Ficha n.º 5: VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

Exercício 5.1. Calcule os valores próprios das matrizes:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

f)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercício 5.2. Determine os valores próprios da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique (por cálculo) que a soma dos valores próprios é igual à soma dos elementos diagonais da matriz e também que o produto dos valores próprios é igual ao determinante da matriz.

Exercício 5.3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Substitua a terceira linha pela sua soma com a segunda multiplicada por -2 transformando-a numa matriz triangular superior U.

b) Calcule os valores próprios de A e de U e verifique que as matrizes não têm o mesmo conjunto de valores próprios.

Exercício 5.4. Determine vectores próprios associados a cada um dos valores próprios da matriz A dada no exercício anterior.

Exercício 5.5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule os valores próprios de A indicando a sua multiplicidade.

b) Calcule vectores próprios associados a cada um dos valores próprios de A.

Exercício 5.6. *a)* Determine os valores e vectores próprios da matriz identidade de ordem 3.

b) Generalize, indicando os valores e vectores próprios da matriz identidade de ordem n, I_n.

Exercício 5.7. Seja A uma matriz de ordem 3 com valores próprios $-1, 1$ e 2. Indique os valores próprios de uma matriz B relacionada com A do seguinte modo:

a) $B = 2A$.

b) $B = -A$.

c) $B = A - I_3$.

d) $B = A + pI_3$.

e) $B = A^{-1}$.

f) $B = A^T$.

g) $B = A^2$.

Exercício 5.8. Prove que, se λ é um valor próprio de A, sendo $\mathbf{x}$ um vector próprio correspondente, então, para todo o inteiro positivo p, λ^p é valor próprio de A^p e $\mathbf{x}$ um vector próprio correspondente.

(Observação: Use indução.)

Exercício 5.9. Dê exemplo de uma matriz diagonal ou triangular de ordem 5 com um valor próprio de multiplicidade dois e três valores próprios simples.

Exercício 5.10. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Dada a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule C^{-1}.

b) Determine $C^{-1}AC$ e escreva os valores próprios de A.

Exercício 5.11. Calcule os valores próprios da matriz simétrica ortogonal $I_3 - u\,u^T$ onde

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Observação: Note que os valores próprios são números reais de módulo 1, isto é, iguais a 1 ou a -1.)

Exercício 5.12. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Verifique que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal.

b) Calcule $P^T AP$.

c) Do resultado da alínea anterior escreva os valores próprios de A.