



Universidade do Minho

Engenharia Económica

Paula Varandas Ferreira
Departamento de Produção e Sistemas
(paulaf@dps.uminho.pt)

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

- ⇒ As funções diversificadas e abrangentes de um engenheiro requerem que as suas competências vão muito para além dos conhecimentos técnicos específicos de cada especialidade.
- ⇒ A utilização de recursos monetários escassos de um modo eficiente é um critério essencial na selecção de alternativas de investimento tecnicamente viáveis.
- ⇒ A análise financeira de custos e benefícios associados a diferentes investimentos, representa assim uma disciplina fundamental para a formação de um profissional de engenharia.

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Decisões estratégicas:

☐ Selecção de equipamento e processos

Devo comprar o sistema de apoio à gestão A ou B? Devo comprar uma frota de transporte própria ou subcontratar?

☐ Substituição de equipamentos

Devo substituir um equipamento produtivo ou devo mantê-lo em funcionamento? Durante quanto tempo?

☐ Novo produto e expansão do produto

Devo investir no lançamento de um novo produto?

☐ Redução de custos

Devo investir num novo equipamento que permite reduzir custos de produção?

☐ Melhoria de serviço

Devo investir num novo equipamento que permite melhorar o serviço prestado?

3

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ A tomada de decisão implica o conhecimento de:

☐ Investimento necessário

☐ Procura para um produto

☐ Estimativa de preço de venda

☐ Estimativa de custos de fabrico

☐ Estimativa de ciclo de vida do produto

Estudos de apoio: mercado, procura, localização, disponibilidade de matérias-primas, impacto ambiental, tecnologias, custos...

4

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

O valor do dinheiro no tempo

O juro (interesse)

O juro simples e composto

Taxa de juro nominal e efectiva

Pagamentos uniformes

Perpetuidades

5

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ A avaliação de um investimento envolve a análise de custos e benefícios, expressos em valores monetários, que ocorrem em diferentes momentos da vida do projecto.

⇒ De modo a comparar esses fluxos monetários é necessário recorrer ao conceito de **taxa de juro** ou **taxa de interesse** que permite avaliar como o valor do dinheiro varia no tempo.

⇒ 1 € agora vale mais do que 1 € amanhã; 1 € amanhã vale mais do que 1 € depois de amanhã... Quais as razões para isso?

6

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Os valores futuros são afectados pela **inflação**; deste modo o poder de compra de 1 € hoje é superior ao de 1 € amanhã.

⇒ Existe **risco e incerteza**. Um rendimento ou despesa que ocorra hoje é um valor certo. O rendimento ou despesa futura pode variar de acordo com o valor antecipado.

⇒ Existe necessidade de retorno. Ao incorrer numa despesa hoje, o investidor espera ser recompensado por um retorno no futuro que compense o **deferimento** do consumo.

7

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

Será preferível receber €140.000 de uma só vez ou receber prestações anuais de €24.000 durante 9 anos?

⇒ Para fazer estas comparações de fluxos financeiros, temos de saber comparar o valor do dinheiro em diferentes momentos do tempo.

⇒ Para fazer isso, temos de desenvolver um método que reduz uma sequência de benefícios e custos a um único ponto no tempo. Então, podemos fazer as comparações nessa base.

8

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ **Juro** ou **interesse** é a medida do valor do dinheiro no tempo e permite quantificar a diferença entre o dinheiro inicialmente investido/emprestado e o valor final obtido/devido.

⇒ O capital inicial investido ou emprestado é chamado o **principal**.

$$\text{Juro} = (\text{valor final obtido})_{t_1} - (\text{principal})_{t_0}$$

$$\text{Taxa de juro (interesse)} = \frac{\text{Interesse no período de tempo } t}{\text{Principal original}} \times 100 (\%)$$

9

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Uma empresa de construção civil investe 10 000 € num novo projecto, obtendo 10 650 € 12 meses depois. Determine:

- (a) O juro ou interesse subjacente ao projecto.
- (b) A taxa de juro ou interesse sobre o capital investido.

$$(a) \text{ Juro} = 10650 - 10000 = 650 \text{ €}$$

$$(b) \text{ Taxa de juro} = 650/10000 = 6,5\% \text{ ao ano.}$$

10

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ **Juro simples:** o juro acumulado é directamente proporcional ao principal envolvido. O interesse total acumulado (I) ao longo de um determinado período é:

$$I = P \times i \times n$$

Diagram illustrating the components of the simple interest formula:

- I (Interesse) is the result of the calculation.
- P (Principal) is the initial amount.
- i (Taxa de interesse) is the interest rate.
- n (Período de tempo) is the time period.

Valor futuro

$$F = P + I = P + P \times i \times n = P [1 + (i \times n)]$$

11

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Uma empresa pede um empréstimo no valor de 12 000 € por um período de 4 anos e com uma taxa de juro de 5% em regime simples. Quanto deverá pagar ao fim do período do empréstimo?

$$F = 12000[1 + (0,05 \times 4)] = 14400 \text{ €}$$

Ano	Empréstimo	Interesse	Dívida acumulada	Dívida paga
0	12000			
1		600	12600	
2		600	13200	
3		600	13800	
4		600	14400	14400

12

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ **Juro composto:** o juro devido em cada período de tempo é calculado sobre o principal mais o juro acumulado em todos os períodos anteriores.

⇒ O capital vai aumentando sucessivamente ao longo do tempo.

O interesse (I1) ao fim do primeiro período é: $I1 = P \times i$

O valor do capital (F1) ao fim do primeiro período é: $F1 = P + P \times i = P (1+i)$

O interesse (I2) ao fim do segundo período é: $I2 = (P+I1) \times i = F1 \times i$

O valor do capital (F2) ao fim do primeiro período é: $F2 = P (1+i) (1+i) = P(1+i)^2$

(.....)

13

2. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ **Capitalização composta:**

$$F = P (1+i)^n = P F_{PF,i,n}$$

Factor do juro composto

⇒ **Actualização:**

$$P = F (1+i)^{-n} = F F_{FP,i,n}$$

Factor do valor actual

⇒ **Assume pagamentos ao fim do período.**

14

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Uma empresa pede um empréstimo no valor de 12 000 € por um período de 4 anos e com uma taxa de juro de 5% em regime composto. Quanto deverá pagar ao fim do período do empréstimo?

$$F = 12000 (1+0,05)^4 = 14586,1 \text{ € ou } F = 12000 \times F_{PF,5,4} = 12000 \times 1,2155 = 14586 \text{ €}$$

Ano	Empréstimo	Interesse	Divida acumulada	Divida paga
0	12000			
1		600,0	12600,0	
2		630,0	13230,0	
3		661,5	13891,5	
4		694,6	14586,1	14586,1

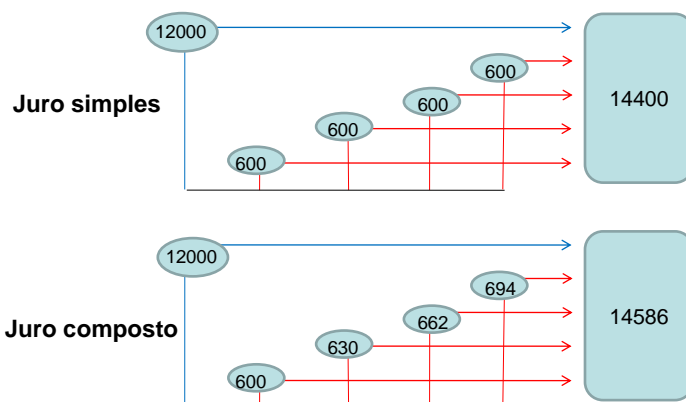
15

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Comparação juro simples e juro composto



16

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Princípio da equivalência:

De acordo com este exemplo 12000 € agora são equivalentes a possuir 14586,1 € dentro de 4 anos ou seja têm o mesmo valor económico.

⇒ Permite que diferentes valores de fluxos monetários que ocorram em diferentes momentos possam ser comparados num instante de tempo comum.

⇒ Uma empresa pede um empréstimo no valor de 10 000 € por um período de 5 anos e com uma taxa de juro de 8% ao ano em regime composto. Compare os diferentes planos de pagamento disponíveis:

17

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

Ano	Empréstimo	Plano A	Plano B	Plano C
0	10000			
1		2504,6	0	
2		2504,6	0	5000
3		2504,6	0	
4		2504,6	0	
5		2504,6	14693,3	8394,7
Total	10000	12523	14693,3	13394,7

Plano A: $P = 2504,6(1 + 0,08)^{-1} + 2504,6(1 + 0,08)^{-2} + 2504,6(1 + 0,08)^{-3} + 2504,6(1 + 0,08)^{-4} + 2504,6(1 + 0,08)^{-5} = 10000 \text{ €}$

Plano B: $P = 14693,3 (1 + 0,08)^{-5} = 10000 \text{ €}$

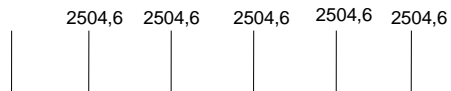
Plano C: $P = 5000 (1 + 0,08)^{-2} + 8394,7 (1 + 0,08)^{-5} = 10000 \text{ €}$

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Equivalência Económica



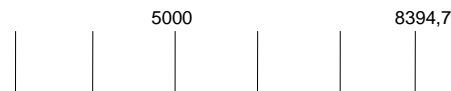
$$P = 10000 \text{ €}$$

$$F = 14693,3 \text{ €}$$

$$F_{n=3} = 12597,1 \text{ €}$$



Equivalentes à taxa de 8%



19

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Equivalência Económica

- ☐ Passo 1: Determinar o período base.
- ☐ Passo 2: Identificar a taxa de juro a utilizar.
- ☐ Passo 3: Calcular o valor equivalente.

20

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Equivalência Económica

□ Existe entre fluxos de dinheiro que têm o mesmo efeito económico e podem ser trocados um pelo outro.

□ Mesmo que o montante e o timing dos fluxos seja diferente, uma taxa de juro apropriada torna-os iguais.

□ Fluxos monetários Equivalentes são equivalentes em qualquer ponto comum do tempo.

21

1. Conceitos básicos



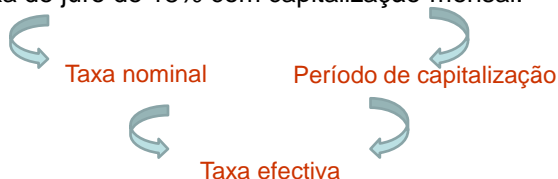
Universidade do Minho

⇒ Taxa de juro nominal e efectiva

Taxa Nominal: Taxa de Juro baseada no período anual

Taxa de Juro Efectiva: Juro que é de facto pago ou ganho num ano on noutro período qualquer

Exemplo: Taxa de juro de 18% com capitalização mensal.



22

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Taxa de juro nominal e efectiva

⇒ Capitalização:

Por exemplo, se o juro for vencido duas vezes num ano com uma taxa de juro de 6% em cada período de meio ano, a taxa pode ser expressa como 12% ao ano com capitalização semestral.



Taxa anual nominal = 12%
Taxa efectiva semestral = 6%

Exemplo: se um banco oferecer uma taxa de juro nominal de 12% ao ano para um depósito de 1000 €, teremos ao fim de 1 ano:

com capitalização anual $F = 1000 \times (1 + 0,12) = 1120 \text{ €}$
com capitalização semestral $F = 1000 \times (1 + 0,06)^2 = 1124 \text{ €}$

23

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ A utilização de taxas equivalentes torna os cálculos independentes do período de capitalização.

Por exemplo, se um banco oferecer uma taxa de juro efectiva de 12% ao ano para um depósito de 1000 €, teremos ao fim de 1 ano:

$$F = 1000 \times (1 + 0,12) = 1120 \text{ €}$$

A taxa efectiva semestral associada a esta conta poderia ser calculada por uma relação de equivalência:

$$1000 \times (1 + 0,12) = 1000 \times (1 + i_{\text{semestral}})^2 \Leftrightarrow i_{\text{semestral}} = 5,83\%$$

$$F = 1000 \times (1 + 0,0583)^2 = 1120 \text{ €}$$

É fundamental efectuar os cálculos de matemática financeira utilizando sempre as taxas de juro efectivas e não as anunciadas ou nominais.

24

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ A partir de uma taxa nominal é sempre possível calcular a taxa efectiva referente ao período de capitalização sabendo qual a periodicidade dessa capitalização.

⇒ **Relação de proporcionalidade:**

$$i_{ef} = i_n / m \quad , \text{ para o período de capitalização } m$$

⇒ Para converter uma taxa de juro efectiva referentes a um período numa taxa efectiva referente a um sub-período p , utilizaremos a **relação da equivalência**:

$$(1+i) = (1+i_p)^p \quad , \text{ onde } p \text{ é o número de sub-períodos dentro do período da taxa.}$$

25

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Considerando a taxa anual nominal de 18% com capitalização semestral, determine a taxa de juro mensal efectiva:

Pela relação de proporcionalidade teremos a taxa semestral efectiva:

$$i_s = 18\% / 2 = 9\%.$$

Pela relação de equivalência teremos a taxa mensal efectiva,

$$(1+0,09) = (1+i_m)^6 \quad i_m = 1,447\%$$

⇒ O Sr. Antunes colocou 1000 € num banco durante 5 anos à taxa anual nominal de 16%. Determine o valor acumulado com:

(a) Capitalização anual

$$F = 1000 \times (1+0,16)^5 = 2100,34 \text{ €}$$

26

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

(a) Capitalização mensal

$$i_{\text{mês}} = 16\% / 12 = 1,33\%$$

$$F = 1000 \times (1+0,0133)^{60} = 2209,44 \text{ €}$$

Ou

$$(1+0,0133)^{12} = (1+i_{\text{ano}}) \Leftrightarrow i_{\text{ano}} = 17,18\%$$

$$F = 1000 \times (1+0,1718)^5 = 2209,44 \text{ €}$$

27

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Taxa nominal => Taxa efectiva

❑ Passo 1: Identificar período de capitalização.

❑ Passo 2: Converter taxa nominal em efectiva para o período de capitalização.

❑ Passo 3: Converter taxa efectiva do período de capitalização para o período pretendido.

28

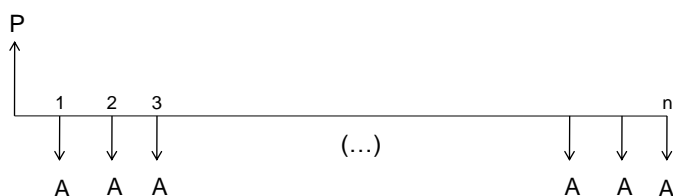
1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Pagamentos uniformes

⇒ Frequentemente os projectos/investimentos requerem pagamentos ou recebimentos uniformes, caracterizados por um valor A constante e pago no final de cada sub-período durante um período de tempo n .



29

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

$$P = A (1+i)^{-1} + A (1+i)^{-2} + A (1+i)^{-3} + \dots + A (1+i)^{-n}$$

$$P = A (1+i)^{-1} [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n+1}] \quad (X)$$

Multiplicando por $(1+i)^{-1}$:

$$P (1+i)^{-1} = A (1+i)^{-1} [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}] \quad (Y)$$

$(Y)-(X)$:

$$P [(1+i)^{-1}-1] = A (1+i)^{-1} [(1+i)^{-n}-1]$$

$$P = A \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} (1+i)^{-1} \Leftrightarrow P = A \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

30

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A F_{AP,i,n}$$

Factor da anuidade - valor presente

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P F_{PA,i,n}$$

Factor de recuperação do capital

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A F_{AF,i,n}$$

Factor da anuidade-valor futuro

31

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Qual o valor do investimento a realizar hoje num fundo que rende 10% ao ano, de modo a poder retirar 200 € no final de cada ano durante os próximos 4 anos, esgotando por completo o fundo no final desse período?

$$P = 200 \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1(1+0,1)^4} = 200 F_{AP,10\%,4} = 200 \times 3,170 = 634 \text{ €}$$

32

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ São feitos depósitos no valor de 110 € no final de cada ano num fundo de investimento que rende 8% ao ano. Quanto estará acumulado no fundo ao fim de 12 anos?

$$F = 110 \frac{(1+0,08)^{12}-1}{0,08} = 110 F_{AF,8\%,12} = 110 \times 18,977 = 2087,48 \text{ €}$$

33

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ **Perpetuidades**

⇒ Um projecto pode ter uma sequência infinita de recebimentos ou pagamentos.

⇒ O custo capitalizado representa o valor presente dos custos e benefícios uniformes de um projecto com tempo de vida infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/(1+i)^n}{i} = \frac{1}{i}$$

34

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Perpetuidades

⇒ Um projecto pode ter uma sequência infinita de recebimentos ou pagamentos.

⇒ O custo capitalizado representa o valor presente dos custos e benefícios uniformes de um projecto com tempo de vida infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/(1+i)^n}{i} = \frac{1}{i}$$

$$P_{\infty} = A \frac{1}{i}$$

35

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Uma fundação pretende criar um fundo de investimento que lhe permita distribuir anualmente 80000 € para um período de tempo infinito. Se a taxa de interesse do fundo for de 7,75% quanto deverá ser investido hoje?

$$P_{\infty} = 80000 \frac{1}{0,0775} = 1032258 \text{ €}$$

36

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

$$F = P (1+i)^n = P F_{PF,i,n}$$

$$P = F (1+i)^{-n} = P F_{FP,i,n}$$

$$A = P \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = P F_{PA,i,n}$$

$$P = A \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = P F_{AP,i,n}$$

$$F = A \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A F_{AF,i,n}$$

$$P_{\infty} = A \frac{1}{i}$$

Estas relações assumem que o valor presente (P) ocorre no princípio do período em análise, as anuidades (A) e o valor futuro (F) ocorrem no fim do período em análise.

Conhecidos os métodos de valorização do dinheiro no tempo é agora possível avaliar um projecto ou um conjunto de projectos.

37

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

Será preferível receber €140.000 de uma só vez ou receber prestações anuais de €24.000 durante 9 anos?

Depende da taxa de juro!

$$\text{Se } i = 10\% \quad P = 24000 F_{AP,10,9} = 138216 \text{ €}$$

$$\text{Se } i = 5\% \quad P = 24000 F_{AP,5,9} = 170588 \text{ €}$$

Qual a taxa de juro que torna indiferente a escolha?

$$i = 9,68\%$$

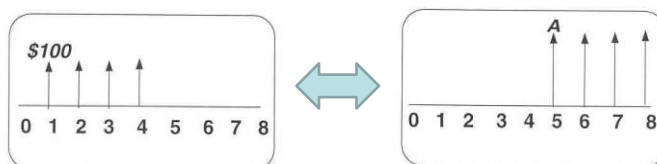
38

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Que valor de A tornaria os dois planos de pagamentos equivalentes, se $i = 10\%$?



39

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Considere um empréstimo de 20 000 € que deverá ser reembolsado em duas prestações iguais: uma daqui a 2 anos e outra daqui a 4 anos. Determine o valor a pagar considerando:

- a) Uma taxa de 6% ao ano
- b) Uma taxa de juro de 10% ao ano.

⇒ O Sr. António contraiu um empréstimo de 15.000€, num determinado banco, tendo que pagar uma prestação mensal constante de 219,13€. O banco anuncia uma taxa de juro anual efectiva de 6,17%. Determine o período de duração do empréstimo.

40

1. Conceitos básicos



Universidade do Minho

⇒ Suponha que pretende contrair um empréstimo de 80 000 € para adquirir uma casa. O pagamento será feito com base em mensalidades constantes, durante 10 anos. Assumindo uma taxa de juro de 6% ao ano com capitalização trimestral apresente:

- a) A taxa de juro efectiva (anual, trimestral e mensal).
- b) O pagamento mensal a efectuar.
- c) A tabela completa de amortização do empréstimo (pagamento, juro pago, capital em dívida no início e fim do período).