Universidade do Minho
Dep. de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Cálculo I

2009/2010

Folha 3

Exercício 3.1 Considere a função $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$. Esboce o gráfico da função g definida por:

a) $g(x) = f(x) + 2,\ x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = f(x+2),\ x \in \mathbb{R}$;

c) $g(x) = 2f(x),\ x \in \mathbb{R}$;

d) $g(x) = f(2x),\ x \in \mathbb{R}$;

e) $g(x) = \max\{f(x), 2\},\ x \in \mathbb{R}$;

f) $g(x) = \min\{f(x), 1\},\ x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.2 Calcule os limites que se seguem:

1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{3}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{|x+3|}{x+3}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$;

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{sen}x}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\mathrm{tg}x}{1-\cos x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\,\mathrm{sen}x|}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}4x}{\mathrm{sen}3x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \mathrm{sen}\frac{1}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$;

14) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\mathrm{sen}x}{x+\mathrm{sen}x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0} \pi x \cos\left(\frac{1}{3\pi x}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + x\cos x)$;

18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x+3}{2x-7}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{sen}2x + x^2\cos 5x)$;

20) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$;

21) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-3x+10}{x^4-2x+4}$;

22) $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{\cos x}$;

23) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x}\cos x$;

24) $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x}\cos x$;

25) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

26) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x^4}$;

Exercício 3.3 Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, chama-se função característica de A à função

$$\chi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A; \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Indique os pontos de descontinuidade de χ_A para:

a) $A = \mathbb{Z}$;

b) $A = [0, 2[$;

c) $A = \mathbb{Q}$.

Exercício 3.4 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1 - ax & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} .$$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua em 1.

Exercício 3.5 Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;

b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;

c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

Exercício 3.6 Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

e $f(x) = x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$.

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

Exercício 3.7 Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

a) $x^3 - x + 3 = 0, \quad x \in]-2, -1[$;

b) $x = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$;

c) $x = -\ln x, \quad x \in]0, 1]$;

d) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.8 Dê exemplo ou mostre porque não existe uma função:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e descontínua tal que f^2 e f^3 sejam contínuas;

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que a função $g(x) = f(x) + \text{sen} x$ é contínua;

d) $f : D \longrightarrow B$, bijectiva, contínua, tal que $f^{-1} : B \longrightarrow D$ não seja contínua.

Exercício 3.9 Considere a função $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

Exercício 3.10 Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua então $g \circ f$ não é contínua;

b) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada;

c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\ln(x^3) = x$;

d) uma função $f : [0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;

e) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua num ponto a, então f também é contínua em a.

Exercício 3.11 Em cada uma das alíneas esboce o gráfico, se possível, de uma função f definida em $[0,1]$ e satisfazendo as condições dadas:

a) f contínua em $[0,1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1;

b) f contínua em $[0,1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo;

c) f contínua em $]0,1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$;

d) f contínua em $[0,1]$, não constante, não assume valores inteiros;

e) f contínua em $[0,1]$ não assume valores racionais;

f) f contínua em $[0,1]$ assume apenas dois valores distintos;

g) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado;

h) f não contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado;

i) f contínua em $]0,1[$ tem por imagem um intervalo não limitado;

j) f contínua em $[0,1]$ tem por imagem um intervalo não limitado;

k) f não contínua em $[0,1]$ tem por imagem o intervalo $[0, +\infty[$;

l) f não contínua em $[0,1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.