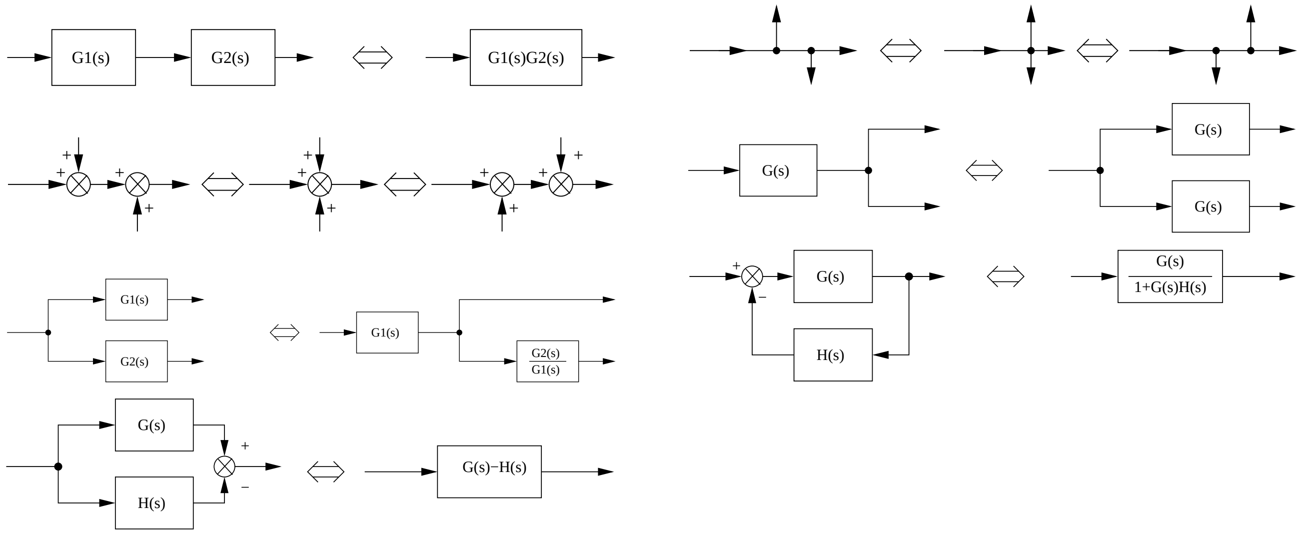
Formulario de *Automatización y Control Industrial*

Alberto F. Hamilton Castro
Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática y ATC*

Modelado Sistemas Continuos

- Desarrollo de Tailor de una variable: $f(x) \cong f(\overline{x}) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{\overline{x}} (x-\overline{x})$ $\qquad E = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{\overline{x}} \frac{(x-\overline{x})^2}{2}$
- Desarrollo de Tailor de dos variables:
$$f(x_1,x_2) \cong f(\overline{x_1},\overline{x_2}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\overline{x_1},\overline{x_2}} (x_1-\overline{x_1}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\overline{x_1},\overline{x_2}} (x_2-\overline{x_2})$$
$$E = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)_{\overline{x_1},\overline{x_2}} \frac{(x_1-\overline{x_1})^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)_{\overline{x_1},\overline{x_2}} \frac{(x_2-\overline{x_2})^2}{2}$$
- Números complejos: $s = \sigma + \omega j = \rho e^{\theta j} = |s|\, e^{\angle sj}$; $e^{\theta j} = \cos(\theta) + j\operatorname{sen}(\theta)$; $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$; $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$;
- Si $s = -\sigma + \omega j = -\omega_n\delta + \omega_n\sqrt{1-\delta^2}j$ $\quad \sigma = \omega_n\delta \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \quad \omega_n = \rho \quad \delta = \cos(\alpha) = \cos(\pi-\theta)$
- Transformada de Laplace $\quad f(t) \xrightarrow{\mathfrak{L}} F(s) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
  - Propiedades: ver página 4.
  - Tabla de transformadas: ver página 4.
- Obtención de los residuos:
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\prod_{j=1}^r (s-p_j)^{n_j}} = b_n + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_j} \frac{c_{jk}}{(s-p_j)^k}$$
$$c_{jk} = \frac{1}{(n_j-k)!}\frac{d^{n_j-k}}{ds^{n_j-k}}\left[(s-p_j)^{n_j}F(s)\right]_{s=p_j}$$
- Aproximación de Padé de primer orden:
$$e^{-t_m s} \approx \frac{1-\left(\frac{t_m}{2}\right)s}{1-\left(\frac{t_m}{2}\right)s} = \frac{2-t_m s}{2+t_m s}$$
- Simplificación diagramas de bloques:



*Id: Formulario.lyx,v 11.9 2016/11/16 12:16:32 alberto Exp

Análisis de sistemas continuos

Respuesta Temporal

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[G(s)U(s)\right]$$

- Sistema de primer orden: $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$ respuesta a escalón $y(t) = KR(1 - e^{-t/T})$
- Sistema de segundo orden: $G(s) = \frac{K}{1+\frac{2\delta}{\omega_n}s+(\frac{s}{\omega_n})^2}$ polos $p = -\sigma \pm \omega j = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$
- Parámetros de la respuesta temporal:
  - tiempo de subida: $t_s = \frac{\pi - \arccos(\delta)}{\omega}$ tiempo de retraso: $t_r \simeq \frac{1+0.6\delta+0.15\delta^2}{\omega_n}$
  - tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega}$ magnitud del pico: $M_p(\%) = 100\exp(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}})$
  - tiempo de establecimiento: $t_e(5\%) \simeq \frac{3}{\sigma}$ $t_e(2\%) \simeq \frac{4}{\sigma}$ $t_e(1\%) \simeq \frac{5}{\sigma}$

Respuesta Permanante

- Error relativo en régimen permanente
  - Error de posición: entrada escalón $e_{rrp} = \frac{1}{1+K_p}$ donde $K_p = \lim_{s\to 0} FTLA(s)$
  - Error de velocidad: entrada rampa $e_{rrp} = \frac{1}{K_v}$ donde $K_v = \lim_{s\to 0} sFTLA(s)$
  - Error de aceleración: entrada parábola $e_{rrp} = \frac{1}{K_a}$ donde $K_a = \lim_{s\to 0} s^2FTLA(s)$

	Entrada escalón		Entrada rampa		Entrada parábola	
tipo	K_p	e_{rrp}	K_v	e_{rrp}	K_a	e_{rrp}
0	K	$\frac{1}{1+K}$	0	∞	0	∞
1	∞	0	K	$\frac{1}{K}$	0	∞
2	∞	0	∞	0	K	$\frac{1}{K}$

Respuesta Frecuencial

Fórmula	Amplitud (db)	Desfase (grados)
$G(s) = K$	$20\ \log\lvert K\rvert$	$\begin{cases} 0 & K > 0 \\ -180 & k < 0 \end{cases}$
$G(s) = s^{\mp t}$	$\mp 20t\ \log\omega$	$\mp 90t$
$G(s) = (1+Ts)^{\mp 1}$ $\omega_c = 1/T$	$\mp 20\log\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}$ $\omega = \omega_c \quad \mp 3$ aprox. $\begin{cases} \omega \le \omega_c & 0 \\ \omega \ge \omega_c & \mp 20\log(\omega/\omega_c) \end{cases}$	$\mp arctg(\omega/\omega_c)$ aprox. $\begin{cases} \omega \le \omega_c/10 & 0 \\ \omega_c/10 \le \omega \le 10\omega_c & \mp 45log(10\omega/\omega_c) \\ \omega \ge 10\omega_c & \mp 90 \end{cases}$
$G(s) = [1+\frac{2\delta}{\omega_n}s+(\frac{s}{\omega_n})^2]^{\mp 1}$	$\mp 20\log\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+(\frac{2\delta\omega}{\omega_n})^2}$ $\omega = \omega_n \quad \mp 20\log(2\delta)$ aprox. $\begin{cases} \omega \le \omega_n & 0 \\ \omega \ge \omega_n & \mp 40\log(\omega/\omega_n) \end{cases}$	$\mp \arctan(\frac{2\delta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2})$ aprox. $\begin{cases} \omega \le \omega_n/10 & 0 \\ \omega_n/10 \le \omega \le 10\omega_n & \mp 90log(10\omega/\omega_n) \\ \omega \ge 10\omega_n & \mp 180 \end{cases}$
$G(s) = e^{-t_m s}$	0	$-57,3t_m\omega$

- Frecuencia de resonancia (si $\delta \le 0.707$): $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$
- Pico de resonancia (si $\delta \le 0.707$): $M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
- Ancho de banda: $\omega_B = \omega_n\sqrt{(1-2\delta^2)+\sqrt{(1-2\delta^2)^2+1}}$

Estabilidad

Tabla de Routh: $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^1 & y_1 & & & \\
s^0 & z_1 & & &
\end{array}$$

$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ $\qquad$ $b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ $\qquad$ $c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1}$

Lugar de la raices:

- angulo de las asíntotas: $\theta_l = (2l+1)\pi/(n-m)$ con $l = 0, 1, \ldots |n-m| - 1$
- corte asintotas con eje real: $\sigma = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)/(n-m)$
- puntos de ruptura cumplen: $\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0$

Controlador PID

- Control P: $u(t) = K_p e(t)$ $\qquad$ $C(s) = K_p$
- Control PI: $u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt\right]$ $\qquad$ $C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$
- Control PID: $u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$ $\qquad$ $C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$
- PID en cascada: $C(s) = K'_p\left(\frac{T'_i s+1}{T'_i s}\right)(T'_d s + 1)$
- PID Acción derivativa modificada: $0,04 < \alpha < 0,2$ $\qquad$ $C(s) = K'_p\left(\frac{T'_i s+1}{T'_i s}\right)\left(\frac{T'_d s+1}{\alpha T'_d s+1}\right)$

Tabla de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	impulso unitiario $\delta(t)$	1
2	escalón unitario $\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$t^n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at}sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}sen(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}sen(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t - \alpha)$ $donde \quad \alpha = tan^{-1}(\sqrt{1-\delta^2}/\delta)$	$\frac{s}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}sen(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t - \alpha)$ $donde \quad \alpha = tan^{-1}(\sqrt{1-\delta^2}/\delta)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$

Propiedades de la Transformada de Laplace

1	$\mathfrak{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha\mathfrak{L}\left[f(t)\right] + \beta\left[g(t)\right]$
2	$\mathfrak{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$
3	$\mathfrak{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0^+) - \frac{df}{dt}(0^+)$
4	$\mathfrak{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{j=1}^{n}\left(s^{n-j}\frac{d^{j-1}f}{dt^{j-1}}(0^+)\right)$
6	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
5	$\mathfrak{L}\left[f(t-t_m)\mathbb{1}(t-t_m)\right] = e^{-st_m}F(s)$