

Nome: _____ Número: _____

IMPORTANTE: A duração do teste é de 2 horas. Não é permitido o uso de quaisquer materiais de apoio. Nos exercícios de escolha múltipla, cada resposta certa conta 0,75 valores e cada resposta errada desconta 0,25 valores. A cotação do último exercício é 2 valores. Nos restantes exercícios a cotação de cada alínea é 0,75 valores.

I. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ A regra $(A, k) \mapsto \begin{cases} 0, & [0, k] \subseteq A \\ 1, & [0, k] \subseteq \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$ define uma função $f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

☐ ☐ A regra $(m, n) \mapsto \begin{cases} \frac{n}{m}, & m > 0 \\ \frac{m}{n}, & n > 0 \end{cases}$ define uma função $f: (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{Q}$.

II. Considere as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dadas por $f(n) = \begin{cases} -n, & n \text{ divide } 10 \\ n^2, & n \text{ não divide } 10 \end{cases}$ e $g(m) = (-1)^{3m}$.

(a) Tem-se $f^{-1}(\{-5, -7, 8, 16\}) =$

(b) Tem-se $f(\{2, 3\}) =$

(c) A função composta $g \circ f$ é dada por:

(Na alínea (c) indique em particular o domínio e o conjunto de chegada.)

III. Considere a função $f: \mathcal{P}(\{1, 2\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ definida por $f(X) = X \cup \{3\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ f é sobrejectiva.

☐ ☐ f não é injectiva.

IV. Indique a função inversa da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$.

V. Considere a relação $R = \{(b, d), (a, b)\}$ em $A = \{a, b, c, d\}$.

(a) A menor relação reflexiva em A que contém R é

(b) A menor relação simétrica em A que contém R é

(c) A menor relação transitiva em A que contém R é

VI. Seja \sim a relação de equivalência em $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$$

Indique as seguintes classes de equivalência em extensão:

(a) $[(1, 4)] =$

(b) $[(2, 3)] =$

(c) $[(2, 2)] =$

VII. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe uma relação de equivalência \sim em A tal que
$A/\sim = \{\{(1, 4), (2, 5)\}, \{(2, 4), (3, 4), (1, 5)\}, \{(3, 5)\}\}.$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe uma relação de equivalência \sim em A tal que
$A/\sim = \{\{(1, 4), (2, 5)\}, \{(2, 4)\}\}.$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe uma relação de equivalência em A tal que
$[(1, 4)] = \{(1, 5), (2, 4), (3, 5)\}.$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe uma relação de equivalência em A tal que
$[(1, 4)] = \{(1, 4), (1, 5)\}.$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Existe uma relação de equivalência em A tal que
$[(1, 4)] = \{(1, 4), (2, 5)\}$ e $[(2, 5)] = \{(2, 5), (3, 5)\}.$ |

VIII. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(\{a, b, c, d, e, f\}, \preceq)$ em que

$$\preceq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, c), (a, f), (b, a), (b, c), (b, d), (b, f), (c, f), (d, c), (d, f), (e, c), (e, f)\}.$$

(a) Indique o diagrama de Hasse de $(\{a, b, c, d, e, f\}, \preceq)$:

(b) Indique os majorantes de $\{a, c, e\}$:

(c) Indique os elementos minimais de $(\{a, b, e\}, \preceq)$:

IX. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras (V) e quais são falsas (F):

V F

☐ ☐ Não existe nenhuma árvore com um trilha fechado não trivial.

☐ ☐ Não existe nenhum grafo tal que o produto dos graus dos vértices é ímpar.

X. Mostre por indução que para todo o número natural $n \geq 1$, $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ tem n^2 elementos.