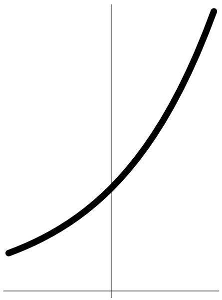
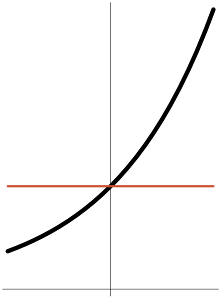
Aproximação polinomial de funções

- Porquê polinómios?
- Qual o sentido da aproximação?
- Como controlar a "qualidade da aproximação"?

Considere-se a função $f(x) = e^x$.

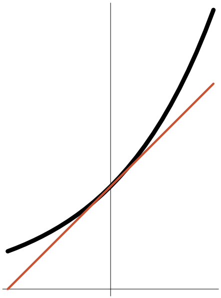


- Qual será o polinómio de grau zero que melhor aproxima a função f em zero?



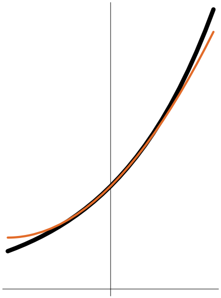
- $\lim_{x \to 0} (e^x - f(0)) = \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0.$

- Qual será o polinómio de grau um que *melhor* aproxima a função f em zero?

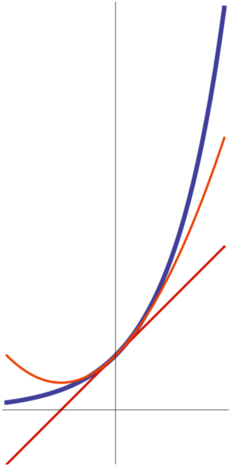


- $\lim_{x \to 0} \left(e^x - (f(0) + f'(0)x)\right) = \lim_{x \to 0} \left(e^x - (1 + x)\right) = 0.$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - (1 + x)}{x} = 0.$

- Qual será o polinómio de grau dois que *melhor* aproxima a função f em zero?



- $\lim_{x \to 0} \left(e^x - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\right)\right) =$
  $\lim_{x \to 0} \left(e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right) = 0.$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = 0.$



Polinómio de Taylor

Definição

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponhamos que existem $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$. Define-se polinómio de Taylor de f, de ordem n, à volta do ponto a do seguinte modo:

$$P_{n,a}(x) =$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n =$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j.$$

Definição

Sejam I *um intervalo de* $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $a \in I$. *Dado* $n \in \mathbb{N}_0$, *diz-se que* f *e* g *são iguais até à ordem* n *em* a *se*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Teorema

Sejam I *um intervalo de* $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções. Suponhamos que existem* $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$, $g'(a), \ldots, g^{(n)}(a)$. *Então*

f *é igual a* g *até à ordem* n *em* a *sse*

$$f(a) = g(a),\ f'(a) = g'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Nota

Se $P_{n,a}(x)$ *é o polinómio de Taylor de ordem* n *de* $f(x)$ *em torno do ponto* a*, então*

- $P_{n,a}(x)$ *é um polinómio de grau* *menor ou igual* *a* n
- $$\begin{aligned} P_{n,a}(a) &= f(a) \\ P'_{n,a}(a) &= f'(a) \\ P''_{n,a}(a) &= f''(a) \\ &\vdots \\ P^{(n)}_{n,a}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$
- $P_{n,a}(x)$ *é o* *único* *polinómio de grau menor ou igual a* n *igual à função* $f(x)$ *até à ordem* n *em* a
- *diz-se também que* $P_{n,a}(x)$ *e* $f(x)$ *possuem um contacto de ordem* n *em* a

Definição

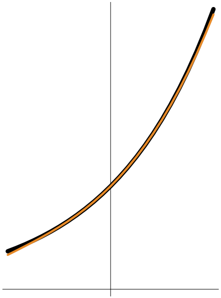
Dados I um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existem $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$, chamamos **resto de Taylor de f de ordem n em a** *à diferença entre f e $P_{n,a}$, i.e.,*

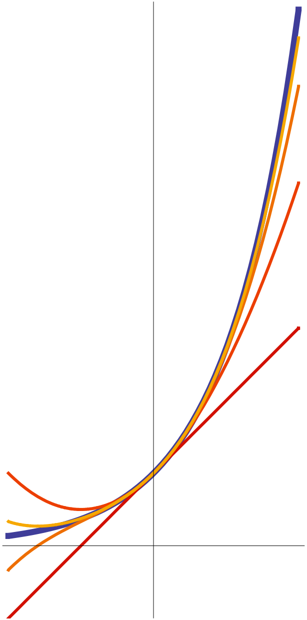
$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x), \qquad \forall\, x \in I.$$

Nota

$R_{n,a}(a) = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.

- Qual será o polinómio de grau três que *melhor* aproxima a função $f(x) = e^x$ em zero?
- $$\begin{aligned} P_{3,0}(x) = & f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 \\ = & 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$





Teorema (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange)

Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* $n+1$ *vezes derivável então, para cada* $x \in I \setminus \{a\}$ *existe*

$$c \in \,]x, a[\quad \textit{ou} \quad c \in \,]a, x[$$

tal que

$$f(x) = P_{n,a}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_{n,a}(x)} \; .$$