

4. Aplicações lineares

Tell us a story! - said the March Hare.

Yes, please do! - said Alice

And be quick about it!

Once upon a time there were three little sisters!- said Hatter

What did they live on? - said Alice, who always took a great interest in questions of eating and drinking.

Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

Definição

Sejam V e W dois subespaços reais. Designa-se por **aplicação linear** a aplicação $f : V \longrightarrow W$ tal que:

- $\forall x, y \in V \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$ (f perversa $+$)
- $\forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x),$ (f perversa \cdot).

Uma aplicação linear também é chamada, por vezes, de **transformação linear** ou de **homomorfismo de espaços vectoriais**.

Exemplo

Seja V um espaço vectorial real qualquer.

- A aplicação **identidade**

$$\begin{aligned} Id : V &\rightarrow V \\ u &\mapsto u \end{aligned}$$

é uma aplicação linear

- A aplicação **nula**

$$\begin{aligned} O : V &\rightarrow V \\ u &\mapsto 0_V \end{aligned}$$

é uma aplicação linear

Exemplo

Considere-se a aplicação:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + y, -y + 3z) \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = \\ &= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), -(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2)) = \dots = \\ &= f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)), \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1)) &= f((\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)) = (2(\alpha x_1) + \alpha y_1, -\alpha y_1 + 3\alpha z_1) = \\ &= \alpha f((x_1, y_1, z_1)). \end{aligned}$$

f é uma aplicação linear

Exemplo

Considere-se a aplicação:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + y, -y + 3z) \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = \\ &= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), -(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2)) = \cdots = \\ &= f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)), \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1)) &= f((\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)) = (2(\alpha x_1) + \alpha y_1, -\alpha y_1 + 3\alpha z_1) = \\ &= \alpha f((x_1, y_1, z_1)). \end{aligned}$$

f é uma aplicação linear

Exemplo

Considere-se a aplicação:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x + y, -y + 3z) \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) = \\ &= (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), -(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2)) = \cdots = \\ &= f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)), \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1) \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1)) &= f((\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)) = (2(\alpha x_1) + \alpha y_1, -\alpha y_1 + 3\alpha z_1) = \\ &= \cdots = \alpha f((x_1, y_1, z_1)). \end{aligned}$$

f é uma aplicação linear

Exemplo

- A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x$ é uma aplicação linear.

A aplicação $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x + 1$ não é uma aplicação linear.

- A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (3x + y, 0, y - x)$ é uma aplicação linear.

A aplicação $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x^2, 0, x + y)$ não é uma aplicação linear.

Exemplo

- A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x$ é uma aplicação linear.

A aplicação $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x + 1$ não é uma aplicação linear.

- A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (3x + y, 0, y - x)$ é uma aplicação linear.

A aplicação $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x^2, 0, x + y)$ não é uma aplicação linear.

Exemplo

- A aplicação

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

é uma aplicação linear

- Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

A aplicação $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \mapsto Ax$$

é uma aplicação linear

[Note-se que este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe uma aplicação linear que lhe está associada.]

- A aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^T$$

é uma aplicação linear

Exemplo

- A aplicação

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

é uma aplicação linear

- Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

A aplicação $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \mapsto Ax$$

é uma aplicação linear

[Note-se que este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe uma aplicação linear que lhe está associada.]

- A aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^T$$

é uma aplicação linear

Exemplo

- A aplicação

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

é uma aplicação linear

- Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

A aplicação $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \mapsto Ax$$

é uma aplicação linear

[Note-se que este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe uma aplicação linear que lhe está associada.]

- A aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$$
$$A \mapsto A^T$$

é uma aplicação linear

Exemplo

(a aplicação que a cada polinómio de grau 3 associa o polinómio-derivada)

$$\begin{array}{ccc} \psi : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ & ax^3 + bx^2 + cx + d & \longmapsto 3ax^2 + 2bx + c \end{array}$$

ψ é uma aplicação linear

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (f preserva o vector nulo)
2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. (f preserva os simétricos)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$
2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,
$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (f preserva o vector nulo)
2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. (f preserva os simétricos)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$
2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,
$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(0_V) = 0_W$, (f preserva o vector nulo)
2. $\forall x \in V, \quad f(-x) = -f(x)$. (f preserva os simétricos)

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0_V) = f(0_{\mathbb{R}} 0_V) = 0_{\mathbb{R}} f(0_V) = 0_W$
2. Usando (1) tem-se que, para todo $x \in V$,
$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W.$$

Teorema

Se f é uma aplicação linear definida de V para W então:

1. $f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$, para $v_1, \dots, v_n \in V$,
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (f preserva as combinações lineares)

2. Se $v_1, \dots, v_n \in V$, são vectores linearmente dependentes de V , então
 $f(v_1), \dots, f(v_n)$ são linearmente dependentes de W . (f preserva a
dependência linear)

Note-se que, em geral, uma aplicação linear não preserva a independência linear.

A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, z)$ é um exemplo dessa afirmação.

Definição

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.

$Nuc(f)$ - designa-se por **núcleo** de f , ou espaço nulo, ou kernel de f , denotado por $Nuc(f)$ ou $Ker(f)$ o conjunto dos elementos de V que têm como imagem o zero de W

$$Nuc(f) = \{x \in V : f(x) = 0_W\}$$

Note-se que: $Nuc(f) \subseteq V$

$Im(f)$ - designa-se por **espaço imagem** de f , o conjunto das imagens de V por meio da aplicação linear f :

$$Im(f) = \{y \in W, \exists x \in V : f(x) = y\}$$

Note-se que: $Im(f) \subseteq W$

Definição

Seja $f : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear.

$Nuc(f)$ - designa-se por **núcleo** de f , ou espaço nulo, ou kernel de f , denotado por $Nuc(f)$ ou $Ker(f)$ o conjunto dos elementos de V que têm como imagem o zero de W

$$Nuc(f) = \{x \in V : f(x) = 0_W\}$$

Note-se que: $Nuc(f) \subseteq V$

$Im(f)$ - designa-se por **espaço imagem** de f , o conjunto das imagens de V por meio da aplicação linear f :

$$Im(f) = \{y \in W, \exists x \in V : f(x) = y\}$$

Note-se que: $Im(f) \subseteq W$

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear.

Então:

- (i) $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V
- (ii) $\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial de W .

Demonstração:

[$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial]

(1.) $0_W \in W$ (pois W é subespaço), e porque f é linear

$0_W = f(0_V), 0_V \in \text{Nuc}(f), \text{Nuc}(f) \neq \{\}$

(2.) sejam $x, x' \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear,

$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in \text{Nuc}(f)$

(3.) sejam $x \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in \text{Nuc}(f)$

$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V

[$\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear.
Então:

- (i) $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V
- (ii) $\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial de W .

Demonstração:

$[\text{Nuc}(f) \text{ é um subespaço vectorial}]$

(1.) $0_W \in W$ (pois W é subespaço), e porque f é linear

$0_W = f(0_V), 0_V \in \text{Nuc}(f), \text{Nuc}(f) \neq \{\}$

(2.) sejam $x, x' \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear,

$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in \text{Nuc}(f)$

(3.) sejam $x \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$,
logo $\alpha x \in \text{Nuc}(f)$

$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V

$[\text{Im}(f) \text{ é um subespaço vectorial}]$

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. Então:

- (i) $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V
- (ii) $\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial de W .

Demonstração:

$[\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial]

(1.) $0_W \in W$ (pois W é subespaço), e porque f é linear

$0_W = f(0_V), 0_V \in \text{Nuc}(f), \text{Nuc}(f) \neq \{\}$

(2.) sejam $x, x' \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear,

$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in \text{Nuc}(f)$

(3.) sejam $x \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$, logo $\alpha x \in \text{Nuc}(f)$

$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V

$[\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear.
Então:

- (i) $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V
- (ii) $\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial de W .

Demonstração:

[$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial]

(1.) $0_W \in W$ (pois W é subespaço), e porque f é linear

$0_W = f(0_V), 0_V \in \text{Nuc}(f), \text{Nuc}(f) \neq \{\}$

(2.) sejam $x, x' \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear,

$f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in \text{Nuc}(f)$

(3.) sejam $x \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$,
logo $\alpha x \in \text{Nuc}(f)$

$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V

[$\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial]

...

Teorema

Sejam V, W espaços vectoriais reais e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. Então:

- (i) $\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V
- (ii) $\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial de W .

Demonstração:

[$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial]

(1.) $0_W \in W$ (pois W é subespaço), e porque f é linear

$0_W = f(0_V), 0_V \in \text{Nuc}(f), \text{Nuc}(f) \neq \{\}$

(2.) sejam $x, x' \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear,
 $f(x + x') = f(x) + f(x') = 0 + 0$, logo $x + x' \in \text{Nuc}(f)$

(3.) sejam $x \in \text{Nuc}(f)$ então, porque f é linear, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0 = 0$,
logo $\alpha x \in \text{Nuc}(f)$

$\text{Nuc}(f)$ é um subespaço vectorial de V

[$\text{Im}(f)$ é um subespaço vectorial]

...

Definição

Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear com V de dimensão finita. Define-se:

- a **nulidade de f** como sendo $nul(f) = \dim(Nuc(f))$.
- a **característica de f** como sendo $car(f) = \dim(Im(f))$.

Teorema

Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação linear com V de dimensão finita. Então:

$$\dim(V) = nul(f) + car(f)$$

Exemplo: Consideremos a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (x, 2y)$

$$\begin{aligned} Nuc(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, 2y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} \\ &= \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

uma vez que os vectores são l.i.

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

uma vez que os vectores são l.i.

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

uma vez que os vectores são l.i.

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

uma vez que os vectores são l.i.

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

uma vez que os vectores são l.i.

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

Exemplo

Sendo f a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d)$$

tendo-se

$$(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

uma vez que os vectores são l.i.

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Nuc}(f) = \{(a, -a, -a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Matriz associada a uma aplicação linear

Sejam:

- V e W espaços vectoriais reais, de dimensão m e n ,
- $B = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ uma base de V
- $B' = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ uma base de W .

Então para qualquer vector de V , em particular um vector da sua base, v_i , $i = 1, \dots, m$, pode-se determinar $f(v_i)$, escrevendo-o na base de W , ou seja:

$$\begin{aligned}f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n \\f(v_2) &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n \\&\vdots \\f(v_m) &= a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \dots + a_{mn}w_n\end{aligned}$$

A acção de f sobre cada um dos v_i é determinada pelos escalares a_{ij} , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Estes escalares formam uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz transposta desta, designa-se por **matriz da aplicação linear f** , nas bases $\{v_i\}$ de V , e $\{w_j\}$ de W , é uma matriz de ordem $n \times m$.

Matriz associada a uma aplicação linear

Sejam:

- V e W espaços vectoriais reais, de dimensão m e n ,
- $B = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ uma base de V
- $B' = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ uma base de W .

Então para qualquer vector de V , em particular um vector da sua base, v_i , $i = 1, \dots, m$, pode-se determinar $f(v_i)$, escrevendo-o na base de W , ou seja:

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n$$

$$f(v_2) = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n$$

$$\vdots$$

$$f(v_m) = a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \dots + a_{mn}w_n$$

A acção de f sobre cada um dos v_i é determinada pelos escalares a_{ij} , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Estes escalares formam uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz transposta desta, designa-se por **matriz da aplicação linear f** , nas bases $\{v_i\}$ de V , e $\{w_j\}$ de W , é uma matriz de ordem $n \times m$.

Escreve-se, A , a matriz da aplicação linear f , de V (dimensão m) em W (dimensão n), em relação às bases B e B' , como sendo:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & & f(v_m) \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por:

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y).$$

Uma vez que:

$$f(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1),$$

$$f(0, 1, 0) = (-3, -2) = -3(1, 0) - 2(0, 1),$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1),$$

tem-se que,

a matriz da aplicação linear f , relativamente às bases canónicas de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Note-se que:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$$

Sendo então *possível* determinar a imagem por meio de f de qualquer elemento de \mathbb{R}^2 , recorrendo à matriz da aplicação linear f , tendo-se, por exemplo:

$$f((1, 2, 3)) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Note-se que:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$$

Sendo então *possível* determinar a imagem por meio de f de qualquer elemento de \mathbb{R}^2 , recorrendo à matriz da aplicação linear f , tendo-se, por exemplo:

$$f((1, 2, 3)) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f .

A aplicação f será definida de \mathbb{R}^4 para \mathbb{R}^3 , tendo-se:

$$f(a, b, c, d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b - c \\ a + d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c, d) &\longmapsto (a + b, b - c, a + d) \end{aligned}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f .

A aplicação f será definida de \mathbb{R}^4 para \mathbb{R}^3 , tendo-se:

$$f(a, b, c, d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b - c \\ a + d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c, d) &\longmapsto (a + b, b - c, a + d) \end{aligned}$$

Exemplo

Seja A a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas) definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine-se f .

A aplicação f será definida de \mathbb{R}^4 para \mathbb{R}^3 , tendo-se:

$$f(a, b, c, d) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b - c \\ a + d \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c, d) &\longmapsto (a + b, b - c, a + d) \end{aligned}$$

como usar matrizes de aplicações lineares para determinar o núcleo

Vejamos um exemplo.

Seja,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z) \end{aligned}$$

O núcleo de f , $Nuc(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f((x, y, z)) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Sendo A , a matriz da aplicação linear f , podemos escrever que, para $(x, y, z) \in Nuc(f)$:

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sistema homogéneo,} \\ \text{cujo conjunto solução é o núcleo de } f. & \end{aligned}$$

ou seja, recorrendo ao método de eliminação de Gauss, para a A ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

tendo-se, por substituição inversa,

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad c(A) = 3 = n \text{ sistema possível determinado}$$

donde

$$Nuc(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{o qual é um conjunto singular.}$$

(Há só um elemento cuja imagem é o zero de \mathbb{R}^3 .)

Exemplo

Sendo $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que:

$$f(a, b, c, d, e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d)$$

determine-se uma base para os subespaços $Nuc(f)$ e $Im(f)$.

[base $Im(f)$]

$$(a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d) = \\ a(1, 1, 2, 0) + c(-1, 0, -1, -1) + d(3, 2, 5, 1) + e(-1, -1, -1, 0)$$

$$Im(f) = \langle (1, 1, 2, 0), (-1, 0, -1, -1), (3, 2, 5, 1), (-1, -1, -1, 0) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c(A) = 3$$

$$(3, 2, 5, 1) = 2(1, 1, 2, 0) - (-1, 0, -1, -1)$$

$$Im(f) = \langle (1, 1, 2, 0), (-1, 0, -1, -1), (-1, -1, -1, 0) \rangle$$

que, podemos verificar que são l.i., logo constituem uma base de $Im(f)$

$$\dim Im(f) = 3$$

$$f(a, b, c, d, e) = (a - c + 3d - e, a + 2d - e, 2a - c + 5d - e, -c + d)$$

[**base** $Nuc(f)$] resolvendo o sistema homogéneo $Ax = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tendo-se $a - c + 3d - e = 0$ e $c - d = 0$ e $e = 0$ vem

$$Nuc(f) = \{(-2c, b, c, c, 0) : b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim Nuc(f) = 2$$

$$\text{base de } Nuc(f) = \{(-2, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\}$$

Classificação de aplicações lineares

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $\text{Im}(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R},$$

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0, x) \end{aligned}$$

$$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y' \text{ e } x = x' \text{ e então } (x, y) = (x', y') \quad h \text{ é injectiva}$$

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva**.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Classificação de aplicações lineares

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $\text{Im}(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R},$$

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0, x) \end{aligned}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y' \text{ e } x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva**.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Classificação de aplicações lineares

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $\text{Im}(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R},$$

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0, x) \end{aligned}$$

$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y' \text{ e } x = x'$ e então $(x, y) = (x', y')$ h é injectiva

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva**.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Classificação de aplicações lineares

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $\text{Im}(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R},$$

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0, x) \end{aligned}$$

$$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y' \text{ e } x = x' \text{ e então } (x, y) = (x', y') \quad h \text{ é injectiva}$$

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva**.

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Classificação de aplicações lineares

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $\text{Im}(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R},$$

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0, x) \end{aligned}$$

$$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y' \text{ e } x = x' \text{ e então } (x, y) = (x', y') \quad h \text{ é injectiva}$$

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva.**

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Classificação de aplicações lineares

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **sobrejectiva** se $\text{Im}(f) = W$.

Exemplo

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R},$$

g é sobrejectiva

Definição

Uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ diz-se **injectiva** se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exemplo

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (y, 0, x) \end{aligned}$$

$$(y, 0, x) = (y', 0, x') \Rightarrow y = y' \text{ e } x = x' \text{ e então } (x, y) = (x', y') \quad h \text{ é injectiva}$$

Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se **bijectiva.**

Nota: A aplicação g não é injectiva, e a aplicação linear h não é sobrejectiva.

Teorema

Se $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é injectiva,
- (ii) $Nuc(f) = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \rightarrow (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc(f)$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc(f) = \{0\}$.

$(ii) \rightarrow (i)$

Seja $Nuc(f) = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x - y) = f((x) + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc(f)$, e uma vez que $Nuc(f) = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Teorema

Se $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é injectiva,
- (ii) $Nuc(f) = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \rightarrow (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc(f)$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc(f) = \{0\}$.

$(ii) \rightarrow (i)$

Seja $Nuc(f) = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x - y) = f((x) + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc(f)$, e uma vez que $Nuc(f) = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Teorema

Se $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é injectiva,
- (ii) $Nuc(f) = \{0\}$.

Demonstração:

$(i) \rightarrow (ii)$

Suponha-se que f é injectiva. Então $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou de modo equivalente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Seja $x \in Nuc(f)$. Então $f(x) = 0_w = f(0_v)$. E, uma vez que f é injectiva, $x = 0_v$, tendo-se $Nuc(f) = \{0\}$.

$(ii) \rightarrow (i)$

Seja $Nuc(f) = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$.

Então $f(x - y) = f((x) + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_w$, logo $x - y \in Nuc(f)$, e uma vez que $Nuc(f) = \{0\}$ tem-se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, donde f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) \end{aligned}$$

Determinemos o $\text{Nuc}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) = (0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

o que equivale a resolver o sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

o qual admite como única solução a solução trivial $(0, 0, 0)$,

donde $\text{Nuc}(f) = \{(0, 0, 0)\}$, e f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) \end{aligned}$$

Determinemos o $\text{Nuc}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) = (0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

o que equivale a resolver o sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

o qual admite como única solução a solução trivial $(0, 0, 0)$,

donde $\text{Nuc}(f) = \{(0, 0, 0)\}$, e f é injectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z) \end{aligned}$$

- Determine-se $\text{Im}(f)$.

$$(a, b, c) \in \text{Im}(f) \text{ se o sistema } \begin{cases} x + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases} \text{ for possível.}$$

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{array} \right)$$

Donde, concluímos que $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$ se e só $c = a + b$

$\text{Im}_f = \{(a, b, a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, e logo f não é sobrejectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z) \end{aligned}$$

- Determine-se $\text{Im}(f)$.

$$(a, b, c) \in \text{Im}(f) \text{ se o sistema } \begin{cases} x + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases} \text{ for possível.}$$

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{array} \right)$$

Donde, concluímos que $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$ se e só $c = a + b$

$\text{Im}_f = \{(a, b, a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, e logo f não é sobrejectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z) \end{aligned}$$

- Determine-se $Im(f)$.

$$(a, b, c) \in Im(f) \text{ se o sistema } \begin{cases} x + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases} \text{ for possível.}$$

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{array} \right)$$

Donde, concluímos que $(a, b, c) \in Im(f)$ se e só $c = a + b$

$Im_f = \{(a, b, a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$, $Im(f) \neq \mathbb{R}^3$, e logo f não é sobrejectiva.

Exemplo

Averigue se a seguinte aplicação linear é injectiva e/ou sobrejectiva.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z) \end{aligned}$$

- Determine-se $Im(f)$.

$$(a, b, c) \in Im(f) \text{ se o sistema } \begin{cases} x + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases} \text{ for possível.}$$

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{array} \right)$$

Donde, concluímos que $(a, b, c) \in Im(f)$ se e só $c = a + b$

$Im_f = \{(a, b, a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$, $Im(f) \neq \mathbb{R}^3$, e logo f não é sobrejectiva.

- Determine-se $Nuc(f)$.

$(x, y, z) \in Nuc(f)$ se o sistema homogéneo
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$$

$$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

- Determine-se $Nuc(f)$.

$$(x, y, z) \in Nuc(f) \text{ se o sistema homogéneo } \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$$

$$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

- Determine-se $Nuc(f)$.

$$(x, y, z) \in Nuc(f) \text{ se o sistema homogéneo } \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$$

$$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

- Determine-se $Nuc(f)$.

$$(x, y, z) \in Nuc(f) \text{ se o sistema homogéneo } \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

tiver solução única, a solução trivial $(0, 0, 0)$.

Resolvendo, por eliminação Gaussiana, o sistema tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde, concluímos que $c(A) = 2$, logo o sistema é indeterminado, não tendo solução única.

Então $Nuc(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ e f não é injectiva.

$$Nuc_f = \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$$

$$Nuc_f = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$$

uma observação importante

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, (v_1, v_2, \dots, v_n) um conjunto de geradores de V , e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$

Se $v \in V$ então existem escalares a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Ou seja, o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A , da aplicação linear.

uma observação importante

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, (v_1, v_2, \dots, v_n) um conjunto de geradores de V , e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$

Se $v \in V$ então existem escalares a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Ou seja, o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A , da aplicação linear.

uma observação importante

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, (v_1, v_2, \dots, v_n) um conjunto de geradores de V , e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$

Se $v \in V$ então existem escalares a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Ou seja, o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A , da aplicação linear.

uma observação importante

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, (v_1, v_2, \dots, v_n) um conjunto de geradores de V , e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$

Se $v \in V$ então existem escalares a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Ou seja, o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A , da aplicação linear.

uma observação importante

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, (v_1, v_2, \dots, v_n) um conjunto de geradores de V , e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$

Se $v \in V$ então existem escalares a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Ou seja, o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A , da aplicação linear.

Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita, (v_1, v_2, \dots, v_n) um conjunto de geradores de V , e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação linear.

Vejamos que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) \in W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$

Consideremos um vector qualquer $u \in Im(f)$ então

existe $v \in V$ tal que $f(v) = u$

Se $v \in V$ então existem escalares a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

tendo-se, porque f é linear,

$$u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

e, podemos então concluir que $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Ou seja, **o espaço imagem $Im(f)$ é o espaço colunas da matriz A , da aplicação linear.**

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \rightarrow W$ **bijectiva**.

Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

Seja $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

$$\text{(i)} \quad f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = \\ (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \\ \alpha f(x_1, y_1, 0)$$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$).

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \rightarrow W$ **bijectiva**.

Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

Seja $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

$$\text{(i)} \quad f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = \\ (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \\ \alpha f(x_1, y_1, 0)$$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$).

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \rightarrow W$ **bijectiva**.

Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

Seja $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

• vejamos que f é linear

$$\text{(i)} \quad f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = \\ (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \\ \alpha f(x_1, y_1, 0)$$

• verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$).

Definição

Chama-se **isomorfismo** a uma **aplicação linear** $f : V \rightarrow W$ **bijectiva**.

Os **espaços** V e W dizem-se **isomorfos**, e escreve-se $V \simeq W$

Exemplo

Seja $A = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

Seja $f : A \rightarrow B$ tal que $f(x, y, 0) = (x, 0, y)$

f é um isomorfismo

- vejamos que f é linear

$$\text{(i)} \quad f((x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)) = \\ (x_1 + x_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1, 0, y_1) + (x_2, 0, y_2) = f((x_1, 0, y_1)) + f((x_2, 0, y_2))$$

$$\text{(ii)} \quad f(\alpha(x_1, y_1, 0)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, 0)) = (\alpha x_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1, 0, y_1) = \\ \alpha f(x_1, y_1, 0)$$

- verificamos que f é bijectiva (injectiva e sobrejectiva)

Logo f é um isomorfismo e os espaços vectoriais A e B são isomorfos ($A \simeq B$).

