UNIVERSIDADE DO MINHO 2006/06/20

MATEMÁTICA DISCRETA II
Correcção do Exame da Primeira Chamada - Época Normal

CURSO: Engenharia de Sistemas e Informática Duração: 2h

1. Considere o conjunto X das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, +\}$ definido indutivamente pelas regras:

$$\frac{}{a \in X}\ a \qquad \frac{}{b \in X}\ b \qquad \frac{u \in X}{u + u \in X}\ f \qquad \frac{u \in X \quad t \in X}{u + t + u \in X}\ g$$

(a) Apresente uma árvore de formação de $a + a + a + a + a$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \in X}\ a}{a + a \in X}\ f \qquad \dfrac{}{a \in X}\ a}{a + a + a + a + a \in X}\ g$$

(b) Prove que a definição indutiva de X é não determinista.

Uma definição indutiva de um conjunto é determinista se e só se os elementos desse conjunto admitem exactamente uma árvore de formação. Relativamente ao conjunto X, o elemento considerado na alínea anterior também admite a árvore de formação

$$\dfrac{\dfrac{}{a \in X}\ a \qquad \dfrac{\dfrac{}{a \in X}\ a \qquad \dfrac{}{a \in X}\ a}{a + a + a \in X}\ g}{a + a + a + a + a \in X}\ g \quad ;$$

o que nos permite concluir que a definição indutiva de X não é determinista.

(c) Enuncie o Teorema de Indução Estrutural para X.

Seja P uma propriedade sobre X. Se:
i) $P(a)$;
ii) $P(b)$;
iii) $P(u) \Rightarrow P(u + u)$, para todo $u \in X$;
iv) $P(u)$ e $P(t) \Rightarrow P(u + t + u)$, para todo $u, t \in X$;
então $P(x)$, para todo $x \in X$.

(d) Prove que, para todo o $x \in X$, o primeiro e o último símbolo de x são iguais.

Vamos fazer a demonstração por indução estrutural.
Sejam $x \in X$ e a propriedade

$P(x)$: o primeiro e o último símbolo de x são iguais .

i) $P(a)$
a é o primeiro e último símbolo de a. Portanto, $P(a)$.
ii) $P(b)$
b é o primeiro e último símbolo de b. Portanto, $P(b)$.
iii) $P(u) \Rightarrow P(u + u)$, para todo $u \in X$
Seja $u \in X$.
Suponhamos $P(u)$ i.e. o primeiro e o último símbolo de u são iguais.

Temos que o primeiro símbolo de $u+u$ é o primeiro símbolo de u e o último símbolo de $u+u$ é o último símbolo de u. Consequentemente , por hipótese de indução, o primeiro e o último símbolo de $u+u$ são iguais.

Portanto, $P(u) \Rightarrow P(u+u)$.

iv) $P(u)$ e $P(t) \Rightarrow P(u+t+u)$, para todo $u, t \in X$;

Sejam $u, t \in X$.

Suponhamos $P(u)$ e $P(t)$ i.e. o primeiro e o último símbolo de u são iguais e o primeiro e o último símbolo de t são iguais.

Temos que o primeiro símbolo de $u+t+u$ é o primeiro símbolo de u e o último símbolo de $u+t+u$ é o último símbolo de u. Consequentemente , por hipótese de indução, o primeiro e o último símbolo de $u+t+u$ são iguais.

Portanto, $P(u)$ e $P(t) \Rightarrow P(u+t+u)$.

Pelo Teorema da Indução Estrutural para X, podemos concluir $P(x)$ para todo o $x \in X$, ou seja,o primeiro e o último símbolo de x são iguais.

2. Sejam φ e ψ as seguintes fórmulas de $\mathcal{F}^{CP}$:

$$\varphi = \neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3$$
$$\psi = (p_1 \wedge p_2) \vee p_3$$

(a) Diga, justificando, se φ ter valor lógico 1 é condição suficiente para ψ ter valor lógico 1.

Consideremos a tabela de verdade de φ e ψ:

p_1	p_2	p_3	φ	ψ
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

Sendo v uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = v(p_3) = 0$, temos que $v(\varphi) = 1$ mas $v(\psi) = 0$. Logo, φ ter valor lógico 1 não é condição suficiente para ψ ter valor lógico 1.

(b) Seja Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Se $\Gamma \models \neg\varphi$ e $\Gamma \models \psi$ então Γ é inconsistente."

A afirmação é verdadeira. Seja Γ um conjunto de fórmulas tal que $\Gamma \models \neg\varphi$ e $\Gamma \models \psi$. Tendo em vista uma contradição, suponhamos que Γ é consistente. Assim, existe uma valoração v_0 que satisfaz Γ. Como $\neg\varphi$ e ψ são consequência semântica de Γ, resulta que $v_0(\neg\varphi) = v_0(\psi) = 1$. Mas, por observação da tabela de verdade da alínea (a), concluimos que não é possível existir uma valoração que torne $\neg\varphi$ e ψ simultaneamente verdadeiras. Chegamos, assim, a uma contradição. Logo, Γ é inconsistente.

(c) Dê exemplo de uma forma normal conjuntiva e de uma forma normal disjuntiva que sejam ambas logicamente equivalentes a φ. Justifique.

Consideremos as seguintes equivalências lógicas:

$$\varphi = \neg(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3 \Leftrightarrow \neg\neg(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \Leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3.$$

Temos que φ é logicamente equivalente a $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ que, sendo uma disjunção de três literais, é simultaneamente uma forma normal disjuntiva e uma forma normal conjuntiva.

Resolução alternativa: considerando os algoritmos estudados nas aulas e a tabela de verdade da alínea (a), podemos concluir que:

- $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.
- $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee$ $\vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ.

(d) Construa uma derivação em DNP da fórmula $\psi \to \varphi$.

$$
\dfrac{\dfrac{\cancel{(p_1 \wedge p_2) \vee p_3}^{(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1 \wedge p_2}^{(1)}}{p_1}\,\wedge_1 E}{p_1 \vee p_2}\,\vee_1 I \qquad \cancel{\neg(p_1 \vee p_2)}^{(2)}}{\bot}\,\neg E}{p_3}\,(\bot) \qquad \cancel{p_3}^{(1)}}{\dfrac{p_3}{\neg(p_1 \vee p_2) \to p_3}\,\to I_{(2)}}\,\vee E_{(1)}}{((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to (\neg(p_1 \vee p_2) \to p_3)}\,\to I_{(3)}
$$

3. Sejam σ e θ fórmulas proposicionais e seja Δ um conjunto de fórmulas proposicionais. Prove que se $\Delta \vdash \sigma \vee \theta$ e $\Delta \cup \{\sigma\}$ é inconsistente então $\Delta \vdash \theta$.

Sejam σ e θ fórmulas proposicionais e seja Δ um conjunto de fórmulas proposicionais. Suponhamos que:

i) $\Delta \vdash \sigma \vee \theta$;

ii) $\Delta \cup \{\sigma\}$ é inconsistente; i.e., não existe qualquer valoração que satisfaça $\Delta \cup \{\sigma\}$.

De i), e pelo Teorema da Adequação, resulta que:

iii) $\Delta \models \sigma \vee \theta$; i.e, para toda a valoração v, se v satisfaz Δ, então v satisfaz $\sigma \vee \theta$.

Pretendemos provar que $\Delta \vdash \theta$. Para tal, pelo Teorema da Adequação, basta provar $\Delta \models \theta$.

Para provar que $\Delta \models \theta$, temos de mostrar que, para toda a valoração v', se v' satisfaz Δ, então v' satisfaz θ.

Consideremos que v' é uma valoração que satisfaz Δ. Então por iii) sabemos que v' satisfaz $\sigma \vee \theta$. Por outro lado, como v' satisfaz Δ, de ii) resulta que v' não satisfaz σ. Ora, como v' satisfaz $\sigma \vee \theta$ e não satisfaz σ, então v' satisfaz θ. Logo, toda a valoração v' que satisfaz Δ também satisfaz θ e, portanto, $\Delta \models \theta$.

4. Sejam $L = (\{f\}), \{R\}, N)$ a linguagem onde $N(f) = 1$ e $N(R) = 2$ e φ_0 a L-fórmula $\exists x_1 R(f(x_1), x_2)$.

(a) Dê exemplo de uma variável x e de um L-termo t de tal modo que x não seja substituível por t em φ_0. Justifique.

A variável x_2 tem uma ocorrência livre em φ_0 no alcance da quantificação $\exists x_1$ e, como tal, não será substituível por L-termos onde ocorra a variável x_1. Assim, por exemplo, a variável x_2 não é substituível pelo L-termo x_1 em φ_0.

(b) Indique, justificando, o número de L-estruturas de domínio $\{a, b\}$.

Numa L-estrutura de domínio $\{a, b\}$:

- a interpretação do símbolo de função unário f terá que ser uma função do tipo $\{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$;
- a interpretação do símbolo de relação binário R terá que ser uma relação binária em $\{a, b\}$, ou seja, R tem que ser um subconjunto de $\{a, b\}^2$.

Como existem 4 funções do tipo $\{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$ e 16 subconjuntos de $\{a, b\}^2$, o número de L-estruturas de domínio $\{a, b\}$ é 4×16 .

(c) Considere $E_0 = (\mathbb{N}_0, -)$ a L-estrutura onde $\overline{R}$ é a relação de igualdade e $\overline{f}$ é a função sucessor, isto é, a função tal que $\overline{f}(n) = n+1$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Apresente, justificando, uma atribuição a_0 em E_0 tal que $E_0 \not\models \varphi_0[a_0]$.

Aplicando a definição de valor lógico, temos que:

$$\begin{array}{ll} & E_0 \not\models \varphi_0[a_0] \\ \text{se e só se} & \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_0,\ E_0 \not\models R(f(x_1), x_2)[a_0\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ n \end{smallmatrix}\right)] \\ \text{se e só se} & \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_0,\ n+1 \neq a_0(x_2). \end{array}$$

Esta última proposição é verdadeira se e só se $a_0(x_2) = 0$. Assim, podemos, por exemplo, tomar $a_0 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ como a função que a cada variável faz corresponder 0.

(d) A fórmula $\forall x_2 \exists x_1 R(f(x_1), x_2) \to \varphi_0$ é universalmente válida? Justifique.

Chamemos φ_1 a esta fórmula e chamemos φ_2 à fórmula $\forall x_2 \exists x_1 R(f(x_1), x_2)$. Dada uma L-estrutura $E = (D, -)$ e dada uma atribuição a em E, segue da definição de valor lógico para uma implicação que:

$$E \models \varphi_1[a] \text{ se e só se } E \models \varphi_0[a] \text{ sempre que } E \models \varphi_2[a].$$

Da definição de valor lógico segue ainda que:
(i) $E \models \varphi_0[a]$ se e só se existe $d \in D$ tal que $(\overline{f}(d), a(x_2)) \in \overline{R}$;
(ii) $E \models \varphi_2[a]$ se e só se para qualquer $d_1 \in D$ existe $d \in D$ tal que $(\overline{f}(d), d_1) \in \overline{R}$.
Assim, assumindo que $E \models \varphi_2[a]$, de (ii), e como $a(x_2) \in D$, existe $d_2 \in D$ tal que $(\overline{f}(d_2), a(x_2)) \in \overline{R}$, o que por (i) garante $E \models \varphi_0[a]$.
Deste modo, mostramos que $E \models \varphi_1[a]$ para qualquer L-estrutura E e para qualquer atribuição a em E, pelo que φ_1 é universalmente válida.

Cotação:

1-a)	1 ;	**1-b)**	1 ;	**1-c)**	1.5 ;	**1-d)**	2 ;
2-a)	1.25 ;	**2-b)**	1.75 ;	**2-c)**	1.5 ;	**2-d)**	2 ;
3)	2 ;						
4-a)	1.25 ;	**4-b)**	1.25 ;	**4-c)**	1.75 ;	**4-d)**	1.75 .