

알고리즘 게임

최백준 choi@startlink.io

조합 게임

조합 게임

Combinatorial Game

3

조합 게임

1. 두 사람이 턴을 번갈아가면서 게임을 한다
2. 완벽한 정보를 가지고 있다
3. 더 이상 움직일 수 없으면 이기는 경우 또는 지는 경우이다
4. 게임을 어떻게 플레이해도 게임이 끝난다.

조합 게임

Combinatorial Game

- 게임은 보통 위치로 이루어져 있으며
- 턴을 번갈아가면서 게임을 진행한다

조합 게임

Combinatorial Game

- Impartial Game (공정한 게임)
- 위치에 상관없이 두 사람이 선택할 수 있는 방법이 같다
- Partizan Game (편파적인 게임)
- 위치에 따라 선택할 수 있는 방법이 다르다

조합 게임

Combinatorial Game

- 이번 강의에서 다루는 내용은 Impartial Game (공정한 게임)

돌 게임

7

Combinatorial Game

- 두 플레이어 A와 B가 있다
- 돌 21개가 탁자 위에 있다
- 한 번에 돌을 1, 2, 3개 가져갈 수 있다 (적어도 1개의 돌은 가져가야 함)
- A가 먼저 게임을 시작하고, 턴을 번갈아가면서 게임을 한다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 이긴다
 - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 진다

$A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$

조합 게임

Combinatorial Game

- Normal Play Rule
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 이긴다
 - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 진다
- Misère Play Rule
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 진다
 - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 이긴다

돌 게임

Combinatorial Game

1, 2, 3, 4

9

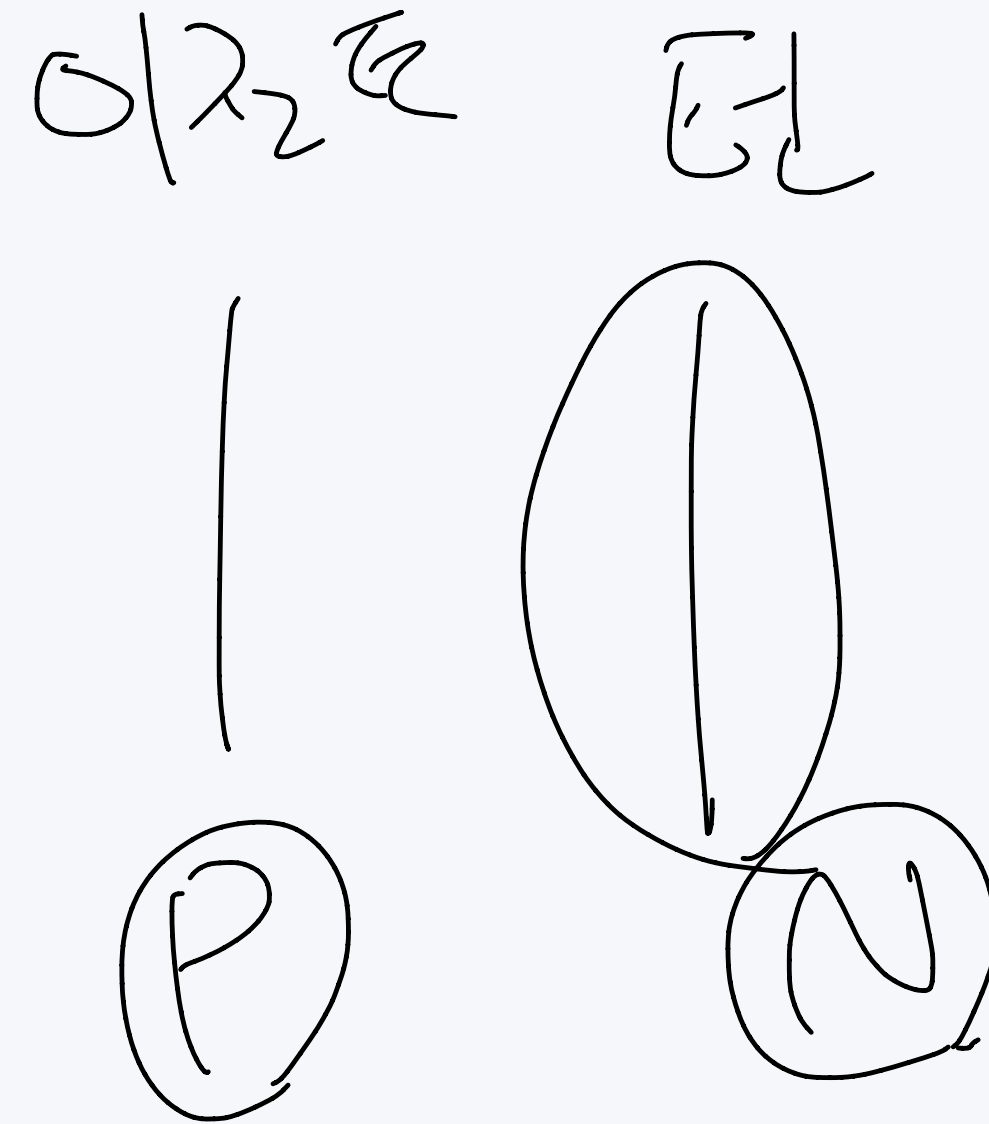
- 돌이 1, 2, 3개 남았으면 다음 플레이어가 돌을 다 가져갈 수 있기 때문에 게임을 이긴다
- 돌이 4개 남았으면, 돌을 어떻게 가져가도 항상 1, 2, 3개가 남기 때문에, 게임을 진다
- 돌이 5, 6, 7개 남았으면, 1, 2, 3개를 가져가서 돌을 4개 남게 만들 수 있기 때문에 게임을 이긴다
- 돌이 8개 남았으면, 돌을 어떻게 가져가도 항상 5, 6, 7개가 남기 때문에, 게임을 진다
- 돌이 4의 배수개수 만큼 남았으면, 게임을 지고 그 외의 경우에는 게임을 이긴다

조합 게임

Combinatorial Game

10

- P-위치
- Previous Player가 이기는 위치
- 방금 턴을 가진 사람이 이기는 위치
- N-위치
- Next Player가 이기는 위치
- 턴을 가질 사람이 이기는 위치



돌 게임

Combinatorial Game

- P-위치: 0, 4, 8, 12, 16, ...
- N-위치: 1, 2, 3, 5, 6, 7, ...

조합 게임

Combinatorial Game

12


- 모든 끝나는 위치는 P-위치이다
- 모든 N-위치에서 적어도 하나는 P-위치로 움직일 수 있다
- 모든 P-위치에서 모든 움직임은 N-위치로 이동한다

돌 게임


13

Combinatorial Game

- P-위치에 있으면 진다 (L)
- N-위치에 있으면 이긴다 (W)



i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W



- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W

Handwritten annotations on the table:

- Black arrows above the table:
 - From i=2 to i=0
 - From i=2 to i=1
 - From i=3 to i=0
 - From i=3 to i=1
 - From i=3 to i=2
 - From i=4 to i=2
 - From i=4 to i=3
 - From i=5 to i=3
 - From i=5 to i=4
 - From i=6 to i=4
 - From i=6 to i=5
 - From i=7 to i=5
 - From i=7 to i=6
 - From i=8 to i=6
 - From i=8 to i=7
 - From i=9 to i=7
 - From i=9 to i=8
 - From i=10 to i=8
 - From i=10 to i=9
 - From i=11 to i=9
 - From i=11 to i=10
 - From i=12 to i=10
 - From i=12 to i=11
 - From i=13 to i=11
 - From i=13 to i=12
 - From i=14 to i=12
 - From i=14 to i=13
 - From i=15 to i=13
 - From i=15 to i=14
 - From i=16 to i=14
 - From i=16 to i=15
 - From i=17 to i=15
 - From i=17 to i=16
- Purple arrows above the table:
 - From i=2 to i=5
 - From i=2 to i=6
 - From i=3 to i=8
 - From i=3 to i=9
 - From i=4 to i=10
 - From i=4 to i=11
 - From i=5 to i=12
 - From i=5 to i=13
 - From i=6 to i=14
 - From i=6 to i=15
 - From i=7 to i=16
 - From i=7 to i=17
- Black arrows below the table:
 - From i=3 to i=0
 - From i=3 to i=1
 - From i=4 to i=0
 - From i=4 to i=1
 - From i=4 to i=2
 - From i=5 to i=2
 - From i=5 to i=3
 - From i=6 to i=3
 - From i=6 to i=4
 - From i=7 to i=4
 - From i=7 to i=5
 - From i=8 to i=5
 - From i=8 to i=6
 - From i=9 to i=6
 - From i=9 to i=7
 - From i=10 to i=7
 - From i=10 to i=8
 - From i=11 to i=8
 - From i=11 to i=9
 - From i=12 to i=9
 - From i=12 to i=10
 - From i=13 to i=10
 - From i=13 to i=11
 - From i=14 to i=11
 - From i=14 to i=12
 - From i=15 to i=12
 - From i=15 to i=13
 - From i=16 to i=13
 - From i=16 to i=14
 - From i=17 to i=14
 - From i=17 to i=15
- Purple arrows below the table:
 - From i=3 to i=5
 - From i=3 to i=6
 - From i=4 to i=8
 - From i=4 to i=9
 - From i=5 to i=10
 - From i=5 to i=11
 - From i=6 to i=12
 - From i=6 to i=13
 - From i=7 to i=14
 - From i=7 to i=15
 - From i=8 to i=16
 - From i=8 to i=17
- Handwritten numbers below the table:
 - 3 (under i=3)
 - 4 (under i=4)

돌 게임

15

Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W

돌 게임

16

Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

The diagram shows a sequence of 18 cells, indexed from 0 to 17. The top row contains the indices 'i' and the bottom row contains the game state 'D[i]'. The cells are colored green for indices 0-13 and light green for indices 14-17. Handwritten 'W' and 'L' characters represent the game state. A vertical line is drawn between index 13 and 14. Arrows indicate possible moves: from index 0 to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; from index 1 to 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; from index 2 to 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; from index 3 to 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; from index 4 to 5, 6, 7, 8, 9, 10; from index 5 to 6, 7, 8, 9, 10; from index 6 to 7, 8, 9, 10; from index 7 to 8, 9, 10; from index 8 to 9, 10; from index 9 to 10; from index 10 to 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17; from index 11 to 12, 13, 14, 15, 16, 17; from index 12 to 13, 14, 15, 16, 17; from index 13 to 14, 15, 16, 17; from index 14 to 15, 16, 17; from index 15 to 16, 17; from index 16 to 17.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L

돌 게임

Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다



i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	W	L	W	L	W	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	W	L

돌 게임

18

Combinatorial Game

- P-위치에 있으면 진다 (L)
- N-위치에 있으면 이긴다 (W)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W

돌 게임

19

<https://www.acmicpc.net/problem/9655>

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	L	W	L	W												

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- <https://gist.github.com/Baekjoon/c4aa66735b4a5cb72a47>

[illegible]

돌 게임 2

<https://www.acmicpc.net/problem/9656>

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	W	L	W	L	W	L	W	L										

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다
- <https://gist.github.com/Baekjoon/7e626445bd96042b8d1d>

[illegible]

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

[illegible]

돌 게임 3

<https://www.acmicpc.net/problem/9657>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- <https://gist.github.com/Baekjoon/bd83c0b529c5d4482748>

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

[illegible]

돌 게임 4

<https://www.acmicpc.net/problem/9658>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다
- <https://gist.github.com/Baekjoon/cccff2d802eb0bffa2b5>

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	W	L	W	L	W	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	W	L

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- $N \leq 1,000,000,000,000$

[illegible]

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- $N \leq 1,000,000,000,000$
- <https://gist.github.com/Baekjoon/adfeb2f69d6e3ff0a086>

[illegible]

돌 게임 6

<https://www.acmicpc.net/problem/9660>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- $N \leq 1,000,000,000,000$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W

돌 게임 6

<https://www.acmicpc.net/problem/9660>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- $N \leq 1,000,000,000,000$
- <https://gist.github.com/Baekjoon/c7ea7c2f04aad82904b2>

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
D[i]	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W

- 돌을 1, 4, 16, 64, ... (4^k)개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- $N \leq 1,000,000,000,000$

[illegible]

돌 게임 8

<https://www.acmicpc.net/problem/9662>

- 돌을 $A[1], A[2], \dots, A[K]$ 개 가져갈 수 있다
- 돌을 가져가는 방법이 없는 사람이 진다.
- $N \leq 1,000,000,000$
- $K \leq 22$

돌 게임 8

<https://www.acmicpc.net/problem/9662>

- 가능한 방법이 총 K 개이기 때문에, 2^K 에서 주기를 갖게 된다

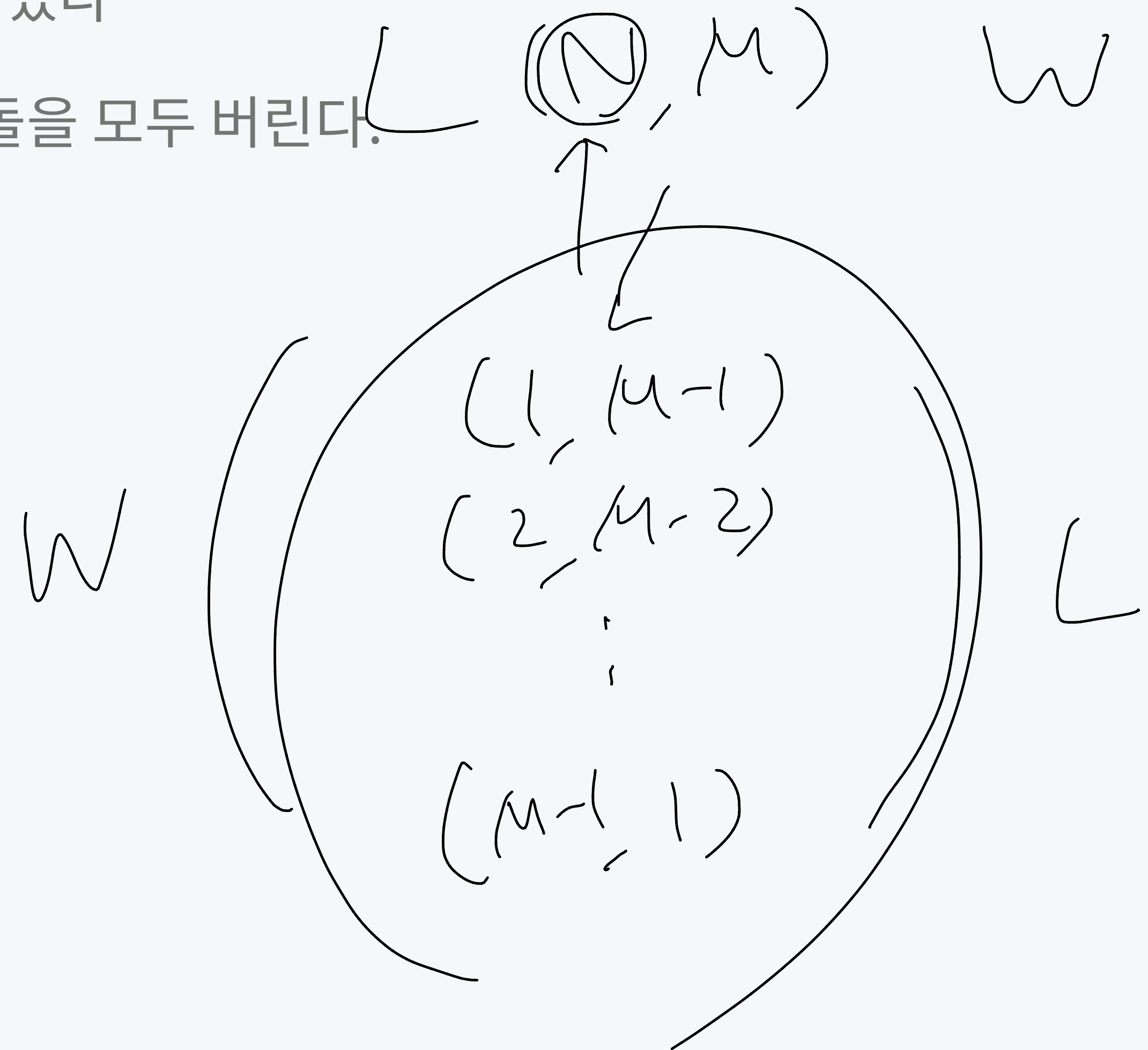
박스 나누기 게임

<https://www.acmicpc.net/problem/11867>

34

- 한 박스에 돌이 N개, 다른 박스에 돌이 M개 들어있다
- 턴: 박스를 하나 선택하고, 박스 안에 들어있는 돌을 모두 버린다.
- 그 다음 다른 박스에 들어있는 돌을 분배한다.
- 각 박스에는 돌이 적어도 1개 이상 있어야 한다.
- 두 박스에 돌을 각각 1개 만드는 사람이 이긴다.
- N, M이 주어졌을 때, 승자 구하기

$(1, 1) \rightarrow \text{X}$



박스 나누기 게임

35

<https://www.acmicpc.net/problem/11867>

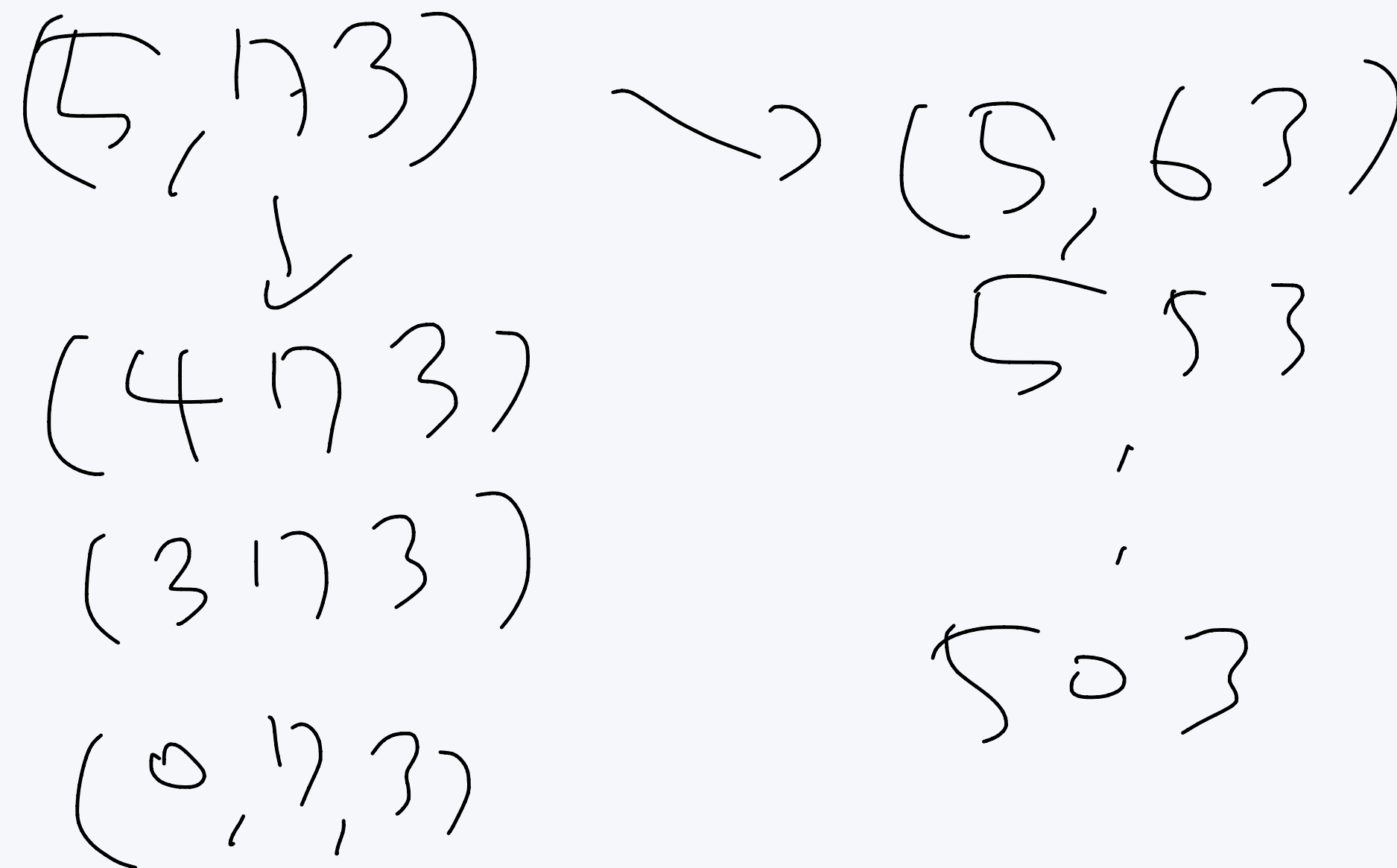
- <https://gist.github.com/Baekjoon/67402c71b1fe8bb4b8ba>

님 게임

The Game of Nim

36

- 돌 더미 3개가 있다.
- 각 사람은 비어있지 않은 돌 더미를 하나를 선택하고, 돌을 가져간다. (제한 없음)
- 마지막 돌을 제거한 사람이 게임을 이기게 된다 (더 이상 가져갈 돈이 없는 사람이 게임을 진다)



님 게임

The Game of Nim

37

- $(0, 0, 0)$ 은 지는 위치이다
- $(0, 0, x)$ 는 이기는 위치이다 ($x > 0$)
- $(0, 0, 1)$ 은 이기는 위치이다
- $(0, 1, 1)$ 은 지는 위치이다
- $(0, 1, x)$ 은 이기는 위치이다 $x > 1$

님 게임

The Game of Nim

- 돌의 개수를 XOR한 결과가 0이면 지는 위치이다

님 게임 2

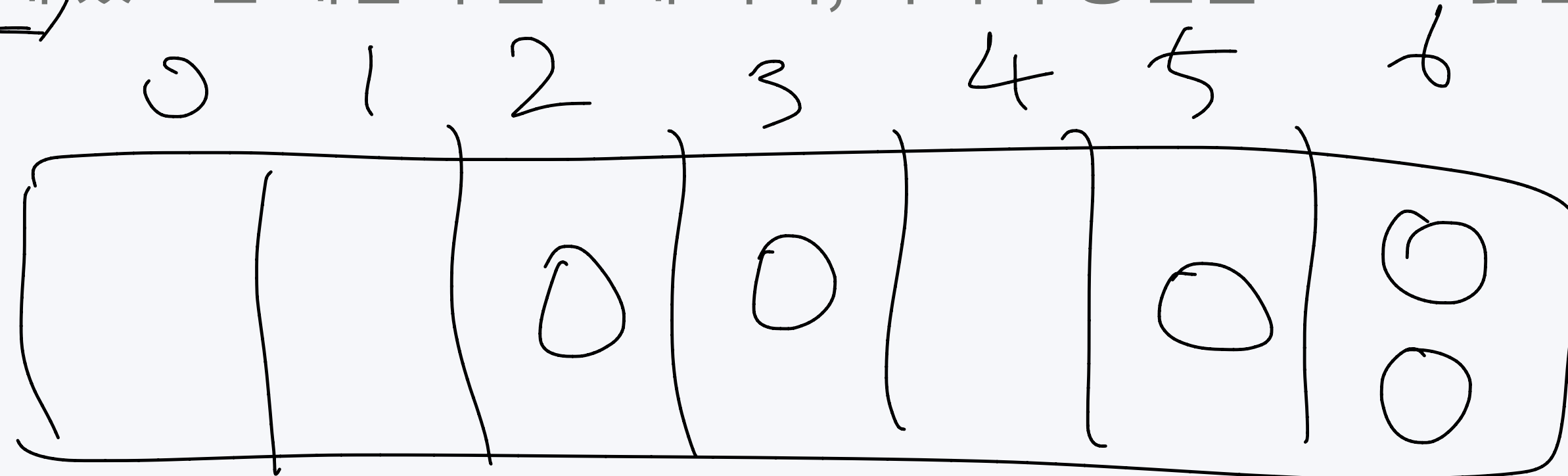
<https://www.acmicpc.net/problem/11868>

- <https://gist.github.com/Baekjoon/d2b24634d27e1f9f08fb>

nimble

<https://www.acmicpc.net/problem/11869>

- nimble는 $1 \times N$ 직사각형에서 즐기는 게임이다. 직사각형은 1×1 크기의 정사각형으로 나누어져 있고, 가장 왼쪽 정사각형은 0번, 그 오른쪽 정사각형은 1번, ..., 가장 오른쪽 정사각형은 $N-1$ 번이다. 각 정사각형에는 동전이 놓여져 있을 수 있는데, 한 개 이상 놓여져 있을 수도 있다.
- 두 사람은 턴을 번갈아가면서 게임을 진행한다. 턴은 동전을 하나 고르고, 동전을 왼쪽으로 옮기는 것으로 이루어져 있다.
- 모든 동전이 0에 있으면 게임이 끝나게 되며, 마지막 동전을 0으로 옮긴 사람이 게임을 이긴다.



nimble

<https://www.acmicpc.net/problem/11869>

- 이 문제는 님 게임 2와 같은 문제이다.
- k 번째 칸에 있는 동전은 k 개 돌이 있는 돌 더미와 같다
- <https://gist.github.com/Baekjoon/d2b24634d27e1f9f08fb>

돌 게임

Combinatorial Game

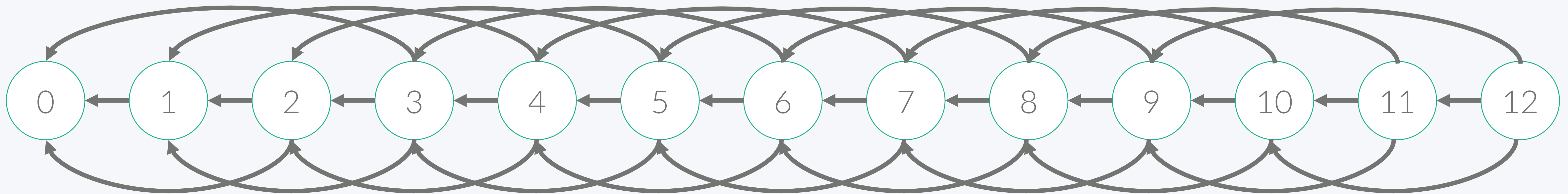
42

- 두 플레이어 A와 B가 있다
- 돌 21개가 탁자 위에 있다
- 한 번에 돌을 1, 2, 3개 가져갈 수 있다 (적어도 1개의 돌은 가져가야 함)
- A가 먼저 게임을 시작하고, 턴을 번갈아가면서 게임을 한다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 이긴다
 - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 진다

돌 게임

Combinatorial Game

- $G = (X, F)$
- $X =$ 정점 (위치)
- $F =$ 함수, $F(x) \subset X$
- $F(x) = x$ 에서 이동할 수 있는 위치
- $F(x)$ 가 비어있다면 끝나는 위치



The Sprague-Grundy Function

44

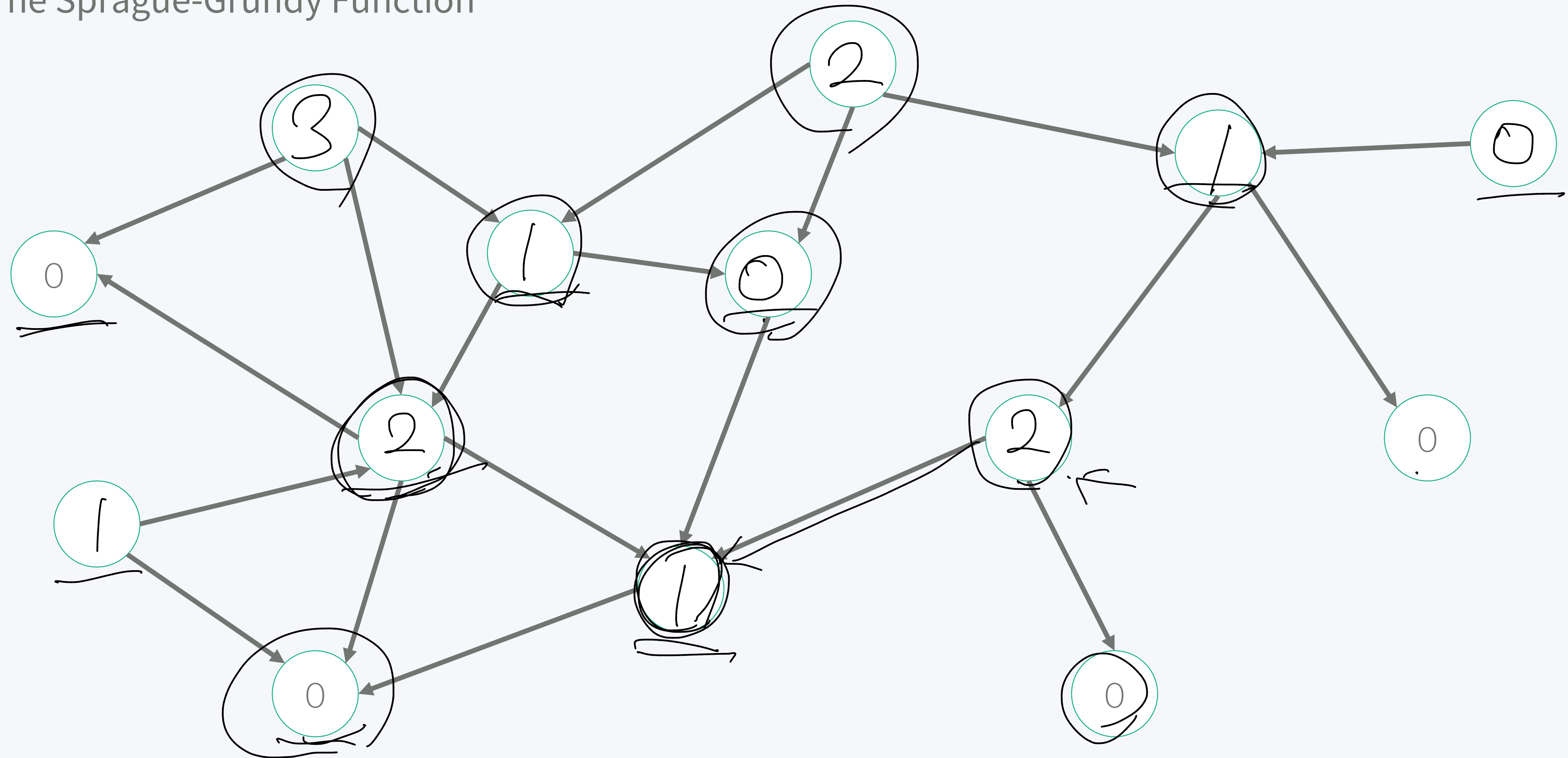
The Sprague-Grundy Function

- $g(x) = \min\{n \geq 0, n \neq g(y) \text{ for } y \in F(x)\}$
- $g(x)$ 는 x 의 다음 위치 y 의 $g(y)$ 에 포함되지 않는 가장 작은 정수

The Sprague-Grundy Function

The Sprague-Grundy Function

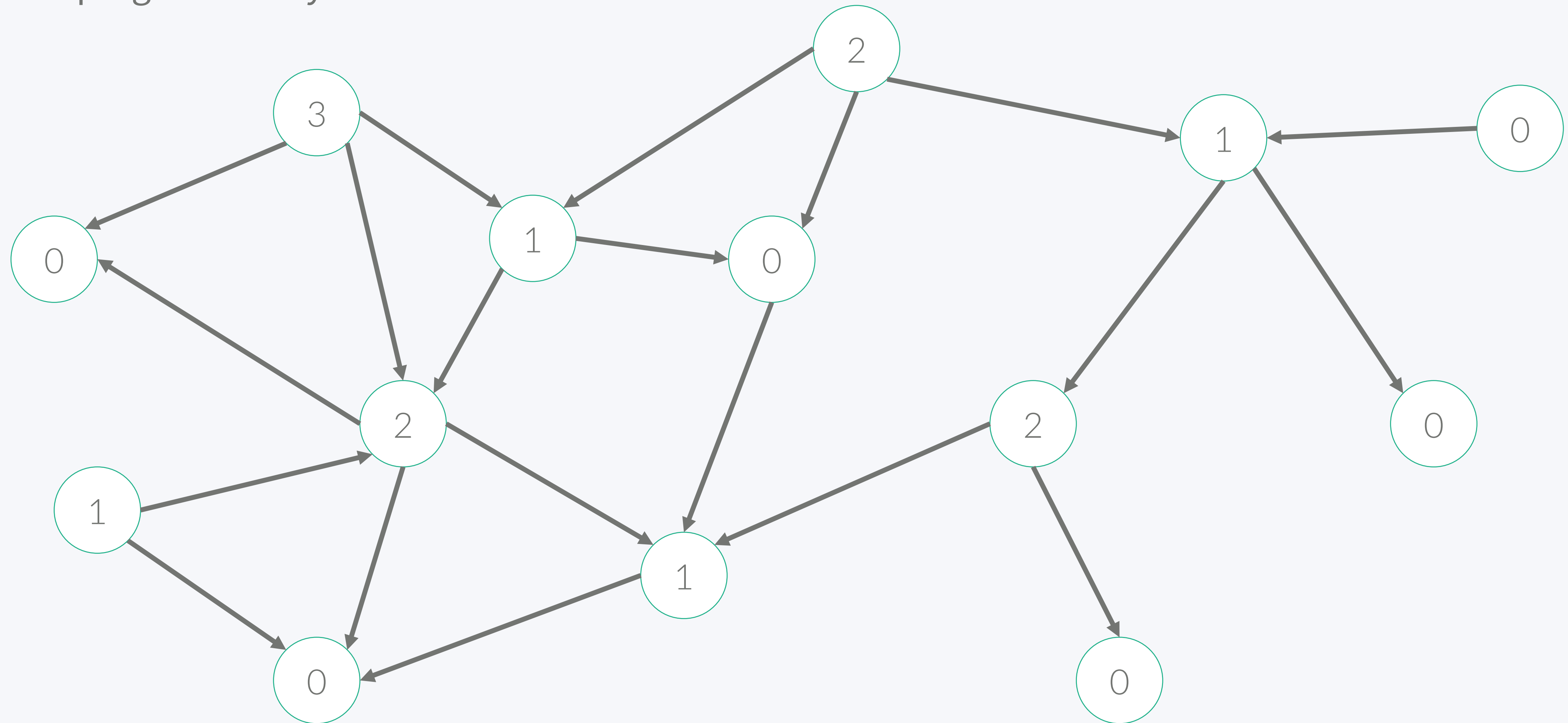
45



The Sprague-Grundy Function

The Sprague-Grundy Function

46




돌 게임


Combinatorial Game

47

- The Sprague-Grundy Function



i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	2	3	0													



돌 게임

Combinatorial Game

- The Sprague-Grundy Function

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

The Sprague-Grundy Function

49

The Sprague-Grundy Function

- 게임이 여러 개로 구성된 경우에는
- 각 게임의 Sprague-Grundy Function 값을 XOR 한 값이 Sprague-Grundy Function 의 값이다
- XOR한 값이 0이면 P-위치 (L)
- 0이 아니면 N-위치 (W)

- 님 게임을 돌 더미 하나 있는 것을 게임 하나라고 생각하자
- 그럼 각각 하나 하나에 대해서 Sprague-Grundy Value를 계산해보자

[illegible]

님 게임 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11868>

- 님 게임을 돌 더미 하나 있는 것을 게임 하나라고 생각하자
- 그럼 각각 하나 하나에 대해서 Sprague-Grundy Value를 계산해보자

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

님 게임 홀짝

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 짝수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거할 수 없다.
- 홀수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거해야 한다
- 돌 더미에 돌이 0개 또는 2개 남으면 게임이 끝나는 상태

6 → 2, 4 ~~6~~
~~2~~

7 → 2, 4, 6, 7

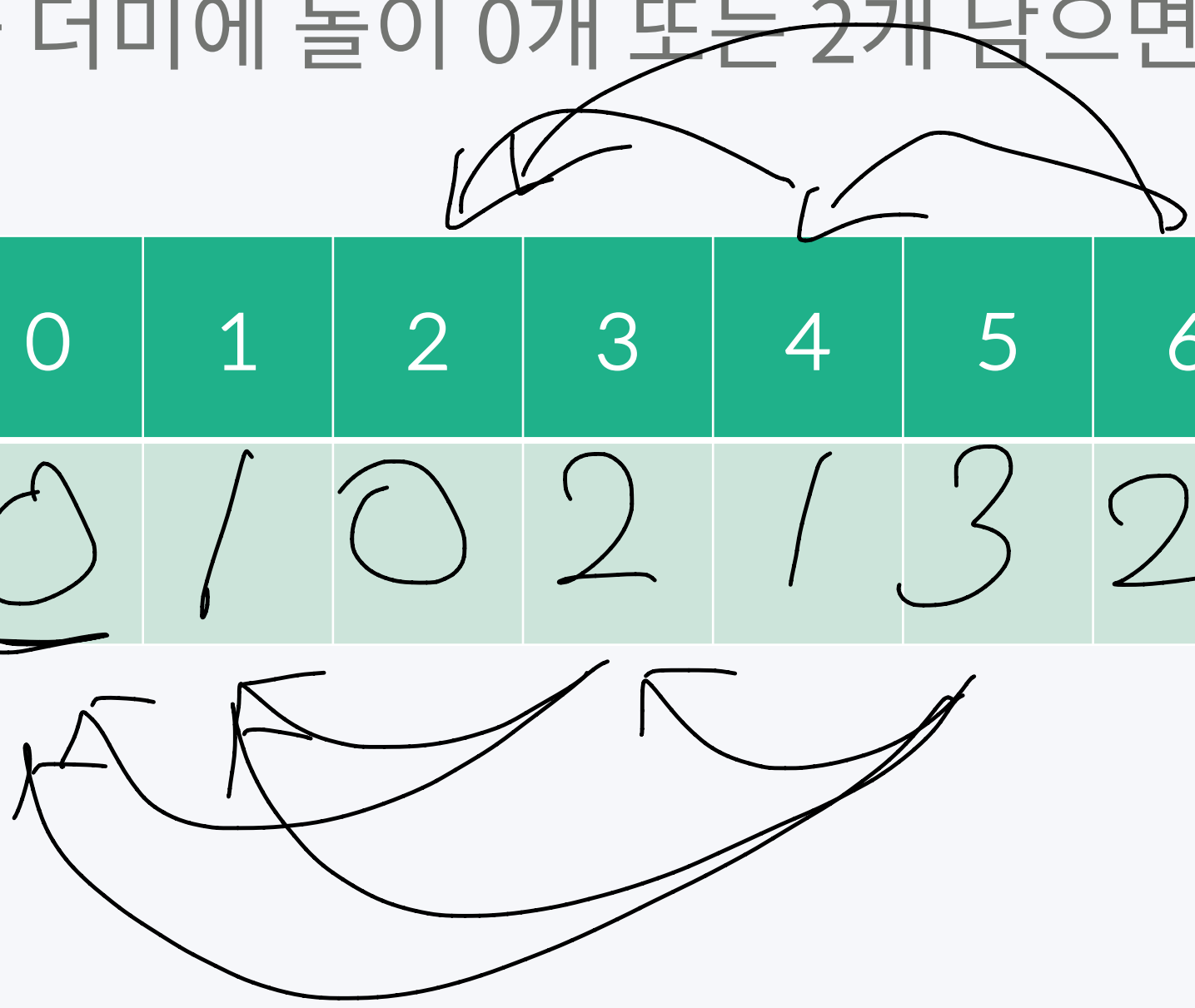
님 게임 홀짝

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 짝수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거할 수 없다.
- 홀수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거해야 한다
- 돌 더미에 돌이 0개 또는 2개 남으면 게임이 끝나는 상태

1 → 1
3 → 2, 3
4 → 2
5 → 2, 4, 5
6 → 2, 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	0	2	1	3	2											



님 게임 홀짝

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 짝수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거할 수 없다.
- 홀수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거해야 한다
- 돌 더미에 돌이 0개 또는 2개 남으면 게임이 끝나는 상태

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8	7	9

님 게임 홀짝

55

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- $g(2k) = k-1$
- $g(2k-1) = k$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8	7	9

님 게임 홀짝

56

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- <https://gist.github.com/Baekjoon/345a8feb04e0335a25cb>

님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 돌 더미 하나를 선택해 돌을 하나 이상 제거한다.
- 돌이 적어도 2개 있는 돌 더미 하나를 선택한 다음, 두 개의 비어있지 않은 돌 더미로 나눈다.
(돌은 제거할 수 없다)

- $g(1) = 1$

$$2 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{0} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \underline{(1, 1)}$$

$$g(1) \wedge g(1) = 0$$

[illegible]

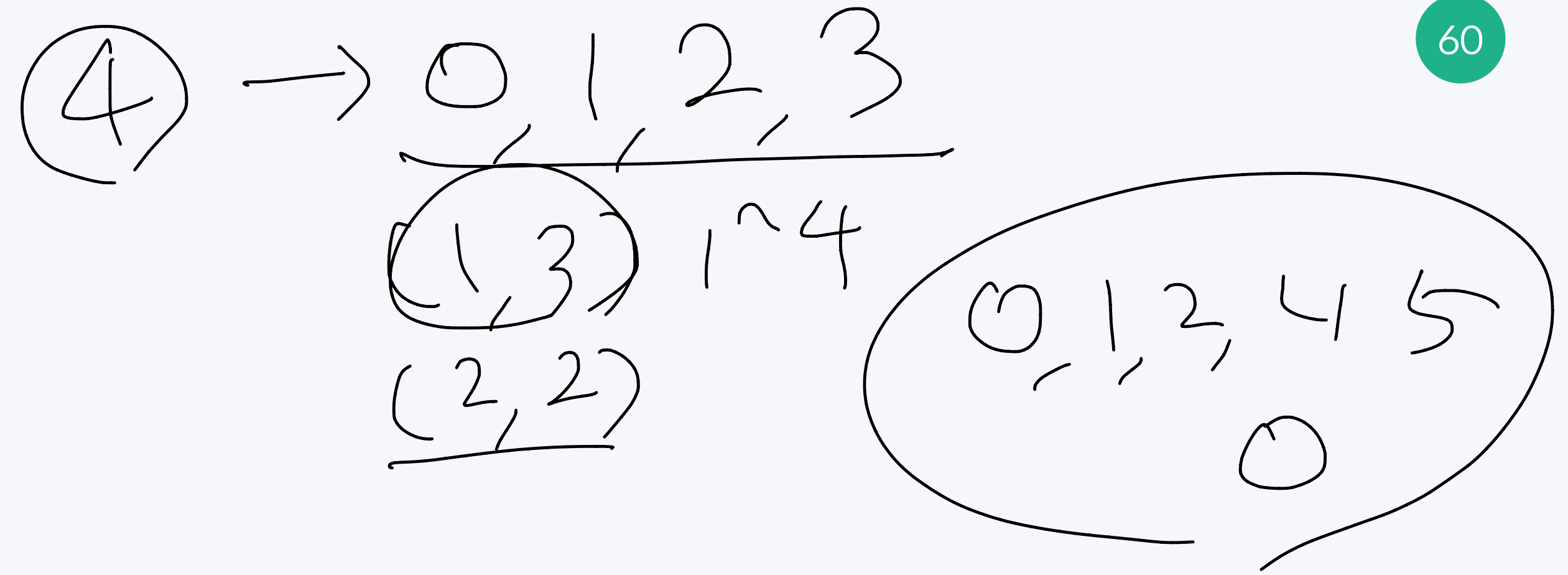
- 2는 가능한 방법이
- 0, 1, (1, 1) 이다.
- $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, (1, 1)은 두 게임이므로 $g(1) \text{ xor } g(1) = 1 \text{ xor } 1 = 0$
- $g(2) = 2$

[illegible]

님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

- 3은 가능한 방법이
- $0, 1, 2, (1, 2)$ 이다
- $go(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2, (1, 2) \Rightarrow g(1) \text{ xor } g(2) = 1 \text{ xor } 2 = 3$
- $g(3) = 4$

[illegible]

님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

- $g(4k+1) = 4k+1$
- $g(4k+2) = 4k+2$
- $g(4k+3) = 4k+4$
- $g(4k+4) = 4k+3$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
g(i)	0	1	2	4	3	5	6	8	7	9	10	12	11	13	14	16	15	17

님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

- <https://gist.github.com/Baekjoon/e73d36d84effd9dc985a>