Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise
2014/2015

Licenciatura em Engenharia Informática

Folha 8

Exercício 8.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\ d(x,y,z)$ com $\mathcal{D} = [0,2]^3$;

b) $\iiint_{\mathcal{D}} ze^{x+y}\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = [0,1]^3$;

c) $\iiint_{\mathcal{D}} xy\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$;

d) $\iiint_{\mathcal{D}} x\ d(x,y,z)$, com $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 3\}$.

Exercício 8.2 Use integrais triplos para para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z = a - x^2 - y^2$, com $a > 0$, e pelo plano XOY.

Exercício 8.3 Apresente um integral triplo que calcule o volume do elipsoide definido pela equação $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

Exercício 8.4 Faça um esboço da região de integração e reescreva o integral com ordem de integração $dx\, dy\, dz$:

a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\ dz\, dy\, dx$;

b) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\ dz\, dy\, dx$.

Exercício 8.5 Calcule, mudando eventualmente a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2\ dz\, dy\, dx.$$

Exercício 8.6 Usando coordenadas cilíndricas calcule

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Exercício 8.7 Seja $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4,\, 2 \leq z \leq 3\right\}$. Use coordenadas cilíndricas para determinar

$$\iiint_{\mathcal{D}} z e^{x^2+y^2}\, d(x,y,z).$$

Exercício 8.8 Seja $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\right\}$. Calcule, usando coordenadas cilíndricas,

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x+y)\, d(x,y,z).$$

Exercício 8.9 Seja $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2+y^2 \leq 9\right\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.

Exercício 8.10 Usando coordenadas esféricas, calcule o volume do sólido interior ao cone de equação $z^2 = x^2+y^2$ e à esfera de equação $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Exercício 8.11 Considere a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas equações $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$.

a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d(x,y,z)$.

Exercício 8.12 Calcule o volume de $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 6,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 4-y^2\right\}$.

Exercício 8.13 Calcule o volume das regiões limitadas

a) pelas superfícies esféricas $x^2+y^2+z^2 = 9$ e $x^2+y^2+z^2 = 3$;

b) pelos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $z = 12-x^2-y^2$;

c) pelo plano $x = 1$ e pelo parabolóide $y^2+z^2 = 4x$;

d) pelo plano $x = 9$ e pelo parabolóide elíptico $4y^2+9z^2 = 4x$;

e) pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide $z = x^2+y^2$ e pelas superfícies cilíndricas $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 4$.

Exercício 8.14 Considerando $\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0,\, \sqrt{x+y}+1 \leq z \leq 2\right\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\, d(x,y,z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2, v^2, w) \end{array}$$

Exercício 8.15 Considere o conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x+2y+z \leq 2,\, 0 \leq x+y-z \leq \tfrac{\pi}{4},\, 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

a) Calcule o volume de $\mathcal{D}$.

b) Calcule $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\operatorname{sen}(x+y+z)}{x+2y+z}\, d(x,y,z)$.

Exercício 8.16 Calcule o volume da esfera em $\mathbb{R}^4$ de raio $r > 0$.