Neste contexto, considere uma população sobre a qual se sabe que o número de indivíduos no ano 2000 *era de* 10000*, sendo de* 5000 *no ano* 1900.

(a) Com base nestes dados determine qual deverá ser o número de membros da população no ano 2100.

(b) Supondo agora que para outra população a lei a considerar é

$$\frac{dx}{dt} = 10^{-2}x - 10^{-8}x^2, \quad x < 10^6.$$

Sabendo que no ano 2000 *a população tinha*100000 *membros, determine:*

(i) o número de membros no ano 2100.

(ii) o número de membros quando $t \to +\infty$.

Exercício 46 *A lei de arrefecimento de Newton postula que a velocidade de arrefecimento de um corpo é proporcional, em cada instante, à diferença entre a temperatura do corpo T e a temperatura do meio circundante T_m, ou seja,*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

onde k é uma constante positiva e $T_c > T_m$. Considerando que a temperatura de determinado corpo é de $30\,^oC$ no instante $t = 0$, passando a ser de $17.5\,^oC$ para $t = 1$ hora e de $11.25\,^oC$ para $t = 2$ horas, determine:

(a) a temperatura do meio circundante (suposta constante durante o processo de arrefecimento).

(b) a temperatura do objecto para $t = 3$ horas.

(c) a temperatura do objecto quando $t \to +\infty$.

2.9 Soluções dos exercícios do Capítulo 2

17. (a) $y^2+3x^2+4xy = c$; (b) $x^2y+x+2y^2 = c$; (c) $\left(\theta^2+1\right)\operatorname{sen} r = c$; (d) $\left(s-s^2\right)/t = c$.

18. (a) $x^2y - 3x + 2y^2 = 7$; (b) $e^x\,(y+2) + y^2x = 8$.

19. (a) $A = 3/2$, $2x^3 + 9x^2y + 12y^2 = c$; (b) $A = -2$, $y/x^2 - y/x = c$.

20. (a) $f(x, y) = x^2y + \phi(y)$; (b) $f(x, y) = y^2e^x + y^3e^{3x} + \phi(x)$.

21. (b) $n = -2$; (c) $x + x^2/y = c$; (d).$x + x^2/y = c$ e $y = 0$.

22. (b) $\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\varphi = c$.

23. (a) $y\left(x^2+1\right)^2 = c$; (b) $\mathrm{tg}^{-1} r^2 + \mathrm{tg}^{-1} s = c$; (c) $r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = c$;
(d) $(x+1)^6(x+2)^{-4}(y^2+1) = c$, $c \geq 0$; (e) $x - \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = c$.

24. (a) $(x+4)(y+2)^{-2}e^y = e^{-1}$; (b) $2\,\mathrm{sen}\,2x + 4x - \mathrm{cotg}\,y = \pi + 1$; (c) $z(x) = 0$.

25. (a) $-\ln(c - e^x)$; (b) $\frac{1}{2}x + e^{2(c-x)} - \frac{1}{4}$; (c) $\mathrm{tg}\,(x-c) - x$.

26. (a) $y = x\ln(-x) + cx$; (b) $(v/u)^2 - \ln v^2 = c$ e $v(u) = 0$; (c) $\ln x^3 - \left(1 + y^2/x^2\right)^{3/2} = c$.

27. (a) $x^2 + y^2 - 5x^3 = 0$; (b) $y = 2\sqrt{1-3x} - 2x + 2$.

28. (a) $x^2 + 4xy - y^2 = c$; (b) $x^3 + 6xy^2 - y^3 = c$.

29. (a) Sempre; (b) Se e só se $B = 2D$ e $E = 2C$.

31. (a) $y = x^3 + cx^{-3}$; (b) $y = cx^{-2} - x^{-3}$; (c) $x = 1 + ce^{1/t}$; (d) $r = \ln(\cos\theta) + \mathrm{sen}\,\theta + c$.

32. (a) $y = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}e^{-x^3}$; (b) $y = x - 1 + e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$ e $y = 1 + e^{-x}(1-e)$ para $x > 1$.

33. (a) $y = x(x+c)^{-1}$; (b) $y^{-3} = 2x^6 + cx^3$; (c) $\ln\left(x^2-2\right)t + t = c$; (d) $y^4 = 2 + ce^{-8x^2}$.

34. (a) $y^4 = x^2 + 15x^{-2}$; (b) $y = 4x^{-3}$

35. (a) $3y^2 + x^2 = k^2$ e $x = 0$; (b) $2x + y^2 - \ln y^2 = k$ e $x = 0$; (c) $(\ln y^2 - 1)y^2 + 2x^2 = k$;
(d) $2y + \ln(y - x - 1)^2 = k$.

36. (a) $y = c\left(x^6 + 2x^3 + 1\right)$; (b) $y = c\left(e^{2x} - 2\right)^{1/2}$; (c) $y = x\ln x + cx$.

37. (a) $(3y+2x)^2 = c(y-x)$, $c > 0$; (b) $y = (cx + c - 1)e^{-x}$; (c) $y^{-2} = 1 + cx^2$ e $y = 0$;
(d) $y = \mathrm{tg}\,(x-c) - x$; (e) $y = 4x + e^{4(x-c)}$.

38. (a) $y = \left(x^2 + 3x\right)^{1/2}$; (b) $e^{2x}y^2 - 2x^2 = 4$; (c) $y = (\sqrt{2x}/2 - 1)^{1/2}$;
(d) $y = 1 - e^{-x}$ se $x \leq 2$ e $2y = x - 1 - \left(2 - e^2\right)e^{-x}$ se $x > 2$; (e) $e^{1-x^2/y^2} = x^2$.

39. $k = 1/4$.

40. (b) $dv/dx + [2A(x)f(x) + B(x)]\ v = -A(x)$; (c) $y = x + (1 - x + ce^{-x})^{-1}$.

41. (a) $x = 5\,e^t$, $x(5) = 5\,e^5$; (b) $x = 2\,e^t - t - 1$.

42. (a) $v = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}$; (b) $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}$; (c) $v = (3\,e^{2t} + 1)/(3\,e^{2t} - 1)$.

44. (a) $i = 2(1 - e^{-t})$; (b) $i = (\cos t + \operatorname{sen} t - e^{-t})/2$.

45. (a) $x = 9.54 \times 10^{-3} 2^{t/100}$, 20000; (b) $x = (10^{-6} + 4370 e^{-t/100})^{-1}$, (i) 232010, (ii) 10^6.

46. $T = 25 e^{-t \ln 2} + 5$; (a) $5\,^oC$; (b) $8.125\,^oC$; (c) $5\,^oC$.

Capítulo 3

Resolução analítica de equações diferenciais lineares de ordem n

3.1 Introdução às equações diferenciais lineares de ordem n

Definição 19 *Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n na variável dependente y e na variável independente x é uma equação diferencial que se encontra, ou pode ser expressa, na forma*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x), \tag{3.1}$$

onde $a_0(x)$ não é identicamente nula. Supomos que as funções reais a_0, a_1, $\ldots$, a_n e F são funções reais contínuas no intervalo real $I = [a, b]$ e que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. O termo do lado direito (segundo membro) da equação diferencial precedente, $F(x)$, designa-se ***termo não-homogéneo*** *da equação diferencial. Se a função F for identicamente nula, a equação diferencial diz-se uma* ***equação diferencial linear homogénea****.*

Para $n = 2$ a equação diferencial (3.1) reduz-se a

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x),$$

sendo a correspondente equação diferencial de segunda ordem homogénea (ou incompleta)

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

De novo, supomos que a_0, a_1, a_2 e F são funções reais contínuas em $I = [a, b]$ e que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 52 *A equação diferencial*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \cos x\frac{dy}{dx} + x^3\, y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem.

3.2 Propriedades das equações diferenciais lineares homogéneas

Consideramos agora alguns resultados relativos à equação diferencial linear homogénea

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.2}$$

Teorema 34 *Sejam f_1, f_2, ..., f_m, m soluções da equação diferencial (3.2). Então*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m,$$

onde c_1, c_2, ..., c_m, são constantes arbitrárias, é ainda uma solução da equação diferencial (3.2).

Demonstração Tem-se, por hipótese,

$$a_0(x)\frac{d^n f_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}f_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_1}{dx} + a_n(x)f_1 = 0$$
$$a_0(x)\frac{d^n f_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}f_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_2}{dx} + a_n(x)f_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_0(x)\frac{d^n f_m}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}f_m}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{df_m}{dx} + a_n(x)f_m = 0,$$

pelo que, atendendo à linearidade da equação diferencial dada, resulta

$$a_0(x)\frac{d^n c_1 f_1}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}c_1 f_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_1 f_1}{dx} + a_n(x)c_1 f_1 = 0$$
$$a_0(x)\frac{d^n c_2 f_2}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}c_2 f_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_2 f_2}{dx} + a_n(x)c_2 f_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_0(x)\frac{d^n c_m f_m}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}c_m f_m}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dc_m f_m}{dx} + a_n(x)c_m f_m = 0.$$

Adicionando cada um dos membros das m equações diferenciais precedentes e agrupando as várias derivadas, tem-se

$$a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) + a_n(x)\left(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m\right) = 0,$$

ficando assim demonstrado o resultado pretendido. ■

Definição 20 *Se $f_1, f_2, \ldots, f_m$, são m funções dadas e $c_1, c_2, \ldots, c_m$, são m constantes, então a expressão*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

designa-se uma ***combinação linear*** *das funções $f_1, f_2, \ldots, f_m$.*

Podemos reformular o teorema precedente usando esta definição.

Teorema 35 *Qualquer combinação linear de soluções da equação diferencial linear homogénea (3.2) é ainda uma solução dessa equação diferencial.*

Exemplo 53 *Pode-se verificar facilmente que as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são soluções da equações diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

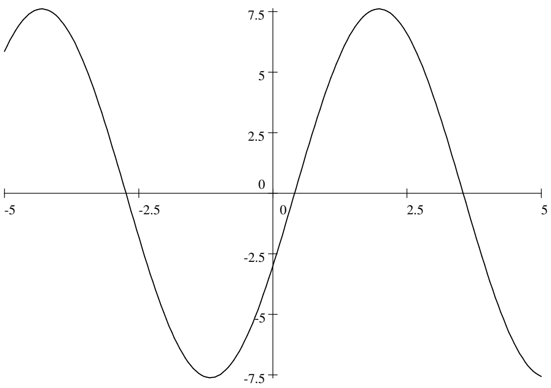
O teorema precedente garante que a combinação linear

$$c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

é também uma solução da equação diferencial dada quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2. Por exemplo,

$$7 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$$

é uma solução da equação diferencial dada.



Representação gráfica da função $7 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$

Exemplo 54 *Sabendo que e^x, e^{-x} e e^{2x} são soluções da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

conclui-se que

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

é uma solução da equação diferencial dada quaisquer que sejam as constantes c_1, c_2 e c_3. Assim,

$$3e^x - 4e^{-x} + 10e^{2x}$$

é uma solução da equação diferencial dada.

Passamos agora a lidar com o que designaremos por solução geral da equação diferencial (3.2). Para esse efeito começaremos por introduzir (ou recordar) os conceitos de dependência linear e independência linear de funções.

Definição 21 *As n funções f_1, f_2, ..., f_n, dizem-se **funções linearmente dependentes** no intervalo $I = [a, b]$ se existem constantes c_1, c_2, ..., c_n, não todas nulas, tais que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 55 *As funções x e $2x$ são linearmente dependentes no intervalo $[0, 1]$ já que existem constantes c_1 e c_2, não todas nulas, tais que*

$$c_1(x) + c_2(2x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (c_1 + 2c_2)\, x = 0$$

para todo $x \in [0, 1]$. Considere-se, por exemplo, $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$.

Exemplo 56 *As funções $\operatorname{sen} x$, $3 \operatorname{sen} x$ e $-\operatorname{sen} x$ são linearmente dependentes no intervalo $[-1, 2]$ pois existem constantes c_1, c_2 e c_3, não todas nulas, tais que*

$$c_1(\operatorname{sen} x) + c_2(3 \operatorname{sen} x) + c_3(-\operatorname{sen} x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (c_1 + 3c_2 - c_3) \operatorname{sen} x = 0$$

para todo $x \in [-1, 2]$. Tome-se, por exemplo, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 4$.

Definição 22 *As n funções f_1, f_2, ..., f_n, dizem-se **funções linearmente independentes** no intervalo $I = [a, b]$ se não são linearmente dependentes nesse intervalo. Ou seja, as funções f_1, f_2, ..., f_n, são linearmente independentes em I se a relação*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \qquad \forall x \in I$$

implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Por outras palavras, a única combinação linear das funções f_1, f_2, ..., f_n, que é identicamente nula em I é a combinação trivial

$$0 \times f_1(x) + 0 \times f_2(x) + \cdots + 0 \times f_n(x) = 0.$$

Exemplo 57 *As funções x e x^2 são linearmente independentes no intervalo $[0, 1]$ pois*

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0, \qquad \forall x \in [0, 1]$$

verifica-se somente quando $c_1 = c_2 = 0$ (porquê?).

O próximo teorema diz respeito à existência de conjuntos de soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, bem como à relevância de tais conjuntos na construção de soluções deste tipo de equações diferenciais.

Teorema 36 *A equação diferencial linear homogénea de ordem n (3.2) possui sempre n soluções linearmente independentes. Mais ainda, se f_1, f_2, ..., f_n, são n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.2), então toda a solução da equação diferencial (3.2) pode ser expressa como uma combinação linear*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

destas n funções linearmente independentes, escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, ..., c_n.

Este teorema diz-nos que dada uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, existe um conjunto de n soluções linearmente independentes. Uma vez assegurada a existência desse conjunto, o teorema estabelece que qualquer solução da equação diferencial (3.2) pode ser escrita como uma combinação linear das n soluções linearmente independentes escolhendo adequadamente as constantes que intervêm na combinação linear.

Exemplo 58 *Vimos anteriormente que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são soluções da equação diferencial linear homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

em $\mathbb{R}$. Pode-se mostrar que estas duas soluções são linearmente independentes (ver Exemplo 61). Suponhamos agora que f é uma solução qualquer desta equação diferencial. O Teorema 36 garante que f pode ser expressa como uma determinada combinação linear $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ das funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ escolhendo adequadamente as constantes c_1 e c_2. Ou seja, existem duas constantes c_1 e c_2 tais que

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo, $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ é uma solução da equação diferencial dada conforme se verifica facilmente. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + \pi/6) &= \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x, \end{aligned}$$

vemos que a solução $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ pode ser expressa como uma combinação linear

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x$$

das duas soluções linearmente independentes $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$. Considerou-se, portanto, $c_1 = \sqrt{3}/2$ e $c_2 = 1/2$.

Seja agora f_1, f_2, ..., f_n, um conjunto de n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.2). Então o Teorema 35 garante que a combinação linear

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x), \tag{3.3}$$

onde c_1, c_2, ..., c_n, são constantes arbitrárias, é também uma solução da equação diferencial (3.2). Por outro lado, pelo Teorema 36 sabemos que se f é uma solução da equação diferencial (3.2), então f pode ser expressa como uma combinação linear (3.3) das n soluções linearmente independentes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, escolhendo adequadamente as constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Portanto, a combinação linear (3.3) das n soluções linearmente independentes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, na qual c_1, c_2, ..., c_n, são constantes arbitrárias, deve incluir todas as soluções da equação diferencial (3.2). Por esta razão, referimos-nos a um conjunto de n soluções da equação diferencial homogénea (3.2) como "um conjunto fundamental de soluções" dessa equação diferencial e designamos uma combinação linear "geral" de n soluções linearmente independentes por "solução geral" da equação diferencial (3.2).

Definição 23 *Se f_1, f_2, ..., f_n, são n soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogénea de ordem n*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{3.4}$$

em $I = [a, b]$, então o conjunto f_1, f_2, ..., f_n, designa-se ***um conjunto fundamental de soluções*** *desta equação diferencial. Por outro lado, a função f definida por*

$$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x), \qquad x \in I,$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$, são constantes arbitrárias, designa-se ***solução geral da equação diferencial*** *(3.4) em I.*

Exemplo 59 *Sabendo que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

para todo x real, então $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ constituem um conjunto fundamental de soluções desta equação diferencial, sendo a sua solução geral dada por

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Escrevemos então

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Exemplo 60 *Pode-se mostrar que as soluções e^x, e^{-x} e e^{2x} da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são linearmente independentes para todo x real (ver Exemplo 62). Então e^x, e^{-x} e e^{2x} constituem um conjunto fundamental de soluções desta equação diferencial, sendo a sua solução geral dada por

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x},$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes arbitrárias.

O próximo teorema fornece-nos um critério simples para determinar se n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n são ou não linearmente independentes. Antes, porém, introduzimos um novo conceito.

Definição 24 *Sejam f_1, f_2, ..., f_n, n funções reais, cada uma possuindo derivadas até à ordem $n-1$ em $I = [a, b]$. O determinante*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

*designa-se o **Wronskiano** destas n funções. Note-se que $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ é, tal como f_1, f_2, ..., f_n, uma função real definida em I.*

Teorema 37 *As n soluções f_1, f_2, ..., f_n, de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n são linearmente independentes em $I = [a, b]$ se e só se o Wronskiano de f_1, f_2, ..., f_n, é diferente de zero para algum valor de x em I.*

No contexto das equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n tem-se o seguinte resultado.

Teorema 38 *O Wronskiano de n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n ou é identicamente nulo em I ou nunca se anula nesse intervalo.*

Portanto, se conhecermos n soluções de uma equação diferencial linear homogénea de ordem n, podemos usar o teorema precedente para determinar se são ou não linearmente independentes. Se forem linearmente independentes, formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial em causa, escrevendo-se a respectiva solução geral como uma combinação linear destas n funções com coeficientes arbitrários.

Exemplo 61 *Podemos aplicar o Teorema 38 para mostrar que as soluções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

são linearmente independentes. De facto,

$$W(\cos x, \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

para todo x real. Portanto, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial dada.

Exemplo 62 *As soluções* e^x, e^{-x} *e* e^{2x} *da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são linearmente independentes em qualquer intervalo real pois

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0$$

para todo x *real.*

Exemplo 63 *As soluções* x *e* $2x$ *da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

são linearmente dependentes em qualquer intervalo real pois

$$W\left(x, 2x\right) = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

para todo x *real.*

A redução da ordem

Teorema 39 *Seja* $f(x)$ *uma solução não-trivial da equação diferencial linear homogénea de ordem* n

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.5}$$

Então a transformação $y = f(x)v$ *reduz a equação diferencial (3.5) a uma equação diferencial linear homogénea de ordem* $n-1$ *na variável* $w = dv/dx$.

Demonstração Este teorema será particularmente útil na obtenção de soluções de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem 2. Vejamos o que acontece nessa situação. Considere-se, para o efeito, a equação diferencial (3.5) no caso e que $n = 2$, ou seja,

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0. \tag{3.6}$$

Seja a transformação

$$y = f(x)v, \tag{3.7}$$

onde $f(x)$ é uma solução conhecida da equação diferencial (3.6). Derivando a equação precedente, resulta

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{dv}{dx} + \frac{df(x)}{dx}v, \tag{3.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2f(x)}{dx^2}v. \tag{3.9}$$

Substituindo (3.7), (3.8) e (3.9) em (3.6) obtém-se

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2}+\left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx}+\left[a_0(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_2(x)f(x)\right]v = 0.$$

Como f é uma solução da equação diferencial (3.6), o coeficiente que multiplica v na equação diferencial agora obtida é nulo, resultando

$$a_0(x)f(x)\frac{d^2v}{dx^2} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]\frac{dv}{dx} = 0.$$

Realizando a mudança de variável $w = dv/dx$, vem

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left[2a_0(x)\frac{df(x)}{dx} + a_1(x)f(x)\right]w = 0,$$

que é uma equação diferencial linear homogénea de primeira ordem na variável dependente w. Portanto, supondo que $f(x) \neq 0$ e $a_0(x) \neq 0$, tem-se

$$\frac{dw}{w} = -\left[2\frac{df(x)}{dx}\frac{1}{f(x)} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right]dx,$$

resultando por primitivação e subsequente exponenciação

$$w = c\exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]\frac{1}{[f(x)]^2}.$$

Tomando $c = 1$ e tendo em conta que $w = dv/dx$, obtém-se

$$v = \int\frac{\exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{[f(x)]^2}\,dx,$$

resultando, atendendo a que $y = vf(x)$,

$$y = f(x)\int\frac{\exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{[f(x)]^2}\,dx.$$

Esta última solução, que designamos por $g(x)$, é também uma solução da equação diferencial (3.6). Além disso, $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes já que

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & f(x)v \\ f'(x) & f(x)v' + f'(x)v\end{vmatrix} = [f(x)]^2\,v' = \exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right] \neq 0.$$

Portanto, f e g formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial (3.6), pelo que a combinação linear

$$c_1 f + c_2 g$$

é a solução geral da equação diferencial (3.6). $\blacksquare$

Exemplo 64 *Sabendo que $y = x$ é uma solução da equação diferencial*

$$\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

determinar uma solução linearmente independente usando a propriedade da redução de ordem.
Solução. *Fazendo a mudança de variável $y = vx$, tem-se*

$$y = vx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx},$$

pelo que substituindo estas expressões na equação diferencial dada, resulta

$$\left(x^2+1\right)\left(x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\right) - 2x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) + 2vx = 0,$$

ou seja

$$x\left(x^2+1\right)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} = 0. \tag{3.10}$$

Fazendo a mudança de variável $w = dv/dx$ obtém-se

$$w = \frac{dv}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dw}{dx},$$

vindo para a equação diferencial (3.10)

$$x\left(x^2+1\right)\frac{dw}{dx} + 2w = 0,$$

que, conforme esperado, é uma equação diferencial de primeira ordem. Tem-se,

$$\frac{dw}{w} = -\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dw}{w} = \left(-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx,$$

resultando por primitivação e posterior exponenciação

$$\ln|w| = -2\ln|x| + \ln\left(x^2+1\right) + \ln|c| \qquad \Rightarrow \qquad w = c\frac{x^2+1}{x^2} = c\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

onde c é uma constante arbitrária não nula (porquê?). Tomando $c = 1$ e atendendo a que $w = dv/dx$ vem

$$\frac{dv}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad v = x - \frac{1}{x} + k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Tomando $k = 0$ resulta

$$y = vx = x^2 - 1,$$

isto é,

$$g(x) = f(x)v(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

O Teorema 39 garante que esta é a solução linearmente independente que procurávamos. As funções x e $x^2 - 1$ constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada pelo que a sua solução geral é

$$y = c_1 x + c_2\left(x^2 - 1\right).$$

Exercícios

Exercício 47 *Mostre que se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são duas soluções da equação diferencial*

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0,$$

então $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ também é uma solução desta equação diferencial, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Exercício 48 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

(a) Mostre que e^x e xe^x são soluções linearmente independentes desta equação diferencial para todo x real.

(b) Escreva a solução geral da equação diferencial dada.

(c) Determine a solução que satisfaz a condição $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Exercício 49 *Considere a equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad x \in [1, 2]$$

(a) Mostre que x e x^2 são soluções linearmente independentes desta equação diferencial para todo $x \in [1, 2]$.

(b) Escreva a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 50 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

(a) Mostre que as funções e^x, e^{4x} *e* $2e^x - 3e^{4x}$ *são soluções desta equação diferencial em* $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que as soluções e^x *e* e^{4x} *são linearmente independentes para todo* x *real.*

(c) Mostre que as soluções e^x *e* $2e^x - 3e^{4x}$ *também são linearmente independentes para todo* x *real.*

(d) Escreva a solução geral da equação diferencial dada.

Exercício 51 *Sabendo que* $f(x) = x$ *é uma solução da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

em $[1, 2]$ *determine uma solução linearmente independente,* $g(x)$*, usando a propriedade da redução de ordem e escreva a solução geral da equação diferencial dada.*

Exercício 52 *Sabendo que* $w(x) = e^{2x}$ *é uma solução da equação diferencial*

$$(2x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = 0,$$

em $[0, 1]$ *determine uma solução linearmente independente,* $q(x)$*, usando a redução de ordem e escreva a solução geral da equação diferencial dada.*

3.3 Propriedades das equações diferenciais lineares não-homogéneas

Consideramos agora alguns resultados relativos à equação diferencial não-homogénea (ou completa)

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x). \tag{3.11}$$

O principal teorema de base relativo a esta equação é o seguinte.

Teorema 40 *Seja* v *uma solução qualquer da equação diferencial linear não-homogénea de ordem* n *(3.11). Seja* u *uma solução qualquer da equação diferencial homogénea associada. Nestas condições* $u + v$ *é uma solução da equação diferencial não-homogénea (3.11).*

Demonstração A demonstração deste teorema recorre ao facto da equação diferencial ser linear. Efectivamente, tem-se por hipótese,

$$a_0(x)\frac{d^nv}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dv}{dx} + a_n(x)v = F(x)$$

e

$$a_0(x)\frac{d^nu}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u = 0.$$

Adicionando as duas equações precedentes membro a membro, obtém-se

$$a_0(x)\frac{d^n\,(u+v)}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}\,(u+v)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{d\,(u+v)}{dx}+a_n(x)\,(u+v)=F(x),$$

mostrando-se assim que $u+v$ é também uma solução de (3.11). ■

Exemplo 65 *Sabendo que $f(x)=x$ é uma solução da equação diferencial não-homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$$

e que $g(x)=\operatorname{sen}x$ é uma solução da equação diferencial homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0,$$

conclui-se que $h(x)=x+\operatorname{sen}x$ é também uma solução da equação diferencial não-homogénea dada.

Apliquemos agora o Teorema 40 ao caso em que v é uma solução dada y_p da equação diferencial não-homogénea (3.11) não envolvendo qualquer constante arbitrária, e que u é a solução geral

$$y_c=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$$

da equação diferencial homogénea associada. Então

$$y_c+y_p$$

é uma solução da equação diferencial não-homogénea (3.11) envolvendo n constantes arbitrárias. Temos o seguinte resultado.

Teorema 41 *Seja y_p uma solução dada da equação diferencial linear não-homogénea de ordem n (3.11) não envolvendo qualquer constante arbitrária. Seja*

$$y_c=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$$

a solução geral da equação diferencial homogénea (ou incompleta) associada. Então toda a solução da equação diferencial (3.11) pode ser expressa na forma

$$c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n+y_p$$

escolhendo adequadamente as constantes c_1, c_2, $\ldots$, c_n.

Tem-se a seguinte definição.

Definição 25 *Considere-se a equação diferencial linear não-homogénea de ordem n*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \tag{3.12}$$

e a equação diferencial homogénea associada

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.13}$$

Tem-se o seguinte:

1. *A solução geral da equação diferencial (3.13) designa-se* ***função complementar*** *da equação diferencial (3.12), denotando-se por y_c;*

2. *Qualquer solução particular da equação diferencial (3.12) que não envolva constantes arbitrárias designa-se um* ***integral particular*** *ou* ***solução particular*** *da equação diferencial (3.12), y_p;*

3. *A solução $y_c + y_p$ da equação diferencial (3.12), onde y_c é a função complementar e y_p é um integral particular da equação diferencial (3.12), designa-se* ***solução geral*** *da equação diferencial (3.12).*

Exemplo 66 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x.$$

A função complementar associada é a solução geral da equação diferencial homogénea associada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

pelo que (ver Exemplo 53)

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Por outro lado, um integral particular da equação diferencial não-homogénea é (ver Exemplo 65)

$$y_p = x,$$

pelo que a solução geral da equação diferencial não-homogénea pode ser escrita na forma

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Seguidamente abordaremos alguns métodos para obtenção destas duas componentes da solução geral. Para esse efeito comecemos por notar que se o membro não-homogéneo da equação diferencial (3.12) for expresso como uma combinação linear de duas ou mais funções, então podemos usar o seguinte resultado para obter uma solução particular daquela equação.

Teorema 42 *(*Princípio da sobreposição*) Sejam f_1, f_2, $\ldots$, f_m, integrais particulares das equações diferenciais*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_1(x), \tag{3.14}$$

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_2(x), \tag{3.15}$$

$$\vdots$$

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F_m(x), \tag{3.16}$$

respectivamente. Então

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_m f_m$$

é um integral particular da equação diferencial

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = k_1F_1(x) + k_2F_2(x) + \cdots + k_mF_m(x),$$

onde k_1, k_2, $\ldots$, k_m, são constantes. A demonstração deste teorema é imediata devido à linearidade das equações diferenciais envolvidas.

Exemplo 67 *Suponhamos que queremos determinar um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x + 5\operatorname{tg} x.$$

Podemos considerar duas equações diferenciais, a saber,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \qquad e \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg} x,$$

que têm integrais particulares x e $-(\cos x)\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$, respectivamente. Portanto, aplicando o ***princípio da sobreposição*** *podemos concluir que um integral particular da equação diferencial dada é*

$$y_p = 3x - 5(\cos x)\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$$

A vantagem está portanto em poder decompor o problema inicial em problemas mais simples, tantos quanto o número de parcelas existentes no termo não-homogéneo da equação diferencial para a qual se pretende determinar um integral particular.

Exercícios

Exercício 53 *Considere a equação diferencial linear não-homogénea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2.$$

(a) Mostre que e^x e e^{2x} são soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada.

(b) Qual a função complementar da equação diferencial dada?

(c) Mostre que $2x^2 + 6x + 7$ é um integral particular da equação diferencial dada.

(d) Qual a solução geral da equação diferencial dada?

Exercício 54 *Sabendo que um integral particular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$$

é $y = 1/6$; que um integral particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x$$

é $y = x/6 + 5/36$; e que um integral particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x$$

é $y = e^x/2$, determine um integral particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = -6 + 12x - 3e^x.$$

3.4 A equação linear homogénea com coeficientes constantes

Consideramos aqui a **equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes**

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0, \tag{3.17}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$, são constantes reais. Mostraremos que a solução geral desta equação diferencial pode ser obtida de forma explícita.

Devido à forma da equação diferencial (3.17), é de esperar que qualquer função $f(x)$ que seja uma solução dessa equação deve ter a seguinte propriedade:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[f(x)\right] = c_kf(x). \tag{3.18}$$

Ou seja, as derivadas de f devem ser múltiplos da própria função. A questão está em saber se existe alguma função com tal propriedade. A resposta é afirmativa pois a função

$$f(x) = e^{mx},$$

onde m é uma constante complexa, verifica a propriedade (3.18) uma vez que

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[f(x)\right] = \frac{d^k}{dx^k}\left[e^{mx}\right] = m^k e^{mx} = m^k f(x) = c_k f(x),$$

com $c_k = m^k$. Assim sendo, procuramos soluções da equação diferencial (3.17) da forma

$$y = e^{mx}$$

para um dado valor de m.

Assim, supondo que $y = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial (3.18) para um determinado valor de m, tem-se

$$y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = me^{mx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = m^n e^{mx}.$$

Substituindo estes resultados na equação diferencial (3.17), obtém-se

$$a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx} = 0$$

ou, dado que $e^{mx} \neq 0$ para todo x real,

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0. \tag{3.19}$$

Esta equação polinomial denomina-se **equação característica** da equação diferencial (3.17).

Se $y = e^{mx}$ é uma solução da equação diferencial (3.17), então a constante complexa m deve satisfazer a equação característica (3.19). Portanto, para determinar soluções da equação diferencial (3.17) escrevemos a equação característica associada (3.19) e determinamos as n soluções desta equação polinomial. Teremos várias situações consoante a natureza das raízes da equação característica: raízes reais distintas, raízes reais repetidas, raízes complexas conjugadas distintas e raízes complexas conjugadas repetidas. Vejamos o que acontece para cada um destes casos.

Raízes reais distintas

Suponhamos que as raízes da equação (3.19) são n números reais distintos,

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ ,\ m_n.$$

Então,

$$e^{m_1x},\ e^{m_2x},\ \ldots\ ,\ e^{m_nx}$$

são n soluções distintas da equação diferencial (3.17). Mais ainda, usando o Wronskiano pode-se mostrar que estas soluções são linearmente independentes. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 43 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.17). Se a equação característica associada (3.19) tiver n raízes reais distintas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, então a solução geral da equação diferencial (3.17) é*

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x} + \cdots + c_n e^{m_nx},$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$, são constantes arbitrárias.

Exemplo 68 *Considere-se o problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$
$$y(0) = -1, \; y'(0) = 0.$$

A equação característica correspondente à equação diferencial é

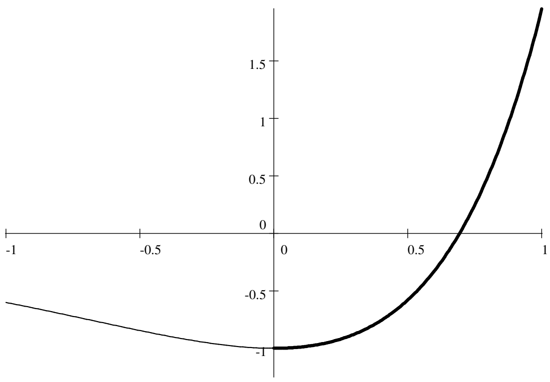
$$m^2 - 3m + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (m-1)(m-2) = 0,$$

sendo as suas raízes $m_1 = 1$ *e* $m_2 = 2$. *Tratando-se de duas raízes reais distintas, concluímos que* e^x *e* e^{2x} *são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de segunda ordem dada, pelo que constituem um conjunto fundamental de soluções dessa equação diferencial. Assim, a sua solução geral é*

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Calculando o valor de c_1 *e* c_2 *por forma a ter-se* $y'(0) = 0$, $y(0) = -1$, *obtém-se*

$$y = e^{2x} - 2e^x.$$



Representação gráfica da função $e^{2x} - 2e^x$

Exemplo 69 *Resolver o problema de valores iniciais*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0,$$
$$y(0) = 14, \; y'(0) = 12, \; y''(0) = 36.$$

Solução. *A equação característica correspondente à equação diferencial é*

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0.$$

Sabendo que $m_1 = -1$ *é uma raiz desta equação, podemos aplicar a "regra de Rufini" para determinar as restantes raízes. Obtém-se a factorização*

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = (m+1)(m^2 - 5m + 6) = (m+1)(m-2)(m-3).$$

As raízes obtidas são números reais distintos,

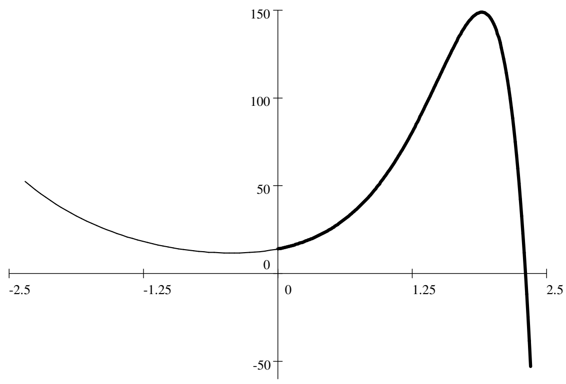
$$m_1 = -1, \qquad m_2 = 2, \qquad m_3 = 3,$$

pelo que a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}.$$

Calculando o valor de c_1, c_2, *e* c_3 *por forma a ter-se* $y(0) = 14$, $y'(0) = 12$, $y''(0) = 36$, *obtém-se*

$$y = 5e^{-x} + 10e^{2x} - e^{3x}.$$



Representação gráfica da função $5e^{-x} + 10e^{2x} - e^{3x}$

Raízes reais repetidas

Exemplo 70 *Considere-se a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

A equação característica associada,

$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$

tem duas raízes reais, mas que não são distintas, $m_1 = 3$ *e* $m_2 = 3$*. Correspondendo à raiz* $m_1 = 3$ *teríamos a solução* e^{3x}*, o mesmo acontecendo para a raiz* m_2*. Desta forma, as raízes da equação característica não conduzem a um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.*

Sabemos, portanto, que e^{3x} *é uma solução da equação diferencial proposta, faltando agora determinar outra solução que seja linearmente independente. Podemos determinar essa solução usando a propriedade (método) da redução de ordem. Ou seja, a segunda solução deve ser da forma*

$$y = e^{3x}\, v(x),$$

com $v(x)$ *não constante. Assim, fazemos*

$$y = e^{3x}\, v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3e^{3x}\, v + e^{3x}\, \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x}\, v + e^{3x}\, \frac{d^2v}{dx^2} + 6e^{3x}\, \frac{dv}{dx}.$$

Substituindo estes resultados na equação diferencial dada, vem

$$e^{3x}\left(9v + \frac{d^2v}{dx^2} + 6\,\frac{dv}{dx}\right) - 6e^{3x}\left(3v + \frac{dv}{dx}\right) + 9e^{3x}\, v = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$e^{3x}\frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Fazendo

$$w = \frac{dv}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dw}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2},$$

obtém-se

$$\frac{dw}{dx} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad w = c_1.$$

Tomando $c_1 = 1$, *resulta*

$$w = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = 1,$$

pelo que

$$v = x + c_2.$$

Escolhendo $c_2 = 0$ *tem-se* $v(x) = x$, *obtendo-se a solução*

$$y = e^{3x}\, v(x) = x\, e^{3x}.$$

Dispomos assim de duas funções, e^{3x} *e* $x\,e^{3x}$, *que constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial dada. Portanto, a respectiva solução geral é*

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x}.$$

Tendo este exemplo como guia, voltemos à equação diferencial de ordem n (3.17). Se a equação característica associada (3.19) tem uma raiz real m de multiplicidade dois, então é de esperar que e^{mx} e xe^{mx} sejam as duas soluções linearmente independentes correspondentes.

Suponhamos agora que a equação característica associada (3.19) tem uma raiz real m de multiplicidade dois e $n-2$ raízes reais distintas

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ ,\ m_{n-2}.$$

Nestas condições, as n soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.17) são

$$e^{mx},\ xe^{mx},\ e^{m_1 x},\ e^{m_2 x},\ \ldots\ ,\ e^{m_{n-2} x},$$

pelo que a solução geral é

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{mx} + c_3 e^{m_1 x} + \cdots + c_n e^{m_{n-2} x}.$$

De forma análoga, se a equação característica (3.19) tiver 3 raízes reais repetidas, m, pode-se mostrar por sucessivas aplicações da propriedade da redução de ordem que as 3 soluções linearmente independentes que lhes correspondem são

$$e^{mx}, \quad xe^{mx}, \quad x^2 e^{mx},$$

sendo a solução geral da equação diferencial dada por

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{mx}.$$

Tem-se então o seguinte resultado geral.

Teorema 44 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.17). Se a equação característica associada (3.19) tiver uma raiz real m de multiplicidade k, então a parte da solução geral da equação diferencial (3.17) correspondente a esta raiz é*

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{mx}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$, são constantes arbitrárias. Se, além disso, as restantes raízes da equação diferencial (3.17) são números reais distintos $m_{k+1}, \ldots, m_n$, então a solução geral de (3.17) escreve-se

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{m_{n1} x}.$$

Exemplo 71 *Considere-se o problema de valores de fronteira*

$$3\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 3y = 0,$$
$$y(0) = -\frac{5}{4},\ y(3) = \frac{55}{4}e^{-3}.$$

A equação característica associada à equação diferencial,

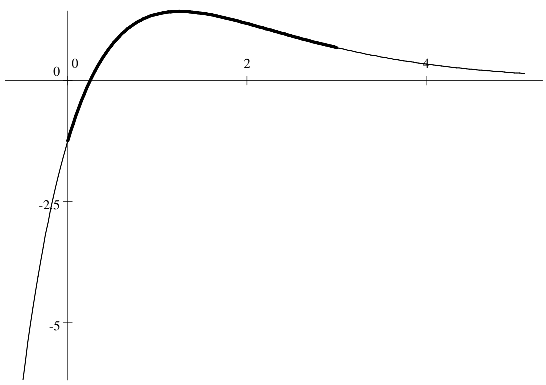
$$3m^2 + 6m + 3 = 0,$$

tem raízes -1 e -1, pelo que a solução geral da equação diferencial é

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}.$$

Atendendo às condições impostas, resulta

$$y = 5(x - 1/4)e^{-x}.$$



Representação gráfica da função $5(x-1/4)e^{-x}$

Exemplo 72 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+18y=0.$$

A sua equação característica,

$$m^3-4m^2-3m+18=0,$$

tem raízes 3*,* 3 *e* -2*, pelo que a solução geral da equação diferencial é*

$$y=(c_1+c_2x)\,e^{3x}+c_3e^{-2x}.$$

Exemplo 73 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-8y=0.$$

Solução. *A sua equação característica,*

$$m^4-5m^3+6m^2+4m-8=0,$$

tem raízes 2*,* 2*,* 2 *e* -1*, pelo que a solução geral da equação diferencial é*

$$y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^{2x}+c_4e^{-x}.$$

Raízes complexas conjugadas distintas

Suponhamos agora que a equação característica (3.19) tem a raiz $a+bi$, onde a e b são números reais, e que esta não se repete. Então, uma vez que os coeficientes da equação característica são números reais, $a-bi$ também é uma raiz da equação característica que não se repete (porquê?). A parte da solução geral da equação diferencial (3.17) que corresponde a estas duas raízes complexas conjugadas é

$$k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x}$$

ou, equivalentemente,

$$e^{ax}\left(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right),$$

onde k_1e k_2 são constantes complexas. Neste caso, as constantes k_1 e k_2 não podem ser arbitrárias, pois a expressão precedente deve ter parte imaginária nula (porquê?). Assim, temos de averiguar qual a parte real e a qual parte imaginária daquela expressão. Para esse efeito comecemos por notar que

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

pelo que,

$$\begin{aligned} e^{ax}\left(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right) &= e^{ax}\left[k_1(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + k_2(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)\right] \\ &= e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + i(k_1 - k_2)\operatorname{sen} bx\right]. \end{aligned}$$

Impondo que

$$\operatorname{Im}(k_1 + k_2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Im} k_1 = -\operatorname{Im} k_2$$

e

$$\operatorname{Re}(k_1 - k_2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Re} k_1 = \operatorname{Re} k_2$$

obtém-se a expressão

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx),$$

onde $c_1 = k_1 + k_2$ e $c_2 = i(k_1 - k_2)$ são duas constantes arbitrárias reais. Portanto, a parte da solução geral correspondente às raízes complexas conjugadas (não repetidas) $a + bi$ e $a - bi$ é

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx).$$

Teorema 45 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes (3.17). Se a equação característica associada (3.19) tem raízes complexas conjugadas não repetidas $a + bi$ e $a - bi$, onde a e b são números reais, então a parte correspondente na solução geral da equação diferencial (3.17) é*

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx).$$

Exemplo 74 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \\ &y(0) = 1, \; y'(0) = -1. \end{aligned}$$

Solução. *A equação característica associada à equação diferencial é*

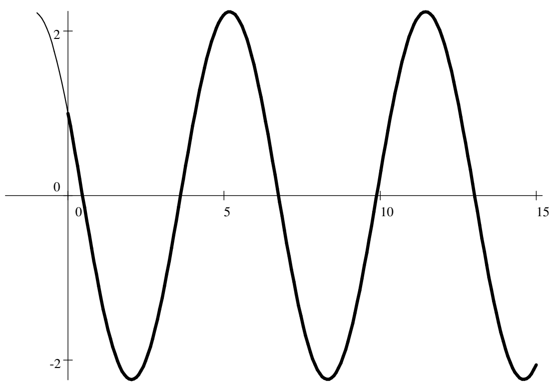
$$m^2 + 1 = 0,$$

cujas raízes são $0 \pm i$. *Assim, a respectiva solução geral é*

$$y = e^{0x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

É fácil mostrar que a solução do problema de valor inicial proposto é

$$y = \cos x - 2 \operatorname{sen} x$$



Representação gráfica da função $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$

Note-se que a expressão $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$ *pode ser representada na forma* $A \cos(x + \varphi)$. *De facto, tem-se*

$$A \cos(x + \varphi) = A \cos x \cos \varphi - A \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \varphi,$$

pelo que bastará escolher A *e* φ *tal que*

$$A \cos \varphi = 1, \quad -A \operatorname{sen} \varphi = -2,$$

vindo

$$A = \sqrt{5}, \quad \varphi = \cos^{-1} \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 1.107.$$

Assim sendo, outra forma (aproximada) de representar a solução do problema de valores iniciais seria

$$y = \sqrt{5} \cos(x + 1.107).$$

Exemplo 75 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{dy}{dx} + \frac{37}{36}y = 0,$$
$$y(0) = 1, \ y'(0) = -\frac{13}{6}.$$

Solução. *A equação característica associada à equação diferencial é*

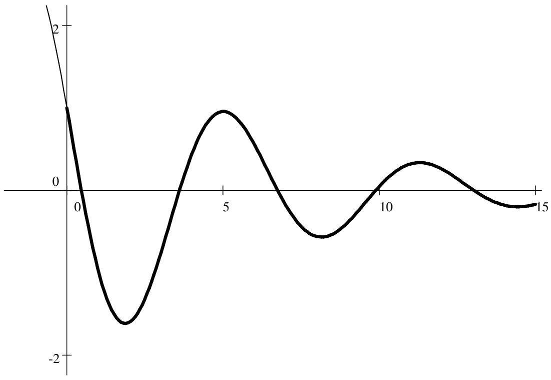
$$m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{37}{36} = 0,$$

cujas raízes são $-1/6 \pm i$. *Assim, a respectiva solução geral é*

$$y = e^{-x/6}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right),$$

pelo que condições impostas conduzem à solução

$$y = e^{-x/6}\left(\cos x - 2 \operatorname{sen} x\right)$$



Representação gráfica da função $\cos x - 2 \operatorname{sen} x$

Exemplo 76 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Solução. *A equação característica associada é*

$$m^2 - 6m + 25 = 0,$$

cujas raízes são $3 \pm 4i$. *A respectiva solução geral é*

$$y = e^{3x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x\right).$$

Raízes complexas conjugadas repetidas

Teorema 46 *Considere-se a equação diferencial linear homogénea de ordem* n *com coeficientes constantes (3.17). Se a equação característica associada (3.19) tem raízes complexas conjugadas* $a + bi$ *e* $a - bi$ *de multiplicidade* k, *então a parte correspondente na solução geral da equação diferencial (3.17) é*

$$e^{ax}\left[\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1}\right)\cos bx + \left(c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1}\right)\operatorname{sen} bx\right].$$

Exemplo 77 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Solução. *A equação característica associada é*

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0,$$

cujas raízes são $1 \pm 2i$ *de multiplicidade* 2. *A respectiva solução geral é*

$$y = e^x \left[(c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\,\mathrm{sen}\, 2x\right].$$

Exercícios

Exercício 55 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais. Mostre que a solução obtida verifica formalmente a equação diferencial dada.*

(*a*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0.$

(*b*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0.$

(*c*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0.$

(*d*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0.$

(*e*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{4}y = 0.$

(*f*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0.$

(*g*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0.$

(*h*) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0.$

(*i*) $\dfrac{d^5y}{dx^5} = 0.$

Exercício 56 *Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais. Mostre que a solução obtida verifica formalmente o problema de valores iniciais dado.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 12y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$

(c) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9\dfrac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$

Exercício 57 *As raízes da equação característica correspondente a determinada equação diferencial linear homogénea de ordem 8 são:*

$$3, 3, 3, -1, 2 + 3i, 2 - 3i, 2 + 3i, 2 - 3i$$

Escreva a respectiva solução geral.

Exercício 58 *Sabendo que a função* $e^x \cos 2x$ *é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + 13\frac{dy}{dx} + 30y = 0,$$

determine a respectiva solução geral.

3.5 O método dos coeficientes indeterminados

Consideremos novamente a equação diferencial linear não-homogénea de ordem n com coeficientes constantes

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = F(x). \tag{3.20}$$

Recorde-se que a solução geral desta equação diferencial se escreve na forma

$$y_c + y_p.$$

O **método dos coeficientes indeterminados** tem como finalidade a determinação de um integral particular y_p da equação diferencial (3.20). Do ponto de vista matemático, a classe de funções F à qual podemos aplicar o método dos coeficientes indeterminados é algo limitada, conforme veremos de seguida. No entanto, esta classe contém funções que surgem frequentemente nos segundos membros das equações diferencias lineares não-homogéneas associadas a problemas de índole muito variada. Portanto, do ponto de vista prático, a classe de funções em causa não é tão restritiva quanto possa parecer à primeira vista. Acresce-se que o método dos coeficientes indeterminados tem a vantagem de, no caso de poder ser aplicado, ser muito simples.

Definição 26 *Diz-se que uma função* f *é uma* ***função de coeficientes indeterminados*** *(função CI) se obedece a uma das seguintes condições:*

(i) $f(x) = x^n$, *onde* $n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $f(x) = e^{ax}$, *onde* $a \neq 0$

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(bx + c)$, *onde* $b \neq 0$

(iv) $f(x) = \cos(dx + e)$, *onde* $d \neq 0$

ou ainda se a função f *for um produto finito de duas ou mais funções destes quatro tipos.*

Exemplo 78 *As seguintes funções são exemplos de funções CI do tipo (i) – (iv).*

$$x^3, \quad e^{-2x}, \quad \operatorname{sen}(2x), \quad \cos(3x-1).$$

Exemplo 79 *As seguintes funções são exemplos de produtos finitos de duas ou mais funções dos tipos básicos (i) – (iv).*

$$x^3e^{-2x}, \quad x\operatorname{sen}(2x), \quad e^x\cos(3x-1), \quad e^{-x}\operatorname{sen}(x)\cos(x)x^2.$$

Exemplo 80 *As seguintes funções não são funções CI (porquê?).*

$$x+1, \quad e^x+x, \quad \sec x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \ln x.$$

O método dos coeficientes indeterminados pode ser aplicado apenas quando a função F presente no segundo membro da equação diferencial com coeficientes constantes (3.20) é uma combinação linear finita de funções CI.

Definição 27 *Seja f uma função CI. O conjunto de funções que consiste na própria função f e em todas as funções CI linearmente independentes das quais as sucessivas derivadas de f são múltiplos constantes ou combinações lineares designa-se* ***conjunto CI da função*** *f.*

Exemplo 81 *Seja $f(x)=x^3$. Trata-se de uma função CI, tendo-se,*

$$f'(x)=3x^2, \qquad f''(x)=6x, \qquad f'''(x)=6, \qquad f^{(k)}(x)=0 \text{ para } k>3.$$

Assim, as funções CI linearmente independentes das quais as sucessivas derivadas da função f são múltiplos constantes ou combinações lineares são

$$x^2, \quad x, \quad 1,$$

pelo que o conjunto CI da função $f(x)=x^3$ é

$$S_f=\left\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right\}.$$

Exemplo 82 *Considere-se a função CI $g(x)=\cos 2x$. Tem-se,*

$$g'(x)=-2\operatorname{sen} 2x, \qquad g''(x)=-4\cos 2x, \qquad g'''(x)=8\operatorname{sen} 2x, \qquad \ldots,$$

pelo que o conjunto CI associado à função $g(x)$ é

$$S_f=\{\cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x\}.$$

Exemplo 83 *A função $h(x)=x^2\cos x$ é um produto de duas funções CI: x^2 e $\cos x$. Portanto, $h(x)$ é também uma função CI, tendo-se*

$$\begin{aligned}
h'(x)&=2x\cos x-x^2\operatorname{sen} x\\
h''(x)&=2\cos x-4x\operatorname{sen} x-x^2\cos x\\
h'''(x)&=-6\operatorname{sen} x-6x\cos x+x^2\operatorname{sen} x\\
h^{(iv)}&=\cdots.
\end{aligned}$$

Ainda que prossigamos a derivação, obteremos sempre combinações lineares das funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $x\operatorname{sen} x$, $x\cos x$, $x^2\operatorname{sen} x$ e $x^2\cos x$, pelo que o conjunto CI associado a $h(x)$ é

$$S_h=\left\{\operatorname{sen} x,\cos x,x\operatorname{sen} x,x\cos x,x^2\operatorname{sen} x,x^2\cos x\right\}.$$

Este conjunto CI pode ser determinado, de forma mais simples, recorrendo aos conjuntos CI associados às funções x^2 *e* $\cos x$*. De facto,*

$$f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad S_f = \left\{x^2, x, 1\right\}$$

e

$$g(x) = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad Sg = \{\cos x, \operatorname{sen} x\}\,,$$

sendo o conjunto CI associado à função $x^2 \cos x$ *dado pelo produto cartesiano dos conjuntos* S_f *e* S_g*, isto é*

$$S_h = S_t \times S_g = \left\{x^2,\ x,\ 1\right\} \times \{\cos x,\ \operatorname{sen} x\} = \left\{\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ x \operatorname{sen} x,\ x\cos x,\ x^2 \operatorname{sen} x,\ x^2 \cos x\right\}.$$

Este procedimento é generalizável ao produto finito de funções CI, podendo ser muito mais simples do que o método directo.

Exemplo 84 *Seja* $f(x) = x^2 e^x \cos x$*. Tem-se,*

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x),$$

onde

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = \cos x$$

são funções CI, correspondendo-lhes os seguintes conjuntos CI,

$$S_{f_1} = \left\{x^2, x, 1\right\}, \quad S_{f_2} = \{e^x\}, \quad S_{f_3} = \{\cos x,\ \operatorname{sen} x\}.$$

Então,

$$S_f = S_{f_1} \times S_{f_2} \times S_{f_3},$$

resultando,

$$S_f = \left\{x^2 e^x \cos x,\ x^2 e^x \operatorname{sen} x,\ x e^x \cos x,\ x e^x \operatorname{sen} x,\ e^x \cos x,\ e^x \operatorname{sen} x\right\}.$$

Vejamos agora em que consiste o método dos coeficientes indeterminados, que nos permitirá determinar soluções particulares da equação diferencial linear não-homogénea com coeficientes constantes

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x), \tag{3.21}$$

onde $F(x)$ é uma combinação linear finita

$$F(x) = A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \cdots + A_m u_m(x)$$

de funções CI, u_1, u_2, …, u_m, onde as constantes A_1, A_2, …, A_m, são conhecidas.

Assumindo que a função complementar y_c foi previamente determinada recorrendo, por exemplo, à equação característica associada à correspondente equação diferencial homogénea, fazemos:

1. Para cada uma das m funções CI
$$u_1, u_2, \ldots, u_m,$$
determinamos o conjunto CI correspondente, obtendo assim os m conjuntos
$$S_1, S_2, \ldots, S_m,$$
que lhes estão associados.

2. Suponhamos que um destes conjuntos CI, por exemplo S_j, é um subconjunto de outro conjunto CI, S_k, ou seja $S_j \subseteq S_k$. Nesse caso, omitimos o conjunto S_j de qualquer consideração futura, preservando somente o conjunto S_k. Este tipo de análise aplica-se a todos os conjuntos CI obtidos no passo 1.

3. Consideramos agora cada um dos conjuntos CI restantes (depois do passo 2). Suponhamos que um destes conjuntos CI, por exemplo S_t, inclui um ou mais elementos que são solução da equação diferencial homogénea associada. Nesse caso, multiplicamos cada um dos elementos de S_t pela menor potência inteira de x, de forma a que o conjunto resultante não contenha nenhum elemento que seja solução da equação diferencial homogénea associada. Como resultado deste processo o conjunto S_t é substituido pelo conjunto CI "revisto" S_t'. Novamente, este tipo de análise aplica-se a todos os conjuntos CI obtidos após o passo 2.

4. Em geral, teremos neste momento

   (i) Alguns dos conjuntos CI originais, os quais não foram nem omitidos no passo 2, nem "revistos" no passo 3

   (ii) Alguns conjuntos CI "revistos" no passo 3

   Formamos então uma combinação linear dos elementos dos vários conjuntos com coeficientes desconhecidos (mas constantes) – os **coeficientes indeterminados**.

5. Determinamos o valor de cada um dos coeficientes indeterminados substituindo a combinação linear obtida no passo precedente na equação diferencial não-homogénea (3.21), obrigando a que se verifique uma identidade. Obtém-se desta forma uma solução particular da equação diferencial não-homogénea (3.21).

Exemplo 85 *Resolver o problema de valores iniciais*
$$\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x\\ &y(0) = 0, \ y'(0) = 0.\end{aligned}$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0,$$

sendo a equação característica correspondente $m^2 - 2m - 3 = 0$, *cujas raízes são* 3 *e* -1. *Assim, as funções* e^{3x} *e* e^{-x} *formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial precedente, pelo que a função complementar é*

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x},$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias. Sendo* $f(x) = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x$ *uma combinação linear finita de (duas) funções CI, tem-se*

$$f(x) = 2f_1(x) - 10f_2(x),$$

onde

$$f_1(x) = e^x, \qquad f_2(x) = \operatorname{sen} x$$

são funções CI. Assim,

$$S_{f_1} = \{e^x\}, \qquad S_{f_2} = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}.$$

É obvio que $S_{f_1} \not\subseteq S_{f_2}$ *e* $S_{f_2} \not\subseteq S_{f_1}$. *Por outro lado, nenhum dos elementos destes conjuntos são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê?), pelo que os passos 2 e 3 descritos anteriormente não se aplicam. Desta maneira, uma solução particular da equação diferencial dada é da forma*

$$y_p = Ae^x + B \operatorname{sen} x + C \cos x,$$

onde A, B *e* C *são coeficientes a determinar, vindo*

$$\frac{dy_p}{dx} = Ae^x + B\cos x - C \operatorname{sen} x, \qquad \frac{d^2y_p}{dx^2} = Ae^x - B \operatorname{sen} x - C\cos x.$$

Atendendo a que deverá ter-se

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} - 2\frac{dy_p}{dx} - 3y_p = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x,$$

a substituição das expressões encontradas para y_p, y_p' *e* y_p'' *na equação diferencial precedente conduz a*

$$-4Ae^x + (2C - 4B) \operatorname{sen} x + (-4C - 2B)\cos x = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x,$$

ou seja,

$$(-4A - 2)\, e^x + (2C - 4B + 10) \operatorname{sen} x + (-4C - 2B)\cos x = 0,$$

que deverá verificar-se para todo x *real. Assim, sendo as funções* e^x, $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$ *linearmente independentes em* $\mathbb{R}$, *a combinação linear precedente só é nula para todo* x *real se*

$$\begin{cases} -4A - 2 = 0, \\ 2C - 4B + 10 = 0, \\ -4C - 2B = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A = -1/2, \\ B = 2, \\ C = -1. \end{cases}$$

Portanto, a aplicação do método dos coeficientes indeterminados permite obter a seguinte solução particular para a equação diferencial dada,

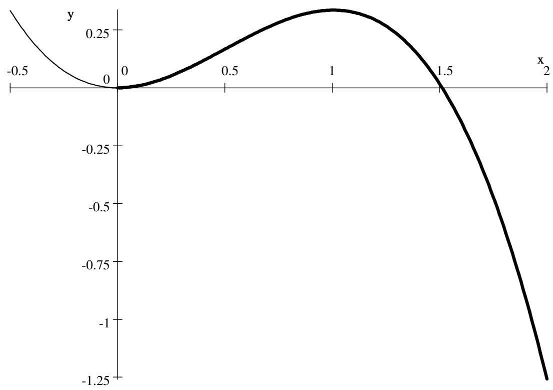
$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x.$$

Assim, a sua solução geral é

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x.$$

O cálculo das constantes c_1 e c_2 é feito impondo as condições $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, resultando

$$y = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x.$$



Representação gráfica da função $\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\operatorname{sen} x - \cos x$

Exemplo 86 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada é*

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

cuja equação característica, $m^4 + m^2 = 0$, tem raízes 0, 0, i e $-i$. A função complementar é, portanto,

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x.$$

Por outro lado, o termo não-homogéneo da equação diferencial dada,

$$3x^2 + 4\operatorname{sen} x - 2\cos x,$$

é uma combinação linear das funções CI

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \operatorname{sen} x, \qquad h(x) = \cos x.$$

Os respectivos conjuntos CI são

$$S_f = \left\{x^2, x, 1\right\}, \qquad S_g = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}, \qquad S_h = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}.$$

Dado que S_g e S_h são idênticos, retemos apenas os conjuntos S_f e S_g. Relativamente a S_f, note-se que este conjunto contém dois elementos, 1 e x, que são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê?). Então, multiplicamos todos os elementos de S_f (e apenas de S_f !) por x^2, resultando

$$S_f^{'} = \left\{x^4, x^3, x^2\right\}.$$

No que respeita ao conjunto S_g, os seus dois elementos são solução da equação diferencial homogénea associada (porquê), pelo que multiplicamos todos os elementos deste conjunto por x, obtendo-se

$$S_g^{'} = \{x \operatorname{sen} x, x \cos x\}.$$

A solução particular é da forma

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \operatorname{sen} x + Ex \cos x,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
y_p' &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D \operatorname{sen} x + Dx \cos x + E \cos x - Ex \operatorname{sen} x \\
y_p'' &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C + 2D \cos x - Dx \operatorname{sen} x - Ex \cos x - 2E \operatorname{sen} x \\
y_p''' &= 24Ax + 6B - Dx \cos x - 3D \operatorname{sen} x + Ex \operatorname{sen} x - 3E \cos x \\
y_p^{(iv)} &= 24A + Dx \operatorname{sen} x - 4D \cos x + Ex \cos x + 4E \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Dado que y_p deve verificar

$$\frac{d^4 y_p}{dx^4} + \frac{d^2 y_p}{dx^2} = 3x^2 + 4 \operatorname{sen} x - 2 \cos x$$

para todo x real, tem-se

$$(12A - 3)x^2 + 6Bx + (24A + 2C)\, x^0 + (2D - 2) \cos x + (2E - 4) \operatorname{sen} x = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado que as funções x^2, x, 1, $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$, resulta

$$\begin{cases} 12A - 3 = 0, \\ 6B = 0, \\ 24A + 2C = 0, \\ 2D - 2 = 0, \\ 2E - 4 = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1/4, \\ B = 0, \\ C = -3, \\ D = 1, \\ E = 2, \end{cases}$$

pelo que um integral particular da equação diferencial dada é

$$y_p = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x \operatorname{sen} x + 2x \cos x,$$

sendo a sua solução geral,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x \operatorname{sen} x + 2x \cos x.$$

Neste último exemplo foi necessário aplicar os passos 2 e 3 descritos anteriormente. Que consequências teria a não aplicação de cada um desses passos? Impedirá a não aplicação de qualquer um deles a determinação de uma solução particular? Para responder a estas questões sugere-se considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1 + x$$

e tentar determinar a sua solução geral usando o métodos dos coeficientes indeterminados: (i) sem aplicar o passo 2; (ii) sem aplicar o passo 3.

Exercícios

Exercício 59 *Relativamente às equações diferenciais seguintes indique se podem ser resolvidas usando o método dos coeficientes indeterminados. Justifique.*

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^2.$

(b) $y\frac{dy}{dx} + y = \cos x.$

(c) $\frac{dy}{dx} + xy = \cos x.$

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1 + 3\cosh x.$

(e) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2xy = \frac{1}{\cos x}.$

(f) $\frac{d^2y}{dx^2} + x^7 = 0.$

Exercício 60 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2.$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 4e^{2x} - 21e^{-3x}.$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 6 \operatorname{sen} 2x + 7\cos 2x.$

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 10y = 5xe^{-2x}.$

(e) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = \operatorname{sen} 2x + 2x^2 + 1.$

(f) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 - 16x\cos 2x.$

Nota: no caso das equações diferenciais com segundos membros que são combinações lineares de duas funções CI, $k_1 f_1 + k_2 f_2$, determinar também a respectiva solução geral recorrendo à resolução de duas equações diferenciais com segundos membros f_1 e f_2.

Exercício 61 *Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 8\operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 12x^2e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = x, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

3.6 O método de variação das constantes

Embora o método dos coeficientes indeterminados seja relativamente simples de aplicar, a verdade é que o seu âmbito de aplicação é algo limitado. De facto, conforme vimos, a classe de funções que podem surgir no segundo membro da equação diferencial a resolver é restrito e, por outro lado, a equação diferencial deve ter obrigatoriamente coeficientes constantes. Assim, o método dos coeficientes indeterminados não poderia ser aplicado para determinar uma solução particular da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg} x,$$

pois $\operatorname{tg} x$ não é uma função CI, nem da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} + xy = \cos x,$$

já que não tem coeficientes constantes. Desejaríamos portanto ter um método para determinar uma solução particular que possa ser aplicado em todos os casos, inclusivamente quando os coeficientes não são constantes, sempre que seja conhecida a função complementar. É neste contexto que surge o **método de variação das constantes** – também designado método de variação dos parâmetros. Consideraremos este método para determinar uma solução particular de equações diferenciais lineares não-homogéneas de ordem n.

Comecemos por considerar a situação em que a equação diferencial é de segunda ordem ($n = 2$). Tem-se

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x). \tag{3.22}$$

Suponhamos que f e g são duas soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0. \tag{3.23}$$

A função complementar correspondente seria

$$y_c = c_1 f(x) + c_2 g(x),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

O procedimento no método de variação das constantes consiste em propor que uma solução particular da equação diferencial linear não-homogénea (3.22) é da forma

$$y_p = v_1(x)f(x) + v_2(x)g(x),$$

onde v_1 e v_2 são funções a determinar. Note-se desde já a semelhança entre as expressões de y_c e y_p, como se as constantes arbitrárias c_1 e c_2 passassem agora a “variar”, transformando-se nas funções v_1 e v_2, respectivamente. A designação do método deriva desta semelhança. Seja então

$$y_p = v_1(x)\, f(x) + v_2(x)\, g(x).$$

Temos duas incógnitas, v_1 e v_2, mas apenas uma condição,

$$a_0(x)\frac{d^2y_p}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_2(x)y_p = F(x), \tag{3.24}$$

pelo que teremos de impor uma condição adicional. Tal será feito por forma a simplificar ao máximo os cálculos a efectuar. Assim,

$$y_p' = v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) + v_1(x)\, f'(x) + v_2(x)\, g'(x).$$

Estabelecemos a condição arbitrária impondo que

$$v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) = 0 \tag{3.25}$$

para todo x no intervalo de interesse. Desta forma, a expressão para y_p' simplifica-se, vindo

$$y_p' = v_1(x)\, f'(x) + v_2(x)\, g'(x),$$

pelo que

$$y_p'' = v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x) + v_1(x)\, f''(x) + v_2(x)\, g''(x).$$

Note-se que devido à condição imposta, a expressão de y_p'' não contém segundas derivadas das funções v_1 e v_2. Substituindo as expressões para y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial (3.24) resulta

$$v_1\left[a_0(x)f'' + a_1(x)f' + a_2(x)f\right] + v_2\left[a_0(x)g'' + a_1(x)g' + a_2(x)g\right] + a_0(x)\left[v_1'f' + v_2'g'\right] = F(x).$$

Atendendo ao facto de f e g serem soluções da equação diferencial (3.23), a equação diferencial (3.24) escreve-se agora

$$a_0(x)\left[v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x)\right] = F(x).$$

Em resumo, as funções v_1 e v_2 deverão obedecer a

$$\begin{cases} v_1'(x)\, f(x) + v_2'(x)\, g(x) = 0, \\ v_1'(x)\, f'(x) + v_2'(x)\, g'(x) = F(x)/a_0(x). \end{cases} \tag{3.26}$$

Note-se que a condição imposta (3.25) não só simplificou os cálculos, como permitiu que o sistema de equações precedente apenas inclua as incógnitas $v_1'(x)$ e $v_2'(x)$. O sistema de equações (3.26) pode-se escrever na forma matricial

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(x)/a_0(x) \end{pmatrix},$$

cujo determinante associado,

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix},$$

mais não é do que o Wronskiano das funções f e g. Uma vez que estas funções são, por hipótese, linearmente independentes, resulta que o determinante nunca se anula. Desta forma, o sistema de equações (3.26) tem solução única, a saber ("regra de Cramer")

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & g(x) \\ F(x)/a_0(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{F(x)g(x)}{a_0(x)W\left[f(x), g(x)\right]}$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & 0 \\ f'(x) & F(x)/a_0(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}} = \frac{F(x)f(x)}{a_0(x)W\left[f(x), g(x)\right]}$$

Obtemos assim v_1 e v_2 definidos por

$$v_1(x) = -\int^x \frac{F(t)g(t)}{a_0(t)W\left[f(t), g(t)\right]}\, dt$$

$$v_2(x) = +\int^x \frac{F(t)f(t)}{a_0(t)W\left[f(t), g(t)\right]}\, dt.$$

A solução particular da equação diferencial (3.22) obtida por aplicação do método de variação das constantes é assim

$$y_p(x) = v_1(x)\, f(x) + v_2(x)\, g(x),$$

onde $v_1(x)$ e $v_2(x)$ são dadas pelas expressões precedentes.

Exemplo 87 *Consideremos a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg} x.$$

Conforme já tivemos oportunidade de ver, a função complementar associada é

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

pelo que queremos determinar um integral particular da equação diferencial dada que seja da forma

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \operatorname{sen} x.$$

Tem-se

$$y_p' = v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\operatorname{sen} x - v_1(x)\operatorname{sen} x + v_2(x)\cos x.$$

Impondo a condição (arbitrária)

$$v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\operatorname{sen} x = 0$$

para todo x real, vem

$$y_p' = -v_1(x)\operatorname{sen} x + v_2(x)\cos x \quad \Rightarrow \quad y_p'' = -v_1(x)\cos x - v_2(x)\operatorname{sen} x - v_1'(x)\operatorname{sen} x + v_2'(x)\cos x.$$

Dado que y_p deve verificar

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} + y_p = \operatorname{tg} x,$$

resulta

$$-v_1(x)\cos x - v_2(x)\operatorname{sen} x - v_1'(x)\operatorname{sen} x + v_2'(x)\cos x + v_1(x)\cos x + v_2(x)\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x,$$

isto é,

$$-v_1'(x)\operatorname{sen} x + v_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x.$$

Portanto, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} v_1'(x)\cos x + v_2'(x)\operatorname{sen} x = 0, \\ -v_1'(x)\operatorname{sen} x + v_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

vindo

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x\ \operatorname{sen} x, \quad v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \operatorname{sen} x,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} v_1'(x) = \cos x - \sec x, \\ v_2'(x) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} v_1(x) = \operatorname{sen} x - \ln\left|\sec x + \operatorname{tg} x\right|, \\ v_2(x) = -\cos x, \end{cases}$$

pelo que a solução particular é

$$y_p = (\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|)\cos x - \operatorname{sen} x \cos x = -\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\cos x.$$

A solução geral da equação diferencial dada é

$$y = y_c + y_p = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\cos x.$$

Exemplo 88 *Determinar uma família de soluções da equação diferencial*

$$\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=6\left(x^2+1\right)^2.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea correspondente,*

$$\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

tem, conforme vimos no Exemplo 64, a seguinte solução geral

$$y_c=c_1x+c_2\left(x^2-1\right).$$

Assim sendo, tem-se

$$y_p=v_1x+v_2\left(x^2-1\right),$$

pelo que

$$y_p'=v_1'x+v_2'\left(x^2-1\right)+v_1+2xv_2.$$

Impondo a condição

$$v_1'x+v_2'\left(x^2-1\right)=0$$

para todo x real, resulta

$$y_p'=v_1+2xv_2 \qquad \Rightarrow \qquad y_p''=v_1'+2xv_2'+2v_2.$$

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p' e y_p'' na equação diferencial

$$\left(x^2+1\right)y_p''-2xy_p'+2y_p=6\left(x^2+1\right)^2,$$

vem

$$\left(x^2+1\right)\left(v_1'+2xv_2'+2v_2\right)-2x\left(v_1+2xv_2\right)+2v_1x+2v_2\left(x^2-1\right)=6\left(x^2+1\right)^2,$$

ou seja,

$$\left(x^2+1\right)v_1'+2x\left(x^2+1\right)v_2'=6\left(x^2+1\right)^2.$$

Consequentemente, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} xv_1'+\left(x^2-1\right)v_2'=0, \\ v_1'+2xv_2'=6\left(x^2+1\right), \end{cases}$$

obtendo-se

$$v_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 \\ 6\left(x^2+1\right) & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}=6\left(1-x^2\right), \quad v_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 6\left(x^2+1\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}=6x,$$

pelo que

$$\begin{cases} v_1 = 6x - 2x^3, \\ v_2 = 3x^2. \end{cases}$$

Desta forma, tem-se

$$y_p = v_1 x + v_2 \left(x^2 - 1\right) = 6x^2 - 2x^4 + 3x^2 \left(x^2 - 1\right) = 3x^2 + x^4,$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 \left(x^2 - 1\right) + 3x^2 + x^4.$$

Exercício 62 *resolver o problema de valor inicial*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0,$$
$$y(1) = -\frac{3}{4}e, \; y'(1) = -\frac{7}{4}e, \; y''(1) = -\frac{11}{4}e.$$

Solução. *A equação diferencial homogénea associada*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$$

tem solução geral

$$y_c = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^x.$$

A aplicação do método de variação das constantes sugere

$$y_p = \left(u_1 + u_2 x + u_3 x^2\right) e^x,$$

resultando

$$y_p' = y_p + \left(u_1' + u_2' x + u_3' x^2\right) e^x + (u_2 + 2xu_3) e^x.$$

Impondo

$$u_1' + u_2' x + u_3' x^2 = 0$$

para todo $x > 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} y_p' = y_p + (u_2 + 2xu_3) e^x \quad &\Rightarrow \quad y_p'' = y_p' + (u_2 + 2xu_3) e^x + (u_2' + 2xu_3') e^x + 2u_3 e^x \\ &\Rightarrow \quad y_p'' = y_p + [(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3) + (u_2' + 2xu_3')] e^x \end{aligned}$$

Necessitamos de impor uma segunda condição, a saber,

$$u_2' + 2xu_3' = 0$$

para todo $x > 0$, vindo

$$\begin{aligned} y_p'' = y_p + (2u_2 + 4xu_3 + 2u_3) e^x \quad &\Rightarrow \quad y_p''' = y_p' + [2(u_2' + 2xu_3') + 2u_3' + 6u_3 + 2u_2 + 4xu_3] e^x \\ &\Rightarrow \quad y_p''' = y_p + (2u_3' + 6u_3 + 3u_2 + 6xu_3) e^x \end{aligned}$$

Substituindo as expressões obtidas para y_p, y_p', y_p'' e y_p''' na equação diferencial

$$y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0$$

resulta

$$\left[\left(2u_3' + 6u_3 + 3u_2 + 6xu_3\right) - 3\left(2u_2 + 4xu_3 + 2u_3\right) + 3\left(u_2 + 2xu_3\right)\right] e^x = \frac{e^x}{x},$$

ou, equivalentemente,

$$2u_3' = \frac{1}{x},$$

pelo que temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} u_1' + u_2'x + u_3'x^2 = 0, \\ u_2' + 2xu_3' = 0, \\ 2u_3' = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_1' = \dfrac{x}{2}, \\ u_2' = -1, \\ u_3' = \dfrac{1}{2x}, \end{cases}$$

vindo

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{x^2}{4} \\ u_2 = -x \\ u_3 = \dfrac{1}{2}\ln x, \end{cases}$$

ou seja,

$$y_p = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x,$$

tendo-se a solução geral

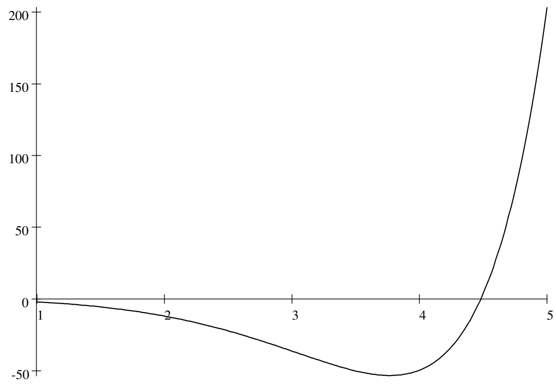
$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^x + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x,$$

ou seja,

$$y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln x$$

Impondo as condições iniciais impostas obtém-se

$$y = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right) x^2 e^x.$$



Representação gráfica da função $(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln x)x^2e^x$

Exercícios

Exercício 63 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{cotg} x.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{tg}^2 x.$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+9y=\dfrac{e^{-3x}}{x}.$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=\dfrac{1}{1+e^x}.$

(e) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=4e^x\ln x, \quad x>0.$

(f) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}-\ln x-1, \quad x>0.$

Exercício 64 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\,(x+2)\,\frac{dy}{dx}+(x+2)\,y=x^3, \quad x>0$$

sabendo que xe^x *é uma solução da equação diferencial homogénea associada.*

Exercício 65 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$\operatorname{sen}^2 x\frac{d^2y}{dx^2}-2\operatorname{sen} x\cos x\frac{dy}{dx}+\left(1+\cos^2 x\right)y=2\operatorname{sen}^3 x, \quad x\in\,]0,\pi/2[$$

sabendo que $\operatorname{sen} x$ *e* $x\operatorname{sen} x$ *são soluções da equação diferencial homogénea associada.*

3.7 A equação de Cauchy-Euler

Vimos anteriormente como obter a solução geral de equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n com coeficientes constantes. Nesses casos é relativamente fácil determinar um conjunto fundamental de soluções e, consequentemente, a respectiva função complementar. No entanto, no caso (geral) em que os coeficientes não são constantes a situação é bem diferente, só se podendo obter a função complementar em casos muito especiais. Um desses casos designa-se **equação de Cauchy-Euler**, sendo esta da forma

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x), \tag{3.27}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n, são constantes reais. Note-se que os termos que surgem no primeiro membro da equação precedente são da forma

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}.$$

A resolução deste tipo de equação diferencial basea-se no seguinte resultado.

Teorema 47 *A transformação $x=e^t$ reduz a equação diferencial de Cauchy-Euler (3.27) a uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes .*

Demonstração Consideremos o caso correspondente a uma equação diferencial de segunda ordem (a demonstração no caso geral é similar). Tem-se

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=F(x). \tag{3.28}$$

Da mudança de variável

$$x(t)=e^t, \quad x>0,$$

resulta

$$x(t)=e^t \qquad \Leftrightarrow \qquad t(x)=\ln x,$$

pelo que, atendendo à dependência $y=y(t(x))$, decorre desta transformação

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x},$$

isto é,

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}. \tag{3.29}$$

Vejamos agora como se transforma a segunda derivada. Tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dx}\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right\}\\
&= \frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}\frac{1}{x}+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\
&= \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),
\end{aligned}$$

pelo que

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}. \tag{3.30}$$

Substituindo as expressões (3.29) e (3.30) na equação diferencial (3.28), obtém-se a equação diferencial

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=F(e^t) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_0\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-a_0)\frac{dy}{dt}+a_2y=F(e^t),$$

que é do tipo

$$b_0\frac{d^2y}{dt^2}+b_1\frac{dy}{dt}+b_2y=G(t),$$

com $b_0=a_0$, $b_1=a_1-a_0$, $b_2=a_2$, $G(t)=F(e^t)$. Fica assim demonstrado o resultado pretendido. Observe-se que na demonstração supôs-se que $x>0$. No caso de ser $x<0$, a mudança de variável a realizar é $x=-e^t$, mantendo-se o restante procedimento inalterado. ■

Exemplo 89 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3, \quad x>0.$$

Solução. *Seja $x=e^t$. Tem-se, $t=\ln x$ e*

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}, \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$$

resultando a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t}.$$

Obteve-se portanto uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados. Comecemos então por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=0.$$

A equação característica associada é

$$m^2-3m+2=0,$$

cujas raízes são $m_1=1$ e $m_2=2$, pelo que

$$y_c=c_1e^t+c_2e^{2t}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, pretendemos determinar uma solução particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t},$$

a qual deverá ser da forma $y_p = Ae^{3t}$ (porquê?). Assim,

$$y_p = Ae^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad y_p' = 3Ae^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad y_p'' = 9Ae^{3t},$$

pelo que

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad 2Ae^{3t} = e^{3t},$$

resultando $A = 1/2$. Obtém-se assim

$$y_p = \frac{1}{2}e^{3t},$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta

$$y = y_c + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t},$$

ou, atendendo à transformação $t = \ln x$,

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

Exemplo 90 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 4\ln(-x), \quad x < 0.$$

Solução. *Fazendo $x = -e^t$ tem-se $t = \ln(-x)$, vindo*

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

A equação diferencial dada passa a escrever-se

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = 4t \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4t.$$

Obteve-se portanto uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que pode ser resolvida usando o método dos coeficientes indeterminados. Comecemos então por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

A equação característica associada é

$$m^2 + 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = -1$ e $m_2 = -2$, pelo que

$$y_c = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, pretendemos determinar uma solução particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4t,$$

que deverá ser da forma $y_p = At + B$ *(porquê?). Assim,*

$$y_p = At + B \qquad \Rightarrow \qquad y_p' = A \qquad \Rightarrow \qquad y_p'' = 0,$$

pelo que

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 4t \qquad \Rightarrow \qquad 3A + 2\left(At + B\right) = 4t,$$

resultando

$$\begin{cases} 3A + 2B = 0, \\ 2A = 4, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} B = -3, \\ A = 2. \end{cases}.$$

Obtém-se assim

$$y_p = 2t - 3,$$

sendo a solução geral da equação diferencial proposta

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 2t - 3,$$

ou, atendendo à transformação $t = \ln(-x)$,

$$y = c_1x + c_2x^2 + 2\ln(-x) - 3.$$

Exemplo 91 *Determinar a solução geral da equação diferencial*

$$(x-3)^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + (x-3)\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(x-3)}, \qquad x > 4.$$

Solução. *Fazendo* $z = x - 3$ *vem*

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln z}, \qquad z > 1.$$

Considerando agora a transformação $z = e^t$, *resulta*

$$z\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt}, \qquad z^2\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

A equação diferencial dada passa a escrever-se,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{t}.$$

Assim

$$y_c = c_1 + c_2t.$$

Para determinar uma solução particular da equação diferencial temos de usar o método de variação das constantes (porquê?). Tem-se

$$y_p = u_1 + u_2 t \qquad \Rightarrow \qquad y_p' = u_1' + u_2' t + u_2.$$

Considerando a condição arbitrária

$$u_1' + u_2' t = 0 \quad \forall t > 0,$$

resulta $y_p' = u_2$*, vindo*

$$y_p'' = u_2'.$$

Assim

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \qquad u_2' = \frac{1}{t},$$

pelo que temos o sistema de equações

$$\begin{cases} u_1' + u_2' t = 0, \\ u_2' = t^{-1}, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_1 = -t, \\ u_2 = \ln t, \end{cases}$$

resultando

$$y_p = -t + t \ln t.$$

Tem-se para a solução geral da equação diferencial proposta,

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 t + t \ln t,$$

ou, atendendo a que $t = \ln z$ *e* $z = x - 3$*,*

$$y = c_1 + c_2 \ln(x-3) + \ln(x-3) \ln[\ln(x-3)].$$

Exercícios

Exercício 66 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

(a) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0.$

(b) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0, \quad x > 0.$

(c) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 4x - 6.$

(d) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4\ln x, \quad x > 0.$

Exercício 67 *Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais.*

(a) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 10x^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -6.$

(b) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 6y = \ln x, \quad x > 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$

Exercício 68 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 - 1, \quad x < -1.$$

3.8 Exercícios de revisão do Capítulo 3

Exercício 69 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

$(a)\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}=24x+e^{-x}.$

$(b)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=4e^{x}+4e^{-x}.$

$(c)\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{dy}{dx}=2e^{x}+4e^{-x}+1.$

$(d)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+y=2\cos x+1.$

$(e)\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=1+6xe^{x}.$

$(f)\quad \dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-6y=e^{-t}\left(16t-8\right).$

Exercício 70 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.*

$(a)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{e^{x}}{x}.$

$(b)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=\dfrac{e^{x}}{\cos x}.$

$(c)\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\operatorname{cotg} x.$

$(d)\quad \dfrac{d^2y}{dt^2}+y=6\cos^2 t.$

Exercício 71 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$(t-1)\frac{d^2y}{dt^2}-t\frac{dy}{dt}+y=(t-1)^2e^{t},$$

sabendo que t e e^{t} são duas soluções da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 72 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{9}{x^2}y=0,\quad x>0,$$

Exercício 73 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=10x,\quad x>0,$$

sabendo que $x\ln x$ é uma solução da equação diferencial homogénea associada.

Exercício 74 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais*

$(a)\quad t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+t\dfrac{dx}{dt}+4x=0.$

$(b)\quad (x-1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-(x-1)\dfrac{dy}{dx}+y=x^2,\quad x<1.$

(c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + y = x\ln x, \quad x > 0.$

(d) $(z+1)\,\dfrac{d^2y}{dz^2} + 2\dfrac{dy}{dz} = z, \quad z > 0.$

Exercício 75 *Considere-se uma mola que está fixa num dos seus extremos. Um objecto pontual P, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de P relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento livre e não amortecido)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0,$$

onde $\lambda^2 = k/m$. Sabendo que P parte com velocidade $x'(0) = v_0$, do ponto de abcissa x_0, determine:

(a) $x(t)$.

(b) o valor mínimo e máximo da abcissa de P.

(c) o período do movimento de P.

Exercício 76 *Considere-se uma mola que está fixa num dos seus extremos. Um objecto pontual Q, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de Q relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento livre e amortecido)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

onde $k > 0$ é a constante de elasticidade da mola e $a > 0$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0,$$

onde $\lambda^2 = k/m$ e $a/m = 2b$. Sabendo que Q parte com velocidade $x'(0) = v_0$, do ponto de abcissa x_0, determine $x(t)$ quando:

(a) $b < \lambda \quad (a < 2\sqrt{km})$.

(b) $b = \lambda \quad (a = 2\sqrt{km})$.

(c) $b > \lambda \quad (a > 2\sqrt{km})$.

Exercício 77 *Considere-se uma mola que está fixa num dos seus extremos. Um objecto pontual M, de massa m, está preso na outra extremidade da mola. Suponhamos que o afastamento de M relativamente à posição de equilíbrio O obdece à seguinte lei (movimento forçado correspondente à acção de uma força externa $F\cos\omega t$)*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+kx=F\cos\omega t,$$

onde $k>0$ é a constante de elasticidade da mola e $a>0$, ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=E\cos\omega t,$$

onde $\lambda^2=k/m$, $a/m=2b$ e $E=F/m$. Sabendo que M parte com velocidade $x'(0)=v_0$, do ponto de abcissa x_0, determine $x(t)$ quando $\lambda=\omega$ e $b<\lambda$.

Exercício 78 *Considere-se um circuito eléctrico constituido por uma força electromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série. Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que*

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E,$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante dada por

$$i=\frac{dq}{dt}.$$

Considere um circuito do tipo descrito (RLC) em que $E=100\cos 60t$ (Volts), $R=4$ (Ohms), $L=0.1$ (Henries) e $C=1/40$ (Farads).

(a) Determine a carga do condensador em cada instante sabendo que no instante inicial a intensidade de corrente e a carga do condensador eram ambas nulas.

(b) Determine a intensidade de corrente.

3.9 Soluções dos exercícios do Capítulo 3

48. (b) $y=c_1e^x+c_2xe^x$; (c) $y=e^x+3e^xx$.

49. (b) $y=c_1x+c_2x^2$.

50. (d) $y=c_1e^x+c_2e^{4x}$.

51. $g(x)=x^4$, $y=c_1x+c_2x^4$.

52. $q(x)=x+1$, $y=c_1e^{2x}+c_2\,(x+1)$.

53. (b) $y_c=c_1e^x+c_2e^{2x}$; (d) $y=y_c+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x^2+6x+7$.

54. $y_p = 2/3 + 2x - 3e^x/2$.

55. (a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$; (b) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$; (c) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$;

(d) $y = (c_1 + c_2x)\,e^{4x}$; (e) $y = (c_1 + c_2x)\,e^{-x/2}$; (f) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$;

(g) $y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right) e^{2x}$; (h) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} \operatorname{sen} x + c_4e^{-x} \cos x$;

(i) $y = c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$.

56. (a) $y = 2e^{4x} + e^{-3x}$; (b) $y = \left(13e^{-x} - e^{-5x}\right)/4$;

(c) $y = e^{2x} - \sqrt{3}e^{3x/2}\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

57. $y = e^{3x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{-x} + e^{2x}[(c_5 + c_6x)\cos 3x + (c_7 + c_8x) \operatorname{sen} 3x]$.

58. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + e^x\,(c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 \cos 2x)$.

59. (a) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, e o segundo membro é um múltiplo da função CI x^2; (b) Não, pois a equação diferencial não é linear; (c) Não, pois a equação diferencial apesar de ser linear não é de coeficientes constantes; (d) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, e o segundo membro é uma combinação linear das funções CI 1, e^x e e^{-x}; (e) Não, pois a equação diferencial não é de coeficientes constantes e o segundo membro não é uma combinação linear finita de funções CI; (f) Sim, pois a equação diferencial é linear, com coeficientes constantes, podendo-se reescrever por forma a que o segundo membro seja um múltiplo da função CI x^7.

60. (a) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 7 + 6x + 2x^2$; (b) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} - \left(e^{2x} + 6e^{-3x}\right)/2$;

(c) $y = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x) + 2 \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$;

(d) $y = (x/2 + 1/10)\,e^{-2x} + e^{-x}\,(c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x)$;

(e) $y = c_1e^x + e^{-x}\,(c_2 + c_3x) - 9 + 4x - 2x^2 + \frac{2}{25} \cos 2x - \frac{1}{25} \operatorname{sen} 2x$;

(f) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - x \cos 2x - 2x^2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2} + 3x^2$.

61. (a) $6 \cos 2x + 5 \operatorname{sen} 2x - 2x \cos 2x$; (b) $y = \left(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) e^x + 2e^{-x}$;

(c) $y = 5e^{x-2} - x^2/2 - x - 1$.

63. (a) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$;

(b) $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - 2 + \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$;

(c) $y = e^{-3x}\,(c_1 + c_2x) + e^{-3x}x\,(\ln x - 1)$; (d) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right) \ln(e^x + 1)$;

(e) $y = e^x\,(c_1 + c_2x) + x^2e^x\,(2 \ln x - 3)$; (f) $c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + x \ln x$.

64. $y = c_1x\,(e^x - 1) + c_2x\,(e^x + 1) - x^2$.

65. $y = (c_1 + c_2x) \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x$.

66. (a) $y = c_1 x + c_2 x^3$; (b) $y = c_1 \cos(3\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3\ln x)$; (c) $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + 2x - 1$; (d) $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + 2\ln x - 3$.

67. (a) $y = 2x^{-3} + x^2(2\ln x - 1)$; (b) $y = \left(8x^3 - 9x^{-2} - 6\ln x + 1\right)/36$.

68. $y = c_1(x+1)^{-1} + c_2(x+1)^3 - x^2(3+2x)(x+1)^{-1}/6$.

69. (a) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} - 3x^2 + 2x^3 + e^{-x}$; (b) $y = (c_1 + c_2 x)e^x + 2x^2 e^x + e^{-x}$; (c) $y = c_1 + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + e^x - 2e^{-x} + x$; (d) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + 1$; (e) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x + x - 3x^2 e^x + x^3 e^x$; (f) $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} - 4te^{-t} + 5e^{-t}$.

70. (a) $y = (c_1 + c_2 x)e^x + x(\ln x)e^x$;
(b) $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^x(\cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x)$;
(c) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x)\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$; (d) $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \cos 2t + 3$.

71. $y = c_1 t + c_2 e^t - te^t + t^2 e^t/2$.

72. $y = c_1 x^{-3} + c_2 x^3$.

73. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + 5x \ln^2 x$.

74. (a) $y = c_1 \cos(2\ln t) + c_2 \operatorname{sen}(2\ln t)$;
(b) $y = c_1(1-x) + c_2(1-x)\ln(1-x) + (1-x)^2 + 1 - (1-x)\ln^2(1-x)$;
(c) $y = \frac{1}{3}x(1-\ln x) + x^{-1/2}(c_1 \cos(\sqrt{3}(\ln x)/2) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}(\ln x)/2))$;
(d) $y = -\left(c_1 + c_2 z - \frac{1}{6}z^3\right)(z+1)^{-1}$.

75. (a) $x = \dfrac{v_0}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda t + x_0 \cos\lambda t$; (b) $\pm\left((v_0/\lambda)^2 + x_0^2\right)^{1/2}$; (c) $2\pi/\lambda$.

76. (a) $x = e^{-bt}\left(\frac{v_0 + bx_0}{a}\operatorname{sen} at + x_0 \cos at\right)$, $a = \sqrt{\lambda^2 - b^2}$; (b) $x = e^{-bt}[x_0 + (v_0 + bx_0)t]$;
(c) $x = a(r_2 x_0 - v_0)e^{r_1 t} + a(v_0 - r_1 x_0)e^{r_2 t}$, $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \lambda^2}$, $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \lambda^2}$, $a = (r_2 - r_1)^{-1}$.

77. $x = e^{-bt}\left(\theta^{-1}(v_0 + bx_0 - \frac{1}{2b}E)\operatorname{sen}\theta t + x_0 \cos\theta t\right) + \frac{E}{2b\omega}\operatorname{sen}\omega t$, $\theta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$.

78. (a) $q = (\frac{1}{5} - 5t)e^{-20t} - \frac{1}{5}\cos 60t + \frac{3}{20}\operatorname{sen} 60t$;
(b) $i = (-9 + 100t)e^{-20t} + 9\cos 60t + 12\operatorname{sen} 60t$.

Capítulo 4

A Transformada de Laplace

4.1 Definição, existência e propriedades

Definição 28 *Seja f uma função real de variável real t, definida para $t > 0$. Seja s uma variável real e F uma função definida por*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{4.1}$$

*para todos os valores de s para os quais este integral existe. A função F definida por (4.1) designa-se **transformada de Laplace** da função f. Usaremos a seguinte notação para a transformada de Laplace da função f,*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Para garantir que o integral (4.1) existe para uma certa gama de valores de s temos de impor restrições adequadas à função f. Voltaremos a este ponto após determinar a transformada de Laplace de algumas funções simples.

Exemplo 92 *Considere-se a função*

$$f(t) = 1, \quad t > 0.$$

Então, aplicando a definição (4.1), resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R = \frac{1}{s}$$

para todo $s > 0$. Assim,

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemplo 93 *Considere-se a função*

$$f(t) = t, \quad t > 0.$$

Então, aplicando a definição (4.1), resulta

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} t\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s^2} e^{-st}(st+1)\right]_0^R = \frac{1}{s^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 94 *Considere-se a função*

$$f(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{a-s}\right]_0^R = \frac{1}{s-a}$$

para todo $s > a$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Exemplo 95 *Considere-se a função*

$$f(t) = \cos bt, \quad b \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos bt\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} \cos bt\, dt$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(-s\cos bt + b \operatorname{sen} bt)\right]_0^R = \frac{s}{s^2+b^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Exemplo 96 *Considere-se a função*

$$f(t) = \operatorname{sen} bt, \quad b \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Então,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \operatorname{sen} bt\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} \operatorname{sen} bt\, dt$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\} = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(s \operatorname{sen} bt + b\cos bt)\right]_0^R = \frac{b}{s^2+b^2}$$

para todo $s > 0$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Em cada um dos casos anteriores vimos que o intergral (4.1) existe apenas para certos valores de s. Abordaremos agora uma classe de funções para as quais o integral (4.1) existe sempre. Antes, porém, temos de considerar algumas propriedades de funções.

Definição 29 *Uma função $f(t)$ diz-se uma **função seccionalmente contínua** no intervalo limitado $a \leq t \leq b$ se este intervalo poder ser dividido num número finito de subintervalos tais que:*

(a) f é contínua no interior de cada subintervalo;

(b) $f(t)$ tende para um limite finito quando t se aproxima de qualquer um dos extremos de cada subintervalo a partir do seu interior.

Exemplo 97 *Considere-se a função*

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

A função f é seccionalmente contínua no intervalo finito $0 \leq t \leq b$, qualquer que seja o número real positivo b. Em $t = 2$ tem-se

$$f\left(2^-\right) = \lim_{t \to 2^-} f(t) = -1 \qquad e \qquad f\left(2^+\right) = \lim_{t \to 2^+} f(t) = +1.$$

Definição 30 *Uma função f diz-se uma **função de ordem exponencial** se existe uma constante positiva α e constantes t_0 e M, tais que*

$$e^{-\alpha t} |f(t)| < M$$

para todo $t > t_0$ para o qual f esteja definida. Dizemos portanto que f é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$ se existe uma constante positiva α tal que o produto

$$e^{-\alpha t} |f(t)|$$

é limitado para valores de t suficientemente elevados. Tem-se

$$e^{-\alpha t} |f(t)| < M \qquad \Leftrightarrow \qquad |f(t)| < M e^{\alpha t}$$

para todo $t > t_0$ para o qual f esteja definida.

Note-se que se f é uma função de ordem exponencial $e^{\alpha t}$, então também é de ordem exponencial $e^{\beta t}$ para todo $\beta > \alpha$.

Exemplo 98 *Toda a função limitada é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$ com $\alpha = 0$. Assim, $\cos bt$ e $\operatorname{sen} bt$ são funções de ordem exponencial pois*

$$|\cos bt| \leq 1 < M e^{\alpha t} \qquad e \qquad |\operatorname{sen} bt| \leq 1 < M e^{\alpha t}$$

para $M > 1$ e $\alpha = 0$, para todo t.

Exemplo 99 *Toda a função f do tipo $e^{at}\cos bt$ é de ordem exponencial com $\alpha = a$ pois*

$$\left|e^{at}\cos bt\right| \leq e^{at} < Me^{\alpha t}$$

para $M > 1$ e $\alpha = a$, para todo t. O mesmo se aplica a funções do tipo $e^{at}\operatorname{sen} bt$.

Exemplo 100 *Considere-se a função $f(t) = t^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Dado que*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}t^n = 0,$$

para $\alpha > 0$, então deverá existir $M > 0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$e^{-\alpha t}\left|t^n\right| = e^{-\alpha t}t^n < M$$

para $t > t_0$. Portanto, $f(t) = t^n$ é de ordem exponencial para $\alpha > 0$.

Exemplo 101 *A função $f(t) = e^{t^2}$ não é uma função de ordem exponencial já que*

$$e^{-\alpha t}e^{t^2}$$

não é limitada quando $t \to \infty$, independentemente do valor de α.

Podemos agora apresentar um teorema que nos dá condições sobre f que são suficientes para que o integral (4.1) exista.

Teorema 48 *Seja f uma função real com as seguintes propriedades:*

(a) f é seccionalmente contínua para todos os intervalos limitados fechados $0 \leq t \leq b$, onde $b > 0$;

(b) f é de ordem exponencial, isto é, existem constantes α, $M > 0$ e $t_0 > 0$, tais que

$$e^{-\alpha t}\left|f(t)\right| < M$$

para todo $t > t_0$.

Nestas condições a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f\,dt$$

existe para $s > \alpha$. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em S.L. Ross p. 416.

Vejamos agora algumas propriedades básicas da transformada de Laplace que decorrem da respectiva definição (4.1).

Teorema 49 *(**Propriedade da linearidade**) Sejam f e g funções cuja transformada de Laplace existe para $s > a$. Sejam ainda A e B constantes. Então,*

$$\mathcal{L}\{Af + Bg\} = A\mathcal{L}\{f\} + B\mathcal{L}\{g\}, \quad s > a.$$

Demonstração *Tem-se*

$$\mathcal{L}\{Af + Bg\} = \int_0^\infty e^{-st}(Af + Bg)\,dt = A\int_0^\infty e^{-st} f\,dt + B\int_0^\infty e^{-st} g\,dt = A\mathcal{L}\{f\} + B\mathcal{L}\{g\},$$

conforme requerido. ■

Exemplo 102 *Determinar $\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\}$ usando o teorema precedente e o facto de se ter*

$$\cos^2 at = \frac{1 + \cos 2at}{2}.$$

Tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1 + \cos 2at}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4a^2}\right) = \frac{2s^2 + 4a^2}{(s^2 + 4a^2)\,s}$$

para todo $s > 0$, uma vez que as funções 1 e $\cos 2at$ são funções de ordem exponencial com $\alpha = 0$.

Teorema 50 *Seja f uma função real contínua para $t \geq 0$ e de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Seja f' uma função seccionalmente contínua em todo o intervalo fechado $0 \leq t \leq b$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad s > \alpha.$$

Demonstração *Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f'\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st} f'\,dt.$$

Integrando por partes resulta

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \lim_{R\to\infty}\left[e^{-st} f\right]_0^R + \lim_{R\to\infty}\int_0^R s e^{-st} f\,dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Ora, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe por hipótese para $s > \alpha$, pelo que

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad s > \alpha,$$

conforme requerido. ■

Exemplo 103 *Considere-se a função $f(t) = \cos^2 at$. Esta função satisfaz as hipóteses do Teorema 50. Dado que*

$$f'(t) = -2a \operatorname{sen} at \cos at \qquad e \qquad f(0) = 1,$$

vem

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{-2a \operatorname{sen} at \cos at\right\} = s\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\} - 1.$$

Conforme vimos no exemplo precedente

$$\mathcal{L}\left\{\cos^2 at\right\} = \frac{2s^2+4a^2}{(s^2+4a^2)\,s}, \quad s > 0,$$

pelo que

$$\mathcal{L}\left\{-2a \operatorname{sen} at \cos at\right\} = \frac{2s^2+4a^2}{(s^2+4a^2)\,s} - 1.$$

O resultado do Teorema 50 pode ser generalizado da seguinte forma.

Teorema 51 *Seja f uma função real tendo derivadas até à ordem $n-1$ contínuas para $t \geq 0$. Suponhamos que f, f', ..., $f^{(n-1)}$, são todas de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Suponhamos ainda que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$. Então $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ existe para $s > \alpha$ e*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Exemplo 104 *Aplicamos este teorema no caso $n = 2$ para determinar $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\}$ sem recorrer à definição de transformada de Laplace. Tem-se,*

$$f(t) = \operatorname{sen} bt$$

satisfaz as condições do Teorema 51 com $\alpha = 0$. Por outro lado, para $n = 2$ obtemos,

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\left\{(\operatorname{sen} bt)''\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - s \operatorname{sen} 0 - b\cos 0 = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - b.$$

Desta forma, dado que $(\operatorname{sen} bt)'' = -b^2 \operatorname{sen} bt$, resulta

$$-b^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} - b \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} bt\right\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Teorema 52 *(**Propriedade da translação**) Suponhamos que f é tal que $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ existe para $s > \alpha$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \quad s > \alpha + a,$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$.
Demonstração *Seja*

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f\, dt,$$

então

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f\right]\, dt = \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}.$$

Por outro lado, se f é de ordem exponencial $e^{\alpha t}$, então existem constantes t_0 e M, tais que

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| < M \qquad \Rightarrow \qquad e^{-(\alpha+a)t}\left|e^{\alpha t} f(t)\right| < M$$

para todo $t > t_0$, pelo que $e^{\alpha t} f(t)$ é de ordem exponencial $e^{(\alpha+a)t}$. ■

Exemplo 105 *Determinar $\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\}$. Tem-se,*

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = F(s-a),$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}.$$

Dado que t é de ordem exponencial com $\alpha = 0$, vem

$$\mathcal{L}\left\{te^{at}\right\} = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a.$$

Exemplo 106 *Determinar $\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\}$. Tem-se*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = F(s-a),$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos bt\right\} = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

Dado que $\cos bt$ é de ordem exponencial com $\alpha = 0$, vem

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\cos bt\right\} = \frac{s}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a.$$

Teorema 53 *Suponhamos que a função f admite transformada de Laplace para $s > \alpha$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[F(s)\right],$$

onde

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f\, dt.$$

Demonstração *Derivando*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f\, dt$$

sucessivamente relativamente a s, obtém-se

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f\, dt = (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t f\, dt = (-1)^1 \mathcal{L}\left\{t^1 f(t)\right\}$$

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[(-1)^1 \int_0^\infty e^{-st} t f\, dt\right] = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} t^2 f\, dt = (-1)^2 \mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f\, dt = (-1)^n \mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\},$$

donde se conclui que

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n},$$

conforme requerido. ∎

Exemplo 107 *Determinar* $\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\}$. *Usando o resultado que se acaba de demonstrar, obtém-se*

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\} = (-1)^2 \frac{d^2 F(s)}{ds^2},$$

onde

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos bt\right\} = \frac{s}{s^2+b^2},$$

vindo

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \cos bt\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right) = 2s\frac{s^2-3b^2}{\left(s^2+b^2\right)^3}.$$

Vejamos mais algumas propriedades da transformada de Laplace.

Teorema 54 *Suponhamos que a função f admite transformada de Laplace $F(s)$ para $s > \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Então,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad s > \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração *A definição de transformada de Laplace permite escrever*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt.$$

Por outro lado, designando por g uma primitiva de f, tem-se

$$\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt = \int_0^a \left(g(t)-g(0)\right)\, e^{-st}\,dt = \int_0^a g(t)\, e^{-st}\,dt - g(0)\int_0^a e^{-st}\,dt,$$

pelo que aplicando integração por partes, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\, e^{-st}\,dt - \frac{1}{s}\left[g(t)\, e^{-st}\right]_0^a + \frac{g(0)}{s}\left[e^{-st}\right]_0^a \\ &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\, e^{-st}\,dt - \frac{g(a)}{s}\, e^{-sa} + \frac{g(0)}{s} + \frac{g(0)}{s}\left(e^{-sa}-1\right) \\ &= \frac{1}{s}\int_0^a f(t)\, e^{-st}\,dt + \frac{1}{s}e^{-sa}\left(g(0)-g(a)\right).\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $a \to +\infty$ e uma vez que $s > \alpha > 0$, obtém-se finalmente

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\left(\int_0^t f(u)\,du\right) e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(t)\, e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\,dt = \frac{F(s)}{s},$$

ou

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s},$$

tal como requerido. ∎

Exemplo 108 *Sendo que*

$$\operatorname{sen} t = \int_0^t \cos u \, du$$

e

$$\mathcal{L}\{\cos u\} = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0,$$

resulta da aplicação do teorema precedente

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos u \, du\right\} = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

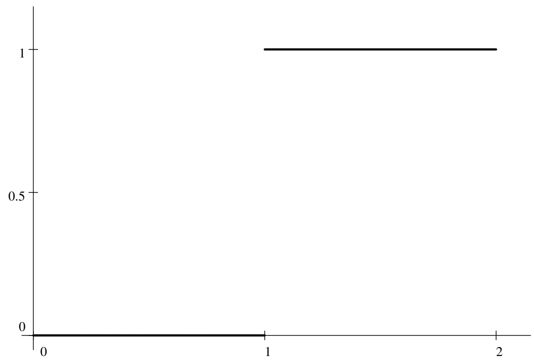
Definição 31 *Para cada número real $a \geq 0$, a função salto unitário*[1] u_a *define-se para todo $t \geq 0$ como*

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t > a. \end{cases}$$

Refira-se que outras notações possíveis para esta função: são $u(t-a)$ e $H(t-a)$.Por exemplo, para $a = 1$, tem-se

$$u_1(t) \equiv u(t-1) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases}$$

correspondendo-lhe o seguinte gráfico:



Representação gráfica da função $u_1(t)$

Tem-se para a transformada de Laplace da função $u_a(t)$,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t) \, dt = \int_a^\infty e^{-st} \, dt = \lim_{R\to\infty} \int_a^R e^{-st} \, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^R = \frac{e^{-as}}{s},$$

para todo $s > 0$. Então,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$$

---

[1] Também designada por "função escalão unitário" ou "função de Heaviside"

Exemplo 109 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2, \\ 3, & 2 < t < 5, \\ 0, & t > 5. \end{cases}$$

Tem-se

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ 3, & 2 < t < 5 \end{cases} - \begin{cases} 0, & 0 < t < 5 \\ 3, & t > 5 \end{cases} = 3u_2(t) - 3u_5(t).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{3u_2(t) - 3u_5(t)\} = 3\left[\mathcal{L}\{u_2(t)\} - \mathcal{L}\{u_5(t)\}\right] = \frac{3}{s}\left(e^{-2s} - e^{-5s}\right).$$

Consideremos agora a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ f(t-a), & t > a, \end{cases}$$

ou seja,

$$g(t) = f(t-a)\begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a, \end{cases} = u_a(t) f(t-a).$$

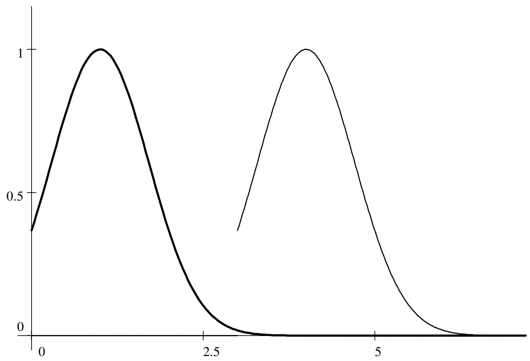
Por exemplo, para

$$f(t) = e^{-(t-1)^2} \qquad \text{e} \qquad a = 3,$$

tem-se

$$g(t) = u_3(t) f(t-3) = u_3(t) e^{-(t-4)^2} = \begin{cases} 0, & 0 < t < 3, \\ e^{-(t-4)^2}, & t > 3, \end{cases}$$

correspondendo-lhe o seguinte gráfico:



Representação gráfica das funções $e^{-(t-1)^2}$ (a cheio) e $u_3(t)e^{-(t-4)^2}$

Tem-se, portanto, uma translação da função $f(t)$.

Teorema 55 *Seja f uma função que admite transformada de Laplace $F(s)$ para $s > \alpha$. Seja ainda*

$$u_a(t)f(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ f(t-a), & t > a. \end{cases}$$

Então

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)$$

para $s > \alpha$.

Demonstração *Tem-se,*

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u_a(t)f(t-a)\,dt = \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\,dt.$$

Fazendo $u = t - a$ vem,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)}f(u)\,du. = e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)\,du.$$

O integral é finito para $s > \alpha$, pelo que nessas condições,

$$\mathcal{L}\{u_a(t)f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s).$$

■

Exemplo 110 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 5 \\ t-3, & t > 5. \end{cases}$$

Dado que a descontinuidade ocorre em $t = 5$, tem-se

$$g(t) = f(t-5)\,u_5(t) = (t-3)\begin{cases} 0, & 0 < t < 5, \\ 1, & t > 5, \end{cases}$$

onde

$$f(t-5) = (t-3)\,.$$

Resta determinar $f(t)$. Para tal considere-se

$$u = t - 5 \qquad \Rightarrow \qquad t = u + 5 \qquad \Rightarrow \qquad f(u) = u + 5 - 3 = u + 2.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u_5(t)f(t-5)\} = e^{-5s}F(s),$$

com

$$f(u) = u + 2 \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}, \quad s > 0,$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right), \quad s > 0.$$

Exemplo 111 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi/2 \\ \cos(t - \pi/2), & t > \pi/2. \end{cases}$$

Dado que a descontinuidade ocorre em $t = \pi/2$, tem-se

$$h(t) = u_{\pi/2}(t) f(t - \pi/2) = \cos(t - \pi/2) \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi/2, \\ 1, & t > \pi/2, \end{cases}$$

onde

$$f(t - \pi/2) = \cos(t - \pi/2),$$

pelo que se conclui de imediato que

$$f(u) = \cos u.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\left\{u_{\pi/2}(t) f(t - \pi/2)\right\} = e^{-\pi s/2} F(s),$$

com

$$f(u) = \cos u \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad s > 0,$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-\pi s/2} \frac{s}{s^2 + 1}, \quad s > 0.$$

Teorema 56 *Suponhamos que f é uma função periódica, com período p, que admite transformada de Laplace. Então,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-ps}}.$$

Demonstração *Tem-se, por definição de transformada de Laplace,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{kp}^{kp+p} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots,$$

ou

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Considerando a mudança de variável $u = t - kp$, resulta

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^p e^{-s(u+kp)} f(u + kp)\, du.$$

Atendendo à periodicidade da função f tem-se $f(u + kp) = f(u)$, pelo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-kps} \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right].$$

Ora,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{-kps} = \frac{1}{1-e^{-ps}},$$

donde

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st} f(t)\, dt}{1-e^{-ps}},$$

conforme requerido. ■

Exemplo 112 *Determinar a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ -1, & 2 \le t < 4 \end{cases} \qquad e \qquad f(t+4) = f(t) \text{ para } t \ge 0.$$

Sendo f uma função periódica, de período $p = 4$ e de ordem exponencial com $\alpha = 0$, vem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^4 e^{-st} f(t)\, dt}{1-e^{-4s}} = \frac{\int_0^2 e^{-st}\, dt - \int_2^4 e^{-st}\, dt}{1-e^{-4s}} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}}, \quad s > 0.$$

Exercícios

Exercício 79 *Use a definição para determinar a transformada de Laplace das seguintes funções. Indique, em cada caso, o domínio da transformada de Laplace, recorrendo para o efeito à definição de função de ordem exponencial.*

(a) $f(t) = t^2$.

(b) $g(t) = \operatorname{senh} t$.

(c) $h(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 3, \\ 2, & t > 3. \end{cases}$

(d) $\varphi(t) = \begin{cases} t, & 1 \le t < 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$

Exercício 80 *Determine $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}t\right\}$ usando a propriedade da linearidade e o facto de*

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

Exercício 81 *Determine $\mathcal{L}\left\{\cos^2 3t \operatorname{sen} 3t\right\}$ em função de $\mathcal{L}\left\{\cos^3 3t\right\}$, atendendo ao facto de se ter $\left(\cos^3 3t\right)' = -9\cos^2 3t \operatorname{sen} 3t$ e recorrendo ao resultado do Teorema 50.*

Exercício 82 *Determine $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}$ sabendo que $\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = 2/s^3$.*

Exercício 83 *Determine $\mathcal{L}\left\{e^{-3t}t^2\right\}$ usando a propriedade da translação.*

Exercício 84 *Determine $\mathcal{L}\left\{t^3 \operatorname{sen} 5t\right\}$ usando o resultado do Teorema 53.*

Exercício 85 *Determine a transformada de Laplace das seguintes funções.*

$$(a)\quad f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<6,\\ 5, & t>6.\end{cases}\qquad (d)\quad \psi(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t<5,\\ 10, & t>5.\end{cases}$$

$$(b)\quad g(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<5,\\ 2, & 5\le t<7,\\ 0 & t>7.\end{cases}\qquad (e)\quad \varphi(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<2,\\ e^{-t}, & t>2.\end{cases}$$

$$(c)\quad h(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<4,\\ 3t, & t>4.\end{cases}\qquad (f)\quad \rho(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi,\\ \cos t, & t>\pi.\end{cases}$$

4.2 A transformada inversa de Laplace

Até agora consideramos o seguinte problema: dada uma função $f(t)$, definida para $t>0$, pretende-se determinar a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ - ou $F(s)$. Considere-se agora o problema inverso, isto é, dada uma função $F(s)$, determinar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Usaremos a notação $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ para representar tal função f, ou seja,

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\},$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s).$$

Nestas condições, $f(t)$ designa-se a **transformada inversa de Laplace** da função $F(s)$. A este respeito colocam-se três questões:

1. Dada uma função $F(s)$, existe sempre a sua transformada inversa?
2. Supondo que $F(s)$ admite transformada inversa, ela é única?
3. Como se determina a transformada inversa?

A questão 1 não tem uma resposta taxativa, isto é, há funções que têm transformada inversa de Laplace, enquanto que outras não são a transformada de Laplace de nenhuma função. Relativamente à questão 2, se assumirmos que a transformada inversa de Laplace existe, em que medida é que podemos afirmar que a sua transformada inversa é única? Para as aplicações que nos interessam a resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 57 *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas para $t\ge 0$ que têm a mesma transformada de Laplace $F(s)$. Então $f(t)=g(t)$ para todo $t\ge 0$.*
Ou seja, se sabemos que uma dada função $f(t)$ tem transformada inversa contínua, então $f(t)$ é a única função contínua que é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$, isto é, não existe mais nenhuma função contínua cuja transformada de Laplace seja $F(s)$.

Exemplo 113 *Conforme vimos,* $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$. *Portanto, uma transformada inversa de Laplace da função* $1/s$ *é a função contínua* f *definida para todo* $t \geq 0$ *por* $f(t) = 1$. *Há outras funções cuja transformada de Laplace é* $1/s$, *mas estas são forçosamente descontínuas. Assim, considerando apenas funções contínuas definidas para* $t \geq 0$, *tem-se*

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1.$$

Consideremos agora a questão 3. Supondo que existe uma e uma só função contínua f que é a transformada inversa de F, como é que a determinamos? Não consideraremos aqui a determinação directa da transformada inversa de Laplace, a qual teria de ser abordada no âmbito da Análise Complexa. Faremos antes uso de tabelas de transformadas de Laplace, as quais existem em abundância em numerosas publicações. Consulte-se, a título de exemplo, a tabela publicada em S.L. Ross (p. 434), ou ainda "Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada, L. Abellanas, M.R. Spiegel, ed. McGraw-Hill, 1990 (p. 264)". As referidas tabelas são semelhantes à Tabela 4.1.

Embora as funções cuja transformada inversa de Laplace queremos determinar não sejam em geral iguais às que figuram na Tabela 4.1, é possível expressar tais funções como combinações lineares daquelas que se encontram tabeladas. Usando algumas das propriedades da transformada inversa de Laplace, que decorrem das propriedades da transforrmada de Laplace, conseguimos efectuar o respectivo cálculo. Assim, por exemplo, da propriedade da linearidade da transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = A\mathcal{L}\{f_1(t)\} + B\mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

resulta

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = AF_1(s) + BF_2(s),$$

onde $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ e $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$. Aplicando a transformada inversa de Laplace aos dois membros da equação precedente vem

$$Af_1(t) + Bf_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{AF_1(s) + BF_2(s)\}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{AF_1(s) + BF_2(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + B\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\},$$

pois $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)$. A equação precedente mostra que a transformada inversa de Laplace também goza da propriedade da linearidade.

Vejamos agora alguns exemplos de determinação da transformada inversa de Laplace.

Exemplo 114 *Determinar a transformada inversa de Laplace da função*

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$$

usando a Tabela 4.1.Uma vez que queremos determinar

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\right\},$$

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$
2.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
3.	$\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
4.	$\cos bt$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
5.	$\operatorname{senh} bt$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$
6.	$\cosh bt$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$
7.	$t^n \ (n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
8.	$t^n e^{at} \ (n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9.	$t \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
10.	$t \cos bt$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
11.	$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
12.	$e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
13.	$u_a(t)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
14.	$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

Tabela 4.1: Transformadas de Laplace

gostaríamos de ver tabelado

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{as^2+bs+c}\right\},$$

ou seja,

$$F(s)=\frac{1}{as^2+bs+c},$$

mas não é assim. No entanto, encontra-se tabelado

$$F(s)=\frac{b}{(s+a)^2+b^2},$$

isto é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right\}=e^{-at}\operatorname{sen}bt.$$

Assim, tendo em conta que

$$\frac{1}{s^2+6s+13}=\frac{1}{(s+3)^2+2^2}=\frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^2+2^2},$$

resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+13}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-3t}\operatorname{sen}2t.$$

Exemplo 115 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}.$$

Recorrendo à factorização

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1},$$

obtém-se $A=1$, $B=-1$ *e* $C=0$, *pelo que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=1-\cos t.$$

Exemplo 116 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s}-3\frac{e^{-3s}}{s}-2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}.$$

Tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s}-3\frac{e^{-3s}}{s}-2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}=5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\}.$$

Ora,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1,$$

enquanto que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s}\right\} = u_3(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & 0 < t < 3, \\ 1, & t > 3, \end{array}\right.$$

uma vez que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = u_a(t).$$

Dado que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = u_a(t)ft-a), \qquad \textit{onde} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\},$$

tem-se ainda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = u_7(t)f(t-7) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & 0 < t < 7, \\ f(t-7), & t > 7, \end{array}\right.$$

onde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t,$$

pelo que

$$f(t-7) = t-7$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = u_7(t)(t-7) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & 0 < t < 7, \\ t-7, & t > 7. \end{array}\right.$$

Assim

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = 5 - 3u_3(t) - 2(t-7)u_7(t).$$

Considerando os vários ramos que intervêm nesta expressão podemos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 5, & 0 < t < 3, \\ 5-3, & 3 < t < 7, \\ 5-3-2(t-7), & t > 7, \end{array}\right.$$

ou seja

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s} - 3\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-7s}}{s^2}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 5, & 0 < t < 3, \\ 2, & 3 < t < 7, \\ 16-2t, & t > 7. \end{array}\right.$$

4.2.1 A convolução

Outro procedimento importante relacionado com o uso de tabelas é aquele que decorre do **Teorema da Convolução**. No entanto, antes de enunciar o teorema, definimos o conceito de convolução de duas funções.

Definição 32 *Sejam f e g duas funções que são seccionalmente contínuas para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$. A função $h(t) = f(t) * g(t)$ definida por*

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau \tag{4.2}$$

designa-se ***convolução das funções*** *f e g.*

Note-se que o resultado da convolução de duas funções é ainda uma função. Por outro lado, se no integral presente em (4.2) realizarmos a mudança de variável

$$u = t - \tau \qquad \Rightarrow \qquad \tau = t - u \qquad \Rightarrow \qquad d\tau = -du,$$

resulta

$$f(t) * g(t) = -\int_t^0 f(t-u)g\,(u)\;du = \int_0^t f(t-u)g\,(u)\;du = \int_0^t g\,(u)\,f(t-u)\,du = g(t) * f(t),$$

concluindo-se portanto que a convolução é uma operação comutativa.

O principal resultado que estabelece a ligação entre a convolução de funções e a transformada (inversa) de Laplace é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 58 (Teorema da Convolução) *Sejam f e g duas funções que são seccionalmente contínuas para todo o intervalo fechado limitado $0 \leq t \leq b$ e ambas de ordem exponencial $e^{\alpha t}$. Nestas condições a transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\}$$

existe para $s > \alpha$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\,\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em S.L. Ross (p. 438).

Usando a notação,

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \quad G(s) = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\},$$

o Teorema da Convolução toma a forma

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(s)\,G(s),$$

permitindo escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\,G(s)\right\} = f(t) * g(t).$$

Tem-se assim uma forma alternativa de determinar a transformada inversa de Laplace de um produto de duas funções a partir das respectivas transformadas inversas de Laplace.

Exemplo 117 *Vimos no Exemplo 115 que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t,$$

tendo para o efeito recorrido à factorização da função racional em causa. Pretende-se agora determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+1)}\right\}$$

usando o Teorema da Convolução. Tem-se

$$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+1},$$

pelo que escolhendo

$$F(s)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad f(t)=1, \qquad G(s)=\frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(t)=\operatorname{sen} t,$$

tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=1*\operatorname{sen} t=\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\;d\tau=\left[\cos(t-\tau)\right]_0^t=1-\cos t.$$

Atendendo à comutatividade da convolução podíamos ter escrito

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=\operatorname{sen} t*1=\int_0^t \operatorname{sen}\tau\,d\tau=\left[-\cos(\tau)\right]_0^t=1-\cos t.$$

Exercícios

Exercício 86 *Determine a transformada inversa de Laplace das seguintes funções.*

(a) $\dfrac{6}{s^2+9}$.

(b) $\dfrac{30}{(s-2)^4}$.

(c) $\dfrac{3s}{s^2-4}$.

(d) $\dfrac{5s}{s^2+4s+4}$.

(e) $\dfrac{2s+2}{s^3+2s}$.

(f) $\dfrac{7s+12}{s^2+9}$.

(g) $\dfrac{35s+56}{s^2+3s-10}$.

(h) $\dfrac{5s+6}{s^2+9}e^{-\pi s}$.

(i) $\dfrac{6s+27}{s^2+4s+13}e^{-3s}$.

(j) $3\dfrac{e^{-4s}-e^{-7s}}{s^2}$.

(l) $\dfrac{2+2e^{-\pi s}}{s^2+4}$.

(m) $\dfrac{4\left(e^{-2s}-1\right)}{s\left(s^2+4\right)}$.

Exercício 87 *Determine a transformada inversa de Laplace das seguintes funções usando o Teorema da Convolução.*

(a) $\dfrac{1}{s^2+5s+6}$.

(b) $\dfrac{10}{s^2-6s-16}$.

(c) $\dfrac{9}{2s\left(s^2+9\right)}$.

(d) $\dfrac{9}{s^2\left(s+3\right)}$.

4.3 Aplicações da transformada de Laplace

4.3.1 Solução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Veremos agora como é que a transformada de Laplace pode ser usada para determinar a solução de problemas de valores iniciais envolvendo equações diferenciais lineares de ordem n com coeficientes constantes, ou seja,

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y=b(t),$$

com condições

$$y(0)=c_0,\quad y'(0)=c_1,\ldots,\quad y^{(n-1)}(0)=c_{n-1}.$$

Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial em causa obtém-se,

$$a_0\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\}+a_1\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\}+\cdots+a_{n-1}\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+a_n\mathcal{L}\left\{y\right\}=\mathcal{L}\left\{b(t)\right\}.$$

Aplicando o resultado enunciado no Teorema 51,

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0),$$

e usando a notação

$$Y(s)=\mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\},\qquad B(s)=\mathcal{L}\left\{b\left(t\right)\right\},$$

resulta

$$\left(a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n\right)Y(s)-A(s)=B(s),$$

onde $A(s)$ é um polinómio de grau $n-1$ na variável s envolvendo as constantes $a_0,\ldots,a_{n-1}$ e as condições iniciais $c_0,\ldots,c_{n-1}$. Assim,

$$Y(s)=\frac{B(s)-A(s)}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n},$$

pelo que a solução do problema de valores iniciais é

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)-A(s)}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\right\}.$$

Exemplo 118 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}-2y=e^{5t},\\ y(0)=3,\end{cases}$$

usando a transformada de Laplace. Tem-se

$$\frac{dy}{dt}-2y=e^{5t}\qquad\Rightarrow\qquad\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}-2y\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}.$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}-2y\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}-2\mathcal{L}\left\{y\right\}=sY(s)-y(0)-2Y(s)=(s-2)Y(s)-3,$$

onde $Y(s)=\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$, *e*

$$\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}=\frac{1}{s-5},$$

resulta

$$(s-2)Y(s)-3=\frac{1}{s-5}\qquad\Leftrightarrow\qquad Y(s)=\frac{-14+3s}{(s-5)\,(s-2)}.$$

Ora, escrevendo,

$$Y(s)=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-5},$$

obtém-se $A=8/3$ *e* $B=1/3$, *pelo que*

$$Y(s)=\frac{8}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-5},$$

vindo

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\}\qquad\Leftrightarrow\qquad y(t)=\frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\},$$

ou seja,

$$y(t)=\frac{8}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{5t}.$$

Note-se que $y(0)=8/3+1/3=3$, *conforme requerido.*

Exemplo 119 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}-8y=0,\\ y(0)=3,\\ y'(0)=6,\end{cases}$$

usando a transformada de Laplace. Tem-se

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-8y=0\qquad\Rightarrow\qquad\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-8y\right\}=0.$$

Atendendo a que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-3s-6$$

e

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}=sY(s)-y(0)=sY(s)-3,$$

resulta

$$\left(s^2Y(s) - 3s - 6\right) - 2\left(sY(s) - 3\right) - 8Y(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}.$$

Ora, escrevendo

$$Y(s) = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2},$$

obtém-se $A = 2$ *e* $B = 1$*, pelo que*

$$Y(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2},$$

vindo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} \qquad \Leftrightarrow \qquad y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\},$$

ou seja,

$$y(t) = 2e^{4t} + e^{-2t}.$$

Note-se que $y(0) = 2 + 1 = 3$*, enquanto que* $y'(0) = 8 - 2 = 6$*, conforme requerido.*

Exemplo 120 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = h(t), \qquad h(t) = \begin{cases} 5, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi, \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

usando a transformada de Laplace. Tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y\right\} = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y\right\} &= \left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 5Y(s) \\ &= \left(s^2 + 2s + 5\right)Y(s) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt = 5\int_0^\pi e^{-st}\,dt = 5\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\pi = 5\,\frac{1 - e^{-\pi s}}{s}.$$

Assim, a equação para $Y(s)$ *é*

$$\left(s^2 + 2s + 5\right)Y(s) = 5\,\frac{1 - e^{-\pi s}}{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{5}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)} - \frac{5e^{-\pi s}}{s\left(s^2 + 2s + 5\right)}.$$

Portanto,

$$y(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\,(s^2+2s+5)}\right\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s\,(s^2+2s+5)}\right\}.$$

Tem-se por isso de determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} \qquad e \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\},$$

onde

$$F(s) = \frac{1}{s\,(s^2+2s+5)}.$$

Dado que

$$\frac{1}{s\,(s^2+2s+5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+5}\right),$$

vem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\}.$$

Tendo em conta que

$$\frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2},$$

então,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\} = e^{-t}\cos 2t + \frac{e^{-t}}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

Resumindo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

É agora fácil determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\} = u_\pi(t)f(t-\pi),$$

onde

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

Tem-se

$$\begin{aligned} f(t-\pi) &= \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2\,(t-\pi) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,(t-\pi)\right)\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right], \end{aligned}$$

resultando

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\} = u_\pi(t)\frac{1}{5}\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right].$$

Atendendo a que

$$y(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\pi s}\right\},$$

tem-se

$$y(t) = \left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right] - u_\pi(t)\left[1 - e^{-(t-\pi)}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right],$$

isto é,

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right), & 0 \le t < \pi, \\ e^{-t}\left(e^{\pi} - 1\right)\left(\cos 2t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right), & t \ge \pi. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que $y(0) = 0$*. Por outro lado,*

$$y'(0) = \frac{d}{dt}\left\{\left[1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\right]\right\}_{t=0} = \left\{\left[\frac{5}{2}e^{-t}\sin 2t\right]\right\}_{t=0} = 0,$$

conforme requerido. Note-se que a solução deste problema de valores iniciais é contínua em $t = \pi$ *já que*

$$\lim_{t \to \pi-} y(t) = y(\pi) = 1 - e^{-\pi},$$

apesar do segundo membro da equação diferencial ser descontínuo.

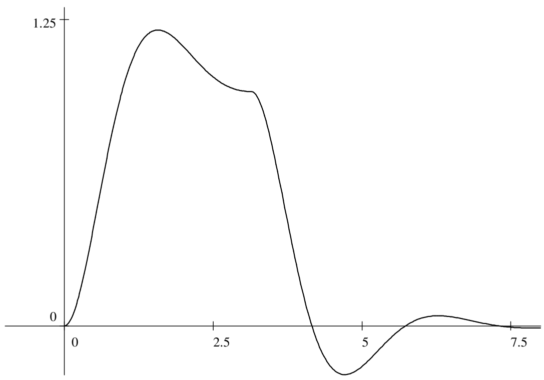


Gráfico da solução do problema de valores iniciais (4.3)

Vejamos agora qual seria a solução do problema de valores iniciais se resolvessemos a equação diferencial ramo a ramo e impondo

$$\lim_{t \to \pi-} y(t) = y(\pi) \qquad e \qquad \lim_{t \to \pi-} y'(t) = y'(\pi).$$

Comecemos por considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 5, \qquad 0 \le t < \pi.$$

Da aplicação do método dos coeficientes indeterminados resulta

$$y_-(t) = 1 + c_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-t} \cos 2t.$$

As constantes c_1 e c_2 determinam-se impondo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, vindo

$$y_-(t) = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t - e^{-t} \cos 2t, \qquad 0 \le t < \pi.$$

Considermos agora a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0, \qquad t \ge \pi.$$

A sua solução geral é

$$y_+(t) = c_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-t} \cos 2t, \qquad t \ge \pi.$$

O valor das constantes c_1 e c_2 não pode ser determinado usando as condições iniciais uma vez que esta solução não é válida para $t = 0$, mas apenas para $t > \pi$. As constantes são tais que

$$\lim_{t \to \pi -} y_-(t) = y_+(\pi) \qquad e \qquad \lim_{t \to \pi -} y'_-(t) = y'_+(\pi).$$

Ora,

$$\begin{aligned} y_-(t) &= 1 - \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t - e^{-t} \cos 2t, \qquad 0 \le t < \pi, \\ y_+(t) &= c_1 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-t} \cos 2t, \qquad t \ge \pi, \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{t \to \pi -} y_-(t) = y_+(\pi) \qquad \Rightarrow \qquad 1 - e^{-\pi} = c_2 e^{-\pi},$$

resultando

$$c_2 = e^{\pi} - 1.$$

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} y'_-(t) &= \frac{5}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t \qquad 0 \le t < \pi, \\ y'_+(t) &= (-2c_2 - c_1) e^{-t} \sin 2t + (2c_1 - c_2) e^{-t} \cos 2t, \qquad t \ge \pi, \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{t \to \pi -} y'_-(t) = 0 \qquad e \qquad y'_+(\pi) = (2c_1 - c_2) e^{-\pi}.$$

Combinando a condição

$$\lim_{t \to \pi -} y'_-(t) = y'_+(\pi),$$

com o facto de se ter $c_2 = e^{\pi} - 1$, resulta

$$\begin{cases} (2c_1 - c_2) e^{-\pi} = 0, \\ c_2 = e^{\pi} - 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} (e^{\pi} - 1), \\ c_2 = e^{\pi} - 1. \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valores iniciais proposto usando o método dos coeficientes indeterminados é

$$
\begin{aligned}
y_{-}(t) &= 1-\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t-e^{-t}\cos 2t, \qquad 0\le t<\pi,\\
y_{+}(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{\pi}-1\right)e^{-t}\operatorname{sen}2t+\left(e^{\pi}-1\right)e^{-t}\cos 2t, \qquad t\ge\pi,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
y(t)=\begin{cases}
1-e^{-t}\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right), & 0\le t<\pi,\\
e^{-t}\left[\left(e^{\pi}-1\right)\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)\right], & t\ge\pi,
\end{cases}
$$

que mais não é do que a solução determinada anteriormente usando a transformada de Laplace.

$$
y(t)=\begin{cases}
1-e^{-t}\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right) & if \quad 0\le t<\pi\\
e^{-t}\left(\left(e^{\pi}-1\right)\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\right) & if \quad t\ge\pi
\end{cases}
$$

Nos exemplos precedentes as condições foram colocadas para $t=0$. No entanto, tal não tem porque ser necessariamente assim conforme ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo 121 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=t,\\
y(\pi)=0,\\
y'(\pi)=1,
\end{cases}
$$

usando a transformada de Laplace. Realizando a mudança de variável

$$x=t-\pi$$

o problema proposto escreve-se

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x+\pi,\\
y(0)=0,\\
y'(0)=1.
\end{cases}
$$

Aplicando a transformada de Laplace, vem

$$
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}+y\right\}=\mathcal{L}\left\{x+\pi\right\} \quad\Rightarrow\quad s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s},
$$

pelo que

$$\left(s^2+1\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}+1 \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{1+\pi s}{\left(s^2+1\right)s^2}+\frac{1}{s^2+1}=-\frac{\pi s}{s^2+1}+\frac{\pi}{s}+\frac{1}{s^2},$$

resultando

$$y(x)=-\pi\cos x+\pi+x$$

ou, atendendo a que $x=t-\pi$*,*

$$\begin{aligned} y(t) &= -\pi\cos\left(t-\pi\right)+t \\ &= \pi\cos t+t. \end{aligned}$$

A transformada de Laplace também pode ser usada para resolver problemas de valores iniciais envolvendo equações integro-diferenciais, conforme se exemplifica de seguida.

Exemplo 122 *Consideremos o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}+\displaystyle\int_0^t u\,dt=\dfrac{t^2}{2}, \\ u(0)=0. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}+\int_0^t u\,dt\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}, \\ \mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\}+\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}, \\ s\mathcal{L}\left(u\right)-u\left(0\right)+\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\} &= \frac{1}{s^3}. \end{aligned}$$

A propriedade enunciada no Teorema 54 conduz a

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u\,dt\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(u\right),$$

pelo que,

$$s\mathcal{L}\left(u\right)-u\left(0\right)+\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(u\right)=\frac{1}{s^3},$$

ou seja, definindo $U(s)=\mathcal{L}\left(u\right)$ *e atendendo a que* $u\left(0\right)=0$*:*

$$\left(s+\frac{1}{s}\right)U(s)=\frac{1}{s^3}.$$

Assim,

$$U(s)=\frac{1}{s^2+s^4}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1},$$

pelo que

$$u(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right)=t-\operatorname{sen}t.$$

4.3.2 Solução de problemas de valores iniciais envolvendo sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Aplicaremos a transformada de Laplace para determinar a solução de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{dx}{dt} + a_2 \dfrac{dy}{dt} + a_3 x + a_4 y = \beta_1(t) \\ b_1 \dfrac{dx}{dt} + b_2 \dfrac{dy}{dt} + b_3 x + b_4 y = \beta_2(t), \end{cases}$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 e b_4 são constantes e β_1 e β_2 são funções conhecidas, satisfazendo as condições iniciais

$$x(0) = c_1, \qquad y(0) = c_2.$$

O método é análogo ao usado para determinar a solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, sendo facilmente aplicável a equações diferenciais de ordem mais elevada e com mais funções incógnita. Vejamos alguns exemplos que ilustram o método.

Exemplo 123 *Determinar a solução do sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 6x + 3y = 8e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} - y - 2x = 4e^t, \end{cases}$$

satisfazendo

$$x(0) = -1, \qquad y(0) = 0.$$

Tem-se

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt} - 6x + 3y\right\} = \mathcal{L}\left\{8e^t\right\}, \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dt} - y - 2x\right\} = \mathcal{L}\left\{4e^t\right\}, \end{cases}$$

resultando da aplicação da propriedade da linearidade

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt}\right\} - 6\mathcal{L}\{x\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{8e^t\right\}, \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dt}\right\} - \mathcal{L}\{y\} - 2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\left\{4e^t\right\}. \end{cases}$$

Usando a notação $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, vem

$$\begin{cases} [sX(s) - x(0)] - 6X(s) + 3Y(s) = \dfrac{8}{s-1}, \\ [sY(s) - y(0)] - Y(s) - 2X(s) = \dfrac{4}{s-1}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (s-6)\,X(s) + 3Y(s) = -\dfrac{s-9}{s-1}, \\ -2X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{4}{s-1}. \end{cases}$$

Resta resolver o sistema precedente em ordem a $X(s)$ e $Y(s)$. Tem-se então,

$$\begin{cases} 2\,(s-6)\,X(s) + 6Y(s) = -2\dfrac{s-9}{s-1}, \\ -2\,(s-6)\,X(s) + (s-1)\,(s-6)\,Y(s) = 4\dfrac{s-6}{s-1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(s^2-7s+12\right)Y(s) = \dfrac{2s-6}{s-1}, \\ -2X(s) + (s-1)\,Y(s) = \dfrac{4}{s-1}, \end{cases}$$

resultando

$$\begin{cases} (s-3)\,(s-4)\,Y(s) = \dfrac{2\,(s-3)}{s-1}, \\ X(s) = \dfrac{1}{2}\,(s-1)\,Y(s) - \dfrac{2}{s-1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y(s) = \dfrac{2}{(s-1)\,(s-4)}, \\ X(s) = \dfrac{1}{s-4} - \dfrac{2}{s-1}, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} Y(s) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-4}, \\ X(s) = \dfrac{1}{s-4} - \dfrac{2}{s-1}. \end{cases}$$

Dado que $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, obtém-se

$$\begin{cases} y(t) = -\dfrac{2}{3}e^{t} + \dfrac{2}{3}e^{4t}, \\ x(t) = e^{4t} - 2e^{t}. \end{cases}$$

Note-se que se tem $y(0) = 0$ e $x(0) = -1$, tal como requerido.

Exemplo 124 *Determinar a solução do problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y - x = -2e^{t}\operatorname{sen} t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = e^{t}\,(2\cos t + 1)\,, \\ x\,(0) = 1, \quad y\,(0) = 1. \end{cases}$$

Exemplo 125 *Aplicando a transformada de Laplace tem-se*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y - x\right\} = \mathcal{L}\left\{-2e^{t}\operatorname{sen} t\right\}, \\ \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy}{dt} + x\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{t}\,(2\cos t + 1)\right\}, \end{cases}$$

vindo

$$\begin{cases} sX(s) - 1 + sY(s) - 1 - 2Y(s) - X(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2+1}, \\ sY(s) - 1 + X(s) = 2\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{s-1}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2+1} + 2, \\ X(s) + sY(s) = 2\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{s-1} + 1, \end{cases}$$

resultando

$$\begin{cases} (s-1)X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{-2}{(s-1)^2+1} + 2, \\ Y(s) = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1} + \dfrac{1}{(s-1)^2+1}. \end{cases}$$

Concluímos que

$$y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Para determinar $x(t)$ podemos resolver o sistema de equações precedente em ordem a $X(s)$ e determinar a respectiva transformada inversa de Laplace,

$$X(s) = \frac{1}{s-1} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = e^t,$$

ou, alternativamente, usar a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + x = e^t\,(2\cos t + 1) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e^t\,(2\cos t + 1) - \frac{dy}{dt}$$

e a expressão já obtida para $y(t)$, vindo

$$x(t) = e^t\,(2\cos t + 1) - \frac{d}{dt}\left[e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)\right] = e^t.$$

Desta forma, a solução do problema de valores iniciais proposto é

$$\begin{cases} y(t) = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t), \\ x(t) = e^t. \end{cases}$$

Exercícios

Exercício 88 *Use a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes problemas de valores iniciais.*

(*a*) $\dfrac{dy}{dt} - y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 2.$

(*b*) $\dfrac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = -1.$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 4, \\ 0, & t \ge 4. \end{cases}$

(e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = 4te^t, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

Exercício 89 *Use a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes problemas de valores iniciais.*

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 6e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} - y + x = 9e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y + 2x = 3e^t, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2y = -\cos t - 2t, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x - 3y = \cos t - 3t, \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = 4e^{-t}, \\ \dfrac{dx}{dt} + 2y = 4e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dz}{dt} = 0, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \end{cases}$

4.4 Exercícios de revisão do Capítulo 4

Exercício 90 *Determine a transformada inversa de Laplace das seguintes funções através de dois métodos distintos.*

(a) $F(s) = \dfrac{2}{(s^2+1)^2}.$

(b) $G(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}.$

(c) $H(s) = \dfrac{5}{(s^2+1)(s-2)}.$

Exercício 91 *Use a transformada de Laplace para determinar a solução dos seguintes problemas de valores iniciais.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = te^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

(*b*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = g(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3, \quad g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi, \\ \pi, & t \geq \pi. \end{cases}$

(*c*) $\dfrac{dy}{dx} + y = h(x), \quad y(-1) = 0, \quad h(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \\ 0 & x \geq 2. \end{cases}$

(*d*) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} - 2y = 0, \\ y(0) = 6, \quad y'(0) = 6, \quad z(0) = 0. \end{cases}$

(*e*) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + z + x = 2\cosh t + 1, \\ \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{dx}{dt} - y = -2\,\mathrm{senh}\, t, \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt} = e^t \\ x(0) = 1, \ y(0) = 1, \quad z(0) = 1. \end{cases}$

Exercício 92 *Considere-se um circuito eléctrico constituido por uma força electromotriz que produz uma queda de tensão E, uma resistência R, uma bobine com indutância L e um condensador com capacitância C, ligados em série. Nestas condições a carga instantânea no condensador q é tal que*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E, \tag{4.4}$$

sendo a intensidade de corrente i em cada instante dada por

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{4.5}$$

Nestas condições (4.5) permite escrever

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i\, du. \tag{4.6}$$

Combinado (4.4) - (4.6) resulta

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\left(q(0) + \int_0^t i\, du\right) = E. \tag{4.7}$$

Considere um circuito do tipo descrito (RLC) em que $E = 100\cos 60t$ (Volts), $R = 4$ (Ohms), $L = 0.1$ (Henries) e $C = 1/40$ (Farads).

(*a*) *Determine a intensidade de corrente em cada instante recorrendo à equação (4.7), sabendo que no instante inicial a intensidade de corrente e a carga do condensador eram ambas nulas.*

(*b*) *Use a equação (4.6) para determinar a carga do condensador em cada instante.*

Sugestão: Compare os resultados agora obtidos com os do Exercício 78.

4.5 Soluções dos exercícios do Capítulo 4

79. (a) $2s^{-3}$, $s>0$; (b) $\left(s^2-1\right)^{-1}$, $s>1$; (c) $4s^{-1}-2s^{-1}e^{-3s}$, $s>0$;
(d) $\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\left(2s^{-1}+s^{-2}\right)$, $s>0$.

80. $4\left[s\left(s^2+8\right)\right]^{-1}$.

81. $\left(1-s\mathcal{L}\left\{\cos^3 3t\right\}\right)/9$.

82. $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}=\mathcal{L}\left\{t\times t^2\right\}=\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\}=6s^{-4}$, $s>0$.

83. $2\left(s+3\right)^{-3}$, $s>-3$.

84. $120s\left(s^2-25\right)\left(s^2+25\right)^{-4}$, $s>0$.

85. (a) $5e^{-6s}/s$, $s>0$; (b) $2\left(e^{-5s}-e^{-7s}\right)/s$, $s>0$; (c) $3e^{-4s}\left(s^{-2}+4s^{-1}\right)$, $s>0$;
(d) $2s^{-2}\left(1-e^{-5s}\right)$, $s>0$; (e) $(s+1)^{-1}e^{-2(s+1)}$, $s>-1$; (f) $-e^{-\pi s}s/\left(s^2+1\right)$, $s>0$.

86. (a) $2\operatorname{sen}3t$; (b) $5t^3e^{2t}$; (c) $3\cosh 2t$; (d) $(5-10t)\,e^{-2t}$; (e) $\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t-\cos\sqrt{2}t+1$;
(f) $7\cos 3t+4\operatorname{sen}3t$; (g) $18e^{2t}+17e^{-5t}$; (h) $-\left(5\cos 3t+2\operatorname{sen}3t\right)u_\pi(t)$;
(i) $e^{-2t+6}u_3(t)(6\cos 3\,(t-3)+5\operatorname{sen}3\,(t-3))$; (j) $3\,(t-4)\,u_4(t)+3\,(7-t)\,u_7(t)$;
(l) $(1+u_\pi(t))\operatorname{sen}2t$; (m) $\cos 2t-1+(1-\cos(2t-4))\,u_2(t)$.

87. (a) $e^{-2t}-e^{-3t}$; (b) $e^{8t}-e^{-2t}$; (c) $\operatorname{sen}^2(3t/2)$; (d) $3t-1+e^{-3t}$.

88. (a) $y=e^{3t}+e^t$; (b) $y=-\cos t+\operatorname{sen}t$; (c) $y=e^{2t}$;
(d) $y=1+e^{2t}-2e^t-u_4(t)(1-2e^{t-4}+e^{2t-8})$; (e) $y=e^t\,(2t-3)+1+e^{2-t}$.

89. (a) $x=-2e^t+4e^{2t}$, $y=2e^t-2e^{2t}$; (b) $x=e^t-3te^t$, $y=3te^t$; (c) $x=\cos t$, $y=t$;
(d) $x=4e^t\,(t-1)+6-2e^{-t}$, $y=2e^t\,(1-t)-e^{-t}$, $z=2e^t\,(1-t)-1-e^{-t}$.

90. (a) $f(t)=\operatorname{sen}t-t\cos t$; (b) $g(t)=t\operatorname{sen}t$; (c) $h(t)=e^{2t}-\cos t-2\operatorname{sen}t$.

91. (a) $y=(t+2)\,e^{-2t}+e^{-t}\,(2t-1)$; (b) $y=2\cos t+2\operatorname{sen}t+t-(t-\pi+\operatorname{sen}t)\,u_\pi(t)$;
(c) $y=u_1(x)\left(1-e^{1-x}\right)-u_2(x)\left(1-e^{-x+2}\right)$;
(d) $z=3e^{2x}+\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x-3e^{-x}\cos\sqrt{3}x$; $y=3e^{2x}+\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)+3e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$;
(e) $x=1-e^{-t}+\cos t-\operatorname{sen}t$, $y=e^t-e^{-t}+\cos t-\operatorname{sen}t$, $z=e^{-t}+2\operatorname{sen}t$.

92. (a) $i=(-9+100t)e^{-20t}+9\cos 60t+12\operatorname{sen}60t$;
(b) $q=(\frac{1}{5}-5t)e^{-20t}-\frac{1}{5}\cos 60t+\frac{3}{20}\operatorname{sen}60t$.

Parte II

Equações Diferenciais Parciais

Capítulo 5

Introdução às equações diferenciais parciais

5.1 Problemas com condições de fronteira: valores próprios e funções próprias

Nas aplicações que iremos estudar neste capítulo seremos confrontados com o seguinte problema: para que valores do parâmetro λ podemos determinar soluções não-triviais $y(x)$ que satisfaçam

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad a\,y(0) + b\,y'(0) = 0, \qquad c\,y(l) + d\,y'(l) = 0, \tag{5.1}$$

onde a, b, c e d são constantes dadas. A equação (5.1) designa-se um problema de valores de fronteira (PVF), dado que são impostas condições envolvendo a solução $y(x)$ e a respectiva derivada $y'(x)$ em dois pontos distintos, $x = 0$ e $x = l$ (cf. Secção 1.3).

A intuição diz-nos que este problema de valores de fronteira tem solução não-trivial $y(x)$ apenas para alguns valores de λ. Vejamos, a este propósito, um exemplo simples, mas extremamente importante conforme veremos adiante.

Exemplo 126 *Para que valores de λ é que o problema de valores de fronteira*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(l) = 0, \tag{5.2}$$

tem solução não-trivial?
Solução. *Consideremos as várias possibilidades:*

(i) $\lambda = 0$: *Conforme já vimos, toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' = 0$ é da forma*

$$y(x) = c_1 x + c_2,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 e c_2. A condição $y(0) = 0$ implica que $c_2 = 0$, enquanto que a condição $y(l) = 0$ conduz a $c_1 = 0$. Portanto, $y(x) = 0$ é a única solução do PVF (5.2) quando $\lambda = 0$.

(ii) $\lambda < 0$: *Neste caso, toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ é da forma*

$$y(x) = c_1\, e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 e c_2. Assim sendo, as condições de fronteira $y(0) = y(l) = 0$, implicam que

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1\, e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \tag{5.3}$$

Portanto, $c_2 = -c_1$, e por isso a solução é do tipo

$$y(x) = c\left(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right) = \widetilde{c}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{-\lambda}x,$$

para algum valor de $\widetilde{c}$, onde

$$\mathrm{senh}\,\sqrt{-\lambda}x = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}.$$

O sistema de equações (5.3) tem solução não nula c_1, c_2 se e só se

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Tal implica que $e^{-\sqrt{-\lambda}l} = e^{\sqrt{-\lambda}l}$, ou seja, $e^{2\sqrt{-\lambda}l} = 1$. No entanto, esta condição é impossível dado que $e^z > 1$ se $z > 0$. Assim sendo, tem-se $c_1 = c_2 = \widetilde{c} = 0$, pelo que o PVF (5.2) não tem solução não-trivial quando $\lambda < 0$.

(iii) $\lambda > 0$: *Neste caso, toda a solução $y(x)$ da equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ é da forma*

$$y(x) = c_1\, \cos\sqrt{\lambda}x + c_2\, \mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}x,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 e c_2. A condição $y(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$ e a condição $y(l) = 0$ implica que $c_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}l = 0$. Esta condição é verificada, para todo o valor de c_2, se $\sqrt{\lambda}l = n\pi$, ou seja, $\lambda = n^2\pi^2/l^2$ para algum inteiro positivo n. Assim, o PVF (5.2) tem soluções não-triviais

$$y(x) = c\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l},$$

para $\lambda = n^2\pi^2/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Nota. O resultado obtido para o caso $\lambda < 0$ pode ser simplificado se escrevermos que toda a solução $y(x)$ é da forma

$$y(x) = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}x + c_2\,\mathrm{senh}\,\sqrt{-\lambda}x,$$

onde

$$\cosh\sqrt{-\lambda}x = \frac{e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}}{2}.$$

Assim, a condição $y(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, enquanto que a condição $y(l) = 0$ conduz a $c_2\,\mathrm{senh}\,\sqrt{-\lambda}l = 0$. Mas $\mathrm{senh}\, z > 0$ se $z > 0$, pelo que $c_2 = 0$ e $y(x) = 0$.

O Exemplo 126 é indicativo relativamente ao que se passa no PVF geral (5.1). De facto, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 59 *O PVF (5.1) tem soluções não-triviais $y(x)$ apenas para um conjunto numerável de valores λ_1, $\lambda_2, \ldots$, onde $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, e λ_n tende para infinito quando n tende para infinito. Estes valores especiais de λ designam-se* ***valores próprios*** *do PVF (5.1), e as soluções não-triviais $y(x)$ são designadas* ***funções próprias*** *de (5.1).*

Usando as designações agora introduzidas, os valores próprios do PVF (5.2) são π^2/l^2, $4\pi^2/l^2$, $9\pi^2/l^2, \ldots$, e as funções próprias de (5.2) são todos os múltiplos constantes de $\operatorname{sen} \pi x/l$, $\operatorname{sen} 2\pi x/l$, $\ldots$.

A razão pela qual se utilizam neste contexto as designações "valores próprios" e "funções próprias" pode ser explicada de forma simples. Seja V o conjunto de todas as funções $y(x)$ que são de classe $\mathcal{C}^2$ e que satisfazem $a\,y(0) + b\,y'(0) = 0$, $c\,y(l) + d\,y'(l) = 0$. Assim sendo, V é um espaço vectorial de dimensão infinita. Considere-se agora o operador (linear) $\mathcal{L}$ definido por

$$[\mathcal{L}y](x) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x).$$

As soluções $y(x)$ de (5.1) são aquelas funções y que pertencem a V e para as quais

$$\mathcal{L}y = \lambda y.$$

Ou seja, as soluções $y(x)$ de (5.1) são precisamente as funções de V que são transformadas por $\mathcal{L}$ em λ vezes elas próprias. No caso do exemplo precedente tem-se

$$y_n(x) = c \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

pelo que

$$-\frac{d^2y_n(x)}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2}\left(c \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\, c \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\, y_n(x).$$

Portanto, para o operador diferencial $-d^2/dx^2$, o valor próprio $\lambda_n = n^2\pi^2/l^2$ está associado à função própria $y_n = c \operatorname{sen} n\pi x/l$. De notar ainda que λ_n tende para infinito quando n tende para infinito.

Em geral, as funções próprias são consideradas a menos de um factor multiplicativo uma vez que se $f(x)$ é uma função própria de determinado operador linear, então $cf(x)$ também é uma função própria desse mesmo operador. Assim, é habitual associar apenas uma função própria a cada valor próprio. Desta forma, no exemplo precedente, ao valor próprio $n^2\pi^2/l^2$ corresponde a função própria $\operatorname{sen} n\pi x/l$.

Exemplo 127 *Determinar os valores próprios e as funções próprias do PVF*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0. \tag{5.4}$$

Solução. *Novamente, consideramos três situações.*

(i) $\lambda = 0$: *Toda a solução* $y(x)$ *de* $y'' = 0$ *é da forma*

$$y(x) = c_1 x + c_2,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 *e* c_2. *As condições* $y(0) + y'(0) = 0$ *e* $y(1) = 0$ *implicam ambas que* $c_2 = -c_1$. *Portanto,*

$$y(x) = c(x-1), \quad c \neq 0,$$

é uma solução não-trivial de (5.4) quando $\lambda = 0$. *Ou seja,* $y(x) = (x-1)$ *é uma função própria de (5.4) com valor próprio zero.*

(ii) $\lambda < 0$: *Neste caso, toda a solução* $y(x)$ *de* $y'' + \lambda y = 0$ *é da forma (ver Exemplo 126)*

$$y(x) = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda} x + c_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} x,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 *e* c_2. *As condições* $y(0) + y'(0) = 0$ *e* $y(1) = 0$ *implicam*

$$c_1 + c_2\sqrt{-\lambda} = 0, \qquad c_1 \cosh \sqrt{-\lambda} + c_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} = 0. \tag{5.5}$$

(Recorde-se que $(\cosh u)' = u' \operatorname{senh} u$ *e* $(\operatorname{senh} u)' = u' \cosh u$*). Assim, a solução é do tipo*

$$y(x) = c\left(-\sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda} x + \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} x\right),$$

para algum valor de c. O sistema de equações (5.5) tem solução não-trivial c_1, c_2 *se e só se*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-\lambda} \\ \cosh \sqrt{-\lambda} & \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} \end{pmatrix} = \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda} = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda}.$$

Mas esta equação não tem solução para $\lambda < 0$. *De facto, o problema consiste em determinar* $z > 0$ *tal que*

$$z \cosh z - \operatorname{senh} z = 0. \tag{5.6}$$

Ora, definindo $f(z) = z \cosh z - \operatorname{senh} z$, *tem-se*

$$f(0) = 0, \qquad f'(z) = z \operatorname{senh} z,$$

pelo que $f'(z) > 0$ *para todo* $z > 0$. *Assim,* $f(z) > 0$ *para todo* $z > 0$, *pelo que a equação (5.6) não tem solução para* $z > 0$ *conforme requerido.*

(iii) $\lambda > 0$: *Neste caso, toda a solução* $y(x)$ *da equação diferencial* $y'' + \lambda y = 0$ *é da forma*

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x,$$

escolhendo adequadamente o valor das constantes c_1 *e* c_2. *As condições de fronteira implicam que*

$$c_1 + c_2\sqrt{\lambda} = 0, \qquad c_1 \cos \sqrt{\lambda} + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} = 0. \tag{5.7}$$

Neste caso a solução é da forma

$$y(x) = c\left(-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x\right),$$

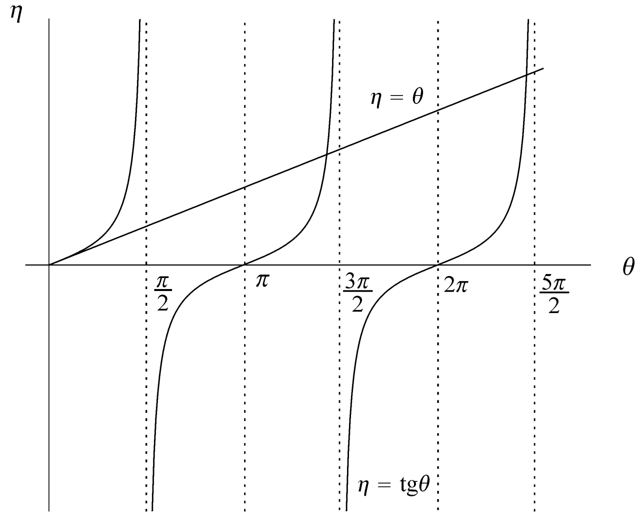
para algum valor de c. *O sistema de equações (5.7) tem solução não-trivial* c_1, c_2 *se e só se*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\lambda} \\ \cos\sqrt{\lambda} & \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\end{pmatrix} = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}. \tag{5.8}$$

Para determinar quais os valores de λ *que satisfazem a equação (5.8), fazemos* $\theta = \sqrt{\lambda}$ *e traçamos o gráfico das funções* $\eta = \theta$ *e* $\eta = \operatorname{tg}\theta$ *no plano* $\theta \times \eta$*:*



A coordenada θ *de cada ponto de intersecção destas curvas é então uma raiz da equação* $\theta = \operatorname{tg}\theta$. *É fácil de ver que estas curvas intersectam-se apenas uma vez no intervalo* $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, *e que tal ocorre num ponto* $\theta_1 > \pi$. *De igual modo, estas curvas intersectam-se apenas uma vez no intervalo* $3\pi/2 < \theta < 5\pi/2$, *num ponto* $\theta_2 > 2\pi$. *Em geral, as curvas* $\eta = \theta$ *e* $\eta = \operatorname{tg}\theta$ *intersectam-se apenas uma vez no intervalo*

$$\frac{2n-1}{2}\pi < \theta < \frac{2n+1}{2}\pi$$

e que tal ocorre num ponto $\theta_n > n\pi$.

Finalmente, as curvas $\eta = \theta$ *e* $\eta = \operatorname{tg}\theta$ *não se intersectam no intervalo* $0 < \theta < \pi/2$. *De facto, considerando* $h(\theta) = \operatorname{tg}\theta - \theta$, *tem-se*

$$h(0) = 0, \qquad h'(\theta) = \operatorname{tg}^2\theta,$$

pelo que $h'(\theta) > 0$ *para todo* $0 < \theta < \pi/2$. *Assim,* $h(\theta) > 0$ *para todo* $0 < \theta < \pi/2$, *pelo que a equação* $\operatorname{tg}\theta - \theta = 0$ *não tem raízes no intervalo* $0 < \theta < \pi/2$.

Portanto, os valores próprios de (5.4) são $\lambda_1 = \theta_1^2$, $\lambda_2 = \theta_2^2$, $\ldots$, *e as respectivas funções próprias são*

$$-\sqrt{\lambda_1}\cos\sqrt{\lambda_1}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_1}x, \quad -\sqrt{\lambda_2}\cos\sqrt{\lambda_2}x + \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_2}x, \quad \ldots$$

Não podemos determinar o valor exacto de λ_n, *mas sabemos que*

$$n^2\pi^2 < \lambda_n < (2n+1)^2\pi^2/4.$$

Além disso, é óbvio que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Exercícios

Exercício 93 *Determine os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valores de fronteira.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(l) = 0.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(l) = 0.$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) - y'(0) = 0, \qquad y(\pi) - y'(\pi) = 0.$

Exercício 94 *Para que valores de* λ *é que o problema de valores de fronteira*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(2\pi), \qquad y'(0) = y'(2\pi),$$

tem solução não-trivial?

5.2 Classificação de equações diferenciais parciais de segunda ordem

Até agora estudamos apenas equações diferenciais envolvendo uma variável independente, designadas equações diferenciais ordinárias (EDOs). No entanto, há muitos problemas do âmbito da física/matemática aplicada que se traduzem em equações diferenciais parciais (EDPs), uma vez que envolvem mais do que uma variável independente. Por exemplo, a equação diferencial

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

é uma equação diferencial parcial para a função $u(x,t)$. De igual modo, as equações diferenciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

constituem um sistema de EDPs para as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$. Tal como nas equações diferenciais ordinárias, a ordem da equação diferencial é dada pela ordem da derivada de ordem mais elevada que nela figura. Assim, a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3 = u$$

é de ordem 2.

Classicamente, existem três equações diferenciais parciais de segunda ordem que surgem em muitas aplicações e que têm especial importância na teoria das EDPs:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{(equação de Laplace)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(equação de onda)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(equação de calor)}.$$

Podemos ainda considerar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y), \qquad \text{(equação de Poisson)}.$$

Para simplificar a notação usaremos frequentemente a notação: $u_x = \partial u/\partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$, etc. Com base nesta notação os exemplos acima podem escrever-se, respectivamente, como

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \qquad u_{xx} + u_{yy} = g.$$

Outra noção importante no que respeita às equações diferenciais parciais é o da linearidade. Tal pode ser facilmente descrito no contexto de um operador diferencial $\mathcal{L}$ aplicado a uma função u. São exemplos de operadores diferenciais:

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathcal{L}u = 5u - \cos y \, \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mathcal{L}u = u\, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Definição 33 *Um operador $\mathcal{L}$ diz-se linear se*

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v, \qquad \mathcal{L}(cu) = c\,\mathcal{L}u,$$

quaisquer que sejam as funções u e v, e qualquer que seja a constante c.

Exemplo 128 *Os operadores definidos por*

$$\mathcal{L}u = 2u - \partial u/\partial x, \qquad \mathcal{L}u = 2ux - e^y \partial u/\partial x, \qquad \mathcal{L}u = \partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial x,$$

são lineares, mas os operadores

$$\mathcal{L}u = \partial u/\partial y + 1, \qquad \mathcal{L}u = u^2 - \partial u/\partial x, \qquad \mathcal{L}u = (\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2,$$

não são lineares (porquê?).

Definição 34 *Uma EDP diz-se* ***linear*** *se pode ser escrita na forma*

$$\mathcal{L}u = g,$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial linear e g uma função dada. Caso se tenha $g = 0$, então a EDP diz-se ***homogénea****.*

Exemplo 129 *A equação de Laplace, a equação de onda e a equação de calor são exemplos de EDPs lineares homogéneas. A equação de Poisson é uma EDP linear não-homogénea.*

A EDP linear de segunda ordem mais geral em duas variáveis escreve-se

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y),$$

onde a, b, c, d, e, f e g são funções dadas.

Exemplo 130 *As EDPs seguintes são lineares.*

$$\begin{aligned} &u_{xx} + e^{xy}\, u_{xy} + x u_{yy} = x, \\ &u_{zz} + \cos x\, u_x = yz, \\ &u_{xx} + u_y + u = \cos y. \end{aligned}$$

É impossível formular um teorema geral sobre a existência de solução que se aplique a todas as equações diferenciais parciais lineares, mesmo que nos restrijamos ao caso das EDPs de segunda ordem. Em vez disso, é mais natural especificar a solução através de um conjunto de condições de fronteira ou condições iniciais de acordo com a equação diferencial em causa. Por exemplo, conforme veremos, a solução da equação de calor $u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0$ na região $0 < x < l$, $0 < t < \infty$, pode ser especificada de forma única em termos das condições iniciais para $t = 0$ e das condições de fronteira em $x = 0$ e $x = l$. Por outro lado, a solução da equação de onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ na região $0 < x < l$, $0 < t < \infty$, pode ser especificada de forma única em termos das condições de fronteira em $x = 0$ e $x = l$ e de duas condições iniciais às quais a solução deve obedecer: $u(x, 0)$ e $u_t(x, 0)$. Por forma a ainda assim poder abordar esta questão com alguma generalidade, pode-se classificar as equações diferenciais lineares de segunda ordem da seguinte maneira.

Definição 35 *Para a EDP linear de segunda ordem,*

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y),$$

tem-se a seguinte classificação:

se $4ac - b^2 > 0$, *a EDP diz-se **elíptica**,*

se $4ac - b^2 = 0$, *a EDP diz-se **parabólica**,*

se $4ac - b^2 < 0$, *a EDP diz-se **hiperbólica**.*

Exemplo 131 *A equação de Laplace e a equação de Poisson são ambas EDPs elípticas, enquanto que a equação de onda é hiperbólica. A equação de calor é parabólica.*

Existem teoremas gerais para cada uma destas classes de EDPs cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em livros avançados sobre EDPs. Aqui apenas nos preocuparemos em indicar qual o tipo de condições de fronteira que é natural associar a cada um destes três tipos de equações.

Se uma EDP é elíptica, podemos resolver um **problema de Dirichlet**, a saber, queremos determinar a solução de $\mathcal{L}u = g$ numa região D satisfazendo a condição de fronteira $u = \phi(x,y)$ na fronteira de D. Por exemplo, o problema físico que consiste em determinar a deflexão $u(x,y)$ de uma membrana devido ao seu peso quando a sua fronteira D se encontra fixa conduz ao PVF elíptico

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), & \text{para todo } (x,y) \text{ pertencente ao interior de } D, \\ u(x,y) = 0, & \text{para todo } (x,y) \text{ pertencente a } D, \end{array}$$

onde $f(x,y)$ é uma função dada que reflete as propriedades físicas da membrana.

Se a equação é parabólica ou hiperbólica, é natural resolver um **problema de Cauchy**, no qual se especifica a solução e a sua derivada temporal para $t = 0$ ao longo de uma linha, bem como as condições de fronteira que sejam relevantes. Conforme veremos, a equação da corda vibrante é um exemplo deste tipo de problema. Nesse caso, o afastamento de cada ponto da corda relativamente ao eixo OX, $u(x,t)$, obedece a

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, & t > 0. \end{array}$$

As condições iniciais f, g representam a posição e a velocidade inicial de cada ponto da corda vibrante. As condições de fronteira em $x = 0$ e $x = l$ significam que os extremos da corda se encontram fixos qualquer que seja o instante de tempo considerado.

Exercícios

Exercício 95 *Escrever a forma mais geral de uma EDP de primeira ordem linear em três variáveis. Quantas funções são necessárias para especificar esta EDP?*

Exercício 96 *Considere o operador* $\mathcal{L}$ *dado por* $\mathcal{L}u(x,y) = a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$. *Mostre que* $\mathcal{L}$ *é um operador diferencial linear.*

Exercício 97 *Suponha que* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ *são operadores diferenciais lineares. Mostre que o operador* $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ *também é um operador diferencial linear.*

Exercício 98 *Classifique cada uma das seguintes EDPs de segunda ordem como elíptica, parabólica ou hiperbólica.*

(a) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$. (b) $u_{xx} + 3u_{xy} + 8u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$.

(c) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$. (d) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

5.3 O princípio da sobreposição e o princípio da subtracção

No estudo das equações diferenciais ordinárias é muitas vezes possível escrever a solução geral de forma explícita, em termos de constantes arbitrárias e de um conjunto de soluções particulares. Tal não é possível no caso das equações diferenciais parciais. Para ver que assim é consideremos o exemplo da EDP de segunda ordem $u_{xx} = 0$ para a função incógnita $u(x,y)$. Integrando uma vez resulta $u_x(x,y) = \phi(y)$, enquanto que uma segunda integração conduz a $u(x,y) = x\phi(y) + \psi(y)$, onde $\phi(y)$ e $\psi(y)$ são funções arbitrárias. É evidente que existe um número infinito de escolhas possíveis tanto para $\phi(y)$ como para $\psi(y)$, pelo que a solução não pode ser especificada recorrendo a um número finito de constantes arbitrárias. Ou seja, o espaço das soluções tem dimensão infinita.

Por forma a poder trabalhar de forma eficiente com EDPs lineares é necessário desenvolver regras para combinar soluções conhecidas. O princípio que passamos a enunciar é a base de muitos resultados que encontraremos mais adiante.

Proposição 60 *(*Princípio da sobreposição para equações homogéneas*) Se* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *são soluções da mesma EDP linear homogénea* $\mathcal{L}u = 0$ *num domínio de* $\mathbb{R}^n$, *então* $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m$, *onde* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *são constantes arbitrárias, é ainda uma solução da EDP.*

Demonstração *A demonstração baseia-se na propriedade da linearidade. De facto, tem-se por hipótese* $\mathcal{L}u_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. *Portanto,*

$$\mathcal{L}(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m) = c_1\mathcal{L}u_1 + c_2\mathcal{L}u_2 + \ldots + c_m\mathcal{L}u_m = 0.$$

■

Exemplo 132 *É fácil verificar que qualquer que seja a constante* k, *a função* $u(x,y) = e^{kx}\cos ky$ *é solução da equação de Laplace* $u_{xx} + u_{yy} = 0$. *Então, o princípio da sobreposição permite concluir que a função* $u(x,y) = e^{-x}\cos y + 2e^{-3x}\cos 3y - 5e^{-\pi x}\cos \pi y$ *também é uma solução da equação de Laplace.*

O princípio da sobreposição não se aplica a EDPs não-homogéneas. Por exemplo, se u_1 e u_2 são soluções da equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = 1$, então $u_1 + u_2$ é solução de uma EDP diferente, a saber, $u_{xx} + u_{yy} = 2$. No entanto, tem-se o seguinte princípio geral que permite relacionar EDPs não-homogéneas e homogéneas.

Proposição 61 *(*Princípio da subtracção para equações não-homogéneas*) Se u_1 e u_2 são soluções da mesma EDP linear não-homogénea $\mathcal{L}u = g$ num domínio de $\mathbb{R}^n$, então a função $u_1 - u_2$ é uma solução da equação homogénea associada $\mathcal{L}u = 0$.*

Demonstração *Tem-se por hipótese $\mathcal{L}u_1 = g$ e $\mathcal{L}u_2 = g$. Então*

$$\mathcal{L}(u_1 - u_2) = \mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2 = g - g = 0.$$

■

Exemplo 133 *Se u_1 e u_2 são soluções da equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = 1$, então $u_1 - u_2$ é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.*

O princípio da subtracção permite-nos determinar a solução geral de uma EDP não-homogénea $\mathcal{L}u = g$ desde que conheçamos uma solução particular da equação e a solução geral da equação homogénea associada $\mathcal{L}u = 0$. O resultado pode ser expresso da seguinte forma.

Corolário 1 *A solução geral da equação diferencial parcial linear $\mathcal{L}u = g$ pode ser escrita na forma*

$$u = v + U,$$

onde U é uma solução particular da equação $\mathcal{L}u = g$ e v é a solução geral da equação homogénea associada $\mathcal{L}u = 0$.

Exemplo 134 *Determinar a solução geral $u(x, y)$ da equação diferencial $u_{xx} = 2$.*
Solução. *Tem-se que $U(x, y) = x^2$ é uma solução da equação dada. Por outro lado, a solução geral da equação homogénea associada $u_{xx} = 0$ é $v(x, y) = xg(y) + h(y)$. Assim sendo, a solução geral da equação não-homogénea é $u(x, y) = xg(y) + h(y) + x^2$.*

Exercícios

Exercício 99 *Mostre que a função $u(x, y) = e^{kx} \cos ky$ é uma solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ qualquer que seja o valor da constante k.*

Exercício 100 *Mostre que a função $u(x, t) = e^{kx}e^{-k^2 t}$ é uma solução da equação de calor $u_{xx} + u_t = 0$ qualquer que seja o valor da constante k.*

5.4 Exercícios de revisão do Capítulo 5

Exercício 101 *Determine os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valores de fronteira.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(l) = 0.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \qquad y(0) - y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$

Exercício 102 *Para que valores de λ é que o PVF*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y' + (1+\lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0,$$

tem solução não-trivial?

Exercício 103 *Considere o problema de valores de fronteira*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

(a) Mostre que se λ for um valor próprio do problema homogéneo, então o problema proposto: i) pode não ter solução; ii) a solução (quando existe) não é única.

(b) Mostre que este problema tem uma só solução $y(t)$ se λ não é um valor próprio do problema homogéneo. (Sugestão: use o seguinte resultado: $a \Longrightarrow b$ é equivalente a $(\sim b \Longrightarrow \sim a)$.)

Exercício 104 *Classifique as seguintes EDPs lineares de segunda ordem.*

(a) $u_{xx} + 2e^{xy}\, u_{xy} + e^{2xy}\, u_{yy} = 0.$

(b) $e^y\, u_{xx} + e^x\, u_{yy} = 0.$

(c) $u_{xx} + 2\cos x\, u_{yy} = 0, \quad x \in \,]0, \pi[\,.$

Exercício 105 *Mostre que a função $u(x,y) = e^{kx}e^{-ky}$ é uma solução da equação de onda $u_{xx} - u_{yy} = 0$ qualquer que seja o valor da constante k.*

Exercício 106 *Mostre que a função $u(x,y) = (k/2)x^2 + (1-k)y^2/2$ é uma solução da equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = 1$ qualquer que seja o valor da constante k.*

5.5 Soluções dos exercícios do Capítulo 5

93. (a) $\lambda_n = (2n+1)^2\pi^2/(4l^2)$, $y(x) = \operatorname{sen}(2n+1)\pi x/(2l)$;

(b) $\lambda = 0$, $y(x) = 1$; $\lambda_n = -n^2\pi^2/l^2$, $y(x) = \cos n\pi x/l$;

(c) $y(x) = \operatorname{senh}\sqrt{-\lambda_o}x$, onde $\operatorname{tgh}\sqrt{-\lambda_o}\pi = \sqrt{-\lambda_o}$, $\sqrt{-\lambda_o} \approx 0.996\,18$; $y(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\pi = \sqrt{\lambda_n}$ e $(2n-1)^2/4 < \lambda_n < n^2$; (d) $\lambda = -1$, $y(x) = e^x$; $\lambda_n = n^2$, $y(x) = n\cos nx + \operatorname{sen} nx$.

94. $\lambda = 0$, $y(x) = 1$; $\lambda_n = n^2$, $y(x) = c\cos nx + \operatorname{sen} nx$.

95. $a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z)$; são necessárias 5 funções.

98. (a) hiperbólica; (b) elíptica; (c) parabólica; (d) elíptica se $x > 0$, hiperbólica se $x < 0$.

101. (a) $\lambda = 0$, $y(x) = 1$; $\lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, $y(x) = \cos n\pi x/l$;
(b) $y(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x + \cos\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n} = -\sqrt{\lambda_n}$ e $(2n-1)^2\pi^2/4 < \lambda_n < n^2\pi^2$.

102. $\lambda_n = n^2\pi^2$, $y(x) = e^x \operatorname{sen} n\pi x$.

104. (a) parabólica; (b) elíptica; (c) elíptica se $x \in]0, \pi/2[$, hiperbólica se $x \in]\pi/2, \pi[$.

Capítulo 6

Separação de variáveis, séries de Fourier e aplicações

6.1 A equação de calor; separação de variáveis

Considere-se o problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ &u(x,0) = f(x), && 0 < x < l, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

O objectivo é determinar a solução $u(x,t)$ de (6.1). Para isso é útil relembrar como se resolve o problema de valores iniciais

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'. \tag{6.2}$$

Primeiro, e tendo em conta que se trata de uma equação diferencial linear homogénea, determinamos duas soluções da equação diferencial que sejam linearmente independentes $y_1(t)$ e $y_2(t)$, por forma a obter a solução geral $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. Depois determinamos o valor das constantes c_1 e c_2 por forma a obter a solução de (6.2). Sucede que, conforme já referimos anteriormente, qualquer combinação linear $c_1 u_1(x,t) + \ldots + c_m u_m(x,t)$ de soluções $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_m(x,t)$ de

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \tag{6.3}$$

é ainda uma solução de (6.3) já que esta EDP é linear. Além disso, se $u_1(x,t)$, $\ldots$, $u_m(x,t)$ verificam as condições de fronteira $u(0,t) = u(l,t) = 0$, então a combinação linear $c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m$ também verifica essas condições de fronteira. Este facto sugere a seguinte forma de abordar a resolução do PVF (6.1):

(i) Determinar tantas soluções $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\ldots$ quantas seja possível do PVF

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

(ii) Determinar a solução $u(x,t)$ de (6.1) considerando uma combinação linear apropriada das funções $u_m(x,t)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Vejamos então como podemos proceder em cada um destes dois itens.

(i) Como não sabemos, de momento, como resolver equações diferenciais parciais, temos de reduzir a resolução do problema (6.4) à resolução de uma ou mais equações diferenciais ordinárias. Tal pode ser conseguido impondo $u(x,t) = X(x)T(t)$ (daí a designação de **separação de variáveis**). Assim, tem-se

$$u_t = X\,T' \qquad \text{e} \qquad u_{xx} = X''\,T.$$

Vemos que $u(x,t) = X(x)T(t)$ é solução da equação $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ se

$$X\,T' = \alpha^2\,X''\,T,$$

ou seja,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}. \tag{6.5}$$

Note-se que o primeiro membro de (6.5) só depende de x, enquanto que o segundo membro só depende de t. Tal implica que

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \qquad \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda, \tag{6.6}$$

para algum valor da constante λ. Além disso as condições de fronteira

$$0 = u(0,t) = X(0)\,T(t)$$

e

$$0 = u(l,t) = X(l)\,T(t),$$

para todo $t > 0$, implicam que $X(0) = 0$ e $X(l) = 0$ (caso contrário $T(t) = 0$, o que implicaria $u(x,t) = 0$). Portanto, $u(x,t) = X(x)T(t)$ é solução de (6.4) se

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0 \tag{6.7}$$

e

$$T' + \lambda\alpha^2 T = 0. \tag{6.8}$$

Até aqui, a constante λ é arbitrária. No entanto, sabemos do Exemplo 126 da Secção 5.1 que o PVF (6.7) tem solução não trivial $X(x)$ apenas quando $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e que neste caso

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Por outro lado, a equação (6.8) conduz a

$$T(t) = e^{-\lambda\alpha^2 t},$$

isto é,

$$T(t) = T_n(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t\,/\,l^2}.$$

(De facto, tanto $X(x)$ como $T(t)$ deveriam aparecer multiplicados por constantes arbitrárias, mas omitem-se essas constante uma vez que posteriormente consideraremos combinações lineares das funções $X_n(x)T_n(t)$.) Portanto,

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t\,/\,l^2}$$

é uma solução não trivial de (6.4) qualquer que seja o número inteiro positivo n.

(ii) Suponhamos que a função $f(x)$ presente em (6.1) é uma combinação linear finita das funções $\operatorname{sen} n\pi x/l$, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.9}$$

Então,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t\,/\,l^2} \tag{6.10}$$

é a solução procurada do PVF (6.1) uma vez que é uma combinação linear de soluções de (6.4) que verifica a condição inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad 0 < x < l. \tag{6.11}$$

Infelizmente, a maior parte das funções $f(x)$ não pode ser expressa como uma combinação linear finita das funções $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots$, no intervalo $0 < x < l$. Tal leva-nos a colocar a seguinte questão.

Pode uma função arbitrária $f(x)$ ser escrita como uma combinação linear infinita das funções $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1, 2, \ldots$, no intervalo $0 < x < l$? Por outras palavras, dada uma função arbitrária f, é possível determinar constantes $c_1, c_2, \ldots$, tais que

$$f(x) = c_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + c_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{l} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}, \qquad 0 < x < l?$$

A resposta é afirmativa, conforme veremos na Secção 6.2.

Exemplo 135 *No instante $t = 0$ a temperatura $u(x,0)$ de uma barra de cobre fina ($\alpha^2 = 1.14$) de comprimento unitário é dada por*

$$u(x,0) = 2\operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Os extremos da barra estão mergulhados em gelo, pelo que a sua temperatura é mantida a $0\,^oC$. Determinar a temperatura $u(x,t)$ na barra para qualquer instante de tempo $t > 0$.

Solução. *A temperatura $u(x,t)$ deve verificar o seguinte PVF*

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = 2 \operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

Atendendo à forma de $u(x,0)$ e a (6.10) - (6.11) resulta

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} n\pi x\, e^{-1.14 n^2 \pi^2 t},$$

onde as constantes c_1, c_2, ... são tais que

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} n\pi x = 2 \operatorname{sen} 3\pi x + 5 \operatorname{sen} 8\pi x.$$

Portanto, as constante são todas nulas excepto

$$c_3 = 2, \quad c_8 = 5,$$

resultando

$$u(x,t) = 2 \operatorname{sen} 3\pi x\, e^{-9\,(1.14)\,\pi^2 t} + 5 \operatorname{sen} 8\pi x\, e^{-64\,(1.14)\,\pi^2 t}.$$

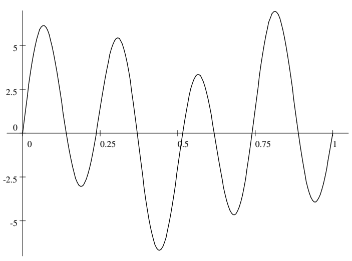


Gráfico de $u(x;0)$

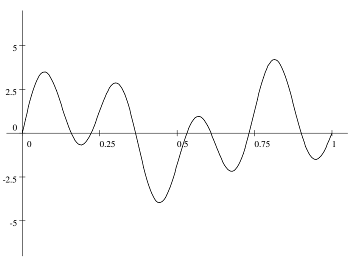


Gráfico de $u(x;0.001)$

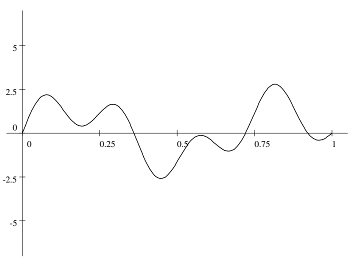


Gráfico de $u(x;0.002)$

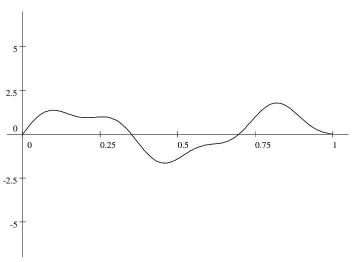


Gráfico de $u(x;0.0035)$

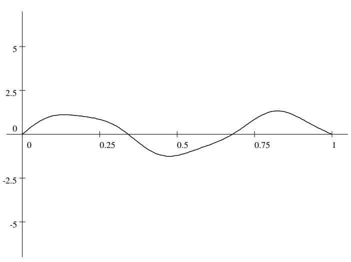
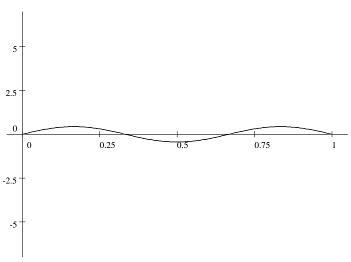


Gráfico de $u(x;0.005)$



Gráfica de $u(x;0.015)$

Exemplo 136 *Determinar a solução do PVF usando o método de separação de variáveis.*

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + u, && t > 0,\ 0 < x < 10, \\ &u(x,0) = 3\operatorname{sen} 2\pi x - 7\operatorname{sen} 4\pi x, && 0 < x < 10, \\ &u(0,t) = u(10,t) = 0. && t > 0. \end{aligned}$$

Solução. *Admitindo que a solução $u(x,t)$ se pode escrever na forma*

$$u(x,t) = X(x)\,T(t),$$

resulta para $u_t = u_{xx} + u$:

$$X\,T' = X''\,T + X\,T \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1.$$

Assim, deverá ter-se

$$\frac{X''}{X} + 1 = 1 - \lambda, \qquad \frac{T'}{T} = 1 - \lambda$$

para algum valor da constante λ. Portanto, as funções $X(x)$ e $T(t)$ devem obedecer a

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T' + (\lambda - 1)T = 0,$$

tendo-se ainda as condições de fronteira

$$0 = u(0,t) = X(0)\,T(t), \qquad 0 = u(10,t) = X(10)\,T(t),$$

isto é

$$X(0) = 0, \qquad X(10) = 0.$$

Ora, o PVF

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(10) = 0,$$

só tem solução não trivial se

$$\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/100, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

e neste caso

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}.$$

Por outro lado, a equação $T' + (\lambda - 1)T = 0$ conduz a

$$T(t) = T_n(t) = e^{(1-\lambda_n)t},$$

ou

$$T_n(t) = e^{(1-n^2\pi^2/100)t}.$$

Assim,

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}\, e^{(1-n^2\pi^2/100)t}$$

é solução do problema

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + u, && t > 0,\ 0 < x < 10, \\ &u(0,t) = u(10,t) = 0. && t > 0. \end{aligned}$$

para todo o valor inteiro positivo de n. Ora, uma vez que se impõe que

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen} 2\pi x - 7\operatorname{sen} 4\pi x, \quad 0 < x < 10,$$

deverá ter-se

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10} = 3\operatorname{sen} 2\pi x - 7\operatorname{sen} 4\pi x,$$

pelo que as constantes são todas nulas excepto

$$c_{20} = 3, \quad c_{40} = -7.$$

A solução do PVF proposto é então

$$u(x,t) = 3\operatorname{sen} 2\pi x\, e^{(1-4\pi^2)t} - 7\operatorname{sen} 4\pi x\, e^{(1-16\pi^2)t}.$$

Exercícios

Exercício 107 *Determine a solução do seguinte problema de valores de fronteira.*

$$\begin{aligned} &u_t = 1.71\, u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < 2, \\ &u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x/2 + 3\operatorname{sen} 5\pi x/2, && 0 < x < 2, \\ &u(0,t) = u(2,t) = 0. && t > 0. \end{aligned}$$

Exercício 108 *Use o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas de valores de fronteira.*

(a) $u_t = u_y, \quad u(t,0) = e^{-3t} + e^{2t}.$

(b) $u_t = u_y - u, \quad u(t,0) = e^{-5t} + 2e^{-7t} - 14e^{13t}.$

Exercício 109 *A equação de calor no espaço bidimensional é dada por*

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}). \tag{6.12}$$

(a) Supondo que $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$, determine as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas por X, Y e T.

(b) Determine soluções $u(x,y,t)$ da equação (6.12) que satisfaçam as condições de fronteira $u(0,y,t) = 0$, $u(a,y,t) = 0$, $u(x,0,t) = 0$, $u(x,b,t) = 0$.

6.2 Séries de Fourier: definição e principais propriedades

Definição

Muitos problemas de valores de fronteira clássicos admitem soluções separadas envolvendo funções trigonométricas. É neste contexto que surge a teoria das séries de Fourier.

Em 1807 Fourier postulou que qualquer função $f(x)$ pode ser desenvolvida numa série infinita de senos e co-senos. Mais concretamente, seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $-l < x < l$ e definam-se os números

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.13}$$

e

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{6.14}$$

Então, a série infinita

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{l} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\right] \tag{6.15}$$

converge para $f(x)$. O facto é que apenas recentemente foi possível estabelecer condições extremamente precisas para que a série (6.15) convirja. Este resultado constitui, na realidade, um dos teoremas matemáticos mais importantes do século XX. O teorema que se enuncia de seguida, embora não seja o mais geral possível, abarca as situações mais relevantes que surgem em aplicações.

Definição 36 *A série infinita (6.15), com coeficientes a_n e b_n dados por (6.13) e (6.14), respectivamente, designa-se* ***série de Fourier*** *de f no intervalo $-l < x < l$.*

Tem-se o seguinte resultado relativo à convergência da série de Fourier (6.15).

Teorema 62 (Teorema da Convergência). *Sejam f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $-l < x < l$. Então a série de Fourier de f (6.15) converge para $f(x)$ se esta função for contínua em x, e para $[f(x^+) + f(x^-)]/2$*[1] *se f for descontínua em x. Em $x = \pm l$ a série de Fourier (6.15) converge para $[f(l) + f(-l)]/2$, onde $f(\pm l)$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para $\pm l$.*

Nota. A quantidade $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ mais não é do que a média aritmética dos limites de f à esquerda e à direita no ponto x. Se definirmos $f(x)$ como sendo a média aritmética dos limites de f à esquerda e à direita para qualquer ponto de descontinuidade x, então a série de Fourier (6.15) converge para $f(x)$ em todos os pontos x do intervalo $-l < x < l$.

Por comodidade definimos

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\right],$$

a soma parcial de ordem N da série trigonométrica (6.15).

[1] Tem-se as seguintes definições: $f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t)$ e $f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t)$.

Exemplo 137 *Seja f a função que é 0 para $-1 < x < 0$ e 1 para $0 \leq x < 1$. Determinar a série de Fourier de f no intervalo $-1 < x < 1$.*
Solução. *Neste caso, $l = 1$. Portanto, de (6.13) e (6.14) resulta,*

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} dx = 1,$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\cos n\pi x\,dx = \int_{0}^{1} \cos n\pi x\,dx = 0, \qquad n \geq 1,$$

e

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\operatorname{sen} n\pi x\,dx = \int_{0}^{1} \operatorname{sen} n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \qquad n \geq 1.$$

Note-se que $b_n = 0$ se n for par e $b_n = 2/n\pi$ se n for ímpar. Portanto, a série de Fourier de f no intervalo $-1 < x < 1$ é

$$s(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\operatorname{sen}\pi x}{\pi} + \frac{2\operatorname{sen}3\pi x}{3\pi} + \frac{2\operatorname{sen}5\pi x}{5\pi} + \ldots.$$

Pelo Teorema 62, esta série converge para 0 se $-1 < x < 0$ e para 1 se $0 < x < 1$. Em $x = -1$, 0 e $+1$ a série converge para $1/2$, tal como previsto pelo Teorema 62.

De seguida apresentam-se alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função f à medida que o número de termos da série aumenta.

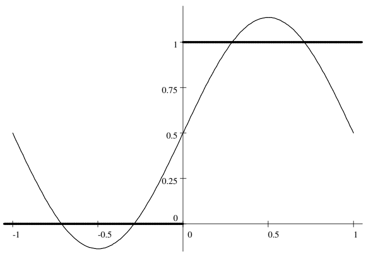


Gráfico de $f_1(x)$

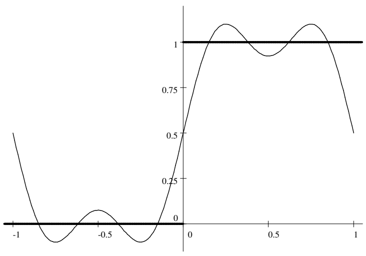


Gráfico de $f_2(x)$

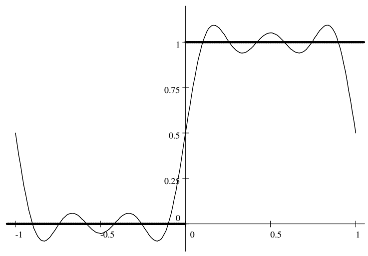


Gráfico de $f_3(x)$

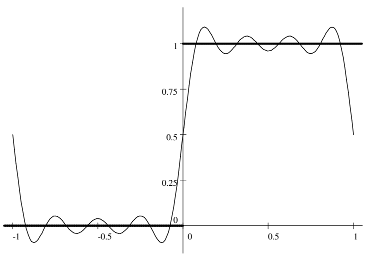


Gráfico de $f_4(x)$

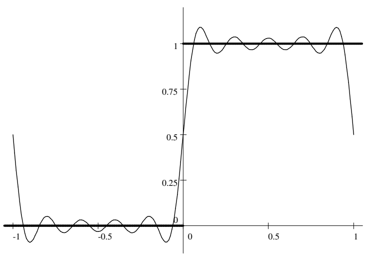


Gráfico de $f_5(x)$

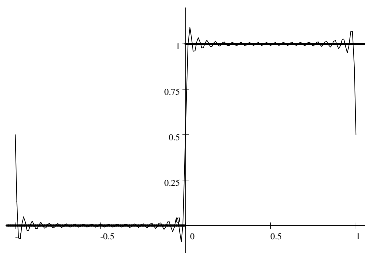


Gráfico de $f_{20}(x)$

Exemplo 138 *Seja $f(x)$ a função que é 1 no intervalo $-2 < x < 0$ e x em $0 \leq x < 2$. Determinar a série de Fourier de f no intervalo $-2 < x < 2$.*
Solução. *Nesta caso, $l = 2$. Portanto, de (6.13) e (6.14) resulta,*

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx = 2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= \frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos\pi n - 1\right), \qquad n \geq 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos\pi n + 1\right), \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Note-se que $a_n = 0$ se n for par e $a_n = -4/n^2\pi^2$ se n for ímpar. Por outro lado, $b_n = 0$ se n for ímpar, e $b_n = -2/n\pi$ se n for par. Portanto, a série de Fourier de f no intervalo $-2 < x < 2$ é

$$s(x) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}2\pi x - \ldots,$$

isto é,

$$\begin{aligned} s(x) &= 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x/2}{(2n+1)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}n\pi x}{n} \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2} + \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}n\pi x}{n}\right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 62, esta série converge para 1 se $-2 < x < 0$, para x se $0 < x < 2$, para $1/2$ se $x = 0$, e para $3/2$ se $x = \pm 2$.

Apresentam-se de seguida alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função f à medida que o número de termos da série aumenta.

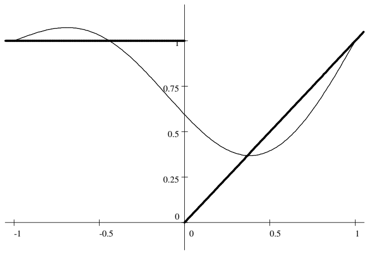


Gráfico de $f_1(x)$

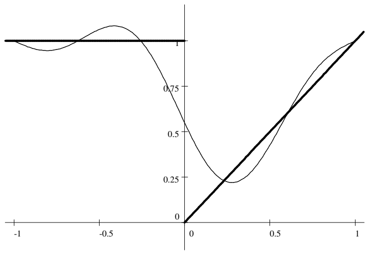


Gráfico de $f_2(x)$

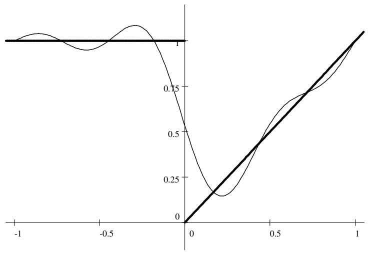


Gráfico de $f_3(x)$

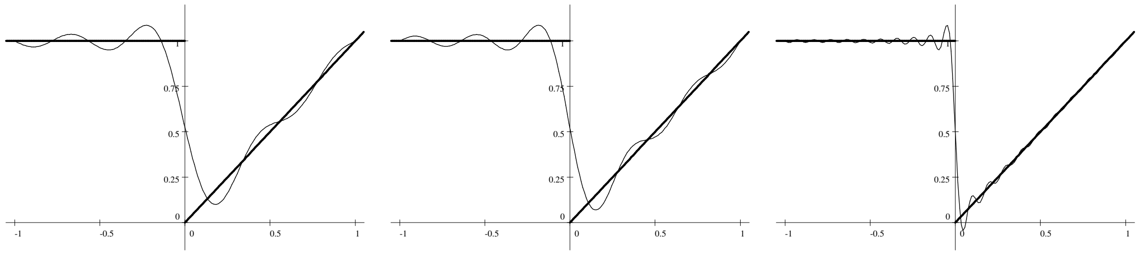


Gráfico de $f_4(x)$ *Gráfico de* $f_5(x)$ *Gráfico de* $f_{20}(x)$

Os coeficientes de Fourier definidos por (6.13) e (6.14) podem ser obtidos de forma simples conforme mostra o seguinte resultado.

Teorema 63 *Se uma função seccionalmente contínua $f(x)$ poder ser expressa como uma série de senos e co-senos no intervalo $-l < x < l$, então esta série tem de ser necessariamente a série de Fourier de $f(x)$ (6.15).*

Demonstração *Suponhamos que $f(x)$ é uma função seccionalmente contínua e que*

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k \cos \frac{k\pi x}{l} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \right] \tag{6.16}$$

para algumas constantes c_k e d_k. Supõe-se que a equação (6.16) é aplicável a todos os pontos do intervalo $-l < x < l$, com excepção de um número finito de pontos. Integrando ambos os lados de (6.16) entre $-l$ e l obtém-se

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = c_0 l,$$

uma vez que

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\, dx = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots .$$

(Nota: Pode-se mostrar que a série (6.16) pode ser integrada termo a termo). De forma análoga, multiplicando ambos os membros de (6.16) por $\cos n\pi x/l$ e integrando entre $-l$ e l conduz a

$$l\, c_n = \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

enquanto que multiplicando ambos os membros de (6.16) por $\operatorname{sen} n\pi x/l$ e integrando entre $-l$ e l conduz a

$$l\, d_n = \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Isto deve-se ao facto de se terem os seguintes resultados (ver Exercício 112)

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ l, & k = n, \end{cases} \tag{6.17}$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0, \tag{6.18}$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ l, & k = n, \end{cases} \tag{6.19}$$

que traduzem ***relações de ortogonalidade****.*

Portanto, os coeficientes c_n e d_n devem ser iguais aos coeficientes de Fourier a_n e b_n. Assim, uma função f pode ser desenvolvida em série de Fourier de forma única no intervalo $-l < x < l$.
■

Exemplo 139 *Determinar a série de Fourier da função $\cos^2 x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$.*
Solução. *Conforme acabamos de ver, a função $\cos^2 x$ tem uma e uma só série de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\pi}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right]$$

no intervalo $-\pi < x < \pi$. Mas, uma vez que,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

então a série de Fourier de $\cos^2 x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ é $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

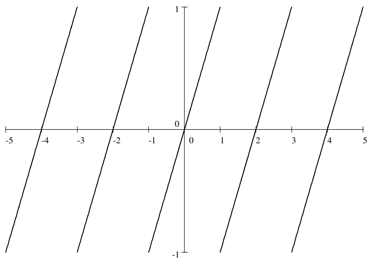
As funções $\cos n\pi x/l$ e $\operatorname{sen} n\pi x/l$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, são periódicas com período $2l$, pelo que se repetem a cada intervalo de amplitude $2l$:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+2l)\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi\right) = \cos\frac{n\pi x}{l},$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x+2l)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

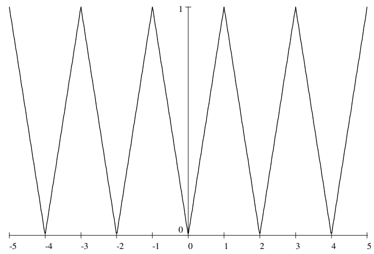
Desta forma, a série de Fourier (6.15) converge, para todo o x, para uma função periódica $F(x)$. Esta função é designada **extensão periódica** de $f(x)$, sendo definida pelas equações

$$\begin{cases} F(x) = f(x), & -l < x < l, \\ F(x) = \frac{1}{2}\left[f(l) - f(-l)\right], & x = \pm l, \\ F(x+2l) = F(x). \end{cases}$$

Exemplo 140 *A extensão periódica da função $f(x) = x$ e da função $g(x) = |x|$, se estas estiverem definidas no intervalo $-1 < x < 1$, têm a seguinte representação gráfica*



Extensão periódica da função x



Extensão periódica da função $|x|$

Funções pares e funções ímpares

Existem casos particulares em que a série de Fourier de uma função f se resume a uma série envolvendo apenas senos ou co-senos. Esta situação ocorre quando f é uma função par ou uma função ímpar.

Definição 37 *Uma função f diz-se uma* ***função par*** *se $f(-x) = f(x)$.*

Exemplo 141 *A função $f(x) = x^2$ é uma função par pois*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Exemplo 142 *A função $g(x) = \cos n\pi x/l$ é uma função par já que*

$$g(-x) = \cos(-n\pi x/l) = \cos(n\pi x/l) = g(x).$$

Definição 38 *Uma função f diz-se uma* ***função ímpar*** *se $f(-x) = -f(x)$.*

Exemplo 143 *A função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar pois*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Exemplo 144 *A função $g(x) = \operatorname{sen} n\pi x/l$ é uma função ímpar uma vez que*

$$g(-x) = \operatorname{sen}(-n\pi x/l) = -\operatorname{sen}(n\pi x/l) = -g(x).$$

Mostra-se facilmente que as funções pares e ímpares têm as seguintes propriedades elementares.

1. O produto de duas funções pares é uma função par.

2. O produto de duas funções ímpares é uma função par.

3. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

4. Se f é uma função ímpar no intervalo $[-l, l]$, então

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0.$$

5. Se f é uma função par no intervalo $[-l, l]$, então
$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Relativamente às funções pares e ímpares tem-se o seguinte lema.

Lema 1 *Tem-se:*

(a) A série de Fourier de uma função par é uma série de co-senos, ou seja, não contém qualquer termo do tipo $\operatorname{sen} n\pi x/l$*.*

(b) A série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos, isto é, não contém qualquer termo do tipo $\cos n\pi x/l$*.*

Demonstração *(a) Se f é par, então $f(x)\operatorname{sen} n\pi x/l$ é ímpar. Logo, pela Propriedade 4, os coeficientes*
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$
da série de Fourier de f são todos nulos.

(b) Se f é ímpar, então $f(x)\cos n\pi x/l$ é ímpar. Consequentemente, pela Propriedade 4, os coeficientes
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots.$$
da série de Fourier de f são todos nulos. ■

6.2.1 Séries de Fourier de co-senos e séries de Fourier de senos

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte teorema que constitui uma extensão do Teorema 62. Este teorema possibilitará a resolução do problema de valores de fronteira envolvendo a equação de calor já abordado na Secção 6.1, bem como a resolução de outros PVFs relevantes em vários domínos.

Teorema 64 *Sejam f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $0 < x < l$. Então, neste intervalo, a função f pode ser desenvolvida numa série só de co-senos*
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$
ou numa série só de senos
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

No primeiro caso os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6.20}$$

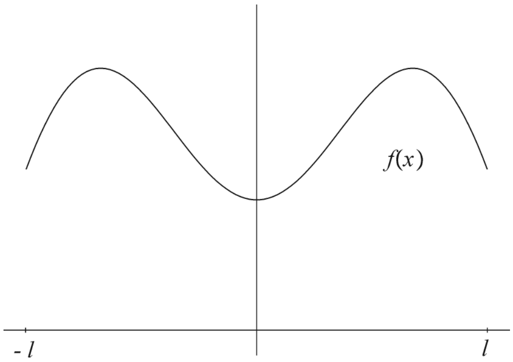
enquanto que no segundo caso os coeficientes b_n são dados por

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{6.21}$$

Demonstração *Comecemos por considerar a função*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x < l, \\ f(-x), & -l < x < 0. \end{cases}$$

Apresenta-se de seguida a representação gráfica de $F(x)$, sendo fácil de ver que esta função é par. (Por esta razão F é designada a ***extensão par*** *de f em $-l < x < l$.)*



Portanto, pelo Lema 1 a série de Fourier de F no intervalo $-l < x < l$ contém apenas co-senos:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6.22}$$

Tem-se ainda que a função $F(x)\cos n\pi x/l$ é par. Assim, pela Propriedade 5, tem-se

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Finalmente, uma vez que $F(x) = f(x)$ para $0 < x < l$, então de (6.22) resulta

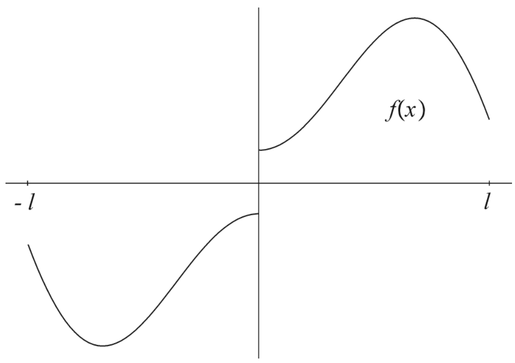
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

De notar ainda que a série (6.22) converge para $f(x)$ em $x = 0$. Fica assim demonstrado o resultado relativo à possibilidade de escrever $f(x)$ como uma série de co-senos.

Para demonstrar que a função $f(x)$ também pode ser desenvolvida numa série de senos, consideremos a função

$$G(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l, \\ -f(-x), & -l < x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Apresenta-se de seguida a representação gráfica de $F(x)$, sendo fácil de ver que esta função é ímpar. (Por esta razão G é designada a ***extensão ímpar*** *de f em $-l < x < l$.)*



Portanto, pelo Lema 1 a série de Fourier de G no intervalo $-l < x < l$ contém apenas senos:

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} G(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{6.23}$$

Tem-se ainda que a função $G(x) \operatorname{sen} n\pi x/l$ é par. Portanto, pela Propriedade 5, tem-se

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} G(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

Finalmente, uma vez que $G(x) = f(x)$ para $0 < x < l$, então de (6.23) resulta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

De notar ainda que a série (6.23) se anula em $x = 0$. Fica assim demonstrado o resultado relativo à possibilidade de escrever $f(x)$ como uma série de senos. ■

Exemplo 145 *Desenvolver a função $f(x) = 1$ numa série de senos no intervalo $0 < x < \pi$.*
Solução. *Pelo Teorema 64 tem-se*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos \pi n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim,

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots\right), \quad 0 < x < \pi.$$

Apresentam-se de seguida alguns gráficos que ilustram a forma como a série de Fourier tende para a função 1 no intervalo $0 < x < \pi$ à medida que o número de termos da série aumenta.

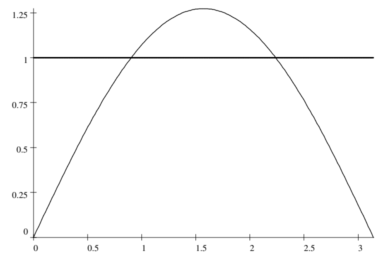


Gráfico de $f_1(x)$

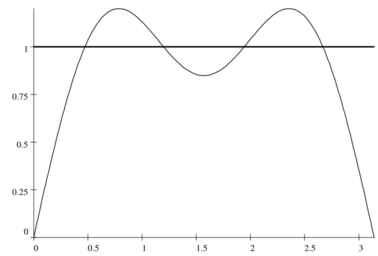


Gráfico de $f_2(x)$

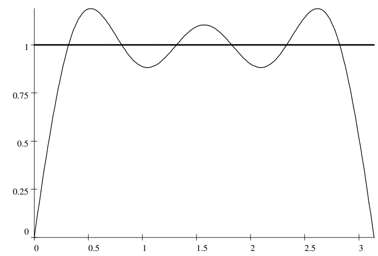


Gráfico de $f_3(x)$

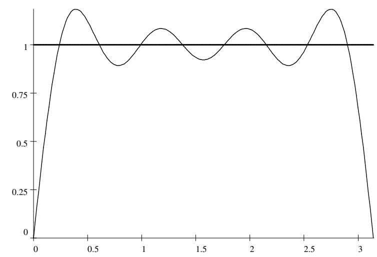


Gráfico de $f_4(x)$

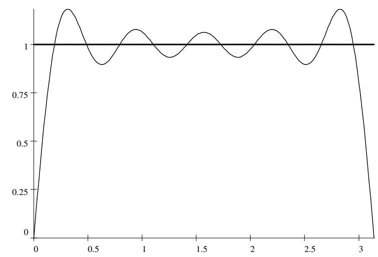


Gráfico de $f_5(x)$

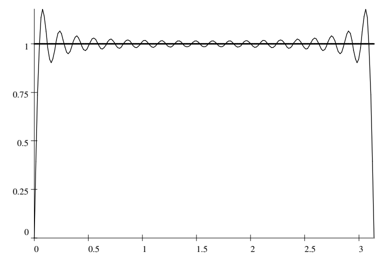


Gráfico de $f_{20}(x)$

Exemplo 146 *Desenvolver a função $f(x) = e^x$ numa série de co-senos no intervalo $0 < x < 1$.*
Solução. *Pelo Teorema 64 tem-se*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 e^x\, dx = 2(e-1)$$

e

$$a_n = 2\int_0^1 e^x \cos n\pi x\, dx = \frac{2(e\cos n\pi - 1)}{\pi^2 n^2 + 1}.$$

Portanto,

$$e^x = e - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e\cos n\pi - 1}{\pi^2 n^2 + 1}\cos n\pi x, \qquad 0 < x < 1.$$

Convergência da série de Fourier

Discutiremos aqui a validade da equação

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right),$$

onde (a_n, b_n) são os coeficientes de Fourier da função $f(x)$ no intervalo $-l < x < l$. Por simplicidade de escrita consideraremos $l = \pi$, sem perda de generalidade, uma vez que os resultados obtidos podem ser aplicados ao intervalo $-l < x < l$ realizando a mudança de variável $x' = x\pi/l$.

Primeiro é conveniente estabelecer a noção de função seccionalmente suave. Tal é necessário pois nem todas as séries de Fourier convergem, mesmo quando impomos que as funções a desenvolver são contínuas. De facto, existem funções em $[-\pi, \pi]$ cuja série de Fourier diverge numa infinidade de pontos! Por isso devemos centrar a nossa atenção sobre outra classe de funções, as funções seccionalmente suaves.

Definição 39 *Uma função $f(x)$, $a < x < b$, diz-se* ***seccionalmente contínua*** *se existe um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p < x_{p+1} = b$ tais que:*

(i) f é contínua em $x \neq x_i$, $\quad i = 1, \ldots, p$

(ii) $f(x_i^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_i + \varepsilon)$ existe (é finito), $\quad i = 0, \ldots, p$

(iii) $f(x_i^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_i - \varepsilon)$ existe(é finito), $\quad i = 1, \ldots, p+1$.

Definição 40 *Uma função $f(x)$, $a < x < b$, diz-se* ***seccionalmente suave*** *se f e todas as suas derivadas são seccionalmente contínuas.*

Supomos que a subdivisão $x_0 < x_1 < \ldots < x_{p+1}$ se aplica tanto a f como a todas as derivadas. Nestas condições, a derivada de uma função seccionalmente suave é ainda uma função seccionalmente suave. Se $f(x)$, $a < x < b$, é seccionalmente suave, então $f'(x)$ existe excepto em $x = x_1, \cdots, x_p$.

Exemplo 147 *Seja*

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

Neste caso consideramos $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$. A função f é contínua em todo o intervalo. Tem-se ainda que f é seccionalmente contínua, com $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$. Todas as derivadas de ordem superior são nulas, pelo que $f(x)$, $-\pi < x < \pi$, é seccionalmente suave.

Exemplo 148 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi < x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Vemos que f é contínua excepto em $x = 0$ já que $f(0^-) = 0$ e $f(0^+) = 1$. As derivadas de ordem mais elevada são seccionalmente contínuas em $(-\pi, \pi)$, pelo que $f(x)$, $-\pi < x < \pi$, é seccionalmente suave.

Exemplo 149 *Seja*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - \pi^2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Neste caso $f(x)$, $-\pi < x < \pi$, é contínua, mas não é seccionalmente contínua uma vez que $f(\pi^-)$ e $f(\pi^+)$ não são finitos. Assim, $f(x)$, $-\pi < x < \pi$, não é seccionalmente suave

Da definição de função seccionalmente suave decorre naturalmente que se f é uma função seccionalemente suave no intervalo $-l < x < l$, então f e f' são seccionalmente contínuas nesse intervalo. Assim sendo, a série de Fourier de uma função seccionalmente suave f converge para a função f nos termos do Teorema da Convergência.

Convergência uniforme e fenómeno de Gibbs

Vimos que a série de Fourier de uma função seccionalmente suave converge para a função excepto nos pontos de descontinuidade de f, onde converge para a média dos limites da função à esquerda e à direita. Uma vez que estamos interessados em aproximar funções por somas parciais das suas séries de Fourier, tem interesse analisar como é que a série de Fourier converge próximo de pontos de descontinuidade. Para esse efeito observe-se os gráficos apresentados nos Exemplos 137, 138 e 145. Vemos que nos três casos a série de Fourier ultrapassa $f(x)$ na vizinhança dos pontos de descontinuidade de f, independentemente do número de termos da série de Fourier que consideramos na aproximação. Este comportamento é designado **fenómeno de Gibbs**. Este fenómeno pode ser descrito dizendo que as somas parciais não convergem uniformemente para $f(x)$ (ie., a curva não está arbitrariamente próxima do gráfico de f para valores suficientemente elevados de n). É possível mostrar que no caso geral se tem o seguinte resultado.

Proposição 65 *Seja f uma função seccionalmente suave em $(-\pi, \pi)$ e x_0 um ponto de descontinuidade de f. Então, devido ao fenómeno de Gibbs, a série de Fourier de f ultrapassa a função na vizinhança de x_0 de uma quantidade que é aproximadamente*

$$0.09 \left| f(x_0^+) - f(x_0^-) \right| \tag{6.24}$$

para valores elevados de n.

Exemplo 150 *Vimos no Exemplo 137 que a série de Fourier da função*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & \quad 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

era tal que

$$g_n(x) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)\pi x}{(2k-1)\pi}.$$

Recorrendo à mudança de variável $x' = \pi x$ concluímos que a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

é tal que

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{(2k-1)\pi}.$$

Ora, $f_n(x)$ atinge o valor máximo para os pontos x tais que $f_n'(x) = 0$, ou seja, aqueles que obedecem a

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = 0.$$

Mostra-se que as raízes desta equação são

$$x = \pm\frac{\pi}{2n}, \pm\frac{2\pi}{2n}, \pm\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \pm\pi,$$

que são, para cada n, pontos igualmente espaçados no intervalo $[-\pi, \pi]$. Assim, o máximo que se encontra mais próximo do ponto $x_0 = 0$, do lado positivo do eixo dos x, ocorre em $x = \pi/2n$, tendo-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)\frac{\pi}{2n}}{(2k-1)\pi} \approx 1.0895.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left[f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right] \approx 1.0895 - 1 = 0.0895$$

e

$$\left|f(0^+) - f(0^-)\right| = |1-0| = 1,$$

o que está de acordo com a estimativa (6.24).

Em muitos problemas é importante evitar o fenómeno de Gibbs, ou seja, devemos garantir que a função $f(x)$ é bem aproximada pela soma parcial $f_n(x)$ em todos os pontos do intervalo $-l \le x \le l$. Recordemos que uma sucessão de funções $f_n(x)$, $a \le x \le b$, tende uniformemente para a função limite $f(x)$, $a \le x \le b$, se

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon_n, \quad a \le x \le b, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

onde

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ora, tal é violado pelo fenómeno de Gibbs, já que no exemplo precedente vimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \approx 1.0895.$$

Dois critérios para convergência uniforme

Abordaremos agora dois critérios para a existência de convergência uniforme. O primeiro pode ser testado na série, enquanto que o segundo pode ser testado na função.

Proposição 66 *(*Primeiro critério para a convergência uniforme*). Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave. Suponhamos que os coeficientes de Fourier $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ verificam*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

então a série de Fourier converge uniformemente.

Exemplo 151 *A série $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n^2$ é uma série de Fourier uniformente convergente.*

Proposição 67 *(*Segundo critério para a convergência uniforme*). Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave. Suponhamos ainda que f é contínua em $-l < x < l$ e que $f(-l^+) = f(l^-)$, então a respectiva série de Fourier converge uniformemente.*

Exemplo 152 *A função $f(x) = |x|$ tem uma série de Fourier que converge uniformemente.*

Se nos concentrarmos na classe das funções seccionalmente suaves, então estes critérios são necessários e suficientes: se a série de Fourier de uma função seccionalmente suave converge uniformemente, então f é contínua, $f(-l^+) = f(l^-)$, e $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty$.

Diferenciação de séries de Fourier

Vejamos agora um critério geral para a diferenciação de séries de Fourier.

Proposição 68 *Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função contínua e seccionalmente suave tal que $f(-l^+) = f(l^-)$. Então*

$$\frac{1}{2}\left[f'(x^+) + f'(x^-)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{l}\left(b_n\cos\frac{n\pi x}{l} - a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Exemplo 153 *Suponhamos que queremos calcular a série de Fourier de $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$, sabendo que a série de Fourier da função $g(x) = 2x$, $-\pi < x < \pi$, é*

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Ora, a série de Fourier da função par x^2 é da forma $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, com $\{a_n\}$ a determinar. A proposição precedente permite escrever

$$2x = -\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \operatorname{sen} nx.$$

Assim, conluímos que

$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Para determinar a_0 recorremos à definição

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Portanto, temos a seguinte série de Fourier,

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Integração de séries de Fourier

Vejamos agora um critério geral que estabelece em que condições a integração de uma série de Fourier pode ser feita termo a termo.

Proposição 69 *Seja $f(x)$, $-\pi < x < \pi$, uma função seccionalmente suave com série de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right).$$

Se $-\pi \le x_0 < x \le \pi$, então

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\,du = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\operatorname{sen} nx - \operatorname{sen} nx_0) + \frac{b_n}{n}(\cos nx_0 - \cos nx)\right].$$

Exemplo 154 *De novo, suponhamos que queremos calcular a série de Fourier de $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$, sabendo que a série de Fourier da função $g(x) = 2x$, $-\pi < x < \pi$, é*

$$2x = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Usando $x_0 = -\pi$ a proposição precendente permite escrever

$$\int_{-\pi}^{x} 2u\,du = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_{-\pi}^{x}\operatorname{sen} nu\,du,$$

ou seja,

$$\left[u^2\right]_{u=-\pi}^{u=x} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left[\cos nu\right]_{u=-\pi}^{u=x}$$

$$x^2 = \pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nx - \cos n\pi)$$

$$x^2 = \pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2,$$

resultando

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Reencontramos assim o resultado obtido no exemplo precedente.

O Teorema de Parseval e o erro quadrático médio

Após a abordagem das propriedades de convergência das séries de Fourier, dedicamos agora a atenção ao **Teorema de Parseval** dada a sua relevância em problemas envolvendo séries de Fourier.

Teorema 70 (Teorema de Parseval). *Seja $f(x)$, $-l < x < l$, uma função seccionalmente suave com série de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right). \tag{6.25}$$

Então

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right). \tag{6.26}$$

O lado esquerdo da igualdade representa média do quadrado da função $f(x)$, $-l < x < l$. O lado direito envolve a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier.

Demonstração *Aqui admitiremos que a função $f(x)$ é contínua e seccionalmente suave, tendo-se ainda $f(-l^+) = f(l^-)$. Neste caso multiplicamos a série de Fourier (6.25), que é uniformemente convergente, por $f(x)$ tendo-se*

$$f^2(x) = \frac{a_0}{2}\, f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n\, f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Esta série ainda é uniformemente convergente, pelo que a podemos integrar termo a termo para $-l < x < l$, vindo

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx + \int_{-l}^{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n\, f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) dx, \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx + b_n \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right). \end{aligned}$$

Atendendo à definição dos coeficientes a_n e b_n [cf. (6.13) e (6.14)] resulta

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} l + l \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Dividindo por $2l$ *obtém-se a* ***Igualdade de Parseval***

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

■

A primeira aplicação do Teorema de Parseval envolve o conceito de **erro quadrático médio**.

Definição 41 *Seja* $f(x)$*,* $-l < x < l$*, uma função seccionalmente suave e* $f_n(x)$ *a soma parcial da respectiva série de Fourier. Definimos o erro quadrático médio* σ_n^2 *como*

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[f(x) - f_n(x)\right]^2 dx.$$

Esta quantidade mede quanto é que, em média, $f_n(x)$ *difere de* $f(x)$*. A série de Fourier de* $f(x) - f_n(x)$ *é*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi x}{l}\right),$$

pelo que o Teorema de Parseval permite escrever

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[f(x) - f_n(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

e consequentemente

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Exemplo 155 *Seja* $f(x) = |x|$*,* $-\pi < x < \pi$*. Determinar o erro quadrático médio e indicar uma estimativa assimptótica quando* $n \to \infty$*.*
Solução. *Tem-se*

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{sen}\,mx\,dx = 0, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots.$$

dado $f(x)$ *ser uma função par. Por outro lado,*

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos mx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos mx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi m^2}\left[\cos mx + mx\,\mathrm{sen}\,mx\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{2}{\pi m^2}\left(\cos m\pi - 1\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$a_{2m} = 0, \qquad a_{2m-1} = -\frac{4}{\pi(2m-1)^2},$$

pelo que

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}^2 = \sigma_{2n}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty} a_{2m-1}^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\right]^2 \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}.\end{aligned}$$

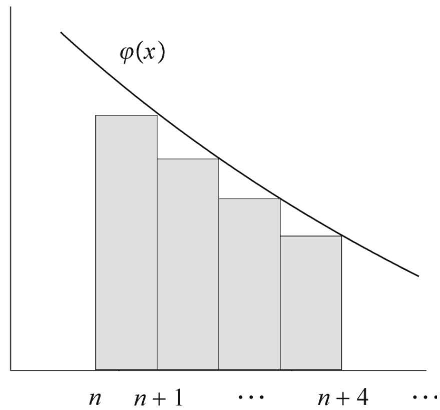
Apesar de não ser possível efectuar o cálculo da soma desta série, podemos fazer uma estimativa assimptótica. Para esse efeito, comparamos a soma da série com o integral

$$\frac{8}{\pi^2}\int_n^{\infty}\frac{1}{(2x-1)^4}\,dx = \frac{4}{3\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^3}.$$

Podemos agora usar o seguinte resultado: se $\varphi(x)$ é uma função positiva e decrescente, então

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\varphi(m) \le \int_n^{\infty}\varphi(x)\,dx,$$

conforme se ilustra na figura seguinte.



(A área sombreada representa a soma da série, enquanto que a área sob a curva corresponde ao integral.)

Portanto,

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4} \le \frac{4}{3\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^3},$$

pelo que

$$\sigma_{2n}^2 = O(n^{-3}), \quad n \to \infty.$$

Exemplo 156 *Seja $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Determinar o erro quadrático médio e indicar uma estimativa assimptótica quando $n \to \infty$.*
Solução. *Tem-se*

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx = 0,$$

dado $f(x)$ ser uma função ímpar. Por outro lado,

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,mx\,dx = 0, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,mx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,mx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi m^2}\left[\mathrm{sen}\,mx - mx\cos mx\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{2}{m}\cos m\pi \\ &= \frac{2}{m}(-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Tem-se então,

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{k^2}.$$

Para obter uma estimativa assimptótica desta soma, fazemos a comparação com o integral

$$\int_n^{\infty}\frac{2}{x^2}\,dx = \frac{2}{n},$$

pelo que

$$\sigma_n^2 = O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Exercícios

Exercício 110 *Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a)\quad f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad |x| < 1. \qquad (b)\quad f(x) = x \quad |x| < 1.$

$(c)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \end{cases} \quad |x| < 2. \qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x < 0, \\ e^x, & 0 \le x < l, \end{cases} \quad |x| < l.$

$(e)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & -l < x < 0, \\ e^x, & 0 \le x < l, \end{cases} \quad |x| < l. \qquad (f)\quad f(x) = \mathrm{sen}^3\,x, \quad |x| < \pi.$

Exercício 111 *Determine a série de Fourier da função x^2 no intervalo $|x| < \pi$.*

Exercício 112 *Obtenha as equações (6.17) - (6.19). Sugestão: use as igualdades trigonométricas*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A \cos B &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)], \\
\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)], \\
\cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)].
\end{aligned}$$

Exercício 113 *Determine a série de Fourier, envolvendo apenas co-senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

(a) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<a, \\ a, & a \leq x<2a, \end{cases} \quad 0<x<2a.$ (b) $f(x)=e^{-x}, \quad 0<x<1.$

(c) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<l/2, \\ l-x, & l/2 \leq x<l, \end{cases} \quad 0<x<l.$

Exercício 114 *Determine a série de Fourier, envolvendo apenas senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

(a) $f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x \leq 1, \\ 1, & 1<x<2, \end{cases} \quad 0<x<2.$ (b) $f(x)=2 \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0<x<\pi.$

Exercício 115 *(a) Desenvolver a função $f(x)=\operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de co-senos no intervalo $0<x<\pi$.*

(b) Desenvolver a função $f(x)=\cos x$ numa série de Fourier de senos no intervalo $0<x<\pi$.

(c) Pode-se desenvolver a função $f(x)=\operatorname{sen} x$ numa série de Fourier de co-senos no intervalo $-\pi<x<\pi$? Justifique.

Exercício 116 *Seja $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2\pi/l^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ a série de Fourier de uma função seccionalmente suave. Mostre que*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} e^{-(n^2\pi/l^2)} \cos \frac{n\pi x}{l}, \\
f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-(n^2\pi/l^2)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.
\end{aligned}$$

Exercício 117 *Considere a série de Fourier da função $f(x)=x$ no intervalo $-l<x<l$:*

$$x=\frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Integrando esta série, determine a série de Fourier da função x^2 no intervalo $-l<x<l$.

Exercício 118 *Seja $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Determine o máximo da soma parcial $f_n(x)$ e verifique a presença do fenómeno de Gibbs. Pista: atenda aos seguintes gráficos:*

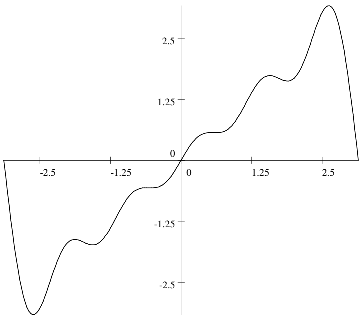


Gráfico de $f_5(x)$

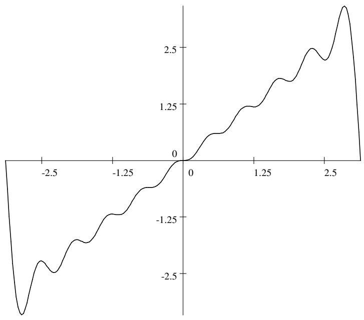


Gráfico de $f_{10}(x)$

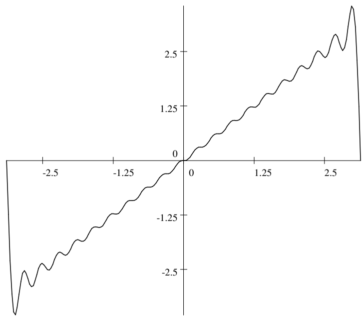


Gráfico de $f_{20}(x)$

Exercício 119 *Determinar o erro quadrático médio das séries de Fourier das seguintes funções.*

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad -\pi < x < \pi. \qquad (b) \quad f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$(c) \quad f(x) = \operatorname{sen} 10x \quad -\pi < x < \pi.$$

Exercício 120 *Escrever o Teorema de Parseval para a série de Fourier do Exercício 119 (a).*

Exercício 121 *Escrever o Teorema de Parseval para a série de Fourier do Exercício 119 (b).*

Exercício 122 *Mostre que no Exercício 119 (a) se tem $\sigma_n^2 = O(n^{-1})$, $n \to \infty$.*

Exercício 123 *Mostre que no Exercício 119 (b) se tem $\sigma_n^2 = O(n^{-3})$, $n \to \infty$.*

6.3 Aplicação à equação de calor, equação de onda e equação de Laplace

Equação de calor

Voltamos agora ao problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ & u(x,0) = f(x), && 0 < x < l, \\ & u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Vimos na Secção 6.1 que a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / l^2}$$

é uma solução do problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam as constantes c_1, c_2, $\ldots$. Tal conduziu-nos a questionar se é possível determinar constantes c_1, c_2, $\ldots$ por forma a ter-se

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad 0 < x < l.$$

Ora, tal como vimos na Secção 6.2, a resposta é afirmativa. De facto, escolhendo

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

então a série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

converge para $f(x)$ se f for contínua no ponto x. Portanto,

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / l^2} \tag{6.28}$$

é a solução pretendida de (6.27).

Nota. Na realidade, a solução (6.28) não pode ser vista como a solução de (6.27) até que justifiquemos de forma rigorosa todo o processo limite envolvido. Em particular, temos que verificar que a função definida $u(x,t)$ por (6.28) tem derivadas parciais em ordem a x e a t, e que $u(x,t)$ verifica a equação de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$. (Não é necessariamente verdade que uma soma infinita de soluções de uma equação diferencial linear ainda seja uma solução. De facto, uma soma infinita de soluções de uma dada equação diferencial pode nem sequer ser diferenciável.) No entanto, no caso de (6.28) é possível mostrar (ver Exercício 125) que $u(x,t)$ tem derivadas parciais em ordem a x e a t de qualquer ordem, e que $u(x,t)$ satisfaz o PVF (6.27).

Exemplo 157 *Uma barra de alumínio ($\alpha^2 = 0.86$ cm^2/s) com 10 cm de comprimento é aquecida até ter uma temperatura uniforme de 100 ^oC. No instante inicial, $t = 0$, os extremos da barra são mergulhados num banho de gelo a 0 ^oC, sendo mantidos a essa temperatura. Supondo que não existe qualquer troca de calor através das paredes laterais da barra, determinar a distribuição de temperatura da barra em qualquer instante de tempo $t > 0$.*
Solução. *Seja $u(x,t)$ a temperatura da barra no ponto x no instante t. Esta função satisfaz o seguinte PVF*

$$\begin{aligned} &u_t = 0.86\, u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < 10, \\ &u(x,0) = 100, && 0 < x < 10, \\ &u(0,t) = u(10,t) = 0. && t > 0. \end{aligned} \tag{6.29}$$

A solução de (6.29) é

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, e^{-0.86\, n^2\pi^2 t\,/\,100},$$

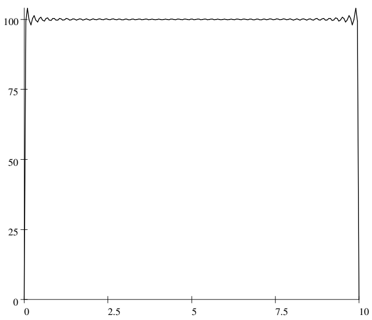
onde

$$c_n=\frac{1}{5}\int_0^{10} 100 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}\,dx=\frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

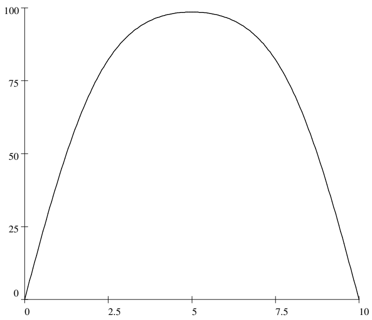
Uma vez que c_n é nulo quando n é par e $c_n = 400/n\pi$ quando n é ímpar, tem-se

$$u(x,t)=\frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/10]}{2n-1}\, e^{-0.86\,(2n-1)^2\pi^2 t\,/\,100},$$

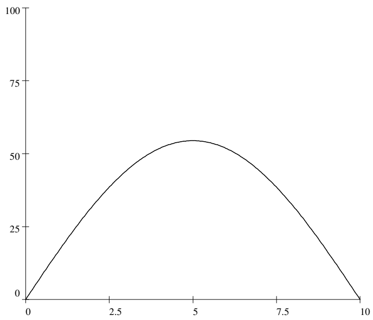
cuja representação gráfica é



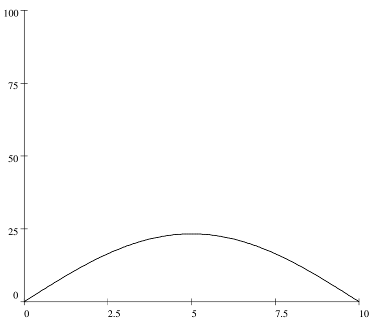
$u(x,0)$



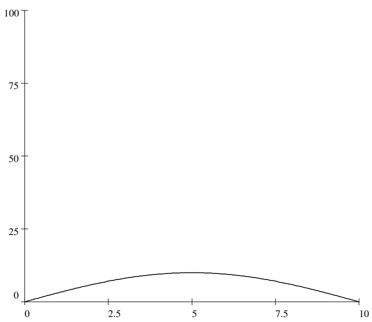
$u(x,2)$



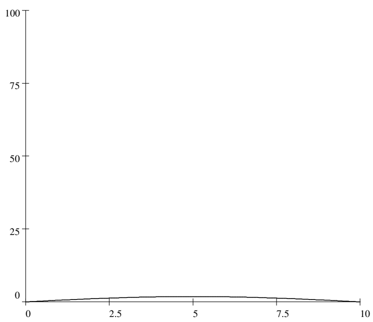
$u(x,10)$



$u(x,20)$



$u(x,30)$



$u(x,50)$

Exemplo 158 *Considere-se uma barra de metal fina de comprimento l e difusividade térmica α^2, cujas faces e extremos estão isolados por forma a não existir passagem de calor através deles. Seja $f(x)$ a distribuição inicial da temperatura ao longo da barra. Determinar a distribuição de temperatura para qualquer instante posterior t.*

Solução. *Seja $u(x,t)$ a temperatura da barra no ponto x no instante t. Esta função satisfaz o seguinte PVF*

$$\begin{aligned}
&u_t=\alpha^2\, u_{xx}, && t>0,\ 0<x<l, \\
&u(x,0)=f(x), && 0<x<l, \\
&u_x(0,t)=u_x(l,t)=0. && t>0.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

A solução de (6.30) é obtida em dois passos. Primeiro, determinamos uma família de soluções $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ para o PVF

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0. \tag{6.31}$$

Depois, determinamos constantes c_0, c_1, c_2, ... tais que

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

satisfaça a condição inicial $u(x,0) = f(x)$.
Passo 1: Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$. Então

$$u_t = X T', \qquad u_{xx} = X'' T,$$

pelo que $u(x,t)$ é uma solução de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ se

$$X T' = \alpha^2 X'' T,$$

ou seja

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}.$$

Tal como vimos na Secção 6.1, a equação precedente implica que

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T' + \lambda \alpha^2 T = 0,$$

para algum valor da constante λ. Além disso, as condições de fronteira

$$0 = u_x(0,t) = X'(0)T(t) \qquad e \qquad 0 = u_x(l,t) = X'(l)T(t)$$

implicam que $X'(0) = X'(l) = 0$. Portanto, $u(x,t) = X(x)T(t)$ é uma solução de (6.31) se

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \tag{6.32}$$

e

$$T' + \lambda \alpha^2 T = 0. \tag{6.33}$$

De momento a constante λ é arbitrária. No entanto, o PVF (6.32) tem solução não-trivial $X(x)$ somente se (ver Exercício 93, Secção 5.1) $\lambda = n^2\pi^2/l^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e nesse caso

$$X(x) = X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Por outro lado, a equação (6.33) implica que

$$T(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / l^2}.$$

Assim,

$$u_n(x,t) = \cos \frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / l^2}$$

é uma solução de (6.31) para todo n não-negativo.
Passo 2: Note-se que a combinação linear

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/l^2}$$

é uma solução (formal) de (6.31) qualquer que seja a escolha feita para as constantes c_0, c_1, c_2, ... O seu valor inicial é

$$u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Assim sendo, para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ devemos escolher as constantes c_0, c_1, c_2, ... por forma a ter-se

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

Por outras palavras, devemos desenvolver f como uma série de Fourier em co-senos no intervalo $0 < x < l$. Ora, esta é a situação a que se refere o Teorema 64, pelo que

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

A solução de (6.30) é então

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]\cos\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/l^2}.$$

Nota. Da expressão precedente resulta que a temperatura atinge uma situação de equilíbrio estacionário com temperatura

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx,$$

a qual corresponde ao "valor médio" da distribuição inicial de temperatura na barra.

Equação de onda

Consideramos agora o problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\
&u(x,0) = f(x), && 0 < x < l, \\
&u_t(x,0) = g(x), && 0 < x < l, \\
&u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

que caracteriza a propagação de ondas em vários meios, bem como a vibração elástica de uma corda mecânica. Este problema também pode ser resolvido usando o método de separação de variáveis. Neste caso, determinaremos (a) soluções $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ do problema de valores de fronteira

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, && t > 0,\ 0 < x < l, \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. && t > 0, \end{aligned} \tag{6.35}$$

e (b) a solução de (6.34) escolhendo uma combinação linear aproproada das funções $u_n(x,t)$.

(a) Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$. Calculando

$$u_{tt} = X\,T'', \qquad u_{xx} = X''\,T,$$

vemos que $u(x,t) = X(x)T(t)$ é uma solução da equação de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sempre que $X\,T'' = c^2 X''\,T$, ou seja,

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{6.36}$$

Uma vez que o primeiro membro de (6.36) só depende de t, enquando que o segundo membro só depende de x, tem-se

$$\frac{T''}{c^2 T} = -\lambda = \frac{X''}{X}$$

para algum valor da constante λ. Por sua vez, as condições de fronteira

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \qquad \text{e} \qquad 0 = u(l,t) = X(l)T(t)$$

implicam que $X(0) = X(l) = 0$. Assim, $u(x,t)$ é uma solução de (6.35) se

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{6.37}$$

e

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \tag{6.38}$$

Para já a constante λ é arbitrária. No entanto, o PVF (6.37) tem solução não-trivial $X(x)$ somente se $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/l^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e nesse caso

$$X(x) = X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Por outro lado, a equação (6.38) implica que

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}.$$

Portanto,

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left[a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right]$$

é uma solução não-trivial de (6.35) para todo o inteiro positivo n, e para cada par de constantes a_n, b_n.

(b) A combinação linear

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left[a_n\cos\frac{n\pi ct}{l}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right]$$

verifica formalmente o problema de valores de fronteira (6.35) e as condições iniciais

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},\qquad u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}.$$

Portanto, para satisfazer as condições iniciais $u(x,0)=f(x)$ e $u_t(x,0)=g(x)$, devemos escolher as constantes a_n e b_n de tal forma que

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},\qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

no intervalo $0<x<l$. Ou seja, temos de desenvolver as funções $f(x)$ e $g(x)$ em séries de Fourier de senos no intervalo $0<x<l$. Ora, esta a situação a que se refere o Teorema 64, pelo que

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx,\qquad b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Por simplicidade, consideraremos apenas o caso em que $g(x)=0$, ou seja, inicialmente a corda tem velocidade nula. Nesse caso, o deslocamento da corda $u(x,t)$ em qualquer instante de tempo $t>0$ é dado por

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l},\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6.39}$$

Justificação da solução. Não é possível mostrar de forma directa, tal como fizemos no caso da equação de calor, que a função $u(x,t)$ definida por (6.39) é uma solução da equação de onda. De facto, não é possível mostrar directamente que a série infinita (6.39) tem derivadas parciais em ordem a t e a x. Por exemplo, calculando u_t de modo formal obtém-se

$$u_t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}a_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

e devido à presença do factor n esta série pode não convergir. Existe, no entanto, uma forma alternativa de provar a validade da solução (6.39). Tal permitirá, simultaneamente, compreender melhor a estrutura de $u(x,t)$. Comecemos por notar que

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right].$$

Assim, podemos escrever (6.39) como

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x-ct)+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right],\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6.40}$$

Seja agora $F(x)$ a extensão periódica par de $f(x)$ no intervalo $-l < x < l$, isto é,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l, \\ -f(-x), & -l < x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F(x+2l) = F(x).$$

Pode-se mostrar que a série de Fourier de F é

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \qquad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

pelo que

$$F(x-ct) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}(x-ct) \qquad \text{e} \qquad F(x+ct) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}(x+ct)$$

Assim sendo, podemos escrever $u(x,t)$ [cf. (6.40)] na forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x-ct) + F(x+ct)\right], \tag{6.41}$$

bastando agora mostrar que $u(x,t)$ verifica a equação de onda se $f(x)$ tiver duas derivadas contínuas. De facto, se $f(x)$ tiver duas derivadas contínuas, então $F(x)$ também tem, pelo que

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}F(x-ct) + \frac{\partial}{\partial t}F(x+ct)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(x-ct)\ \frac{dF}{du}\bigg|_{u=x-ct} + \frac{\partial}{\partial t}(x+ct)\ \frac{dF}{du}\bigg|_{u=x+ct}\right] \\ &= \frac{c}{2}\left(\frac{dF(u)}{du}\bigg|_{u=x+ct} - \frac{dF(u)}{du}\bigg|_{u=x-ct}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= \frac{c}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dF(u)}{du}\bigg|_{u=x+ct}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dF(u)}{du}\bigg|_{u=x-ct}\right)\right] \\ &= \frac{c^2}{2}\left(\frac{d^2F(u)}{du^2}\bigg|_{u=x+ct} + \frac{d^2F(u)}{du^2}\bigg|_{u=x-ct}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}F(x-ct) + \frac{\partial}{\partial x}F(x+ct)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-ct)\ \frac{dF}{du}\bigg|_{u=x-ct} + \frac{\partial}{\partial x}(x+ct)\ \frac{dF}{du}\bigg|_{u=x+ct}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{dF(u)}{du}\bigg|_{u=x+ct} - \frac{dF(u)}{du}\bigg|_{u=x-ct}\right), \end{aligned}$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x+ct}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{dF(u)}{du}\right|_{u=x-ct}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{d^2F(u)}{du^2}\right|_{u=x+ct} + \left.\frac{d^2F(u)}{du^2}\right|_{u=x-ct}\right).$$

Substituindo estes resultados em $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ resulta uma identidade. conforme requerido

A equação (6.41) tem a seguinte interpretação. Se traçarmos o gráfico da função $y = F(x - ct)$ para um valor fixo t, vemos que é igual ao gráfico de $y = F(x)$, excepto o facto de estar transladado para a direita de uma distância ct, conforme se mostra na Figura seguinte.

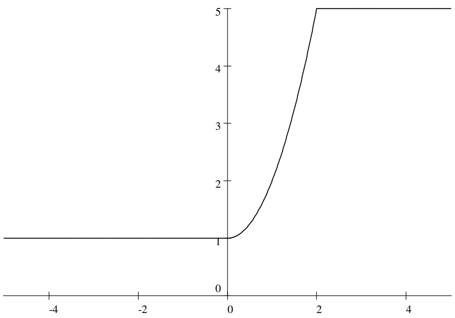


Gráfico de $y = F(x)$

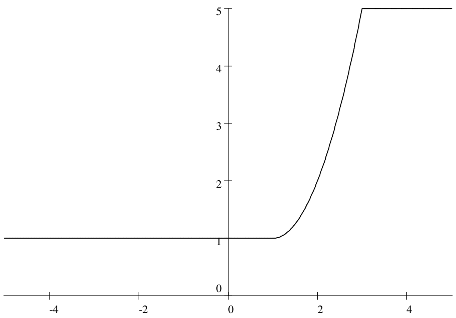


Gráfico de $y = F(x-1)$

Portanto, $f(x - ct)$ é uma onda que viaja com velocidade c na direcção positiva do eixo dos xx. De forma análoga, $F(x+ct)$ é uma onda que se desloca com velocidade c na direcção negativa do eixo dos xx. O número c representa a velocidade com que a perturbação se propaga ao longo da corda vibrante. Se a perturbação se dá num ponto x_0, então será sentida num ponto x após um tempo $t = (x - x_0)/c$. Portanto, a equação de onda caracteriza a propagação de ondas nummeio em que as perturbações (ou sinais) se deslocam com velocidade finita.

Exemplo 159 *Determinar a solução do problema de valores de fronteira*

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 2\pi, \\ u(x,0) = \cos x - 1, & 0 < x < 2\pi, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2\pi, \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

Solução. *Nesta caso $u(x,t)$ é dado por*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{nct}{2}, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos x - 1)\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx.$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx.$$

Ora,

$$\int_0^{2\pi} \cos x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}+x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}-x\right)\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{2}\right)x + \operatorname{sen}\left(\frac{n-2}{2}\right)x\right] dx$$
$$= \frac{2n}{n^2-4}\left(1-\cos n\pi\right)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\, dx = \frac{2}{n}\left(1-\cos n\pi\right),$$

pelo que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{n}{n^2-4}\left(1-\cos n\pi\right) - \frac{1}{n}\left(1-\cos n\pi\right)\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n^2-4} - \frac{1}{n}\right)\left(1-\cos n\pi\right).$$

Assim, $a_n = 0$ *se* n *é par e*

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4} - \frac{1}{2n+1}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Tem-se, finalmente,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{ct}{2}$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4} - \frac{1}{2n+1}\right)\operatorname{sen}(2n+1)\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{ct}{2}.$$

Equação de Laplace

Consideramos agora a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{6.42}$$

Existem dois tipos de problemas de valores de fronteira relacionados com a equação (6.42): o problema de Dirichlet e o problema de Neumann. No problema de Dirichlet queremos determinar uma função $u(x,y)$ que satisfaça a equação de Laplace num domínio D e que assuma determinados valores na fronteira de D. No problema de Neumann, queremos determinar uma função $u(x,y)$ que satisfaça a equação de Laplace num domínio D, devendo as respectivas derivadas na direcção normal a D assumir determinados valores. Caso o domínio seja um rectângulo, qualquer um dos problemas pode ser resolvido usando o método de separação de variáveis.

Exemplo 160 *Determinar uma função $u(x,y)$ que satisfaça a equação de Laplace no rectângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ e que verifique as seguintes condições de fronteira*

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0,$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = f(y).$$

Solução. *Este problema de Dirichlet é resolvido em dois passos. Primeiro determinamos funções $u_n(x,t) = X_n(x)Y_n(y)$ que satisfaçam o problema de valores de fronteira*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = 0. \tag{6.43}$$

Depois determinamos o valor das constantes c_n de tal forma que a combinação linear

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, u_n(x,t)$$

satisfaça a condição de fronteira $u(a,y) = f(y)$.
Passo 1: Seja $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Resulta então $u_{xx} = X''\,Y$ e $u_{yy} = X\,Y''$, pelo que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ é solução da equação de Laplace se $X''Y + Y''X = 0$, ou seja,

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X}.$$

Como o primeiro membro só depende de y, enquanto que o segundo membro só depende de x, então deverá ter-se

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda$$

para algum valor da constante λ. Temos ainda as condições de fronteira

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0, \quad 0 < x < a,$$
$$u(x,b) = X(x)Y(b) = 0, \quad 0 < x < a,$$
$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

que inplicam

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0, \quad X(0) = 0.$$

Portanto, $u(x,y) = X(x)Y(y)$ é uma solução de (6.43) se

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0, \tag{6.44}$$

e

$$X'' + \lambda X = 0 \quad X(0) = 0. \tag{6.45}$$

Para já a constante λ é arbitrária. No entanto, o PVF (6.44) tem solução não-trivial $Y(y)$ apenas se $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2/b^2$, tendo-se

$$Y(y) = Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \tag{6.46}$$

Por sua vez, a equação $X'' - (n^2\pi^2/b^2)X = 0$ implica que

$$X(x) = X_n(x) = c_1 \cosh \frac{n\pi x}{b} + c_2 \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b},$$

(6.45)

Exercícios

Exercício 124 *Os extremos $x = 0$ e $x = 10$ de uma barra de alumínio ($\alpha^2 = 0.86$) são mantidos a 10 ^oC, enquanto que a sua superfície se encontra isolada. Determinar uma expressão para a distribuição de temperatura na barra ao longo do tempo $u(x,t)$ caso se tenha inicialmente:*

(a) $u(x,0) = 70, \quad 0 < x < 10.$ $\qquad$ (b) $u(x,0) = 70\cos x, \quad 0 < x < 10.$

(c) $u(x,0) = \begin{cases} 10x, & 0 < x < 5, \\ 10\,(10-x)\,, & 5 \le x < 10. \end{cases}$ $\qquad$ (d) $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3, \\ 65, & 3 \le x < 10. \end{cases}$

Exercício 125 *Verifique que a função $u(x,t)$ definida por (6.28) satisfaz a equação de calor. Sugestão: Use o critério da razão (ou Critério D'Alembert) para mostar que a série infinita (6.28 converge, podendo assim ser diferenciada termo a termo relativamente a t e a x.*

Exercício 126 *Determine a solução do problema de valor de fronteira*

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 3, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 3, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0. & t > 0. \end{array} \qquad u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x \le 2, \\ 3-x & 2 < x < 3. \end{cases}$$

Exercício 127 *Uma corda com 10 cm de comprimento encontra-se fixa nos extremos, sendo levantada no ponto médio até uma altura de 1 cm e largada depois. Descreva o movimento da corda considerando $c^2 = 1$.*

Exercício 128 *A equação de onda em duas dimensões é $u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy})$. Determine soluções desta equação usando o método de separação de variáveis.*

6.4 Exercícios de revisão do Capítulo 6

Exercício 129 *Determine a solução do seguinte problema de valores de fronteira.*

$$\begin{array}{ll} u_t = 1.14\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 2, \\ u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x/2 - 3 \operatorname{sen} 2\pi x, & 0 < x < 2, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

Exercício 130 *Use o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas de valores de fronteira.*

(a) $u_t = u_y, \quad u(0,y) = e^y + e^{-2y}.$ $\qquad$ (b) $u_t = u_y + u, \quad u(0,y) = 2e^{-y} - e^{2y}.$

Exercício 131 *Averigúe se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir cada uma das EDPs seguintes por pares de EDOs. Em caso afirmativo, determine essas equações.*

(a) $tu_{tt} + u_x = 0.$ $\qquad$ (b) $tu_{xx} + xu_t = 0.$

(c) $u_{xx} + (x-y)u_{yy} = 0.$ $\qquad$ (d) $u_{xx} + 2u_{xt} + u_t = 0.$

Exercício 132 *Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a)\quad f(x) = \begin{cases} x, & -2 < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 2, \end{cases} \quad |x| < 2.$ $\qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad |x| < 1.$

$(c)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 1, \\ 3, & 1 \le x < 2, \end{cases} \quad |x| < 2.$ $\qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} e^x, & -l < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < l, \end{cases} \quad |x| < l.$

$(e)\quad f(x) = e^x \quad |x| < l.$ $\qquad (f)\quad f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad |x| < \pi.$

Exercício 133 *Determine a série de Fourier, envolvendo apenas co-senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases}, \quad 0 < x < 2$ $\qquad (b)\quad f(x) = \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi.$

Exercício 134 *Determine a série de Fourier, envolvendo apenas senos, de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado.*

$(a)\quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < a, \\ a, & a \le x < 2a, \end{cases}, \quad 0 < x < 2a$ $\qquad (b)\quad f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < 1$

$(c)\quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < l/2, \\ l - x, & l/2 \le x < l, \end{cases}, \quad 0 < x < l.$

Exercício 135 *Os extremos e as faces de uma barra de cobre ($\alpha^2 = 1.14$) de comprimento 2 estão isolados relativamente ao exterior por forma a não passar calor através deles. Determinar uma expressão para a distribuição de temperatura na barra ao longo do tempo $u(x,t)$ caso se tenha inicialmente:*

$(a)\quad u(x,0) = 65\cos^2 \pi x, \quad 0 < x < 2.$ $\qquad (b)\quad u(x,0) = 70 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 2.$

$(c)\quad u(x,0) = \begin{cases} 60x, & 0 < x < 1, \\ 60\,(2-x)\,, & 1 \le x < 2. \end{cases}$ $\qquad (d)\quad u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 75, & 1 \le x < 2. \end{cases}$

Exercício 136 *Determine a solução do problema de valor de fronteira*

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. & t > 0. \end{array}$$

6.5 Soluções dos exercícios do Capítulo 6

107. $u(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x/2)\, e^{-1.71\pi^2 t/4} + 3\operatorname{sen}(5\pi x/2)\, e^{(-1.71)25\pi^2 t/4}$.

108. (a) $u(t,y) = e^{2(t+y)} + e^{-3(t+y)}$; (b) $u(t,y) = e^{-5t-4y} + 2e^{-7t-6y} - 14e^{13t+14y}$.

109. (a) $X'' - \mu X = 0$, $Y'' - (\mu + \lambda)Y = 0$, $T' - \lambda\alpha^2 T = 0$;

(b) $u(x, y, t) = \operatorname{sen}(n\pi x/a)\ \operatorname{sen}(n\pi y/b)\, e^{\alpha^2 n^2 \pi^2 (b^2 - a^2)t\,/\,a^2 b^2}$.

110. (a) $f(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\operatorname{sen}\pi x}{1} + \frac{\operatorname{sen}3\pi x}{3} + \frac{\operatorname{sen}5\pi x}{5} + \ldots)$; (b) $f(x) = \frac{4}{\pi}(\frac{\operatorname{sen}\pi x}{1} - \frac{\operatorname{sen}2\pi x}{2} + \frac{\operatorname{sen}3\pi x}{3} \pm \ldots)$;

(c) $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2} + (1 - \cos\frac{n\pi}{2})\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}]$;

(d) $f(x) = \frac{e^l - 1}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^l(-1)^n - 1}{l^2 + n^2\pi^2}[l\cos\frac{n\pi x}{l} - n\pi\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}]$;

(e) $f(x) = \frac{e^l}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^l(-1)^n - 1}{l^2 + n^2\pi^2} l\cos\frac{n\pi x}{l}$; (f) $f(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3x$.

111. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$.

113. (a) $f(x) = \frac{3a}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a(\cos n\pi/2 - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2a}$; (b) $f(x) = \frac{e-1}{e} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos n\pi/e)}{1 + n^2\pi^2}\cos n\pi x$;

(c) $f(x) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}[2\cos n\pi/2 - 1 - (-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{l}$.

114. (a) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\cos n\pi/2 - (-1)^n)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$; (b) $f(x) = \operatorname{sen}2x$.

115. (a) $\operatorname{sen}x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1 - 2^2} + \frac{\cos 4x}{1 - 4^2} + \ldots\right]$, $0 < x < 1$;

(b) $\cos x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2 - 1} + \frac{4\operatorname{sen}4x}{4^2 - 1} + \ldots\right]$, $0 < x < 1$;

(c) Não. Argumento 1: A série de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen}x$ no intervalo $-\pi < x < \pi$ é única, sendo $f(x) = \operatorname{sen}x$. Argumento 2 : A série de Fourier de uma função ímpar (como $\operatorname{sen}x$) é uma série que envolve apenas senos.

117. $x^2 = \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left[1 - \cos\frac{n\pi x}{l}\right] = \frac{l^2}{3} - \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$.

118. O máximo é atingido na vizinhança de $x = \pm\pi$ (pontos de descontinuidade da extensão periódica de $f(x)$), mais concretamente em $x = \pm\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi$, tendo-se $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{n-1}{n}\pi) = 3.703$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{n-1}{n}\pi) - f(\frac{n-1}{n}\pi)) \approx 0.56 \approx 0.09\,|f(\pi^-) - f(\pi^+)|$.

119. (a) $\sigma_n^2 = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[(-1)^k - 1]^2}{n^2}$; (b) $\sigma_n^2 = 8\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; (c) $\sigma_n^2 = 0$ para $n \geq 10$.

120. $\pi^2/8 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots$.

121. $\pi^4/90 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \ldots$.

124. (a) $u(x, t) = \frac{280}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\pi x/10}{2n+1}\, e^{-0.86(2n+1)^2\pi^2 t\,/\,100}$;

(b) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - (-1)^n\cos 10)}{n^2\pi^2 - 100}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}\, e^{-0.86n^2\pi^2 t\,/\,100}$;

(c) $u(x, t) = 100\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\operatorname{sen}n\pi/2}{n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}\, e^{-0.86n^2\pi^2 t\,/\,100}$;

(d) $u(x, t) = -\frac{130}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - \cos 3\pi/10)}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{10}\, e^{-0.86n^2\pi^2 t\,/\,100}$.

126. $u(x, t) = \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}2n\pi/3}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\cos\frac{n\pi ct}{3}$.

127. $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi/2}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10} \cos \frac{n\pi t}{10}$.

128. $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$; $X(x) = a_1 \cos \mu x + b_1 \operatorname{sen} \mu x$;

$Y(y) = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y$;

129. ??

130. ??

131. (a) ??; (b) ??; (c) ??; (d) ??.

132. (a) ??; (b) ??; (c) ??; (d) ??; (e) ??; (f) ??; (g) ??.

133. a) ??; (b) ??.

134. a) ??; (b) ??; (c) ??.

135. a) ??; (b) ??; (c) ??; (d) ??.

136. ??