

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент гр. 3530904/10005

Полуэктон Я.А.

Руководитель /
преподаватель

Воскобойников С.П.

Санкт-Петербург

2023

Постановка задачи

ВАРИАНТ N 7

Семейство линейных систем, представленных в виде расширенной матрицы зависит от параметра p :

$$\begin{pmatrix} p+13 & 2 & 8 & -7 & 7 & 5 & -7 & -7 & 4p+6 \\ 7 & 2 & -4 & 2 & 3 & 3 & -1 & -2 & 36 \\ -7 & 2 & 1 & 3 & 6 & -6 & -3 & -4 & -25 \\ -2 & -8 & -6 & -1 & 6 & 2 & 1 & -4 & -57 \\ 0 & 4 & -7 & 1 & 22 & 0 & -6 & -6 & 32 \\ 0 & -3 & -6 & 6 & 4 & 13 & 0 & 6 & 62 \\ -8 & -6 & -4 & 7 & -5 & -5 & -2 & 1 & -71 \\ 5 & 5 & -2 & -2 & -3 & 0 & -7 & 14 & 70 \end{pmatrix}$$

Решить линейные системы, используя программы DECOMP и SOLVE, при $p = 1.0, 0.1, 0.01, 0.0001, 0.000001$. Сравнить решение системы $Ax_1 = b$ с решением системы $A^T A x_2 = A^T b$, полученной из исходной, левой трансформацией Гаусса.

Проанализировать связь числа обусловленности cond и величины $\delta = \|x_1 - x_2\| / \|x_1\|$.

Код программы (Python)

```
import numpy as np
from prettytable import PrettyTable
from scipy.linalg import solve
from numpy.linalg import cond, norm

def get_matrix_A(p):
    return np.array([
        [p + 13, 2, 8, -7, 7, 5, -7, -7],
        [7, 2, -4, 2, 3, 3, -1, -2],
        [-7, 2, 1, 3, 6, -6, -3, -4],
        [-2, -8, -6, -1, 6, 2, 1, -4],
        [0, 4, -7, 1, 22, 0, -6, -6],
        [0, -3, -6, 6, 4, 13, 0, 6],
        [-8, -6, -4, 7, -5, -5, -2, 1],
        [5, 5, -2, -2, -3, 0, -7, 14]
    ])

def get_vector_b(p):
    return np.vstack((np.array([4 * p + 6, 36, -25, -57, 32, 62, -71, 70])))

def print_answer(x_1, x_2):
    # два решения и разницу между ними
    pt = PrettyTable()
    pt.add_column('x', [f'x_{i + 1}' for i in range(0, len(x_1))])
    pt.add_column('x_1', [x[0] for x in x_1])
    pt.add_column('x_2', [x[0] for x in x_2])
    pt.add_column('delta', [x[0] for x in x_1 - x_2])
    print(pt)

def main():
    for p in [1.0, 0.1, 0.01, 0.0001, 0.000001]:
        print(f'p={p}')

        # Получение матрицы A
        matrix_A = get_matrix_A(p)
        # Получение вектора b
        vector_b = get_vector_b(p)
```

```

# Получение транспонированной матрицы A
matrix_A_transpose = matrix_A.transpose()
# Получение матрицы A_trans * A
matrix_A_transpose_A = matrix_A_transpose.dot(matrix_A)
# Получение вектора A_trans * b
vector_A_ransponse_b = matrix_A_transpose.dot(vector_b)
# Решение уравнения Ax=b
result = solve(matrix_A, vector_b)

# Решение уравнения A_t * A * x = A_t * b
result_transform = solve(matrix_A_transpose_A, vector_A_ransponse_b)

# Выводим обусловленность матриц
print(f'Обусловленность матрицы A: {cond(matrix_A, p="fro")} '
      f'A_T * A: {cond(matrix_A_transpose_A, p="fro")}')

# Выводим вектора ответа и дельту
print_answer(result, result_transform)
print(f'||x_1-x_2||/||x_1||='
      f'{ norm(result - result_transform, ord="fro") / norm(result, ord="fro")}')
print('=' * 80)

if __name__ == '__main__':
    main()

```

Результат работы программы:

```
p=1.0
Обусловленность матрицы A: 4411.737349169929 A_T * A: 9938164.80096063
+-----+-----+-----+-----+
| x | x_1 | x_2 | delta |
+-----+-----+-----+-----+
| x_1 | 3.99999999999699 | 4.0000000004126735 | -4.1297454345112783e-10 |
| x_2 | 5.000000000000294 | 4.999999999595366 | 4.049276469686447e-10 |
| x_3 | 1.999999999997073 | 2.000000000401331 | -4.0162362324736023e-10 |
| x_4 | 3.999999999996967 | 4.000000000416102 | -4.1640513259721956e-10 |
| x_5 | 3.99999999999693 | 4.000000000419202 | -4.195084279956518e-10 |
| x_6 | 1.000000000000031 | 0.9999999995746419 | 4.2566805635857463e-10 |
| x_7 | 4.99999999999676 | 5.00000000044269 | -4.4301451396222546e-10 |
| x_8 | 5.99999999999689 | 6.000000000424925 | -4.2523584653508806e-10 |
+-----+-----+-----+-----+
||x_1-x_2|/||x_1||=1.0048361984502123e-10

p=0.1
Обусловленность матрицы A: 43332.91117967904 A_T * A: 957251097.4557182
+-----+-----+-----+-----+
| x | x_1 | x_2 | delta |
+-----+-----+-----+-----+
| x_1 | 3.999999999947153 | 3.9999999985648476 | 1.4298677797341952e-09 |
| x_2 | 5.000000000005276 | 5.0000000014323565 | -1.4270806758531762e-09 |
| x_3 | 1.999999999947269 | 1.9999999985687875 | 1.4259393665838616e-09 |
| x_4 | 3.999999999947113 | 3.9999999985636525 | 1.431058826995013e-09 |
| x_5 | 3.999999999947047 | 3.9999999985625756 | 1.4321290819907517e-09 |
| x_6 | 1.0000000000053009 | 1.0000000014395611 | -1.4342602661088222e-09 |
| x_7 | 4.99999999994675 | 4.999999998554409 | 1.4402665726720443e-09 |
| x_8 | 5.99999999994698 | 5.999999998560586 | 1.4341114962235224e-09 |
+-----+-----+-----+-----+
||x_1-x_2|/||x_1||=3.4350555658028057e-10

p=0.01
Обусловленность матрицы A: 432572.4720976741 A_T * A: 95377321981.29514
+-----+-----+-----+-----+
| x | x_1 | x_2 | delta |
+-----+-----+-----+-----+
| x_1 | 3.999999999941453 | 4.000004562651501 | -4.5627100480061245e-06 |
| x_2 | 5.000000000058534 | 4.999995438237983 | 4.561820550641471e-06 |
| x_3 | 1.999999999941474 | 2.000004561397025 | -4.56145555105536e-06 |
| x_4 | 3.9999999999414504 | 4.000004563030656 | -4.563089206044424e-06 |
| x_5 | 3.9999999999414473 | 4.000004563372934 | -4.563431486470648e-06 |
| x_6 | 1.0000000000585636 | 0.9999954359461952 | 4.56411236837706e-06 |
| x_7 | 4.999999999941412 | 5.0000045659701176 | -4.566028705355052e-06 |
| x_8 | 5.999999999941438 | 6.000004564005542 | -4.564064104428667e-06 |
+-----+-----+-----+-----+
||x_1-x_2|/||x_1||=1.0947635909773442e-06
```

p=0.0001

Обусловленность матрицы A: 43248955.198708095 A_T * A: 955229209129907.2

x	x_1	x_2	delta
x_1	4.00000000528794	4.017130570147454	-0.017130564859513697
x_2	4.999999994712064	4.982869463248577	0.01713053146348642
x_3	2.0000000052879336	2.017130523047698	-0.017130517759764263
x_4	4.000000005287947	4.017130584382917	-0.017130579094970066
x_5	4.000000005287954	4.017130597233607	-0.01713059194565325
x_6	0.9999999947120403	0.9828693772028456	0.017130617509194646
x_7	5.000000005287983	5.0171306947454335	-0.01713068945745011
x_8	6.000000005287961	6.017130620985011	-0.017130615697049656

$\|x_1 - x_2\| / \|x_1\| = 0.004109697680231119$

p=1e-06

Обусловленность матрицы A: 4324886732.217479 A_T * A: 1.1152369574779467e+17

x	x_1	x_2	delta
x_1	3.999999678946132	4.499999985161743	-0.5000003062156111
x_2	5.000000321053862	4.500000024585752	0.5000002964681096
x_3	1.9999996789461403	2.4999999714144616	-0.5000002924683213
x_4	3.999999678946129	4.49999998931673	-0.5000003103706008
x_5	3.999999678946125	4.499999993067539	-0.5000003141214142
x_6	1.0000003210538777	0.499999999471079	0.5000003215827987
x_7	4.999999678946106	5.500000021528888	-0.5000003425827817
x_8	5.999999678946121	6.5	-0.5000003210538786

$\|x_1 - x_2\| / \|x_1\| = 0.1199521091607842$

Вывод

В ходе работы я ознакомился с аналогом подпрограммы SOLVE, поработал с функциями для вычисления нормы матрицы и обусловленности. По результатам работы видно, что δ зависит от обусловленности матрицы A . Левую трансформацию Гаусса можно использовать при решении систем линейных уравнений, однако она увеличивает число обусловленности, но может быть полезна, когда при малом значении ρ решение метода SOLVE невозможно.