# Capítulo 1 - Funções reais de variável real

# 1.5 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

Este seção é dedicada ao estudo das derivadas de funções reais de variável real. A derivada e as suas aplicações desempenham um papel fundamental, tanto na própria Matemática, como noutros domínios aplicados, como a Física, a Economia, a Otimização, etc. Trata-se, portanto, de um tópico fundamental da Matemática.

# Definição de derivada num ponto

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de domínio $D$ e $a \in D$ um ponto de acumulação de $D$, quer à esquerda quer à direita.

- Diz-se que a função $f$ é derivável no ponto $a$ quando existe (é finito) o limite
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)\,,$$
 a que se chama derivada de $f$ no ponto $a$ .

- Pondo $x = a + h$, pode-se dizer que $x \to a$ se e só se $h \to 0$, resultando
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,,$$
 que constitui uma definição alternativa para a derivada de $f$ em $a$.

# Derivadas laterais

Quando o limite que define $f'(a)$ é estudado de um só lado somos conduzidos à noção de derivada lateral:

- derivada à esquerda de $f$ em $a$ (para $a$ ponto de acumulação à esquerda)

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- derivada à direita de $f$ em $a$ (para $a$ ponto de acumulação à direita)

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

## Teorema

*Sejam $f \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D \cap D'$. Então $f$ é derivável em $a$ se e só se existem e são iguais as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.*

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

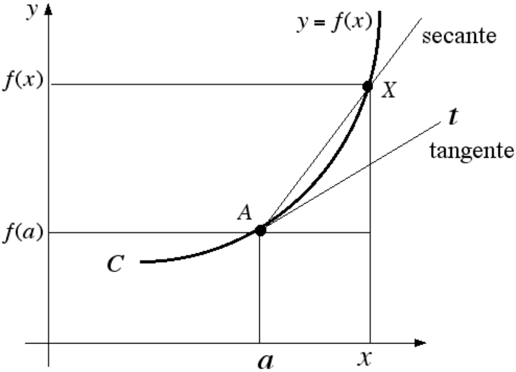
Consideremos a curva $\mathcal{C}$ de equação $y = f(x)$ que passa pelo ponto $A = (a, f(a))$. Seja $X = (x, f(x))$ um ponto genérico da curva. A razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dá o declive da reta que passa por $A$ e $X$, que é secante à curva $\mathcal{C}$.

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

À medida que $X$ se aproxima de $A$, a reta secante dá origem à reta $t$, que é tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $A$. Tal reta $t$ pode ser obtida como o limite, quando $X$ se aproxima de $A$, das retas secantes passando por $A$ e $X$. Então, o declive $m$ da reta tangente pode ser obtido como o limite dos declives das retas secantes, à medida que $X$ se aproxima de $A$.



# Interpretação geométrica da derivada num ponto

Isto é,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

onde, no segundo membro, o limite define $f'(a)$.

Isto justifica as seguintes conclusões.

## Conclusão 1

Quando $f$ é derivável em $a$, a derivada $f'(a)$ dá o declive da reta tangente à curva de equação $y = f(x)$ no ponto de abcissa $a$.

## Conclusão 2

Uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa $a$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

## Conclusão 3

Se $f'(a) \neq 0$, uma equação da reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa $a$ é

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

Para $x$ próximo de $a$, a função $f$ pode ser aproximada pelo polinómio $f(a) + f'(a)(x-a)$, de grau não superior a 1.

Em torno do ponto $a$, a curva $y = f(x)$ confunde-se com a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $a$, ou seja, é uma curva "suave"em torno do ponto $a$, ou localmente linearizável, e não apresenta um bico em $x = a$.

## Observação

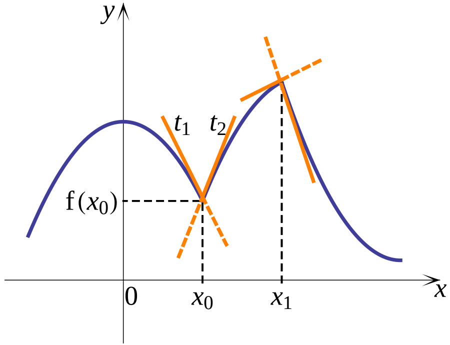
*Se a razão incremental tender para infinito, não existindo $f'(a)$, isto é, se*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty,$$

*então a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa a é a reta vertical de equação $x = a$.*

# Interpretação geométrica da derivada num ponto

De um modo geral, se uma função tem um gráfico como o da figura,




a função não é derivável nem em $x_0$ nem em $x_1$ . Por exemplo, no ponto $(x_0, f(x_0))$ a curva descrita não tem uma reta tangente mas duas retas semitangentes, a semi-reta $t_1$ e a semi-reta $t_2$. Estas semi-retas não estão no prolongamento uma da outra. O declive da semi-reta $t_1$ é a derivada de $f$ à esquerda em $x_0$ e o declive da semi-reta $t_2$ é a derivada de $f$ à direita em $x_0$.

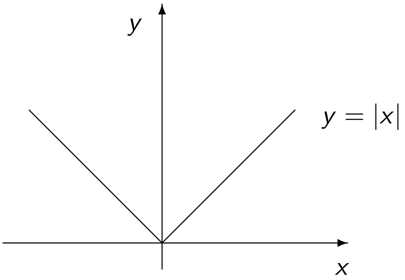
# Interpretação geométrica da derivada num ponto

## Exemplos

*Do ponto de vista geométrico, estudemos a existência de derivada das seguintes funções no ponto indicado.*

1. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, *ponto* $a = 0$.

   *A curva* $y = |x|$ *apresenta um bico na origem, pelo que a função não é linearizável em torno da origem. Logo* $f$ *não é derivável em* $x = 0$.

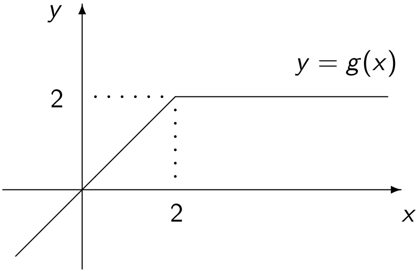


# Interpretação geométrica da derivada num ponto

## Exemplos

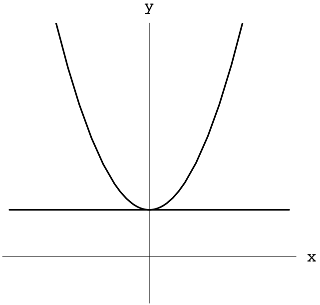
2. $g(x) = \begin{cases} x & se \quad x \leq 2, \\ 2 & se \quad x > 2, \end{cases}$ *ponto* $a = 2$ .

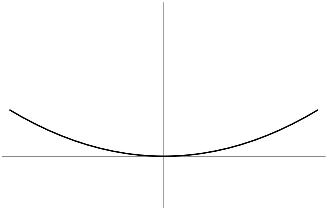
   *A curva* $y = g(x)$ *apresenta um bico no ponto* $(2, g(2))$*, pelo que a função não é linearizável em torno desse ponto, ou seja,* *g não é derivável em* $a = 2$.



## Exemplos

3. $k(x) = 1 + x^2$ , $x \in \mathbb{R}$, *ponto* $a = 0$ .



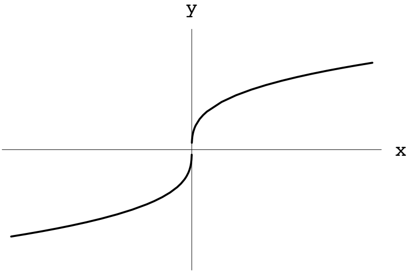
*Ampliação em torno de* $(0, 1)$.

*A função k é derivável em* $a = 0$. *A curva não apresenta bico no ponto* $(0, 1)$ *e em torno de* $(0, 1)$ *a reta tangente à curva confunde-se com a própria curva.*

## Exemplos

4. $j(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, *ponto* $a = 0$ .

   *A função não é derivável em* $a = 0$*, pois a tangente ao gráfico de* $j$ *em* $a = 0$ *é vertical, com a correspondente razão incremental a tender para* $+\infty$.



# Função derivada

Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de domínio $D$, $A\subset D$ e $a,b\in D$.

Diz-se que:

- $f$ é derivável em $[a,b]$ quando $f$ é derivável em todo $a\in]a,b[$ e existem as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$;
- $f$ é derivável em $A$ quando $f$ é derivável em todo $a\in A$;
- $f$ é *derivável* se $f$ é derivável em todo o domínio $D$.

Se $f$ é derivável em $D$, diz-se que a função

$$\begin{array}{rccc} f': & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

é a função derivada de $f$ .

# Resultados sobre derivação pontual

## Teorema

[Continuidade de funções deriváveis]

*Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in D \cap D'$. *Se f é derivável em a então f é contínua em a.*

## Observações

1. *O recíproco deste teorema é falso, isto é:*

$$f \text{ é contínua em } a \not\Longrightarrow f \text{ é derivável em } a\,.$$

*Basta pensar em* $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, *e no ponto* $a = 0$.

# Resultados sobre derivação pontual

## Observações

2. *Deste teorema sai, equivalentemente, que:*

$$f \text{ é descontínua em } a \Longrightarrow f \text{ não é derivável em } a\,.$$

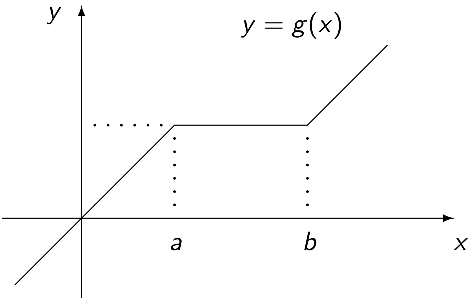
*De facto, se $f$ fosse derivável em $a$, pelo teorema, $f$ seria também contínua em $a$.*

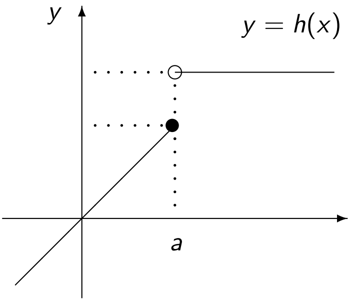
3. *Temos ainda que:*

$$\begin{aligned} \text{existe } f'_+(a) \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ é contínua à direita em } a\,; \\ \text{existe } f'_-(a) \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ é contínua à esquerda em } a\,. \end{aligned}$$

## Exemplo

*Consideremos as funções $g, h \colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representadas na figura a seguir.*
*É simples constatar que g é contínua em D e derivável, apenas, em $D \backslash \{a, b\}$, enquanto que h é contínua em $D \backslash \{a\}$ e derivável em $D \backslash \{a\}$.*



# Resultados sobre derivação pontual

## Teorema

[Aritmética da derivação pontual]

*Sejam* $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções de domínio D, deriváveis no ponto* $a \in D \cap D'$. *Então:*

*a)* $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

*b)* $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$;

*c)* $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}\,,$$ *desde que* $g(a) \neq 0$.

# Resultados sobre derivação pontual

## Consequências

1. Da regra $b$) do teorema sai, em particular, que se $k$ for uma constante então
$$(kf(x))' = k\,f'(x).$$

2. Da regra $b$), para $n \in \mathbb{N}$, sai também que
$$\big(f(x)^n\big)' = n\big(f(x)\big)^{n-1} f'(x).$$

3. Da regra $c$), desde que $f(x) \neq 0$, sai que
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\,\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Exemplos

1. $(kx)' = k(x)' = k, \quad k \in \mathbb{R}.$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}(x)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$

4. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$

5. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$

6. $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$

   *Logo, fazendo $m = -n$, podemos escrever $(x^m)' = mx^{m-1}$, para $m$ inteiro negativo. Ou seja, a fórmula em 2. é válida para $n \in \mathbb{Z}$.*

Usando a definição de derivada e o facto de que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0.$$

podemos mostrar que:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \\
(\cos x)' &= -\operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Usando a regra de derivação do quociente podemos mostrar que:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}; \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

## Exemplos

1. $\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right)' = \left(x^2\right)' + (\operatorname{sen} x)' = 2x + \cos x$;

2. $\left(x^3 \cos x\right)' = \left(x^3\right)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x$.

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\right)' &= \frac{(\cos x)'(1 - \operatorname{sen} x) - \cos x(1 - \operatorname{sen} x)'}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}\end{aligned}$$

4. $(\operatorname{sen} x \cos x)' = (\operatorname{sen} x)' \cos x + \operatorname{sen} x(\cos x)' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

## Teorema

[Derivada da função composta / Regra da Cadeia]

*Sejam* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$, *com* $f(D) \subset B \subset \mathbb{R}$, *e* $a \in D \cap D'$, $b = f(a) \in B \cap B'$.
*Se* $f$ *é derivável em* $a$ *e* $g$ *é derivável em* $b$ *então* $g \circ f$ *é derivável em* $a$ *e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Esta fórmula significa que a derivada da composta é o produto das derivadas, com cada uma delas calculada num ponto adequado. Com alguma ligeireza matemática, podemos dizer que a derivada da composta é o produto da derivada da função de fora calculada na de dentro pela derivada da função de dentro.

# Resultados sobre derivação pontual

## Exemplos

1. $\big(\operatorname{sen}(3x^2)\big)' = \operatorname{sen}'(3x^2) \cdot (3x^2)' = \cos(3x^2) \cdot (6x) = 6x\cos(3x^2).$

2. 

$$\begin{aligned}\big((1+\cos x)^4\big)' &= 4(1+\cos x)^3(1+\cos x)' \\ &= 4(1+\cos x)^3(0-\operatorname{sen} x) \\ &= -4\operatorname{sen} x(1+\cos x)^3.\end{aligned}$$

3. 

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}^3(9x+1))' &= 3\operatorname{sen}^2(9x+1)\cdot(\operatorname{sen}(9x+1))' \\ &= 3\operatorname{sen}^2(9x+1)\cdot(\operatorname{sen}'(9x+1)\cdot(9x+1)') \\ &= 3\operatorname{sen}^2(9x+1)\cdot\cos(9x+1)\cdot 9 \\ &= 27\operatorname{sen}^2(9x+1)\cdot\cos(9x+1).\end{aligned}$$

## Exemplo

*Supondo que $f$ é uma função derivável, vamos exprimir as derivadas de*

a) $f(3x)$,

b) $f(x^2)$ *e*

c) $f(5f(x))$

*em função de $f'$.*

*Temos*

a) $\big(f(3x)\big)' = f'(3x) \cdot (3x)' = 3f'(3x)$,

b) $\big(f(x^2)\big)' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = 2xf'(x^2)$,

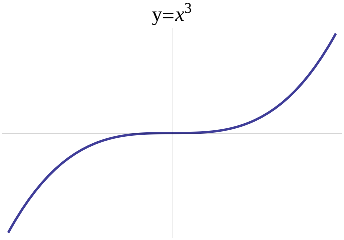
c)

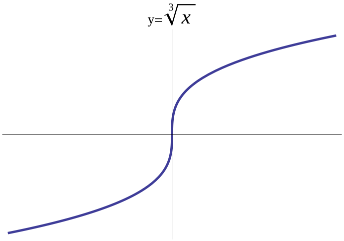
$$\begin{aligned} \big(f(5f(x))\big)' &= f'(5f(x)) \cdot (5f(x))' \\ &= f'(5f(x)) \cdot (5f'(x)) \\ &= 5f'(x) \cdot f'(5f(x)). \end{aligned}$$

Quanto à derivação da função inversa, repare-se que:

- Se $f : A \longrightarrow B$ for bijetiva e derivável em $a \in A$, a sua inversa, $f^{-1} : B \longrightarrow A$, pode não ser derivável em $b = f(a)$.

Veja-se o caso de $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, que é claramente derivável e, no entanto, a sua inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, não é derivável em $0 = f(0)$.



# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função inversa

- Nos casos em que a inversa é derivável, de

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in A,$$

a regra da cadeia dá

$$(f^{-1})' \cdot (f(x)) \cdot f'(x) = 1, \ \forall x \in A,$$

donde $f'(x) \neq 0$ e

$$(f^{-1})' \cdot (f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \, .$$

O problema surge quando se tem precisamente $f'(x) = 0$, que é o que acontece no caso citado anteriormente.

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivada da função inversa

O resultado fundamental sobre a derivação da função inversa é o seguinte. Dá-nos a relação entre as derivadas de $f$ e $f^{-1}$ em pontos correspondentes.

### Teorema

[Derivada da função inversa]

*Seja $f \colon D \longrightarrow B$, com $D, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijetiva e $a \in D \cap D'$. Se $f$ é derivável em $a$, $f'(a) \neq 0$ e $f^{-1}$ é contínua em $b = f(a)$, então $f^{-1}$ é derivável em $b$, tendo-se*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \,.$$

### Exemplo

*Seja* $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. *Temos* $f'(x) = 3x^2$ *e* $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.
*Para* $x \neq 0$, *vem*

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x})' &= \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{x})} \\ &= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

Usando o teorema da derivada da função inversa, podemos mostrar que:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1,1[;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in ]-1,1[;$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Resultados sobre derivação pontual

## Derivadas das funções exponenciais e de logaritmos

Considere-se $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Prova-se, usando a definição de derivada e o resultado

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

que

$$f'(x) = (e^x)' = e^x.$$

Sendo $f^{-1}(x) = \ln x$, $x > 0$, usando a regra da derivação da função inversa, temos

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos, para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad \text{e} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Usando a definição das funções hiperbólicas, vamos verificar que

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\, x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}\ , \qquad \mathrm{coth}'(x) = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left((e^x)' + (e^{-x})'\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \mathrm{sh}\, x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}'(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) = \left(\frac{e^x - (-e^{-x})}{2}\right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \mathrm{ch}\, x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{th}'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}\operatorname{coth}'(x) &= \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{(\operatorname{sh} x)^2} \\ &= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x)^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.\end{aligned}$$

Pode-se ainda mostrar que:

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in \, ]1, +\infty[\,;$$

$$(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in ]-1, 1[;$$

$$(\operatorname{argcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\,.$$

# Funções deriváveis num intervalo

Abordaremos em seguida resultados fundamentais sobre o comportamento de uma função que possui derivada num intervalo.

## Teorema do valor intermédio para a derivada

Vamos agora apresentar um dos resultados mais notáveis deste curso. Trata-se do resultado que estabelece que, embora não tenha de ser contínua, uma função que tem derivada num intervalo possui sempre a propriedade do valor intermédio, tal como uma função contínua, isto é, não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

### Teorema

[Valor intermédio para a derivada (Darboux)]

*Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável e tal que* $f'(a) \neq f'(b)$*. Então, dado* $k \in \mathbb{R}$ *estritamente compreendido entre* $f'(a)$ *e* $f'(b)$*, existe*

$$c \in \,]a, b[ \quad \textit{tal que} \quad f'(c) = k.$$

# Funções deriváveis num intervalo

Portanto, dada uma função $g$ definida num intervalo $I$, a pergunta

"É $g$ necessariamente a derivada de uma outra função $f$ definida em $I$? "

tem resposta "Não ". Algumas funções são derivadas, outras não.

## Exemplo

*Considere-se a função definida por*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & se \quad -1 \leq x < 0, \\ \ \ 1 & se \quad \ \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

*Esta função não possui a propriedade do valor intermédio. Então $g$ não pode ser a derivada de função alguma $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*Em particular, $g$ não pode ser a derivada, em $[-1, 1]$, de*

$$h(x) = \begin{cases} -x & se \quad -1 \leq x < 0 \\ \ \ x & se \quad \ \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

*Em particular, $h'(x) = g(x)$ para todo $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, mas $h$ não é derivável em $x = 0$.*

# Funções deriváveis num intervalo

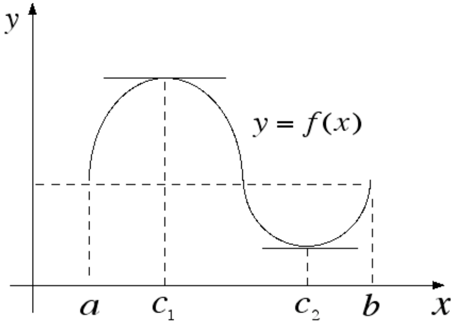
Veremos agora mais dois resultados importantes sobre funções deriváveis em intervalos, bem como algumas consequências que deles se extraem.

## Teorema

[Teorema de Rolle]

*Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua que é derivável em* $]a, b[$. *Se* $f(a) = f(b)$ *então existe* $c \in\, ]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Geometricamente, o teorema de Rolle estabelece que, estando $f$ nas condições indicadas no enunciado do teorema, existe algum ponto $c \in ]a, b[$ tal que a tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $c$ é horizontal e, portanto, paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A figura mostra a reta horizontal que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e dois pontos $c_1$ e $c_2$ em $]a, b[$ para os quais a tangente à curva é horizontal.



# Funções deriváveis num intervalo

Do teorema de Rolle extraem-se as seguintes consequências muito úteis no tratamento numérico de equações algébricas.

## Corolários

[do teorema de Rolle]

*Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$.*

1. *Entre dois zeros de $f$ existe, pelo menos, um zero de $f'$.*
2. *Entre dois zeros consecutivos de $f'$ existe, quando muito, um zero de $f$.*
3. *Não há mais do que um zero de $f$ inferior ao menor zero de $f'$, nem mais do que um zero de $f$ superior ao maior zero de $f'$.*

## Exemplo

*Mostremos que a equação*

$$x^3 + x + 1 = 0$$

*não pode ter mais do que uma raíz real.*

*Seja $f$ a função definida em $\mathbb{R}$ por*

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

*Trata-se de uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se a equação dada tivesse duas raízes reais então a função $f$ possuiria dois zeros reais, pelo que $f'$ possuiria, pelo menos, um zero real. Mas*

$$f'(x) = 3x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

*que nunca se anula em $\mathbb{R}$. Portanto, a equação dada possui, quando muito, uma raíz real.*

# Funções deriváveis num intervalo

Um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial é o que se exprime no seguinte teorema e que constitui uma extensão do Teorema de Rolle.

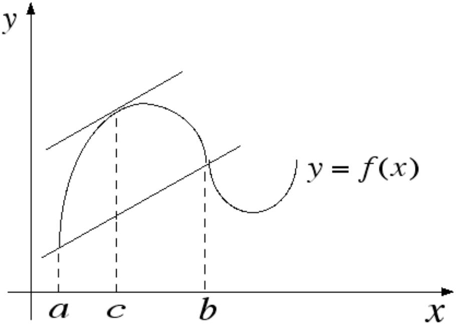
## Teorema

[do valor médio de Lagrange]

*Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua que é derivável em* $]a, b[$ *.*
*Então existe* $c \in \, ]a, b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O Teorema de Lagrange estabelece que, estando $f$ nas condições indicadas no enunciado, existe algum ponto $c \in ]a, b[$ tal que a tangente à curva de equação $y = f(x)$ no pondo de abcissa $c$ é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, secante à curva $y = f(x)$.



## Exemplo

*Seja*

$$f(x) = x^3 + 1 \quad e \quad [a, b] = [1, 2].$$

*Uma vez que* $f$*, sendo um polinómio, é contínua e derivável para todo o* $x \in \mathbb{R}$*, satisfaz as condições do Teorema de Lagrange. Neste caso tem-se*

$$f(a) = f(1) = 2, \quad f(b) = f(2) = 9 \quad e \quad f'(x) = 3x^2.$$

*Então, o ponto* $c$ *é tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longleftrightarrow 3c^2 = \frac{9 - 2}{2 - 1} \Longleftrightarrow 3c^2 = 7,$$

*e as soluções são*

$$c = \sqrt{7/3} \quad e \quad c = -\sqrt{7/3}.$$

*Destes dois valores apenas o primeiro está em* $]1, 2[$*. Portanto,* $c = \sqrt{7/3}$ *é o ponto cuja existência o Teorema do valor médio de Lagrange garante.*

# Funções deriváveis num intervalo

Vejamos agora algumas consequências importantes do teorema de Lagrange.

## Corolários

[do teorema de Lagrange]

1. *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0$, $\forall x \in ]a, b[$, então $f$ é constante.*

2. *Se $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in ]a, b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in ]a, b[$.*

3. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo $I$. Tem-se*

   a) *$f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, se e só se $f$ é crescente em $I$;*

   b) *$f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, se e só se $f$ é decrescente em $I$;*

   c) *se $f'(x) > 0, \forall x \in I$, então $f$ é estritamente crescente em $I$;*

   d) *se $f'(x) < 0, \forall x \in I$, então $f$ é estritamente decrescente em $I$.*

## Observação

*Repare-se que o Corolário 3 c) do Teorema de Lagrange não é uma condição necessária e suficiente. De facto, basta pensar, por exemplo, em* $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$ , *que é estritamente crescente e, no entanto,* $f'(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ , *tendo-se* $f'(0) = 0$ .

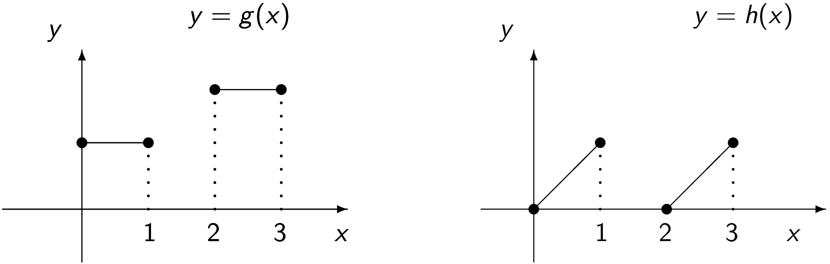
## Observação

*Mantendo as hipóteses do Teorema de Lagrange, à excepção de considerar um domínio $D$ que não seja necessariamente um intervalo, a conclusão do teorema ou dos seus corolários deixa de ser válida.*

# Funções deriváveis num intervalo

## Exemplos

*Consideremos as funções seguintes*




*Tem-se* $g'(x) = 0, \ \forall x \in [0,1] \cup [2,3],$ *e ainda* $h'(x) > 0, \ \forall x \in [0,1] \cup [2,3].$ *No entanto, nem g é constante nem h é crescente. Isto acontece precisamente porque o domínio destas funções não é um intervalo.*

# Derivadas de ordem superior

Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in D \cap D'$ e $n \in \mathbb{N}$. A *derivada de ordem n* da função $f$ no ponto $a$ define-se indutivamente por

$$\begin{array}{rcl}
f^{(2)}(a) & = & f''(a) \;=\; (f')'(a) \\
f^{(3)}(a) & = & f'''(a) \;=\; (f'')'(a) \\
\ldots & & \ldots \qquad\qquad \ldots \\
f^{(n)}(a) & = & (f^{(n-1)})'(a).
\end{array}$$

Convencionamos que a derivada de ordem 0 coincide com a própria função,

$$f^{(0)}(a) = f(a).$$

# Derivadas de ordem superior

Sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo contendo o ponto $a$, dizemos que a função $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é:

- $n$ vezes derivável no intervalo $I$ se existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$;
- $n$ vezes derivável em $a$ quando existe um intervalo $J$ contendo $a$ tal que $f$ é $n-1$ vezes derivável em $I \cap J$ e, além disso, existe $f^{(n)}(a)$.

# Aplicação da derivada ao cálculo de limites

A derivada pode ser usada com sucesso no cálculo de limites, nomeadamente no levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Trata-se da técnica conhecida por *regra de L'Hôpital* que passaremos agora a apresentar.

A versão mais simples desta regra refere-se ao caso em que pretendemos calcular

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \ ,$$

onde $f$ e $g$ são deriváveis em $a$, com $g'(a)\neq 0$ e $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)=0$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

# Aplicação da derivada ao cálculo de limites

## Teorema

[Regra de L'Hôpital]

*Sejam* $f, g : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *deriváveis e tais que:*

- $g(x) \neq 0\,,\ \ g'(x) \neq 0\,,\ \ \forall x \in ]a, b[\,;$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0.$

*Se existir* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ *então também existe* $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *, tendo-se*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

## Observação

*Demonstra-se um resultado análogo ao deste teorema para o limite lateral à esquerda. Da conjugação dos dois resultados relativos a limites laterais, resulta um teorema para o limite "completo". Além disso, modificando a forma indeterminada para* $\dfrac{\infty}{\infty}$*, os resultados referidos anteriormente estendem-se com relativa facililidade.*

# Aplicação da derivada ao cálculo de limites

## Teorema

[Extensão da Regra de L'Hôpital]

*Sejam* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções deriváveis em* $I \setminus \{c\}$, *com* $c$ *ponto de* $I$.
*Se*

- $g'(x) \neq 0\,,\ \forall x \in I \setminus \{c\}$
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell,$ *com* $\ell = 0$ *ou* $\ell = +\infty$ *ou* $\ell = -\infty$

*então*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

*desde que o segundo limite exista (finito ou infinito).*

## Observação

*Este teorema estende-se a* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e a* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *desde que as hipóteses sejam formuladas em intervalos* $]a, +\infty[$ *e* $]-\infty, b[$, *respetivamente.*

## Observação

[Aplicabilidade da Regra de L'Hôpital]

*A regra de L'Hôpital constitui uma "ferramenta" extremamente útil no cálculo de limites provenientes de indeterminações do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$*, ou outras quaisquer que se reduzam a uma destas formas.*

*Claro que a regra pode ser usada sucessivamente, desde que a indeterminação permaneça em cada "etapa". Ocorre frequentemente o erro de "continuar a aplicar a regra" quando a indeterminação já não existe.*

## Exemplos

1. *Verificar que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$.

   *Como* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$, *conclui-se que o limite proposto também vale* $1$.

2. *Calcular* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos(3x) - 1 + 4,5x^2}{x^3}$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$.

   *Derivando uma vez, vem* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3\operatorname{sen}(3x) + 9x}{3x^2}$ *e a indeterminação permanece. Derivando mais uma vez e calculando agora* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{-9\cos(3x) + 9}{6x}$, *a indeterminação ainda permanece. Mas derivando uma terceira vez, vem* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{27\operatorname{sen}(3x)}{6} = 0$, *pelo que todos os limites anteriores, incluindo o limite proposto, valem* $0$.

## Exemplos

3. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$.

   *Derivando uma vez e calculando* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^3 - 4}{2(x-1)}$, *a indeterminação permanece. Derivando novamente vem* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{12x^2}{2} = 6$, *pelo que o limite proposto vale* $6$.

4. *Calcular* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^2 - 2x + 3}{5x^2 + x - 5}$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   *Derivando uma vez obtém-se o limite* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{14x - 2}{10x + 1}$ *e a indeterminação permanece.*

   *Mas derivando novamente, vem* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$, *e o limite proposto vale* $\dfrac{7}{5}$.

## Exemplos

5. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3}$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$.

   *Derivando uma vez a indeterminação desaparece porque* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{8x-1} = \dfrac{3}{7}$, *pelo que o limite proposto vale também* $\dfrac{3}{7}$. *Uma resposta errada muito frequente é*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{8x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,.$$

6. *Calcular* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x + 2\operatorname{sen} x}$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   *O limite do quociente das derivadas é* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{1 + 2\cos x}$, *que não existe, pelo que a regra de L'Hôpital não é aplicável.* *No entanto,*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x + 2\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{1 + 2\dfrac{1}{x}\ \operatorname{sen} x} = 3.$$

## Exemplos

7. *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$.

   *Estamos perante uma indeterminação do tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   *Derivando uma vez obtém-se o limite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, *que não existe, logo a regra de L'Hôpital não é aplicável.* *Mas*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x}{1 + \dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x} = 1.$$