1. Considere a EDP de 1^a ordem de coeficientes constantes $au_x + bu_y + cu = d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.
   (a) Use a mudança de variável $s = ax + by, \quad t = -bx + ay$ para transformar a EDP dada na equação $(a^2 + b^2)w_s + cw = d$.
   (b) Resolva e equação da alínea anterior e mostre que a solução da EDP dada, para $c \neq 0$, é:
   $$u(x, y) = \frac{d}{c} + f(-bx + ay)e^{-\frac{c}{a^2+b^2}(ax+by)}$$
2. Considere a EDP $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Escreva a EDP nas coordenadas $s = x, \ \ t = x - y$.
   (b) Determine a solução geral da EDP.
3. Considere a equação de onda
   $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$
   com $(x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in C^2(\mathbb{R}), \quad c \neq 0$.
   (a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct)$ é solução da equação de onda, com $f \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrária.
   (b) Fazendo a substituição de variáveis $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, mostre que a solução geral da EDP é
   $$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$
   onde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ arbitrárias.
4. Considere a equação de onda a 3 dimensões espaciais:
   $$u_{tt} - c^2\nabla^2 u = 0,$$
   onde $u = u(\mathbf{x}, t)$ e $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_0^+$. Mostre que a chamada "função de onda plana"
   $$u(\mathbf{x}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)}$$
   é solução da equação de onda se $w^2 = -c^2 \parallel \mathbf{k} \parallel^2$, com $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ e $w > 0$.
5. Considere o problema
   $$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (t, x) \in \ ]0, \infty[\times\mathbb{R} \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$
   onde $\phi \in C(\mathbb{R})$. Mostre que tanto $u \equiv 0$ como
   $$u(t, x) = \frac{-x}{4t\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$
   são ambas solução do problema para $\phi \equiv 0$.
6. Considere a equação de difusão
   $$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$
   Considere funções da forma
   $$v(x, t) = \phi(\lambda(x, t)), \quad \text{com} \quad \lambda(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$
   (a) Mostre que v é solução de (2) sse ϕ satisfaz $\phi'' + 2\lambda\phi' = 0$.
   (b) Resolva a EDO anterior e mostre que
   $$v(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad \text{com} \quad \operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-r^2} dr$$
   é solução de (2).
   (c) Derivando $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$, mostre que
   $$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$
   é solução de (2).