Lic. Engenharia Informática
LÓGICA
1. Indução e recursão estrutural

José Carlos Costa

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

22 de Fevereiro de 2011

Exemplo inicial

Seja A_3 um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que:

1. $3 \in A_3$;
2. se $k \in A_3$, então $n \cdot k \in A_3$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;
3. os elementos de A_3 são obtidos por aplicação das regras 1 e 2, um número finito de vezes.

$$A_3 = \{ \boxed{\;?\;} \}$$

Será que existe um conjunto de regras que permite definir o conjunto $\mathbb{N}_0$ de forma análoga?

Definições

- Chamaremos alfabeto a um conjunto de símbolos e letras aos seus elementos.
- Dado um alfabeto A, chamaremos palavra sobre A a uma sequência finita de letras: ε representa a palavra vazia e $e_1 e_2 \cdots e_n$ uma palavra de comprimento $n \in \mathbb{N}$, para $e_1, \ldots, e_n \in A$. O conjunto de todas as palavras sobre A representa-se por A^*.
- Um subconjunto de A^* diz-se uma linguagem.
- Se u e v são palavras então uv é a sequência resultante da concatenação das sequências u e v.

Seja $A = \{a, b\}$ e L o conjunto tal que:

1. $a \in L$ e $b \in L$;
2. se $u, v \in L$, então $uv \in L$;
3. os elementos de L são obtidos por aplicação das regras 1 e 2, um número finito de vezes.

$$L = \{ \boxed{\;?\;} \}$$

Seja $A = \{a, b, c\}$ e L o subconjunto A^* tal que:

1. $c \in L$;
2. se $u \in L$, então $aua \in L$;
3. se $u \in L$, então $bub \in L$;
4. os elementos de L são obtidos por aplicação das regras 1, 2 e 3, um número finito de vezes.

$$L = \{ \boxed{\;?\;} \}$$

Por definição indutiva de um conjunto I entende-se uma colecção de regras que permite descrever I, indicando um processo de construir os seus elementos. As regras podem ser de vários tipos:

- regras básicas, que indicam que certos objectos pertencem ao conjunto;
- regras indutivas, que permitem construir elementos de I a partir de outros elementos de I já conhecidos;
- regra de fecho, regra única em cada definição, que estabelece que os elementos de I são os construídos a partir da utilização das regras básicas e das indutivas um número finito de vezes.

regra básica $\longmapsto$ $\underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}}$ $\quad \dfrac{}{s \in I}\, b_s$

regra indutiva $\longmapsto$ se $\underbrace{s_1, \ldots, s_n \in I,}_{\text{premissas}}$ então $\underbrace{s \in I}_{\text{conclusão}}$ $\quad \dfrac{s_1 \in I \quad \cdots \quad s_n}{s \in I}$

Sejam $A = \{a, b\}$ e L o subconjunto das palavras sobre A definido por:

1. a sequência vazia ε é um elemento de L;
2. se $w \in L$, então $awb \in L$;
3. se $w \in L$, então $bwa \in L$;
4. se $u, w \in L$, então $uw \in L$.

A esta definição corresponde o seguinte conjunto de regras:

1. $\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad$ um conjunto base $B = \{\varepsilon\}$
2. $\dfrac{w \in L}{awb \in L}\, i_1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rccc} f_1 : & L & \rightarrow & L \\ & w & \mapsto & awb \end{array}$
3. $\dfrac{w \in L}{bwa \in L}\, i_2 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rccc} f_2 : & L & \rightarrow & L \\ & w & \mapsto & bwa \end{array}$
4. $\dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\, i_3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rccc} f_3 : & L \times L & \rightarrow & L \\ & (u, w) & \mapsto & uw \end{array}$

Definição

Sejam X um conjunto, $\emptyset \neq B \subseteq X$ e $\mathcal{O}$ um conjunto de operações em X. Um subconjunto I de X diz-se indutivo sobre X de base B e conjunto de operações $\mathcal{O}$ se

1. $B \subseteq I$,
2. I é fechado para as operações do conjunto $\mathcal{O}$.

Definição

Sejam X um conjunto, $\emptyset \neq B \subseteq X$ e $\mathcal{O}$ um conjunto de operações em X. O menor conjunto indutivo sobre X de base B e conjunto de operações $\mathcal{O}$ diz-se um conjunto definido indutivamente por $\mathcal{O}$, de base B.

O par $(B, \mathcal{O})$ designa-se uma definição indutiva sobre o conjunto suporte X.

Conjunto indutivo

Recorde-se o exemplo anterior. O conjunto L é definido indutivamente:

1. $\dfrac{}{\varepsilon \in L}\, b_\varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad$ um conjunto base $B = \{\varepsilon\}$
2. $\dfrac{w \in L}{awb \in L}\, i_1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rccc} f_1 : & L & \rightarrow & L \\ & w & \mapsto & awb \end{array}$
3. $\dfrac{w \in L}{bwa \in L}\, i_2 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rccc} f_2 : & L & \rightarrow & L \\ & w & \mapsto & bwa \end{array}$
4. $\dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\, i_3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rccc} f_3 : & L \times L & \rightarrow & L \\ & (u, w) & \mapsto & uw \end{array}$

$$B = \{\varepsilon\}$$
$$\mathcal{O} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

Genericamente, a uma definição indutiva $(B, \mathcal{O})$ de um conjunto $\mathcal{I}$ sobre o conjunto suporte X associa-se um conjunto de regras:

1. $\dfrac{}{x \in \mathcal{I}}\, b_x$, para cada $x \in B$,

2. $\dfrac{w_1 \in \mathcal{I} \quad \cdots \quad w_n \in \mathcal{I}}{f(w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{I}}\, i$ para cada $f \in \mathcal{O}$ de aridade n.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

$i.$	$\varepsilon \in L$	(por b_ε)
$ii.$	$ab \in L$	(por i_1, ou seja, $f_1(\varepsilon)$)
$iii.$	$baba \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(ab)$)
$iv.$	$b^2aba^2 \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(baba)$)

Como conclusão final obtém-se que $b^2aba^2 \in L$. A sequência $(\varepsilon,\ ab,\ baba,\ b^2aba^2)$ diz-se uma sequência de formação de $b^2aba^2 \in L$.

Alternativamente, podemos elaborar a seguinte árvore:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{a\varepsilon b \in L}\,i_1}{baba \in L}\,i_2}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Sequência de formação

$$\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \dfrac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \dfrac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \dfrac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

$i.$	$\varepsilon \in L$	(por b_ε)
$ii.$	$ba \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(\varepsilon)$)
$iii.$	$baba \in L$	(por i_3, ou seja, $f_3(ba, ba)$)
$iv.$	$b^2aba^2 \in L$	(por i_2, ou seja, $f_2(baba)$)

A conclusão final é novamente que $b^2aba^2 \in L$, e a sequência $(\varepsilon,\ ba,\ baba,\ b^2aba^2)$ é também uma sequência de formação de $b^2aba^2 \in L$.

A árvore correspondente é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Definições

Sejam $(B, \mathcal{O})$ uma definição indutiva de um conjunto I e $x \in I$.

1. Sequência de formação de x é uma sequência de elementos de I cujo último elemento é x e em que cada elemento
   - ou pertence a B,
   - ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma função de $\mathcal{O}$.
2. Árvore de formação de x é uma árvore construída a partir da aplicação das regras e em que:
   - cada nodo é uma afirmação do tipo $s \in I$;
   - as folhas resultam da aplicação de regras básicas;
   - os restantes nodos resultam da aplicação de regras indutivas;
   - cada aresta representa a relação entre uma premissa e a conclusão de uma regra;
   - a raiz é $x \in I$.

Proposição

Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto definido indutivamente sobre um conjunto X e $x \in X$. Então, $x \in \mathcal{I}$ se e só se x admite uma árvore (ou sequência) de formação.

$$\frac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon \qquad \frac{w \in L}{awb \in L}\,i_1 \qquad \frac{w \in L}{bwa \in L}\,i_2 \qquad \frac{u \in L \quad w \in L}{uw \in L}\,i_3$$

Será que $b^2ab \in L$?

Definição

Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto definido indutivamente sobre um conjunto X e $x \in \mathcal{I}$. Os elementos de uma árvore de formação de x designam-se sub-objectos de x.

Recorde-se que na linguagem L a palavra b^2aba^2 admite duas árvores de formação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{ba \in L}\,i_2}{baba \in L}\,i_3}{bbabaa \in L}\,i_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varepsilon \in L}\,b_\varepsilon}{a\varepsilon b \in L}\,i_1}{baba \in L}\,i_2}{bbabaa \in L}\,i_2$$

Definição

Chama-se definição indutiva determinista de um conjunto I a uma definição indutiva de I tal que se existirem duas instâncias de regras com igual conclusão então a regra usada é a mesma e, caso seja uma regra indutiva, as premissas da regra também são as mesmas.

Proposição

Uma definição indutiva de um conjunto I é determinista se e só se cada elemento de I admite uma única árvore de formação.