Kacper Drużdżel – zadanie numeryczne 1

Algorytm użyty do rozwiązania: Algorytm Thomasa dla macierzy trójprzekątniowych

$$a_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$c_n = 0$$

Wtedy układ można zapisać w następujący sposób:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$a_1 = 0,\ \ c_n = 0$$

Rozwiązania tego układu poszukuje się w postaciach:

$$x_i = \beta_i\, x_{i+1} + \gamma_i$$

β_i, γ_i – nieznane współczynniki

Po podstawieniu do głównego wzoru:

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

Czyli:

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \qquad \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

Dla i=1 mamy następujące przekształcenia:

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}$$

Czyli otrzymujemy:

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} \;, \qquad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

Równocześnie sprawdzamy przypadek i=n, gdzie n to ostatni element:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$$

Po podstawieniu:

$$a_n \left(\beta_{n-1} x_n + \gamma_{n-1} \right) + b_n x_n = d_n$$

Czyli ostatecznie:

$$x_n = \frac{d_n - a_n \gamma_{n-1}}{a_n \beta_{n-1} + b_n} = \gamma_n$$

Po wyznaczeniu wartości Xn, kolejne niewiadome obliczamy dla i = n-1,n-2,…,1.

Złożoność czasowa: w algorytmie występuje pętla for która wykonuje się n razy, dla przypisywania wartości oraz obliczania, dlatego złożoność algorytmu wynosi O(n).

Rozwiązanie znajduje się w załączonym pliku zad1.cpp

Aby uruchomić zadanie należy je skompilować:

g++ -o zad1 zad1.cpp

oraz uruchomić:

./zad1

Wynik:

Jest to macierz x, gdzie wyświetlane wyniki (od góry) to x1,x2,x3…x7