CÁLCULO II – LEI

Um pequeno resumo da matéria para o 1º teste.

LISA SANTOS

Em $\mathbb{R}^n$ definimos a norma euclideana

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

A partir desta norma, podemos definir a distância euclideana: dados $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

NOTA: Se $n = 1$ então $d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$

CONCEITOS TOPOLÓGICOS:

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que

a é um ponto interior a A se $\exists r > 0 \; B(a, r) \subseteq A$

a é um ponto aderente a A se $\forall r > 0 \; B(a, r) \cap A \neq \emptyset$

a é um ponto de acumulação de A se

$$\forall r > 0 \quad (B(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

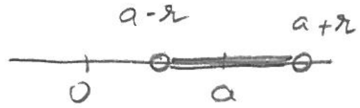
NOTA1: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}$

$$= \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < r\right\}$$
$$= \left\{(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n : (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2\right\}$$

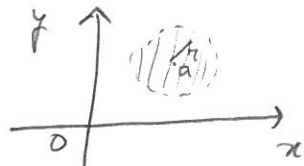
sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $a = (a_1, \dots, a_n)$.

NOTA 2:

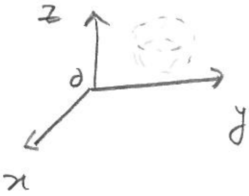
$\underline{n=1}$ $\quad B(a,r) =]a-r, a+r[$



$\underline{n=2}$ $\quad B(a,r)$ é o interior do círculo de centro em a e raio r



$\underline{n=3}$ $\quad B(a,r)$ é o interior da esfera de centro em a e raio r.



NOTAÇÕES

$\mathring{A} = \{$pontos interiores a $A\}$ (lê-se interior de A)

$\overline{A} = \{$pontos aderentes a $A\}$ (lê-se aderência de A)

$A' = \{$pontos de acumulação de $A\}$ (lê-se derivado de A)

Diz-se que a é um ponto de fronteira de A se a é ponto aderente e não interior a A.

$\text{fr}\, A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ (lê-se fronteira de A)

Diz-se que a é um ponto isolado de A se

$\exists r>0 \quad B(a,r) \cap A = \{a\}$

NOTA: $\overline{A} = A' \cup \{$pontos isolados de $A\}$. Além disso,

$A' \cap \{$pontos isolados de $A\} = \emptyset$

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ diz-se <u>aberto</u> se $A = \mathring{A}$ (note-se que $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \mathring{A} \subseteq A$)

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ diz-se <u>fechado</u> se $A = \overline{A}$ (note-se que $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n \quad A \subseteq \overline{A}$).

<u>FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS</u> (escalares)

Como sabem, uma função define-se dando a conhecer o seu domínio, o seu conjunto de chegada e a lei de formação ou expressão analítica.

Por abuso de notação, quando consideramos funções reais de várias variáveis reais, é comum apresentar-se uma função dando apenas a sua expressão analítica. Subentende-se, então, que o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde a expressão analítica tem significado. Denota-se o domínio de uma função f por Df e o contradomínio por $D'f$.

Dada uma função $f: Df \to \mathbb{R}$, em que $Df \subseteq \mathbb{R}^n$, o <u>gráfico de f</u> é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
Gr f &= \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in Df \} \\
&= \{ (x, y) \in Df \times \mathbb{R} : y = f(x) \}
\end{aligned}
$$

Note-se que, quando $n=2$, $Gr f \subseteq \mathbb{R}^3$ e, quando $n=3$, $Gr f \subseteq \mathbb{R}^4$.

Não é simples fazer o esboço do gráfico de uma função de duas variáveis, por ser um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. No caso das funções de três variáveis, não conseguimos mesmo, em geral, esboçar o seu gráfico, uma vez que este é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Podemos obter alguma informação sobre o gráfico de uma função se olharmos para as suas hipersuperfícies de nível: dada $f: Df \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in Df : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \quad (\subseteq \mathbb{R}^n)$$

↳ hipersuperfície de nível c da função f.

Quando $n=2$ designamos Σ_c por linha ou curva de nível e quando $n=3$ designamos Σ_c por superfície de nível

LIMITES

Seja $f: Df \to \mathbb{R}$ uma função, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a = (a_1, \ldots, a_n)$ um ponto de acumulação de f. Diz-se que o limite de f, quando x tende para a, de f é b (escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$) se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in Df \quad 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Restrinjamo-nos, por simplicidade, ao caso $n=2$. Tudo o que for dito neste caso tem generalização imediata ao caso $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

Suponhamos que $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = b$. Então

$$\lim_{x\to a_1} f(x,\, a_2 + m(x-a_1)) = b, \qquad \forall m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{y\to a_2} f(a_1, y) = b.$$

Ao considerarmos os limites acima, estamos a considerar o limite da função f, quando $(x,y)\to(a_1,a_2)$ segundo uma reta que passa no ponto (a_1,a_2).

Se, ao calcularmos os limites segundo retas diferentes, obtivermos resultados diferentes ou se o limite segundo uma reta dada não existir, podemos concluir imediatamente que o limite (global) $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$

não pode existir. Do mesmo modo, se encontrarmos duas curvas $y=\alpha_1(x)$ e $y=\alpha_2(x)$ tais que $\alpha_1(a_1)=\alpha_2(a_1)=a_2$ e $\lim_{x\to a_1} f(x,\alpha_1(x)) \neq \lim_{x\to a_1} f(x,\alpha_2(x))$

ou algum destes limites não existe, concluímos que não existe $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$. O mesmo se passa se

considerarmos curvas do tipo $x=\beta_1(y)$ e $x=\beta_2(y)$ com $a_1=\beta_1(a_2)=\beta_2(a_2)$.

Para mostrarmos que $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = b$, em caso em que surge indeterminação quando em $f(x,y)$ substituímos x por a_1 e y por a_2, recorremos a uma das seguintes estratégias:

- utilizamos a definição;
- usamos o facto de $0 \leq |f(x,y) - b| \leq g(x,y)$ sendo g uma função para a qual é evidente que $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y) = 0$. Nesta situação, por enquadramento, conclui-se imediatamente que $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = b$

Exemplo:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Então $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

CONTINUIDADE

Uma função $f: Df \to \mathbb{R}$ diz-se contínua em $a \in Df$ (supomos, por simplicidade, que Df não contém pontos isolados) se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Diz-se que f é contínua se f for contínua em todos os pontos do seu domínio

Dada uma função $f: Df \to \mathbb{R}$, se $a \in (Df)' \setminus Df$ (denotando $(Df)'$ o derivado de Df), dizemos que f admite <u>prolongamento contínuo</u> a <u>a</u> se existe e é finito $\lim_{x\to a} f(x)$.

A função <u>prolongamento (contínuo) de</u> f é:

$$\tilde{f}: Df \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ \lim_{x\to a} f(x) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

<u>FUNÇÕES VETORIAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS</u>

Seja $f: Df \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $Df \subseteq \mathbb{R}^n$, uma função.

Se $m=1$ dizemos que a função é <u>escalar</u> e se $m>1$ dizemos que a <u>função</u> é <u>vetorial</u>.

No caso em que $m>1$, temos

$$f: Df \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$
$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

sendo $f_i: Df \to \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$, funções escalares.

Designamos as funções f_i por <u>funções componentes de</u> f.

<u>LIMITES DE FUNÇÕES VETORIAIS</u>

Seja $f: Df \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função.
$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

Diz-se que <u>f tem limite</u> $B = (b_1, \ldots, b_m)$ <u>quando</u> <u>$X = (x_1, \ldots, x_n)$</u> <u>tende para</u> <u>$A = (a_1, \ldots, a_n)$</u> (sendo $A \in (Df)'$) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall X \in Df \quad 0 < \|X - A\| < \delta \Longrightarrow \|f(X) - B\| < \varepsilon$$

e escreve-se $\lim\limits_{X \to A} f(X) = B$.

Mostra-se que

$$\lim_{X \to A} f(X) = B \iff \begin{cases} \lim\limits_{X \to A} f_1(X) = b_1 \\ \vdots \\ \lim\limits_{X \to A} f_m(X) = b_m . \end{cases}$$

Então, se não existir o limite, quando $X \to A$, de uma das funções componentes, não existe o limite, quando $X \to A$, de f.

<u>CONTINUIDADE DE FUNÇÕES VETORIAIS</u>

Diz-se que <u>f é contínua em $A \in Df$</u> se $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A)$ (uma vez mais, supomos que Df não tem pontos isolados. Diz-se que f é <u>contínua</u> se f for contínua em todos os pontos de Df.

É imediato que, dado $A \in Df$,

$$f \text{ contínua em } A \iff \begin{cases} f_1 \text{ contínua em } A \\ \vdots \\ f_m \text{ contínua em } A \end{cases}$$

Assim, se uma das funções componentes de f for descontínua, a função f é descontínua.