1. MATRIZES

Ferramenta utilizada para uma notação simples e muito conveniente para representar sistemas de equações lineares.

Ex.: O sistema de 3 equações a 3 incógnitas,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ -x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

pode ser representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Os termos independentes do sistema também podem ser representados numa matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

A matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ contém toda a informação sobre os dados do sistema (designa-se matriz ampliada ou completa do sistema)

NOTAÇÃO: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

letra maiúscula para denotar matrizes

A matriz A tem m linhas e n colunas. Diz-se, então, que A é uma matriz de ordem $m \times n$

$a_{ij} \to$ elemento da matriz A que se encontra na linha i e na coluna j.

Abreviadamente, $A = (a_{ij})$.

Definição: Uma matriz diz-se real se todos os seus elementos são números reais.

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Se $m \neq n$, A diz-se rectangular. Se $m = n$, A diz-se quadrada (neste caso diz-se apenas ser "de ordem n").

Definição: Uma matriz de ordem $n \times 1$ tem a forma $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ e diz-se <u>matriz coluna</u>.

Uma matriz de ordem $1 \times n$ tem a forma $(a_{11} \cdots a_{1n})$ e diz-se <u>matriz linha</u>.

NOTAÇÃO: para matrizes linha ou coluna

$$\underset{\sim}{y} = (y_1 \cdots y_m) \quad \text{ou} \quad \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

letra minúscula elementos só com um índice

Definição: Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$. Os elementos a_{ij} tais que $i=j$, i.e., $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ são os elementos que se dispõem na diagonal de A e dizem-se <u>elementos diagonais de A</u>.

Ex.: Na matriz dada $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ os elementos 2, 3 e 2 são os elementos diagonais de A.

Definição: Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero diz-se <u>matriz nula</u>. Representa-se por $O_{m\times n}$ ou O (se não houver ambiguidade).

Definição: Sejam $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ matrizes de mesma ordem ($m\times n$). Diz-se que $\underline{\underline{A}}$ é igual a $\underline{\underline{B}}$ e escreve-se $A=B$, se e só se, $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$)

Operações com MATRIZES

Adição

Definição: Sejam $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m\times n$. A soma de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ é uma matriz $C=(c_{ij})$ cujos elementos são dados por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$) e escreve-se $C=A+B$

Obs: A adição de matrizes só está definida para matrizes da mesma ordem.

Ex: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizes de ordem 2×3

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-1) & -1+0 \\ 3+0 & 0+(-2) & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Adição de Matrizes

Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$

(i) $A+B = B+A$
(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$
(iii) Se O designa a matriz de ordem $m \times n$, $A+O=A$
(iv) Se $-A=(-a_{ij})$ então $A+(-A)=O$

Definição: Sejam $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. $A-B$ significa $A+(-B)$ sendo $-B=(-b_{ij})$

Ex.: Matrizes A e B do exemplo anterior

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-(-1) & -1-0 \\ 3-0 & 0-(-2) & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um número

Definição: Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número. O produto de α por A é a matriz $C=(c_{ij})$ cujos elementos são dados por $c_{ij}=\alpha a_{ij}$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ e escreve-se $C=\alpha A$.

Ex.: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 3A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad -5A=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

Propriedades: Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e α e β números.

(i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
(ii) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
(iii) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
(iv) $1A = A$

Multiplicação de Matrizes

Obs.: A multiplicação de matrizes não se define de maneira que à primeira vista poderá parecer mais óbvia, i.e., multiplicando os elementos homólogos. Isto porque, tal definição não tem qualquer utilidade.

Multiplicação de Matrizes (cont.)

A multiplicação de matrizes dá significado à notação, simples e abreviada,

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

para representar um sistema de $\underline{\underline{m}}$ equações lineares por $\underline{\underline{n}}$ incógnitas

$\underline{\underline{\text{p.ex.}}}$: Para o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 \qquad\;\; = 3 \\ x_1 + x_2 \quad + 5x_3 = 7 \end{cases}$ poder ser representado

na forma matricial $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, i.e., $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ onde

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, então o produto deve

ser definido por $A\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\text{Ex.}}}$: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ então $A\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 3 \\ -1\times 2 + 0\times 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Se $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ então $A\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 1\times 4 + 1\times 5 \\ -1\times 4 + 0\times 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}}$

Se $B = \begin{pmatrix} \underset{\underset{\underset{\sim}{x}}{\downarrow}}{\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}}} & \underset{\underset{\underset{\sim}{y}}{\downarrow}}{\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}}} \end{pmatrix}$ então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 3 & 1\times 4 + 1\times 5 \\ -1\times 2 + 0\times 3 & -1\times 4 + 0\times 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 9 \\ -4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times l$ e B uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A e B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ e escreve-se $C = AB$

Ex.: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 4}$ então

$$AB = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times5 & 1\times2+2\times6 & 1\times3+2\times7 & 1\times4+2\times8 \\ -1\times1+1\times5 & -1\times2+1\times6 & -1\times3+1\times7 & -1\times4+1\times8 \\ 0\times1-1\times5 & 0\times2-1\times6 & 0\times3-1\times7 & 0\times4-1\times8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 17 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto de Matrizes

Sejam A, B e C matrizes e α um número. Se todas as operações a seguir indicadas forem definidas, então,

(i) $(AB)C = A(BC)$
(ii) $A(B+C) = AB + AC$
(iii) $(A+B)C = AC + BC$
(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

A multiplicação de matrizes não é comutativa:

Se A é de ordem $m\times l$ e B é de ordem $l\times n$, o produto AB é definido e, neste caso, AB é de ordem $m\times n$.
Contudo BA não é definido, a não ser que $m=n$. Neste caso, BA será de ordem $l\times l$. Logo AB e BA só terão a mesma ordem se $m=l=n$. No entanto, mesmo neste caso, em geral, $AB \neq BA$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se $AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Quando se tem $AB = BA$, as matrizes A e B dizem-se comutáveis

Definição: À matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1 e os restantes iguais a 0, dá-se o nome de matriz identidade de ordem n e representa-se por I_n.

Ex.: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A designação de Matriz Identidade está relacionada com a seguinte propriedade:

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ então $I_m A = A$ e $A I_n = A$

Se $m = n$, $I_n A = A I_n = A$

Inversa de uma Matriz

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz X, de ordem n, tal que,

(*) $\quad XA = AX = I_n$, diz-se que A é <u>invertível</u>, ou <u>regular</u>, ou ainda, <u>não singular</u>.

Uma matriz X que verifique (*) diz-se <u>inversa de A</u>.

Ex.: A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível pois, se $X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

tem-se $XA = AX = I_2$, como se pode verificar.

Se A for invertível, a sua inversa é única. Veja-se que, se X e Y fossem inversas de A, teríamos

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas então
$$YAX = (YA)X = I_n X = X$$
e
$$YAX = Y(AX) = Y I_n = Y \quad \text{donde } X = Y$$

Quando existe, a matriz inversa de A é representada por A^{-1}.

Propriedades: Sejam A e B matrizes de ordem n invertíveis. Então

(i) A^{-1} é invertível, sendo $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) AB é invertível, sendo $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Uma matriz quadrada não nula pode não ter inversa. Veja-se o exemplo que se segue.

Ex.: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ não tem inversa. Procuremos $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ tal que $AX=XA=I_2$. Tem-se $AX=\begin{pmatrix} 2x_{11}+2x_{21} & 2x_{12}+2x_{22} \\ x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \end{pmatrix}$ e para que $AX=I_2$, então

$$\begin{cases} 2x_{11}+2x_{21}=1 \\ x_{11}+x_{21}=0 \\ 2x_{12}+2x_{22}=0 \\ x_{12}+x_{22}=1 \end{cases}, \text{ i.e., } \begin{cases} x_{11}+x_{21}=1/2 \\ x_{12}+x_{22}=0 \\ x_{11}+x_{21}=0 \\ x_{12}+x_{22}=1 \end{cases}$$

logo o sistema não tem solução e, portanto, não existe nenhuma matriz de 2ª ordem X tal que $AX=I_2$

Uma matriz quadrada que não tem inversa diz-se <u>singular</u> ou <u>não invertível</u>. (estudaremos condições para que uma matriz quadrada seja invertível)

Como o uso da definição não é um método computacionalmente eficiente para calcular a inversa de uma matriz, estudaremos métodos para determinar a inversa.

Definição: Dada uma matriz de ordem $m\times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A pela ordem correspondente, diz-se transposta de A e representa-se por A^T.

Ex.: Se $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ então $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Note-se que A^T é uma matriz de ordem $n\times m$ e os seus elementos são dados por a_{ji} $(j=1,\dots,n\ ;\ i=1,\dots,m)$

Propriedades:

Sejam A e B matrizes e α um número. Se as operações abaixo forem definidas, então,

(i) $(A^T)^T=A$

(ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(iii) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$

(v) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

Definição: Seja A uma matriz quadrada. $\underset{=}{A}$ diz-se simétrica se e só se, $A^T = A$

Logo, se $\underset{=}{A}$ é simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \dots, n)$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0.3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

É fácil ver que, se $\underset{=}{A}$ é simétrica e invertível, então A^{-1} é simétrica pois

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

Ex.: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$$A A^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Também se tem $A^T A = I_2$. Neste exemplo, a transposta da matriz dada é a sua inversa, i.e., $A^T = A^{-1}$

Definição: Seja A uma matriz real de ordem $\underset{=}{n}$. $\underset{=}{A}$ diz-se ortogonal se $A^T A = A A^T = I_n$

Donde, se $\underset{=}{A}$ é ortogonal, então $\underset{=}{A}$ é invertível e $A^{-1} = A^T$

Ex.: A matriz $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ é ortogonal

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}^{R_\alpha} \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}^{R_\alpha^T} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes Especiais:

Definição: Uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada diz-se uma matriz diagonal, se todos os elementos fora da diagonal são nulos, i.e., $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Definição: Uma matriz $\underset{=}{A}$ quadrada diz-se triangular superior (inferior) se todos os elementos abaixo (acima) da diagonal são nulos, i.e.,

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 \qquad (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

Ex.: $\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$ é diagonal ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0.2 & 0 \\ \pi & 1 & 0.1 \end{pmatrix}$ é triangular inferior;

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é triangular superior

Definição: Uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada é uma matriz banda, de largura de banda $2k+1$, se

$$|i-j| > k \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Se $k=1$, a matriz banda diz-se tridiagonal

Ex.: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ é tridiagonal

Definição: Uma matriz diz-se densa se a maior parte dos seus elementos são não nulos.

Definição: Uma matriz diz-se dispersa se uma grande percentagem dos seus elementos são nulos.

Fraccionamento de Matrizes

Uma matriz de ordem $m \times n$, $\underset{=}{A}$, diz-se fraccionada em blocos se estiver escrita na forma $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix}$ onde cada bloco A_{ij} é uma matriz de ordem $m_i \times n_j$, sendo

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i \quad e \quad n = \sum_{j=1}^{l} n_j$$

O fraccionamento de matrizes é frequentemente usado para facilitar a manipulação de matrizes de grande dimensão, simplificar operações ou a descrição de algumas propriedades, p. ex., $\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ pode ser fraccionada na forma $\begin{pmatrix} B & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ onde $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$I_n = (\underset{\sim}{e}_1\ \underset{\sim}{e}_2 \ldots \underset{\sim}{e}_n)$ onde $\underset{\sim}{e}_i = (0 \ldots 0\, \underset{\text{posição } i}{1}\, 0 \ldots 0)^T$ → forma muito usada para fraccionar