Zadanie 8 – Kacper Drużdżel

Splajn kubiczny oraz Interpolacja Lagrange'a

Zadanie numeryczne

8. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \tag{1}$$

w punktach $-1, -1+\frac{1}{32}, -1+\frac{2}{32}, ..., 1-\frac{1}{32}, 1$ a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz naturalny splajn kubiczny oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (1) w tych węzłach. Narysować wykresy wielomianu interpolacyjnego oraz splajnu kubicznego.

Na początku w podanych punktach badamy wartości funkcji, żeby otrzymać wektory, które posłużą za tabelkę.

(kolejno dla 64,16,8 punktów)

Wielomian Interpolacyjny uzyskuję poprzez wyznaczenie jego współczynników a0,a1,a2...an, następnie, przy pomocy programu gnuplot rysuję wykresy wielomianów.

UWAGA!

Aby uniknąć dzielenia przez 0 w interpolacji, został usunięty punkt w x=0.

Dla 64 punktów interpolacja ma wielomian 63 stopnia, którego bardzo trudno dopasować, aby przechodził przez wyznaczone punkty, dlatego pasuje on tylko na małym przedziale.

SPLAJN KUBICZNY

Możemy zauważyć, że nasze punkty są oddalone od siebie o równą odległość, dlatego ksi wyliczamy:

Jeżeli węzły interpolacji są równoodległe, $x_{j+1} - x_j = h$, równanie (23) przybiera szczególnie prostą postać:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{n-2} \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} f_1 - 2f_2 + f_3 \\ f_2 - 2f_3 + f_4 \\ f_3 - 2f_4 + f_5 \\ \vdots \\ f_{n-3} - 2f_{n-2} + f_{n-1} \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

Mając ksi, na każdym przedziale tworzymy wielomian trzeciego stopnia opisanego wzorem:

W każdym przedziale $[x_j, x_{j+1}], j = 1, 2, \ldots, n-1$, konstruujemy wielomian trzeciego stopnia

$$y_j(x) = A\,f_j + B\,f_{j+1} + C\,\xi_j + D\,\xi_{j+1}\,, \tag{21a}$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \qquad B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \tag{21b}$$

$$C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2, \qquad D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2. \tag{21c}$$

Na każdym przedziale bierzemy x z przedziału (w programie jest to środek pomiędzy dwoma punktami) i obliczamy yj(x).