UAlg
UNIVERSIDADE DO ALGARVE

Apontamentos de Análise Matemática I

Hermenegildo Borges de Oliveira

Outubro de 2008

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo, iremos introduzir os conceitos fundamentais usados no estudo de funções reais de variável real. Iremos também rever algumas funções elementares estudadas anteriormente. Para o estudo que iremos fazer, pressupomos que o leitor conhece o corpo dos números reais, bem como as operações algébricas entre os seus elementos.

1.1 Corpo dos números reais

Recordemos, que $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais, *i.e.*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

Este conjunto apareceu das necessidades naturais de contagem do Homem. No entanto, revelou-se insuficiente para a operação de subtracção entre números naturais, motivadas essencialmente pelas necessidades de comércio do Homem. Por exemplo, a equação

$$x + 2 = 1$$

é impossível de resolver no conjunto $\mathbb{N}$. Assim, nasceu o conjunto dos números inteiros, que, para além dos naturais, contém o 0 e os inteiros negativos. Denotamos este conjunto por $\mathbb{Z}$ e temos

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} .$$

Os conjuntos de números seguintes apareceram também pela impossibilidade de resolver equações no conjunto prévio. Assim, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ surge pela impossibilidade de resolver equações como

$$2x + 1 = 4$$

no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O conjunto $\mathbb{Q}$ contém, pois, todos os números inteiros, bem como todas as fracções, positivas ou negativas. Por fim, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, aparece pela impossibilidade de resolver algumas equações que envolvem potências no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Por exemplo, em $\mathbb{Q}$, é impossível de resolver a equação

$$x^3 = 2 .$$

A solução desta equação é a dízima infinita não periódica 1.414213562... que se denota por $\sqrt[3]{2}$. Estes números não podem ser escritos como fracções. Apenas conseguimos escrever, como fracções, dízimas infinitas periódicas como 0.3333333333... que, na forma de fracção, é $\frac{1}{3}$. Convém frisar que a sistematização deste conhecimento só foi feito algumas centenas de anos, senão mesmo milénios, depois do conhecimento ter sido adquirido e difundido. O prosseguimento do racicínio anterior, leva-nos a questionar sobre a impossibilidade de resolver a equações do tipo

$$x^2 + 1 = 0$$

em $\mathbb{R}$. De facto, para resolvermos esta equação, temos de a considerar num novo conjunto de números, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Este conjunto, além dos números reais, contém também os números designados imaginários. Um número imaginário é denotado por $a\,i$, onde a é um número real e i é definido por $i^2 = -1$. A forma geral de um número complexo é $z = x + yi$, onde x é a parte real do número complexo e y (número real) a sua parte imaginária. Os números complexos deram origem a uma das áreas mais bonitas da Análise Matemática, a Análise Complexa que, por falta de tempo, não poderá ser abordada no decorrer deste curso.

Os números racionais representam-se numa recta horizontal, orientada da esquerda para a direita e que se denomina por eixo numérico. O zero é esboçado a meio deste eixo, ficando os números negativos à equerda e os positivos à direita. Para fazermos a correspondência de cada ponto do eixo numérico a um número racional, temos de fixar uma unidade de medida. A representação dos irracionais pode ser feita à custa da representação de números racionais de referência a observações exteriores, por exemplo de cariz geométrico. De um modo mais simples, fazemos uma aproximação do irracional em questão por um racional.

Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ podem ser discretos ou contínuos. Por exemplo, o subconjunto dos naturais é discreto, embora com cardinalidade infinita, e representa-se, como vimos, por

$$\{1, 2, 3, \dots\}\,.$$

Os subconjuntos contínuos representam-se habitualmente por intervalos ou por reuniões destes. Por exemplo, $[a, b]$ representa o subconjunto de todos os números reais compreendidos entre a e b, isto é

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}\,.$$

Os números a e b são designados por limite inferior e superior, respectivamente, do intervalo. A notação fechada sobre os limites a e b indica que o intervalo contém este números e, por isso, se designa de intervalo fechado. A notação (a, b) indica que o intervalo é aberto, isto é que os limites inferior e superior do intervalo não fazem parte do conjunto considerado, isto é,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,.$$

Por vezes, os intervalos podem ser fechados num limite e abertos noutro. Por exemplo,

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}\,,$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}\,.$$

1.1.1 Módulo

No conjunto dos números reais, definimos o módulo, ou valor absoluto, de um número como sendo a distância desse número à origem. Na definição seguinte definimos este conceito analiticamente.

Definição 1.1.1 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Definimos o módulo, ou valor absoluto, de x do modo seguinte:*

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Na proposição seguinte, estabelecemos as primeiras proprieades do módulo as quais se demonstram a partir da definição anterior.

Proposição 1.1.1 *Seja $a \geq 0$. Temos:*

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a \Leftrightarrow x = \pm a$. *Em particular,* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \wedge x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;
3. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$.

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

As duas últimas propriedades da proposição anterior, são, ainda, válidas no caso de desigualdades estritas, ou seja,

$$|x| < a \Leftrightarrow x > -a \wedge x < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

e

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a\,.$$

Proposição 1.1.2 *Seja $x\,,\ y \in \mathbb{R}$. Temos:*

1. $|xy| = |x|\,|y|$;
2. *Se* $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$.

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

A última propriedade da proposição anterior, designa-se por desigualdade triangular, porque, quando generalizada a dimensões superiores, afirma que o comprimento de um lado qualquer de um triângulo é menor ou igual do que a soma dos comprimentos dos outros dois.

1.2 Generalidades sobre funções

Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. Chamamos **correspondência** de $\mathbb{A}$ para $\mathbb{B}$ a qualquer processo que a um elemento de $\mathbb{A}$ faz relacionar outro de $\mathbb{B}$. Nesta condições, o conjunto $\mathbb{A}$ designa-se por **conjunto de partida** e $\mathbb{B}$ o **conjunto de chegada**.

Definição 1.2.1 *Uma **função** é uma correspondência entre dois conjuntos, que a cada elemento de um desses conjuntos, digamos $\mathbb{A}$, faz corresponder um único elemento do outro, digamos $\mathbb{B}$.*

As funções são, habitualmente, denotadas por letras minúsculas, por exemplo f, g, h, etc. O subconjunto de $\mathbb{A}$ onde uma função, digamos f, está definida designa-se por **domínio da função** e denota-se por $\mathbb{D}_f$. O subconjunto de $\mathbb{B}$ onde a função f toma valores designa-se por **contra-domínio da função** e denota-se por $\mathbb{D}'_f$. Aos elementos do domínio de uma função chamamos **objectos** e os elementos do contra-domínio designam-se por **imagens**. Se denotarmos uma função por f, os objectos são habitualmente denotados pelas letras x, y, z, etc. e as respectivas imagens por $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$, etc. Dizemos que uma **função** é **real**, se todos os valores que assume são números reais e diz-se **de variável real**, se o seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Existem diferentes formas de representar uma função. O **diagrama sagital** ou a **tabela de entradas** são os mais indicados para funções cujos domínios e contra-domínios sejam conjuntos finitos.

Exemplo 1.2.1 *Considere a função f tal que a cada elemento do conjunto de partida $\mathbb{A} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ faz corresponder um elemento do conjunto de chegada $\mathbb{B} = \{\bigcirc, \square, \triangle\}$ da forma seguinte:*

$$\alpha \mapsto \square, \qquad \beta \mapsto \triangle, \qquad \gamma \mapsto \square, \qquad \delta \mapsto \bigcirc.$$

a) Indique o domínio e o contra-domínio de f.
b) Faça a representação de f por meio de um diagrama sagital.
c) Faça a representação de f por meio de uma tabela de entradas.

Existem situações em que conseguimos encontrar uma única expressão através da qual podemos relacionar qualquer objecto no domínio da função com a correspondente imagem no contra-domínio. Esta forma para representar as funções é muito útil, não só como simplificação da escrita, mas também por impossibilidade de escrever relações entre todos os objectos e imagens correspondentes quando o domínio ou o contra-domínio são conjuntos com cardinalidade infinita. À expressão que nos permite representar assim uma função, designamos por **expressão designatória** da função. Por exemplo, a expressão designatória $f(x) = 2x$ representa a função que a cada objecto x faz corresponder o seu dobro.

Exemplo 1.2.2 *Considere a função f tal que a cada elemento do conjunto de partida $\mathbb{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ faz corresponder um elemento do conjunto de chegada $\mathbb{B} = \{0, 1, 4\}$ da forma seguinte:*

$$-2 \mapsto 4, \qquad -1 \mapsto 1, \qquad 0 \mapsto 0, \qquad 1 \mapsto 1, \qquad 2 \mapsto 4,$$

Indique uma expressão designatória possível para a função f.

A expressão designatória vai ser a forma mais comum de representarmos uma função e, sempre que não se disser nada em contrário, será esta a forma que iremos considerar. Nesta representação, vamos considerar todas as funções com conjuntos de partida e de chegada iguais a $\mathbb{R}$. Assim escrevemos para uma função qualquer f:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x); \end{array}$$

onde $f(x)$ indica a expressão designatória da função. Sempre que não haja ambiguidade na escrita, escrevemos simplesmente a expressão designatória de $f(x)$. Convém referir que, nesta representação, se faz um pequeno abuso de escrita. O domínio da função não é necessariamente igual ao seu conjunto de partida, assim como o contra-domínio pode ser diferente do conjunto de chegada. Assim, aquando do estudo de uma função representada desta forma, o primeiro procedimento a fazer é indicar qual o domínio de validade da função.

Exemplo 1.2.3 *Determine o domínio e o contra-domínio das funções representadas por* $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = x^2$.

Definição 1.2.2 *Sejam* f_1, f_2 *duas funções reais de variável real com domínios* $\mathbb{D}_{f_1}$ *e* $\mathbb{D}_{f_2}$, *respectivamente. Chama-se* ***função soma*** *de* f_1 *com* f_2 *à função denotada por* $f_1 + f_2$ *e que está definida em* $\mathbb{D}_{f_1} \cap \mathbb{D}_{f_2}$ *por:*

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Deforma análoga, se define, em $\mathbb{D}_{f_1} \cap \mathbb{D}_{f_2}$, *a* ***função diferença*** $f_1 - f_2$, *a* ***função produto*** $f_1\, f_2$ *e a* ***função quociente*** f_1/f_2, *esta última apenas nos pontos* $x \in \mathbb{D}_{f_2}$ *tais que* $f_2(x) \neq 0$, *respectivamente, por:*

$$(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x), \qquad (f_1 \times f_2)(x) = f_1(x) \times f_2(x), \qquad \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

As funções vão ser representadas num **referencial cartesiano**[1], *i.e* num sistema de dois eixos ortogonais com a mesma unidade de medida, um horizontal orientado da esquerda para a direita e outro vertical orientado de baixo para cima. O eixo horizontal designa-se por **eixo das abcissas** ou eixo dos xx e o vertical por **eixo das ordenadas** ou eixo dos yy. Neste sistema de eixos qualquer função será representada por pontos (x, y), onde para cada objecto x, y será a respectiva imagem por meio de f, *i.e.* $f(x)$. Deste modo, o referencial cartesiano também é denominado por **sistema de eixos coordenados**. O ponto (x, y) será designado um ponto de coordenadas de abcissa x e ordenada y. Ao ponto onde os dois eixos se intersectam fazemos corresponder os zeros de ambos os eixos e, no plano, este ponto de intersecção designa-se por **origem do referencial cartesiano**.

Definição 1.2.3 *O* ***gráfico de uma função****, digamos* f, *esboçado num referencial cartesiano consiste no conjunto de todos os pontos do plano correspondentes a pares* (x, y), *com* $y = f(x)$ *e para* $x \in \mathbb{D}_f$. *Denotamos o gráfico de uma função* f *por* $Gra(f)$ *e representá-mo-lo por:*

$$Gra(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), \quad x \in \mathbb{D}_f\right\}.$$

[1]O nome deve-se ao filósofo, e também matemático, francês René Descartes (1596-1650).

Observemos que para os propósitos deste curso o que interessa é uma aproximação do gráfico da função, aquilo que denominaremos por esboço, e não o gráfico mais ou menos exacto obtido por uma calculadora gráfica ou algum programa computacional.

A análise geométrica do esboço do gráfico de uma função vai permitir-nos tirar muitas conclusões sobre a própria função. Por exemplo, podemos dizer que uma correspondência é uma função, se qualquer recta paralela ao eixo dos yy intersectar o gráfico da correspondência num só ponto.

Exemplo 1.2.4 *Faça a representação gráfica das funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$.*

No que se segue, estamos a supor que f é uma função real de variável real. O conjunto de partida é $\mathbb{A}$, o conjunto de chegada é $\mathbb{B}$, o domínio é $\mathbb{D}_f$ e o contra-domínio é $\mathbb{D}'_f$.

Definição 1.2.4 *Diz-se que um ponto $x \in \mathbb{D}_f$ é um* ***zero*** *ou uma* ***raiz*** *da função f, se $f(x) = 0$.*

Se uma função f tem um zero num ponto $x = a$, $f(a) = 0$ e então o seu gráfico intersecta o eixo dos xx no ponto $(a, 0)$.

Exemplo 1.2.5 *Determine os zeros das funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x - 4$.*

Definição 1.2.5 *Diz-se que f é uma* ***função injectiva****, se quaisquer dois objectos distintos, digamos x_1 e x_2, de $\mathbb{D}_f$ tiverem imagens distintas, isto é, se*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

De forma equivalente, podemos dizer que f é injectiva se imagens iguais corresponderem ao mesmo objecto

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Em termos gráficos, verificamos que uma função f é injectiva, se qualquer recta paralela ao eixo dos xx intersecta o gráfico de f em apenas um ponto.

Exemplo 1.2.6 *Verifique se as funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ são injectivas.*

Definição 1.2.6 *Diz-se que f é uma* ***função sobrejectiva****, se cada elemento do conjunto de chegada de f for a imagem de, pelo menos, um elemento do domínio de f, isto é,*

$$\forall\, y \in \mathbb{B} \quad \exists\, x \in \mathbb{D}_f : y = f(x).$$

Exemplo 1.2.7 *Verifique se as funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ são sobrejectivas.*

Esta definição diz-nos que uma função é sobrejectiva, se o contra-domínio coincidir com o conjunto de chegada, isto é, se $\mathbb{D}'_f = \mathbb{B}$. Uma **função** que seja injectiva e sobrejectiva, diz-se **bijectiva**. Em termos da notação matemática, uma função f diz-se bijectiva, se

$$\forall\, y \in \mathbb{B} \quad \exists^1\, x \in \mathbb{D}_f : y = f(x).$$

Exemplo 1.2.8 *Pelo que foi resolvido nos Exercícios Exemplo 1.2.6 e 1.2.7, diga se as funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ são bijectivas.*

Definição 1.2.7 *Diz-se que f é uma **função par**, se para cada $x \in \mathbb{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. A **função** f é **ímpar**, se para cada $x \in \mathbb{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.*

No caso de existir algum $x \in \mathbb{D}_f$ tal que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, dizemos que a função não é par nem ímpar. Num referencial cartesiano, uma função par é simétrica relativamente ao eixo dos yy e uma função ímpar é simétrica relativamente à origem do referencial. Esta última noção quer dizer que existem pontos do gráfico da função diametralmente opostos, mas equidistantes, à origem do referencial.

Exemplo 1.2.9 *Estude as funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$ quanto à paridade.*

Definição 1.2.8 *Sejam f e g duas funções reais de variáveis reais tais que $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{D}'_g$. Define-se a composição das funções, f com g, à função que a cada elemento $x \in \mathbb{D}_g$ faz corresponder um único elemento no conjunto de chegada de f. Denotamos a composição de f com g por $f \circ g$, lê-se f após g e define-se por*

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right].$$

A composição de funções é associativa, isto é, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para quaisquer funções f, g e h. No entanto, não é comutativa, isto é, existem funções f e g tais que $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo 1.2.10 *Considere a função $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$. Determine expressões analíticas para as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.*

1.3 Estudo das funções

Definição 1.3.1 *Diz-se que uma função real de variável real f é **monótona crescente** num subconjunto D de $\mathbb{D}_f$, se tiver $f(x_1) \leq f(x_2)$ para quaisquer $x_1,\ x_2 \in D$ tais que $x_1 \leq x_2$, isto è:*

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \forall\ x_1,\ x_2 \in D.$$

*Dizemos que f é **monótona decrescente** em $D \subseteq \mathbb{D}_f$, se tiver $f(x_1) \geq f(x_2)$ para quaisquer $x_1,\ x_2 \in D$ tais que $x_1 \leq x_2$, isto è:*

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \qquad \forall\ x_1,\ x_2 \in D.$$

No caso de termos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad \forall\ x_1,\ x_2 \in D,$$

dizemos que f é **monótona crescente em sentido estrito**. De forma análoga, se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \qquad \forall\ x_1,\ x_2 \in D,$$

dizemos que f é **monótona decrescente em sentido estrito**. Sempre que não se diga mais nada sobre a monotonia, subentende-se que estamos a falar de monotonia no sentido da definição anterior, o que muitas vezes e para a distinguir da monotonia estrita nos referimos como sendo **monotonia em sentido lato**. Sempre que não se faça menção ao subconjunto $\mathbb{D}_f$ onde f é monótona, deve entender-se que f satisfaz essa propriedade em todo o seu domínio. No que se segue, estamos a supor que f é uma função real de variável real. O conjunto de partida é $\mathbb{A}$, o conjunto de chegada é $\mathbb{B}$, o domínio é $\mathbb{D}_f$ e contra-domínio é $\mathbb{D}'_f$.

Definição 1.3.2 *Diz-se que f é uma **função minorada**, se $f(\mathbb{D}_f)$ é um conjunto minorado,* i.e., *se*

$$\exists\ m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m \quad \forall\ x \in \mathbb{D}_f.$$

*A **função** f é **majorada**, se $f(\mathbb{D}_f)$ é um conjunto majorado,* i.e.,

$$\exists\ M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall\ x \in \mathbb{D}_f.$$

No caso da função f ser minorada e majorada, i.e.,

$$\exists\ m,\ M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall\ x \in \mathbb{D}_f,$$

*dizemos que a **função** é **limitada**.*

Aos valores m e M designamos, respectivamente, por **minorante** e **majorante** de f. Como se observa desta definição, uma função pode ter vários, ou mesmo infinitos, minorantes e ou majorantes. Chama-se **ínfimo** da função f, e denota-se por $\inf f(x)$, ao maior dos minorantes de f. Chama-se **supremo** da função f, e denota-se por $\sup f(x)$, ao menor dos majorantes de f. Observe-se que os minorantes, majorantes, ínfimo e supremo de f dizem respeito ao conjunto $f(\mathbb{D}_f)$. Se a função f não é minorada, dizemos que o seu ínfimo é $-\infty$. No caso de não ser majorada, diz-se que o seu supremo é $+\infty$. Quando o ínfimo ou o supremo forem valores que a função f assume no domínio $\mathbb{D}_f$, dizemos, respectivamente, que f tem um **máximo** ou um **mínimo** no seu domínio $\mathbb{D}_f$. Neste caso, denotamos o mínimo ou o máximo, respectivamente, por $\min f(x)$ ou $\max f(x)$. Todas esta noções podem ser adaptadas para qualquer subconjunto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{D}_f$, fazendo apenas referência nas notações que estas quantidades são obtidas em $\mathbb{D}$. Neste sentido uma função pode ter vários mínimos ou máximos consoante os diferentes subdomínios que estamos a considerar. Assim, este **máximos** e **mínimos** dizem-se **relativos** ao subdomínio que se considera. Ao maior dos vários máximos relativos, chamamos **máximo absoluto**. Ao menor dos mínimos relativos, chama-se **mínimo absoluto**.

Proposição 1.3.1 *Seja f uma função real de variável real. A função f é limitada se e só se*

$$\exists\ C \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq C \quad \forall\ x \in \mathbb{D}_f.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Definição 1.3.3 *Seja f uma função real de variável real injectiva com domínio $\mathbb{D}_f$. Designa-se por **função inversa** da função f à função que a cada imagem $y = f(x)$ faz corresponder o respectivo objecto x que lhe deu origem.*

A noção de função inversa está intimamente ligada à propriedade de função injectiva. Se esta não se verificar, não existe função inversa. Se f não fosse injectiva, então existiriam dois objectos $x_1 \neq x_2$ em $\mathbb{D}_f$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Neste caso, admitindo que era possível inverter a função, então obteríamos uma correspondência que ao mesmo objecto $y = f(x_1) = f(x_2)$ fazia relacionar duas imagens distintas x_1 e x_2. No entanto esta correspondência não é uma função como se depreende da Definição 1.2.1

Definição 1.3.4 *Seja* $\mathbb{D}$ *um subconjunto do domínio* $\mathbb{D}_f$ *de uma função* f. *Designa-se por* ***imagem*** *ou* ***transformado*** *do conjunto* $\mathbb{D}$ *por meio de* f, *e denota-se por* $f(\mathbb{D})$, *ao conjunto de todos os valores que* f *assume em pontos* $x \in \mathbb{D}$, i.e.

$$f(\mathbb{D}) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\ x \in \mathbb{D} : y = f(x)\}.$$

Representando a função f da definição anterior por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x), \end{array}$$

então a função inversa da função f representa-se por

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x = f^{-1}(y), \end{array} \qquad \text{tal que} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{e} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Se o domínio da função f é $\mathbf{D}_f$ e o contra-domínio da função f é $\mathbf{D}'_f$, então

$$\mathbf{D}_{f^{-1}} = f(\mathbf{D}_f) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{D}'_{f^{-1}} = \mathbf{D}_f,$$

onde $f(\mathbf{D}_f)$ é o conjunto transformado por meio de f do conjunto $\mathbf{D}_f$.

Exemplo 1.3.1 *Considere as funções* $f(x) = 2x + 1$ *e* $g(x) = x^2$.
a) Justifique se é possível ou não inverter estas funções em todo o seu domínio. Em caso negativo, indique o maior subdomínio possível onde é possível inverter cada uma.
b) Obtenha expressões analíticas para essas funções inversas.

O gráfico da função inversa f^{-1}, pode-se obter a partir do gráfico da função f fazendo uma simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares (recta $y = x$).

Proposição 1.3.2 *Seja* f *uma função real de variável real. Se* f *é uma função monótona e injectiva, então a função inversa* f^{-1} *também é estritamente monótona, crescente ou decrescente, consoante* f.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Observemos que o facto da função f ser injectiva implica que a sua monotonia é estrita.

Proposição 1.3.3 *Seja* f *uma função real de variável real. Se* f *é uma função ímpar e injectiva, então a função inversa* f^{-1} *também é ímpar.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 1.3.2 *Considere as funções do Exercício Exemplo 1.3.1. A partir dos gráficos destas funções, esboce os gráficos das funções inversas aí encontradas.*

1.4 Funções elementares

Nesta secção vamos introduzir algumas das funções que mais comummente se utilizam, tanto em Matemática como nas outras ciências fundamentais e também nas aplicações. Estas funções são designadas por funções elementares no sentido que se podem representar por uma soma finita de expressões designatórias. Observemos que as funções que aqui iremos estudar são funções reais de variável real. Deixaremos para outro capítulo o estudo das funções exponenciais e trigonométricas, bem como as suas inversas.

1.4.1 Funções polinomiais

Os exemplos mais simples de funções que começamos por estudar, englobam a grande classe de funções que se designa por polinómios.

Definição 1.4.1 *Um* ***polinómio*** *é uma função que é definida por uma equação da forma:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0;$$

onde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}_0$.

As letras $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ são constantes reais e designam-se por **coeficientes do polinómio**. O número inteiro não negativo n denomina-se **grau do polinómio**. No âmbito deste curso, vamos designar os polinómios por **funções polinomiais** e iremos usar a notação habitual das funções:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Como a equação acima faz corresponder um valor $f(x)$ (ou $P(x)$) para cada valor de x, o domínio de f é todo $\mathbb{R}$. Contudo, o contra-domínio pode ser $\mathbb{R}$ ou qualquer seu subconjunto.

Exemplo 1.4.1 *Se* $n = 0$, *obtemos a denominada* ***função constante*** $f(x) = a_0$, *que comummente se denota por*

$$f(x) = c$$

e para a qual se tem $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{D}'_f = \{c\}$.

Exemplo 1.4.2 *Se* $n = 1$, *obtemos a denominada* ***função afim***, *ou também designada* ***função linear***, $f(x) = a_1 x + a_0$, *que habitualmente se denota por*

$$f(x) = ax + b.$$

O gráfico da função afim é uma recta de equação $y = ax + b$, *onde* a *nos indica o declive da recta e a ordenada na origem é* b.

Se $a = 0$, *recuperamos a função constante* $f(x) = b$.

Se $a \neq 0$, *tem-se* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{D}'_f = \mathbb{R}$. *Neste caso, a função é monótona estritamente crescente ou decrescente, consoante* $a > 0$ *ou* $a < 0$, *respectivamente.*

No caso de $a \neq 0$, *o zero da função é dado por* $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 1.4.3 *No caso $n = 2$, obtemos a designada* ***função quadrática*** $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$*, que usualmente se denota por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Se $a = 0$, recuperamos a função afim $f(x) = ax + b$. Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática é uma parábola de eixo vertical e estritamente monótona em qualquer um dos intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \quad e \quad \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right).$$

O ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ é o ponto onde a função quadrática atinge o máximo ou o mínimo e designa-se por ***vértice da parábola****.*

Se $a > 0$, $\mathbb{R}'_f = \left[c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$ e a função atinge o seu mínimo (absoluto) no ponto $x = -\frac{b}{2a}$ de valor $y = c - \frac{b^2}{4a}$ - neste caso, dizemos que o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima.

Se $a < 0$, $\mathbb{R}'_f = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ e a função atinge o seu máximo (absoluto) no ponto $x = -\frac{b}{2a}$ de valor $y = c - \frac{b^2}{4a}$ - neste caso, dizemos que o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo.

Em qualquer um dos casos, $a < 0$ ou $a > 0$, tem-se $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

Para averiguar da existência e eventual cálculo dos zeros de uma função quadrática, tem muito interesse a relação seguinte entre os coeficientes da função, designada por ***discriminante****:*

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

No caso de $\triangle < 0$, a função não tem zeros.

Se $\triangle = 0$ a função tem apenas um zero que é dado por $x = -\frac{b}{2a}$.

Se $\triangle > 0$ a função tem dois zeros que são dados por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \equiv \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \equiv \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.4.2 Funções racionais

No sentido mais abrangente possível, função racional é qualquer função em cuja expressão designatória apenas estão envolvidas operações racionais. Assim, as funções polinomiais, que estudamos na secção anterior, são os casos mais simples das funções racionais. A extensão natural das operações algébricas entre números reais aos polinómios resulta, com excepção das divisões que não são exactas, na origem de novos polinómios. À divisão de polinómios que não der outro polinómio, vamos designar por **função racional** propriamente dita.

Definição 1.4.2 *Consideremos dois polinómios não divisíveis entre si:*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad e \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m;$$

onde n e m são dois inteiros não negativos, não necessariamente iguais. À função $R(x) = P(x)/Q(x)$, que à luz da notação das funções, denotamos por

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m},$$

*designamos por **função racional**.*

Como, em $\mathbb{R}$, não sabemos dividir por 0, a função $f(x) = P(x)/Q(x)$ para estar bem definida, isto é, para ser uma função, tem de se garantir que $Q(x) \neq 0$. Deste modo, o domínio de f pode não ser todo $\mathbb{R}$. Mais exactamente,

$$\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \equiv \left\{x \in \mathbb{R} : b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m \neq 0\right\}.$$

Os zeros da função racional são dados pelos zeros da função polinomial $P(x)$ (numerador da fracção).

A função tem sinal positivo nos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$, ou $P(x) < 0$ e $Q(x) < 0$. Tem sinal negativo no caso contrário, isto é, quando $P(x)$ e $Q(x)$ têm sinais contrários.

Exemplo 1.4.4 *Considere a função*

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Determine o domínio de f em função do valor de n.
b) Determine o contra-domínio de f em função do valor de n.
c) Verifique se f tem zeros. Justifique.
d) Esboce os gráficos de f quando $n = 1$, n é um número ímpar qualquer e n é um número par qualquer.
e) O que pode dizer sobre a injectividade e sobrejectividade da função f.
f) Estude a função dada relativamente à paridade.

1.4.3 Funções inversas

Antes de introduzirmos as inversas das funções até agora estudadas, convém recordar que intimamente ligada com a noção de função inversa está a noção de função injectiva. Definimos a função inversa apenas de funções injectivas. No entanto, uma função poderá não ser injectiva em todo o seu domínio, mas apenas em algum subconjunto estritamente contido no seu domínio. Neste caso, podemos restringir a função a esse subdomínio e aí considerar a sua inversa.

Para obtermos a inversa de uma dada função (injectiva) f, resolvemos a equação

$$f(x) = y$$

em ordem a x. Como a função original é injectiva, a resolução desta equação, em ordem a x, dará origem a uma única expressão designatória em função de y, expressão essa que será nada mais que a expressão designatória da função inversa procurada. Como convencionamos o eixo dos xx como sendo o das abcissas e o dos yy como o das ordenadas, convém fazer uma mudança da variável y para a variável x e obtermos, assim, uma expressão designatória para $f^{-1}(x)$.

A função constante $f(x) = c$ não tem inversa, excepto se restringirmos o seu domínio a um único ponto.

A função linear $f(x) = ax + b$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, é invertível em todo o seu domínio $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ se e só se $a \neq 0$. Neste caso, a expressai designatória da função inversa é dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}.$$

No caso de polinómios de grau superior ou igual a 2, quando fazemos o mesmo procedimento para obter as suas inversas, deparamo-nos com o problema de as funções encontradas eventualmente já não serem funções racionais. Em muitos casos, as expressões designatórias das funções inversas vão fazer envolver, não só operações racionais, mas também operações irracionais. Nestes casos, as funções encontradas pertencem à grande classe de **funções irracionais**. Deste modo, as funções irracionais surgem por uma necessidade de encontrar as inversas de funções racionais.

A função quadrática $f(x) = x^2$, é invertível em $[0, +\infty)$ e a expressão designatória da sua inversa é dada por

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Exemplo 1.4.5 *Considere a função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$ fixo.*
a) Determine a inversa da função f e indique o seu domínio de validade em função de n.
b) A partir do gráfico de f, esboce o gráfico de f^{-1}.

Uma **função irracional** será, então, uma função representada por

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)},$$

onde $R(x)$ é uma função racional. Mais geralmente, designamos por **função irracional** qualquer função cuja expressão designatória resulta de aplicarmos operações irracionais a uma ou mais das funções por último referidas.

1.5 Exercícios

1. Determine os conjuntos de soluções das (in)equações seguintes:

$$\text{a) } |x-3| = 2|x|\,; \qquad \text{b) } |2x+1| < 1\,; \qquad \text{c) } |x-1| < |x+1|\,;$$

$$\text{d) } |x^2-1| = 3\,; \qquad \text{e) } |2x-5| > x+1\,; \qquad \text{f) } |x^2-4| = x+2\,.$$

2. Determine $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-y)$ e $f\left(\frac{1}{x}\right)$ no caso de $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

3. Determine $f(x+1)$ e $f\left(\frac{1}{x}\right)$ se $f(x-1)=x^2$.

4. Determine a função linear f sabendo que $f(-1)=2$ e $f(2)=-3$.

5. Determine a função quadrática f sabendo que $f(0)=1$, $f(1)=0$ e $f(3)=5$.

6. Considere as funções seguintes:
$$f(x)=1-x+x^2\,;\qquad g(x)=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}\,;\qquad h(x)=\frac{1+x}{1-x}\,;$$
$$i(x)=\frac{x+|x|}{2}\,;\qquad j(x)=x^2+\frac{1}{x}\,;\qquad k(x)=\sqrt{x-|x|}\,.$$
a) Determine o domínio de cada.
b) Determine o contradomínio de f, h e i.
c) Determine, caso existam, os zeros de cada.

7. Estude as funções seguintes quanto à paridade:
$$g(x)=1-x^2\,;\qquad h(x)=\frac{1+x}{1-x}\,;\qquad i(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\,;$$
$$j(x)=(1+x)(1-x)\,;\quad k(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\,;\quad l(x)=x^3+x^2\,.$$

8. Considere as funções seguintes:
$$f(x)=2x+3\,;\qquad g(x)=\frac{2}{x}\,;\qquad h(x)=x^3\,;$$
$$i(x)=\sqrt[3]{1-x^3}\,;\qquad j(x)=\sqrt{4-x^2}\,;\quad k(x)=\frac{1+x}{1-x}\,.$$
a) Estude estas funções quanto à injectividade e sobrejectividade.
b) Determine a função inversa e indique o maior domínio de validade de cada.

9. Recorrendo apenas ao gráfico de funções já conhecidas, esboce o gráfico das funções seguintes, assim como o das suas inversas no caso de existirem.

a) $f(x)=2x-5\,;$ b) $f(x)=x^3-3x+2$; c) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}\,;$

d) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\,;$ e) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}\,;$ f) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}\,;$

h) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,;$ i) $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)\,;$ j) $f(x)=x^4-2x+5\,.$

10. Para as funções do exercício anterior e recorrendo simplesmente à análise dos seus gráficos, indique, caso existam, o conjunto de majorantes, de minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

Capítulo 2

Sucessões numéricas

Neste capítulo, vamos considerar um caso particular de funções reais de variáveis reais que, pela sua importância em todas as áreas da Matemática, merece ser estudado num capítulo à parte.

2.1 Introdução

Definição 2.1.1 (Sucessão numérica) *Uma sucessão numérica infinita de termos reais é uma função de variável natural e com valores reais. Usando a escrita habitual para as funções, uma sucessão, digamos f, escreve-se da forma seguinte:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & f(n). \end{array}$$

Por simplicidade de escrita, iremos designar apenas por sucessão uma sucessão infinita de termos reais. O conjunto de partida da sucessão poderá ser qualquer subconjunto do conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ou, ainda, o conjunto dos inteiros não negativos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Os valores

$$f(1),\ f(2),\ \dots,\ f(n),\ \dots$$

denominam-se **termos da sucessão**: primeiro termo, segundo termo, ..., n-ésimo termo, ... O contra-domínio da função f denomina-se por **conjunto dos termos da sucessão**. Habitualmente os termos da sucessão são denotados por letras indexadas nos números naturais. Por exemplo, podemos denotar os termos da sucessão acima por

$$u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n,\ \dots .$$

Chama-se **termo geral da sucessão** à expressão designatória $f(n)$ e, usando a mesma notação indexada, é habitual denotá-lo por u_n. Cada termo da uma sucessão, digamos u_n, tem um termo sucessor, u_{n+1}, e, assim, podemos dizer que não existe um último termo da sucessão. As operações algébricas habituais dos números reais estendem-se naturalmente às sucessões. A **soma** e **diferença de** duas **sucessões** u_n e v_n definem-se, respectivamente, por:

$$(u+v)_n = u_n + v_n \quad \text{e} \quad (u-v)_n = u_n - v_n.$$

O **produto** e **quociente de** duas **sucessões** u_n e v_n define-se, respectivamente, por:

$$(u\,v)_n = u_n\,v_n \quad \text{e} \quad \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n} \; (v_n \neq 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N})\,.$$

2.1.1 Modos de designar uma sucessão

- **Ordenação**. Para designar uma sucessão, é habitual escrever ordenadamente uma quantidade suficiente de termos da sucessão, de modo a termos uma ideia do comportamento da sucessão. Por exemplo, a sucessão cujos três primeiros termos são 1, 3, 5, é escrita do modo seguinte:
$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ .$$

- **Fórmula**. A forma mais comum para designar uma sucessão, consiste em indicar uma fórmula por meio da qual se pode obter, para cada natural n, o correspondente n-ésimo termo. Por exemplo, a fórmula
$$u_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
permite-nos obter a sucessão seguinte de termos ordenados:
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ .$$
A fórmula
$$v_n = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$
designa a sucessão constante com todos os termos iguais a 1, e que, ordenada, se escreve
$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots\ .$$
Por vezes, duas ou mais fórmulas podem ser indicadas para designar a sucessão. Por exemplo, as fórmulas
$$u_{2n-1} = \frac{1}{n^2}, \quad u_{2n} = n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$
definem a sucessão cujos oito primeiros termos ordenados são
$$1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \frac{1}{9},\ 9,\ \frac{1}{16},\ 16,\ \ldots\ .$$
Isto é, a sucessão cujos quatro primeiros termos de ordem ímpar $(2n-1)$ são
$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots$$
e os quatro primeiros termos de ordem par $(2n)$ são
$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots\ .$$

- **Recorrência**. Outro modo de designar uma sucessão, consiste em indicar as instruções de como obter os termos sucessores conhecido um ou mais dos primeiros termos. Por exemplo, as fórmulas

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

definem a sucessão (de Fibonacci[1]) cujos oito primeiros termos ordenados são

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots\ .$$

Uma sucessão determinada por este processo, diz-se uma sucessão definida por recorrência.

Por simplicidade de escrita, denota-se qualquer sucessão por u_n, qualquer que seja a forma por que é definida.

2.2 Representação gráfica de uma sucessão

A representação gráfica de uma sucessão, num sistema de eixos cartesianos, faz-se do mesmo modo como para qualquer função. No eixo das abcissas indicamos os números naturais e no das ordenadas as correspondentes imagens por meio da sucessão (termos da sucessão). O **gráfico** de uma sucessão u_n é o conjunto de pontos discretos

$$\{(n, u_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 2.2.1 (`AULA TEÓRICA`) *Fazer a representação gráfica dos seis primeiros termos da sucessão*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.3 Princípio de indução matemática

O Princípio de Indução Matemática é um método de demonstração elaborado com base no Princípio de Indução Finita, frequentemente utilizado para provar que certas propriedades são verdadeiras para todos os números naturais. Para uma determinada afirmação matemática que dependa de um natural n, digamos $P(n)$, podemos enunciar este princípio do modo seguinte.

Se

1. $P(n)$ é verificada para $n = 1$;
2. $P(n)$ sendo verificada para $n = k$ implicar ser também verificada para o seu sucessor $n = k + 1$, com $k > 1$;

então a afirmação $P(n)$ é válida para todo o natural n.

[1] Leonardo Fibonacci (1170-1250), matemático italiano natural de Pisa.

O passo 1, em que se estabelece a propriedade para o primeiro dos números naturais, designa-se por **base de indução**. O passo 2 designa-se por **passo de indução**, em que se estabelece que, caso a propriedade se verifique, para um número natural k (**hipótese de indução**) então ela também é verificada para o número natural seguinte, $k+1$. A validade de $P(n)$ para todos os números naturais, depende essencialmente da possibilidade em provar que a observação da propriedade num natural n implica a verificação da mesma propriedade para o natural seguinte, $n+1$ (**passo de indução**). Se isso suceder, então podemos concluir a veracidade de $P(n)$ para todos os números naturais desde que o primeiro deles (o número 1) a verifique. Na realidade, a validade da propriedade para o primeiro natural (base de indução) implica a sua validade para o segundo (o número 2) e deste para o terceiro (o número 3), e assim sucessivamente, cobrindo-se deste modo a totalidade dos naturais, como peças de um dominó em linha, em que as quedas das sucessivas peças são provocadas umas a partir das outras após a queda da primeira peça. Por vezes, certas afirmações $P(n)$ só são verificadas a partir de um número natural $n_1 > 1$. Neste caso, temos de substituir, no passo 1, "$P(n)$ é verificada para n_1". De um modo sucinto, podemos enunciar o Princípio de Indução Matemática na forma seguinte.

Definição 2.3.1 (Princípio de indução matemática) *Se:*

1. *$P(n_1)$ é verificada;*
2. *$P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $n > n_1$;*

então $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_1$.

Exemplo 2.3.1 (AULA TEÓRICA) *Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que para todo o natural n a igualdade seguinte é verificada:*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2 \,.$$

2.4 Exemplos

Exemplo 2.4.1 (Progressão aritmética) *Uma progressão aritmética é uma sucessão cuja fórmula para o seu termo geral é*

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad n \in \mathbb{N},$$

*onde $r \neq 0$ é uma constante conhecida que se denomina **razão**.*

Este tipo de sucessões caracteriza-se por a diferença de quaisquer dois dos seus termos sucessivos ser constante:

$$u_{n+1} - u_n = r \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (r = constante \neq 0).$$

Deste modo, podemos definir tal sucessão por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r; \end{cases}$$

sendo a e $r \neq 0$ reais conhecidos.

Proposição 2.4.1 *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética u_n é dada por*

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Exemplo 2.4.2 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule a soma, S_{100}, dos 100 primeiros termos da progressão aritmética $u_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 2.4.3 (Progressão geométrica) *Uma progressão geométrica é uma sucessão cuja fórmula para o seu termos geral é*

$$u_n = u_1 r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*onde $r \neq 1$ é uma constante conhecida que se denomina **razão**.*

Esta sucessão caracteriza-se por o quociente entre quaisquer dois dos seus termos sucessivos ser constante:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (r = constante \neq 1).$$

Podemos, assim, definir tal sucessão também por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n r; \end{cases}$$

sendo a e $r \neq 1$ reais conhecidos.

Proposição 2.4.2 *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica u_n de razão $r \neq 1$ é dada por*

$$S_n = u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Exemplo 2.4.4 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão geométrica*

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.5 Sucessão limitada

Uma sucessão diz-se majorada, se o conjunto dos seus termos for majorado, isto é, se existir um real maior ou igual do que todos os termos da sucessão. Ou seja, u_n é uma **sucessão majorada**, se

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : u_n \leq L \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Uma sucessão diz-se minorada, se o conjunto dos seus termos for minorado, isto é, se existir um real menor ou igual do que todos os termos da sucessão. Ou seja, u_n é uma **sucessão minorada**, se

$$\exists\, l \in \mathbb{R} : u_n \geq l \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Uma sucessão diz-se limitada, se for majorada e minorada.

Definição 2.5.1 (Sucessão limitada) *Uma sucessão u_n é limitada, se*

$$\exists\ L,\ l \in \mathbb{R} : l \leq u_n \leq L \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2.5.1 (`AULA TEÓRICA`) *Verifique se as seguintes sucessões são limitadas:*

$$u_n = n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad e \quad v_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 2.5.1 *Uma sucessão u_n é limitada se e só se*

$$\exists\ C \in \mathbb{R}^+ : |u_n| \leq C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

2.6 Monotonia

Uma sucessão diz-se monótona crescente, se qualquer dos seus termos for não maior que o seu sucessor. Diz-se que uma sucessão é monótona decrescente, se qualquer dos seus termos for não menor que o seu sucessor. Uma sucessão diz-se, apenas, monótona, se for monótona crescente ou decrescente.

Definição 2.6.1 *Uma sucessão u_n diz-se **monótona crescente**, se*

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

*A sucessão u_n diz-se **monótona decrescente**, se*

$$u_n \geq u_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

No caso de termos

$$u_n < u_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

dizemos que u_n é uma **sucessão monótona estritamente crescente**. Se

$$u_n > u_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

diz-se que u_n é uma **sucessão monótona estritamente decrescente**. Quando houver necessidade de fazer distinção, referir-nos-emos à **monotonia** da definição anterior com sendo **em sentido lato**. As sucessões que não são monótonas, podem ser constantes ou oscilantes. Convém referir que, por vezes, a monotonia ou não de uma sucessão só se descortina após um número finito de termos. Neste caso, diremos que a sucessão é monótona a partir do termo da ordem (número natural, digamos p) em que se verifica a condição da definição. Em termos práticos, para se estudar a monotonia de uma dada sucessão, determinamos a diferença

$$u_{n+1} - u_n$$

e comparámo-la com 0. Se for maior do que 0, é monótona crescente, caso contrário é monótona decrescente. Existem casos em que se torna mais fácil determinar o quociente

$$\frac{u_{n+n}}{u_n}$$

e compará-lo com 1. Obviamente, aqui, este quociente só é possível se $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nesses casos, a sucessão é crescente se for maior do que 1 e decrescente se for menor.

Exemplo 2.6.1 (`AULA TEÓRICA`) *Estude as seguintes sucessões quanto à monotonia:*

$$u_n = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad e \quad v_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.7 Subsucessão

Uma subsucessão é uma sucessão cujo conjunto dos seus termos é um subconjunto do conjunto dos termos de dada sucessão. Para a definição de subsucessão, necessitamos de introduzir o conceito de composição de sucessões, que é um caso particular da composição de funções. Sejam u_n e v_n duas sucessões, a última das quais de termos naturais. Define-se a **composição das sucessões** u_n e v_n como sendo a sucessão $(u \circ v)_n$ que tem por termo de ordem k o termo de ordem $k = v_k$ da sucessão u_n. Ou seja,

$$(u \circ v)_k = u_{v_k}.$$

Definição 2.7.1 (Subsucessão) *Sejam u_n uma sucessão de termos reais e k_n uma sucessão de termos naturais estritamente crescente. A sucessão composta $(u \circ k)_n$ designa-se por subsucessão da sucessão u_n e o seu termo geral é denotado por u_{k_n}.*

Dada uma sucessão qualquer u_n de termos reais, podemos considerar sempre as seguintes subsucessões.

- Fazendo $k_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sucessão v_n de termo geral

  $$v_n = u_n.$$

  Isto é, toda a sucessão é subsucessão de si própria.

- Fazendo $k_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sucessão v_n de termo geral

  $$v_n = u_{2n}$$

  Portanto, podemos sempre considerar a subsucessão dos termos de ordem par.

- Fazendo $k_n = 2n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a subsucessão v_n de termo geral

  $$v_n = u_{2n-1}.$$

  Ou seja, podemos também sempre considerar a subsucessão dos termos de ordem ímpar.

Exemplo 2.7.1 (`AULA TEÓRICA`) *Determine duas subsucessões da seguinte sucessão*

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \; .$$

2.8 Sucessão convergente

Dizemos que uma **sucessão** u_n de termos reais **tende** para determinada quantidade A, finita ou não, se, a partir de determinada ordem (número natural), os termos da sucessão vão estar tão próximos de A quanto se queira. Convém ressalvar aqui o caso em que A é infinito e a proximidade de inifinito ser sempre um abuso de linguagem. Abreviadamente, podemos escrever

$$u_n \longrightarrow A.$$

No caso de A ser finito, isto é, um número real, dizemos que a sucessão u_n converge.

Definição 2.8.1 (sucessão convergente) *Uma sucessão u_n converge para $a \in \mathbb{R}$, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ e\ n > p\ ) \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

O real a da definição anterior chama-se **limite da sucessão** e, habitualmente, escrevemos

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a.$$

A definição de sucessão convergente anterior, pode ser traduzida do modo seguinte: a partir de certa ordem ($n > p$) os termos da sucessão vão estar tão próximos do limite ($|u_n - a| < \varepsilon$) quanto se queira ($\forall\ \varepsilon$). Para percebermos melhor este conceito, consideremos, por exemplo, a sucessão de números racionais seguinte que aproxima o irracional $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
&u_0 = 1\\
&u_1 = 1.4\\
&u_2 = 1.41\\
&u_3 = 1.414\\
&u_4 = 1.4142\\
&u_5 = 1.41421\\
&u_6 = 1.414213\\
&u_7 = 1.4142135\\
&u_8 = 1.41421356\\
&u_9 = 1.414213562\\
&\dots
\end{aligned}$$

Escolhamos, gora, $\varepsilon = 10^{-4}$ e vejamos, para este ε, a partir de que ordem n a definição anterior se verifica. Resolvendo,

$$|u_n - \sqrt{2}| < 10^{-4} \Leftrightarrow u_n > 1.414113562 \Rightarrow n \geq 4\,.$$

Deste modo, para o valor de $\varepsilon = 10^{-4}$, a definição anterior verifica-se a partir da ordem $n \geq p = 4$. Apesar de ser um indicativo, isto não prova nada. O importante é que para cada $\varepsilon > 0$ que se escolha, consigamos sempre encontrar uma ordem p a partir da qual a definição anterior seja verificada.

Exemplo 2.8.1 (`AULA TEÓRICA`) *Usando a definição, mostre que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

As **sucessões** que não são convergentes dizem-se **divergentes**. Caso particularmente importante das sucessões divergentes são aquelas que tendem para $+\infty$ ou $-\infty$. Uma sucessão tende para $+\infty$, se, a partir de certa ordem, os seus termos são tão grandes quanto se queira. De modo análogo, uma sucesão tende para $-\infty$, se, a partir de certa ordem, os seus termos são tão pequenos quanto se queira.

Definição 2.8.2 *Uma **sucessão** u_n **tende para** $+\infty$, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ e\ n > p\ ) \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Uma **sucessão** u_n **tende para** $-\infty$, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ e\ n > p\ ) \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Por extensão da noção de limite a $+\infty$ e $-\infty$, podemos escrever também

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty,$$

no caso da sucessão u_n tender para $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente.

Exemplo 2.8.2 (`AULA TEÓRICA`) *Usando a definição, mostre que*

$$\lim_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{2} = -\infty.$$

Uma sucessão u_n designa-se por um **infinitamente grande positivo**, se tender para $+\infty$:

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

Diz-se que é um **infinitamente grande negativo**, se tender para $-\infty$:

$$u_n \longrightarrow -\infty.$$

Chama-se **infinitésimo**, ou **infinitamente pequeno**, a uma sucessão u_n que tenda para 0:

$$u_n \longrightarrow 0.$$

O limite de uma subsucessão de uma sucessão é designado por **sublimite** dessa sucessão.

Definição 2.8.3 *O maior dos sublimites de uma sucessão u_n denomina-se **limite superior** e definimo-lo por:*

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \sup\{a : a\ \textit{é sublimite de}\ u_n\}.$$

*O menor dos sublimites de uma sucessão u_n denomina-se **limite inferior** e definimo-lo por:*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \inf\{a : a\ \textit{é sublimite de}\ u_n\}.$$

Resulta da definição anterior que, para qualquer sucessão u_n, no caso de existirem sublimites,

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n.$$

Tal como para o limite de uma sucessão, podemos, também, estender as noções de limite superior e inferior a $+\infty$ e $-\infty$. Isto acontece no caso em que o conjunto dos sublimites da sucessão não é majorado ou não é minorado, respectivamente.

Exemplo 2.8.3 (AULA TEÓRICA) *Determine os limites superior e inferior da sucessão*

$$u_n = \frac{n + (-1)^n n}{n-1}.$$

2.9 Propriedades

A afirmação da proposição seguinte diz-nos que o limite de uma sucessão, a existir, é único.

Proposição 2.9.1 *Sejam u_n uma sucessão e $a,\ b \in \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = a \quad e \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = b,$$

então $a = b$.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Proposição 2.9.2 *Se u_n é uma sucessão convergente, então u_n é limitada.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

A afirmação recíproca da proposição anterior é falsa como mostra o contra-exemplo da sucessão $u_n = (-1)^n$ que é limitada, mas divergente. No entanto, se além de limitada, a sucessão for monótona, a recíproca já é válida.

Proposição 2.9.3 *Se u_n é uma sucessão monótona e limitada, então u_n é convergente. Mais:*

- *se u_n é crescente, então*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\};$$
- *se u_n é decrescente, então*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 2.9.1 (AULA TEÓRICA) *Usando a proposição anterior, mostre que a sucessão seguinte é convergente e calcule o seu limite:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}.$$

A afirmação recíproca da proposição anterior é falsa, pois existem sucessões convergentes que não são monótonas.

Exemplo 2.9.2 (`AULA TEÓRICA`) *Mostre que a sucessão seguinte é convergente, mas não é monótona:*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Proposição 2.9.4 *Uma sucessão u_n é convergente se e só se qualquer sua subsucessão u_{n_k} converge para o mesmo limite.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Observe-se que, pela proposição anterior, se uma sucessão tem, pelo menos, duas subsucessões com limites diferentes, então é divergente. Depois do resultado anterior, levanta-se a questão de saber em que condições uma sucessão tem subsucessões convergentes.

Proposição 2.9.5 *Seja u_n uma sucessão (de termos reais). Então existe, pelo menos, uma subsucessão u_{n_k} monótona.*

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` ver, por exemplo, J. Campos Ferreira p. 90.

Proposição 2.9.6 *Seja u_n uma sucessão limitada. Então u_n tem, pelo menos, uma subsucessão u_{n_k} convergente.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

O resultado da proposição anterior é, por vezes, denominado Teorema de Bolzano[2]-Weierstrass[3]. Daqui, resulta que é condição necessária e suficiente para uma sucessão limitada u_n convergir que

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} u_n.$$

Exemplo 2.9.3 (`AULA TEÓRICA`) *A sucessão $u_n = (-1)^n$ é divergente.*

2.10 Sucessão de Cauchy

Por vezes, torna-se muito difícil provar, pela Definição 2.8.1, que uma sucessão é convergente, apesar de verificarmos que congerve, usando técnicas de cálculo de limites de que iremos escrever mais adiante. Torna-se, portanto, útil encontrar formas equivalentes de provar que uma sucessão é convergente. Nesse intuito, introduzimos de seguida o conceito de sucessão de Cauchy[4]

Definição 2.10.1 (Sucessão de Cauchy) *Diz-se que uma sucessão u_n é de Cauchy, se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ m,\ n \in \mathbb{N}\ e\ m, n \geq p\ ) \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

[2]Bernhard Bolzano (1781-1848), matemático checo natural de Praga.
[3]Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão natural de Ostenfelde.
[4]Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês natural de Paris.

O significado desta definição é o de que a partir de certa ordem, digamos p $(m,\ n \geq p)$, os termos correspondentes da sucessão (u_m e u_n) estarão tão próximos quanto se queira. Observe-se que nada se diz sobre a relação de ordem entre m e n.

Exemplo 2.10.1 (`AULA TEÓRICA`) *Mostre que a sucessão* $u_n = \frac{1}{n}$ *é de Cauchy.*

A grande utilidade da noção de sucessão de Cauchy, é provar, de um modo mais simples, que uma dada sucessão é convergente. O resultado estabelecido na proposição seguinte é, pois, esperado.

Proposição 2.10.1 *Uma sucessão é convergente se e só se for sucessão de Cauchy.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Dada a equivalência entre as noções de sucessão convergente e de sucessão de Cauchy, por vezes a definição de sucessão de Cauchy é designada por Princípio Geral de Convergência de Cauchy. Existem mesmo muitos autores que falam de definição de sucessão convergente no sentido de Cauchy. Neste sentido, e para a distinguir, a primeira (Definição 2.8.1) é designada por noção de sucessão convergente no sentido de Heine[5]. O exemplo seguinte mostra-nos a grande utilidade da noção de sucessão de Cauchy.

Exemplo 2.10.2 (`AULA TEÓRICA`) *Usando a noção de sucessão de Cauchy, mostre que as sucessões seguintes são, respectivamente, convergente e divergente:*

$$\text{a)}\ \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}; \qquad \text{b)}\ s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

2.11 Critérios de convergência

As proposições seguintes estabelecem relações de ordem entre os limites de sucessões a partir dos seus termos gerais.

Proposição 2.11.1 *Sejam* u_n *e* v_n *duas sucessões convergentes para* a *e* b*, respectivamente. Se, a partir de certa ordem,* $u_n \leq v_n$*, então* $a \leq b$*.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Esta proposição tem uma grande aplicação prática no cálculo de limites. Essa aplicação é mais visível na utilização da seguinte proposição também conhecida por Princípio do Encaixe.

Proposição 2.11.2 (Critério da Sucessão Enquadrada) *Sejam* u_n, v_n, x_n *sucessões tais que, a partir de certa ordem,* $u_n \leq v_n \leq x_n$, u_n *e* x_n *são convergentes e*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = a = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Então v_n *é convergente e*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = a.$$

[5]Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão natural de Berlim.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 2.11.1 (AULA TEÓRICA) *Usando o critério anterior, mostre que a sucessão seguinte é convergente e calcule o seu limite:*

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}.$$

O resultado da Proposição 2.11.1 pode-se estender, em determinadas condições, ao caso em que os limites são infinitos

Proposição 2.11.3 (Critério de Comparação) *Sejam u_n e v_n sucessões tais que, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.*

1. *Se v_n tende para $-\infty$, então u_n tende para $-\infty$.*
2. *Se u_n tende para $+\infty$, então v_n tende para $+\infty$.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 2.11.2 (AULA TEÓRICA) *Usando o critério anterior, mostre que a sucessão $u_n = 2(n+1)^2$ tende para $+\infty$.*

O resultado seguinte diz-nos que a a afirmação recíproca da Proposição 2.11.1 também é válida.

Proposição 2.11.4 *Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes e suponhamos que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Então, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

A proposição seguinte diz-nos que o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é, ainda, um infinitésimo.

Proposição 2.11.5 *Sejam u_n uma sucessão limitada e v_n uma sucessão convergente tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Então $(u\,v)_n = u_n\,v_n$ é uma sucessão convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} u_n\,v_n = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 2.11.3 (AULA TEÓRICA) *Usando a proposição anterior, mostre que a sucessão seguinte é um infinitésimo:*

$$u_n = \frac{\cos n}{n}.$$

2.12 A recta acabada

A recta acabada surge da necessidade de estender as operações algébricas habituais do conjunto dos números reais de modo a poder-se operar com os elementos $+\infty$ e $-\infty$. Estes elementos satisfazem a relação de ordem seguinte:

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.12.1 (Recta acabada) *Define-se a recta acabada e denota-se por* $\overline{\mathbb{R}}$ *como sendo o conjunto seguinte:*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Com a introdução da recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, torna-se necessário definir as operações algébricas entre os elementos desse conjunto. Se os elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ forem ainda reais, isto é elementos de $\mathbb{R}$, as operações são como habitualmente.

Definição 2.12.2 (operações com $+\infty$ e $-\infty$) *Para a* ***adição*** *tem-se:*

$$a + (+\infty) = +\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R};$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Para a ***multiplicação*** *tem-se:*

$$a \times (+\infty) = +\infty, \quad a \times (-\infty) = -\infty \quad \forall\, a > 0;$$

$$a \times (+\infty) = -\infty, \quad a \times (-\infty) = +\infty \quad \forall\, a < 0;$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

As operações de subtracção e divisão são operações inversas da adição e multiplicação, respectivamente. Assim, tem-se para a **subtracção**:

$$a - (+\infty) = a + (-\infty) = -\infty, \quad a - (-\infty) = a + (+\infty) = +\infty \quad \forall\, a \in \mathbb{R};$$

$$(+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

E para a **divisão** tem-se:

$$\frac{+\infty}{a} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{a} = -\infty \quad \forall\, a \geq 0;$$

$$\frac{+\infty}{a} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{a} = +\infty \quad \forall\, a \leq 0;$$

Pela sua importância, também consideramos a operação de **potenciação**:

$$a^b, \quad a \geq 0.$$

Nos casos em que o expoente b é um natural, a potenciação não é mais do que uma multiplicação repetida. As potências entre números reais definem-se como habitualmente. No caso em que intervêm os elementos $+\infty$ e $-\infty$, temos:

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} ; \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} ;$$

$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0 & \text{se } b < 0 \\ +\infty & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

2.13 Indeterminações

Pelo exposto acima, verifica-se a existência de omissões na definição das operações algébricas entre alguns elementos de $\overline{\mathbb{R}}$. Em $\mathbb{R}$ já conhecemos as seguintes situações em que as operações não estão definidas:

$$\frac{0}{0} \qquad \text{e} \qquad 0^0.$$

Em $\overline{\mathbb{R}}$, quando não for possível determinar uma operação, diremos que estamos perante uma **indeterminação**.

Definição 2.13.1 (Indeterminações) *As indetermin̨ções em* $\overline{\mathbb{R}}$ *são dos tipos:*

- $\infty - \infty$
$$+\infty + (-\infty) = +\infty - \infty, \quad +\infty - (+\infty) = +\infty - \infty;$$
- $0 \times \infty$
$$0 \times (+\infty), \quad 0 \times (-\infty);$$
- 1^∞
$$1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty} = \frac{1}{1^{+\infty}};$$
- ∞^0
$$(+\infty)^0.$$

Existem outras indeterminações, mas que poderão ser analisados como casos particulares dos dados na definição anterior. Esses casos, são as indeterminações dos tipos:

- $\frac{\infty}{\infty}$
$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \infty = 0 \times \infty;$$
- $\frac{0}{0}$ - já existente em $\mathbb{R}$
$$\frac{0}{0} = 0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty;$$
- 0^0 - já existente em $\mathbb{R}$
$$0^0 = \left(\frac{1}{+\infty}\right)^0 = \frac{1}{(+\infty)^0}.$$

Convém referir que, como sai da parte final da secção anterior, não são indeterminações os casos particulares seguintes:

$$0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty;$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty; \quad (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

2.14 Cálculo de limites

Nesta altura podemos, então, definir as operações algébricas entre os limites de sucessões, limites esses que poderão ser infinitos.

Proposição 2.14.1 *Sejam u_n e v_n sucessões e $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = a \quad e \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = b.$$

Então, salvo os casos em que se obtêm indeterminações, temos:

1.
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (u_n \pm v_n) = a \pm b;$$

2.
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (u_n \times v_n) = a \times b;$$

3. *se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b};$$

4. *se u_n é uma sucessão de termos positivos,*
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left({u_n}^{v_n}\right) = a^b.$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver Campos Ferreira, Capítulo II.1.

No cálculo de limites podemos usar a Proposição 4.2.2 sempre que não obtenhamos indeterminações. Mas, em muitas situações de cálculo de limites, surgem indeterminações. Ao processo de resolver determinada indeterminação, vamos designar por **levantamento da indeterminação**.

Regra 1 (levantamento de indeterminações do tipo $\infty - \infty$) *As indeterminações dos tipos*

$$\infty - \infty,$$

podem, normalmente, ser levantadas pondo em evidência o termo de maior grau, ou, no caso em que envolvem raízes, multiplicando pelo conjugado.

Exemplo 2.14.1 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule os limites seguintes:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (n^2 - 2n) \qquad e \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Regra 2 (levantamento de indeterminações do tipo $0 \times \infty$) *As indeterminações dos tipos*

$$0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0},$$

podem, normalmente, ser levantadas pondo em evidência os termos de maior grau.

Exemplo 2.14.2 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule os limites seguintes:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n-1} \qquad e \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3^{2n} - 5^{n+1}}{4^{n+1} + 2^{2n}}.$$

2.15 Limites importantes

Para o levantamento de indeterminações do tipo 1^∞, temos de introduzir um resultado importante.

Definição 2.15.1 (Número de Neper) *Define-se o número de Neper* **e** *como sendo o limite finito seguinte:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Prova-se que a sucessão

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

é estritamente crescente e

$$2 \leq u_n < 3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo u_n é convergente e, na secção seguinte sobre Séries Numéricas, iremos mostrar que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \equiv \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Donde, podermos considerar a aproximação às casas das centésimas

$$e \simeq 2,71\,.$$

O número e, apesar de já aparecer implícito nos trabalhos do matemático escocês Jonh Napier [ou Neper] (1550-1617) sobre logaritmos, só se tornou conhecido nos trabalhos do matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783) sobre a função exponencial. É por isso que denotamos este número com a letra inicial de Euler.

Proposição 2.15.1 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e u_n uma sucessão tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}|u_n| = +\infty.$$

Então

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{a}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Regra 3 (Levantamento de indeterminações do tipo 1^∞) *As indeterminações do tipo*

$$1^\infty$$

podem, normalmente, ser levantadas usando a Definição 2.15.1 ou a Proposição 2.15.1.

Exemplo 2.15.1 *Calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n^3}\right)^{4n^3}.$$

Para o levantamento de grande parte das indeterminações do tipo ∞^0, introduzimos o resultado seguinte.

Proposição 2.15.2 *Sejam $a\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$ e u_n uma sucessão de termos positivos tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a.$$

Então

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n}=a.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Regra 4 (Levantamento de indeterminações do tipo $(+\infty)^0$) *As indeterminações do tipo*

$$(+\infty)^0$$

podem, normalmente, ser levantadas usando a Proposição 2.15.2.

Exemplo 2.15.2 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{n^2+1}.$$

Existem muitas outras possibilidades de levantar indeterminações. Por exemplo, para levantar indeterminações do tipo $\infty\times 0$, ∞/∞ ou $0/0$, por vezes, temos de conjugar os resultados do Critério da Sucessão Enquadrada (Proposição 2.11.2) e da Proposição 2.15.2.

Proposição 2.15.3 *Sejam $a>1$ um real e $p\in\mathbb{N}$ arbitrários. Temos:*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^p}{a^n}=0,\qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Observe-se que, da proposição anterior, podemos tirar o limite seguinte:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^p}{n!}=0\quad\forall\, p\in\mathbb{N}.$$

Outro exemplo para levantar indeterminações do tipo $\infty\times 0$, ∞/∞ ou $0/0$, consiste em usar o conhecimento de limites notáveis de funções. Alguns exemplos são os seguintes:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)=1;$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1;$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)=1;$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln\, n)^a}{n^b}=0\quad\text{para todos } a>0,\ b>0.$$

2.16 Exercícios

1. Calcule o primeiro termo, assim como os termos de ordem $n-1$, $2n$ e $2n-1$ das sucessões seguintes:

$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}\,; \qquad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,; \qquad x_n = (-1)^{n+1}\frac{n^2+2}{2n+3}\,;$$

$$y_n = \frac{1}{n!}\,; \qquad w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n}\,; \quad z_n = \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \sqrt{2+z_n} \end{cases}.$$

2. Faça a representação gráfica dos cinco primeiros termos das sucessões u_n, x_n e y_n indicadas no exercício anterior.

3. Escreva o termo geral das sucessões cujos termos das primeiras ordens são os seguintes:

a) $2, 5, 8, 11, \ldots\,;$ b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\,;$ c) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \ldots\,;$

d) $\frac{3}{7}, \frac{8}{11}, \frac{13}{15}, \frac{18}{19}, \ldots\,;$ e) $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13\ \ldots\,;$ f) $0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5}, \ldots\,.$

4. Usando o Princípio de Indução Matemática, prove as afirmações seguintes:

a) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}\,;$

b) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}\,;$

c) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,;$

d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ **[Usar a)]**;

e) $2^n > n^2 \quad \forall\, n \geq 5\,;$

f) **Binómio de Newton**: Para quaisquer $a\,,\ b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k\,.$$

5. Calcule a soma dos 10 primeiros termos das seguintes progressões

$$u_n = 2n-1\,; \qquad v_n = \frac{2}{3^{n-1}}\,; \qquad x_n = (-1)^n\,; \qquad y_n = \frac{2}{3}(n+1)\,.$$

6. Indique quais das sucessões dos exercícios 1 e 3 são majoradas, minoradas e limitadas.

7. Estude as sucessões seguintes quanto à monotonia:

$$s_n = \frac{n+1}{2n+4}\,; \qquad t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,; \qquad u_n = \frac{n}{2^n}\,;$$

$$v_n = \frac{n!}{n^n}\,; \qquad y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,.$$

8. Indique duas subsucessões para cada sucessão dos exercícios 1, 3, 4 e 7.

9. Usando a definição, mostre que as seguintes sucessões são convergentes para os limites indicados:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0\,;$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1\,;$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2\,;$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 0\,;$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2-1} = \dfrac{1}{2}\,;$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0\,.$

10. Usando a definição, mostre que as seguintes sucessões são divergentes e, na recta acabada, têm os limites indicados:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^3-1} = +\infty\,;$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2) = -\infty\,.$

11. Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1}\,;$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{n^4+3}\,;$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+7n-1}}{n+2}\,;$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}\right)\,;$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n-1}\,;$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^{2n}+4^{n+1}}{5^n-2^{2n}}\,.$

12. Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}\,;$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+n-1}{n-3}}\,;$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)!-n!}\,.$

13. Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}\,;$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n}\,;$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n^2-5n+2}{2n^2+3n+1}\right)^{2n}\,.$

14. Usando o Princípio das Sucessões Enquadradas, calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}$; e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+\operatorname{sen} n}{n}$; f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

15. Calcule os limites superior e inferior das sucessões seguintes:

$$u_n=\frac{(-1)^n n^2+1}{n^2+2};\qquad v_n=1+\cos\left((n+1)\pi\right);\qquad x_n=\frac{n+\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

16. Estude a natureza das sucessões seguintes indicando o limite das que são convergentes:

$$a_n=\frac{1+n^3}{n^2+2n-1};\qquad b_n=\frac{2^n-e^{n+1}}{e^n-2^{n+1}}\qquad c_n=\sqrt{(n+1)!}-\sqrt{n!};$$

$$d_n=\frac{\operatorname{sen} n}{n};\qquad e_n=\frac{2^{2n}-3^n}{2^n-3^{2n}};\qquad f_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$g_n=n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right);\qquad h_n=n^{n^2}(1+n^2)^{-\frac{n^2}{2}};\qquad i_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{n!}{n+1}};$$

$$j_n=\frac{n^2}{2^n};\qquad k_n=\frac{n!}{3^n};\qquad l_n=\left(\frac{n^2+\cos(n\pi)}{n^2}\right)^{n+1};$$

$$m_n=\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}}+\frac{n^2}{\sqrt{n^4+(n+1)^2}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^4+(2n)^2}};$$

$$n_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}};$$

$$\begin{cases} o_1=1\\ o_{n+1}=\sqrt{2+o_n}\end{cases};\qquad \begin{cases} p_1=1\\ p_{n+1}=1+\frac{1}{p_n}\end{cases};\qquad \begin{cases} q_0=1\\ q_1=1\\ q_{n+2}=\frac{q_n+q_{n+1}}{2}\end{cases}.$$

Capítulo 3

Séries Numéricas

Neste capítulo, vamos considerar somas de termos de sucessões, as quais se designam por séries. No entanto, é habitual designar as séries finitas por somatórios, deixando-se a designação de séries para as somas infinitas.

3.1 Somatórios

Os somatórios surgem como uma necessidade de simplificação da escrita de somas de termos de uma sucessão.

Definição 3.1.1 (Somatório) *Sejam u_k uma sucessão de termos reais e $n \in \mathbb{N}$. O símbolo de somatório*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k$$

define-se por recorrência da forma seguinte:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \quad se \quad n = 1 \qquad\qquad e \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n \quad se \quad n > 1.$$

Assim, para quaisquer $p,\ q \in \mathbb{N}$, com $p \leq q$, usamos o somatório

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

para denotar a soma

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q.$$

Neste caso, p diz-se o **limite inferior do somatório**, q o **limite superior** e u_k o **termo geral**.

Exemplo 3.1.1 *A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética ou geométrica u_k pode ser escrita do modo seguinte:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Proposição 3.1.1 *Sejam u_k e v_k sucessões de termos reais e $c \in \mathbb{R}$. Então são válidas as propriedades seguintes:*

1. ***Aditiva***
$$\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k;$$

2. ***Homogénea***
$$\sum_{k=1}^{n} (c\, u_k) = c \sum_{k=1}^{n} u_k;$$

3. ***Telescópica***
$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0.$$

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Usar o Método de Indução Matemática em n.

3.2 Séries numéricas

A noção de série numérica infinita é introduzida para permitir a generalização do conceito de somatório com uma infinidade de parcelas numéricas.

Definição 3.2.1 (Série numérica) *Seja u_n uma sucessão numérica. Designa-se por série numérica infinita o par formado pela sucessão u_n:*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

e pela sucessão S_n seguinte:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{2} u_k = u_1 + u_2, \quad \ldots, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \ldots.$$

Os números $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n,\ \ldots$ denominam-se **termos da série**, sendo u_n o **termo geral da série**, e a sucessão de termos $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$ designa-se por **sucessão das somas parciais**. Habitualmente, a série de termo geral u_n pode ser representada por um dos quatro modos seguintes:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \qquad \sum_{n\geq 1} u_n, \qquad \sum u_n.$$

O limite inferior da série poderá ser qualquer outro número natural e, em muitas situações, poderá ser 0. Por norma, o limite inferior é o menor inteiro não negativo, a partir do qual, o termo geral da sucessão está definido em $\mathbb{R}$. Para simplificarmos a escrita, iremos designar toda a série numérica infinita apenas por série.

Definição 3.2.2 (Convergência) *Seja $\sum u_n$ uma série e S_n a sucessão das suas somas parciais.*

1. *Diz-se que a* ***série*** *$\sum u_n$ é* ***convergente****, se a sucessão S_n for convergente.*
2. *Se a sucessão S_n é divergente, a* ***série*** *$\sum u_n$ diz-se* ***divergente****.*

A convergência de uma série reduz-se, portanto, à convergência da sucessão das somas parciais. No caso em que a série $\sum u_n$ é convergente, existe, então, um real S tal que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = S.$$

O limite S denomina-se por **soma da série** e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S.$$

Exemplo 3.2.1 (Série finita) *Uma série finita é uma série (infinita), digamos $\sum u_n$, com os termos quase todos nulos, isto é, para a qual:*

$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n = 0.$$

Proposição 3.2.1 *Toda a série finita é convergente e, no caso do Exemplo 3.2.1, a soma da série é dada por:*

$$S = \sum_{k=1}^{p} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_p.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Exemplo 3.2.2 (Série geométrica) *Designa-se por série geométrica toda a série da forma:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots ;$$

onde x é um real que se denomina ***razão da série****.*

Por vezes, as séries geométricas poderão aparecer na forma seguinte:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Com esta notação evita-se de, no caso particular $x = 0$, termos a indeterminação 0^0.

Proposição 3.2.2 *A série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots ,$$

é convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| \geq 1$. Mais, no caso em que é convergente, a sua soma é dada por:

$$S = \frac{1}{1-x}\,.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Se a série geométrica aparecer na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

e for convergente, então a sua soma é dada por

$$S = \frac{x}{1-x}\,.$$

Exemplo 3.2.3 (AULA TEÓRICA) *Verifique que a série seguinte é convergente e calcule a sua soma:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Exemplo 3.2.4 (Série de Mengoli) *Designa-se por série de Mengoli, ou série redutível ou, ainda, série telescópica, toda a série da forma:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})\ .$$

Dado $p \in \mathbb{N}$, podemos generalizar o conceito de série de Mengoli à série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+p})\ .$$

Proposição 3.2.3 *A série de Mengoli $\sum (u_n - u_{n+1})$ é convergente, se a sucessão u_n for convergente. É divergente, se o limite de u_n não existe (ou não é finito). No caso em que é convergente, a soma é dada por:*

$$S = u_1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1}\,.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Por um raciocínio indutivo, podemos estender o resultado da proposição anterior a toda a série de Mengoli da forma $\sum (u_n - u_{n+p})$, com $p \in \mathbb{N}$ arbitrário. Assim, a série $\sum (u_n - u_{n+p})$ é convergente, se a sucessão u_n for convergente e divergente se o limite de u_n não existe. Mais, no caso de convergir, a soma é dada por:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{p} \left(u_k - \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+k} \right) &= u_1 + u_2 + \cdots + u_p - \lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_p - p \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.5 (AULA TEÓRICA) *Verifique que a série seguinte é convergente e calcule a sua soma:*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

3.3 Propriedades gerais

Na maior parte dos casos em estudo, não é possível calcular a soma das séries convergentes. Por isso, o nosso estudo sobre as séries irá centrar-se essencialmente na natureza das séries, isto é, em saber se determinada série é convergente ou divergente.

Proposição 3.3.1 (Critério Geral de Cauchy) *Uma série* $\sum u_n$ *é convergente se e só se*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\ \forall\ n,\ k \in \mathbb{N}\ e\ n > p) \Rightarrow |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon.$$

Observe-se que

$$|S_{n+k} - S_n| = \left|\sum_{i=1}^{k} u_{n+i}\right| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}|.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA`. A demonstração usa o conceito de sucessão de Cauchy que, como vimos no capítulo anterior, é equivalente ao conceito de sucessão convergente.

Exemplo 3.3.1 (Série harmónica) *Designa-se por série harmónica, a série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \ .$$

Proposição 3.3.2 *A série harmónica é divergente.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA`.

Uma consequência imediata do Critério Geral de Cauchy, é o resultado seguinte que, por vezes, é muito útil para mostrar a divergência de determinada série.

Proposição 3.3.3 *Se* $\sum u_n$ *é uma série convergente, então* $u_n \longrightarrow 0$.

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA`.

Na prática, o mais importante do resultado exposto na proposição anterior, é a informação que nos é dada pela sua contra-recíproca:

$$\text{se } u_n \nrightarrow 0, \text{ então } \sum u_n \text{ é divergente.}$$

Observe-se que se $u_n \longrightarrow 0$, nada podemos inferir sobre a natureza da série. Vejam-se os exemplos da série geométrica do Exemplo 3.2.3 e da série harmónica (Exemplo 3.3.1), cujos termos gerais ambos tendem para 0 e somente a série geométrica é convergente.

Exemplo 3.3.2 (`AULA TEÓRICA`) *Estude a natureza da série seguinte:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}.$$

Proposição 3.3.4 *Sejam* $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *séries convergentes de somas* S_u *e* S_v*, respectivamente, e seja* $c \in \mathbb{R}$*. Então:*

1. *A série* $\sum (u_n + v_n)$ *é convergente e a sua soma é* $S_u + S_v$*;*
2. *A série* $\sum (c\, u_n)$ *é convergente e a sua soma é* $c\, S_u$*.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 3.3.3 (AULA TEÓRICA) *Calcule a soma da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{6^n}.$$

Como consequência da proposição anterior, temos o resultado enunciado a seguir que poderá ser utilizado para estabelecer a divergência de determinada série.

Proposição 3.3.5 *Sejam* $\sum u_n$ *uma série convergente e* $\sum v_n$ *uma série divergente. Então a série* $\sum (u_n + v_n)$ *é divergente.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 3.3.4 (AULA TEÓRICA) *Justifique que a série seguinte é divergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 2^n}{n\, 2^n}.$$

A proposição seguinte mostra-nos que séries praticamente iguais têm a mesma natureza.

Proposição 3.3.6 *Sejam* $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *duas séries tais que*

$$\exists\ k \in \mathbf{Z} : v_n = u_{n+k}\,.$$

Então as duas séries têm a mesma natureza.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 3.3.5 (AULA TEÓRICA) *Verifique que as séries seguintes têm a mesma natureza:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\,.$$

3.4 Séries de termos não negativos

As séries de termos não negativos convêm ser estudadas em separado, uma vez que, neste caso, é mais fácil estabelecer critérios de convergência. Começamos por observar que, para estas séries, podemos obter um critério de convergência mais fraco do que o enunciado na Proposição 3.3.1.

Proposição 3.4.1 *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos não negativos e* S_n *a respectiva sucessão das somas parciais. Então* $\sum u_n$ *é convergente se e só se* S_n *for limitada.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Como estamos a considerar séries de termos não negativos, podemos dizer que qualquer destas séries divergente tende automaticamente para $+\infty$.

Exemplo 3.4.1 (`AULA TEÓRICA`) *Usando a proposição anterior, mostre que a série seguinte é convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Proposição 3.4.2 (Critério Geral de Comparação) *Sejam* $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *séries de termos não negativos. Suponhamos que, a partir de certa ordem,* $u_n \leq v_n$. *Tem-se:*

1. *Se* $\sum v_n$ *é convergente, então* $\sum u_n$ *também é convergente.*
2. *Se* $\sum u_n$ *é divergente, então* $\sum v_n$ *também é divergente.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Exemplo 3.4.2 (`AULA TEÓRICA`) *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

são, respectivamente, convergente e divergente.

O Critério Geral de Comparação permite-nos obter um resultado de mais simples aplicação, que enunciamos na proposição seguinte.

Proposição 3.4.3 (Critério de Comparação) *Sejam* $\sum u_n$ *uma série de termos não negativos e* $\sum v_n$ *uma série de termos positivos tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = L.$$

Se $0 < L < +\infty$, *então as séries* $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *têm a mesma natureza, isto é, são ambas convergentes ou ambas divergentes.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

No caso de, na proposição anterior, se verificar $L = 0$, então

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n \leq v_n\,.$$

Deste modo, pelo Critério Geral de Comparação, podemos deduzir da convergência de $\sum v_n$ a de $\sum u_n$ e da divergência de $\sum u_n$ a de $\sum v_n$. Análogamente, no caso de $L = +\infty$, então

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n \geq v_n\,,$$

podendo deduzir da convergência de $\sum u_n$ a de $\sum v_n$ e da divergência de $\sum v_n$ a de $\sum u_n$. Nos outros casos, porém, nada podemos concluir.

Exemplo 3.4.3 (AULA TEÓRICA) *Utilize o resultado anterior para mostrar que as séries seguintes são, respectivamente, divergente e convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Exemplo 3.4.4 (Série de Dirichlet) *Designa-se por série de Dirichlet toda a série da forma:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots\,;$$

onde α é um real.

Observemos que a série harmónica, referida no Exemplo 3.3.1, é um caso particular da série de Dirichlet com $\alpha = 1$.

Proposição 3.4.4 *A série de Dirichlet é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Pela sua simplicidade no cálculo de limites, utilizam-se muitas vezes as séries de Dirichlet no Critério de Comparação (Proposição 3.4.3).

Proposição 3.4.5 (Comparação com as séries de Dirichlet) *Seja $\sum u_n$ uma série de termos não negativos. Tem-se:*

1. *Se existe um real $\alpha > 1$ tal que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (n^\alpha u_n) < +\infty,$$

então a série $\sum u_n$ é convergente.

2. *Se existe um real* $\alpha \leq 1$ *tal que*
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (n^\alpha u_n) > 0,$$
então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Consequência imediata da Proposição 3.4.3.

Exemplo 3.4.5 (AULA TEÓRICA) *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$$
são, respectivamente, convergente e divergente.

Em muitas situações de aplicação prática torna-se muito complicado utilizar o Critério de Comparação. Nesses casos, podemos recorrer a um dos dois critérios que enunciamos a seguir e cuja aplicação é mais fácil.

Proposição 3.4.6 (Critério da Razão - D'Alembert) *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos positivos. Tem-se:*

1. *Se*
$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é convergente.*

2. *Se*
$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

Em particular, se existe o limite
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é convergente se* $L < 1$ *e é divergente se* $L > 1$.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 3.4.6 (AULA TEÓRICA) *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$$
são, respectivamente, convergente e divergente.

Proposição 3.4.7 (Critério da Raíz - Cauchy) *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos não negativos. Tem-se:*

1. *Se*
$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é convergente.*

2. *Se*
$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

Em particular, se existe o limite
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é convergente se* $L<1$ *e é divergente se* $L>1$*.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Exemplo 3.4.7 (`AULA TEÓRICA`) *Usando a proposição anterior, mostre que as séries*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^n} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$
são, respectivamente, convergente e divergente.

Como se observa das respectivas demonstrações, os dois critérios anteriores são consequências do Critério Geral de Comparação, tal como o Critério de Comparação. O **Critério da Razão** e o **Critério da Raíz** tornam o estudo da natureza das séries de termos não negativos mais simples. No entanto, o preço a pagar por esta simplificação no estudo, é que, em ambos os critérios, **nada se pode concluir se** $L=1$.

Exemplo 3.4.8 (`AULA TEÓRICA`) *Verifique que, para a série seguinte, a aplicação do Critério da Razão ou do Critério da Raíz não permite tirar nenhuma conclusão quanto à sua natureza:*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n\,n!}{n^n}\,.$$
No entanto e apesar de ser um exercício mais envolvente, pode-se mostrar que esta série diverge[1]*.*

[1] Aplicar o Critério de Raabe. Ver, por exemplo, Creighton Buck p. 233.

3.5 Séries de termos positivos e negativos

Até agora, temos essencialmente estado a estudar séries de termos não negativos. Agora queremos analisar séries cujos termos possam ser positivos e negativos. De entre estas, têm particular interesse as séries de termos alternados.

Definição 3.5.1 (Série alternada) *Uma série diz-se alternada, se for possível escrevê-la da forma seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + \ldots ;$$

onde u_n é uma sucessão de termos não negativos.

Observemos que as séries alternadas, como o próprio nome indica, também poderão vir escritas da forma seguinte:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots .$$

Para estas séries existe o critério seguinte de convergência, devido a Leibniz[2].

Proposição 3.5.1 (Critério de Leibniz) *Suponhamos que u_n é uma sucessão monótona decrescente para 0, isto é:*

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq \ldots \qquad e \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

Então a série $\sum(-1)^n u_n$ é convergente.

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Consoante definamos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\, u_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} u_n\,,$$

podemos provar, respectivamente,

$$S_1 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_{2n-1} \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2$$

ou

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1\,.$$

Exemplo 3.5.1 (`AULA TEÓRICA`) *Estude a natureza da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

[2]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), advogado, filósofo e também matemático, natural de Leipzig, Alemanha.

Para outras séries cujos termos possam ser positivos e negativos, que não as alternadas, torna-se mais complicado encontrar critérios de convergência. Contudo, para algumas séries, podemos ainda usar o resultado seguinte.

Proposição 3.5.2 (Critério de Dirichlet) *Sejam $\sum u_n$ uma série cuja sucessão das somas parciais, digamos S_n, é limitada e v_n uma sucessão monótona decrescente para 0, isto é:*

$$\exists\ C > 0 : |S_n| \leq C \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \cdots \geq v_n \geq \ldots \qquad e \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Então a série $\sum u_n v_n$ é convergente.

SEM DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, C. Ferreira p. 198.

Observemos que o Critério de Leiniz pode, facilmente, ser demonstrado a partir do Critério de Dirichlet.

Exemplo 3.5.2 (AULA TEÓRICA) *Use o Critério de Dirichlet para justificar que a série seguinte é convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}.$$

3.6 Convergência absoluta

A convergência absoluta das séries está relacionada com a convergência da série dos módulos. Então, muitos dos resultados para o estudo das séries de termos não negativos poderão ser aplicados para estudar a convergência absoluta.

Definição 3.6.1 *Uma série $\sum u_n$ diz-se **absolutamente convergente**, se a série $\sum |u_n|$ é convergente. Diz-se que $\sum u_n$ é **simplesmente convergente** ou **condicionalmente convergente**, se $\sum u_n$ é convergente, mas $\sum |u_n|$ é divergente.*

Exemplo 3.6.1 (AULA TEÓRICA) *Justifique que a série seguinte é simplesmente convergente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

O conceito de convergência absoluta é mais forte do que o de convergência simples, pelo que a primeira implica a segunda. Mas, como mostra o exemplo anterior, existem séries que são simplesmente convergentes e, por conseguinte, não são absolutamente convergentes.

Proposição 3.6.1 *Se $\sum |u_n|$ é uma série convergente, então $\sum u_n$ é convergente e tem-se:*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 3.6.2 (AULA TEÓRICA) *Estude a convergência da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}.$$

Pela Proposição 3.6.1, o estudo da convergência de grande parte das séries numéricas irá reduzir-se ao estudo da convergência de séries de termos não negativos. Deste modo, convém adaptar os Critérios de Comparação, da Razão e da Raíz para o estudo da convergência absoluta.

Proposição 3.6.2 (Critério de Comparação) *Sejam $\sum u_n$ uma série qualquer e $\sum v_n$ uma série de termos positivos tais que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{v_n} = L.$$

Se $0 \leq L < +\infty$ e $\sum v_n$ é convergente, então $\sum u_n$ é absolutamente convergente.

DEMONSTRAÇÃO: Consequência imediata da Proposição 3.4.3.

Repare-se que não faz nenhum sentido fazer uma comparação da divergência da série $\sum v_n$ com a de $\sum u_n$.

Exemplo 3.6.3 (AULA TEÓRICA) *Estude a convergência simples e absoluta da série seguinte:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}.$$

Proposição 3.6.3 (Critério da Razão - D'Alembert) *Seja $\sum u_n$ uma série de termos não nulos. Tem-se:*

1. *Se*
$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente.

2. *Se*
$$\exists\ p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1\,,$$
então a série $\sum u_n$ é divergente.

Em particular, se existe o limite

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L\,,$$

então a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente se $L < 1$ e é divergente se $L > 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Consequência imediata da Proposição 3.4.6.

Exemplo 3.6.4 (AULA TEÓRICA) *Usando o critério anterior, estude a série seguinte quanto à convergência absoluta:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}.$$

Proposição 3.6.4 (Critério da Raíz - Cauchy) *Seja* $\sum u_n$ *uma série qualquer. Tem-se:*

1. *Se*
$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é absolutamente convergente.*

2. *Se*
$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é divergente.*

Em particular, se existe o limite
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=L\,,$$
então a série $\sum u_n$ *é absolutamente convergente se* $L<1$ *e é divergente se* $L>1$.

DEMONSTRAÇÃO: Consequência imediata da Proposição 3.4.7.

Exemplo 3.6.5 (AULA TEÓRICA) *Usando o critério anterior, estude a série seguinte quanto à convergência absoluta:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n.$$

Observemos que, tal como no caso da convergência simples, nada se pode concluir se $L=1$ nas Proposições 3.6.3 e 3.6.4.

3.7 Exercícios

1. Indique uma expressão para o termo geral das séries seguintes:

a) $2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\cdots$;

b) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\cdots$;

c) $-\frac{1}{11}+\frac{2}{101}-\frac{3}{1001}+\frac{4}{10001}-\cdots$;

d) $0,6+0,51+0,501+0,5001+\cdots$;

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$;

f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$.

2. Indique as sucessões das somas parciais das séries geométricas seguintes e calcule a soma das que são convergentes:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{10^n}\,;$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-(5n+1)}\,; \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n}\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n .$$

3. Usando o conhecimento da soma das séries geométricas, escreva as dízimas infinitas periódicas seguintes na forma de números racionais:

a) $0,4444\ldots$; b) $1,9999\ldots$; c) $0,515151\ldots$; d) $0,123123123\ldots$.

4. Indique as sucessões das somas parciais das séries de Mengoli seguintes e calcule a soma das que são convergentes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,;$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}\,; \quad \text{e) } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} .$$

5. Mostre que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

para provar que a série harmónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente.

6. Justifique que as séries seguintes são divergentes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+2^{n-1}}{2^n-3^{n+1}}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} .$$

7. Usando o Critério Geral de Comparação, estude a natureza das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}\,; \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+n-1}\,;$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}\,; \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\,; \qquad \text{f) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1} .$$

8. Usando o Critério de Comparação com as séries de Dirichlet, estude a natureza das séries seguintes:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^2}$;

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+5n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2+1}$.

9. Usando o Critério de Comparação, estude a natureza da série seguinte em função do parâmetro p:
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,(\ln\, n)^p}\,.$$

10. Usando o Critério da Razão (de D'Alembert), estude a natureza das séries seguintes:

    a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

    d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2\, 15^{\frac{n}{2}}}{(2n)!}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2n+1)}{4.8\ldots(4n+4)}$.

11. Usando o Critério da Raíz (de Cauchy), estude a natureza das séries seguintes:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, 2^{-(2n+1)}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$

    d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}$.

12. Estude a natureza das séries alternadas seguintes:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$;

    d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}$.

13. Usando o Critério de Dirichlet, mostre que as séries seguintes são convergentes:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

14. Estude as séries seguintes quanto à convergência calculando, sempre que possível, a soma das convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n - e^n}{4^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}\, n(n+1)}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$; i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.5\ldots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$.

15. Estude as séries seguintes quanto à convergência absoluta e simples (condicionada):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n + e^{-n})}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$; f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left[1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right]$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\frac{3.7.11\ldots(4n-1)}{4.7.10\ldots(3n+1)}$; h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

Capítulo 4

Complementos de Funções Reais de Variável Real

4.1 Funções transcendentes

As funções elementares que abordamos no Capítulo 1 resultam de operações elementares de cálculo. As funções transcendentes também pertencem ao grande grupo de funções elementares no sentido em que se podem escrever como somas finitas de expressões designatórias. A grande fonte para as funções transcendentes reside na Geometria, a primeira área da Matemática a ser estudada. Nesta secção iremos falar de praticamente todas as funções transcendentes conhecidas: exponencial, trigonométricas, hiperbólicas, bem como as suas inversas.

4.1.1 Funções exponencial e logarítmica

As funções racionais e irracionais são definidas directamente pelas operações elementares de cálculo. No entanto, existem funções cujas definições transcendem estas operações elementares de cálculo. Por isso, é frequente designar esta funções por **funções transcendentes**. Estão neste caso as funções que agora iremos estudar - a função exponencial e a sua inversa, a função logarítmica. Em matemática elementar é comum passar por cima de algumas dificuldades inerentes à definição destas funções até se conseguir explicá-las melhor com métodos de análise matemática que são adquiridos *à posteriori*.

Definição 4.1.1 *Seja a um número real positivo. Define-se a* ***função exponencial de base*** *a por*

$$f(x) = a^x.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = (0, +\infty)$.
- *Zeros: não tem.*
- *Variação de sinal: é sempre positiva.*

- *Monotonia: é estritamente crescente se* $a > 1$*; é estritamente decrescente se* $0 < a < 1$*; é constantemente igual a* 1 *se* $a = 1$*.*
- *Injectividade: é injectiva em todo o seu domínio se* $a \neq 1$*.*
- *Gráficos: Ver Figura 4.1.*

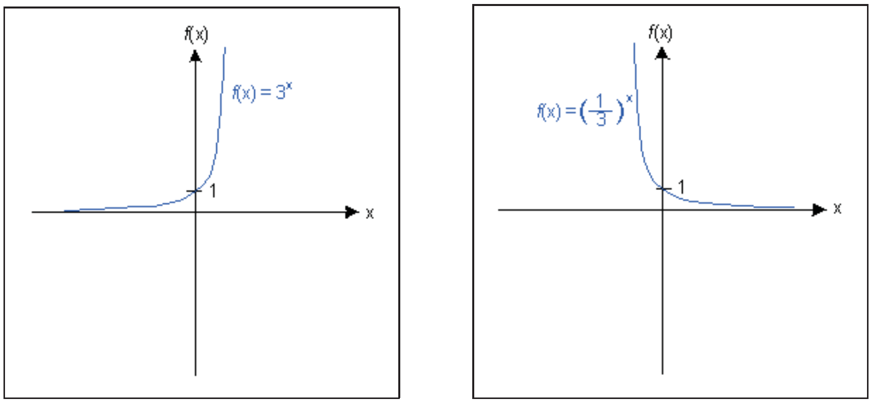

Figura 4.1: Funções exponenciais.

Observemos que a função exponencial está definida apenas para valores de a positivos. Não pode estar definida para valores de a negativos, porque quando x assume valores como $1/2$, a potência $a^{1/2} = \sqrt{a}$ não está definida para valores de a negativos. Por outro lado, se $a = 0$, quando $x = 0$ não sabemos o que é 0^0.

A base da função exponencial com mais interesse é $a = e$, onde $e = 2,71\ldots$ é o número irracional, denominado **número de Neper**:

$$f(x) = e^x.$$

Por vezes designamos a função exponencial de base e como a **função exponencial de base natural**.

Como vimos nos Capítulos 2 e 3, aquando do estudo das Sucessões e Séries Numéricas, o número e pode ser rigorosamente definido de uma das duas formas equivalentes seguintes:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

ou

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

Proposição 4.1.1 *Seja* a *um número real positivo. Então:*
1. $a^0 = 1$*;*
2. $a^{x+y} = a^x\, a^y$*.*

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, Campos Ferreira pp. 241-249.

Pela análise anterior da função exponencial, verificamos que, independentemente da base que se considere à excepção de $a = 1$, esta função é injectiva em todo o seu domínio. Sendo assim, podemos determinar a sua função inversa.

Definição 4.1.2 *Seja a um número real positivo diferente de 1. Define-se a **função logarítmica de base** a por*

$$f(x) = \log_a x.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = (0, +\infty)$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = \mathbb{R}$.
- *Zeros: tem um zero em* $x = 1$.
- *Variação de sinal: Se* $0 < a < 1$, *é negativa para* $x \in (1, +\infty)$ *e positiva para* $x \in (0, 1)$. *Se* $a > 1$ *é negativa para* $x \in (0, 1)$ *e positiva para* $x \in (1, +\infty)$;
- *Monotonia: é estritamente crescente se* $a > 1$; *é estritamente decrescente se* $0 < a < 1$.
- *Injectividade: é injectiva em todo o seu domínio.*
- *Gráficos: Ver Figura 4.2.*

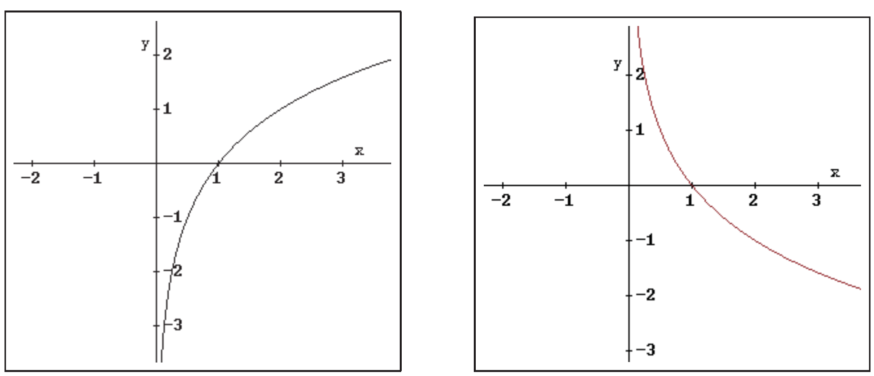

Figura 4.2: Funções logarítmicas de bases $a > 1$ (esquerda) e $a < 1$ (direita).

Sendo a função logarítmica a inversa da função exponencial, temos a equivalência seguinte:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Tal como para a função exponencial, a base da função logarítmica com mais interesse é $a = e$, onde e é o número de Neper:

$$f(x) = \log_e x.$$

Neste caso, designamos a função logarítmica como a **função logarítmica de base natural** e usamos a notação $\ln x$ em vez de $\log_e x$.

Proposição 4.1.2 *Sejam* a *e* b *números reais positivos diferentes de* 1 *e* n *um inteiro. Então:*
1. $\log_a a = 1$*;*
2. $\log_a 1 = 0$*;*
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$*;*
4. $\log_a(x^n) = n \log_a x$*;*
5. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$*;*
6. $\log_a x = \log_b x \, \log_a b$*.*

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, Campos Ferreira pp. 241-249.

Muitos autores definem primeiro a função logarítmica e só depois a função exponencial como função inversa da primeira. Isto deve-se ao facto da demonstração de algumas propriedades da função exponencial serem mais fáceis de mostrar recorrendo à função logarítmica. Mas, novamente aqui, temos o problema de ter de usar métodos da análise matemática que apenas são ensinados *a posteriori* - ver, por exemplo, Serge Lang.

4.1.2 Trigonometria

Antes de introduzirmos as funções trigonométricas, recordemos as relações trigonométricas mais importantes. Consideremos um triângulo rectângulo de vértices A, B e C, onde, apenas para fixar notação supomos que o ângulo recto é o ângulo formado pelas semi-rectas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Seja θ o ângulo formado pelas semi-rectas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Neste triângulo rectângulo, o lado $\overline{BC}$ designa-se por hipotenusa e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ designam-se, respectivamente, por cateto adjacente e cateto oposto relativamente ao ângulo θ. Definimos o **seno** e o **cosseno** do ângulo θ, respectivamente, por

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \qquad \text{e} \qquad \cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Consideremos um círculo de centro na origem do referencial cartesiano e com raio 1, o qual habitualmente se designa por **círculo unitário**. Inscrevamos o triângulo rectângulo anteriormente considerado no primeiro quadrante deste círculo. Fazemos coincidir o vértice B com a origem do referencial e o vértice C sobre a circunferência que limita o círculo. Isto implica que a hipotenusa $\overline{BC} = 1$. Para este triângulo rectângulo assim inscrito no círculo considerada, tem-se:

$$\text{sen}(\theta) = \overline{CA} \qquad \text{e} \qquad \cos(\theta) = \overline{BA}.$$

Observe-se que, como sabemos da geometria, a amplitude do um ângulo é medida em graus, fixando que um círculo, ou ângulo giro, mede 360^o. Um semi-círculo, ou ângulo raso, mede 180^o, um quarto de círculo, ou ângulo rectângulo mede 90^o. No entanto para a análise matemática, torna-se mais útil introduzir outra medida para medir a amplitude dos ângulos. Esta medida designa-se por radiano e está relacionada com o grau de tal modo que $2\pi = 360^o$ e, por consequência, $\pi = 180^o$ e $\pi/2 = 90^o$.

Designemos agora as coordenadas do vértice C por (x, y). Por uma simples análise, verifica-se que x é a medida do cateto adjacente, lado $\overline{BA}$, e y é a medida do cateto oposto, lado

$\overline{CA}$. Como inscrevemos o triângulo rectângulo num círculo de raio 1 centrado na origem do referencial, x e y vão variar entre 0 e 1. Com esta notação, temos

$$\operatorname{sen}(\theta) = y \qquad \text{e} \qquad \cos(\theta) = x.$$

Neste sentido, podemos dizer que o seno se lê no eixo dos yy e o cosseno no dos xx. Usando um pouco de geometria e cálculo numérico, conseguimos obter a tabela seguinte dos denominados **valores principais do seno** e **do cosseno**.

radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
SENO	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
COSSENO	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
graus	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o

Esta análise que fizemos para o triângulo rectângulo inscrito no primeiro quadrante pode ser extendida para o mesmo triângulo inscrito em qualquer um dos outros três quadrantes, inscrevendo o lado $\overline{BA}$ sobre os semi-eixos positivo dos yy, negativo dos xx, negativo dos yy, ou positivo dos xx. Neste casos, considera-se um ângulo ω compreendido entre o semi-eixo positivo dos xx e a semi-recta $\overrightarrow{BC}$. Consoante o ângulo ω atinja o primeiro, segundo, terceiro, ou o quarto quadrante, podemos relacionar ω com um ângulo θ inscrito no primeiro quadrante. Isto é, se $0 \leq \theta \leq \pi/2$, temos as possibilidades seguintes para ω:

- no primeiro quadrante: $\omega = \theta$ ou $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$;
- no segundo quadrante: $\omega = \frac{\pi}{2} + \theta$ ou $\omega = \pi - \theta$;
- no terceiro quadrante: $\omega = \pi + \theta$ ou $\omega = \frac{3\pi}{2} - \theta$;
- no quarto quadrante: $\omega = \frac{3\pi}{2} + \theta$ ou $\omega = 2\pi - \theta$.

Como vimos acima, no círculo unitário, $\operatorname{sen}(\theta) = y$ e $\cos(\theta) = x$. Então, podemos dizer, que o seno é positivo nos primeiro e segundo quadrantes e é negativo nos terceiro e quarto quadrantes, tal como y. O cosseno vai ser positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes, tal como x. Desta forma, considerando $0 \leq \theta \leq \pi/2$, facilmente obtemos as relações seguintes:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}(\theta)$;
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}(\theta)$;
- $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$; $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$;
- $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$; $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$;
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos(\theta)$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{sen}(\theta)$;
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos(\theta)$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen}(\theta)$;
- $\operatorname{sen}(2\pi - \theta) = \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$; $\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

Usando o facto de $\operatorname{sen}(\theta) = y$ e $\cos(\theta) = x$ e usando, ainda, as relações anteriores, podemos concluir, também, que:

$$\operatorname{sen}(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0, \quad \theta = \pi \quad \text{ou} \quad \theta = 2\pi;$$

$$\cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

O seno e o cosseno são as expressões trigonométricas mais importantes. No entanto, existem outras expressões trigonométricas, que, por vezes, são muito úteis. Tenhamos presentes as considerações sobre o círculo unitário e o triângulo rectângulo nele inscrito feitas acima. Definimos a **tangente** e a **cotangente** do ângulo θ, respectivamente, por:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{cotg}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{x}{y}.$$

Destas expressões, podemos afirmar que a tangente não está definida quando $\cos(\theta) = 0$, isto é, quando $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. A contangente não vai estar definida quando $\operatorname{sen}(\theta) = 0$, isto é, quando $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = 2\pi$. Por outro lado,

$$\operatorname{tg}(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0, \quad \theta = \pi \quad \text{ou} \quad \theta = 2\pi;$$

$$\operatorname{cotg}(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Da tabela dos valores principais do seno e do cosseno, podemos também obter os **valores principais da tangente** e **da cotangente**.

radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
TANGENTE	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.
COTANGENTE	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
graus	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o

Existem, ainda, outras expressões trigonométricas que, apesar de não serem tão utilizadas como as anteriores, têm, também, alguma importância. Novamente, tenhamos presentes as considerações sobre o círculo unitário e o triângulo rectângulo nele inscrito feitas no início desta secção. Definimos a **secante** e a **cosecante** do ângulo θ, respectivamente, por:

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{1}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\overline{BA}} = \frac{1}{x},$$

$$\text{cosec}(\theta) = \frac{1}{\text{sen}(\theta)} = \frac{1}{\text{cateto oposto}} = \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{y}.$$

Resulta desta definição que a secante não está definida quando $\cos(\theta) = 0$, ou seja, quando $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. A cosecante não está definida para $\text{sen}(\theta) = 0$, isto é, quando $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e $\theta = 2\pi$. Também aqui, da tabela dos valores principais do seno e do cosseno, podemos obter os **valores principais da secante** e **da cosecante**.

radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
SECANTE	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	n.d.
COSSECANTE	n.d.	2	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
graus	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o

Na proposição seguinte apresentamos, sem demonstração, as principais identidades trigonométricas que já deverão ser conhecidas do leitor.

Proposição 4.1.3 1. *Seja θ um ângulo qualquer. Então:*

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1;$$

e sempre que as expressões trigonométricas em causa estejam definidas:

$$\text{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta); \qquad 1 + \text{cotg}^2(\theta) = \text{cosec}^2(\theta).$$

2. *Sejam θ o ângulo oposto ao lado $\overline{AC}$ de um triângulo de vértices A, B e C. Então:*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos(\theta).$$

3. *Seja θ e ϕ dois ângulos quaisquer. Então:*

$$\text{sen}(\theta \pm \phi) = \text{sen}(\theta)\cos(\phi) \pm \text{sen}(\phi)\cos(\theta), \quad \cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta).$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, Boyce & DiPrima, pp. 46-49.

A Figura 4.3 permite-nos compreender melhor todas estas expressões trigonométricas que aqui referimos. Nesta figura, substituímos sa notações dos vértices A, B e C, anteriormente feitas, pelas notações C, O e P, respectivamente, que são mais habituais no estudo de ângulos inscritos ao centro de uma circunferência.

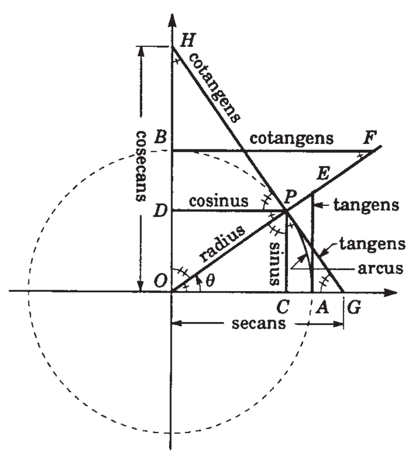

Figura 4.3: Expressões trigonométricas no círculo unitário.

A primeira propriedade enunciada na proposição anterior, designa-se por **Fórmula Fundamental da Trigonometria**. A segunda é a **Lei dos Cossenos** e a terceira dá-nos as fórmulas de soma e diferença de ângulos. Observe-se que na Lei dos Cossenos, o triângulo não é necessariamente rectângulo.

As relações trigonométricas estudadas aqui vão dar origem uma vasta classe de funções trigonométricas cuja principal característica é o facto de serem periódicas. Além das motivações geométricas, estas novas funções poderão ter expressão importante na explicação de fenómenos que se repetem.

Definição 4.1.3 *Diz-se que f é uma* ***função periódica****, se para cada $x \in \mathbb{D}_f$, o valor de $f(x)$ é o mesmo de $f(x+p)$, sendo p o menor número real não nulo, denominado* ***período da função****, tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{D}_f$.*

4.1.3 Funções seno e arco-seno

Definição 4.1.4 *Define-se a* ***função seno*** *por*

$$f(x) = \text{sen}(x).$$

- *Domínio: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.*
- *Contra-domínio: $\mathbb{D}'_f = [-1, 1]$.*
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Periodicidade: é uma função periódica de período 2π.*
- *Variação de sinal: é positiva para $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ e negativa para $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Monotonia: é estritamente crescente para $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e estritamente decrescente para $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Extremos: tem o valor máximo $y = 1$ nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; tem o valor mínimo $y = -1$ nos pontos $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*
- *Injectividade: Não é injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.4*

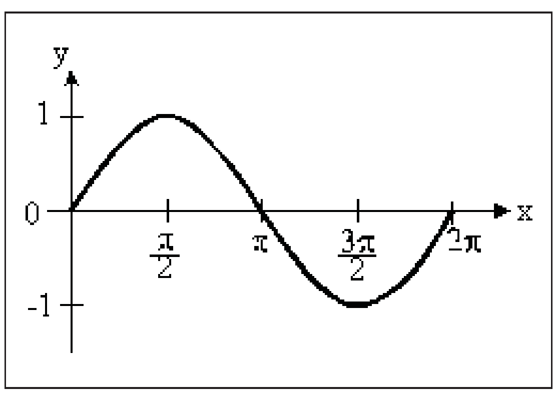

Figura 4.4: Função seno.

Como resulta das propriedades da função seno, verifica-se que esta não é injectiva se considerarmos todo o seu domínio. No entanto, observa-se que a função seno é injectiva se a restringirmos a um dos intervalos da forma

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]_{k\in\mathbb{Z}} \qquad \text{ou} \qquad \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Podemos, então, considerar a restrição da função seno a um destes intervalos e aí vai ser possível determinar a sua função inversa. Ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vamos designar por **ramo principal da função seno**.

Definição 4.1.5 *Define-se a* ***função arco-seno*** *como sendo a inversa da função seno, quando restringida ao intervalo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, e denota-se por:*

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = [-1, 1]$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = 0$.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, 1)$ *e é negativa para* $x \in (-1, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Extremos: tem o valor máximo* $y = \frac{\pi}{2}$ *em* $x = 1$*; tem o valor mínimo* $y = -\frac{\pi}{2}$ *em* $x = -1$.
- *Gráfico: Ver Figura 4.5*

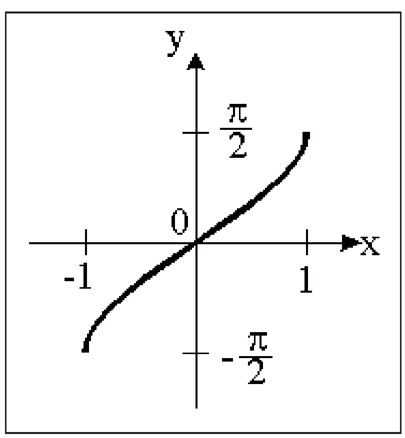

Figura 4.5: Função arco-seno.

A expressão arcsen(x), lê-se arco cujo seno é x e, fazendo a inversão da tabela dos valores principais do seno, obtemos a tabela seguinte com os valores principais da função arco-seno.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsen(x)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

4.1.4 Funções cosseno e arco-cosseno

Definição 4.1.6 *Define-se a **função cosseno** por*

$$f(x) = \cos(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = [-1, 1]$.
- *Paridade: é uma função par.*
- *Zeros:* $x = \pm k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- *Periodicidade: é uma função periódica de período* 2π.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ *e negativa para* $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ , \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Monotonia: é estritamente crescente para* $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ *e estritamente decrescente para* $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Extremos: tem o valor máximo* $y = 1$ *nos pontos* $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; *tem o valor mínimo* $y = -1$ *nos pontos* $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- *Injectividade: Não é injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.6.*

Tal como a função seno, também a função cosseno não é injectiva se considerarmos todo o seu domínio. Contudo, verifica-se que a função cosseno é injectiva, se a restringirmos a um dos intervalos da forma

$$[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]_{k\in\mathbb{Z}} \qquad \text{ou} \qquad [2k\pi, \pi + 2k\pi]_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

Podemos, então, considerar a restrição da função cosseno a um destes intervalos e aí vai ser possível determinar a sua função inversa. Ao intervalo $[0, \pi]$ vamos designar por **ramo principal da função cosseno**.

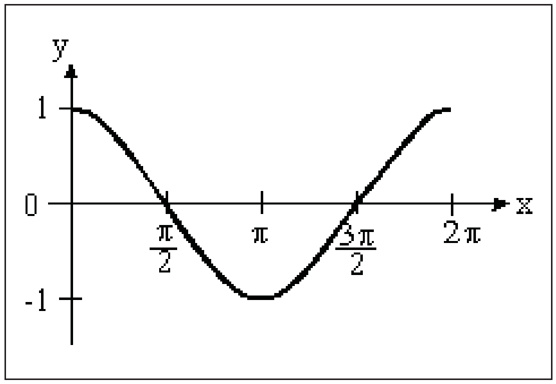

Figura 4.6: Função Cosseno.

Definição 4.1.7 *Define-se a **função arco-cosseno** como sendo a inversa da função cosseno, quando restringida ao intervalo* $[0, \pi]$*, e denota-se por:*

$$f(x) = \arccos(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = [-1, 1]$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = [0, \pi]$.
- *Paridade: é uma função que não é par nem ímpar.*
- *Zeros:* $x = 1$.
- *Variação de sinal: é não-negativa no seu domínio.*
- *Monotonia: é estritamente decrescente em todo o seu domínio.*
- *Extremos: tem o valor máximo* $y = \pi$ *em* $x = -1$*; tem o valor mínimo* $y = 0$ *em* $x = 1$.
- *Gráfico: Ver Figura 4.7*

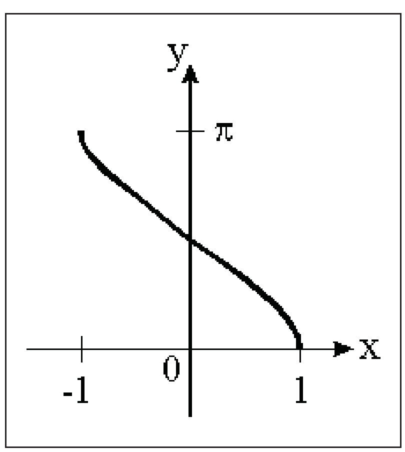

Figura 4.7: Função arco-cosseno.

A expressão $\arccos(x)$ lê-se arco cujo cosseno é x e, fazendo a inversão da tabela dos valores principais do cosseno, obtemos a tabela seguinte com os valores principais da função arco-cosseno.

x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\arccos(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

4.1.5 Funções tangente e arco-tangente

Definição 4.1.8 *Define-se a **função tangente** por*

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) \equiv \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = \mathbb{R}$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- *Periodicidade: é uma função periódica de período* π.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ *e negativa para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o domínio.*
- *Injectividade: Não é injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.8*

Tal como para as funções seno e cosseno, também a função tangente não é injectiva em todo o seu domínio. Mas, restringido-a um dos intervalos da forma

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)_{k\in\mathbb{Z}},$$

a função tangente é injectiva. Ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vamos designar por **ramo principal da função tangente**.

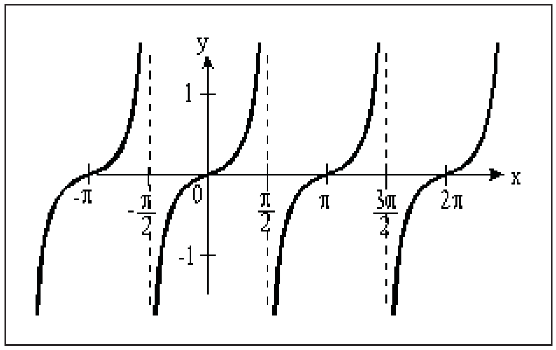

Figura 4.8: Função tangente.

Definição 4.1.9 *Define-se a* ***função arco-tangente*** *como sendo a inversa da função tangente, quando restringida ao intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, e denota-se por:*

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = 0$.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, +\infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.9*

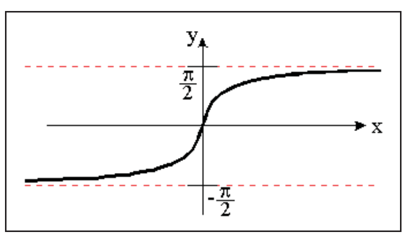

Figura 4.9: Função arco-tangente.

A expressão $\operatorname{arctg}(x)$ lê-se arco cuja tangente é x e, fazendo a inversão da tabela dos valores principais da tangente, obtemos a tabela seguinte com os valores principais da função arco-tangente.

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

4.1.6 Funções cotangente e arco-cotangente

Definição 4.1.10 *Define-se a **função cotangente** por*

$$f(x) = \operatorname{cotg}(x) \equiv \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = \mathbb{R}$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Periodicidade: é uma função periódica de período* π.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ *e negativa para* $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Monotonia: é estritamente decrescente em todo o seu domínio.*
- *Injectividade: Não é injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.10*

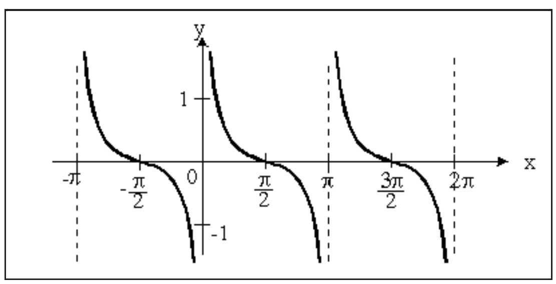

Figura 4.10: Função cotangente.

Do mesmo modo que a função tangente, também a função cotangente não é injectiva em todo o seu domínio. Mas, a sua restrição a um dos intervalos da forma

$$(k\pi, (k+1)\pi)_{k \in \mathbb{Z}},$$

já é uma função injectiva. O intervalo $(0, \pi)$ vai ser designado por **ramo principal da função cotangente**.

Definição 4.1.11 *Define-se a **função arco-cotangente** como sendo a inversa da função cotangente, quando restringida ao intervalo* $(0, \pi)$, *e denota-se por:*

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = (0, \pi)$.
- *Paridade: é uma função que não é par nem ímpar.*
- *Zeros: não tem.*
- *Variação de sinal: é sempre positiva.*
- *Monotonia: é estritamente decrescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.11*

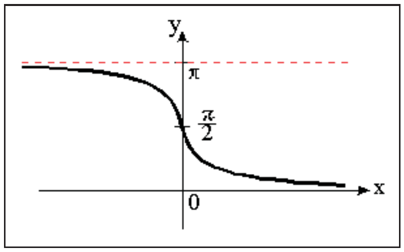

Figura 4.11: Função Arco-cotangente.

A expressão $\operatorname{arccotg}(x)$ lê-se arco cuja cotagente é x e, fazendo a inversão da tabela dos valores principais da cotangente, obtemos a tabela seguinte com os valores principais da função arco-cotangente.

x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{arccotg}(x)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

4.1.7 Funções secante e arco-secante

Definição 4.1.12 *Define-se a **função secante** por*

$$f(x) = \sec(x) \equiv \frac{1}{\cos(x)}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- *Paridade: é uma função par.*
- *Zeros: não tem.*

- *Periodicidade: é uma função periódica de período* 2π.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ *e negativa para* $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Monotonia: é estritamente crescente para* $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)$ *e estritamente decrescente para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$.
- *Extremos: tem mínimos locais com valor* $y = 1$ *em* $x = 2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$; *tem máximos locais com valor* $y = -1$ *em* $x = (2k+1)\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Injectividade: Não é injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.12*

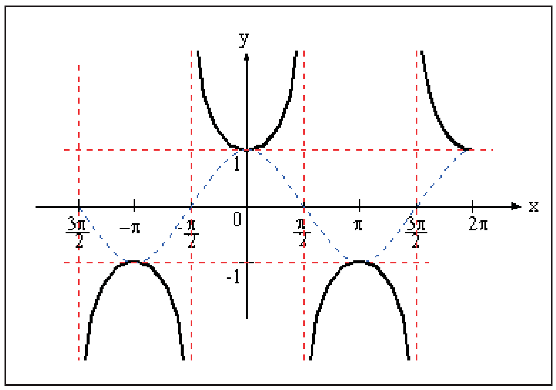

Figura 4.12: Função secante.

Tal como nos casos anteriores, também a função secante não é injectiva em todo o seu domínio. Mas, a sua restrição a um dos conjuntos da forma

$$\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)_{k\in\mathbb{Z}},$$

já é uma função injectiva. O conjunto $(0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ vai ser designado por **ramo principal da função secante**.

Definição 4.1.13 *Define-se a* ***função arco-secante*** *como sendo a inversa da função secante, restringida ao conjunto* $(0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, *e denota-se por:*

$$f(x) = \operatorname{arcsec}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- *Contra-domínio:* $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- *Paridade: é uma função que não é par nem ímpar.*
- *Zeros:* $x = 1$.

- *Variação de sinal: é sempre não-negativa.*
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.13*

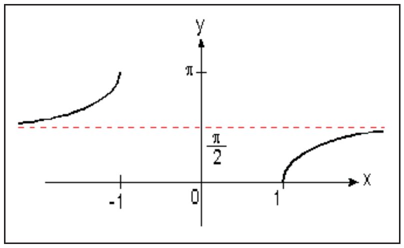

Figura 4.13: Função arco-secante.

A expressão $\operatorname{arcsec}(x)$ lê-se arco cuja secante é x e, fazendo a inversão da tabela dos valores principais da secante, obtemos a tabela seguinte com os valores principais da função arco-secante.

x	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\operatorname{arcsec}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

4.1.8 Funções cosecante e arco-cosecante

Definição 4.1.14 *Define-se a* ***função cosecante*** *por*

$$f(x) = \operatorname{cosec}(x) \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros: não tem.*
- *Periodicidade: é uma função periódica de período* 2π.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ *e negativa para* $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.

- *Monotonia: é estritamente crescente para* $x \in \left((2k-1)\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, (2k+1)\pi\right)$ *e estritamente decrescente para* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

- *Extremos: tem mínimos locais com valor* $y = 1$ *em* $x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$; *tem máximos locais com valor* $y = -1$ *em* $x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.

- *Injectividade: Não é injectiva.*

- *Gráfico: Ver Figura 4.14*

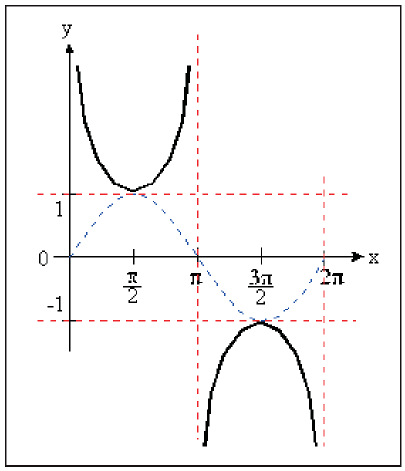

Figura 4.14: Função cosecante.

Também a função cosecante não é injectiva em todo o seu domínio. Mas, a sua restrição a um dos conjuntos da forma

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \setminus \{2k\pi\},$$

com $k \in \mathbb{Z}$, já é uma função injectiva. O conjunto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ vai ser designado por **ramo principal da função cosecante**.

Definição 4.1.15 *Define-se a* ***função arco-cosecante*** *como sendo a inversa da função cosecante, quando restringida ao conjunto* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, *e denota-se por:*

$$f(x) = \mathrm{arccosec}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- *Contra-domínio:* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$.

- *Paridade: é uma função ímpar.*

- *Zeros:* $x = 1$.

- *Variação de sinal: é sempre não-negativa.*

- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*

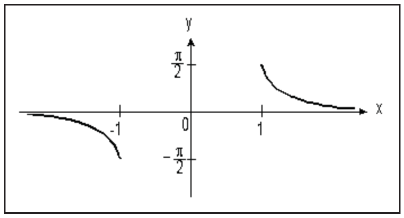

Figura 4.15: Função arco-cosecante.

- *Gráfico: Ver Figura 4.15*

A expressão $\text{arccosec}(x)$ lê-se arco cuja cosecante é x e, fazendo a inversão da tabela dos valores principais da cosecante, obtemos a tabela seguinte com os valores principais da função arco-cosecante.

x	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\text{arccosec}(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

4.1.9 Funções seno hiperbólico e argumento do seno hiperbólico

Definição 4.1.16 *Define-se a função **seno hiperbólico** por*

$$f(x) = \text{senh}(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = \mathbb{R}$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = 0$.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, +\infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Injectividade: É injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.16*

A função seno hiperbólico, sendo injectiva em todo o seu domínio, vai admitir função inversa sem restrições.

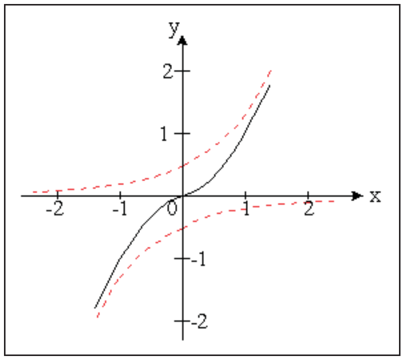

Figura 4.16: Função seno hiperbólico.

Definição 4.1.17 *Define-se a função* ***argumento do seno hiperbólico*** *como sendo a inversa da função seno hiperbólico e denota-se por:*

$$f(x) = \text{argsh}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = 0$.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, +\infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.17*

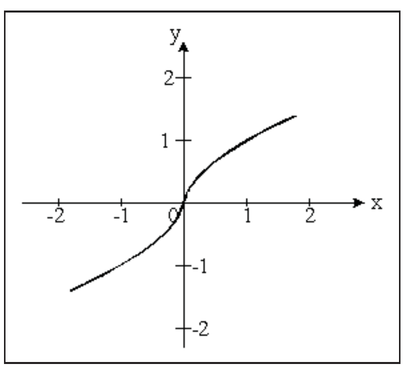

Figura 4.17: Função argumento do seno hiperbólico.

A expressão $\text{argsh}(x)$ lê-se argumento cujo seno hiperbólico é x.

4.1.10 Funções cosseno hiperbólico e argumento do cosseno hiperbólico

Definição 4.1.18 *Define-se a função **cosseno hiperbólico** por*

$$f(x) = \cosh(x) =\equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}_f = [1, +\infty)$.
- *Paridade: é uma função par.*
- *Zeros: não tem.*
- *Variação de sinal: é sempre positiva.*
- *Monotonia: é estritamente crescente para* $x \in (0, +\infty)$ *e estritamente decrescente para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Injectividade: Não é injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.18*

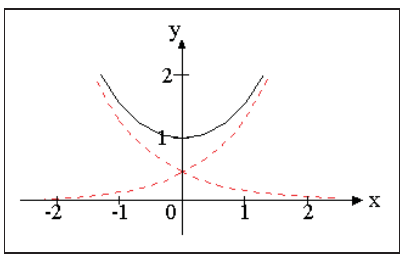

Figura 4.18: Função cosseno hiperbólico.

Verifica-se que a função cosseno hiperbólico é injectiva, se a restringirmos aos intervalos $(-\infty, 0]$ ou $[0, +\infty)$. Fixando o intervalo $[0, +\infty)$ podemos aí considerar a inversa da função cosseno hiperbólico.

Definição 4.1.19 *Define-se a função **argumento do cosseno hiperbólico** como sendo a inversa da função cosseno hiperbólico, restringida ao intervalo* $[0, +\infty)$, *e denota-se por*

$$f(x) = \operatorname{argch}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = [1, +\infty)$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}_f = [0, +\infty)$.
- *Zeros:* $x = 1$.

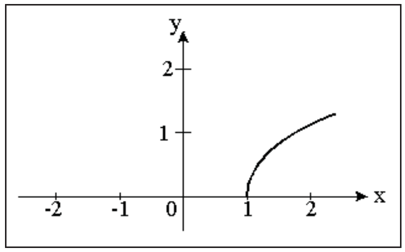

Figura 4.19: Função argumento do cosseno hiperbólico.

- *Variação de sinal: é sempre não negativa.*
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.19*

A expressão $\operatorname{argch}(x)$ lê-se argumento cujo cosseno hiperbólico é x.

4.1.11 Funções tangente hiperbólica e argumento da tangente hiperbólica

Definição 4.1.20 *Define-se a função* ***tangente hiperbólica*** *por*

$$f(x) = \operatorname{tgh}(x) \equiv \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}_f = (-1, 1)$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = 0$.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, \infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Injectividade: É injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.20*

Como a função tangente hiperbólica é injectiva em todo o seu domínio, vai admitir função inversa sem qualquer tipo de restrição.

Definição 4.1.21 *Define-se a função* ***argumento da tangente hiperbólica*** *como sendo a função inversa da função tangente hiperbólica e denota-se por:*

$$f(x) = \operatorname{argtgh}(x).$$

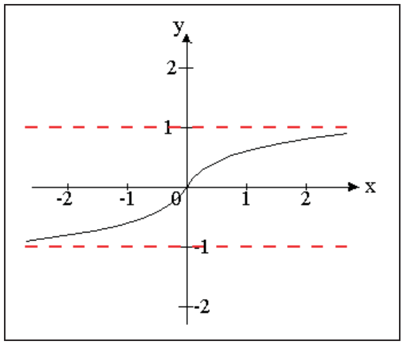

Figura 4.20: Função tangente hiperbólica.

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = (-1, 1)$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros:* $x = 0$.
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, \infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente crescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.21*

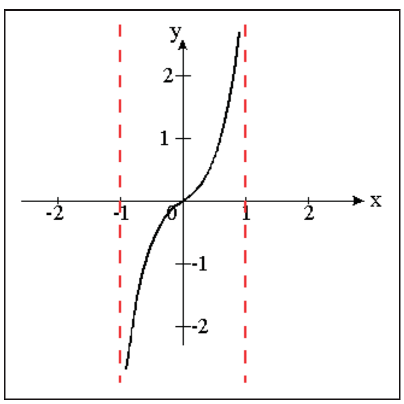

Figura 4.21: Função argumento da tangente hiperbólica.

A expressão $\operatorname{argtgh}(x)$ lê-se argumento cuja tangente hiperbólica é x.

4.1.12 Funções cotangente hiperbólica e argumento da cotangente hiperbólica

Definição 4.1.22 *Define-se a função **cotangente hiperbólica** por*

$$f(x) = \operatorname{cotgh}(x) \equiv \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- *Contra-domínio:* $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros: não tem.*
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (0, \infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, 0)$.
- *Monotonia: é estritamente decrescente em todo o seu domínio.*
- *Injectividade: É injectiva.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.22*

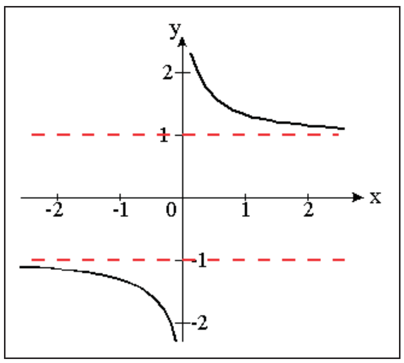

Figura 4.22: Função cotangente hiperbólica.

Como a função cotangente hiperbólica é injectiva no seu domínio, vai ter inversa sem restrição alguma.

Definição 4.1.23 *Define-se a função* ***argumento da cotangente hiperbólica*** *como sendo a inversa da função cotangente hiperbólica e denota-se por:*

$$f(x) = \operatorname{argcotgh}(x).$$

- *Domínio:* $\mathbb{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- *Contra-domínio:* $\mathbb{D}'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- *Paridade: é uma função ímpar.*
- *Zeros: não tem.*
- *Variação de sinal: é positiva para* $x \in (1, \infty)$ *e negativa para* $x \in (-\infty, -1)$.
- *Monotonia: é estritamente decrescente em todo o seu domínio.*
- *Gráfico: Ver Figura 4.23*

A expressão $\operatorname{argcotgh}(x)$, lê-se argumento cuja cotangente hiperbólica é x.

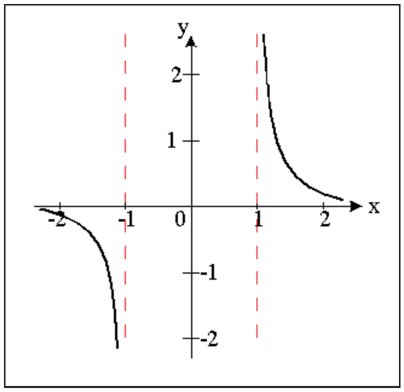

Figura 4.23: Função argumento da cotangente hiperbólica.

4.1.13 Exercícios

1. Considere as funções seguintes:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right); \qquad g(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}; \qquad h(x) = \arccos\left(\frac{1+x}{1-x}\right);$$

$$i(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x); \qquad j(x) = \sec(x) - 1; \qquad k(x) = \operatorname{senh}(x-1) - 2;$$

$$l(x) = 2\pi + \operatorname{arctg}(x-3); \qquad m(x) = \operatorname{tgh}(2x-3) + 1; \qquad n(x) = \operatorname{argch}(x-2) + 1.$$

a) Determine o domínio e o contra-domínio de cada.
b) Determine os zeros de cada.
c) Estude-as quanto à paridade.
d) Indique o período das que são periódicas.

2. Considere a função seguinte:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

a) Determine o domínio $\mathbb{D}_f$ de f.
b) Mostre que, para quaisquer x, $y \in \mathbb{D}_f$, se tem

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

3. Considere a função definida a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(x) & -1 \le x \le 0 \\ \operatorname{arctg}(x) & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

a) Calcule $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.
b) Esboce o gráfico de f.

4. Usando a Fórmula Fundamental da Trigonometria, mostre que:

$$\text{a) } 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) \qquad \text{e} \qquad \text{b) } 1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x).$$

5. Considere as funções seguintes:

$$f(x) = \text{arcsen}(x); \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f e g.
b) Esboce os respectivos gráficos.
c) O que pode concluir sobre as funções f e g.

6. Considere, agora, as funções seguintes:

$$f(x) = \text{arctg}(x); \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arccotg}(x).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f e g.
b) Esboce os respectivos gráficos.
c) O que pode concluir sobre as funções f e g.

7. Considere, ainda, as funções seguintes:

$$f(x) = \text{arcsec}(x); \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arccosec}(x).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f e g.
b) Esboce os respectivos gráficos.
c) O que pode concluir sobre as funções f e g.

8. Determine as expressões designatórias das inversas das funções a seguir indicadas:

$$f(x) = \sqrt[x]{2^{x-2}}\,; \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right)\,;$$

$$h(x) = \cos((2x+3)\pi)\,; \qquad i(x) = 4^{\,\text{arcsen}(x-6)}\,.$$

9. Usando as definições das funções seno e cosseno hiperbólicos, mostre que:
a) $\text{senh}(x+y) = \text{senh}(x)\cosh(y) + \text{senh}(y)\cosh(x)$;
b) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \text{senh}(x)\,\text{senh}(y)$;
c) $1 + \text{senh}^2(x) = \cosh^2(x)$.

10. Recorrendo apenas ao conhecimento do gráfico das funções elementares já estudadas, esboce os gráficos das funções seguintes:

$$d(x) = e^{3-x} + 2\,; \qquad e(x) = 1 + |\ln(x-1)|\,; \qquad f(x) = 1 + \text{sen}(2x - \pi)\,;$$

$$g(x) = x\,\text{sen}(x)\,; \qquad h(x) = 3 - 5\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\,; \qquad i(x) = \text{tg}^2(x) - 1\,;$$

$$l(x) = 2\pi + \text{arctg}(x-3)\,; \qquad j(x) = x\,\text{cosec}(x) - 1\,; \qquad k(x) = x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,;$$

$$l(x) = 1 - |\text{senh}(x+2)|\,; \qquad m(x) = \max(\text{sen}(x), \cos(x))\,; \qquad n(x) = 3 - \cosh(2x-1)\,.$$

4.2 Limites de funções

No Capítulo 2, aquando do estudo do Limite de Sucessões, já introduzimos a recta acabada $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. As definições das operações algébricas que aí fizemos entre os elementos $+\infty$ e $-\infty$ com os números reais, bem como entre si, mantêm-se. Assim como se mantêm as novas indeterminações lá definidas.

4.2.1 Noções de limites

No que se segue, iremos considerar sempre funções reais de variáveis reais com domínios contidos em $\mathbb{R}$. Por exemplo, f será uma função real de variável real com domínio $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 4.2.1 *Diz-se que um número real b é o limite de uma função f no ponto $x = a$, ou quando x tende para a, e escreve-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

se

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\ :\ \forall\ x\ \ (x \in \mathbb{D}_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\,.$$

A definição anterior tem o significado geométrico seguinte:

- para qualquer $x \in \mathbb{D}_f$ numa qualquer vizinhança (proximidade) de $x = a$, no caso de haver limite, vai existir sempre uma vizinhança de $y = b$ que contém a imagem $f(x)$.

Desta forma o conceito de limite vai ter relevância do ponto de vista microscópico, o qual em Análise Matemática se diz ponto de vista infinitesimal.

Se não existir o número real b da Definição 4.2.1, vamos dizer que a função não tem limite no ponto $x = a$. No caso de $b = +\infty$ ou $b = -\infty$, o limite não existe, mas, por vezes, comete-se um abuso de linguagem e de escrita dizendo que o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Tendo presente que se trata de uma abuso de escrita, podemos adaptar a definição anterior para escrever o seguinte:

- $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\ :\ \forall\ x\ \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}\right)\ ;$

- $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\ :\ \forall\ x\ \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\right)\ .$

Observe-se que sobre o ponto $x = a$ onde se calcula o limite não impusemos nenhuma condição. A ideia é que se possa sempre chegar até a por pontos interiores ao domínio $\mathbb{D}_f$. Isto corresponde a dizer que a é um ponto de acumulação[1] do domínio $\mathbb{D}_f$. Por isso, convém referir que o ponto $x = a$ não pertence necessariamente ao domínio $\mathbb{D}_f$. Se, porventura, a pertencer a $\mathbb{D}_f$, então o cálculo do limite resume-se a substituir na expressão designatória da função f a variável x por a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \forall\ a \in \mathbb{D}_f.$$

[1] Diz-se que a é um **ponto de acumulação** do conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se todo o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém, pelo menos, um ponto de A distinto de a.

Exemplo 4.2.1 *Calcule os limites seguintes:*

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\frac{1}{2}} \arccos(x); \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \mathrm{tgh}(x).$$

No caso do ponto $x = a$ não pertencer ao domínio $\mathbb{D}_f$, o cálculo do limite já vai ser mais complicado. Aqui convém distinguir as situações em que $a \in \mathbb{R}$ e aquelas quando $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. Nestas últimas, temos de adaptar a Definição 4.2.1 para termos uma definição de limite apropriada.

Definição 4.2.2 *Diz-se que um número real b é o limite de uma função f quando x tende para $+\infty$, e escreve-se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \; \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).$$

Diz-se que um número real b é o limite de uma função f quando x tende para $-\infty$, e escreve-se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b,$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \; \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).$$

Os dois casos da definição anterior têm, respectivamente, os significados geométricos seguintes:

- para qualquer $x \in \mathbb{D}_f$ infinitamente grande positivo, no caso de haver limite, vai existir sempre uma vizinhança de $y = b$ que contém a imagem $f(x)$;
- para qualquer $x \in \mathbb{D}_f$ infinitamente grande negativo, no caso de haver limite, vai existir sempre uma vizinhança de $y = b$ que contém a imagem $f(x)$.

Refira-se que, aqui, não faz sentido dizer que $+\infty$ ou $-\infty$ são pontos de acumulação de $\mathbb{D}_f$, a não ser no sentido de se poder ir para $+\infty$ ou $-\infty$ por pontos interiores a $\mathbb{D}_f$.

Se não existir o número real b da Definição 4.2.2, vamos dizer que a função não tem limite no ponto $x = a$. No caso de $b = +\infty$ ou $b = -\infty$, o limite não existe, e novamente costuma-se abusar da linguagem e da escrita dizendo que o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Adaptando a definição anterior, podemos escrever o seguinte:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \; \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}\right);$$
- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \; \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}\right);$$
- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \; \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x < -\frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\right);$$
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \; \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Exemplo 4.2.2 *Calcule os limites seguintes:*

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}(x); \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sech}(x); \qquad \text{c) } \lim_{x\to-\infty} (x+1)^2.$$

No caso do ponto $x = a$ onde se pretende calcular o limite não pertencer a $\mathbb{D}_f$ mas pertencer a $\mathbb{R}$, pode acontecer uma situação completamente diferente. Por exemplo, no caso de existirem pontos $x \in \mathbb{D}_f$ tais que $x > a$ e $x < a$. Quando se passa ao limite, convém saber por que valores de $x \in \mathbb{D}_f$ nos vamos aproximar do ponto $x = a$: se por valores $x > a$ ou $x < a$. É que, dependendo da função, o resultado final pode ser diferente se nos aproximarmos por valores $x > a$ ou $x < a$.

Definição 4.2.3 *Diz-se que um número real b é o limite de uma função f no ponto $x = a$, ou quando x tende para a, por valores à direita de a e escreve-se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b,$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \ \ (x \in \mathbb{D}_f \wedge x > a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\,.$$

Diz-se que um número real b é o limite de uma função f no ponto $x = a$, ou quando x tende para a, por valores à esquerda de a e escreve-se

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b,$$

se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \ \ (x \in \mathbb{D}_f \wedge x < a - \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\,.$$

No caso de $b = +\infty$ ou $b = -\infty$, o limite respectivo não existe, e novamente costuma-se abusar da linguagem e da escrita dizendo que o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Tendo presente que se trata de um abuso de escrita, podemos escrever o seguinte:

- $\displaystyle \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \ \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x < a + \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}\right)\,;$
- $\displaystyle \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \ \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\right)\,;$
- $\displaystyle \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \ \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x > a - \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}\right)\,;$
- $\displaystyle \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \ \left(x \in \mathbb{D}_f \wedge x > a - \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}\right)\,.$

Os limites da Definição 4.2.3 são designados por **limites laterais**, **à direita** e **à esquerda**, e habitualmente denotam-se por $f(a^+)$ e $f(a^-)$, respectivamente:

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)\,; \qquad f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Neste caso, vamos dizer que a função tem limite no ponto $x = a$ e com valor $y = b$ ($a,\ b \in \mathbb{R}$), se $f(a^+) = f(a^-) = b$. Observe-se que poderão existir os limites laterais $f(a^+)$ e $f(a^-)$, mas não existir o limite de f em $x = a$, por se ter $f(a^+) \neq f(a^-)$.

Exemplo 4.2.3 *Calcule os limites seguintes:*

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}; \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} f(x), \quad f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}.$$

4.2.2 Propriedades

Proposição 4.2.1 *O limite de uma função, quando existe, é único.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Proposição 4.2.2 *Sejam f e g duas funções reais de uma variável real e $x=a$ um ponto de acumulação de $\mathbb{D}_f\cap\mathbb{D}_g$, ou eventualmente $+\infty$ ou $-\infty$. Suponhamos que existem os limites de f e g quando x tende para a e se tem*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \qquad e \qquad \lim_{x\to a} g(x)=c, \quad \text{com } b,\ c\in\mathbb{R}.$$

Então, existem os limites de $f+g$, $f-g$, fg quando x tende para a e tem-se:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+c; \qquad \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=b-c; \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x)=b\,c.$$

Se $c\neq 0$, então também existe o limite de f/g quando x tende para a e tem-se:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}.$$

Mais, se $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{D}_f$, então também existe o limite de f^g quando x tende para a e tem-se:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]=b^c.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Os resultados expressos na proposição anterior poderão ainda ser generalizados para o caso de f e ou g terem limites infinitos, com excepção dos casos em que se obtêm indeterminações. Observe-se que estes resultados ainda permanecem válidos no caso de f ou g serem funções constantes.

Proposição 4.2.3 *Sejam f e g duas funções reais de uma variável real tais que $\mathbb{D}'_g\subseteq\mathbb{D}_f$, $x=a$ um ponto de acumulação de $\mathbb{D}_g$, eventualmente $+\infty$ ou $-\infty$, e b um ponto de acumulação de $\mathbb{D}_f$, eventualmente $+\infty$ ou $-\infty$. Suponhamos que existem os limites de g quando x tende para a e de f quando x tende para b e que se tem:*

$$\lim_{x\to a} g(x)=b \qquad e \qquad \lim_{x\to b} f(x)=c.$$

Então, existe o limite de $f\circ g$ quando x tende para a e tem-se:

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=c.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Proposição 4.2.4 *Sejam $a \in \overline{\mathbb{R}}$, e f, g, h funções reais de uma variável cujos domínios contenham uma vizinhança de $x = a$ e tais que nessa vizinhança se tenha*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Suponhamos que existem os limites de f e h quando x tende para a e se tem:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b.$$

Então, também existe o limite de g quando x tende para a e tem-se:

$$\lim_{x \to a} g(x) = b.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

O resultado anterior ainda permite a generalização seguinte para limites infinitos.

Proposição 4.2.5 *Sejam $a \in \overline{\mathbb{R}}$, e f, g funções reais de uma variável cujos domínios contenham uma vizinhança de $x = a$ e tais que nessa vizinhança se tenha*

$$f(x) \leq g(x).$$

Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

4.2.3 Limites importantes

No cálculo de limites, usam-se muitas vezes resultados sobre limites já conhecidos. Pela sua importância no cálculo de limites, vamos designar estes limites por **limites notáveis**.

Proposição 4.2.6 *Tem-se:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

A proposição seguinte é muito importante para o cálculo de limites de expressões onde intervém o logaritmo.

Proposição 4.2.7 *Sejam f uma função real de variável real, $x = a$ um ponto de acumulação de $\mathbb{D}_f$, eventualmente $+\infty$ ou $-\infty$, tal que $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Se $c \in \mathbb{R}^+$, então*

$$\lim_{x \to a} [\ln(f(x))] = \ln \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \equiv \ln(c).$$

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` É uma consequência da Proposição 4.2.5.

Conjugando os resultados das duas proposições precedentes, podemos provar a validade dos limites notáveis expressos na proposição seguinte.

Proposição 4.2.8 *Tem-se:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1.$$

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:`

Exemplo 4.2.4 *Usando os limites notáveis anteriores, mostre que:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

4.2.4 Cálculo de limites

No cálculo de limites podemos usar a Proposição 4.2.2 sempre que não obtenhamos indeterminações. Mas, em muitas situações de cálculo de limites, surgem indeterminações. Ao processo de resolver determinada indeterminação, vamos designar por **levantamento da indeterminação**.

Regra 5 (levantamento de indeterminações do tipo $\infty-\infty$) *As indeterminações dos tipos*

$$\infty-\infty,$$

podem, normalmente, ser levantadas pondo em evidência o termo de maior grau, o que em muitas situações corresponde a simplificar a expressão. No caso dos limites em que intervêm raízes, basta multiplicar pelo conjugado.

Exemplo 4.2.5 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule os limites seguintes:*

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)\qquad e\qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$$

Regra 6 (levantamento de indeterminações do tipo $0\times\infty$) *As indeterminações dos tipos*

$$0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},$$

podem, normalmente, ser levantadas pondo em evidência os termos de maior grau. Em muitas situações, novamente, bastará simplificar a expressão dada.

Exemplo 4.2.6 (`AULA TEÓRICA`) *Calcule os limites seguintes:*

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}\qquad e\qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3^{2x}-5^{x+1}}{4^{x+1}+2^{2x}}.$$

Regra 7 (Levantamento de indeterminações do tipo 1^∞) *As indeterminações do tipo*

$$1^\infty$$

podem, normalmente, ser levantadas usando o limite notável de Neper.

Exemplo 4.2.7 *Calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{x^3}\right)^{4x^3}.$$

Como é evidente, sempre que seja possível, podemos usar os limites notáveis conhecidos para levantar alguma indeterminação. Contudo, existem situações em que se torna muito difícil ou bastante demorado o cálculo de um limite e o levantamento de uma indeterminação vai originar nova indeterminação. Para estas situações, temos ainda ao nosso dispor uma técnica, ao mesmo tempo, muito simples e muito poderosa para o cálculo de limites. Esta técnica vai envolver o conceito de infinitésimos da mesma ordem que definimos a seguir.

Definição 4.2.4 *Seja f uma função real de variável real e $x=a$ um ponto de acumulação do seu domínio $\mathbb{D}_f$, eventualmente $+\infty$ ou $-\infty$. Diz-se que f é um infinitésimo quando x tende para a, se*

$$\lim_{x\rightarrow a}f(x)=0.$$

Sejam, agora, f e g dois infinitésimos quando x tende para a. Dizemos que f e g são infinitésimos da mesma ordem, quando x tende para a, se

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=c,\qquad \text{com}\quad c=\text{constante}\neq 0.$$

No caso de $c=1$, as funções f e g dizem-se assimptoticamente iguais, quando x tende para a e escrevemos

$$f(x)\rightsquigarrow g(x)\quad \text{quando } x \text{ tende para } a.$$

Proposição 4.2.9 *Quando x tende para 0, temos as funções assimptoticamente iguais seguintes:*

$$\operatorname{sen}(x)\rightsquigarrow x;\qquad 1-\cos(x)\rightsquigarrow\frac{x^2}{2};\qquad \ln(1+x)\rightsquigarrow x;\qquad e^x-1\rightsquigarrow x.$$

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Consequência das Proposições 4.2.6, 4.2.8 e do Exercício 4.2.4.

A utilidade da proposição anterior no cálculo dos limites, reside na possibilidade de, num limite, podermos substituir uma função por outra assimptoticamente igual, quando x tende para o ponto onde se está a calcular o limite e, desse modo, simplificar o cálculo do limite.

Exemplo 4.2.8 *Recorrendo a relações entre infinitésimos da mesma ordem, calcule os limites seguintes:*

$$\text{a) } \lim_{x\rightarrow 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}{(x-x^3)^2};\qquad \text{b) } \lim_{x\rightarrow 0}\frac{1-e^{1-\cos(x)}}{\ln(1-x)+\ln(1+x)}.$$

4.2.5 Exercícios

1. Calcule os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$; c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-t^2}{h}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\operatorname{tgh} x$; e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$; i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$; k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$; l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

2. Estude os limites seguintes em função de a:

a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{|x|}{x}$; para $a=-1$; $a=0$; $a=-\infty$; $a=+\infty$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^4-1}{x^3-1}$; para $a\in\ [-\infty,+\infty]$.

3. Recorrendo a relações entre infinitésimos da mesma ordem, calcule os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)+\ln(3-x)-2\ln 3}{x^2}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{1-\cos(x)}}{\ln(1-x)+\ln(1+x)}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)}{1-e^{1-\cos(x)}}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{e^{\operatorname{arcsen}(x)}-1}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x\left(1-e^{\operatorname{sen}(x)}\right)}$.

4.3 Funções contínuas

Os gráficos das funções elementares de que já falamos, no Capítulo 1 e na Secção 1 deste capítulo, exibem uma propriedade de grande importância em Análise Matemática, a continuidade. A ideia de continuidade está subjacente na utilização corrente que fazemos de grande parte da matemática elementar.

4.3.1 Primeiras noções

Intuitivamente, a noção de continuidade de uma função, digamos f, significa que uma pequena variação da variável independente x implica somente uma pequena variação na variável dependente $y = f(x)$.

Definição 4.3.1 *Sejam f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e a um ponto de acumulação[2] de $\mathbb{D}_f$. Diz-se que a função f é contínua no ponto $x = a$, se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ :\ \forall\, x \ \ (x \in \mathbb{D}_f \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

A continuidade da função f no ponto $x = a$ tem o significado geométrico seguinte:

- $f(x)$ difere arbitrariamente muito pouco de $f(a)$ desde que x esteja suficientemente próximo de a.

Se, na definição anterior, fizermos a mudança de variável $h = x-a$, obtemos a forma equivalente de noção de continuidade:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ :\ \forall\, h \ \ (a + h \in \mathbb{D}_f \wedge |h| < \delta \Rightarrow |f(a + h) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Para definir a noção de continuidade, também podemos usar a noção de limite de uma função num ponto. Deste modo, dizemos que a função f é contínua no ponto $x = a$, se existir o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ e se tiver

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Vamos dizer que uma função é contínua, sem especificar onde, se for contínua em todos os pontos do seu domínio. Neste caso, o gráfico de uma tal função consiste de uma única curva. Do estudo que fizemos das funções elementares, podemos dizer que toda a função elementar é contínua no seu domínio de definição. Intuitivamente, percebe-se que esta afirmação é verdadeira. No entanto, para sermos rigorosos, deveríamos demonstrá-la em cada caso de função elementar, recorrendo à definição anterior.

Os pontos onde a função não for contínua, são designados por pontos de descontinuidade. Os pontos de descontinuidade de uma função podem ser classificados em três classes distintas:

- $x = a$ é um **ponto de descontinuidade de primeira espécie** da função f, se existem os limites laterais:

  $$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x);$$

  mas $f(a^+) \neq f(a^-)$.

- $x = a$ é um **ponto de descontinuidade de segunda espécie** da função f, se, pelo menos, um dos limites laterais, $f(a^-)$ ou $f(a^+)$, não existe.

- $x = a$ é um **ponto de descontinuidade removível** da função f, se existem e são iguais os limites laterais $f(a^+)$ e $f(a^-)$, mas são distintos de $f(a)$.

[2]Ver nota de roda-pé da página 80.

Existe, ainda, uma quarta classe de pontos de descontinuidade que, apesar de não ser muito comum, tem também a sua relevância:

- $x = a$ é um **ponto de descontinuidade oscilatória** da função f, se em vizinhanças muito próximas de a, $f(x)$ oscila entre valores muito distintos.

Exemplo 4.3.1 *Mostre que as funções seguintes têm, respectivamente, descontinuidades de primeira espécie, de segunda espécie, oscilatória e removível no ponto $x = 0$:*

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{sinal}(x) \equiv \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases} \qquad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2}\,;$$

$$\text{c) } f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,; \qquad \text{d) } f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,.$$

4.3.2 Propriedades

A definição de continuidade que introduzimos na subsecção anterior, deve-se a Cauchy. Na proposição seguinte, apresentamos uma definição equivalente de continuidade, a qual se deve a Heine. Veja-se o Capítulo 2 para se perceber a analogia entre estas definições e as definições de sucessão convergente segundo Cauchy e segundo Heine.

Proposição 4.3.1 *Sejam f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e a um ponto de acumulação de $\mathbb{D}_f$. A função f é contínua no ponto $x = a$ se e só se qualquer que seja a sucessão u_n, de termos em $\mathbb{D}_f$, convergente para $x = a$, a sucessão $f(u_n)$ converge para $f(a)$.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Proposição 4.3.2 *Sejam f e g funções reais de variáveis reais, com domínios $\mathbb{D}_f$ e $\mathbb{D}_g$, respectivamente. Suponhamos que f e g são funções contínuas num ponto de acumulação $a \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$. Então, também, são contínuas, em $x = a$, as funções $f + g$, $f - g$, fg. Mais, se $g(a) \neq 0$, também é contínua, em $x = a$, a função f/g.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Proposição 4.3.3 *Sejam f e g funções reais de variáveis reais, com domínios $\mathbb{D}_f$ e $\mathbb{D}_g$, respectivamente. Suponhamos que g é contínua num ponto de acumulação $a \in \mathbb{D}_g$ e que f é contínua em $b = f(a)$, sendo b um ponto de acumulação de $\mathbb{D}_f$. Então, a função $f \circ g$ é contínua em $x = a$.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Proposição 4.3.4 (Teorema do valor intermédio) *Sejam f uma função contínua no seu domínio $\mathbb{D}_f$ e a e b números reais pertencentes a um intervalo $I \subset \mathbb{D}_f$ tais que $f(a) \neq f(b)$. Então, para todo ξ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um c entre a e b tal que $\xi = f(c)$.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Podemos escrever a afirmação da proposição anterior na forma simbólica seguinte:

$$\forall\, \xi \ \ (f(a) < \xi < f(b) \ \vee \ f(b) < \xi < f(a)) \quad \exists\, c \ \ (a < c < b \ \vee \ b < c < a) \ : \ \xi = f(c).$$

O Corolário seguinte é um caso particular do resultado anterior e que é muito conveniente para localizarmos raízes de equações que não se resolvam facilmente.

Corolário 4.3.1 *Seja f uma função nas condições do Teorema do Valor Intermédio (Proposição-4.3.4) e tal que*

$$f(a)f(b) < 0\,.$$

Então a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo de extremos a e b.

DEMONSTRAÇÃO: Consequência imediata da Proposição-4.3.4.

A proposição seguinte afirma-nos algo que já experimentámos no estudo das funções elementares.

Proposição 4.3.5 *Seja f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e injectiva num intervalo $I \subseteq \mathbb{D}_f$. Se f é contínua, então a função inversa f^{-1} também é contínua (em $f(I)$).*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Proposição 4.3.6 (Teorema de Weierstrasse) *Sejam f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e $I \subseteq \mathbb{D}_f$ um conjunto limitado fechado e não vazio. Se f é contínua em I, então a função f tem máximo e mínimo em I.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

4.3.3 Exercícios

1. Estude as funções seguintes quanto à continuidade:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}\,; \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(2x)}\,; \qquad \text{c) } f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}\,;$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^2-1}\,; \qquad \text{e) } f(x) = \frac{1}{1+e^{\sec x}}\,; \qquad \text{f) } f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen}(5\cos x)}\,.$$

2. Determine os valores de a de modo que as funções seguintes sejam contínuas em $x = 0$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-a}{1-x} & x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{x-a}{x+1} & x > 0 \end{cases}\;; \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} & x \neq 0 \\[2ex] 1 & x = 0 \end{cases}\,.$$

3. Determine os valores de a de modo que as funções seguintes sejam contínuas no ponto indicado:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x\left(1-e^{\operatorname{sen}(x)}\right)}, & x \neq 0 \\ a\,, & x = 0 \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{1-\cos(x)}}{\ln(1-x)+\ln(1+x)}, & x \neq 0 \\ a\,, & x = 0 \end{cases}$.

4. Determine as descontinuidades das funções seguintes e classifique-as quanto ao tipo:

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$; b) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

d) $f(x) = \dfrac{(1+x)^5-1}{x}$; e) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; f) $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$.

5. Mostre que a equação
$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$$
tem, pelo menos, uma raiz no intervalo aberto $(0,\ \pi)$.

6. Mostre que a função $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ tem, pelo menos, um zero no intervalo $[0,1]$.

7. Prove que a equação $x + \operatorname{senh}(x) = 0$ tem, pelo menos, uma raíz real.

8. Prove que todo o polinómio de grau ímpar tem, pelo menos, uma raiz real $(*)$.

9. Mostre que a equação $x^3 + 3x - 1 = 0$ tem uma raíz no intervalo $(0,1)$.

10. Seja f uma função contínua num intervalo $[a,\ b]$ tal que $f([a,\ b]) \subset [a,\ b]$. Prove que f tem, pelo menos, um ponto fixo no intervalo $[a,\ b]$ $(*)$.

Capítulo 5

Cálculo Diferencial

5.1 Derivadas

Consideremos uma função real de variável real f, com domínio $\mathbb{D}_f$, e seja $x = a$ um ponto interior ao conjunto $\mathbb{D}_f$. Designamos por **razão incremental** da função f no ponto $x = a$ à expressão seguinte:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A razão incremental dá-nos a taxa de variação da função f no intervalo de extremos x e a. Geometricamente, a razão incremental é interpretada como sendo a tangente trigonométrica do ângulo definido pela recta secante ao gráfico da função f nos pontos x e a e pelo eixo das abcissas.

Definição 5.1.1 *Sejam f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e $x = a$ um ponto interior ao conjunto $\mathbb{D}_f$. Chama-se derivada da função f no ponto $x = a$, e denota-se por $f'(a)$, ao limite seguinte, quando existe:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Portanto, a derivada de uma função num ponto interior ao seu domínio, é o limite da razão incremental da função nesse ponto. Geometricamente, a derivada $f'(a)$ é interpretada como sendo o declive da recta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = a$. Deste modo, $f'(a)$ representa a tangente trigonométrica do ângulo θ definido pela recta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = a$ e pelo eixo das abcissas.

Como a noção de derivada faz intervir o conceito de limite, também aqui vamos ter as noções de derivadas laterais.

Definição 5.1.2 *Sejam f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e $x = a$ um ponto interior a $\mathbb{D}_f$. Chamam-se, respectivamente, derivada lateral à esquerda de f e derivada lateral à direita da função f no ponto $x = a$ aos limites seguintes, quando existem:*

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad e \qquad f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

No caso da definição anterior, vamos dizer que a função tem derivada no ponto $x = a$, se $f'(a^+) = f'(a^-)$. Neste caso, ou se, no da definição precedente, existir $f'(a)$, dizemos que a função f é derivável no ponto $x = a$.

se, na definição de derivada, fizermos a mudança de variável $x = a + h$, obtemos a fórmula seguinte para $f'(a)$, que, por vezes, é mais prática:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Vamos dizer que uma função é derivável, sem especificar onde, se for derivável em todos os pontos do seu domínio. Neste caso, podemos definir a função derivada da função f por $f'(x)$. Em muitas situações podemos usar a notação seguinte para a função derivada da função f:

$$\frac{d\,f}{d\,x};$$

onde $d\,f$ corresponde ao diferencial de f: $\Delta\,f = f(x) - f(a)$; e $d\,x$ ao diferencial de x: $\Delta\,x = x - a$. Por vezes, os diferenciais $\Delta\,f$ e $\Delta\,x$ são designados por acréscimos de f e x, respectivamente, no intervalo de extremos x e a. Usando esta notação, pode-se, por vezes, definir a noção de derivada de uma função f num ponto $x = a$, recorrendo à seguinte expressão:

$$f'(a) = \lim_{\Delta\,x \to 0} \frac{f(a + \Delta\,x) - f(a)}{\Delta\,x}.$$

Uma consequência da definição de derivada, é que toda a função derivável é contínua.

Proposição 5.1.1 *Seja f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$. se f é derivável num ponto $x = a$ interior a $\mathbb{D}_f$, então f é contínua em $x = a$.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

No entanto, a recíproca da proposição anterior não é verdadeira, como mostra o contra-exemplo do exercício seguinte.

Exemplo 5.1.1 *Mostre que, no ponto $x = 0$, a função $f(x) = |x|$ é contínua, mas não é derivável.*

5.2 Regras de derivação

Nesta secção estabelecemos as regras que nos irão permitir calcular as derivadas das funções elementares já estudadas.

Proposição 5.2.1

1. *Se $f(x) = c$, onde $c =$ constante, então $f'(x) = 0$.*
2. *Se $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}_0$, então $f'(x) = n\,x^{n-1}$.*

3. *Se* $f(x) = a^x$, *onde* $a \in \mathbb{R}^+$, *então* $f'(x) = \ln a\, a^x$.

4. *Se* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, *então* $f'(x) = \cos(x)$.

5. *Se* $f(x) = \cos(x)$, *então* $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Na proposição seguinte estabelecemos as regras que nos permitem determinar as funções derivadas de somas, produtos e quocientes de funções, quando se conhece a derivada de cada função factor.

Proposição 5.2.2 *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções reais de variável real, deriváveis e com funções derivadas* $f'(x)$ *e* $g'(x)$. *Então:*

1. $(f+g)(x)$ *é derivável e* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

2. $(f\,g)(x)$ *é derivável e* $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$;

3. *se* $g(x) \neq 0$, $(f/g)(x)$ *é derivável e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Em particular, usando 1. e 2. da proposição anterior, obtemos para a diferença que:

$$(f-g)(x) \text{ é derivável e } (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)\,.$$

Com o auxílio das duas proposições precedentes, vamos conseguir provar as regras de derivação das funções elementares que resultam de operações algébricas entre funções estudadas na Proposição 5.2.3.

Proposição 5.2.3 1. *Se* $f(x) = x^{-n}$, *onde* $n \in \mathbb{N}_0$, *então* $f'(x) = -n\,x^{-(n+1)}$;

2. *Se* $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, *então* $f'(x) = \sec^2 x$;

3. *Se* $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$, *então* $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$;

4. *Se* $f(x) = \sec(x)$, *então* $f'(x) = \operatorname{tg}(x)\,\sec(x)$;

5. *Se* $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$, *então* $f'(x) = -\operatorname{cotg}(x)\,\operatorname{cosec}(x)$;

6. *Se* $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, *então* $f'(x) = \cosh(x)$;

7. *Se* $f(x) = \cosh(x)$, *então* $f'(x) = \operatorname{senh}(x)$;

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Na proposição seguinte vamos provar o resultado que nos irá permitir estabelecer as regras de derivação para as funções inversas das funções elementares.

Proposição 5.2.4 (Teorema de derivação da função inversa) *Sejam f uma função real de variável real, injectiva num intervalo $I \subseteq \mathbb{D}_f$ e f^{-1} a função inversa de f quando restringida ao intervalo I: $f^{-1} : f(I) \to I$. Se f é derivável num ponto x interior ao intervalo I e $f'(x) \neq 0$, então f^{-1} é derivável no ponto $y = f(x)$ e tem-se:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 366.

Para usarmos este resultado no cálculo de derivadas de inversas de funções elementares, fazemos primeiramente

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

e, só depois, é que passamos á variável original através da relação

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Na prática, torna-se mais útil fazer $y = f^{-1}(x)$, o que equivale a fazer $x = f(y)$ e aplicamos o resultado anterior na forma seguinte:

$$y' = \frac{1}{x'}\,,$$

voltando no final à variável original. Assim, com o auxílio da proposição anterior e das regras de derivação já demonstradas, podemos estabelecer as regras de derivação para as inversas das funções elementares conhecidas.

Proposição 5.2.5

1. *Se $f(x) = x^{\frac{1}{k}}$, onde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então $f'(x) = \dfrac{1}{k} x^{\frac{1-k}{k}}$;*
2. *Se $f(x) = \log_a(x)$, onde $a \in \mathbb{R}^+$, então $f'(x) = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$;*
3. *Se $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;*
4. *Se $f(x) = \arccos(x)$, então $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;*
5. *Se $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;*
6. *Se $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$, então $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Existem, no entanto, situações em que não é possível obter uma expressão explícita para a inversa de uma função. Nestes casos, podemos ainda determinar formalmente a derivada da função inversa. De facto, se f é uma função f dada pela relação $y = f(x)$ e admite função inversa, mas não é possível obter uma expressão explícita sua, então pode-se escrever a derivada da sua função inversa do modo seguinte abreviado, mas bastante sugestivo:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{1}{\frac{d\,y}{d\,x}}.$$

Exemplo 5.2.1 *Determine a derivada* $\dfrac{dx}{dy}$ *da função inversa* $x = x(y)$ *da função* $y = \operatorname{sen}(x) - e^{x-3}$.

5.3 Fórmulas de derivação

Nesta secção vamos apresentar a tabela com as fórmulas de derivação de todas as funções elementares que estudamos. Aqui, vamos admitir que o argumento das funções elementares pode ser uma função real de variável real qualquer. Deste modo, subentendemos que as funções que iremos analisar são funções compostas de, pelo menos, duas funções reais de variável real.

Proposição 5.3.1 (Teorema de derivação da função composta) *Sejam f e g duas funções reais de variáveis reais tais que $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{D}'_g$. Se g é derivável no ponto x e f é derivável no ponto $y = g(x)$, então a função composta $f \circ g$ é derivável em x e tem-se:*

$$(f \circ g)'(x) \equiv [f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x).$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, Campos Ferreira p. 360.

Grosso modo, podemos dizer que a derivada da composição de duas funções é igual à derivada da função que está por fora (da composição) vezes a derivada da que está por dentro.

Como corolário das fórmulas de derivação demonstradas anteriormente e do teorema de derivação da função composta, podemos apresentar a Tabela 5.1 com todas as fórmulas de derivação das funções elementares. Nesta tabela, u e v são duas funções reais de variável real, com domínios tais que as funções elementares envolvidas estejam bem definidas. Refira-se que as fórmulas compreendidas entre os números 28 e 37 são muito pouco utilizadas, razão pela qual são omitidas pela maioria dos autores.

5.4 Teoremas principais

Nos teoremas principais que iremos considerar aqui nesta secção, vão ter papel de relevo as funções que são contínuas num intervalo fechado $[a, b]$, com $a < b$, e deriváveis no intervalo aberto (a, b). Comecemos por estabelecer um resultado cuja interpretação geométrica é trivial.

Proposição 5.4.1 *Seja f uma função real de variável real, derivável num ponto $x = a$ interior a $\mathbb{D}_f$. se f tem um extremo local em $x = a$, então $f'(a) = 0$.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

A proposição anterior dá-nos uma **condição necessária da existência de extremo**, mas que não é suficiente, como iremos ver mais adiante.

1. $c' = 0, \quad c =$ constante	2. $x' = 1$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	4. $(c\,u)' = c\,u', \quad c =$ constante
5. $(u\,v)' = u'v + u\,v'$	6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$
7. $(u^r)' = r\,u^{r-1}u', \quad r \in \mathbb{R}$	8. $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
9. $(e^u)' = u'e^u$	10. $(a^u)' = a^u u' \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+$
11. $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$	12. $(\log_a(u))' = \dfrac{1}{\ln a}\,\dfrac{u'}{u}$
13. $(u^v)' = u^v v' \ln(u) + v\,u^{v-1}u'$	
14. $(\operatorname{sen}(u))' = u' \cos(u)$	15. $(\cos(u))' = -u' \operatorname{sen}(u)$
16. $(\operatorname{tg}(u))' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u' \sec^2(u)$	17. $(\operatorname{cotg}(u))' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2(u)} = -u' \operatorname{cosec}^2(u)$
18. $(\sec(u))' = u' \sec(u)\ \operatorname{tg}(u)$	19. $(\operatorname{cosec}(u))' = -u' \operatorname{cosec}(u)\ \operatorname{cotg}(u)$
20. $(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	21. $(\arccos(u))' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
22. $(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	23. $(\operatorname{arccotg}(u))' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
24. $(\operatorname{arcsec}(u))' = \dfrac{u'}{u\sqrt{1+u^2}}$	25. $(\operatorname{arccosec}(u))' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$
26. $(\operatorname{senh}(u))' = u' \cosh(u)$	27. $(\cosh(u))' = u' \operatorname{senh}(u)$
28. $(\operatorname{tgh}(u))' = \dfrac{u'}{\cosh^2(u)} = u' \operatorname{sech}^2(u)$	29. $(\operatorname{cotgh}(u))' = -\dfrac{u'}{\operatorname{senh}^2(u)} = -u' \operatorname{cosech}^2(u)$
30. $(\operatorname{sech}(u))' = -u' \operatorname{tgh}(u) \operatorname{sech}(u)$	31. $(\operatorname{cosech}(u))' = -u' \operatorname{cotgh}(u) \operatorname{cosech}(u)$
32. $(\operatorname{argsh}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	33. $(\operatorname{argch}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
34. $(\operatorname{argtgh}(u))' = \dfrac{u'}{1-u^2}$	35. $(\operatorname{argcotgh}(u))' = \dfrac{u'}{1-u^2}$
36. $(\operatorname{argsech}(u))' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$	37. $(\operatorname{argcosech}(u))' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1+u^2}}$

Tabela 5.1: Tabela das fórmulas de derivação.

Proposição 5.4.2 (Teorema de Rolle) *Seja f uma função real de variável real, contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), tal que $f(a)=f(b)$. Então existe, pelo menos, um ponto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

O teorema de Rolle[1] tem muita importância, não só porque nos possibilita demonstrar outros teoremas fundamentais do cálculo diferencial, mas também porque nos permite mostrar a existência de zeros de uma função, ou raízes de uma equação, num dado intervalo.

Corolário 5.4.1 (Teorema de Rolle) *Suponhamos que as condições do Teorema de Rolle são verificadas. Então:*

1. *Entre dois zeros consecutivos de uma função derivável num intervalo aberto, existe, pelo menos, um zero da função derivada;*

2. *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função derivável num intervalo aberto, não pode haver mais do que um zero da função.*

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Aplicar o Teorema de Rolle.

Exemplo 5.4.1 *Mostre que, independentemente do valor de c, a equação $x^3-3x+c=0$ tem, quanto muito, uma raiz no intervalo $[-1,1]$.*

Em determinadas situações, podemos recorrer ao Teorema do Valor Intermédio para mostrar que a derivada de uma função tem, pelo menos, um zero num dado intervalo. Neste sentido, se assumirmos que a derivada f' de uma função f é continua num intervalo $[a,b]$ e se $f'(a)\,f'(b)<0$, então existe, pelo menos, um zero da função derivada $f'(x)$ no intervalo $[a,b]$. Este resultado é, por vezes, designado na literatura como o Teorema de Darboux[2].

A derivada de uma função, calculada num ponto, reflecte propriedades da função apenas nesse ponto. Por outro lado, a razão incremental de uma função num ponto vai reflectir propriedades da função no intervalo onde a razão incremental é considerada.

Proposição 5.4.3 (Teorema de Lagrange) *Seja f uma função real de variável real, contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Então existe, pelo menos, um ponto $c\in(a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

O Teorema de Lagrange[3], é o principal resultado do Cálculo Diferencial e é frequentemente designado por teorema do valor médio da derivada. Em alguma literatura, este resultado é designado por teorema dos acréscimos finitos.

[1] Michel Rolle (1652-1719), matemático francês natural de Ambert.
[2] Jean Gaston Darboux (1842-1917), matemático francês natural de Nimes.
[3] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês nascido em Itália com o nome de Giuseppe Lodovico Lagrangia.

Exemplo 5.4.2 *Usando o Teorema de Lagrange, mostre que*

$$|\operatorname{sen}(x)| \leq |x| \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

O Teorema de Lagrange tem consequências imediatas no estudo da monotonia das funções que deixaremos para uma secção mais adiante. Por outro lado, tem também a extensão que apresentamos a seguir e que, como iremos ver, tem muita utilidade em exercícios práticos de cálculo de limites.

Proposição 5.4.4 (Teorema de Cauchy) *Sejam f e g duas funções reais de variáveis reais contínuas no intervalo fechado $[a,b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a,b). Então existe, pelo menos, um ponto $c \in (a,b)$ tal que*

$$g'(c)\,(f(b)-f(a)) = f'(c)\,(g(b)-g(a))\,.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Em particular, sempre que as divisões sejam possíveis, a fórmula do valor médio expressa no Teorema de Cauchy, pode ser escrita na forma seguinte:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

A consequência mais importante do Teorema de Cauchy, é uma regra que nos permite calcular a grande maioria dos limites que dêem indeterminações dos tipos 0/0.

Proposição 5.4.5 (Regra de Cauchy) *Sejam f e g duas funções, reais de variáveis reais, deriváveis num intervalo aberto (a,b), com $a<b$ e possivelmente infinitos, e x_0 um dos extremos do intervalo (a,b). Suponhamos que:*
1. $g'(x) \neq 0$ para todos $x \in (a,b)$;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.
Então,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que o limite do segundo membro exista em $\overline{\mathbb{R}}$.

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver Santos Guerreiro p. 330.

Observe-se que, sendo x_0 um dos extremos do intervalo (a,b), os limites da Regra de Cauchy são, na verdade, limites laterais. A Regra de Cauchy permanece ainda válida no caso de

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\,.$$

Outra regra muito importante, mas que é aplicável somente às indeterminações do tipo 0/0 é a Regra de L'Hôpital[4].

[4]Guillaume François Antoine (1661-1704), Marquês de L'Hôpital, matemático francês nascido em Paris.

Proposição 5.4.6 (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g duas funções, reais de variáveis reais, contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a, b), com $a < b$, e seja x_0 um dos extremos do intervalo $[a, b]$. Suponhamos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$. Então,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver Santos Guerreiro p. 333.

A Regra de L'Hôpital admite, ainda, a extensão $f(x_0) = g(x_0)$, $g'(x_0) = 0$ e $f'(x_0) \neq 0$. Neste caso, o limite é infinito. Observe-se que a Regra de L'Hôpital não é igual à Regra de Cauchy - as hipóteses são diferentes. Esta duas regras dão-nos uma das ferramentas mais poderosas da Análise Matemática para o cálculo de limites de quocientes entre funções elementares. Para o cálculo dos limites, iremos designá-las no único nome de Regra de Cauchy-L'Hôpital.

Exemplo 5.4.3 *Usando a Regra de Cauchy-L'Hôpital, calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}.$$

As indeterminações $0 \times \infty$ e $\infty - \infty$, que podem surgir no cálculo de limites de um produto $f(x)g(x)$ ou de uma soma $f(x) + g(x)$, reduzem-se às indeterminações $0/0$ ou ∞/∞ pelas transformações

$$f(x) + g(x) = f(x)g(x)\left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}\right), \qquad f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Deste modo, podemos usar a Regra de Cauchy-L'Hôpital para a grande maioria das indeterminações.

Exemplo 5.4.4 *Usando a Regra de Cauchy-L'Hôpital, calcule o limite seguinte:*

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Apesar da Regra de Cauchy-L'Hôpital ser muito eficaz no cálculo de limites, existem situações em que a sua aplicação não permite calcular o limite pretendido.

Exemplo 5.4.5 *Mostre que o limite seguinte não pode ser calculado pela Regra de Cauchy-L'Hôpital. Calcule-o usando outros métodos.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x + \cos(x)}.$$

5.5 Derivadas de ordem superior

Seja f uma função real de variável real derivável e com função derivada $f'(x)$. Se a função f' é derivável num ponto $x = a$ interior a $\mathbb{D}_{f'} \subseteq \mathbb{D}_f$, então dizemos que a função f é duas vezes derivável no ponto $x = a$. Esta derivada designa-se por derivada de segunda ordem, ou segunda derivada, da função f em $x = a$ e define-se por:

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}.$$

Por um processo indutivo, podemos definir a derivada de qualquer ordem superior a 2.

Definição 5.5.1 *Sejam f uma função real de variável real e $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que f é uma **função n-vezes derivável** no ponto $x = a$, se a função f for (n-1)-vezes derivável numa vizinhança do ponto $x = a$ e se existir o limite*

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

Por convenção, dizemos que a derivada de ordem zero de uma função é a própria função: $f^{(0)}(a) = f(a)$. Se, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, f é n-vezes derivável num intervalo I interior ao seu domínio, então f diz-se uma **função indefinidamente derivável** em I.

Proposição 5.5.1 *Sejam f e g duas funções reais de variável real, n-vezes deriváveis num ponto $x = a$ interior aos seus domínios. Então:*

1. *$f + g$ é n-vezes derivável em $x = a$ e*

$$(f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a).$$

2. *$f\,g$ é n-vezes derivável em $x = a$ e*

$$(f\,g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, f^{(n-k)}(a). \qquad (\textbf{\textit{Regra de Leibniz}})$$

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Usar indução matemática.

Pela proposição anterior, saem facilmente expressões para as derivadas de ordem n da diferença e do quociente.

Exemplo 5.5.1 *Recorrendo à de Regra de Leibniz, determine a derivada de ordem n da função seguinte:*

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

5.6 Fórmula de Taylor

Nesta secção vamos desenvolver um método que nos permite calcular os valores das funções elementares como o seno ou a exponencial. Este método tem por base uma aproximação das funções elementares por polinómios com um termo que nos dá o erro e que é facilmente estimado.

Comecemos por recordar que a derivada de uma função f num ponto $x = a$ dá-nos o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Muito próximo do ponto $x = a$ a função f e a sua recta tangente vão ter valores aproximados. Por uma simples análise geométrica, vemos que a expressão designatória da recta tangente ao gráfico da função no ponto $x = a$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Deste modo, numa vizinhança do ponto $x = a$ onde a função f seja derivável, podemos escrever a igualdade seguinte:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r_1(x);$$

onde $r_1(x)$ é o erro que se comete na aproximação. se f for duas vezes derivável no ponto $x = a$, usando a expressão anterior, podemos escrever:

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + r(x);$$

onde $r(x)$ é o erro que se comete nesta aproximação. Conjugando as duas expressões anteriores, obtemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + r_2(x);$$

onde onde $r_2(x)$ expressa o erro neste caso. Observe-se que os termos de segunda ordem vêm a dividir por 2, porque se derivarmos esta última expressão temos de obter a anterior. Prosseguindo com este raciocínio, podemos generalizar este resultado do modo seguinte.

Proposição 5.6.1 (Fórmula de Taylor) *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, e n vezes derivável num ponto $a \in I$. Tem-se então, para qualquer $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_n(x)\,,$$

onde

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x - a)^n} = 0\,.$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, S. Guerreiro, p. 355.

Observemos que, no caso de $n = 0$, basta que f seja contínua. A fórmula anterior, chama-se fórmula de Taylor[5] de ordem n da função f no ponto $x = a$. No caso particular de $a = 0$, a fórmula de Taylor recebe o nome de **fórmula de Maclaurin**[6] A função $r_n(x)$ designa-se por **resto de ordem** n e, de entre as várias expressões possíveis, podemos escrever

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}, \quad \text{com } \xi \text{ entre } a \text{ e } x,$$

[5]Brook Taylor (1685-1731), matemático inglês natural de Londres.
[6]Colin Maclaurin (1698-1746), matemático escocês natural de Kilmodan.

admitindo que f é $(n+1)$ vezes derivável. Este resto da fórmula de Taylor é conhecido na literatura como Resto de Lagrange e a correspondente fórmula de Taylor, como Fórmula de Taylor-Lagrange.

No caso particular de $f(x)$ ser um polinómio, então o resto $r_n(x)=0$ se o grau do polinómio for menor ou igual a n.

Proposição 5.6.2 *As funções elementares seguintes admitem as fórmulas de Maclaurin de ordem n indicadas:*

1. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+r_n(x);$
2. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+r_n(x);$
3. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+r_n(x);$
4. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}x^2+\cdots+\begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix}x^n+r_n(x), \quad \alpha\in\mathbb{R};$
5. $\operatorname{sen} x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!}+r_n(x);$
6. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!}+r_n(x).$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

As funções cujas fórmulas de Taylor, em torno de determinado ponto, têm restos cada vez mais pequenos à medida que a ordem n aumenta, dizem-se analíticas e serão estudadas mais à frente no capítulo de séries de funções.

5.7 Aplicações geométricas

A principal aplicação geométrica das derivadas é o estudo gráfico de funções. Vamos ver que os resultados da secção anterior nos vão permitir obter informação, por exemplo, relativamente à monotonia ou aos extremos de funções.

Definição 5.7.1 *Seja f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, derivável num ponto $x=a$ interior a $\mathbb{D}_f$ e seja $b=f(a)$. A **equação da recta tangente** ao gráfico da função f no ponto de coordenadas (a,b) é:*

$$y=f(a)+f'(a)(x-a).$$

*Chama-se normal ao gráfico da função f no ponto de coordenadas (a,b), à recta que passa nesse ponto e é perpendicular à recta tangente ao gráfico de f em (a,b). A **equação da recta normal** é dada por:*

$$y=f(a)-\frac{1}{f'(a)}(x-a), \qquad f'(a)\neq 0.$$

se $f'(a)=0$, a recta normal é $y=a$.

Exemplo 5.7.1 *Determine as equações das rectas tangente e normal ao gráfico da função* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *no ponto* $x = \sqrt{2}/2$.

Como já abordamos anteriormente, o Teorema de Lagrange, que vimos numa secção anterior, vai-nos permitir obter informação sobre a monotonia de uma função.

Corolário 5.7.1 (Teorema de Lagrange) *Suponhamos que as condições do Teorema de Lagrange são verificadas.*

1. *Se* $f'(x) = 0$ *em todos os pontos de* (a, b), *então* $f(x) = constante$ *em* (a, b).

2. *Se* $f'(x) > 0$ *em todos os pontos de* (a, b), *então* f *é estritamente crescente em* (a, b).

3. *Se* $f'(x) < 0$ *em todos os pontos de* (a, b), *então* f *é estritamente decrescente em* (a, b).

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Consequência imediata do Teorema de Lagrange.

Exemplo 5.7.2 *Determine os intervalos de monotonia da função* $f(x) = x - 2\,\mathrm{sen}(x)$ *definida em* $[0, 2\pi]$.

No corolário seguinte mostramos como o Teorema de Lagrange pode, ainda, ser aplicado para averiguar da natureza dos pontos extremos de uma função.

Corolário 5.7.2 (Teorema de Lagrange) *Seja* f *uma função real de variável real, contínua num intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável em todos os pontos do intervalo aberto* (a, b), *com a possível excepção de um ponto* $x = c$.

1. *Suponhamos que* $f'(x) > 0$ *para todos* $x < c$ *e* $f'(x) < 0$ *para todos* $x > c$. *Então* f *tem um máximo relativo em* $x = c$.

2. *Suponhamos que* $f'(x) > 0$ *para todos* $x > c$ *e* $f'(x) < 0$ *para todos* $x < c$. *Então* f *tem um mínimo relativo em* $x = c$.

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Consequência imediata do Teorema de Lagrange.

Exemplo 5.7.3 *A partir da resolução do exercício anterior, determine os extremos da função* $f(x) = x - 2\,\mathrm{sen}(x)$ *definida em* $[0, 2\pi]$.

Contudo, verifica-se que o estudo dos extremos de muitas função, a partir do Teorema de Lagrange, torna-se demasiado moroso ou, mesmo, não pode ser feito. Por outro lado, sabemos que a Proposição 5.4.1 nos dá uma condição necessária da existência de extremo. No entanto, este resultado não é suficiente para a existência de extremos, como mostra o contra-exemplo do exercício seguinte.

Exemplo 5.7.4 *Verifique que, para* $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, *mas* f *não tem nenhum extremo em* $x = 0$.

Portanto, existem pontos onde a derivada de uma função se anula, mas que não são pontos extremos da função. Os pontos onde a derivada de uma função se anular, vão ser designados por **pontos de estacionariedade** da função. Os pontos de estacionariedade de uma função que não forem pontos extremos vão ser pontos onde a concavidade do gráfico da função passa de côncava a convexa, ou vice-versa. Estes pontos, são designados por **pontos de inflexão** da função.

Definição 5.7.2 *Sejam f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, derivável num ponto $x = a$ interior a $\mathbb{D}_f$. Diz-se que f é uma* ***função convexa*** *no ponto $x = a$, se, numa vizinhança do $x = a$, o gráfico de f está por cima da recta tangente ao gráfico da função de f em $x = a$. Se, numa vizinhança de $x = a$, o gráfico de f está por baixo da recta tangente ao gráfico da função de f em $x = a$, diz-se que f é uma* ***função côncava*** *em $x = a$.*

Por vezes dizemos que uma função tem a **concavidade voltada para cima** num ponto, querendo significar que ela é convexa nesse ponto. De igual, diz-se que uma função tem a **concavidade voltada para baixo** num ponto, com o significado de que ela é côncava nesse ponto.

Proposição 5.7.1 *seja f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, e 2-vezes derivável num intervalo I estritamente contido em $\mathbb{D}_f$.*

1. *Se $f''(x) > 0$ para $x \in I$, então f é convexa em I.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para $x \in I$, então f é côncava em I.*

`DEMONSTRAÇÃO - EXERCÍCIO:` Consequência imediata do Teorema de Lagrange.

Da proposição anterior, sai que, se $x = c$ for um ponto interior a um intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{D}_f$ tal que $f''(x) > 0$ para $a < x < c$ e $f''(x) < 0$ para $c < x < b$, ou vice-versa, então $x = c$ é um ponto de inflexão da função f. Em particular, podemos dizer que, se $x = c$ é um ponto de inflexão da função f, então $f''(c) = 0$.

A proposição seguinte mostra como, conjugando a Proposição 5.4.1 e a Fórmula de Taylor, é possível obter uma condição suficiente de máximo ou mínimo de uma função, assim como de ponto de inflexão.

Proposição 5.7.2 *Seja f uma função real de variável real, com domínio $\mathbb{D}_f$, n-vezes derivável no ponto $x = a$ interior a $\mathbb{D}_f$. Suponhamos que $f^{(n)}(a)$ é, das sucessivas derivadas de f, a primeira que não se anula no ponto $x = a$, isto é:*

$$f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Nestas condições:

1. *se n é par, f tem um extremo em $x = a$, que será máximo se $f^{(n)}(a) < 0$, ou mínimo se $f^{(n)}(a) > 0$;*
2. *se n é ímpar, f tem um ponto de inflexão em $x = a$.*

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Consequência imediata da Fórmula de Taylor.

A primeira afirmação da proposição anterior, permite-nos, também, dizer que, se $n \geq 2$, a função f é convexa ou côncava em $x = a$, consoante $f^{(n)}(a) > 0$ ou $f^{(n)}(a) < 0$, respectivamente. Esta afirmação dá-nos uma condição suficiente da convexidade ou concavidade de uma função num ponto, independentemente da função ter extremo ou ponto de inflexão nesse ponto.

Exemplo 5.7.5 *Determine a natureza dos pontos de estacionariedade da função $f(x) = e^{-x^2}$. Indique os intervalos de convexidade e concavidade.*

Definição 5.7.3 *Seja f uma função real de variável real definida num intervalo não limitado da forma $(a, +\infty)$ ou $(-\infty, a)$. Diz-se que a recta $y = mx + p$ é uma **assímptota não vertical** ao gráfico da função f **quando** x **tende para** $+\infty$, se*

$$f(x) = mx + p + r(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} r(x) = 0.$$

*É uma **assímptota não vertical** ao gráfico da função f **quando** x **tende para** $-\infty$, se*

$$f(x) = mx + p + r(x), \qquad \lim_{x \to -\infty} r(x) = 0.$$

A assímptota $y = mx + p$, a existir, é única e tem-se:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad p = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx\right];$$

com x a tender para $+\infty$ ou $-\infty$ no caso de ser assímptota quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

Por complementaridade, diz-se que a recta $x = a$ é uma **assímptota vertical** quando x tende para a, se se verificar, pelo menos, um dos casos seguintes:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty; \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

Exemplo 5.7.6 *Determine as assímptotas da função $f(x) = e^{-x^2}$.*

5.8 Exercícios

1. Determine as derivadas das funções seguintes usando a definição:

   a) $f(x) = 2x - 1\,;$ b) $g(x) = 2x^3\,;$ c) $h(x) = \ln(3x + 1)\,;$ c) $i(x) = \operatorname{sen}(x^2)\,.$

   Usando o mesmo raciocínio das demonstrações da proposição anterior, podemos provar as regras de derivação expressas no exercício seguinte.

2. Usando as regras de derivação, mostre que:

   (a) se $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$, então $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$;

(b) se $f(x) = \operatorname{cotgh}(x)$, então $f'(x) = -\operatorname{cosech}^2(x)$;

(c) se $f(x) = \operatorname{sech}(x)$, então $f'(x) = -\operatorname{tgh}(x)\operatorname{sech}(x)$;

(d) se $f(x) = \operatorname{cosech}(x)$, então $f'(x) = -\operatorname{cotgh}(x)\operatorname{cosech}(x)$.

3. Usando o Teorema de Derivação da Função Inversa, determine as derivadas das funções seguintes:

a) $f(x) = \sqrt[3]{2x-3}$; b) $g(x) = \log_{10}(x-1)$; c) $h(x) = \operatorname{arctg}(3x+1)$;

d) $i(x) = \operatorname{argsh}(5x-2)$; e) $j(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; f) $k(x) = \sqrt[2]{\ln(x^2+1)}$.

4. Usando o Teorema de Derivação da Função Inversa, mostre que:

(a) se $f(x) = \operatorname{argsh}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

(b) se $f(x) = \operatorname{argch}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(c) se $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(d) se $f(x) = \operatorname{arccosec}(x)$, então $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(e) se $f(x) = \operatorname{argtgh}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(f) se $f(x) = \operatorname{argcotgh}(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

5. Usando o Teorema de Derivação da Função Composta, determine as derivadas das funções seguintes:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$; b) $g(x) = x^{x^2-1}$; c) $h(x) = \ln(\cosh x)$;

d) $i(x) = \cot(\sec(5x-2))$; e) $h(x) = \operatorname{arcsen}(\cos x)$; f) $k(x) = \sqrt[2]{\ln(x^2+1)}$.

6. Calcule o valor da derivada de $g(x)$ no ponto $x = 0$, se $g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(\cos^2 x)$.

7. Determine o maior domínio onde cada uma das funções seguintes é derivável e, nesse domínio, indique uma expressão para a respectiva função derivada:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $g(x) = e^{-|x|}$; c) $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

d) $i(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$; e) $j(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$; f) g) $k(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$.

8. Usando a tabela das derivadas, determine as derivadas das funções seguintes:

a) $f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$; b) $g(x) = \operatorname{tg}(x) - x$; c) $h(x) = \dfrac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$;

d) $i(x) = \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{tg} x$; e) $j(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$; f) $k(x) = \cosh(\cos x)\operatorname{senh}(\operatorname{sen} x)$;

g) $l(x) = (\ln x)^x$; h) $m(x) = \cos(\operatorname{arcsen} x)$; i) $n(x) = x^{x^{x-1}}$.

9. Determine as derivadas dx/dy das funções inversas $x = x(y)$:

a) $y = e^x + x$; b) $y = \operatorname{sen} x - \ln x$; c) $y = \dfrac{1}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$;

d) $y = \sqrt{4x - x^2 - 3} + (x-2)\operatorname{arcsen}(x-2)$; e) $y = \sqrt{6x - 8 - x^2} - (x-3)\arccos(x-3)$.

10. Verifique que o Teorema de Rolle não é válido para a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no intervalo $[-1,\ 1]$. Como explica este facto?

11. Prove que a função $x^3 + 3x - 1$ tem uma única raíz real e que esta pertence ao intervalo $(0,\ 1)$.

12. Mostre que existem exactamente dois valores de x para os quais $x^2 = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$.

13. Prove que, se um polinómio $P(x)$ de grau n tem n raízes reais distintas, então o polinómio $P'(x)$ tem $n-1$ raízes reais distintas.

14. Prove, usando o Teorema de Lagrange, que:

a) $\ln(1+x) - \ln x < \dfrac{1}{x}, \quad \forall\, x > 0$; b) $\operatorname{tg} x \geq x, \quad \forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $\ln x < x, \quad \forall\, x \geq 1$; d) $\cos x \leq 1 + |x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;

e) $|\cos x - 1| < \dfrac{x^2}{2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$; f) $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x, \quad \forall\, x > 0$.

15. Calcule os limites seguintes, usando a Regra de Cauchy-L'Hospital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\ln x)}{\ln(1-x)}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3 \operatorname{sen} x}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt[3]{x^6 + 3x^5} - x(1+x)\right]$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{\ln(1+x^2)}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cot x)^{\operatorname{sen} x}$; i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$.

16. Mostre que os limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{sen}x} \qquad \text{e} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\mathrm{sen}x}{x+\mathrm{sen}x}$$

não podem ser calculados pela Regra de Cauchy-L'Hospital. Calcule-os por outros métodos.

17. Deduza fórmulas explícitas de cálculo para as seguintes derivadas de ordem n:

$$\text{a)}\ D^n\left(e^{2x-1}\right)\,; \qquad \text{b)}\ D^n\left(\frac{1}{3x+1}\right)\,; \qquad \text{c)}\ D^n\left[\cos(5x-2)\right]\,;$$

$$\text{d)}\ D^n\left[\ln(2x+1)\right]\,; \quad \text{e)}\ D^n\left[\mathrm{sen}\left(\frac{x+1}{3}\right)\right]\,; \quad \text{f)}\ D^n\left[\mathrm{senh}(x)\,\cosh(x)\right]\,.$$

18. Determine as fórmulas de Maclaurin de ordem n das funções seguintes:

$$\text{a)}\ f(x)=e^{2x-1}\,; \qquad \text{b)}\ g(x)=\sqrt{1+x}\,; \qquad \text{c)}\ h(x)=\ln(2+x)\,;$$

$$\text{d)}\ i(x)=\mathrm{tg}(x)\,; \qquad \text{e)}\ j(x)=\mathrm{senh}(x)\,; \qquad \text{f)}\ k(x)=\mathrm{arcsen}(x)\,.$$

19. Determine as fórmulas de Taylor de ordem n das funções seguintes em torno dos pontos indicados:

$$\text{a)}\ f(x)=x\ln x\,,\quad x_0=1\,; \qquad \text{b)}\ g(x)=\frac{\mathrm{arctg}x}{x}\,,\quad x_0=0\,;$$

$$\text{c)}\ h(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\,,\quad x_0=1\,; \qquad \text{d)}\ i(x)=\mathrm{sen}(x)\cos(x)\,,\quad x_0=0\,;$$

$$\text{e)}\ j(x)=\cosh(2x-1)\,,\ x_0=\frac{1}{2}\,; \qquad \text{f)}\ k(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\,,\quad x_0=0\,.$$

20. Calcule os limites seguintes, usando a Fórmula de Taylor:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}x-x}{x^2}\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\,; \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,;$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{senh}(x)-x}{x^2}\,; \quad \text{e)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2}\,; \qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)-2x^2}{x^4}\,.$$

21. Duas funções f e g têm primeira e segundas derivadas no ponto $x=0$ e satisfazem as relações:

$$f(0)=\frac{2}{g(0)}\,,\quad f'(0)=2g'(0)=4g(0)\,,\quad g''(0)=5f''(0)=6f'(0)=3\,.$$

a) se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $h'(0)$.
b) se $k(x) = f(x)\,g(x)$, calcule $k'(0)$.
c) Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{f'(x)}\,.$$

22. Estude as funções seguintes quanto à monotonia e extremos:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; b) $g(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$; c) $h(x) = e^{-x^2}$;

d) $i(x) = |x^2 - 5x + 6|$; e) $j(x) = |x|\,\dfrac{1}{e^{|x-1|}}$; f) $k(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

23. Considere a curva:

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x\,.$$

a) Mostre que a recta $y = -x$ é tangente a esta curva.
b) Determine o ponto de tangência.
c) A recta $y = -x$ é tangente à curva em mais algum ponto?

24. Determine as equações das rectas tangentes e das rectas normais às curvas seguintes nos pontos indicados:

a) $y = \operatorname{arcsen} x\,, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$; b) $y = x^2 - \cos x\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $y = x + \operatorname{sen} x \cos x\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; d) $y = 4x^3 + \operatorname{sen} x\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

e) $y = \operatorname{arctg} x\,, \quad x_0 = 0$; f) $y = \dfrac{1+\cos x}{e^{\pi}} - e^{x-\pi} + x - 1\,, \quad x_0 = \pi$;

g) $y = \arccos(\operatorname{sen} x^2 - \cos x^2)\,, \quad x_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; h) $y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x \cos x\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

25. Faça o estudo completo das funções seguintes, tendo em conta, sempre que seja possível, o domínio, os zeros, a paridade, os pontos de descontinuidade, a monotonia, os extremos, o sentido das concavidades, as assímptotas e conclua com a representação gráfica:

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$; b) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1-\cos(2x)}$; c) $y = \dfrac{x^2 - 7x + 7}{x^2 - 3x + 3}$;

d) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 - 1})$; e) $y = |\operatorname{sen} x| + x$; f) $y = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$;

g) $y = x + \dfrac{1}{x}$; h) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$; i) $y = \operatorname{tgh}(x)$;

j) $y = x \sec(x)$; k) $y = x^{\frac{1}{x}}$; l) $y = \operatorname{argcosh}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

Capítulo 6

Primitivas

6.1 Introdução

Definição 6.1.1 *Seja f uma função definida num intervalo I de $\mathbb{R}$. Chama-se função primitiva de f em I ou, somente,* ***primitiva*** *de f, a qualquer função g definida em I que verifique a equação*

$$g'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

Dizemos que uma **função** f é **primitivável** em I, se existir, pelo menos, uma função $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $g' = f$. Denotamos o conjunto de todas as primitivas de uma função f (num intervalo I) por um dos símbolos seguintes:

$$\int f(x)\, dx \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{P}\left[f(x)\right] \qquad (\text{com } x \in I).$$

Quando se utiliza a notação $\int f(x)\, dx$ para a primitiva de uma função $f(x)$, muitos autores designam as primitivas por integrais indefinidos. Resulta desta definição que a primitiva de uma função f, definida num intervalo I de $\mathbb{R}$, é derivável em todos os pontos interiores a I e, em cada ponto extremo deste intervalo, tem derivada lateral finita.

Proposição 6.1.1 *Seja F uma primitiva de uma função f num intervalo I de $\mathbb{R}$. Então, o conjunto de todas as primitivas de f em I é constituído por todas as funções da forma*

$$F(x) + c, \qquad c = \textit{constante}.$$

`DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.`

Da proposição anterior, resulta que a diferença entre quaisquer duas primitivas de uma mesma função é constante. Por outro lado, pode-se provar que, dados $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única primitiva F da função f verificando a condição $F(x_0) = y_0$.

Proposição 6.1.2 (Propriedade linear) *sejam f e g duas funções primitiváveis num intervalo I de $\mathbb{R}$ e α uma constante real. Então:*

1. $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;
2. $\displaystyle\int [\alpha f(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

6.2 Primitivas imediatas

Pelo exposto anteriormente, verifica-se que a primitivação é, pois, a operação funcional inversa da derivação. Neste sentido, as primitivas são, por vezes, designadas por **anti-derivadas** e as primeiras fórmulas de primitivas são obtidas por inversão das fórmulas de derivação. As primitivas obtidas desta forma (ver Tabela 6.1), são designadas por **primitivas imediatas**.

Existem, contudo, funções que não sendo imediatamente primitiváveis, podem ser reduzidas a primitivas imediatas, usando primeiro propriedades dessas funções. Estão neste caso algumas funções trigonométricas e hiperbólicas. Estas primitivas são habitualmente designadas por **primitivas quase imediatas**. Para as funções trigonométricas, convém utilizar as fórmulas já conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1, \qquad 1+\operatorname{tg}^2(x)=\sec^2(x), \qquad 1+\operatorname{cotg}^2(x)=\operatorname{cosec}^2(x).$$

Para as funções hiperbólicas, podemos usar as fórmulas seguintes:

$$1+\operatorname{senh}^2(x)=\cosh^2(x), \qquad 1-\operatorname{tgh}^2(x)=\operatorname{sech}^2(x), \qquad \operatorname{cotgh}^2(x)-1=\operatorname{cosech}^2(x).$$

Exemplo 6.2.1 *Determine as primitivas seguintes:*

$$\text{a)} \int \cos^2(x)\,dx\,; \qquad \text{b)} \int \operatorname{senh}^3(x)\,dx.$$

Para determinar as primitivas de funções que façam envolver secantes e cossecantes, trigonométricas ou hiperbólicas, precisamos de saber as primitivas dessas funções.

6.3 Primitivação por partes

O denominado método de primitivação por partes dá-nos uma forma de podermos determinar a primitiva de uma expressão que envolve o produto de duas ou mais funções.

Proposição 6.3.1 (Método de primitivação por partes) *sejam f uma função primitivável num intervalo I de $\mathbb{R}$ e g outra função, derivável no mesmo intervalo. Então a função produto $f\,g$ é primitivável no intervalo I e a sua primitiva é determinada da forma seguinte:*

$$\int (f(x)\,g(x))\,dx = \int f(x)\,dx\,g(x) - \int \left(\int f(x)\,dx\;g'(x)\right)dx.$$

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C$	2. $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$
3. $\displaystyle\int u'u^r\,dx = \frac{1}{r+1}u^{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R}, r \neq -1$	4. $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\|u\| + C$
5. $\displaystyle\int u'e^u\,dx = e^u + C$	6. $\displaystyle\int a^u u'\,dx = \frac{1}{\ln a}a^u + C, \quad a \in \mathbb{R}^+$
7. $\displaystyle\int u'\,\mathrm{sen}(u)\,dx = -\cos(u) + C$	8. $\displaystyle\int u'\cos(u)\,dx = \mathrm{sen}(u) + C$
9. $\displaystyle\int u'\sec^2(u)\,dx = \mathrm{tg}(u) + C$	10. $\displaystyle\int u'\,\mathrm{cosec}^2(u)\,dx = -\mathrm{cotg}(u) + C$
11. $\displaystyle\int u'\sec(u)\,\mathrm{tg}(u)\,dx = \sec(u) + C$	12. $\displaystyle\int u'\,\mathrm{cosec}(u)\,\mathrm{cotg}(u)\,dx = -\mathrm{cosec}(u) + C$
13. $\displaystyle\int u'\,\mathrm{senh}(u)\,dx = \cosh(u) + C$	14. $\displaystyle\int u'\cosh(u)\,dx = \mathrm{senh}(u) + C$
15. $\displaystyle\int u'\,\mathrm{sech}^2(u)\,dx = \mathrm{tgh}(u) + C$	16. $\displaystyle\int u'\,\mathrm{cosech}^2(u)\,dx = -\mathrm{cotgh}(u) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}(u) + C = -\arccos(u) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \mathrm{arctg}(u) + C = -\mathrm{arccotg}(u) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}\,dx = \mathrm{arcsec}(u) + C = -\mathrm{arccosec}(u) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\,dx = \mathrm{argsh}(u) + C \equiv \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C$

21. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,dx = \mathrm{argch}(u) + C \equiv \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

22. $\displaystyle\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \mathrm{argtgh}(u) + C = -\mathrm{argcotgh}(u) + C \equiv \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$

Tabela 6.1: Tabela das fórmulas de primitivas imediatas.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

A fórmula do método de primitivação por partes, pode, ainda, aparecer numa das formas equivalentes seguintes:

$$\int u'\,v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx \qquad \text{ou} \qquad \int v\,du = u\,v - \int u\,dv;$$

onde se supõe que u e v são funções de x.

De um modo geral, o sucesso da aplicação deste método, reside na escolha da função que se vai derivar. Esta função deve ser escolhida de modo que a expressão, que surge no segundo termo da fórmula de primitivação por partes, mais se simplifique.

Exemplo 6.3.1 *Determine as primitivas seguintes:*

$$\text{a)} \int x\,e^x\,dx, \qquad \text{b)} \int x\,\cos(x)\,dx.$$

Existem outras situações em que é preciso usar o método de primitivação por partes mais do que vez e, mesmo assim, é necessário alguma subtileza para se determinar a primitiva.

Exemplo 6.3.2 *Determine a primitiva:*

$$\int e^x\,\mathrm{sen}(x)\,dx.$$

Por fim, o método de primitivação por partes pode ser utilizado para determinar as primitivas de expressões que envolvam uma só função. Aqui não há dúvidas quanto à função a primitivar ou qual a derivar: escolhemos para derivar a única função da expressão e para primitivar a função identicamente igual a 1. Este raciocínio é particularmente útil para determinar todas as primitivas das inversas das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas, assim como para a função logaritmo.

Exemplo 6.3.3 *Determine as primitivas seguintes:*

$$\text{a)} \int \ln(x)\,dx; \qquad \text{b)} \int \mathrm{arcsen}(x)\,dx; \qquad \text{c)} \int \mathrm{argch}(x)\,dx.$$

6.4 Primitivação por substituição

O método de primitivação por substituição, consiste numa mudança de variável de modo à primitiva pretendida ser mais fácil de determinar. Este método é uma consequência directa do teorema de derivação da função composta.

Proposição 6.4.1 (Primitivação por substituição) *sejam I e J dois intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ uma função primitivável e $\varphi : J \to I$ uma função bijectiva e derivável. Então a primitiva da função f pode ser determinada pela fórmula seguinte:*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Observemos que, depois de determinada a primitiva por este método, voltamos à variável inicial, fazendo a substituição inversa:

$$t = \varphi^{-1}(x).$$

Exemplo 6.4.1 *Fazendo as mudanças de variáveis indicadas, determine as primitivas seguintes:*

$$\text{a)} \int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad x = -\ln(t); \qquad \text{b)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx, \quad \sqrt{x+1} = t.$$

Algumas das substituições mais importantes são indicadas a seguir. se a função a integrar contém o radical:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a = constante$, faz-se a substituição

  $$x = a\,\mathrm{sen}(t) \quad \text{ou} \quad x = a\cos(t),$$

  de modo a usar a Fórmula Fundamental da Trigonometria:

  $$\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1;$$

- $\sqrt{x^2 + a^2}$, $a = constante$, faz-se a substituição

  $$x = a\,\mathrm{tg}(t), \quad x = a\,\mathrm{cotg}(t), \quad \text{ou} \quad x = a\,\mathrm{senh}(t),$$

  de modo a usar, respectivamente, as fórmulas

  $$1 + \mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x), \quad 1 + \mathrm{cotg}^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x) \quad \text{ou} \quad 1 + \mathrm{senh}^2(x) = \cosh^2(x);$$

- $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a = constante$, faz-se a substituição

  $$x = a\sec(t), \quad x = a\,\mathrm{cosec}(t), \quad \text{ou} \quad x = a\cosh(t),$$

  de modo a usar, respectivamente, as fórmulas

  $$1 + \mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x), \quad 1 + \mathrm{cotg}^2(x) = \mathrm{cosec}^2(x) \quad \text{ou} \quad 1 + \mathrm{senh}^2(x) = \cosh^2(x);$$

Exemplo 6.4.2 *Fazendo as mudanças de variáveis indicadas, determine as primitivas seguintes:*

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad x = \cos^2(t); \qquad \text{b)} \int \sqrt{9 + x^2}, \quad x = 3\,\mathrm{senh}(t).$$

Em muitas situações, uma mesma primitiva pode ser determinada usando o Método de Primitivação por Partes ou usando o Método de Primitivação por Substituição.

Exemplo 6.4.3 *Determine a primitiva do Exercício 6.4.2, alínea b, usando o Método de Primitivação por Partes.*

6.5 Primitivas de funções racionais

Recordemos que uma função racional é uma função da forma

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

onde

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

são polinómios de graus n e m - naturais, e de coeficientes a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 e b_m, b_{m-1}, …, b_1, b_0 - reais.

Para determinar as primitivas de funções racionais seguimos os passos seguintes:

1º PASSO se $\text{grau}\,[P_n(x)] \geq \text{grau}\,[Q_m(x)]$, é possível dividir os polinómios e é isso que se começa por fazer.

Exemplo 6.5.1 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{x^4 - 2}{x^2 + 1}\, dx.$$

2º PASSO se $\text{grau}\,[P_n(x)] = \text{grau}\,[Q_m(x)] - 1$, podemos usar sempre primeiro a fórmula de primitivação imediata

$$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C.$$

Exemplo 6.5.2 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 1}\, dx.$$

3º PASSO se $\text{grau}\,[P_n(x)] < \text{grau}\,[Q_m(x)] - 1$, temos de analisar outros factos da função a primitivar.

(i) se o polinómio $Q_m(x)$ tem m raízes reais distintas: x_1, x_2, …, x_m; podemos escrever a função a integrar na forma seguinte:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)}.$$

Neste caso, usamos o denominado Método dos Coeficientes Indeterminados para decompor a função $f(x)$ em fracções mais simples:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - x_m},$$

onde os coeficientes A_1, A_2, …, A_m são determinados pela fórmula seguinte:

$$A_i = \left[\frac{P_n(x)}{Q_{m-1}(x)}\right]_{x = x_i}, \quad Q_{m-1}(x) = \frac{Q_m(x)}{x - x_i}, \quad \text{para todo } i = 1,\ 2, \ldots, m.$$

Exemplo 6.5.3 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx.$$

(ii) se o polinómio $Q_m(x)$ tem $k \leq m$ raízes reais repetidas: $\overline{x}$; podemos escrever a função a integrar na forma seguinte:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x-\overline{x})^k\,Q_{m-k}(x)}, \quad Q_{m-k}(x) = \frac{Q_m(x)}{(x-\overline{x})^k}.$$

Aqui usamos o Método dos Coeficientes Indeterminados para decompor a função $f(x)$ nas fracções mais simples:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-\overline{x})^k} + \frac{A_2}{(x-\overline{x})^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\overline{x})} + \frac{R(x)}{Q_{m-k}(x)},$$

onde $R(x)$ é um polinómio com grau inferior ao do polinómio $Q_{m-k}(x)$ e os coeficientes $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ são determinados pela fórmula seguinte:

$$A_i = \frac{1}{(i-1)!}\left[\mathrm{D}^{(i-1)}\left(\frac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}\right)\right]_{x=\overline{x}}, \quad \text{para todo } i = 1,\ 2, \ldots, k;$$

onde $\mathrm{D}^{(i-1)}\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}\right)$ denota a derivada de ordem $(i-1)$ de $\dfrac{P_n(x)}{Q_{m-k}(x)}$.

Exemplo 6.5.4 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2(2x+3)}\,dx.$$

(iii) se o polinómio $Q_m(x)$ não tem raízes reais[1], então $m = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$, e a função a integrar pode-se escrever na forma seguinte:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+bx+c)^k}, \quad \text{com } n < 2k,$$

e onde b e c são parâmetros conhecidos. Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, decompomos a função $f(x)$ do modo seguinte:

$$f(x) = \frac{b_1x+c_1}{(x^2+bx+c)^k} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+bx+c)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_kx+c_k}{x^2+bx+c}.$$

Nos casos mais simples: $k = 1$ e $n = 0$ ou $n = 1$; a primitiva é determinada imediatamente, ou bastando fazer uma mudança de variável conveniente.

Exemplo 6.5.5 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

[1]Todo o polinómio de grau ímpar tem, pelo menos, uma raíz real.

No caso de $k > 1$, a situação é mais delicada, pois necessitamos de saber primitivar as funções do tipo seguinte:

$$g(x) = \frac{b_i x + c_i}{(x^2 + bx + c)^{q_i}}\,, \qquad q_i = k - i \geq 2 \quad \text{pois} \quad i = 1, \ldots, k-2.$$

Nestes casos, a primitiva é determinda fazendo uma mudança de variável que nos leva a um novo tipo de funções a primitivar:

$$h(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^q}\,, \quad \text{onde fizemos } q = q_i.$$

As primitivas deste tipo, serão determinadas usando o Método de Primitivação por Partes, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 6.5.1 *Para qualquer natural $q \geq 2$, tem-se:*

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^q} dx = \frac{1}{2q-2} \frac{x}{(1+x^2)^{q-1}} + \frac{2q-3}{2q-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{q-1}} dx\,.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 6.5.6 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2}\, dx\,.$$

Em muitos exercícios de aplicação prática, temos de percorrer vários passos dos anteriormente descritos

Exemplo 6.5.7 *Determine a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 1}\, dx\,.$$

6.6 Primitivas de funções irracionais

Uma **função irracional** é uma função representada por

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)},$$

onde $R(x)$ é uma função racional. Mais geralmente, designamos por **função irracional** qualquer função cuja expressão designatória resulta de aplicarmos operações irracionais a uma ou mais das funções por último referidas. Antes de indicarmos métodos de resolver primitivas de funções irracionais, observemos que a ideia principal é reduzir as primitivas de funções irracionais a primitivas de funções racionais. Depois, para estas últimas, podemos utilizar os conhecimentos da secção anterior.

De seguida, vamos indicar métodos para determinar as primitivas de alguns tipos de funções irracionais.

1º TIPO se nos diferentes radicais que intervêm na função irracional surgir sempre a função racional

$$R(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\,,$$

fazemos a mudança de variável

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n\,,$$

onde n é o mínimo múltiplo comum dos diferentes radicais.

Exemplo 6.6.1 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int\frac{\sqrt{2x-1}}{2x-1+\sqrt[3]{(2x-1)^2}}\,dx\,.$$

2º TIPO Consideremos agora o caso de funções irracionais da forma seguinte:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,,$$

onde $P_n(x)$ é um polinómio de grau n e a, b e c são coeficientes reais.

(i) se $n=0$, estamos perante uma função do tipo

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

Neste caso mais simples, faz-se uma das transformações seguintes:

- $ax^2+bx+c=1-u^2$ para usar $\displaystyle\int\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx=\ \text{arcsen}(u)+C\,;$
- $ax^2+bx+c=u^2+1$ para usar $\displaystyle\int\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}\,dx=\ \text{argsh}(u)+C\,;$
- $ax^2+bx+c=u^2-1$ para usar $\displaystyle\int\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,dx=\ \text{argch}(u)+C\,.$

A escolha da transformação é sugerida pelos coeficientes a, b e c. No caso da primeira transformação, convém ter em conta a igualdade seguinte:

$$\text{arcsen}(u)=-\,\text{arccos}(u)+C \qquad \text{onde} \quad C=\frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 6.6.2 *Determinar as primitivas seguintes:*

$$\text{a)}\ \int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx\,;\quad \text{b)}\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx\,;\quad \text{c)}\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}\,dx\,.$$

(ii) No caso de $n \geq 1$, a primitiva da função

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

é determinada supondo que

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,, \qquad (6.6.1)$$

onde $Q_{n-1}(x)$ é um polinómio de grau $n-1$ com coeficientes indeterminados e λ é uma constante real, também a determinar. Os coeficientes do polinómio $Q_{n-1}(x)$ e a constante λ são determinados derivando a identidade (6.6.1). Depois, e no caso de $\lambda \neq 0$, a primitiva do segundo membro de (6.6.1) é determinada usando as técnicas de **(i)**.

Exemplo 6.6.3 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Em muitas situações, este tipo de primitivas pode ser determinado usando o Método de Primitivação por Partes e ou usando o Método de Primitivação por Substituição. sempre que seja possível, é preferível usar um destes métodos em vez da identidade (6.6.1). Esta escolha não é determinada pela maior ou menor rapidez destes métodos, mas sim porque são métodos mais gerais e aos quais já estamos habituados.

Exemplo 6.6.4 *Determine a primitiva do Exemplo 6.6.3, usando:*
a) O Método de Primitivação por Partes;
b) O Método de Primitivação por Substituição.

3º TIPO se a função a primitivar for do tipo seguinte:

$$f(x) = \frac{1}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,;$$

onde a, b, c são coeficientes reais, d é uma constante real e n é um natural, fazemos a mudança de variável seguinte:

$$\frac{1}{x-d} = t\,,$$

Deste modo, obtemos uma primitiva do tipo 2 acima referida:

$$\int \frac{dx}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{t^{n-1}}{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}\,,$$

onde $\alpha = (a+1)d^2 + bd$, $\beta = 2ad + b$, $\gamma = a$.

Exemplo 6.6.5 *Determinar a primitiva seguinte:*

$$\int \frac{dx}{(x+1)^4\sqrt{x^2+2x}}\,.$$

6.6.1 Primitivas de binómios diferenciais

As primitivas de binómios diferenciais são um vasto grupo de primitivas que incluem primitivas de funções racionais e primitivas de funções irracionais. Vamos designar por primitiva de um binómio diferencial a toda a primitiva da forma

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx\,,$$

onde a e b são coeficientes reais, m e n são racionais e p e q são inteiros não nulos. As primitivas destas funções são determinadas da forma seguinte:

(i) se $\dfrac{p}{q}$, m e n são inteiros, então estamos perante uma primitiva de uma função racional e podemos usar os métodos descritos na Secção 6.5.

(ii) se $\dfrac{p}{q}$ não é um inteiro, mas:

- $\dfrac{m+1}{n}$ é um inteiro $\Rightarrow$ fazer mudança de variável $a+bx^n=t^q$;
- $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{p}{q}$ é um inteiro $\Rightarrow$ fazer mudança de variável $a+bx^n=x^nt^q$.

Observe-se que, no último caso, podemos fazer a substituição na forma equivalente seguinte

$$ax^{-n}+b=t^q\,.$$

Nestes dois casos as primitivas são transformadas em primitivas de funções racionais e, novamente, podemos usar os métodos descritos na secção 6.5. Este resultado é conhecido na literatura como Teorema de Chebychev[2].

se $\frac{p}{q}$, $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ são todos não inteiros, então não é possível determinar a primitiva como combinação linear finita de funções elementares. Nestas situações especiais, que não iremos tratar neste curso, as primitivas são determinadas usando o desenvolvimento em série de Taylor da função a primitivar.

Exemplo 6.6.6 *Determine as primitivas seguintes:*

$$\text{a)}\ \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx\,;\qquad \text{b)}\ \int x^2(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\,dx\,.$$

Convém ter em mente, que, por vezes, existem substituições mais simples que nos permitem determinar a primitiva de forma mais célere.

Exemplo 6.6.7 *Determine a primitiva da alínea a do Exemplo 6.6.6 usando uma substituição trigonométrica, ou hiperbólica, conveniente.*

[2]Pafnuti Lvovitch Chebychev - ou Tchebychev, conforme a transliteração (1821-1894), matemático russo natural de Kaluga.

6.7 Exercícios

Primitivas imediatas

1. Determine as primitivas seguintes:

a) $\int x^5\,dx\,;$ b) $\int \frac{dx}{x^2}\,;$ c) $\int \frac{2}{x}\,dx\,;$

d) $\int \sqrt[3]{x}\,dx\,;$ e) $\int (2x^2-5x+3)\,dx\,;$ f) $\int (3x+4)^2\,dx\,;$

g) $\int x(x+a)(x+b)\,dx\,;$ h) $\int (a+bx^3)^2\,dx\,,\ a,\ b\ \in \mathbb{R}\,;$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}\,,\ n \in \mathbb{N}\,;$

j) $\int e^x \operatorname{cotg}(e^x)\,dx\,;$ k) $\int \left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx\,,\ a \in \mathbb{R}\,;$ l) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx\,;$

m) $\int \cosh^2\,x\,;$ n) $\int \frac{(x^3-x^2)^2}{\sqrt{x}}\,dx\,;$ o) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx\,.$

2. Seja u uma função real de variável real derivável. Mostre que:

a) $\int u' \sec(u)\,dx = \ln|\operatorname{tg}(u)+\sec(u)|+C\,;$

b) $\int u' \operatorname{cosec}(u)\,dx = -\ln|\operatorname{cotg}(u)+\operatorname{cosec}(u)|+C\,.$

Primitivação por partes

Determine as primitivas seguintes, usando o método de primitivação por partes:

a) $\int \ln x\,dx\,;$ b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx\,;$ c) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx\,;$

d) $\int x \operatorname{sen} x\,dx\,;$ e) $\int \cos^2 x dx\,;$ f) $\int x 2^{-x}\,dx\,;$

g) $\int x(x+a)(x+b)\,dx\,;$ h) $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx\,;$ i) $\int 3^x \cos x\,dx\,;$

j) $\int x^\alpha \ln x\,dx\,, \quad \alpha \in \mathbb{R};$ k) $\int x e^{-x}\,dx\,;$ l) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx\,;$

m) $\int \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx\,;$ n) $\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx\,;$ o) $\int x\sqrt{x+1}\,dx\,.$

Primitivação por substituição

Determine as primitivas seguintes, usando a mudança de variável indicada:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \quad x=\frac{1}{t}\,;$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}\,, \quad x=-\ln t\,;$

c) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7\,dx, \quad 5x^2-3=t\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx\,, \quad t=\sqrt{x+1}\,;$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx, \quad t=\operatorname{sen} x\,;$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\,, \quad x=\operatorname{sen}^2 t\,;$

g) $\displaystyle\int \sqrt{\pi-x^2}\,dx, \quad x=\sqrt{\pi}\,\operatorname{sen} t\,;$

h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx\,, \quad x=2\operatorname{tg} t\,;$

i) $\displaystyle\int \sqrt{9+x^2}\,dx, \quad x=3\operatorname{senh} t\,;$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \quad x=\sec t\,.$

Primitivação de funções racionais

1. Determine as primitivas seguintes:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}\,;$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-4x^2+3}\,dx\,;$

e) $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx\,;$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,;$

g) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx\,;$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx\,;$

i) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}\,dx\,;$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,;$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4}\,;$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}\,;$

m) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx\,;$

n) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x-1)(x^2-4x+5)}\,dx\,;$

o) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx\,;$

p) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx\,.$

Primitivação de funções irracionais

(a) Determine as primitivas seguintes de funções irracionais:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$; c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$; e) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$; f) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+1}}$; h) $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$; i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

j) $\displaystyle\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$; k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$;

m) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$; n) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; o) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$;

(b) Verifique se é possível ou não determinar as primitivas das funções irracionais

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}\sqrt{(1-x^3)^5} \quad \text{e} \quad g(x)=x^{\frac{39}{10}}(1-x^{\frac{7}{5}})^{\frac{3}{2}}$$

como combinação linear finita de funções elementares.

Capítulo 7

Séries de funções

7.1 Introdução

Uma série infinita de funções reais de variável real, ou apenas série de funções, é qualquer série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots ,$$

onde $u_n(x)$ é uma sucessão de funções reais de variável real definidas num domínio de $\mathbb{R}$. Para as séries de funções, usaremos a notação já utilizada nas séries numéricas, substituindo apenas o termo geral u_n por $u_n(x)$. Outro facto importante, é que, se nada for dito em contrário e sempre que a sucessão de funções de termo geral $u_n(x)$ esteja definida em $\mathbb{R}$, o limite inferior da série será 0. Observemos que, quando concretizamos a variável x, a série de funções $\sum u_n(x)$ torna-se numa série numérica. Deste modo, muito do que foi dito para as séries numéricas, em particular as noções de convergência bem como alguns resultados de convergência, ainda são válidos aqui, com as adaptações necessárias.

Definição 7.1.1 (Convergência) *Diz-se que a série de funções $\sum u_n(x)$ é convergente num ponto $x \in \mathbb{R}$, se a sucessão de funções das somas parciais associada*

$$S_0(x) = u_0(x), \quad S_1(x) = u_0(x) + u_1(x), \quad \ldots , \quad S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x), \quad \ldots$$

for convergente nesse ponto x.

No caso da série convergir num ponto $x \in \mathbb{R}$, a sucessão de funções das somas parciais converge, nesse ponto, para a denominada **função soma** da série, denotada por $S(x)$, isto é,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n(x) = S(x).$$

Neste caso, podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x).$$

se a sucessão de funções das somas parciais $S_n(x)$ for divergente no ponto x, a **série** $\sum u_n(x)$ diz-se **divergente** em x. A série $\sum u_n(x)$ é **absolutamente convergente** no ponto x, se $\sum |u_n(x)|$

é convergente em x. Se $\sum |u_n(x)|$ é divergente num ponto x, mas $\sum u_n(x)$ é convergente nesse ponto x, a série $\sum u_n(x)$ diz-se **simplesmente convergente**, ou **condicionalmente convergente**, no ponto $x \in \mathbb{R}$. Tal como para as séries numéricas, a noção de convergência absoluta é mais forte do que a de convergência simples.

Proposição 7.1.1 *Seja $\sum u_n(x)$ uma série de funções. Se $\sum |u_n(x)|$ é convergente num ponto $x \in \mathbb{R}$, então também $\sum u_n(x)$ é convergente em x e tem-se:*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|.$$

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

7.2 Séries de potências

Neste curso, iremos estudar apenas o caso particular de séries de funções cujos termos gerais $u_n(x)$ façam envolver na variável x somente potências de x.

Definição 7.2.1 (Série de potências) *Designa-se por série de potências de x toda a série da forma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \ldots ,$$

onde a_n é uma sucessão numérica e x é um real.

Os termos da sucessão a_n são denominados **coeficientes da série de potências**. Se, na série de potências anterior substituirmos x por $(x-a)$, onde a é um real fixo, obtemos a série de potências de $(x-a)$ seguinte:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \ldots .$$

Exemplo 7.2.1 (Série finita) *Uma série finita de potências é uma série de potências $\sum a_n\, x^n$ com os termos quase todos nulos, isto é, tal que*

$$\exists\, p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow a_n = 0.$$

Uma série finita é (absolutamente) convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De facto, de acordo com o exemplo,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_p\, x^p\,.$$

Este facto permite-nos dizer que as séries de potências de x podem ser encaradas como uma generalização dos polinómios em x.

Exemplo 7.2.2 (Série geométrica) *Uma série geométrica de potências é uma série de potências* $\sum a_n\, x^n$ *tal que* $a_n = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots .$$

Como vimos no Capítulo 3, a série de potências $\sum x^n$ é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| \geq 1$. No caso de convergir, a função soma é

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

e podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

O problema que se coloca nas séries de potências, é o de saber em que condições a série converge e, além disso, se convergir, para que valores de x converge. Vamos ver que os Critérios da Razão e da Raíz, podem-nos ajudar a estudar a natureza das séries de potências.

Proposição 7.2.1 (Critério da Razão - D'Alembert) *Sejam* $\sum a_n\, x^n$ *uma série de potências e*

$$R = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

1. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *converge absolutamente se* $|x| < R$*, isto é, se* $x \in \ (-R,\ R)$*.*
2. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *diverge se* $|x| > R$*, isto é, se* $x \in \ (-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$*.*

Em particular, se $R = 0$*, a série converge absolutamente apenas para* $x = 0$ *e se* $R = +\infty$*, a série converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

O número R, eventualmente $+\infty$, designa-se por **raio de convergência da série** e o intervalo $(-R,\ R)$ por **intervalo de convergência (absoluta) da série**.

Exemplo 7.2.3 (AULA TEÓRICA) *Usando o critério anterior, estude a série seguinte quanto à convergência absoluta:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Observe-se que para podermos aplicar o critério anterior, tem de existir, em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite $\lim |a_n|/|a_{n+1}|$.

Proposição 7.2.2 (Critério da Raíz - Cauchy) *Sejam* $\sum a_n\, x^n$ *uma série de potências e*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

1. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *converge absolutamente se* $|x| < R$*, isto é, se* $x \in\ (-R,\ R)$.

2. *A série* $\sum a_n\, x^n$ *diverge se* $|x| > R$*, isto é, se* $x \in\ (-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$.

Em particular, se $R = 0$*, a série converge absolutamente apenas para* $x = 0$ *e se* $R = +\infty$*, a série converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: AULA TEÓRICA.

Exemplo 7.2.4 (AULA TEÓRICA) *Usando o critério anterior, estude a série seguinte quanto à convergência absoluta:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n\, x^n.$$

Observe-se que para podermos aplicar o critério anterior, não é necessário que exista o limite $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Basta que exista o limite superior $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Em ambos os critérios enunciados acima nada se diz no caso de $|x| = R$, isto é se $x = \pm R$, admitindo $R \neq +\infty$. Neste caso, tem-se, respectivamente, no Critério da Razão e no da Raíz,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} x\right| = 1 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = 1\,.$$

Assim, não podemos concluir nada, porque a série pode ser convergente ou divergente. Por isso, torna-se necessário fazer um estudo local da série de potências nos pontos $x = \pm R$, o que nos leva ao estudo de séries numéricas.

Exemplo 7.2.5 (AULA TEÓRICA) *Estude a natureza da série seguinte quanto à convergência simples e absoluta em todos os pontos de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Tudo o que foi dito para as séries de potências de x, permanece válido para qualquer série de potências $(x-a)$, com $a \in \mathbb{R}$ fixo. Em particular, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \ldots$$

é convergente para

$$|x-a| < R \quad\Leftrightarrow\quad a - R < x < a + R,$$

e divergente para

$$|x-a| > R \quad\Leftrightarrow\quad x < a - R \quad \text{ou} \quad x > a + R,$$

onde R é o raio de convergência. Do mesmo modo, para

$$|x-a| = R \Leftrightarrow x = a \pm R,$$

tem de se fazer um estudo local.

Exemplo 7.2.6 (AULA TEÓRICA) *Estude a natureza da série seguinte quanto à convergência simples e absoluta em todos os pontos de $\mathbb{R}$:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2x+1)^n}{n}.$$

7.3 Séries de Taylor

Comecemos por observar que quando uma série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$, com $a\in\mathbb{R}$, converge, então a série pode ser representada, no intervalo de convergência $(a-R,\ a+R)$, pela sua função soma, digamos $u(x)$. Assim, podemos dizer que a série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$ define a função $u(x)$ cujo valor, em cada ponto x do seu intervalo de convergência, é dado por

$$u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(x-a)^n\,.$$

A série $\sum a_n\,(x-a)^n$ é, assim, designada por **expansão em série de potências** da função u em torno do ponto $x=a$. Existem dois problemas fundamentais que se levantam sobre a expansão em série de potências. O primeiro tem a ver com as propriedades da função soma de uma dada série de potências. No segundo problema, mais interessante do ponto de vista prático, pretendemos saber em que condições é possível ou não representar uma dada função por uma série de potências. Para analisarmos o primeiro problema, consideremos uma série de potências arbitrária

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(x-a)^n=a_0+a_1\,(x-a)+a_2\,(x-a)^2+\dots+a_n\,(x-a)^n+\dots\,,$$

com $a\in\mathbb{R}$ fixo. Na proposição seguinte, vamos ver que podemos garantir a continuidade da função soma no intervalo de convergência da série.

Proposição 7.3.1 *Seja $u(x)$ a função soma de uma série de potências $\sum a_n(x-a)^n$ e*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}=a_0\,(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\frac{a_2}{3}(x-a)^3+\dots+\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+\dots$$

a série que se obtém integrando termo a termo a série $\sum a_n\,(x-a)^n$ entre a e $x\in(a-R,\ a+R)$.

1. *As séries $\sum a_n\,x^n$ e $\sum a_n/(n+1)(x-a)^{n+1}$ têm o mesmo raio de convergência R.*

2. *se $R>0$, a função soma $u(x)$ é contínua em qualquer ponto $x\in(a-R,\ a+R)$ e*

$$\int_a^x u(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}\quad\forall\ x\in(a-R,\ a+R).$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, S. Guerreiro, p. 280.

O resultado anterior ainda é válido no intervalo $[a-R,\ a+R]$, desde que a função soma $u(x)$ esteja definida nos pontos $a \pm R$. A próxima proposição prende-se com a derivada de uma série de potências e da relação desta com a série original, assim como a derivabilidade da função soma da série de potências.

Proposição 7.3.2 *Seja $u(x)$ a função soma da série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$ e*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2\,(x-a) + 3a_2\,(x-a)^2 + \cdots + na_n\,(x-a)^{n-1} + \dots$$

a série que se obtém derivando termo a termo a série $\sum a_n\,(x-a)^n$.

1. *As séries $\sum a_n\,x^n$ e $\sum n\,a_n\,x^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência R.*
2. *Se $R > 0$, a função soma $u(x)$ é derivável em qualquer ponto $x \in (a-R,\ a+R)$ e*

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,(x-a)^{n-1} \quad \forall\ x \in (a-R,\ a+R).$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, S. Guerreiro, p. 353.

Para respondermos ao segundo problema, convém recordar a noção de Fórmula de Taylor de ordem n em torno de um ponto $x = a$. Na definição seguinte, vamos extender esta noção para qualquer ordem e, assim, escrever uma fórmula com infinitas parcelas.

Definição 7.3.1 (Série de Taylor) *Sejam $u(x)$ uma função indefinidamente derivável num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Designa-se por série de Taylor de $u(x)$ no ponto $x = a$ à serie de potências seguinte*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = u(a) + u'(a)(x-a) + \frac{u''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots .$$

No caso de $a = 0$, a série anterior recebe o nome de **série de Maclaurin**.

A questão que se coloca agora, é a de saber se a série de Taylor $\sum u^{(n)}(a)/n!(x-a)^n$ converge no ponto $x = a$ e se, em algum intervalo I contendo a, tem soma igual a $u(x)$.

Definição 7.3.2 (Função analítica) *Seja $u(x)$ uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in I$. Diz-se que $u(x)$ é uma função analítica no ponto $x = a$, se existe uma série de potências $\sum u_n\,(x-a)^n$ tal que, para qualquer x num subintervalo de I contendo a, se tem*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\,.$$

A proposição seguinte dá-nos um critério geral de desenvolvimento de uma função em série de Taylor.

Proposição 7.3.3 *Seja $u(x)$ uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e indefinidamente derivável em I, e seja $a \in I$. Tem-se*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall\, x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \subseteq I, \quad \varepsilon > 0.$$

se e só se

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{r_n(x-a)}{(x-a)^n} = 0\,.$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, S. Guerreiro p. 349.

Convém notar que o limite de $r_n(x-a)$ é tomado quando n tende para $+\infty$ e não quando x tende para a, o qual é sempre 0 para todo n. Pelo exposto acima, pode acontecer que, por um lado, determinada função seja a soma de uma série de potências e, por outro, admita um desenvolvimento em série de Taylor. Neste caso, a proposição seguinte diz-nos que a série obtida, num caso ou no outro, é a mesma.

Proposição 7.3.4 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Se $u(x)$ é a soma de uma série de potências $\sum a_n\,(x-a)^n$ num intervalo $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, então esta série é a série de Taylor de $u(x)$ em torno do ponto $x = a$, isto é,*

$$a_0 = u(a)\,, \quad a_1 = u'(a)\,, \quad a_2 = \frac{u''(a)}{2}\,, \quad \dots\,, \quad a_n = \frac{u^{(n)}(a)}{n!}, \quad \dots\,.$$

`SEM DEMONSTRAÇÃO:` Ver, por exemplo, S. Guerreiro p. 355.

Concluímos esta secção com alguns desenvolvimentos fundamentais em séries de Taylor.

Exemplo 7.3.1 (`AULA TEÓRICA`) *Mostre que as funções seguintes admitem os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin indicados nos intervalos respectivos:*

(i) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots\,, \quad |x| < 1;$$

(ii) $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\,, \quad |x| < +\infty;$$

(iii) $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots\,, \quad |x| < 1;$$

(iv) $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots\,, \quad |x| < 1;$$

(v) $$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\,, \ |x| < +\infty;$$

(vi) $$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\,, \quad |x| < +\infty.$$

Observemos que, no caso da alínea (iv), $\alpha \in \mathbb{R}$ e se α é um natural, então a série referida tem apenas um número finito de parcelas.

7.4 Exercícios

1. Estude a nautreza das séries seguintes e indique, no caso de serem não vazios, os subconjuntos de $\mathbb{R}$ onde são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n$;

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}}$;

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2+(-1)^n]^{n+1}}{n+1}(x-2)^{2n}$; g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n[(3n)!]^2}{(6n)!}\left(x-\frac{4}{\pi}\right)^n$.

2. Represente por uma série de potências de x (série de Mac-Laurin) as funções seguintes, indicando o maior intervalo aberto onde cada desenvolvimento é válido:

   a) $\dfrac{1}{2-x}$; b) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; c) $\sqrt{1-2x}$; d) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;

   e) $\operatorname{senh} x$; f) 2^x; g) $\operatorname{sen}^2 x$; h) $\operatorname{arctg} x$;

   i) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

3. Represente por uma série de potências de x (série de Mac-Laurin) as funções seguintes, indique o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido e mostre que os limites notáveis indicados são válidos:

   a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;

   b) $\dfrac{e^x-1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$;

   c) $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ e $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

4. Represente por uma série de potências indicadas a seguir (série de Taylor) as funções

seguintes e indique o maior domínio onde o desenvolvimento é válido:

a) $\dfrac{1}{x}\,, \qquad x-1\,;$ b) $\ln x\,, \qquad x-1\,;$

c) $e^x\,, \quad x+2\,;$ d) $\cos^2 x\,, \quad x-\dfrac{\pi}{2}\,;$

e) $\sqrt{x}\,, \quad x-4\,;$ f) $x^3-2x^2-5x-2\,, \quad x+4\,.$

5. Determine a função soma das séries seguintes e o indique o maior domínio onde o desenvolvimento é válido:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{-n}}{(2n+1)!}\,;$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!}\,;$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}(2n)!}\,;$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x+(-1)^n n!}{(n+1)!}x^n\,;$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{2^{3n}(2n)!}\,;$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n 2^{n+1}\right]x^n\,.$

Bibliografia

[1] M. Abreu. Apontamentos das Aulas Teóricas de Análise Matemática I. Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, 2004.

[2] T.M. Apostol. *Calculus* volumes I e II. John Wiley & Sons, New York, 1967 e 1969.

[3] R. Beals. *Analysis - An Introduction*. Cambridge University Press, 2004.

[4] W.E. Boyce, R.C. Diprima. *Calculus*. John Willey & Sons, 1988.

[5] R.C. Buck. *Advanced Calculus*. Waveland Pr. Inc., 2003.

[6] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1987.

[7] R. Courant e F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Volume I. Springer-Verlag, New York, 1989.

[8] B. Demidovitch (sob a redacção). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*. 6ª edição. Editora Mir, Moscovo, 1987.

[9] M. Figueira. *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Textos de Matemática do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, 1996.

[10] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko e E. Shikin. *Mathematical Analysis for Engineers*. Volume 1. Mir Publishers, Moscow, 1989.

[11] V. Kravchenko. Apontamentos das aulas teóricas de Análise Matemática I e II. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, 2008.

[12] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, New York, 2005.

[13] J.E. Marsden e M.J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. Second Edition. W.E. Freeman and Company, New York, 1995.

[14] W. Rudin. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill International Editions, 1976.

[15] J. Santos Guerreiro. *Curso de Análise Matemática*. Escolar Editora, Lisboa, 1989.

[16] S. Samko. Apontamentos das aulas teóricas de Análise Matemática I e II. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, 2008.

[17] V. Zorich. *Mathematical Analysis I, II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.