CAPÍTULO II

NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM R

1. Distância e vizinhanças

Ao número real não negativo $d(x, y) = |\ x - y\ |$ chama-se *distância* entre os números reais x e y . São imediatas as seguintes propriedades:

P1 : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
P2 : $d(x, y) = d(y, x)$ (*simetria*);
P3 : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*desigualdade triangular*).

A propriedade **P3** pode demonstrar-se como segue, utilizando a desigualdade modular da soma : $d(x, y) = |\ x - y\ | = |\ (x - z) + (z - y)\ | \leq |\ x - z\ | + |\ z - y\ | \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dado o real $a \in \mathbf{R}$ e sendo $\varepsilon > 0$ ao conjunto (intervalo),

$$\mathrm{V}_\varepsilon(a) = \{\ x :\ d(x, a) < \varepsilon\ \} = \{\ x :\ |\ x - a\ | < \varepsilon\ \} = \ ]\ a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon\ [\ ,$$

chama-se *vizinhança* de a com raio ε. São óbvias as seguintes propriedades :

P4 : $\varepsilon < \delta \Rightarrow \mathrm{V}_\varepsilon(a) \subset \mathrm{V}_\delta(a)$;
P5 : $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \mathrm{V}_\varepsilon(a) = \{a\}$; $a \neq b \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : \mathrm{V}_\varepsilon(a) \cap \mathrm{V}_\varepsilon(b) = \varnothing$.

2. Conceitos topológicos básicos

Definem-se seguidamente os conceitos topológicos mais importantes:

a) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto interior* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se existe uma certa $\mathrm{V}_\varepsilon(a)$ contida no conjunto A . O conjunto dos pontos interiores de um conjunto A designa-se por *interior* do conjunto e representa-se por $INT\ A$, podendo evidentemente ser $INT\ A = \varnothing$ (nada obriga a que um dado conjunto tenha pontos interiores).

b) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto fronteiro* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se em qualquer $\mathrm{V}_\varepsilon(a)$ existem pontos do conjunto A e pontos do complementar de A. O conjunto dos pontos fronteiros de um conjunto A designa-se por *fronteira* do conjunto e representa-se por $FRONT\ A$, podendo evidentemente ser $FRONT\ A = \varnothing$.

c) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto exterior* ao conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se existe uma certa $\mathrm{V}_\varepsilon(a)$ contida no complementar do conjunto A . O conjunto dos pontos exteriores ao conjunto A designa-se por *exterior* do conjunto e representa-se por $EXT\ A$, podendo evidentemente ser $EXT\ A = \varnothing$.

d) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existe pelo menos um ponto de A distinto de a. O conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se *derivado* de A e representa-se por A', podendo evidentemente ser $A' = \varnothing$.

e) Chama-se *aderência* ou *fecho* do conjunto A à união do seu interior com a sua fronteira, ou seja, $Ad\,A = INT\,A \cup FRONT\,A$. Excepto no caso de A ser vazio, tem-se sempre $Ad\,A \neq \varnothing$.

f) Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se *aberto* se e só se coincide com o seu interior, ou seja, $A = INT\,A$. Dado que em qualquer caso (A aberto ou não) sempre se tem $INT\,A \subseteq A$, para provar que A é aberto bastará provar que $A \subseteq INT\,A$.

g) Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se *fechado* se e só se coincide com a sua aderência, ou seja, se e só se, $A = Ad\,A = INT\ A \cup FRONT\ A$.

A partir destes conceitos básicos podemos enunciar uma série de propriedades, a maioria com demonstração muito simples, sem no entanto termos a preocupação de exaustividade. Algumas outras serão apresentadas como exercício no final do capítulo. Vejamos então:

P6 : $INT\ A \cup FRONT\ A \cup EXT\ A = \mathbf{R}$

<u>Demonstração</u>: É evidente, dadas as definições de interior, fronteira e exterior de um conjunto ; qualquer ponto de espaço respeita uma e uma só das definições a), b) ou c).

P7 : $EXT\,A = INT\ \overline{A}$

<u>Demonstração</u>: É também evidente, dado que um ponto $a \in EXT\,A$ se e só se existe uma $V_\varepsilon(a)$ contida no complementar de A e tal equivale a ter-se $a \in INT\ \overline{A}$.

P8 : $FRONT\ A = FRONT\ \overline{A}$

<u>Demonstração</u>: Basta atender à definição: $a \in FRONT\ A$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existem pontos de A e pontos de $\overline{A}$, o que equivale a ser $a \in FRONT\ \overline{A}$.

P9 : *Se* $A \subseteq B$, *então* $A' \subseteq B'$

<u>Demonstração</u> : Tomando $a \in A'$, tem-se que em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um ponto de A distinto de a e, portanto, dado ter-se $A \subseteq B$, também existe pelo menos um ponto de B distinto desse mesmo a, ou seja, $a \in B'$.

P10 : $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demonstração : Por ser $A \subseteq (A \cup B)$ e $B \subseteq (A \cup B)$, a propriedade **P9** garante que $A' \subseteq (A \cup B)'$ e $B' \subseteq (A \cup B)'$ o que implica a inclusão,

$$A' \cup B' \subseteq (A \cup B)',$$

faltando portanto provar a inclusão contrária para se poder considerar provada a igualdade do enunciado. Provemos então que $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$. Deveremos provar que,

$$a \in (A \cup B)' \Rightarrow a \in A' \cup B' ,$$

mas no caso presente torna-se mais fácil provar a implicação equivalente,

$$a \notin A' \cup B' \Rightarrow a \notin (A \cup B)' .$$

Para tal, considere-se $a \notin A' \cup B'$, ou seja, $a \notin A'$ e $a \notin B'$; existe então uma $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ sem pontos de A para além do próprio a e existe uma outra $\mathrm{V}_{\delta}(a)$ sem pontos de B para além do próprio a ; tomando $\theta = mín\ \{\ \varepsilon , \delta \}$ em $\mathrm{V}_{\theta}(a)$ não se encontram pontos nem de A nem de B , para além do próprio a ; então existe uma vizinhança de a sem pontos de $A \cup B$ para além do próprio a , ou seja, $a \notin (A \cup B)'$, como se queria provar.

P11 : *As vizinhanças* $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ *são conjuntos abertos*

Demonstração : Dado $b \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$, tem-se $d(a, b) < \varepsilon$. Tomando,

$$\delta = \varepsilon - d(a, b) > 0 ,$$

vejamos que $\mathrm{V}_{\delta}(b) \subseteq \mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$. Com efeito, usando as propriedades **P2** e **P3** ,

$$x \in \mathrm{V}_{\delta}(b) \Rightarrow d(x, b) < \delta = \varepsilon - d(a, b) \Rightarrow d(x, b) + d(a, b) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x, a) < \varepsilon \Rightarrow x \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(a) .$$

Por definição de ponto interior conclui-se assim que $b \in INT\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$, ou seja, $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a) \subseteq INT\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ o que chega para garantir a igualdade $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a) = INT\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$. Em conclusão, $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ é um conjunto aberto como se queria provar.

P12 : *Sendo* A *um conjunto qualquer,* $INT\ A$ *é um conjunto aberto*

Demonstração : Basta provar que $INT\ A \subseteq INT\ (INT\ A)$, pois tal chega para garantir que $INT\ A = INT\ (INT\ A)$, ou seja que $INT\ A$ é um conjunto aberto.

Para tal notemos que $A \subseteq B \Rightarrow INT\ A \subseteq INT\ B$ implicação que é praticamente evidente e cuja justificação se deixa ao cuidado do leitor.

Então,

$$a \in INT\,A \Rightarrow \exists\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a):\ \ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a) \subseteq A \Rightarrow \exists\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a):\ \ INT\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a) \subseteq INT\,A$$

Como o conjunto $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ é aberto (ver propriedade **P11**) tem-se $INT\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a) = \mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ e portanto,

$$a \in INT\,A \Rightarrow \exists\ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a):\ \ \mathrm{V}_{\varepsilon}(a) \subseteq INT\,A \ \Rightarrow\ a \in INT\,(INT\ A\,)\,,$$

ou seja, $INT\,A \subseteq INT\,(INT\,A)$ como se queria provar.

P13 : $Ad\,A = A \cup A'$

Demonstração : Dado $a \in Ad\ A$, poderá ser $a \in A$ ou $a \notin A$. Se for $a \in A$, teremos $a \in A \cup A'$. Se for $a \notin A$, o ponto a não pode ser interior do conjunto A , logo necessariamente $a \in FRONT\,A$ e então em qualquer $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ existe pelo menos um ponto do conjunto A que não pode ser o próprio a dado estarmos a considerar o caso $a \notin A$; então, por definição de ponto de acumulação, $a \in A'$, ou seja, também neste caso se tem $a \in A \cup A'$. Em conclusão: $Ad\,A \subseteq A \cup A'$.

Para provar a inclusão contrária tome-se $a \in A \cup A'$ e vejamos que igualmente $a \in Ad\ A$. Se for $a \in A$, tem-se evidentemente $a \in Ad\ A$. Se for $a \notin A$, necessariamente $a \in A'$, logo em qualquer $\mathrm{V}_{\varepsilon}(a)$ existe o ponto a que pertence ao complementar do conjunto A e pelo menos um ponto do conjunto A , ou seja, $a \in FRONT\,A$ e portanto também neste caso $a \in Ad\,A$.

P14 : *O conjunto A é fechado se e só se* $A' \subseteq A$

Demonstração : Sendo A fechado então, por definição, $A = Ad\,A = A \cup A'$ donde resulta $A' \subseteq A$. Por outro lado, sendo $A' \subseteq A$ tem-se $Ad\,A = A \cup A' = A$, ou seja, o conjunto A é fechado.

P15 : *O derivado e a aderência ou fecho de um qualquer conjunto A são conjuntos fechados*

Demonstração : Vejamos primeiro o caso do derivado. Pela propriedade **P14**, basta provar que $(A')' \subseteq A'$. Dado $x \in (A')'$, em qualquer $\mathrm{V}_{\varepsilon}(x)$ existe pelo menos um ponto $y \neq x$ pertencente ao conjunto A'. Por ser $y \in A'$, por seu lado, em qualquer $\mathrm{V}_{\delta}(y)$ existe um $z \neq y$ pertencente ao conjunto A . Tomando em particular,

$$\delta = m\acute{i}n\ \{\ \varepsilon - d(y, x)\ ;\ d(y, x)\ \}\ ,$$

resulta $d(z, y) < \delta \le \varepsilon - d(y, x)$, ou seja, $d(z, x) \le d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon$, assim se concluindo que $z \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(x)$. Se se provar que $z \neq x$, fica provado que em $\mathrm{V}_{\varepsilon}(x)$ - qualquer - existe sempre pelo menos um $z \neq x$ pertencente ao conjunto A , ou seja, fica provado que $x \in A'$, assim se demonstrando a inclusão $(A')' \subseteq A'$, ou seja, que A' é fechado. Ora, atendendo à definição do particular δ considerado, resulta $\delta \le d(y, x) \le d(y, z) + d(z, x)$; e dado que $d(y, z) = d(z, y) < \delta$, sai $d(z, x) > 0$ ou seja $z \neq x$.

Vejamos agora que também a aderência ou fecho de um conjunto A é sempre um conjunto fechado. Dado que $Ad\, A = A \cup A'$ (ver propriedade **P13**) e atendendo à igualdade estabelecida na propriedade **P10**, tem-se, considerando a inclusão já provada, $(A')' \subseteq A'$,

$$[Ad\, A]' = (A \cup A')' = A' \cup (A')' \subseteq A' \cup A' = A' \subseteq Ad\, A\, ,$$

o que permite concluir que o conjunto $Ad\, A$ é um conjunto fechado.

P16 : *Um conjunto A é fechado se e só se o seu complementar $\overline{A}$ for aberto. Um conjunto A é aberto se e só se o seu complementar $\overline{A}$ for fechado.*

<u>Demonstração</u> : Admita-se que A é fechado e demonstre-se que $\overline{A}$ é aberto. Tomando $x \in \overline{A}$ existe uma vizinhança desse x sem nenhum ponto de A : com efeito, se em qualquer vizinhança do ponto x existisse pelo menos um ponto do conjunto A, tal ponto não poderia ser o próprio x (porque x pertence ao complementar de A) e então poderia concluir-se que o ponto x era ponto de acumulação de A ; mas como o conjunto A é fechado por hipótese, tal ponto x pertenceria então ao conjunto A (lembre-se que ser A fechado equivale a $A' \subseteq A$) e não a $\overline{A}$ como se admitiu inicialmente. Ora se existe uma vizinhança de x sem nenhum ponto de A, tal significa que essa vizinhança está contida no complementar de A, ou seja, existe uma $V_\varepsilon(x) \subseteq \overline{A}$, assim se provando que,

$$x \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, V_\varepsilon(x) \;:\; V_\varepsilon(x) \subseteq \overline{A} \Rightarrow x \in INT\, \overline{A}\, ,$$

significando esta implicação que $\overline{A} \subseteq INT\, \overline{A}$, ou ainda, que $\overline{A}$ é um conjunto aberto.

Admita-se agora que $\overline{A}$ é aberto e demonstre-se que então A é fechado, ou seja, demonstre-se que $A' \subseteq A$. Tomando $a \notin A$ tem-se $a \in \overline{A}$ e dado que por hipótese $\overline{A}$ é aberto, existe uma vizinhança de a contida no conjunto $\overline{A}$ o que implica que esse ponto a não pode ser ponto de acumulação de A . Provou-se então que $a \notin A \Rightarrow a \notin A'$ equivalendo esta implicação a ser $A' \subseteq A$. Está demonstrado o que se pretendia.

Para provar que o conjunto A é aberto se e só se $\overline{A}$ for fechado (segunda parte da propriedade), basta notar que pela primeira parte da propriedade o conjunto $B = \overline{A}$ será fechado se e só se $\overline{B} = A$ for aberto.

P17 : *A união de um qualquer número de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A intersecção de um qualquer número de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

<u>Demonstração</u> : Sejam A_α conjuntos abertos em número finito ou infinito. Para provar que a união dos A_α é aberto teremos de provar que, $\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq INT\, \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)$.

Ora, dado um qualquer $a \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ tem-se que esse ponto a pertence pelo menos a um dos A_α ; como esse A_α a que o ponto a pertence é um conjunto aberto, existirá uma $V_\varepsilon(a)$ contida em A_α e portanto essa mesma vizinhança estará contida em $\bigcup_\alpha A_\alpha$, ou seja, o ponto a pertencerá a $INT\ (\bigcup_\alpha A_\alpha)$. Fica assim provada a inclusão desejada, isto é , fica provado que a união dos abertos A_α é igualmente um conjunto aberto.

Quanto à intersecção de um número qualquer de conjuntos fechados F_α note-se que,

$$\overline{\bigcap_\alpha F_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{F_\alpha} \quad \text{(2ª lei de De Morgan)}$$

e que os conjuntos $\overline{F_\alpha}$ são abertos (complementares de conjuntos fechados). Pela primeira parte da propriedade, já demonstrada, conclui-se que o conjunto $\overline{\bigcap_\alpha F_\alpha}$ é aberto e portanto o respectivo conjunto complementar $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é fechado.

P18 : *A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A reunião de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração : Vejamos em primeiro lugar o caso da reunião de um número finito de conjuntos fechados. Bastará considerar o caso de dois conjuntos, pois por indução finita poderemos facilmente passar ao caso de mais de dois conjuntos (mas em número finito). Sendo F e G conjuntos fechados, tem-se, usando as propriedades **P10** e **P14**,

$$(F \cup G)' = F' \cup G' \subseteq F \cup G ,$$

o que prova que a união de F e G é também um conjunto fechado.

Vejamos agora o caso da intersecção de dois conjuntos abertos (para mais de dois, mas em número finito, procede-se por indução). Sendo A e B conjuntos abertos, tem-se que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são fechados e, portanto, $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado; então o complementar de $\overline{A} \cup \overline{B}$, que é precisamente $A \cap B$, é aberto.

Convirá esclarecer que a reunião de uma infinidade de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado e, do mesmo modo, a intersecção de uma infinidade de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. É fácil encontrar exemplos que mostram essa possibilidade. A este propósito a propriedade seguinte é elucidativa:

P19 : *Qualquer conjunto fechado é a intersecção de uma infinidade numerável de conjuntos abertos. Qualquer conjunto aberto é a união de uma infinidade numerável de conjuntos fechados.*

Demonstração: Vejamos em primeiro lugar o caso de um conjunto fechado F . Com r número racional positivo, definam-se os conjuntos,

$$I_r = \{ \, x : \ \exists \ a \in F \ \text{tal que} \ d(x, a) < r \, \} \ ,$$

que como veremos de seguida são todos abertos. Com efeito, dado um $x \in I_r$ existirá um $a \in F$ tal que $d(x, a) < r$. Fixando $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$, prova-se que $V_\varepsilon(x) \subseteq I_r$; de facto, sendo $y \in V_\varepsilon(x)$, tem-se $d(y, x) < \varepsilon = r - d(x, a)$, donde resulta,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r \ ,$$

ou seja, $y \in I_r$.

Falta provar que a intersecção dos conjuntos abertos I_r é igual ao conjunto fechado F , devendo notar-se que os conjuntos I_r são em infinidade numerável (são tantos quantos os racionais positivos que já sabemos serem em infinidade numerável). Para tal notemos que:

a) O conjunto F está contido em qualquer I_r , tal resultando imediatamente do modo como se definem os conjuntos I_r ;

b) De a) resulta logo que,

$$F \subseteq \bigcap_{r \in Q^+} I_r \ ;$$

c) Note-se agora que, sendo $x \notin F$, tem-se $x \in \overline{F}$ e como $\overline{F}$ é um conjunto aberto (dado que F é fechado) existe uma $V_\varepsilon(x)$ contida em $\overline{F}$, ou seja, nessa $V_\varepsilon(x)$ não há pontos do conjunto F ; então, sendo r um racional positivo menor que ε , nenhum ponto $a \in F$ é tal que $d(x, a) < r < \varepsilon$, caso contrário esse a seria um ponto de F pertencente a $V_\varepsilon(x)$, o que já vimos não ser possível; mas então, por definição dos conjuntos I_r tem-se que o ponto x que vimos considerando não pertence aos I_r com racionais $r < \varepsilon$; em conclusão,

$$x \notin F \Rightarrow x \notin \bigcap_{r \in Q^+} I_r \ ,$$

o que equivale a ser $\bigcap_{r \in Q^+} I_r \subseteq F$;

d) As inclusões demonstradas em b) e em c) permitem concluir que $\bigcap_{r \in Q^+} I_r = F$, igualdade que se pretendia demonstrar.

O caso de um conjunto aberto A é agora imediato: o complementar de A é fechado, logo é a intersecção de uma infinidade numerável de conjuntos abertos, como acabou de demonstrar-se. Mas então o conjunto A será a reunião de uma infinidade numerável de complementares de conjuntos abertos (2ª lei de De Morgan); ou seja, o conjunto A será a reunião de uma infinidade numerável de conjuntos fechados (dado que os complementares dos abertos são fechados).

P20 : *A condição necessária e suficiente para que a seja ponto de acumulação de um conjunto A é que em qualquer vizinhança desse ponto se encontrem infinitos pontos de A*

Demonstração : A condição é obviamente suficiente: se em cada vizinhança do ponto se encontrarem infinitos pontos do conjunto, encontra-se pelo menos um ponto do conjunto e portanto, por definição, trata-se de um ponto de acumulação do conjunto em causa.

Vejamos que a condição é igualmente necessária. Admita-se que a é ponto de acumulação do conjunto A. Se em certa $V_{\varepsilon}(a)$ apenas se encontrarem finitos pontos do conjunto, sejam $x_1, x_2, \dots, x_k$ os pontos de A distintos de a que se encontram naquela vizinhança. Fixando agora,

$$\delta = Mín \; \{ \, d(x_1, a) \, ; d(x_2, a) \, ; \dots ; d(x_k, a) \, \} > 0 \; ,$$

vê-se de imediato que em $V_{\delta}(a)$ não existem pontos do conjunto A para além eventualmente do próprio a : com efeito, se algum $y \neq a$ pertencesse ao conjunto A e igualmente a $V_{\delta}(a)$, ter-se-ia $d(y, a) < \delta < \varepsilon$ e portanto esse y pertenceria igualmente a $V_{\varepsilon}(a)$; o ponto y referido seria então um dos x_j ($j = 1, 2, \dots, k$) o que obrigaria a ser $d(y, a) \geq \delta$, dado o modo como se definiu o valor δ. Mas se em $V_{\delta}(a)$ não existem pontos do conjunto A para além eventualmente do próprio a, conclui-se que o ponto a não pode ser ponto de acumulação do conjunto A . Chega-se assim a uma contradição: se tomarmos um ponto de acumulação de um conjunto A e admitirmos a existência de uma vizinhança desse ponto onde apenas haja um número finito de pontos do conjunto, conclui-se que tal ponto não pode ser ponto de acumulação desse conjunto. Tal significa que, sendo a ponto de acumulação de A, então necessariamente em qualquer vizinhança desse ponto existem infinitos pontos do conjunto.

Corolário 1 : *Os conjuntos finitos não admitem pontos de acumulação*

Corolário 2 : *É condição necessária de existência de pontos de acumulação de um conjunto, que este seja um conjunto infinito.*

3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Estuda-se seguidamente um importante teorema que assegura que qualquer subconjunto de **R** que seja limitado e infinito admite pelo menos um ponto de acumulação.

Teorema 1 : *Qualquer conjunto de números reais que seja limitado e infinito admite pelo menos um ponto de acumulação* (Bolzano - Weierstrass).

Demonstração : Sejam a e b , respectivamente, um minorante e um majorante do conjunto A. Represente-se por X o conjunto dos números $x \in [\, a , b \,]$ que tenham à sua direita (sejam excedidos por) uma infinidade de elementos do conjunto A. Claro que X é não vazio porque pelo menos $a \in X$ (o ponto a , minorante de A, tem à sua direita infinitos elementos do conjunto A que por hipótese é infinito). Por outro lado, X é majorado, sendo por exemplo o real b um seu majorante (nenhum elemento de X excede b, porque à direita desse b não há elementos do conjunto A). Por ser X majorado, admite supremo, seja ele λ .

Vejamos agora que o referido supremo λ é ponto de acumulação do conjunto A , o que concluirá a demonstração do teorema. Dada uma qualquer $V_\varepsilon(\lambda) =]\, \lambda - \varepsilon \,, \lambda + \varepsilon\, [$,

a) À direita de $\lambda - \varepsilon$ há elementos de X, caso contrário $\lambda - \varepsilon$ seria um majorante de X inferior ao respectivo supremo;

b) Logo, à direita de $\lambda - \varepsilon$ existem infinitos elementos de A;

c) À direita de $\lambda + \varepsilon$ não pode haver uma infinidade de elementos de A, caso contrário $\lambda + \varepsilon \in X$ o que seria contrário ao facto de λ ser o supremo de X; logo,

d) Em $V_\varepsilon(\lambda) =]\, \lambda - \varepsilon \,, \lambda + \varepsilon\, [$ tem de haver uma infinidade de elementos de A.

Assim se conclui que $\lambda \in A'$ como se pretendia provar.

4. Conjuntos limitados

Conhece-se já o conceito de conjunto limitado, relativamente aos subconjuntos $A \subseteq \mathbf{R}$. Este conceito define-se, como se sabe, à custa dos conceitos de majorante e minorante os quais, por sua vez, pressupõem a existência de uma relação de ordem em $\mathbf{R}$. Tem-se a seguinte propriedade :

P21 : *Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ é limitado se e só se existe um real $a \in \mathbf{R}$ e um $\varepsilon > 0$ tal $A \subseteq V_\varepsilon(a)$.*

Demonstração : A condição é necessária. Se $A \subseteq \mathbf{R}$ é limitado, sejam μ , $\lambda \in \mathbf{R}$, respectivamente, o ínfimo e o supremo de A . Fazendo,

$$a = \frac{\mu + \lambda}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon > \lambda - a$$

conclui-se imediatamente que $A \subseteq V_\varepsilon(a)$. A condição é igualmente suficiente, pois de $A \subseteq V_\varepsilon(a)$ tira-se imediatamente que o conjunto A é majorado e minorado.

Vejamos seguidamente algumas propriedades de fácil demonstração:

P22 : *A união de um número finito de conjuntos limitados é um conjunto limitado*

Demonstração : Sejam A_i , $i = 1, 2, ..., k$, conjuntos limitados. Existem $V_{\varepsilon_i}(a_i)$ tais que $A_i \subseteq V_{\varepsilon_i}(a_i)$. Passando a considerar $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, fixe-se um qualquer $a \in \mathbf{R}$ e seja $\varepsilon = máx\ \varepsilon_i + máx\ d(a_i , a)$; conclui-se com facilidade que $A \subseteq V_\varepsilon(a)$, ou seja o conjunto A é igualmente limitado.

P23 : *A intersecção de conjuntos limitados (em qualquer número) é um conjunto limitado.*

Demonstração: Basta notar que o subconjunto de um conjunto limitado é igualmente limitado e que a intersecção de conjuntos é sempre um subconjunto de qualquer um deles.

P24 : *O derivado e o fecho de um conjunto limitado são conjuntos limitados*

Demonstração : Basta fazer a demonstração para o derivado, porque sendo o derivado limitado, como o fecho (ou aderência) é a união do conjunto com o seu derivado ele é igualmente limitado (propriedade **P22**). Seja A limitado e vejamos então que A' é igualmente limitado. Seja $V_\varepsilon(a)$ a vizinhança que contém A e vejamos então que $A' \subseteq V_{2\varepsilon}(a)$, o que provará ser A' igualmente limitado. Dado um qualquer $y \in A'$, tem-se que em $V_\varepsilon(y)$ existe pelo menos um $x_\varepsilon \neq y$ que pertence a A, logo também a $V_\varepsilon(a)$; então por ser x_ε pertencente a $V_\varepsilon(a)$ e $V_\varepsilon(y)$, tem-se $d(y, a) \leq d(y, x_\varepsilon) + + d(x_\varepsilon, a) < 2\varepsilon$, ou seja $y \in V_{2\varepsilon}(a)$; em conclusão, $A' \subseteq V_{2\varepsilon}(a)$ como se queria provar.

No teorema seguinte estudam-se propriedades importantes dos conjuntos majorados e minorados.

Teorema 2 : *Sendo A majorado em* **R**, *o respectivo supremo λ ou é elemento do conjunto (e nesse caso é o máximo do conjunto), ou é ponto de acumulação do conjunto, podendo também ser uma coisa e outra. Do mesmo modo, sendo A minorado em* **R**, *o respectivo ínfimo μ ou é elemento do conjunto (e nesse caso é o mínimo do conjunto), ou é ponto de acumulação do conjunto, podendo também ser uma coisa e outra*

Demonstração : Faremos a demonstração para o caso do supremo, valendo para o ínfimo uma argumentação semelhante.

Se $\lambda = Sup\, A \in A$, tem-se $\lambda = Máx\, A$. Se pelo contrário for $\lambda = Sup\, A \notin A$, então no intervalo $]\, \lambda - \varepsilon , \lambda\, [$ deverá existir pelo menos um $x \in A$, caso contrário ter-se-ia $x \leq \lambda - \varepsilon$ para todo o $x \in A$ e então o número $\lambda - \varepsilon$ seria um majorante de A inferior ao respectivo supremo; mas então em qualquer $V_\varepsilon(\lambda) =]\, \lambda - \varepsilon , \lambda + \varepsilon\, [$ deverá existir pelo menos um $x \in A$ distinto de λ , ou seja, λ deverá ser ponto de acumulação de A.

Refira-se ainda , para terminar a demonstração, que é possível ser ao mesmo tempo $\lambda = Sup\, A \in A$ e $\lambda = Sup\, A \in A'$, como acontece por exemplo no caso do conjunto $A = [\, -1 , 2\,]$.

Corolário 1 : *Sendo A um conjunto fechado, se for majorado tem máximo; se for minorado tem mínimo; se for limitado tem máximo e mínimo*

Demonstração : Resulta de imediato do teorema anterior atendendo a que se A for fechado, então $A' \subseteq A$.

5. Ampliação de R . Pontos impróprios

Tendo em vista simplificar certos enunciados no âmbito da teoria dos limites é usual ampliar o conjunto **R** considerando mais dois símbolos, a saber $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito), genericamente designados por pontos impróprios ou pontos infinitos.

A relação de ordem em **R** é ampliada de modo a abranger os novos símbolos, considerando-se as seguintes convenções:

a) $-\infty < x < +\infty$, qualquer que seja $x \in$ **R** ;
b) $-\infty < +\infty$.

Neste quadro, qualquer conjunto $X \subseteq$ **R** tem supremo, finito ou real se for majorado em **R** ou $+\infty$ se o não for ; do mesmo modo qualquer subconjunto de **R** tem ínfimo, finito ou real se for minorado em **R** ou $-\infty$ se o não for.

Definem-se também as vizinhanças (em relação a **R**) dos dois pontos impróprios, do modo seguinte:

$$\mathrm{V}_\varepsilon(+\infty) =]\, 1/\varepsilon\, , +\infty\, [\quad \text{e} \quad \mathrm{V}_\varepsilon(-\infty) =]\, -\infty\, , -1/\varepsilon\, [\; .$$

Os pontos impróprios podem então ser pontos de acumulação (impróprios) dos conjuntos $X \subseteq$ **R** mas, em qualquer caso, no derivado X' não se incluem os eventuais pontos impróprios de acumulação. A definição é a seguinte: *diz-se que* $+\infty$ ($-\infty$) *é ponto impróprio de acumulação de* X *se só se em qualquer* $\mathrm{V}_\varepsilon(+\infty)$ [$\mathrm{V}_\varepsilon(-\infty)$] *se encontra pelo menos um ponto* $x \in X$.

6. Exercícios

1 - Mostre que,

a) $INT\ A = A - (\overline{A})'$;

b) $FRONT\ A = [A \cap (\overline{A})'] \cup [A' \cap (\overline{A})]$;

c) $EXT\ A = \overline{A} - A'$;

d) $INT(A \cap B) = (INT\ A) \cap (INT\ B)$.

2 - Mostre que se $FRONT\ A = \emptyset$, então A é um conjunto aberto.

3 - Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se denso se e só se $A \subseteq A'$ e diz-se perfeito se e só se $A = A'$ (ou seja, se e só se for denso e fechado). Prove que,

a) Sendo A_α conjuntos densos, em qualquer número, então $\bigcup_\alpha A_\alpha$ é igualmente um conjunto denso;

b) Sendo A denso, então A' e $Ad\,(A)$ são perfeitos ;

c*) A união de todos os conjuntos densos contidos num conjunto fechado é um conjunto perfeito;

d*) Sendo P a união de todos os conjuntos densos contidos num conjunto fechado F, então se for $A \neq \emptyset$ e $A \subseteq F - P$, o conjunto A não pode ser denso.

4 - Chama-se *distância* do ponto a ao conjunto A ao número real ,

$$d(a, A) = Inf\ \{\ d(a, x)\ :\ x \in A\ \}\ .$$

a) Mostre que $d(a, A)$ existe sempre (finita) ;

b*) Mostre que $d(a, A) = 0 \Leftrightarrow a \in Ad\,A$.

5 - Determine o interior, o fecho e o derivado de cada um dos subconjuntos de **R** :

a) $A = [\,0\,,2\,] \cup]\,3\,,5\,[\cup \{\,6\,,7\,\}$;

b) $B = [\,1\,,2\,] \cap \mathbf{Q}$.

6 - Determine o interior, a fronteira, o derivado e o fecho de cada um dos subconjuntos de **R** :

a) $A = \{ \dfrac{n}{n^2+1} \ : \ n \in \mathbf{N} \ \} \cup]\, 4/3 \ , \ 3/2 \,[\cup \{ \dfrac{n+1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N} \ \}$;

b) $B = \{ \ 1 + (-1)^n \ . \dfrac{n+2}{n+1} \ : \ n \in \mathbf{N} \}$;

c) $C = \{ \ n^{(-1)^n} \ : n \in \mathbf{N} \}$;

d) $D = \{ \ n^{(-1)^m} \ : n \, , \, m \in \mathbf{N} \}$;

e) $E = \ \{ m \ + \ 1/n \ : \ m \, , n \in \mathbf{N} \}$;

f) $F = \ \{ 1/m \ + \ 1/n \ : \ m \, , n \in \mathbf{N} \}$.

7 - Quando possível dê exemplos de um subconjunto em **R** que :

a) Seja finito, não vazio e aberto;

b) Seja fechado, mas não limitado;

c) Seja igual ao seu derivado;

d) Seja igual à sua fronteira;

e) Tenha por exterior um conjunto limitado;

f) Seja um subconjunto próprio do seu derivado.

8 - Mostre que em **R** um conjunto aberto não pode ter máximo nem mínimo.

RESPOSTAS

5 - a) $INT \ A \ = \ ]\, 0 \, , 2 \,[\ \cup \,]\, 3 \, , 5 \,[$, $Ad \, A = [\, 0 \, , 2 \,] \ \cup [\, 3 \, , 5 \,] \cup \{ \, 6 \, , \, 7 \, \}$,

$A' = [\, 0 \, , 2 \,] \ \cup [\, 3 \, , 5 \,]$;

b) $INT \ B \ = \ \emptyset$, $B' = Ad \, B = [\, 1 \, , 2 \,]$.

6 - a) $INT \ A \ =]\, 4/3 \, , 3/2 \,[$,

$FRONT\ A = \{ \dfrac{n}{n^2+1} : n \in \mathbf{N} \} \cup \{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbf{N} \} \cup \{ 0 , 1 \}$,

$A' = [\, 4/3 , 3/2 \,] \cup \{ 0 , 1 \}$, $Ad\,A = A \cup \{ 0 , 1 \}$;

b) $INT\ B = \varnothing$, $FRONT\ B = B \cup \{ 0 , 2 \}$, $B' = \{ 0 , 2 \}$, $Ad\,B = FRONT\,B$;

c) $INT\ C = \varnothing$, $FRONT\ C = C \cup \{ 0 \}$, $C' = \{ 0 \}$, $Ad\,C = FRONT\ C$;

d) $INT\ D = \varnothing$, $FRONT\ D = D \cup \{ 0 \}$, $D' = \{ 0 \}$, $Ad\,D = FRONT\ D$;

e) $INT\ E = \varnothing$, $FRONT\ E = E \cup \mathbf{N}$, $E' = \mathbf{N}$, $Ad\,E = FRONT\ E$;

f) $INT\ F = \varnothing$, $FRONT\ F = F \cup \{ 0 \}$,

$F' = \{1/m : m \in \mathbf{N} \} \cup \{ 0 \}$, $Ad\,F) = FRONT\ F$.

7 - a) Impossível ; **b)** Por exemplo, $[\, 1 , +\infty [$; **c)** Por exemplo, $\mathbf{R}$; **d)** Por exemplo, $\mathbf{N}$; **e)** Por exemplo, $]\, -\infty , 1 \,] \cup [\, 2 , +\infty [$; **f)** Por exemplo, $\mathbf{Q}$.