Cálculo I LEI

Segunda chamada 1 de Fevereiro de 2007

1. (5 valores) Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

   (a) um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\overline{A} = [0,1]$ e $int\, A = \emptyset$;

   (b) um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado tal que $A \cap \mathbb{Q}$ e $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sejam numeráveis;

   (c) uma função $f : \,]-1,4[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, não sobrejectiva, tal que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$;

   (d) uma função $f\colon [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua mas não derivável em 1;

   (e) uma função $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in [0,2]$.

2. (5 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

   (a) se $x \in \mathbb{R}$ e $|2x^2 - 5| < 3$ então $x \in]1,2[$;

   (b) o conjunto $[0,\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\}$ não possui mínimo nem máximo;

   (c) a equação $\cos^2 x = 3x - 2$ possui uma única raiz real;

   (d) se $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivada contínua, $\psi(0) = 0$ e $\psi(1) = \frac{\pi}{2}$ então $\displaystyle\int_0^1 \psi'(t) \cos\psi(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$;

   (e) o comprimento da curva de equação $y = \sqrt{1 - x^2}$ entre os pontos de abcissa 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é dado por $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

3. (2 valores) Determine $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{1 - \cos^2 x}$.

4. (2 valores) Seja $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{t^4}\,dt\,.$

   (a) Justifique que F é derivável e determine $F'(x)$.

   (b) Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 da função F em torno de 1.

   Em alternativa à alínea (b), mas valendo apenas metade da cotação, determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em torno de 0 da função $g(x) = e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. (2 valores) Calcule apenas uma das seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{2 + x + e^{\operatorname{argsh} x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx;$ (b) $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 7x + 1}{(x^2-1)\,(x-2)}\,dx.$

6. (2 valores) Calcule apenas um dos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{3} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx;$ (b) $\displaystyle\int_0^{15} x\sqrt[4]{1+x}\,dx.$

7. (2 valores) Seja $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e defina-se $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

   Justifique que g é integrável em $[0,1]$ e prove que existe $c \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^c f(t)\,dt.$$