Tópicos de Matemática Discreta

Lic. em Engenharia Informática

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

2011/2012

Grafos

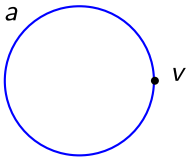
Definição. Um **grafo** (finito) é um terno $G = (V, A, \varepsilon)$ em que

- V é um conjunto finito não vazio cujos elementos são chamados **vértices**
- A é um conjunto finito cujos elementos são chamados **arestas**
- $\varepsilon : A \to \mathcal{P}(V)$ é uma função tal que, para todo o $a \in A$, $\varepsilon(a)$ tem 1 ou 2 elementos, chamados **extremidades** de a.

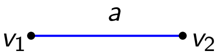
Uma aresta que tem uma só extremidade é chamada **lacete**.

Representação gráfica:

$\varepsilon(a) = \{v\}$ (lacete)



$\varepsilon(a) = \{v_1, v_2\}$

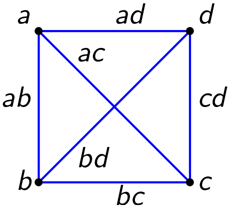


Exemplo. $G = (V, A, \varepsilon)$ com

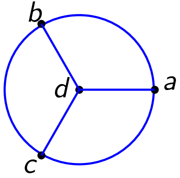
$$V = \{a, b, c, d\}, \quad A = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$$

e $\varepsilon : A \to \mathcal{P}(V)$ dada por

$$\varepsilon(ab) = \{a, b\},\ \varepsilon(ac) = \{a, c\},\ \varepsilon(ad) = \{a, d\},$$
$$\varepsilon(bc) = \{b, c\},\ \varepsilon(bd) = \{b, d\},\ \varepsilon(cd) = \{c, d\}.$$



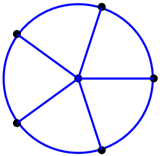
Outra representação



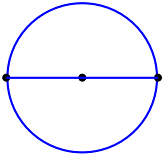
Este grafo é denotado por W_3 (roda (wheel) com 3 raios).

Da mesma forma define-se a roda W_n com n raios:

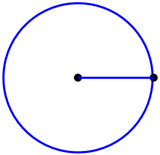
W_5



W_2



W_1



Definição. Um grafo $G = (V, A, \varepsilon)$ diz-se **simples** se não tem lacetes e se ε é injetiva (ou seja, não há arestas diferentes com as mesmas extremidades).

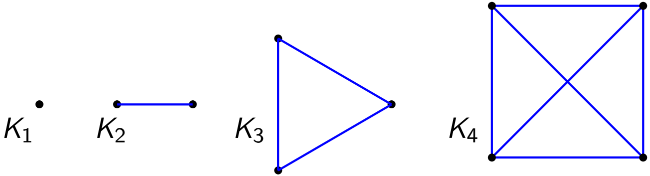
Exemplo. Os grafos W_3 e W_5 são simples. Os grafos W_1 e W_2 não são simples.

Outros exemplos:

- Os grafos P_n (path)

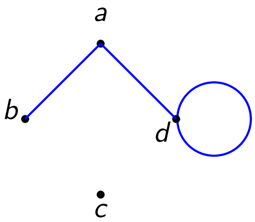
- Os grafos C_n (cycle)

- Os grafos completos K_n



Definição. Seja $G = (V, A, \varepsilon)$ um grafo e seja $v \in V$ um vértice. Chamamos **grau** de v, e denotamos por $gr(v)$, ao número de arestas que admitem v como extremidade, contando a dobrar os lacetes.

Exemplo.



Tem-se

$$gr(a) = 2, \; gr(b) = 1, \; gr(c) = 0, \; gr(d) = 3.$$

Observações.

- Num grafo, a soma dos graus dos seus vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em particular, a soma dos graus é um número par.
- Num grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Exercício 1. Indique, ou justifique que não existe, um grafo simples cujos vértices têm graus

(a) 2, 2 e 2

(b) 3, 3, 3, 3 e 3

(c) 1, 2, 2, e 3

(d) 2, 5 e 5

(e) 7, 6, 5, 4, 3, 3 e 2

(f) 6, 6, 5, 4, 3, 3 e 1

Definição. Seja $G = (V, A, \varepsilon)$ um grafo. Uma sequência

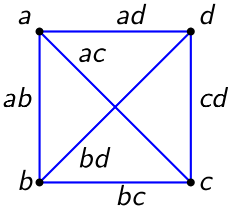
$$(v_0, a_1, v_1, \ldots, a_n, v_n)$$

em que

- $\forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad v_i \in V$
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad a_i \in A$ e $\varepsilon(a_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$

é designada por **caminho de v_0 para v_n** no grafo G. Para $v \in V$, o caminho (v) é o caminho **trivial**.

Exemplo. No grafo $W_3 = K_4$ um caminho de a para d é (a, ab, b, bd, d).

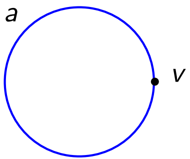


Definição. Seja $G = (V, A, \varepsilon)$ um grafo. Um caminho $(v_0, a_1, v_1, ..., a_n, v_n)$ em G diz-se

- **fechado** se as suas extremidades v_0 e v_n forem iguais,
- **simples** se não tiver vértices repetidos excepto eventualmente as extremidades,
- **trilho** se não tiver arestas repetidas,
- **ciclo** se for um trilho fechado simples não trivial.

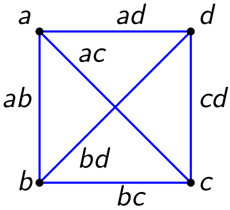
Exemplo 1. No seguinte grafo:

$\varepsilon(a) = \{v\}$ (lacete)



(v) não é um ciclo, (v, a, v) é um ciclo.

Exemplo 2. No grafo $W_3 = K_4$,



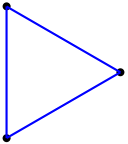
- (a, ab, b, bd, d, ad, a) é um ciclo.
- $(a, ab, b, bd, d, ad, a, ac, c)$ é um trilho, não simples, não fechado.
- (a, ab, b, ab, a) é um caminho fechado simples que não é um ciclo.

Exercício 2. Considere o grafo $G = (V, A, \varepsilon)$ definido por $V = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{ab, ac, bc, bd, ca, cd, ce, de, ee\}$ e $\varepsilon(ab) = \{a, b\}$, $\varepsilon(ac) = \{a, c\}$, $\varepsilon(bc) = \{b, c\}$, $\varepsilon(bd) = \{b, d\}$, $\varepsilon(ca) = \{c, a\}$, $\varepsilon(cd) = \{c, d\}$, $\varepsilon(ce) = \{c, e\}$, $\varepsilon(de) = \{d, e\}$, $\varepsilon(ee) = \{e\}$.

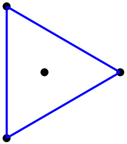
1. Represente G graficamente.
2. Determine um caminho em G com 10 arestas.
3. Determine um trilho em G com 6 arestas.
4. Determine um trilho simples em G com 4 arestas.
5. Qual o número de caminhos diferentes de a para e?
6. Determine um ciclo em G com 1 (respectivamente 2,3,4,5) arestas.

Definição. Um grafo G diz-se **conexo** se, para cada dois vértices v e w, existe um caminho em G de v para w.

Exemplos.



É conexo

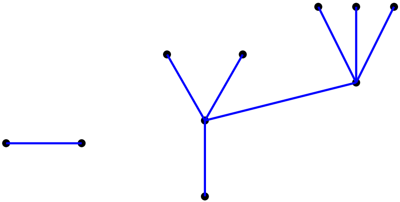


Não é conexo

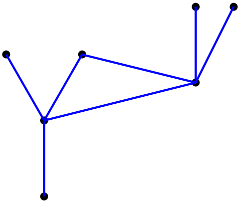
Para todo o n, o grafo completo K_n é conexo.

Definição. Uma **árvore** é um grafo conexo sem ciclos.

Exemplos.



São árvores



Não é uma árvore

Proposição. Uma árvore com pelo menos 2 vértices tem um vértice de grau 1.

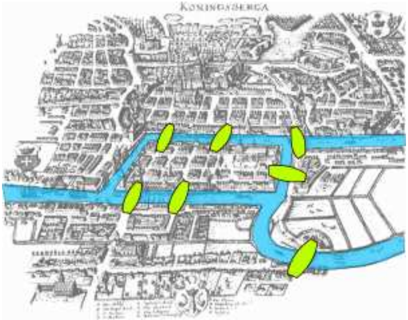
Ideia: Considera-se o trilho simples mais comprido. As extremidades deste trilho devem ser de grau 1 pois, caso contrário, o trilho seria prolongável o que contradiz o seu carácter máximal.

Teorema. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma árvore com n vértices tem $n-1$ arestas.

Ideia: Prova por indução.

- Verdadeiro para $n = 1$.
- Supõe-se o resultado verdadeiro para n (sendo $n \geq 1$) e considera-se uma árvore A_{n+1} com $n+1$ vértices. Pela proposição anterior, esta árvore tem um vértice de grau 1. Retirando este vértice e a aresta correspondente obtem-se uma árvore A_n com n vértices. Pela hipótese de indução A_n tem $n-1$ arestas. Logo A_{n+1} tem n arestas.

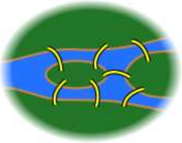
O problema dos 7 pontes de Königsberg

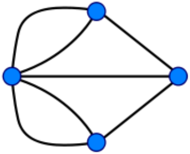


fonte:wikipedia

É possível fazer um passeio passando exactamente 1 vez por cada ponte e voltando ao ponto inicial?

Resolução por L. Euler em 1736.





fonte:wikipedia

Definição. Seja $G = (V, A, \varepsilon)$ um grafo. Um caminho fechado que passa exactamente uma vez por cada aresta de G é chamado **trilho euleriano** de G.

Proposição. Se um grafo conexo $G = (V, A, \varepsilon)$ admite um trilho euleriano então não existem vértices de grau ímpar.

Teorema de Euler. Um grafo conexo admite um trilho euleriano se e só se todos os vértices têm grau par.