Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática e Aplicações

Cálculo II
2º Teste

Eng. Informática
9/junho/2011
[2h]

Nome Proposta de Resolução Nº

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Exercício 1. [2 valores] Considere uma função f definida por

$$f: \begin{array}{ccc} D\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=x^2+2y^2-2x+4 \end{array}$$

a) Qual a derivada direccional de f no ponto P de coordenadas $(1,-2)$ segundo o vector $\vec{u}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}$?

b) Determine a taxa de variação máxima da função f, partindo do ponto P (definido na alínea anterior).

a) $\vec{u}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}=(2,-1)$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$; $vers(\vec{u})=\left(\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$f_x(x,y)=2x-2$; $f_y(x,y)=4y$

$f_x(1,-2)=0$; $f_y(1,-2)=-8$

Sendo f uma função diferenciável em $(1,-2)$, tem-se

$$f_{vers(\vec{u})}(1,-2)=f_x(1,-2)\cdot\frac{2}{\sqrt5}+f_y(1,-2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{8}{\sqrt5}$$

b) A taxa de variação máxima é obtida através da derivada direccional segundo o vector $\nabla f(1,-2)=(0,-8)$.

Consequentemente, a taxa de variação máxima de f partindo de $(1,-2)$ é

$$f_{vers(\nabla f(1,-2))}=\|\nabla f(1,-2)\|=8$$

Exercício 2. [3 valores] Use o método dos multiplicadores de Lagrange para classificar os pontos críticos da função f definida por $f(x,y) = 3x - 2y$, de entre os pontos que satisfazem uma restrição definida por $x^2 + 2y^2 = 44$.

Exercício 3. [3 valores] No seguinte integral triplo mude a ordem de integração por forma a obter um integral equivalente onde o integral interno diga respeito a z, o intermédio a y e o externo a x

$$\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{z}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy$$

$\boxed{2}$ $H(x,y,\lambda) = 3x - 2y - \lambda(x^2+2y^2-44)$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2\lambda x=0 \\ -2-4\lambda y=0 \\ x^2+2y^2=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2\lambda} \\ y=-\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2}+2\frac{1}{4\lambda^2}=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ \frac{11}{4\lambda^2}=44 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ \lambda=\pm\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \\ \lambda=\frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=2 \\ \lambda=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Pontos: $(6,-2)$; $(-6,2)$

$f(6,-2) = 18+4 = 22$

$f(-6,2) = -18-4 = -22$

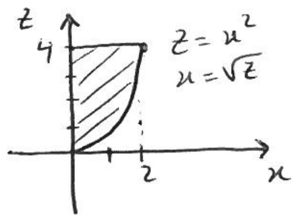
Assim 22 é máximo e -22 é mínimo de f condicionados pela equação $x^2+2y^2=44$.

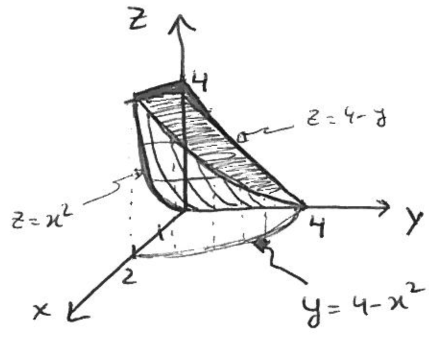
$\boxed{3}$

$0 \leq y \leq 4$

$0 \leq z \leq 4-y$

$0 \leq x \leq \sqrt{z}$





$$\begin{cases} z=4-y \\ x=\sqrt{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ x^2=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ x^2=4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ y=4-x^2 \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 4-x^2$

$x^2 \leq z \leq 4-y$

Assim:

$$\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{z}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy = \int_0^2 \int_0^{-x^2+4} \int_{x^2}^{4-y} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

Exercício 4. [3 valores] Considere o integral duplo

$$I = \iint_{\mathcal{R}} x\cos(xy)\,dA$$

onde $\mathcal{R}$ é a região limitada pela linhas definidas por $x = 1$, $x = 2$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $xy = 2\pi$.

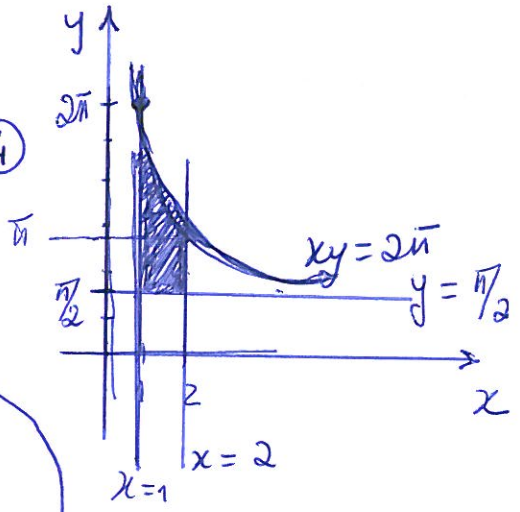
a) Construa 2 integrais duplos iterados equivalentes (trocando a ordem de integração) para I.

b) Calcule I.

Exercício 5. [3 valores] Seja $\mathcal{R}$ a região, no 1º quadrante, fora da circunferência definida, em coordenadas polares, por $r = 2$ e dentro do cardióide definido, também em coordenadas polares, por $r = 2(1+\cos\theta)$. Usando um sistema de coordenadas conveniente calcule

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$$

4



a) $$I = \int_{x=1}^{2}\int_{y=\pi/2}^{2\pi/x} x\cos(xy)\,dy\,dx$$

$$I = \int_{y=\pi/2}^{\pi}\int_{x=1}^{2} x\cos(xy)\,dx\,dy + \int_{y=\pi}^{2\pi}\int_{x=1}^{\frac{2\pi}{y}} x\cos(xy)\,dx\,dy$$

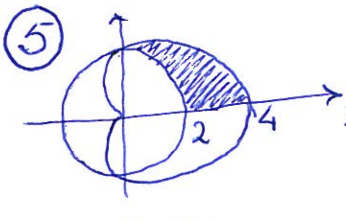
b) $$I = \int_{x=1}^{2}\int_{y=\pi/2}^{2\pi/x} x\cos(xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} \sin(xy)\Big]_{y=\pi/2}^{2\pi/x} dx = \int_{x=1}^{2}\left[\sin\left(\cancel{x}\cdot\frac{2\pi}{\cancel{x}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{x=1}^{2} \frac{\pi}{2}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]dx = \frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2}x\Big]_{x=1}^{2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}$$

5



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$|J| = r$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2}^{2(1+\cos\theta)} \frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r^2}(\cancel{\cos^2\theta+\sin^2\theta})}\cdot\cancel{r}\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\, r\Big]_{r=2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\,(\cancel{2} + 2\cos\theta - \cancel{2})\,d\theta =$$

$$= \sin^2\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi/2} = \sin^2\frac{\pi}{2} - \sin^2 0 = 1 - 0 = 1$$

Exercício 6. [3 valores] Expresse (sem calcular), através de um integral múltiplo, o volume do sólido limitado pelos parabolóides definidos por $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$.

Exercício 7. [3 valores] Seja $\vec{F}$ um campo vectorial definido por

$$\vec{F} = e^y \vec{e_1} + xe^y \vec{e_2}$$

a) $\vec{F}$ é um campo vectorial conservativo?

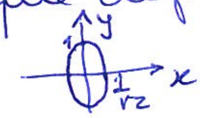
b) Qual o trabalho desempenhado por uma partícula que se move, no sentido directo, sobre uma semicircunferência, de ordenadas positivas, de raio 1 e centrada na origem e que está sujeita a uma força definida pelo campo vectorial $\vec{F}$?

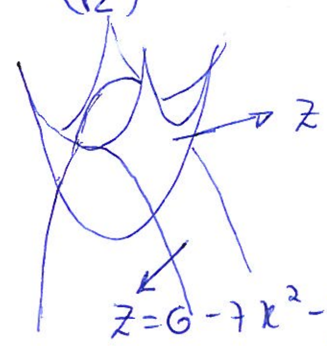
⑥ A região de intersecção das duas superfícies é definida por

$$\begin{cases} z = 5x^2 + 5y^2 \\ z = 6 - 7x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 6y^2 = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 = 1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$ que define uma elipse (de semieixos $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 1)





$\to z = 5x^2 + 5y^2$; $V = \displaystyle\int_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{z=5x^2-5y^2}^{6-7x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$

⑦ a) $\vec{F}$ é conservativo qd existe $f : \nabla f = \vec{F}$

$f: \begin{cases} f_x = e^y \Rightarrow f(x,y) = xe^y + K(y) \\ f_y = xe^y \end{cases}$

Ou seja

$\exists f : f(x,y) = x e^y$ tal que $\nabla f = \vec{F}$

$\therefore \vec{F}$ é conservativo

b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha, o trabalho, i.e., $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ só depende, em campos conservativos, dos pontos de início e de finalização da trajectória:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P) = f(-1,0) - f(1,0)$$
$$= -1e^0 - 1e^0 = -2$$