

## Folha 1 - Matrizes

---

1. Dê exemplo de uma matriz real:

- (a) quadrada de ordem 3,
- (b) rectangular de ordem  $4 \times 2$ ,
- (c) linha de ordem  $1 \times 6$ ,
- (d) coluna de ordem  $4 \times 1$ ,
- (e) triangular de ordem 5,
- (f) diagonal de ordem 4.

2. (a) Escreva por extenso a matriz de ordem  $n \times m$  definida por:

- i.  $A = (a_{ij})$  e  $a_{ij} = i + j$ ,  $(n = 5, m = 4)$ ,
- ii.  $B = (b_{ij})$  e  $b_{ij} = \begin{cases} 2 & , \text{ se } i = j \\ -1 & , \text{ se } |i - j| = 1, \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (n = 5, m = 4)$
- iii.  $C = (c_{ij})$  e  $c_{ij} = \begin{cases} 2i & , \text{ se } i > j \\ i + j & , \text{ se } i = j, \\ 2j & , \text{ se } i < j \end{cases} \quad (n, m = 5)$
- iv.  $D = (d_{ij})$  e  $D = A + 2B$
- v.  $E = (e_{ij})$  e  $e_{ij} = (-1)^{i+j}$ ,  $(n, m = 3)$

(b) Para cada uma das matrizes determinadas na alínea anterior indique os elementos que constituem a sua diagonal principal.

3. Considere as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  de ordens respectivamente iguais a  $4 \times 3$ ,  $4 \times 3$ ,  $3 \times 4$  e  $4 \times 2$ . Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e nesses casos indique a ordem da matriz resultado.

- (a)  $A+2B$     (b)  $AB$     (c)  $AC+D$     (d)  $(A+B)C$     (e)  $ACD$     (f)  $2ACA+B$

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Calcule:

- (a)  $A + D$ ,
- (b)  $3u - 2v$ ,
- (c)  $BC$ ,
- (d)  $CA$ ,

- (e)  $AD$  e  $DA$ , (Obs. Note que  $D$  comuta com  $A$ .)
- (f)  $Bu$ , (Obs. Note que  $u$  é solução do sistema  $Bu = v$ .)
- (g)  $Cx$ , (Obs. Note que se tem  $Cx = 0$  sem que  $C = O$  ou  $x = 0$ .)

5. Sejam  $A$  e  $B$  as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine a primeira linha da matriz  $A + B$ .
- (b) Determine a segunda coluna da matriz  $BA$ .
- (c) Determine a terceira linha da matriz  $A^2$ .

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique que:

- (a)  $A^2 - 3A + 2I_3 = O_{3 \times 3}$
- (b)  $AI_3 = A = I_3A$
- (c)  $AO_{3 \times 3} = O_{3 \times 3}$
- (d)  $2A - 3A = -A$

7. Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times (m + 5)$  e  $B$  uma matriz de ordem  $n \times (11 - n)$ . Determine os possíveis valores para  $m$  e  $n$  sabendo que estão definidos os produtos  $AB$  e  $BA$ .

8. Determine a matriz  $X$  tal que

$$A + 3X = B$$

$$\text{onde } A = [2i - 3j]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,2}} \quad \text{e} \quad B = [i + j]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,2}}.$$

9. Considere as matrizes apresentadas no exercício 4. Calcule:

- (a)  $AC^T$ ,
- (b)  $C^TB$ ,
- (c)  $uv^T$ ,
- (d)  $v^Tu$ ,
- (e)  $u^T Bu$ .

10. Dada a equação matricial  $((A^{-1})^T X)^{-1} = I$ ,

- (a) resolva-a em ordem a  $X$ ,
- (b) calcule a matriz  $X$  sabendo que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

11. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifique e comente os seguintes resultados:

- (a)  $AB = O_2$ ,
- (b)  $AC = AD$ .

12. (a) Determine todas as matrizes  $X$  que comutam com a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Determine uma matriz  $B$  tal que  $AB = O_2$ .

13. Seja  $A$  uma matriz simétrica de ordem  $n$ . Se  $P$  é uma matriz real da mesma ordem prove que  $P^T A P$  é simétrica.

14. Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes simétricas de ordem  $n$ . Prove que a matriz  $AB$  é uma matriz simétrica se e só se  $AB = BA$ .

15. Uma matriz real  $A$ , quadrada de ordem  $n$ , diz-se *anti-simétrica* se  $A^T = -A$ .

- (a) Mostre que  $A$  é anti-simétrica se e só se  $a_{ij} = -a_{ji}$ , para todo o  $i, j$ .
- (b) Seja  $P$  uma matriz real de ordem  $n$ . Prove que a matriz  $P - P^T$  é uma matriz anti-simétrica.

16. (a) Prove que o produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal.

(b) Prove que a transposta de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.

17. Verifique que a inversa da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  é a matriz  $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

18. Considere  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calcule  $A^2$  e  $A^3$ .
- (b) Verifique que a matriz  $I_3 + A + A^2$  é a inversa de  $I_3 - A$ .

19. Calcule a inversa das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. (a) Seja  $A$  uma matriz ortogonal. Prove que a inversa da matriz  $A$  é a matriz  $A^T$ .

(b) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- i. Prove que  $A$  é uma matriz ortogonal.

ii. Calcule a inversa da matriz  $A$ .

21. Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes invertíveis de ordem  $n$ .

(a) Qual a matriz inversa de  $AB^{-1}C$ ?

(b) Se  $A$  e  $B$  verificam  $(AB)^T = A^T B^T$  prove que  $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$ .

22. Prove que se  $A$  é uma matriz invertível então:

(a)  $AB = O \Rightarrow B = O$

(b)  $AX = AY \Rightarrow X = Y$

23. Mostre que:

(a) a soma de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal;

(b) o produto de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal;

(c) duas matrizes diagonais são comutáveis.