

NOME:

NÚMERO:

1. (0,5 valores)

Indique a solução geral da EDO $y'' - 2y' + y = 0$.

R: A solução geral é $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$, com C_1, C_2 constantes.

Cálculos auxiliares:

O polinómio associado a EDO homogénea $y'' - 2y' + y = 0$ é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, que tem uma única raiz $\lambda = 1$. Assim, um SFS da EDO homogénea é $\{e^t, t e^t\}$ e a solução geral da EDO será

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

2. (0,5 valores)

Suponha-se que $y_1(t) = \cos 2t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções de uma EDO linear homogénea de ordem 2. Indique a solução dessa EDO verificando $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$

R: A solução é $y(t) = 4 \cos 2t - 2e^{-t}$.

Cálculos auxiliares:

A solução geral da EDO será

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 e^{-t}$$

pelo que $y'(t) = -2C_1 \sin 2t - C_2 e^{-t}$. Se $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$ tem-se que

$$2 = y(0) = C_1 + C_2, \quad 2 = y'(0) = -C_2$$

donde $C_2 = -2$ e $C_1 = 4$.

3. (1 valor)

A técnica de datação de antiguidades através do Carbono 14 baseia-se na propriedade de metade dos átomos iniciais de C14 se desintegrar ao fim de 5600 anos, sendo a taxa de desintegração proporcional ao número de átomos existente em cada instante.

No castelo de Winchester, em Inglaterra, existe uma mesa que muitos gostariam que tivesse sido a "Távola Redonda" do Rei Artur.

- (a) Se a mesa datar da época do Rei Artur, que teria vivido cerca de 500DC, qual a percentagem de C14 original presente na mesa actualmente?
- (b) Em 1976 a mesa foi analisada usando a técnica do C14 tendo sido encontrada 91.6% da quantidade original de C14. De quando data a mesa?

R: Este problema foi resolvido nas aulas, consulte os seus apontamentos.