

Álgebra Linear

teste B

10 de janeiro de 2011

nome: _____ número: _____

A duração da prova é de 2 (duas) horas. **Não** é permitida a utilização de máquinas de calcular.

cotação: em (I), 1~(1.5+1.5+1.5+1.5), 2~2; em (II), cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada subtrai 0.25.

(I)

Justifique todas as suas respostas convenientemente.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Resolva o sistema $Ax = b$, usando o algoritmo de eliminação de Gauss.

(b) Encontre uma base do núcleo de A .

(c) Encontre uma base de $CS(A)$, o espaço das colunas de A . Verifique se $CS(A) = \mathbb{R}^3$.

(d) Mostre que $A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e diagonalize-a (bastando, para tal, indicar uma matriz diagonalizante e uma diagonal),

2. Mostre que $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e calcule A^{-1} **ou** pelo algoritmo de Gauss-Jordan **ou** à custa dos complementos algébricos.

(II)

Leia atentamente as questões. Depois, na última página desta prova, assinale com um X a alínea (a, b, c ou d) correspondente à **melhor** resposta a cada questão. No caso de ter assinalado mais do que uma alínea de resposta para a mesma questão, essa questão será considerada como não respondida.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) $\dim N(A) = 1$.

(b) Para qualquer escolha de $b \in \mathbb{R}^3$, a equação $Ax = b$ tem uma única solução. (V)

(c) $\det(A) = 0$.

(d) Nenhuma das anteriores.

2. Dado um subespaço vectorial V de \mathbb{R}^5 , com $\dim V = 3$,

(a) Se $(1, 1, 1, 1, 0) \in V$ então $(3, 3, 3, 3, 0) \in V$.

(b) $V \neq \mathbb{R}^5$.

(c) $(0, 0, 0, 0, 0) \in V$.

(d) Todas as anteriores. (V)

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(a) As colunas de A formam uma base de \mathbb{R}^2 .

(b) $CS(A) = \mathbb{R}^2$. (V)

(c) $\dim N(A) = 2$.

(d) Nenhuma das anteriores.

4. Sendo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(1, 0) = (-1, 0, 1), T(0, 1) = (1, 1, 1).$$

(a) $T(1, 2) = (1, 0, 3)$.

(b) A matriz que representa T em relação à base canónica de \mathbb{R}^2 e à de \mathbb{R}^3 é $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(V)

(c) $T(x, 0) = (x, 0, x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(d) Todas as anteriores.

5. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

- (a) $\text{car}(A) = 1$.
- (b) A é diagonalizável.
- (c) $\dim N(A) = 2$.
- (d) Todas as anteriores. (V)

6. Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

- (a) $Ax = b$ tem soluções.
- (b) $\text{proj}_{CS(A)} b = b$.
- (c) $N(A) = \{(0, 0, 0)\}$.
- (d) Nenhuma das anteriores. (V)

7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ é vector próprio associado ao valor próprio 2 de J .
- (b) J e A têm o mesmo polinómio característico.
- (c) $\sigma(A) = \sigma(J)$, ou seja, A e J têm os mesmos valores próprios.
- (d) Todas as anteriores. (V)

8. Dadas duas matrizes A e B quadradas $n \times n$,

- (a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .
- (b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .
- (c) $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ é sempre válida, independentemente da escolha de A e B .
- (d) Nenhuma das anteriores. (V)

Respostas:

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 2. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 3. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 4. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 5. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 6. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 7. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 8. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 9. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |
| 10. a) <input type="radio"/> | b) <input type="radio"/> | c) <input type="radio"/> | d) <input type="radio"/> |