

| | | | | | |
|-----------------------------------|---|-----------------------------------|-----------------------------|------------------------|--------------|
| Wydział: WFiIS | Imię i nazwisko: 1. Bartłomiej Rzeszotarski | Rok: III (2014/2015) | Grupa: czwartkowa | Zespół: — | |
| MOFiT | Temat: Rozwiązanie numeryczne równania przewodnictwa cieplnego w 2D dla zadanych warunków początkowych i brzegowych - chłodzenie procesora | | | Nr ćwic. C18 | |
| Data wykonania: 06.2015 | Data oddania: 06.2015 | Zwrot do popr. | Data oddania | Data zalicz. | OCENA |

1 Wstęp

W projekcie rozważałem problem chłodzenia procesora w komputerze. Na procesor w kształcie kwadratu o boku L_1 nałożony jest kwadratowy radiator o boku $L_2 > L_1$. Założyłem, że temperatura radiatora w miejscu styku z procesorem jest równa temperaturze procesora T_p . Do rozwiązania problemu wykorzystałem równanie przewodnictwa cieplnego 2D w postaci:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

oraz na wszystkich krawędziach radiatora nałożyłem konwekcyjne warunki brzegowe:

$$h(T - T_0) = -D \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2)$$

gdzie T_0 to temperatura otoczenia, h jest współczynnikiem transmisji ciepła, natomiast $\frac{\partial T}{\partial n}$ jest pochodną liczoną w kierunku normalnym do krawędzi płyty.

2 Metoda symulacji

2.1 Schemat Cranka-Nicolsona

Do rozwiązania problemu wykorzystałem schemat Cranka-Nicolsona (**CN**), który oparty jest na metodach Eulera różnic wstecznych (*backward Euler*) i różnic do przodu (*forward Euler*), które w 1D można zapisać jako:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad - (forward Euler) \quad (3)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad - (backward Euler) \quad (4)$$

gdzie pochodną ciągłą zdyskretyzowanej funkcji w sposób $u_i^n = (i\Delta x, n\Delta t)$ jest:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

Aby otrzymać postać schematu CN wystarczy dodać do siebie równania [4] oraz [5], a następnie podzielić przez 2, co można zapisać jako:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad - (Crank-Nicolson) \quad (6)$$

Powyższy wzór [6] jest średnią arytmetyczną wartości funkcji w dwóch chwilach czasowych.

W oparciu o schemat Cranka-Nicolsona, można rozwiązać omawiany problem dyfuzji cieplnej (równanie [1]) dokonując dyskretyzacji zmiennych w funkcji T , takiej, że

$$T(x, y, t) \rightarrow T(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t), \quad (7)$$

a następnie zapisać wzory na pochodne cząstkowe funkcji temperatury w dwóch wymiarach:

$$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left((T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}) + (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{2(\Delta y)^2} \left((T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}) + (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n) \right), \quad (9)$$

gdzie lewa strona równania [1] przyjmuje postać:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (10)$$

Podstawiając równania [8],[9],[10] do równania dyfuzji [1] i porządkując zmienne względem chwili czasowej n otrzymujemy:

$$\mathfrak{T}^{n+1} = \mathfrak{T}^n \quad (11)$$

gdzie

$$\mathfrak{T}^{n+1} = T_{i,j}^{n+1}(1 + 2\alpha + 2\beta) - \alpha(T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}) - \beta(T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) \quad (12)$$

$$\mathfrak{T}^n = T_{i,j}^n(1 - 2\alpha - 2\beta) + \alpha(T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n) + \beta(T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n) \quad (13)$$

oraz

$$\alpha = \frac{D\Delta t}{2(\Delta x)^2}, \quad \beta = \frac{D\Delta t}{2(\Delta y)^2}. \quad (14)$$

Zastosowanie schematu CN prowadzi do układu równań algebraicznych, które da się przedstawić w postaci równania macierzowego:

$$\mathcal{A}x = \mathcal{B} \quad (15)$$

W rozważanym problemie macierz \mathcal{A} stanowi **zbiór współczynników** stojących przy $T_{*,*}^{n+1}$, wektor x zawiera **szukane** wartości temperatury $T_{i,j}^{n+1}$, a wektor \mathcal{B} zawiera temperatury **obliczone** w poprzedniej (n -tej) chwili w punktach (i,j) .

Warto zauważyć, że macierz

$$\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{(N_x \cdot N_y) \times (N_x \cdot N_y)}(\mathbb{R}) \quad (16)$$

natomiast wektor

$$\mathcal{B} \in \mathcal{V}_{(N_x \cdot N_y) \times 1}(\mathbb{R}) \quad (17)$$

dla równania dyfuzji 2D, gdzie N_x i N_y to ilość punktów na siatce obliczeniowej odpowiednio w kierunku x i y .

Pomijając warunki brzegowe i rozpatrując równanie [11] jako układ równań, macierz \mathcal{A} przyjmuje ogólną postać:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & -\beta & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \gamma & -\beta & \cdots & 0 & 0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & -\beta & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \gamma & -\beta & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & -\beta & \gamma & -\beta & \cdots & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & -\beta & \gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \gamma & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & -\beta & \gamma & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \cdots & 0 & 0 & -\beta & \gamma \end{bmatrix} \quad (18)$$

gdzie, zgodnie z oznaczeniami z równania [14]:

$$\gamma = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad (19)$$

Wektor \mathcal{B} w pierwszej iteracji wypełniony jest wartościami początkowymi (np. $24^\circ C$), a w kolejnych iteracjach jest modyfikowany zgodnie ze wzorem [13] korzystając z wektora odpowiedzi x w równaniu [15]. Postać wektora x jest następująca:

$$x = \left[\begin{array}{c} T_{1,1}^{n+1} \\ T_{1,2}^{n+1} \\ \vdots \\ T_{1,N_y-1}^{n+1} \\ \\ T_{2,1}^{n+1} \\ T_{2,2}^{n+1} \\ \vdots \\ T_{2,N_y-1}^{n+1} \\ \\ \vdots \\ T_{N_x-1,1}^{n+1} \\ T_{N_x-1,2}^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N_x-1,N_y-1}^{n+1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Pierwsza kolumna na} \\ \text{siatce punktów w 2D} \\ \text{(wzdłuż } x = 1 \cdot \Delta x) \\ \\ \text{Druga kolumna na} \\ \text{siatce punktów w 2D} \\ \text{(wzdłuż } x = 2 \cdot \Delta x) \\ \\ \text{Ostatnia kolumna na} \\ \text{siatce punktów w 2D} \\ \text{(wzdłuż } x = (N_x - 1) \cdot \Delta x) \end{array} \right. \quad (20)$$

Aby rozwiązać problem należy znaleźć macierz odwrotną \mathcal{A}^{-1} taką, że mnożąc prawostronnie równanie [15] otrzymujemy

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}, \quad (21)$$

a po uproszczeniu macierzy jednostkowej,

$$x = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}. \quad (22)$$

Powyższy sposób rozwiązania równania dyfuzji metodą CN został zaimplementowany przy pomocy pakietu obliczeniowego *Numerical Recipes*, który zawiera gotową bibliotekę *gaussj.c*, przeznaczoną do rozwiązywania równań typu [15] metodą Gaussa-Jordana.

2.2 Warunki brzegowe

Istotną częścią modelowania procesów fizycznych jest narzucanie warunków brzegowych. W rozważanym problemie dyfuzji termicznej są dwa warunki brzegowe.

2.2.1 Stała temperatura (procesora) wewnątrz kwadratu o długości L_1

W celu ustalenia stałej temperatury na obszarze $L_1 \times L_1$, należy:

1. wyzerować wszystkie elementy wiersza odpowiadającego punktowi $T_{i,j}^{n+1}$ (należącego do obszaru $L_1 \times L_1$) w macierzy \mathcal{A} , poza elementem, który określa $T_{i,j}^{n+1}$ i przyjmuje w macierzy wartość 1
2. wpisać do wektora \mathcal{B} wartość temperatury procesora w miejsce odpowiadające punktowi (i, j) należącemu do obszaru $L_1 \times L_1$

2.2.2 Konwekcyjne oddawanie ciepła przez radiator

Aby uwzględnić konwekcję w omawianym problemie należy zdyskretyzować równanie [2] zgodnie z [7]. Następnie korzystając z ilorazu różnicowego liczymy pochodną do wnętrza obszaru obliczeniowego dla każdego brzegu. Poniżej prezentuję rozwiązanie dla **prawej pionowej** krawędzi (pozostałe oblicza się analogicznie):

$$h(T_{i,j}^{n+1} - T_0) = -D \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \quad (23)$$

stąd

$$T_{i,j}^{n+1} \left(\frac{h\Delta x}{D} + 1 \right) - T_{i-1,j}^{n+1} = \frac{T_0 h \Delta x}{D} \quad (24)$$

Zatem wiersze w macierzy \mathcal{A} oraz elementy wektora \mathcal{B} odpowiadające krawędziom są modyfikowane według powyższego wzoru [24].

Sytuacja na rogach obszaru obliczeniowego wygląda podobnie, z tą różnicą, że liczymy pochodną do wewnątrz "po skosie", w wyniku czego dla **prawego górnego** rogu (pozostałe analogicznie) otrzymujemy:

$$T_{i,j}^{n+1} \left(\frac{h\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{D} + 1 \right) - T_{i-1,j-1}^{n+1} = \frac{1}{D} T_0 h \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (25)$$

i jak poprzednio modyfikujemy odpowiednie wiersze macierzy \mathcal{A} i elementy wektora \mathcal{B} .

2.2.3 Podsumowanie metody

Schemat Cranka-Nicolsona¹:

- (+) jest bezwzględnie stabilny
- (+) ma dokładność $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta h^2)$, gdzie $h \equiv \Delta x = \Delta y$
- (-) wymaga wykonania o wiele więcej operacji na jeden krok czasowy, niż jest nieznanymi zmiennymi

¹Znaleziono na: http://www.cems.uvm.edu/~tlakoba/math337/notes_15.pdf

3 Wyniki symulacji

Poniżej prezentuję wyniki wywołania programu [link] dla parametrów:

Bok kwadratowego procesora: $L1 = 3.75$ cm

Bok kwadratowego radiatora: $L2 = 12.5$ cm

Współczynnik przewodnictwa cieplnego: $D = 0.6$

Czas symulacji: $T = 30$ s

Temperatura procesora: $Temp = 100$ °C

Temperatura otoczenia: $TempAir = 18$ °C

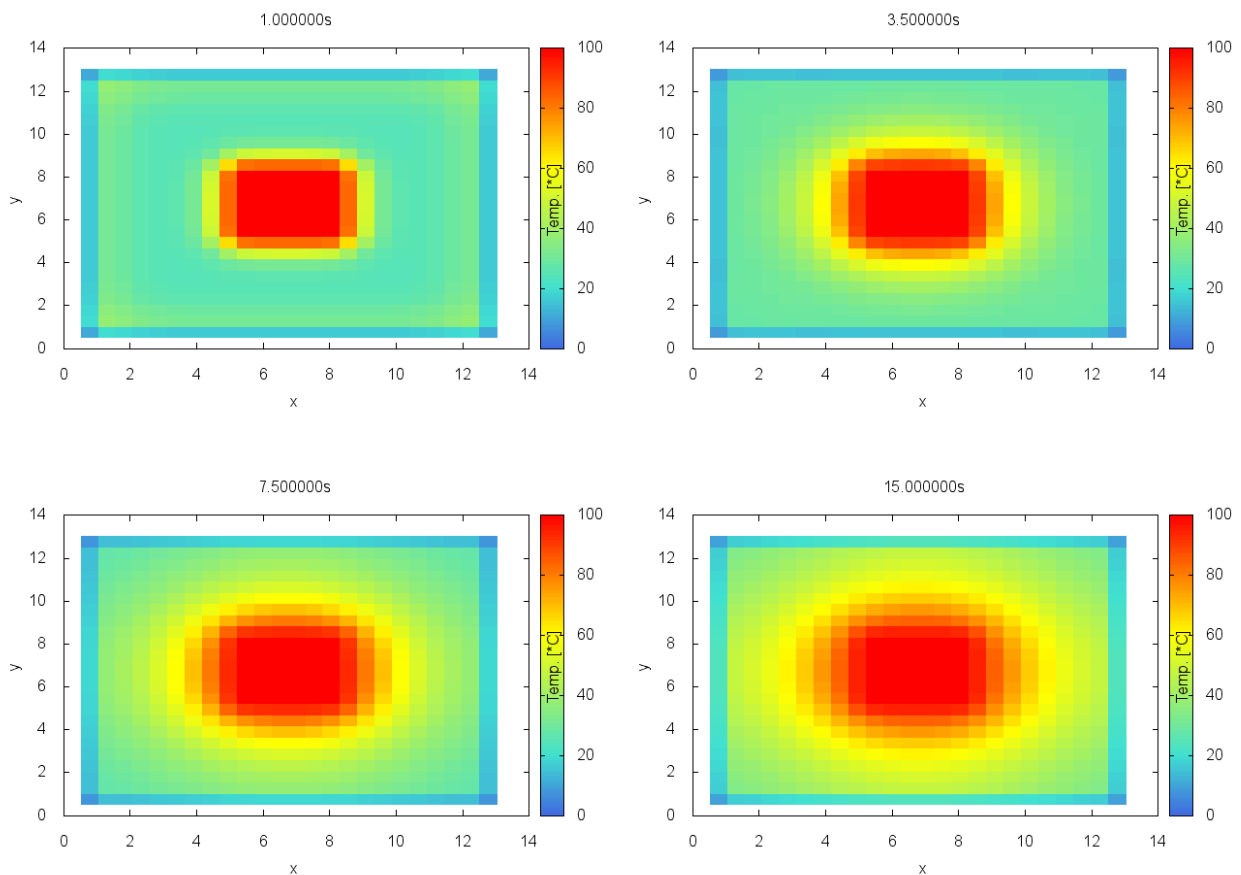
Współczynnik konwekcyjnej transmisji ciepła: $h = 0.1$

Ilość kroków czasowych: $Nt = 60$

Ilość punktów siatki w kierunku x: $Nx = 25$

Ilość punktów siatki w kierunku y: $Ny = 25$

i stanowią one bazowe wartości w dalszej części opracowania wyników.

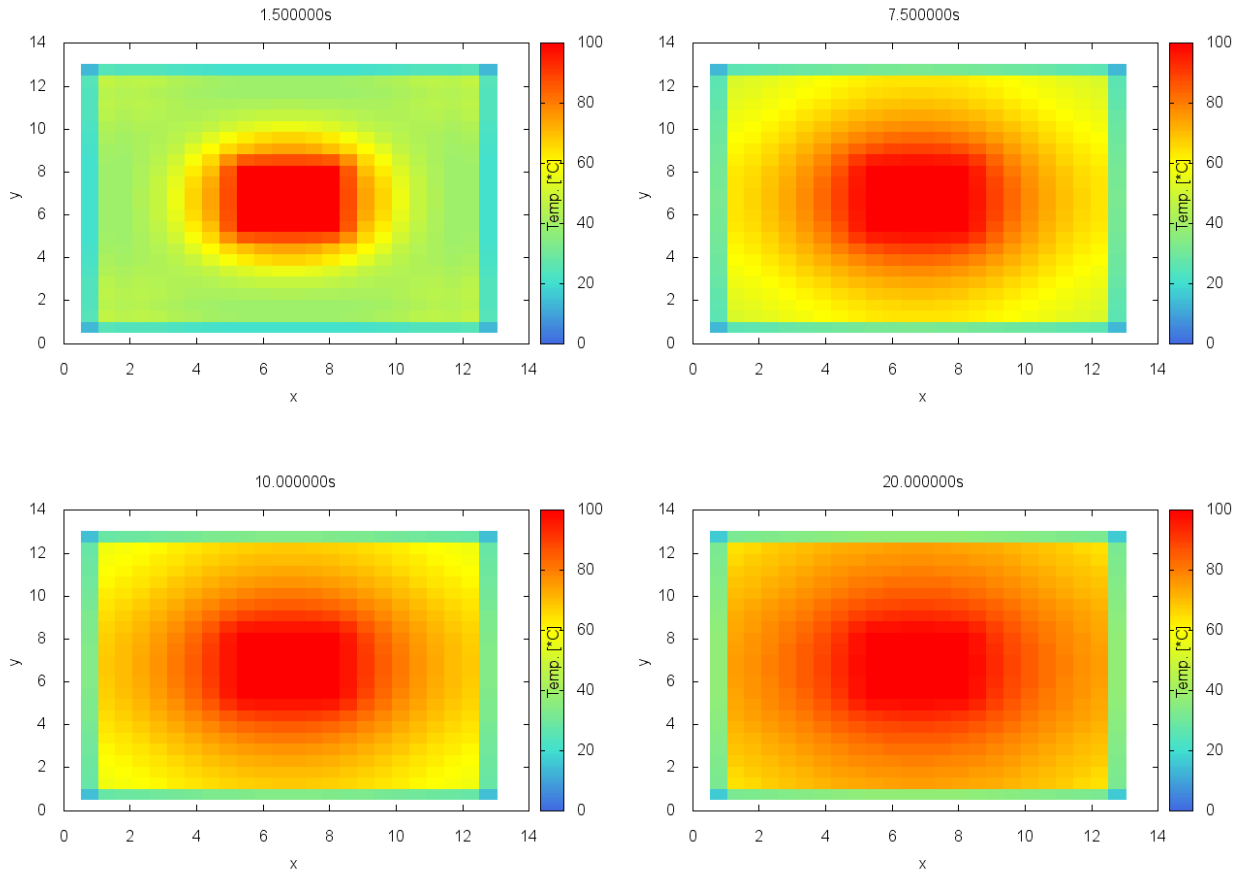


Rysunek 1: Rozkłady temperatury na radiatorze w losowo wybranych chwilach czasowych. [link do pełnej animacji GIF]

W celu przetestowania programu rozpatrzyłem dodatkowo dwa skrajne przypadki:

3.1 Duży współczynnik przewodnictwa ciepłego

Zwiększając współczynnik przewodnictwa ciepłego trzykrotnie ($D = 1.8$) cała powierzchnia radiatora szybko się nagrzewa. Odprowadzanie ciepła przez brzegi jest o wiele wolniejsze niż ogrzewanie, dlatego po pewnym czasie temperatura radiatora będzie równa temperaturze procesora na całej powierzchni.

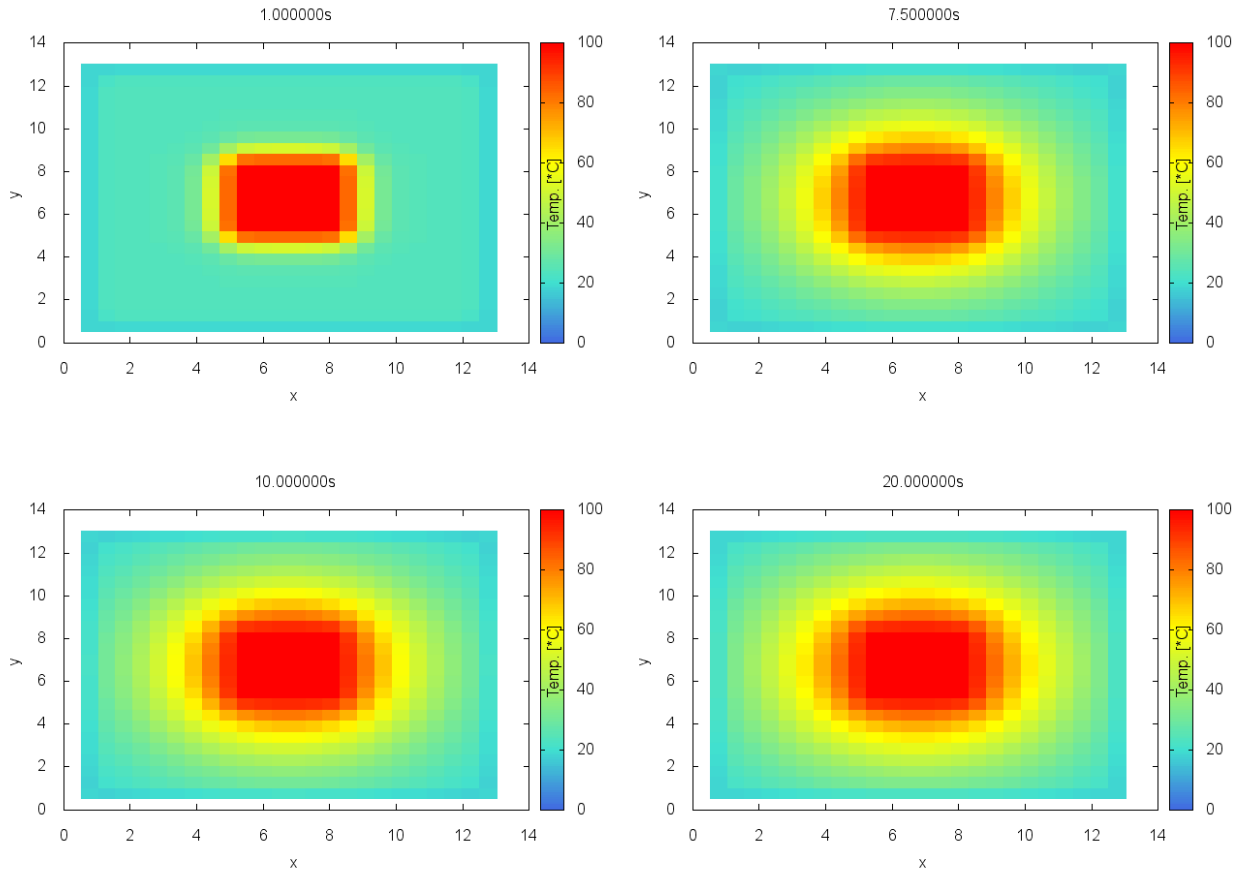


Rysunek 2: Rozkłady temperatury na radiatorze o współczynniku przewodnictwa ciepłego $D = 1.8$ w losowo wybranych chwilach czasowych. [link do pełnej animacji GIF]

Ponadto im większy jest radiator tym lepiej chłodzi, ponieważ długość brzegów wzrasta, a co za tym idzie, więcej ciepła jest odprowadzonego do otoczenia. Utrzymywanie radiatora w niższej temperaturze otoczenia powoduje szybsze ochładzanie.

3.2 Duży współczynnik konwekcyjnej transmisji ciepła

Zwiększając współczynnik konwekcyjnej transmisji ciepła dziesięciokrotnie ($h = 1$) zwiększa się prędkość odprowadzania ciepła przez brzegi. Ogrzewanie radiatora jest wtedy wolniejsze od ochładzania i po pewnym czasie ustali się niejednorodny rozkład temperatury na powierzchni radiatora (układ dojdzie do stanu równowagi).



Rysunek 3: Rozkłady temperatury na radiatorze ze zwiększonym współczynnikiem konwekcyjnej transmisji ciepła $h = 1$ w losowo wybranych chwilach czasowych. [link do pełnej animacji GIF]

4 Wnioski

Zaprezentowane przeze mnie wyniki zgadzają się z teorią dyfuzji cieplnej (o rozchodzeniu się ciepła), niestety ze względu na zbyt skomplikowane rachunki rozwiązania analitycznego nie jestem w stanie ściśle zaprezentować zgodności symulacji z teorią.

Rozwiązanie równania dyfuzji 2D z tak określonymi warunkami brzegowymi jest o wiele prostsze do rozwiązania wykorzystując metody numeryczne niż analitycznie. Problem sprowadza się do ułożenia odpowiedniego układu równań, zapisaniu go w postaci równania macierzowego, i rozwiązania. Wadą tej metody jest jedynie czas obliczeń, ponieważ na jeden krok czasowy wykonywanych jest więcej operacji niż liczba niewiadomych. Zwiększanie ilości punktów na siatce obliczeniowej powoduje znaczne wydłużenie symulacji. Dzięki bezwzględnej stabilności schematu Cranka-Nicolsona nie ma ograniczenia na stosunek $\Delta t / \Delta h$ więc możemy symulować dowolny układ z dowolną "ziarnistością" siatki i czasu bez obaw o błędny wynik.