Kacper Drużdżel – Zadanie numeryczne 7

Algorytm: metoda Romberga

Korzystając z informacji zawartych w wykładzie 8:

Spodziewamy się[†], że

$$\lim_{k\to\infty} A_{0,k} = I\,. \tag{21}$$

Definiujemy teraz[‡]

$$A_{n,k} = \frac{1}{4^n - 1}\left(4^n A_{n-1,k+1} - A_{n-1,k}\right). \tag{22}$$

A więc obliczamy kolejne elementy tak jak na poniższym rysunku:

Schemat obliczania elementów $A_{n,k}$ najłatwiej zilustrować za pomocą tabeli:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_{0,0} & & & & & & & & & & \\
A_{0,1} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{1,0} & & & & & & & & \\
A_{0,2} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{1,1} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{2,0} & & & & & & \\
A_{0,3} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{1,2} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{2,1} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{3,0} & & & & \\
A_{0,4} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{1,3} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{2,2} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{3,1} & \overset{\searrow}{\rightarrow} & A_{4,0} & & \\
\dots & \overset{\searrow}{\rightarrow} & \dots & \overset{\searrow}{\rightarrow} & \dots & \overset{\searrow}{\rightarrow} & \dots & \overset{\searrow}{\rightarrow} & \dots & \overset{\searrow}{\rightarrow} & \dots
\end{array} \tag{23}$$

Strzałki wskazują, które już policzone elementy są potrzebne do obliczenia kolejnego. W praktycznych zastosowaniach nie trzeba zapamietywać całej tablicy (23), a tylko jej ostatnio obliczony wiersz (a nawet mniej).

Poniżej algorytm działania:

Praktyczny schemat stosowania ekstrapolacji Richardsona wygląda tak: Przypuśćmy, iż wypełniliśmy już wiersz tabeli (23) zaczynający się od elementu A_{0k}, odpowiadającemu złożonej metodzie trapezów z 2^k podprzedziałami. Naszym aktualnym przybliżeniem całki jest element A_{k0}. Teraz

- Obliczamy $A_{0,k+1}$ poprzez zastosowanie złożonej metody trapezów z 2^{k+1} podprzedziałami;
- Zapełniamy cały wiersz korzystając ze wzoru (22).

Procedurę kończymy, gdy elementy A_{k0} i $A_{k+1,0}$ różnią się o mniej niż zadana toleracja (lub gdy przekroczymy pewną graniczną ilość iteracji; to ostatnie sygnalizuje, że metoda nie jest zbieżna). W ten sposób można uzyskać taką dokładność całki, jaką wprost ze złożonego wzoru trapezów uzyskalibyśmy dopiero przy znacznie gęstszym podziale.

Trzeba również zauważyć:

Należy obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx \tag{30}$$

z dokładnością do 10^{-7}. Zauważmy, że funkcja podcałkowa jest niewiększa od e^{-x} oraz że

$$\int\limits_{17}^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-17} \simeq 0.414 \cdot 10^{-7}$$

wobec czego wystarczy obliczyć całkę z funkcji jak we wzorze (30) po przedziale skończonym $[0, 17]$ z dokładnością nie mniejszą niż $0.586 \cdot 10^{-7}$.

(liczba pi, która jest w zadaniu znajduje się w sinusie, a wiemy ze sinus przyjmuje wartości od -1 do 1, więc to nie zmieni funkcji, którą ograniczamy całkę.)

Uruchomienie:

g++ -o zad7 zad7.cpp

następnie

./zad7