

그래프 2

최백준 choi@startlink.io

DAG

Directed 방향성
Acyclic 사이클 X
Graph 그래프

DAG

Directed Acyclic Graph

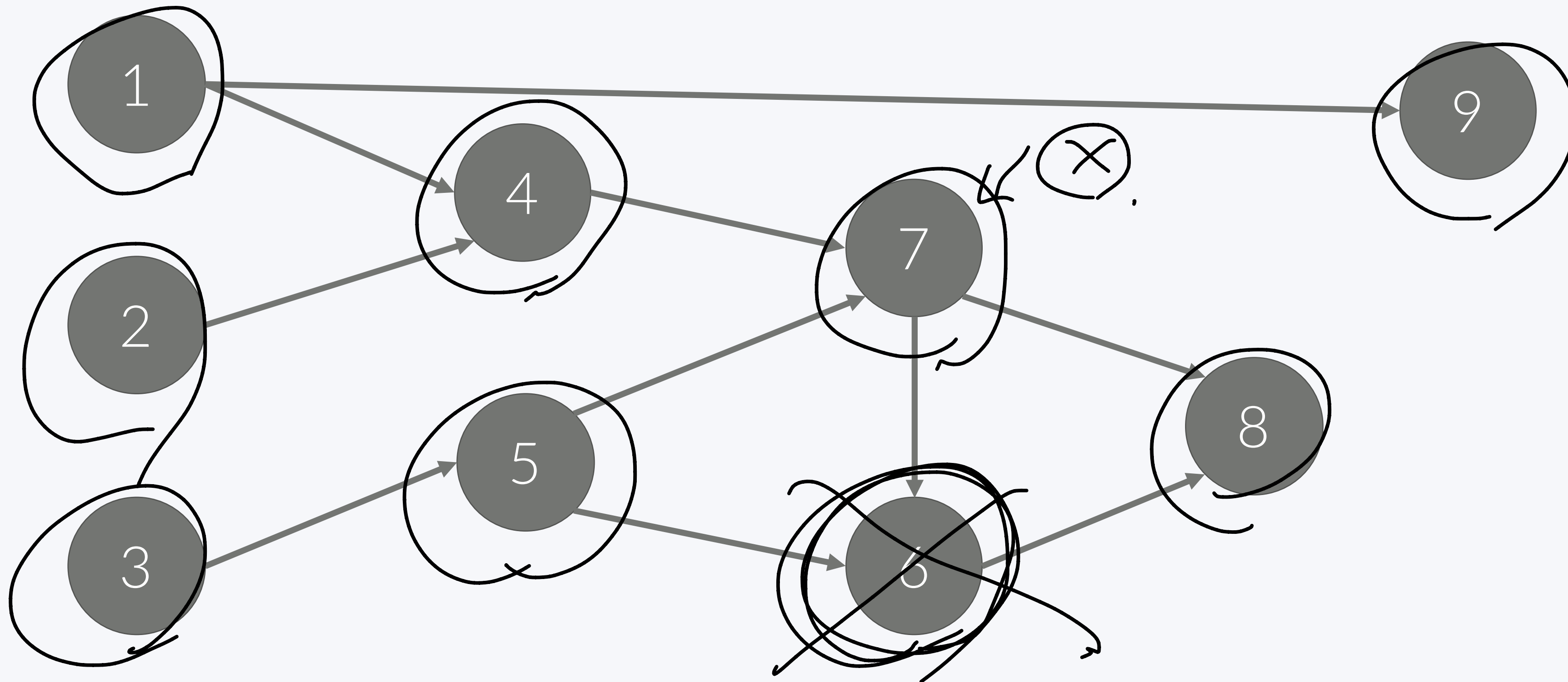
- 사이클이 없는 방향 있는 그래프를 DAG라고 한다.

순서

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9

3



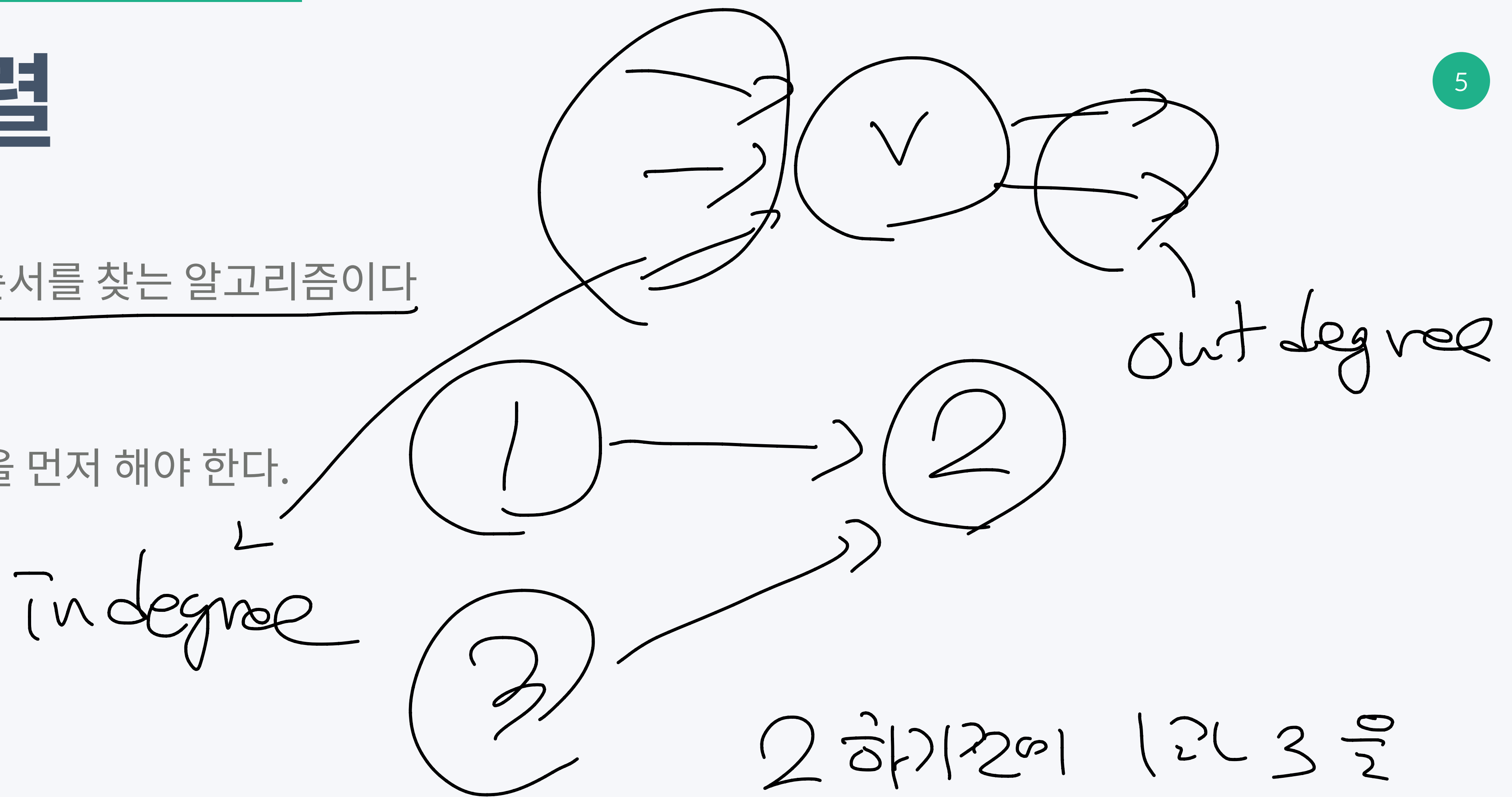
위상 정렬

위상 정렬

Topological Sort

5

- 어떤 일을 하는 순서를 찾는 알고리즘이다
- 1 -> 2
- 2를 하기 전에 1을 먼저 해야 한다.



일하는 순서가 있다.

위상 정렬

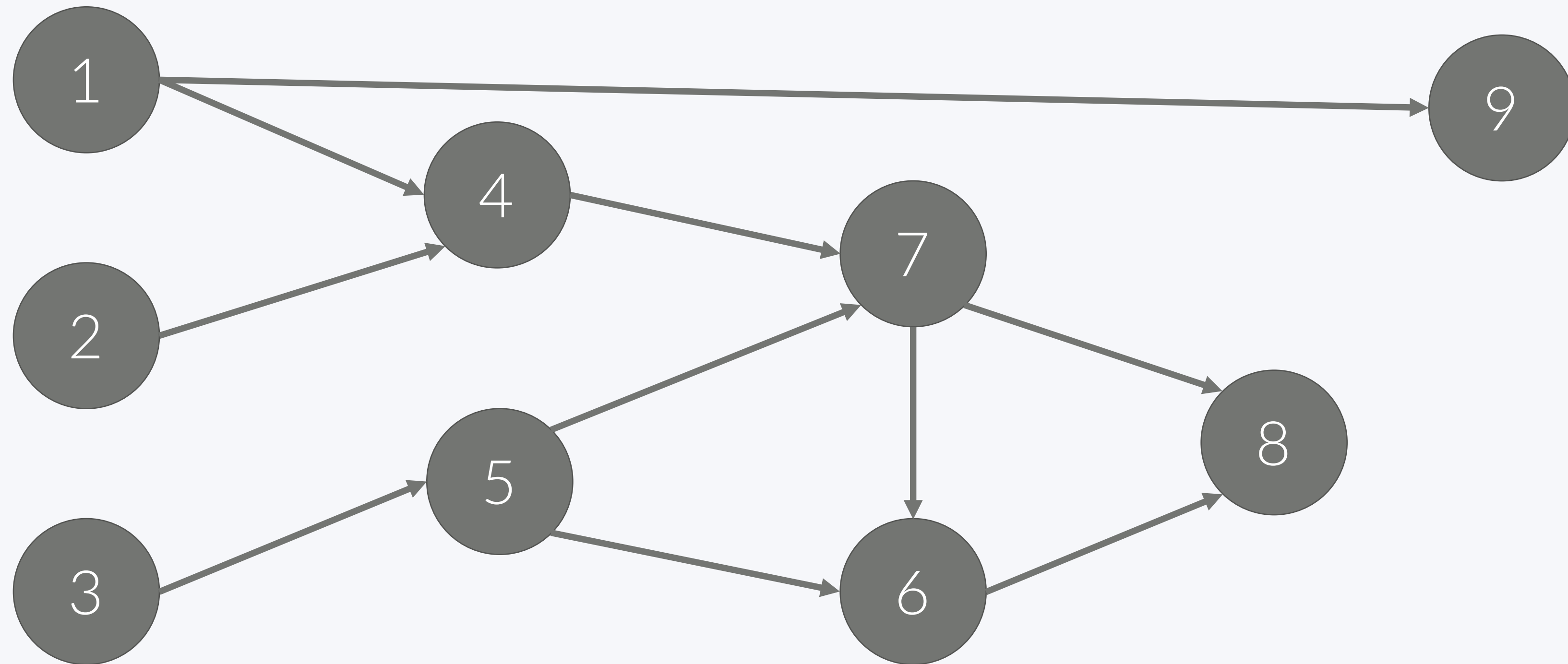
Topological Sort

6

- 큐에 가장 들어있는 것은
- 들어오는 간선의 개수가 0인 것이다.

• 순서:

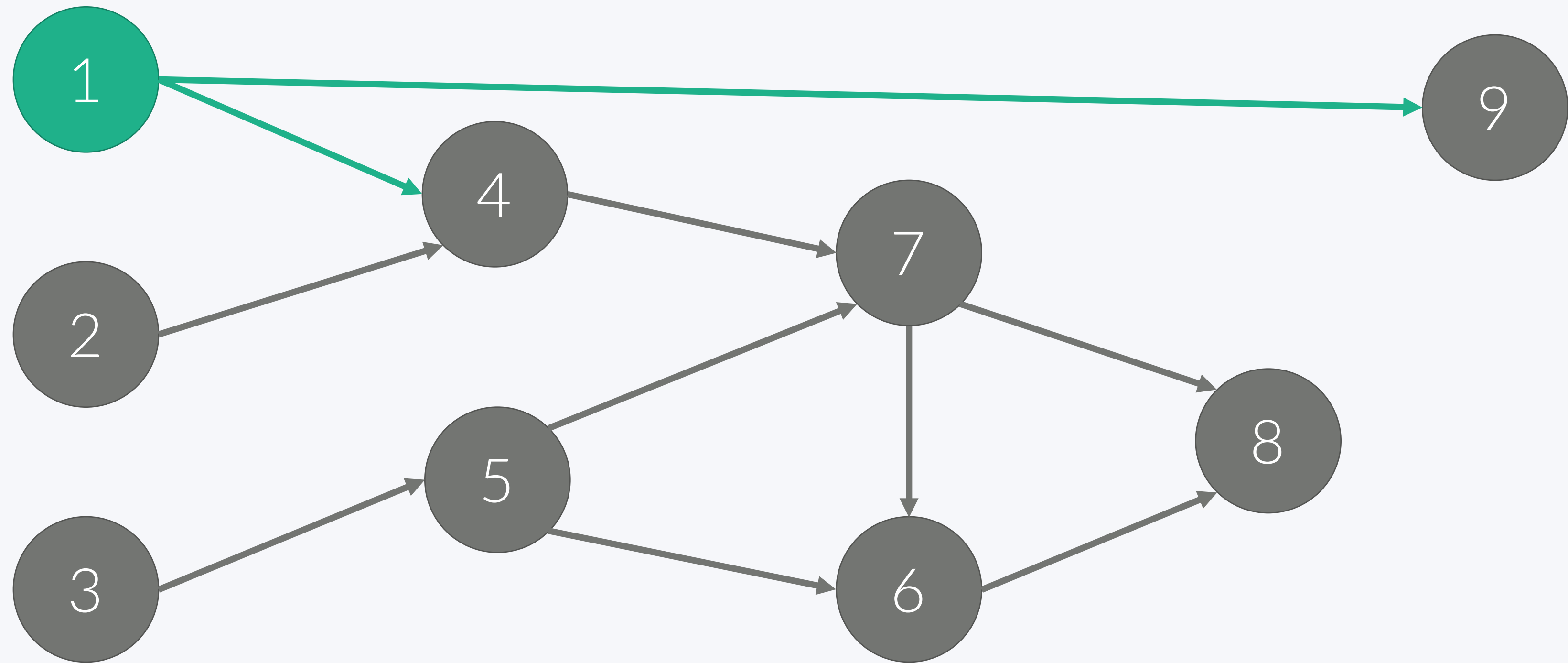
• 큐: 1 2 3



위상 정렬

Topological Sort

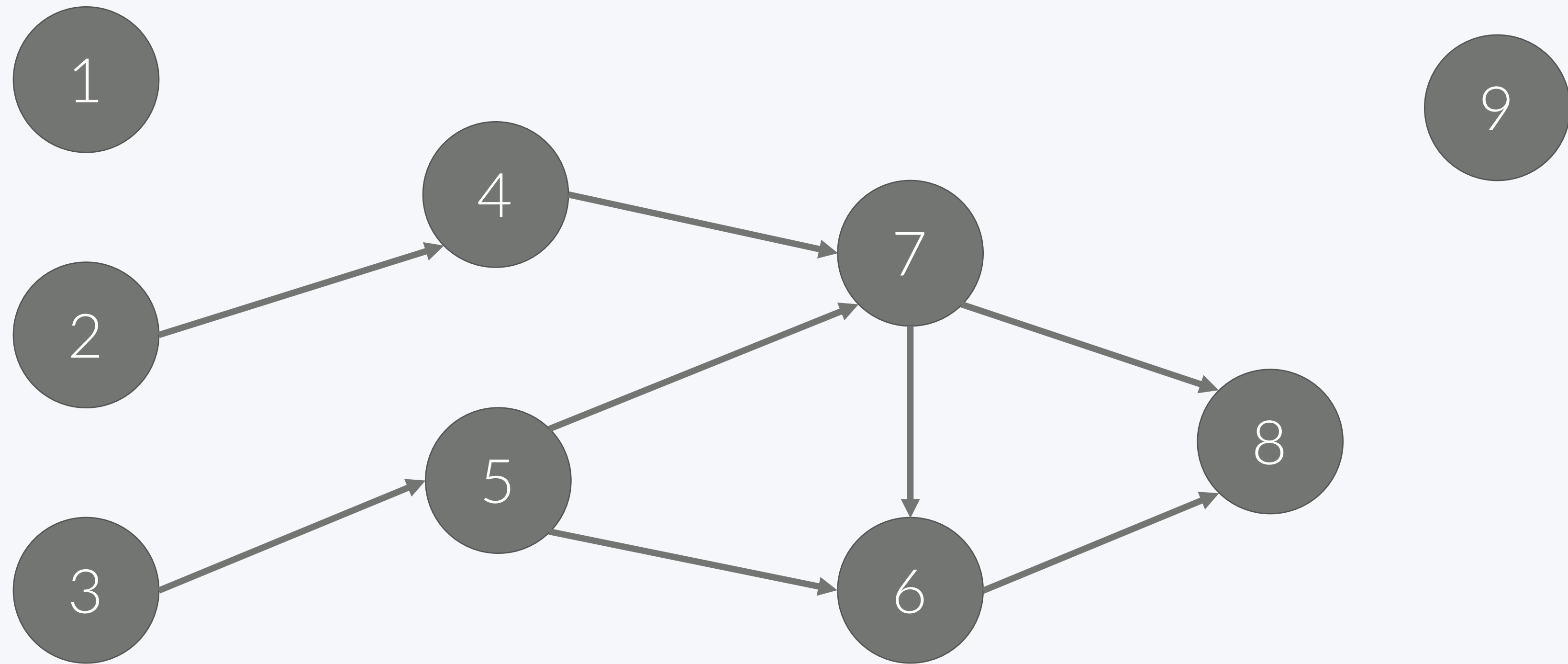
- 순서: 1
- 큐: 2 3



위상 정렬

Topological Sort

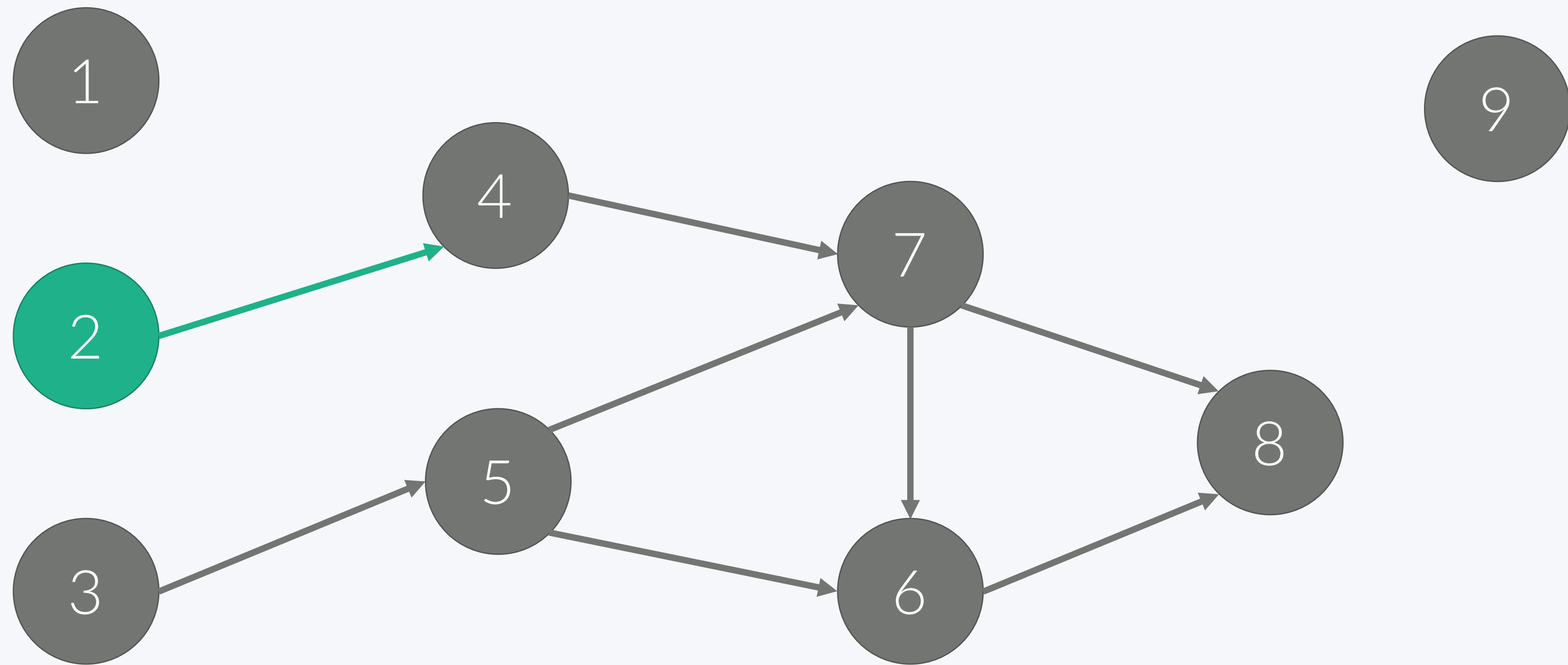
- 순서: 1
- 큐: 2 3 9



위상 정렬

Topological Sort

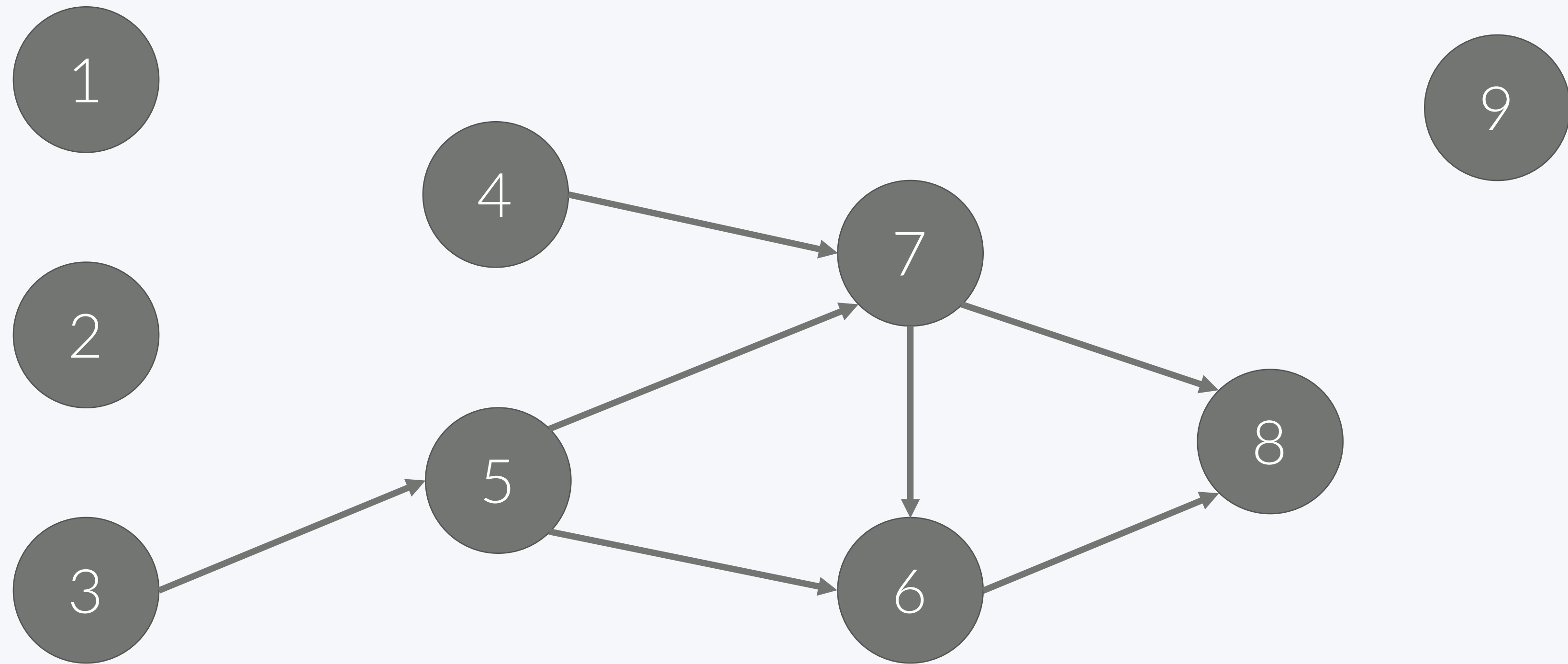
- 순서: 1 2
- 큐: 3 9



위상 정렬

Topological Sort

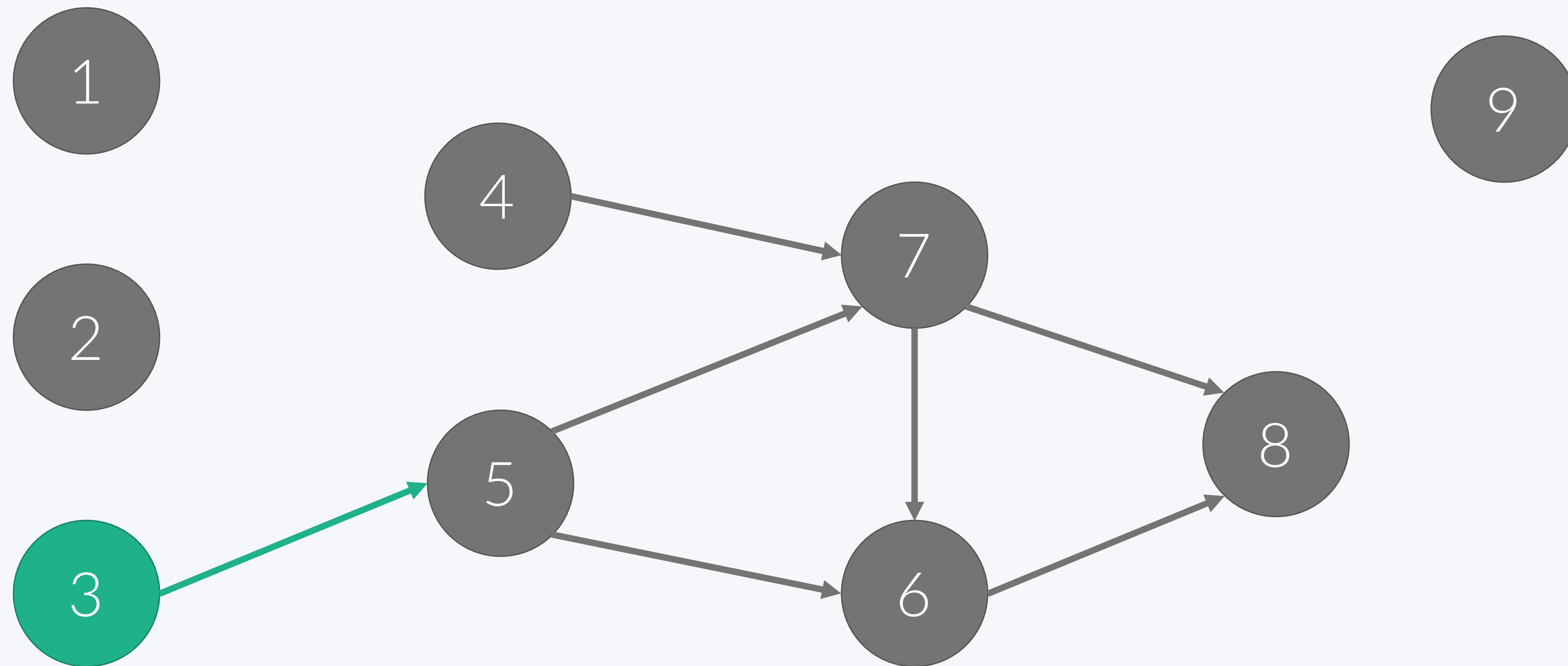
- 순서: 1 2
- 큐: 3 9 4



위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3
- 큐: 9 4



위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 4 5

- 큐 9 4 5

1

2

3

4

5

7

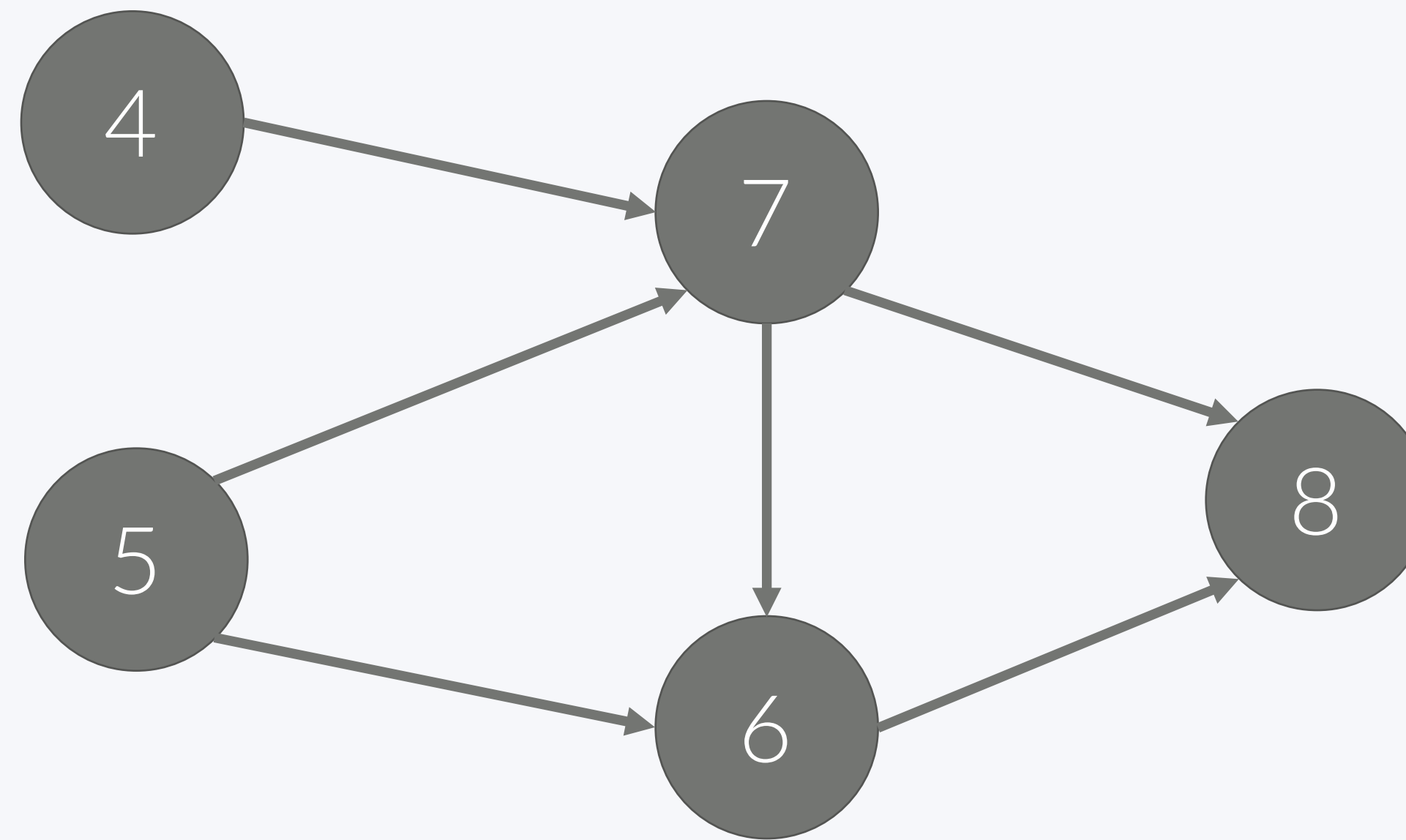
6

8

9

크기 순으로 이동 . Bip

우선순위 큐 (Heap)
(Min)



위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 9
- 큐: 4 5

1

2

3

4

5

7

6

8

9

위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 9
- 큐: 4 5

1

2

3

4

5

7

6

8

9

위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 9 4
- 큐: 5

1

2

3

4

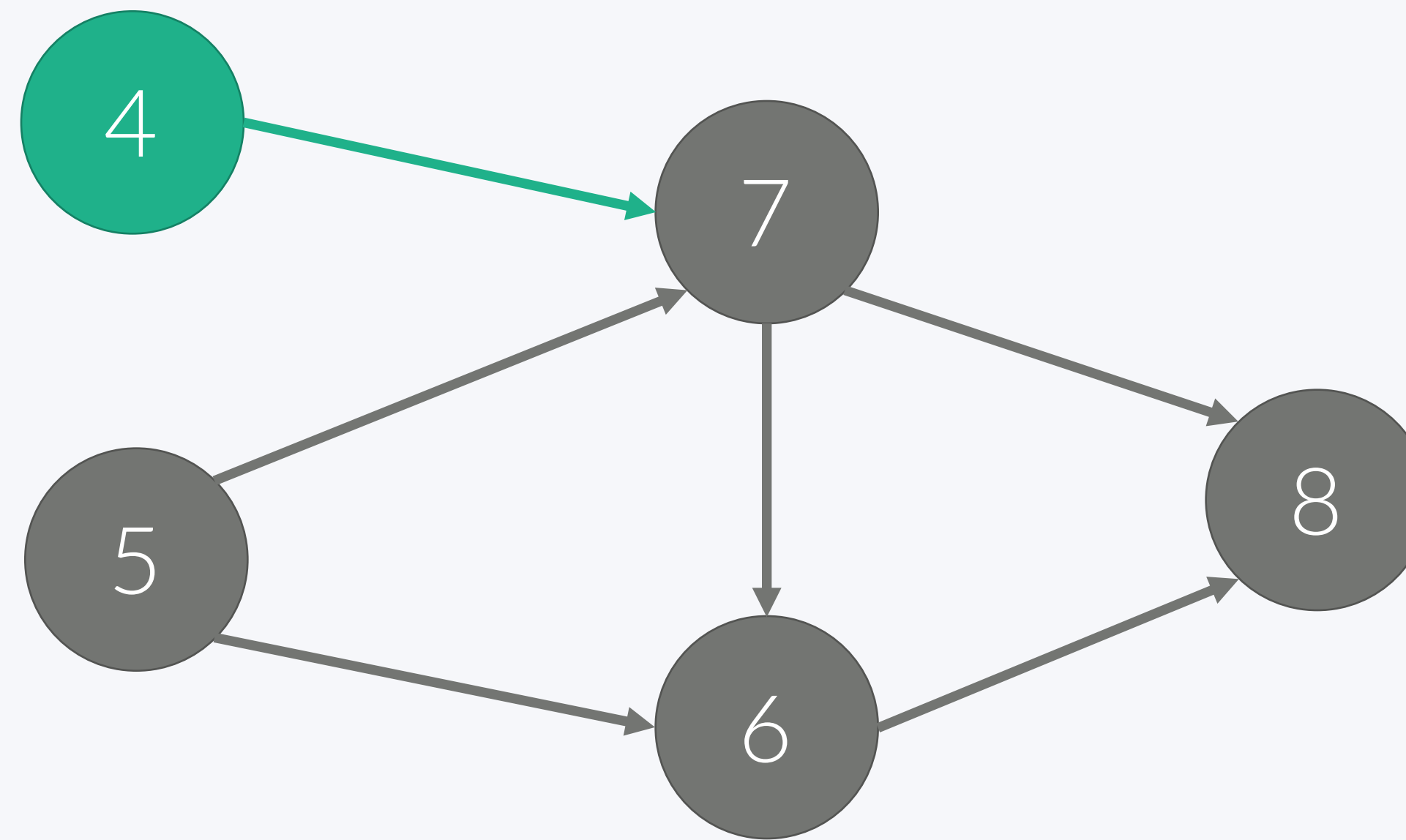
5

7

6

8

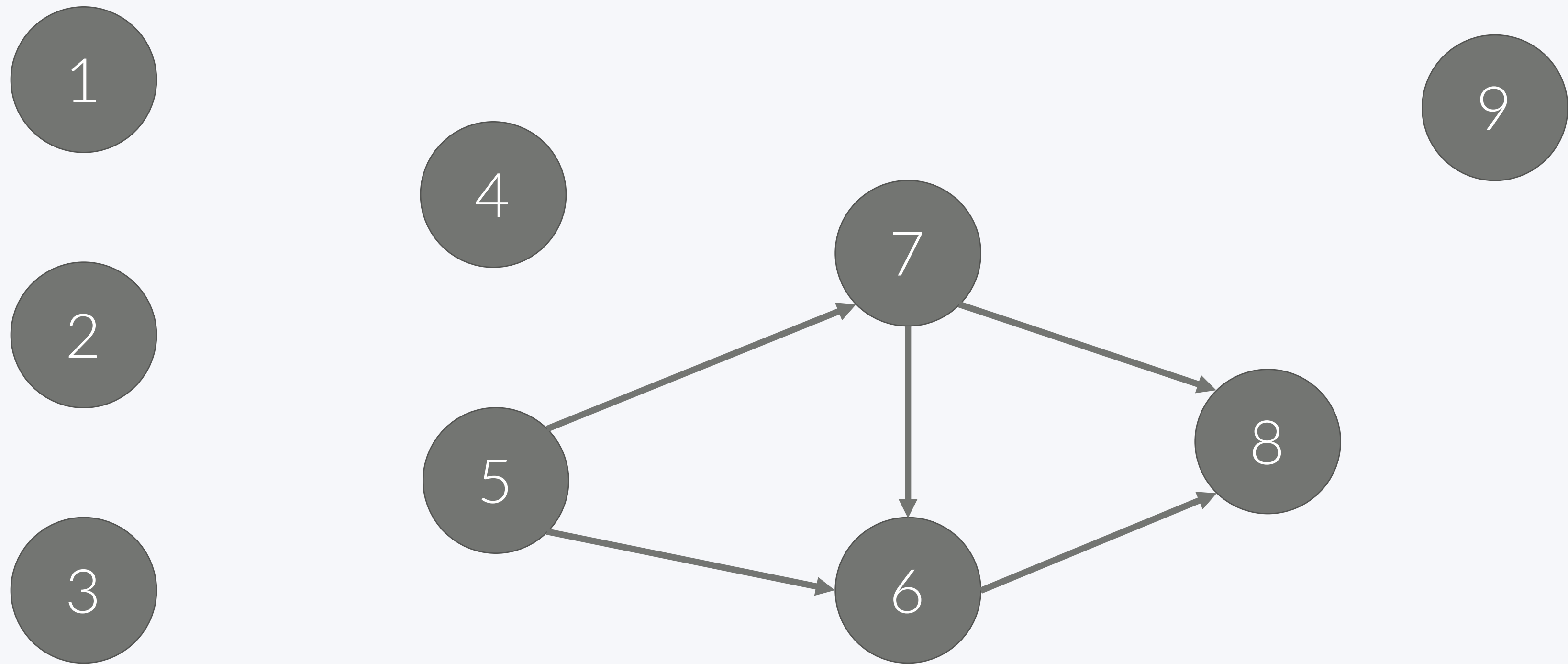
9



위상 정렬

Topological Sort

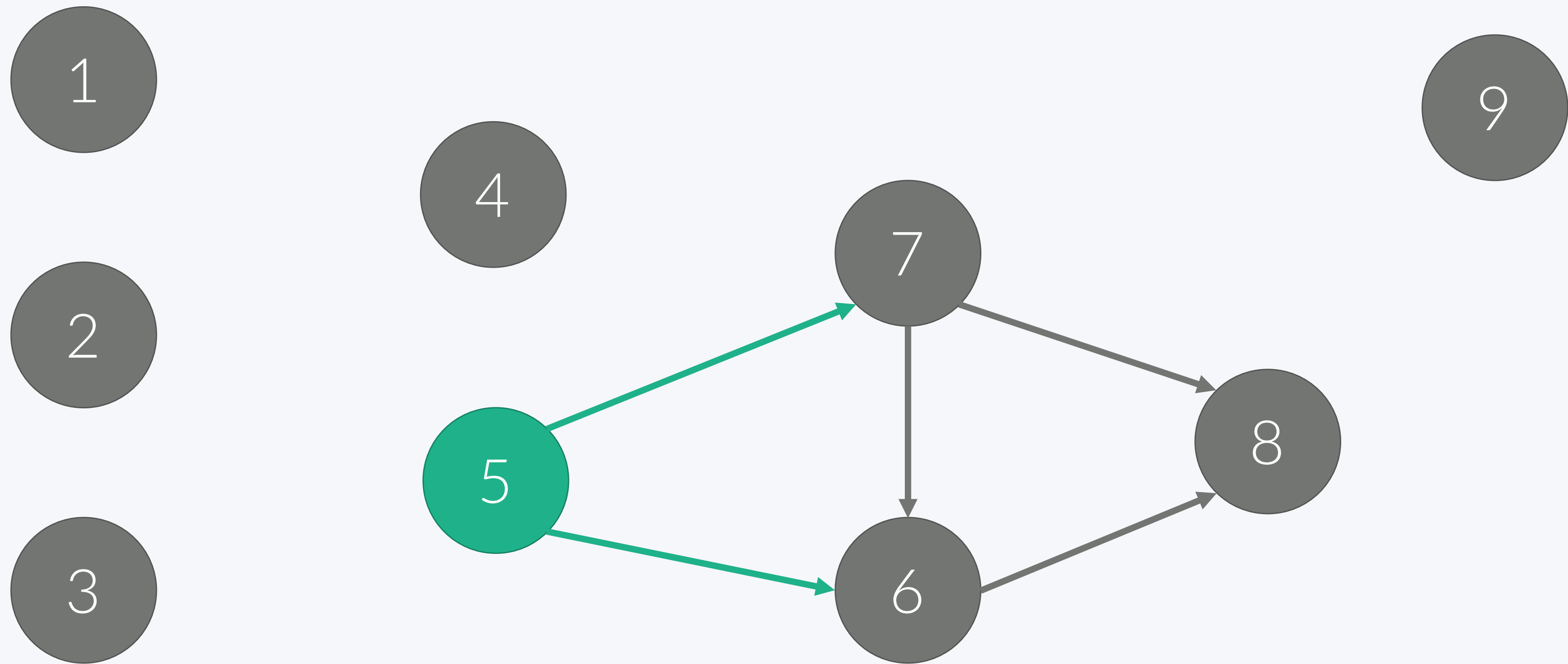
- 순서: 1 2 3 9 4
- 큐: 5



위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 9 4 5
- 큐:



위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 9 4 5
- 큐: 7

1

2

3

4

5

7

6

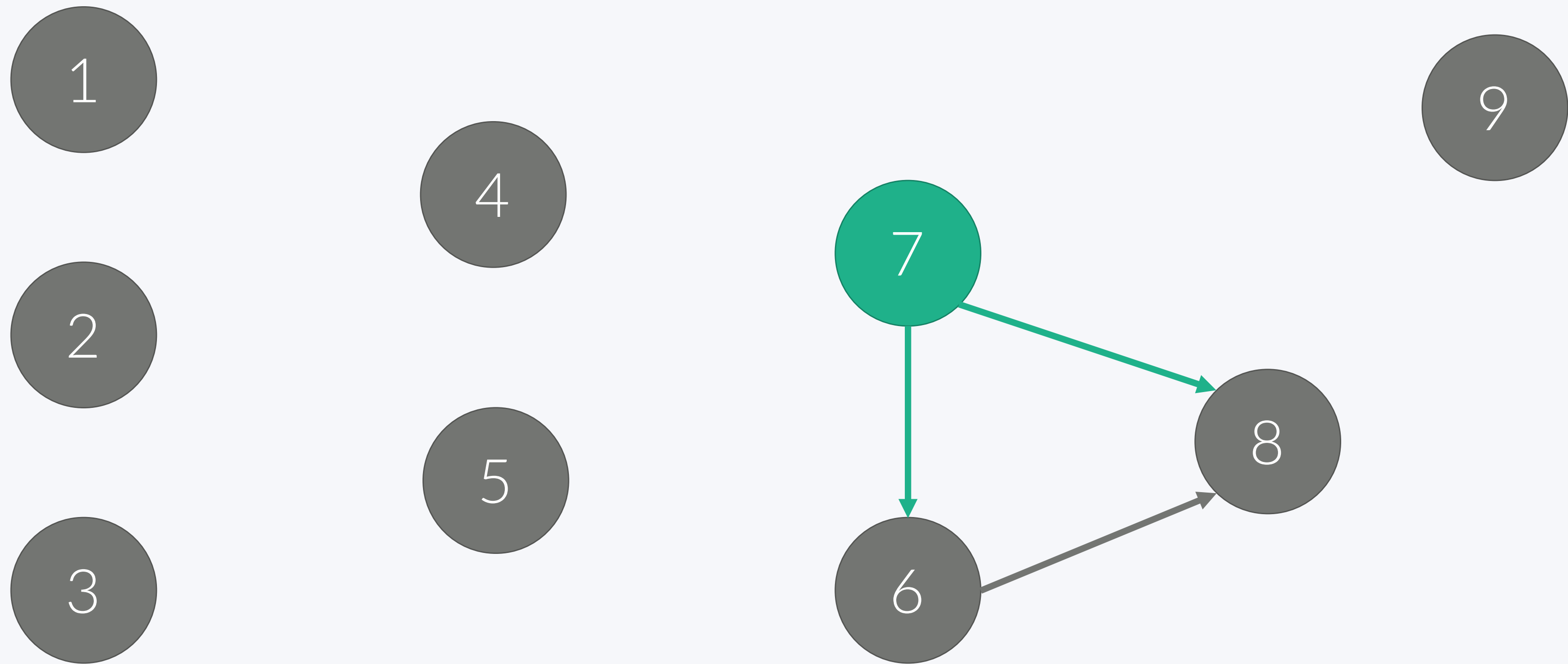
8

9

위상 정렬

Topological Sort

- 순서: 1 2 3 9 4 5 7
- 큐:

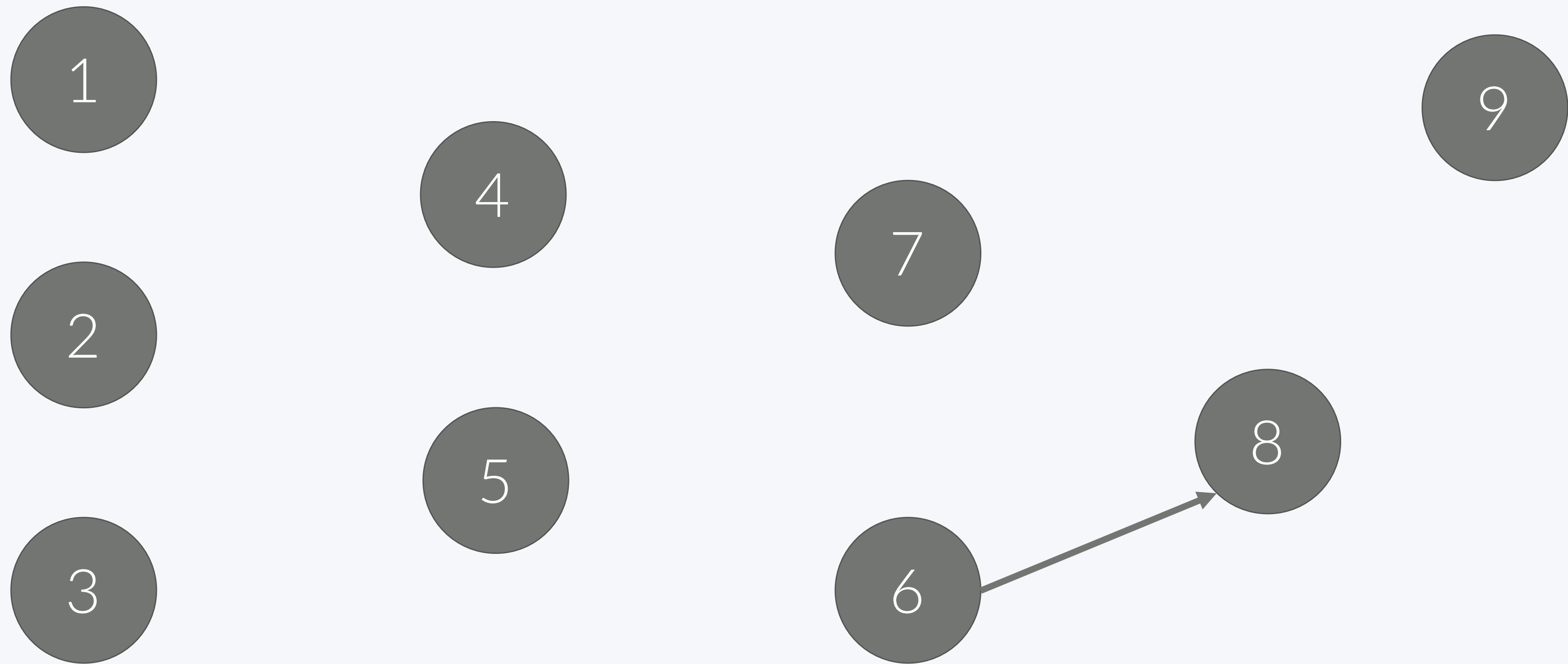


위상 정렬

Topological Sort

20

- 순서: 1 2 3 9 4 5 7
- 큐: 6

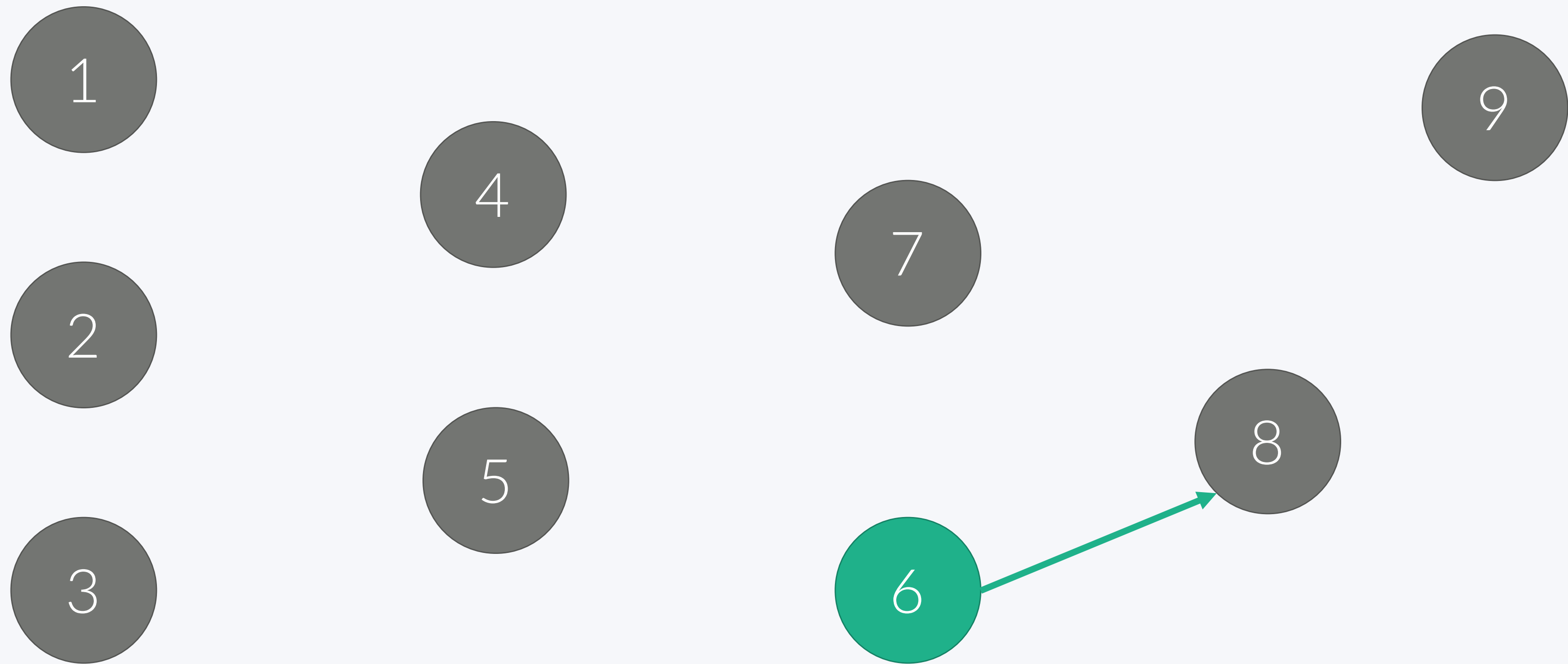


위상 정렬

Topological Sort

21

- 순서: 1 2 3 9 4 5 7 6
- 큐:



위상 정렬

Topological Sort

22

- 순서: 1 2 3 9 4 5 7 6
- 큐: 8

1

2

3

4

5

7

6

8

9

위상 정렬

Topological Sort

23

- 순서: 1 2 3 9 4 5 7 6 8

- 큐:

1

2

3

4

5

7

6

8

9

위상 정렬

Topological Sort

24

- 순서: 1 2 3 9 4 5 7 6 8

- 큐:

1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9

1

2

3

4

5

7

6

8

9

위상 정렬

Topological Sort

- 가장 처음

```
queue<int> q;  
for (int i=1; i<=n; i++) {  
    if (ind[i] == 0) {  
        q.push(i);  
    }  
}
```

$ind[i] = \text{점 } i \text{ 의 } in\text{-degree}$

위상 정렬

Topological Sort

26

```
for (int k=0; k<n; k++) {  
    int x = q.front();  
    q.pop();  
    printf("%d ", x);  
    for (int i=0; i<a[x].size(); i++) {  
        int y = a[x][i];  
        ind[y] -= 1; 7월 2  
        if (ind[y] == 0) {  
            q.push(y);  
        }  
    }  
}
```

BFS



```
if (check[y] == false) {  
    q.push(y)  
    check[y] = true;  
}
```

↳

줄 세우기

<https://www.acmicpc.net/problem/2252>

- N명의 학생들을 키 순서대로 줄을 세우려고 한다
- 각 학생의 키를 직접 재서 정렬하면 간단하겠지만, 마땅한 방법이 없어서 두 학생의 키를 비교하는 방법을 사용하기로 하였다
- 그나마도 모든 학생들을 다 비교해 본 것이 아니고, 일부 학생들의 키만을 비교해 보았다.
- 일부 학생들의 키를 비교한 결과가 주어졌을 때, 줄을 세우는 프로그램을 작성하시오.

줄 세우기

<https://www.acmicpc.net/problem/2252>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/17c688e9cc98568989c7>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/f62c5a1d4324f28e0c14>

문제집

<https://www.acmicpc.net/problem/1766>

- 위상 정렬에서 큐 대신에 우선 순위 큐를 사용해야 한다

문제집

<https://www.acmicpc.net/problem/1766>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/c6e346baef8b6d4b011c>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/5b5467aea67b63f4ec58>

작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 작업의 선행관계가 주어졌을 때 모두 마치는 가장 빠른 시간
- 위상 정렬을 응용해서 풀 수 있다

작업

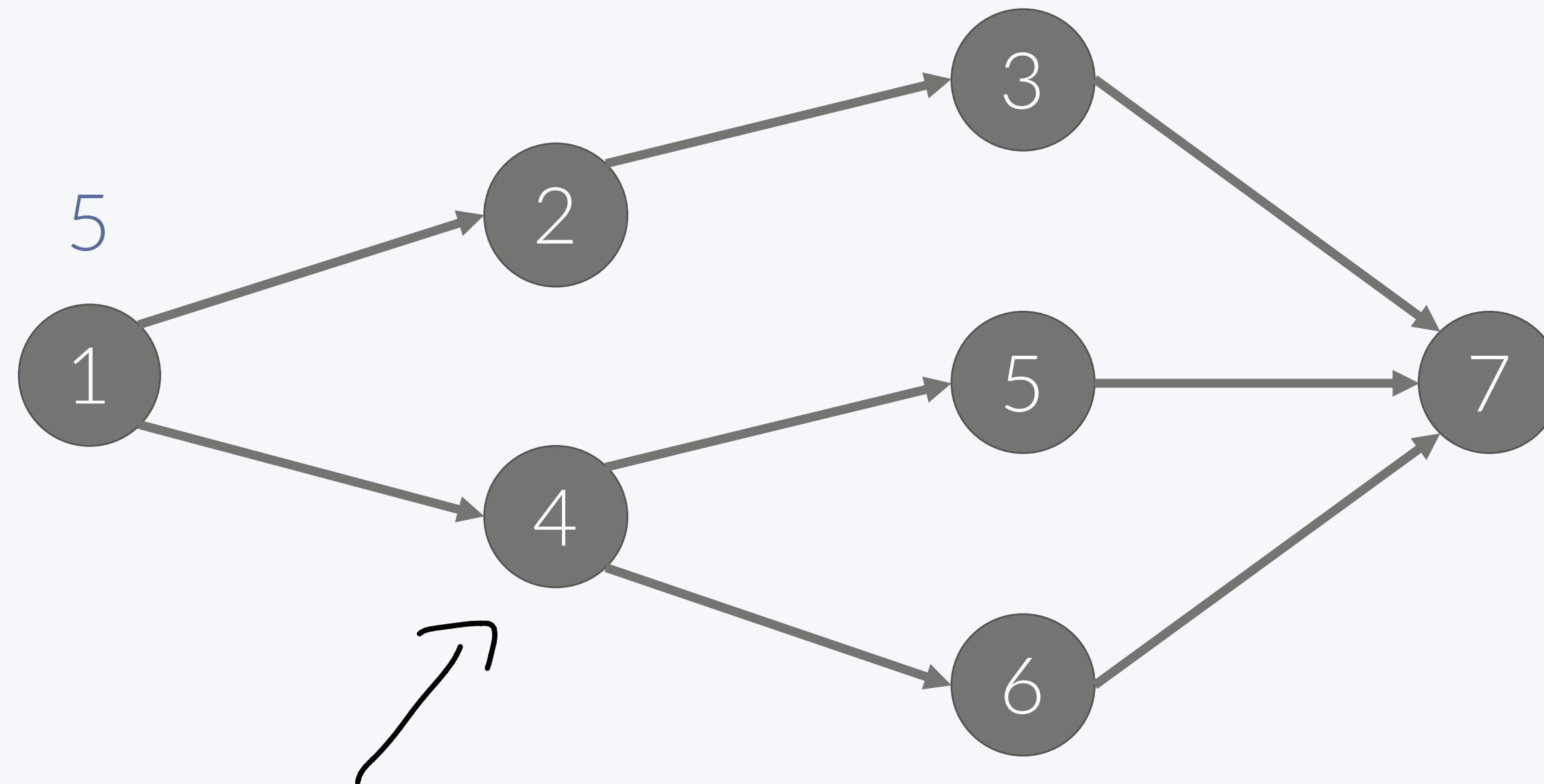
32

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

작업 소요시간

- 큐: 1
- 현재 작업:

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

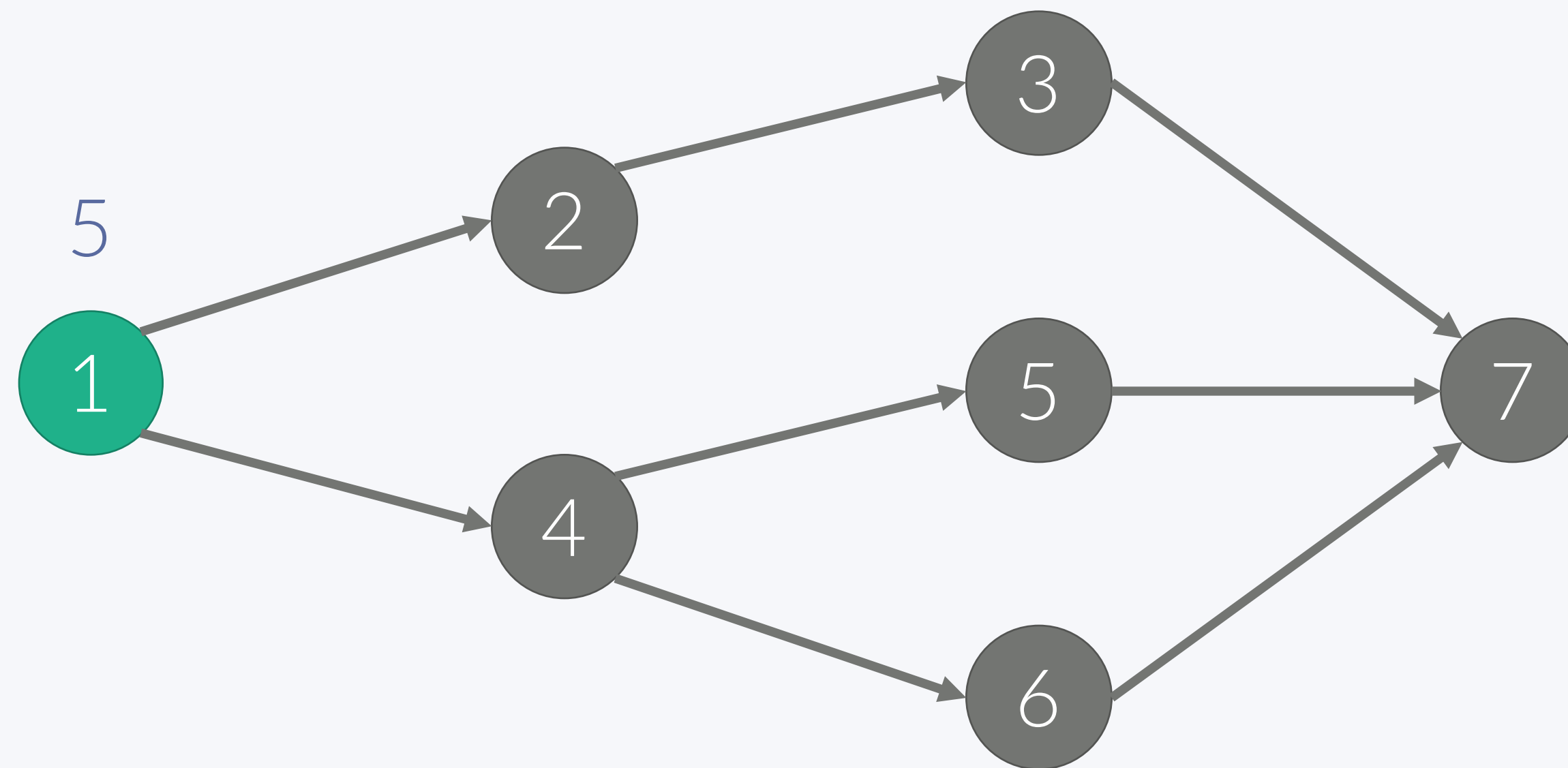


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐:
- 현재 작업: 1

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

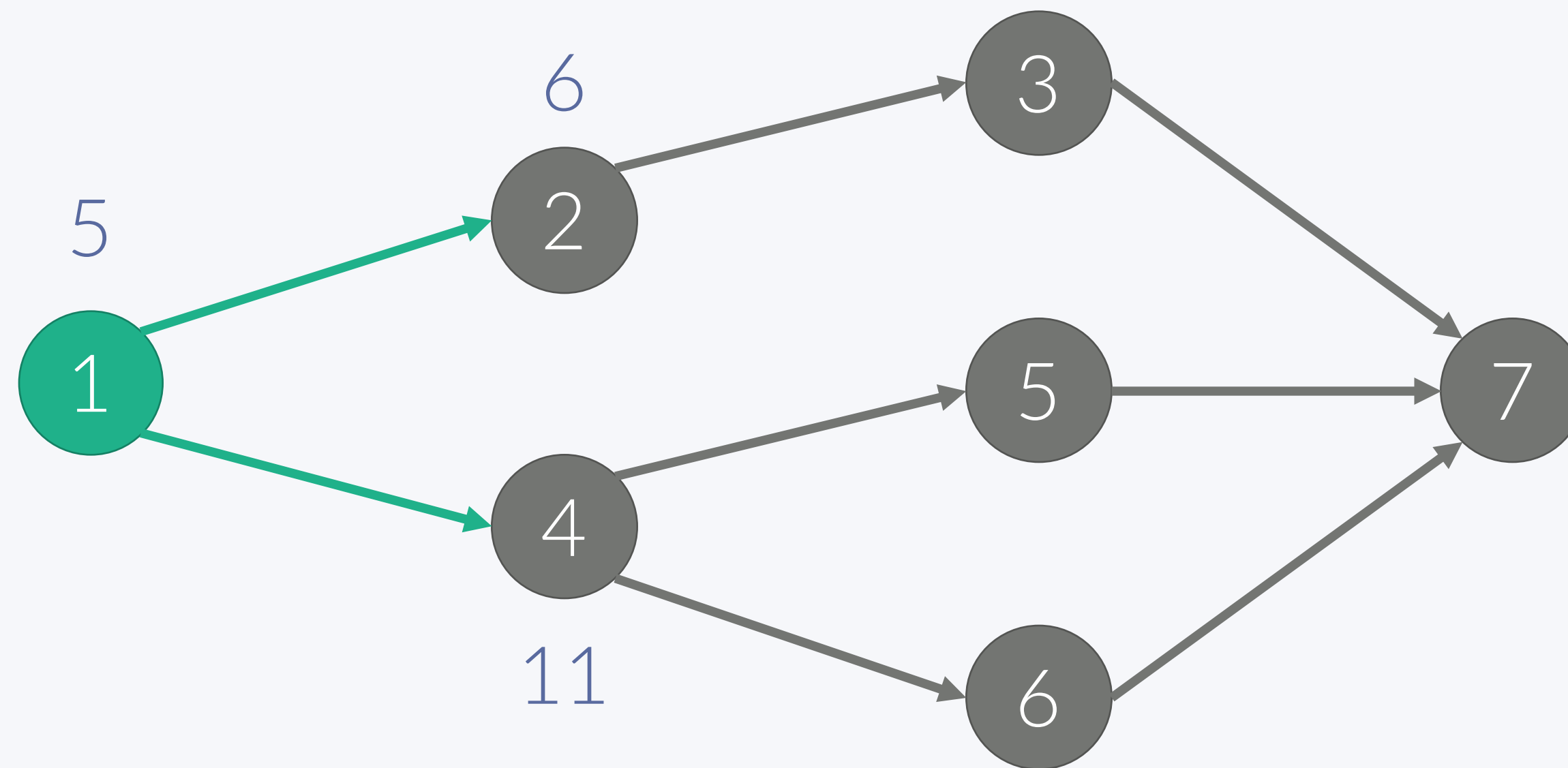


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 2 4
- 현재 작업: 1

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4



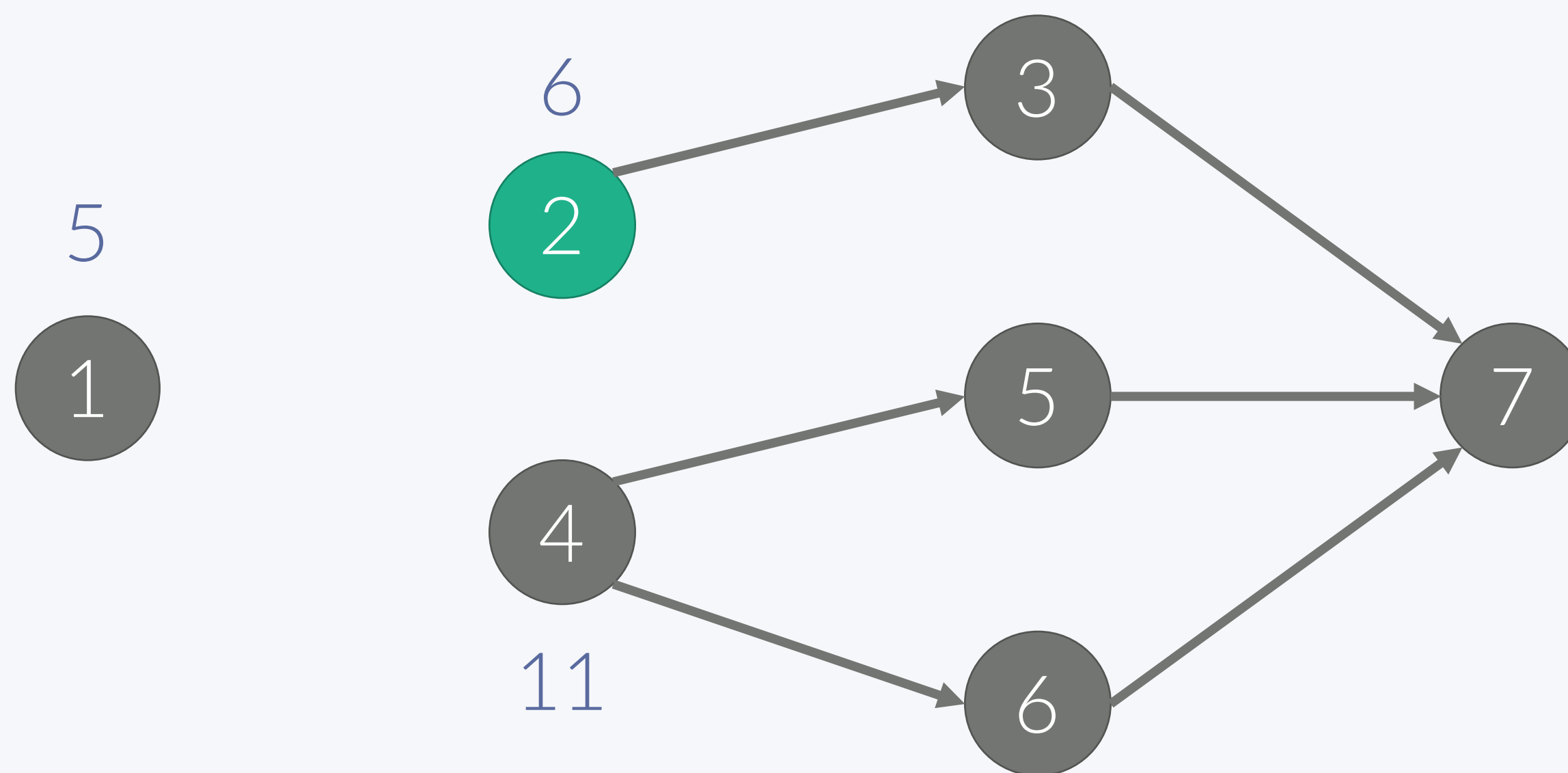
작업

35

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 4
- 현재 작업: 2

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4



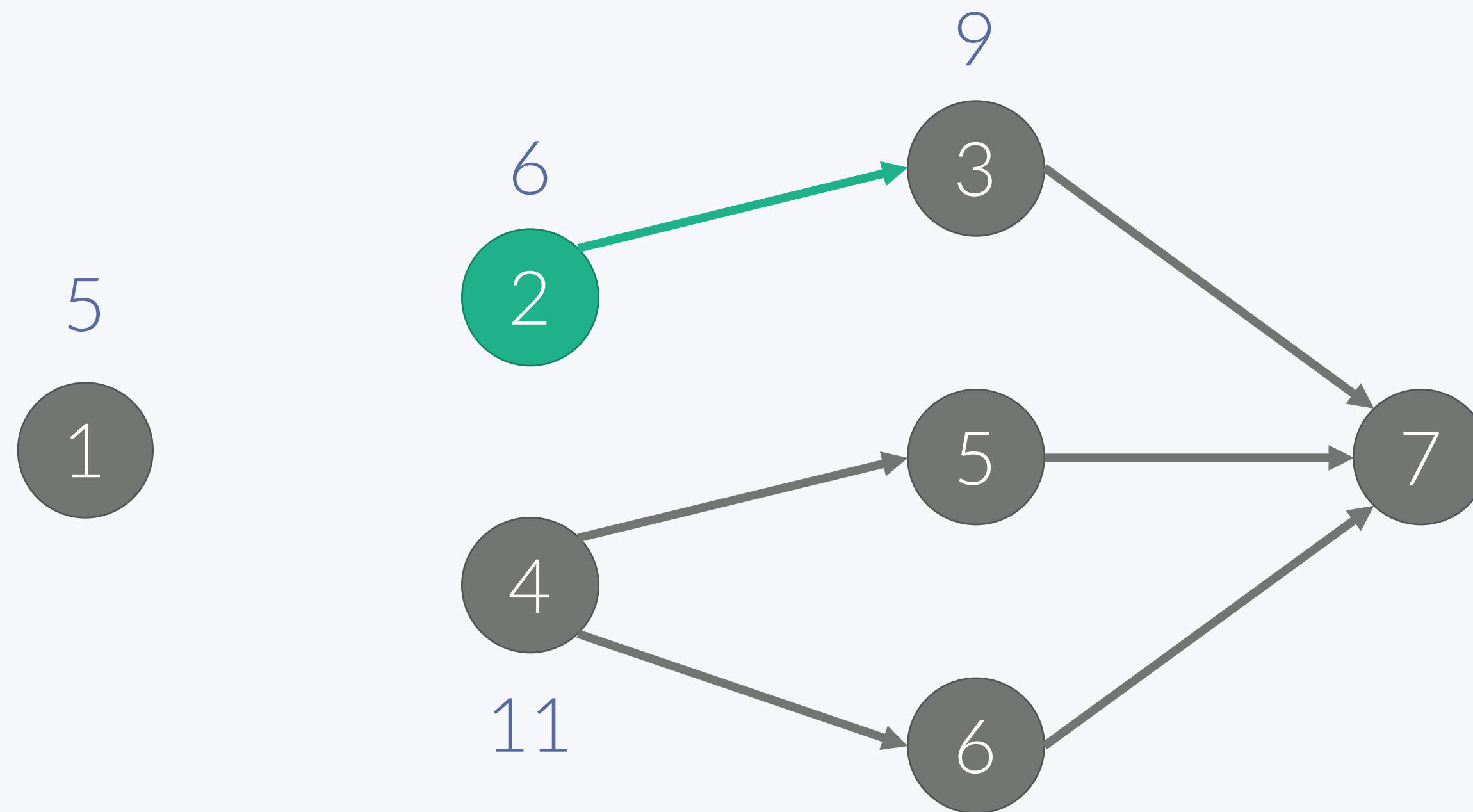
작업

36

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 4
- 현재 작업: 2

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

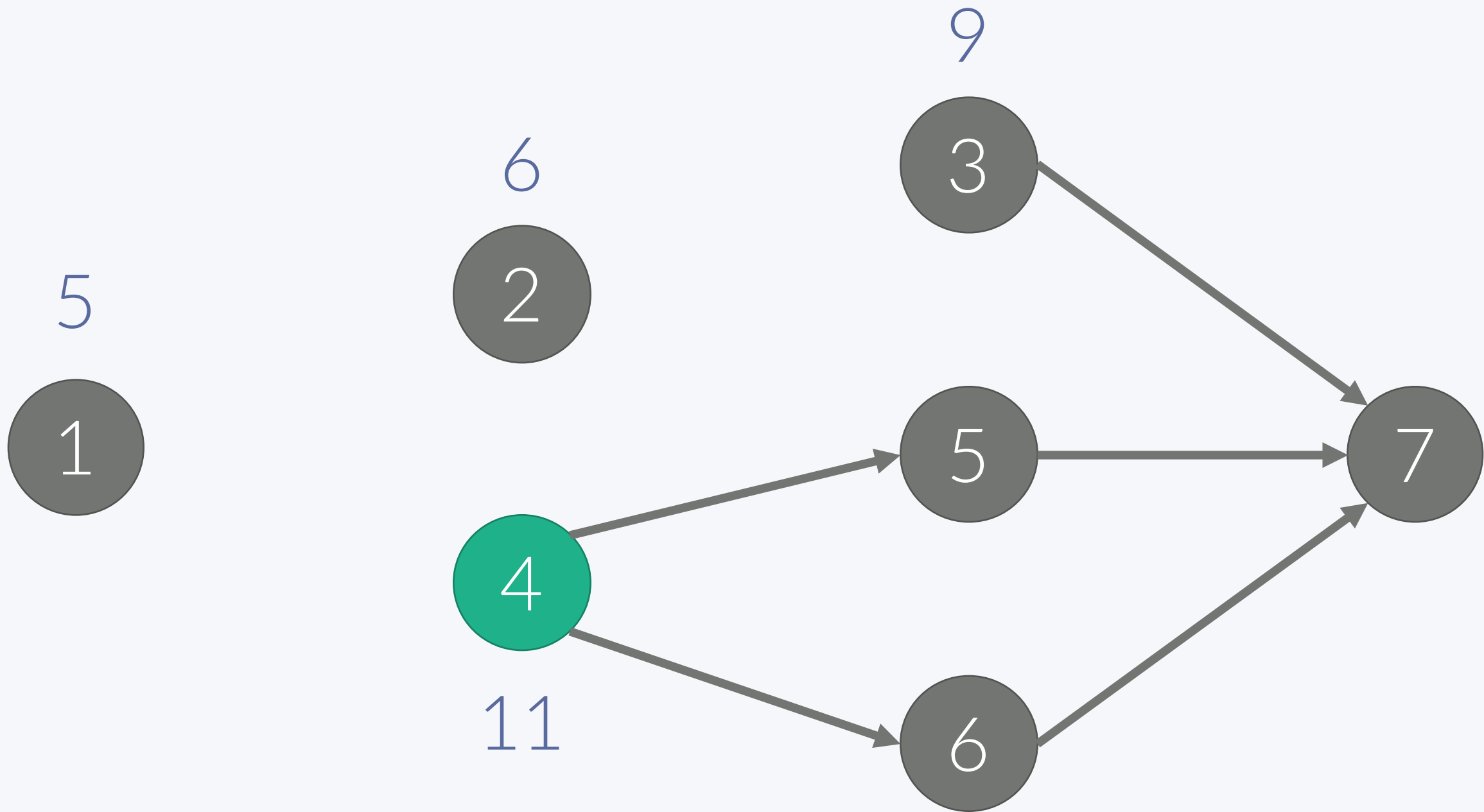


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 3
- 현재 작업: 4

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4



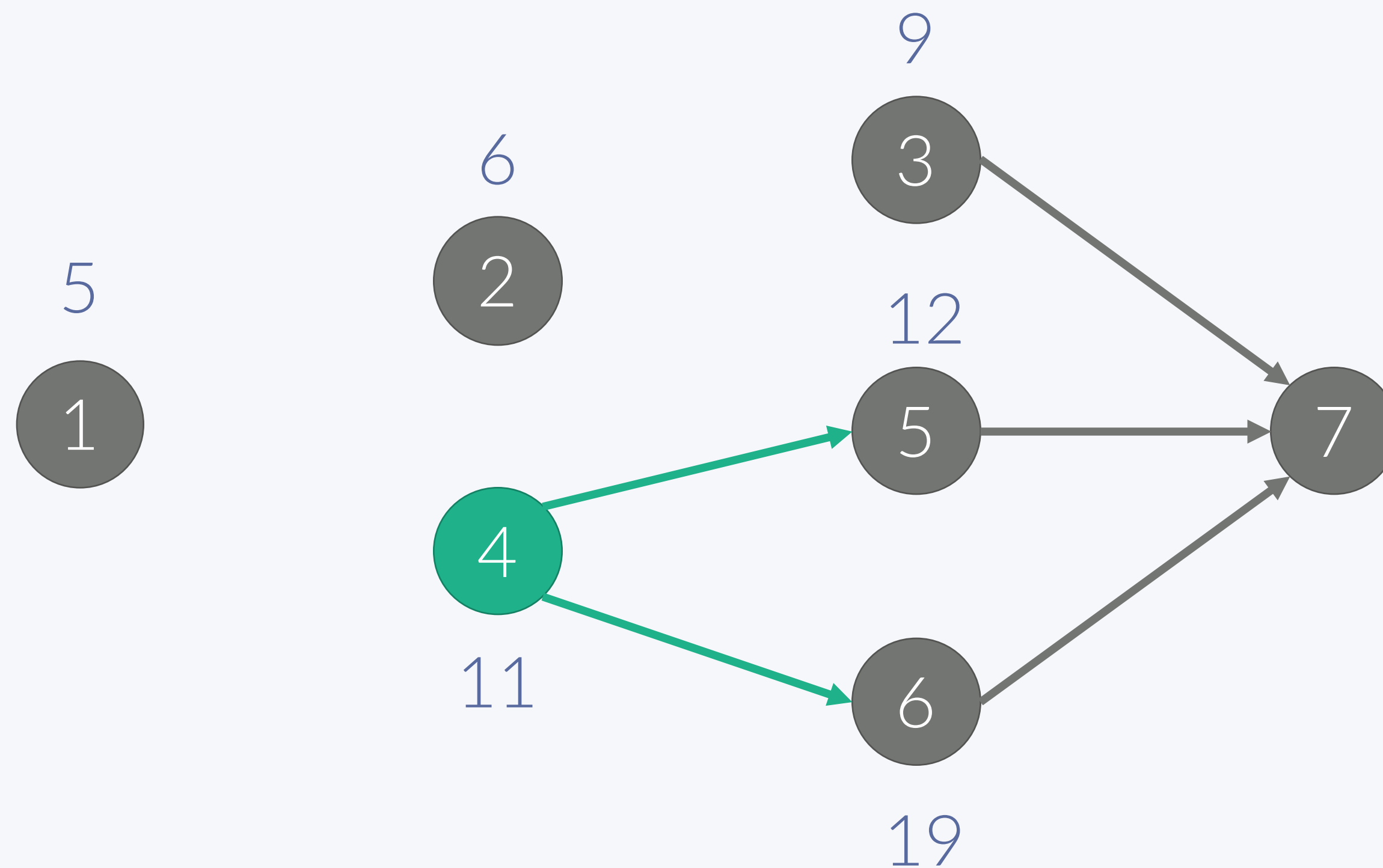
작업

38

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 3
- 현재 작업: 4

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

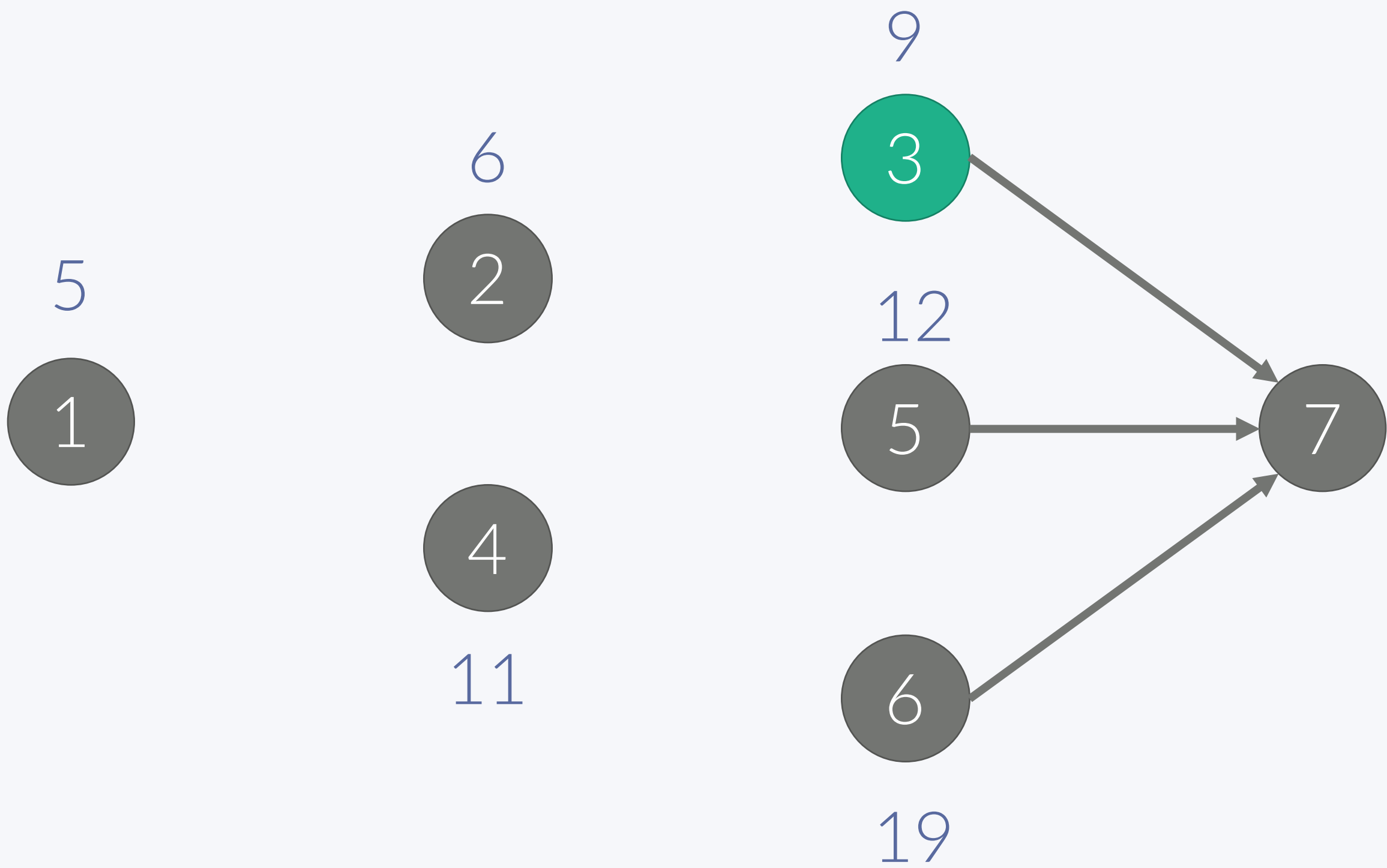


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 5 6
- 현재 작업: 3

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

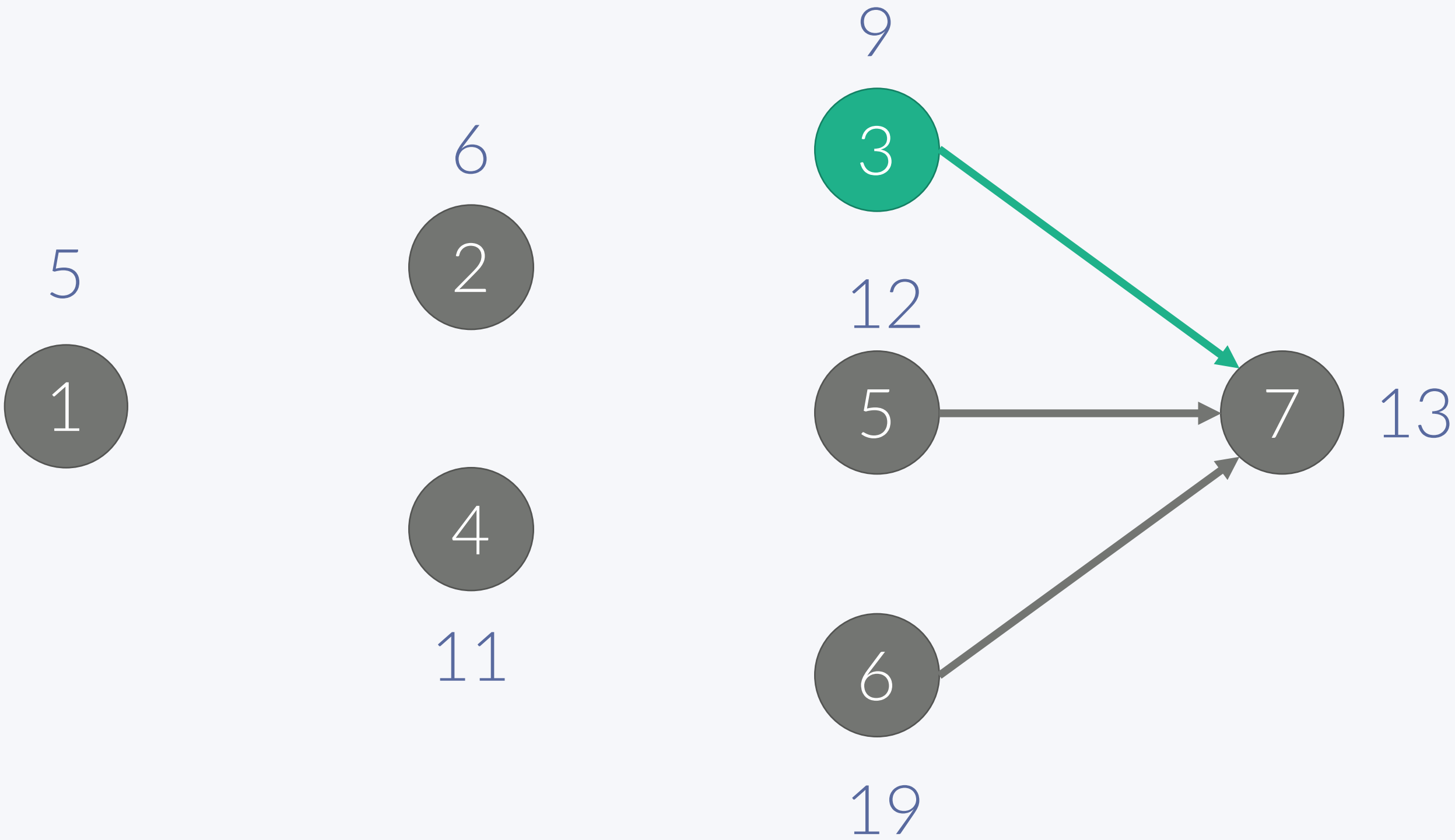


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 5 6
- 현재 작업: 3

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

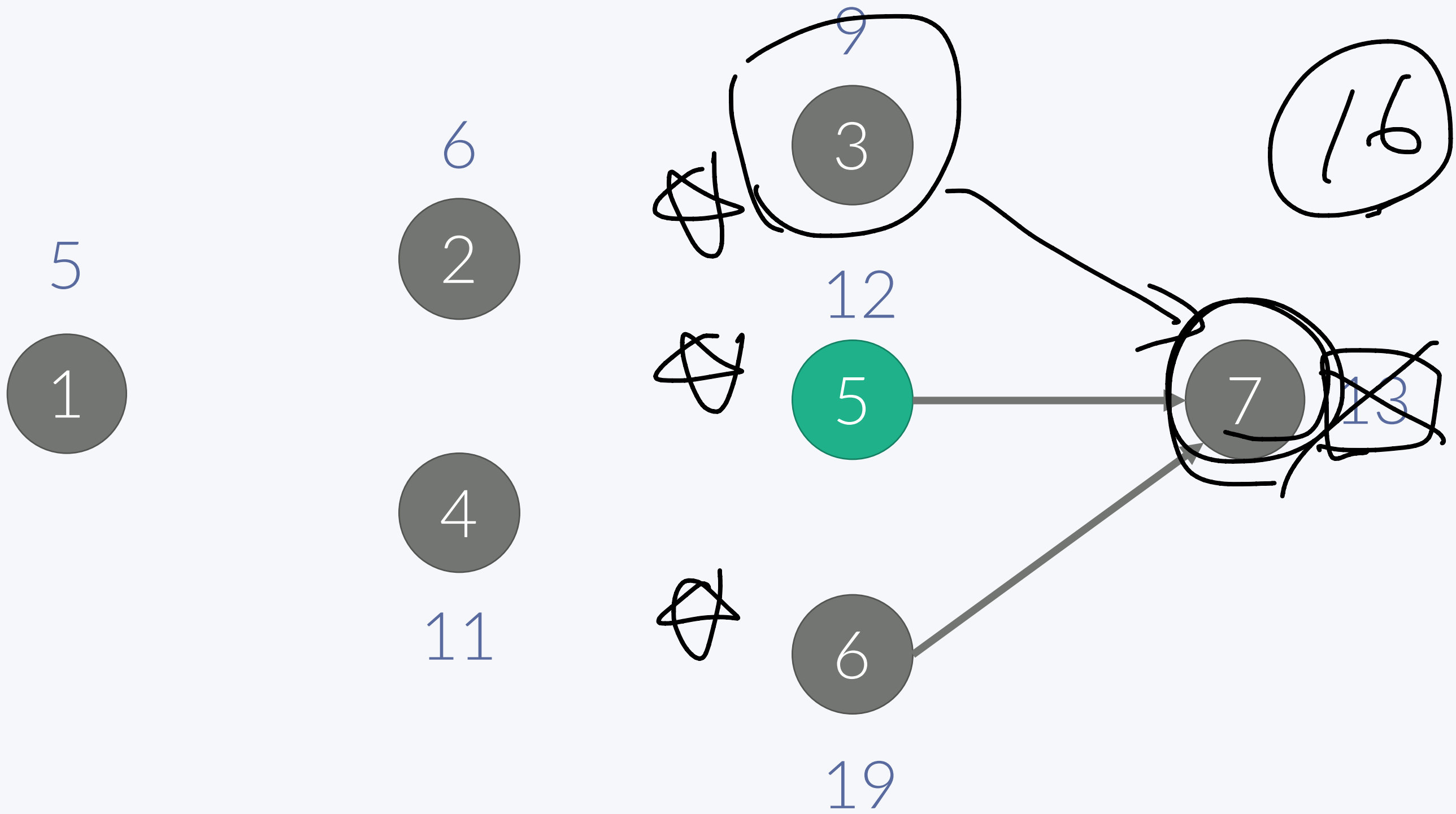


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 6
- 현재 작업: 5

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

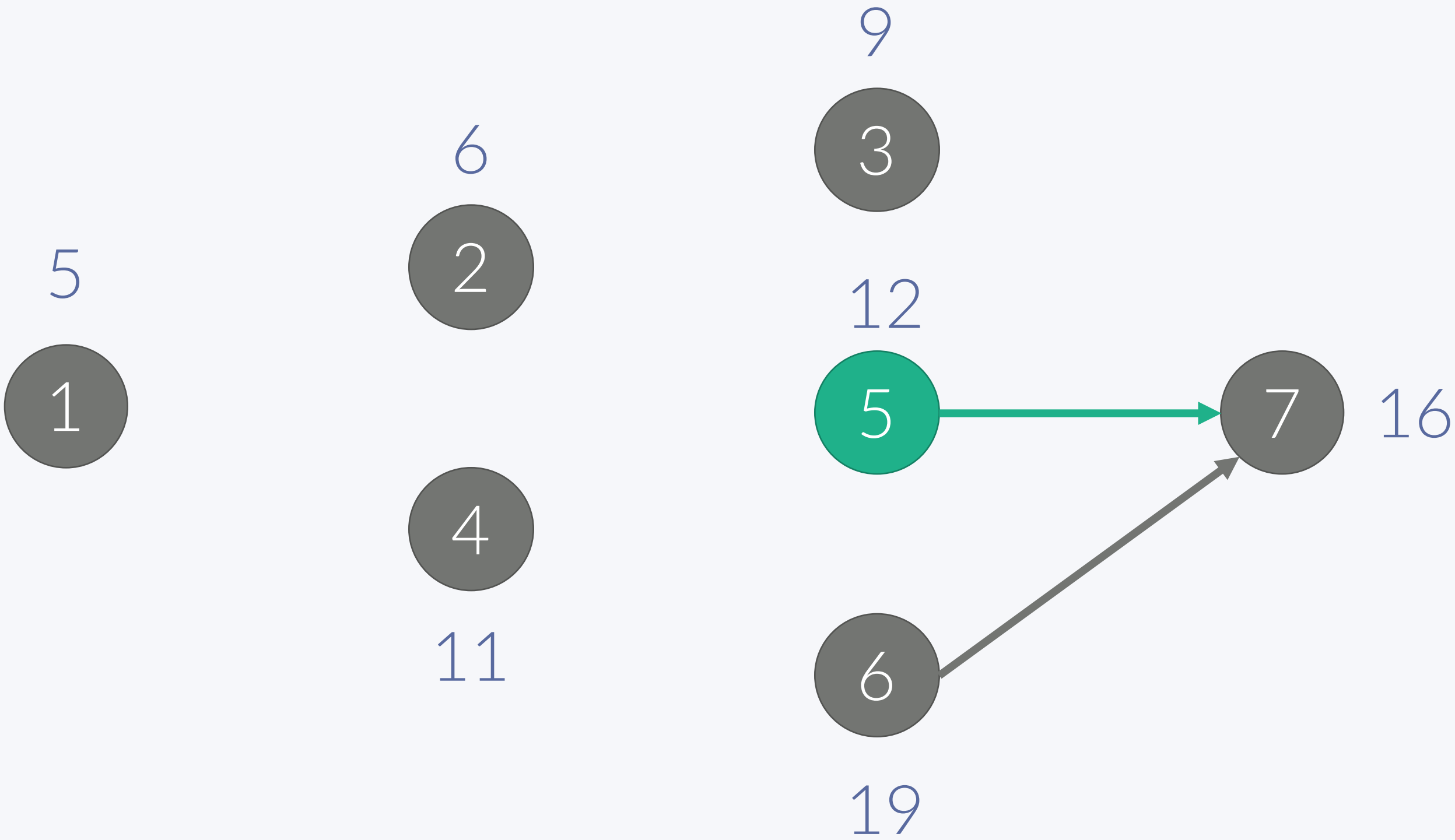


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐: 6
- 현재 작업: 5

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

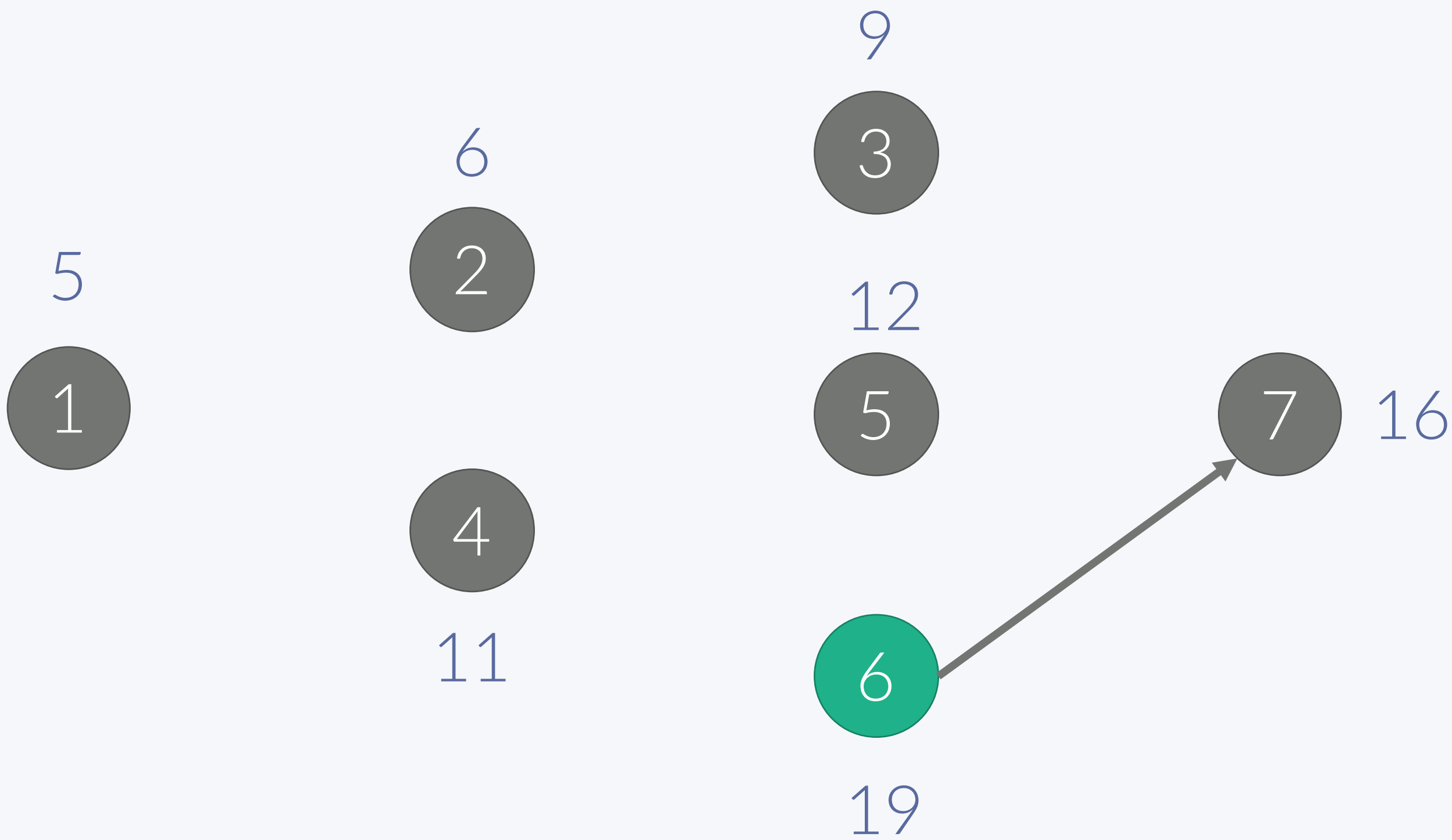


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐:
- 현재 작업: 6

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4



작업

44

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

• 큐:

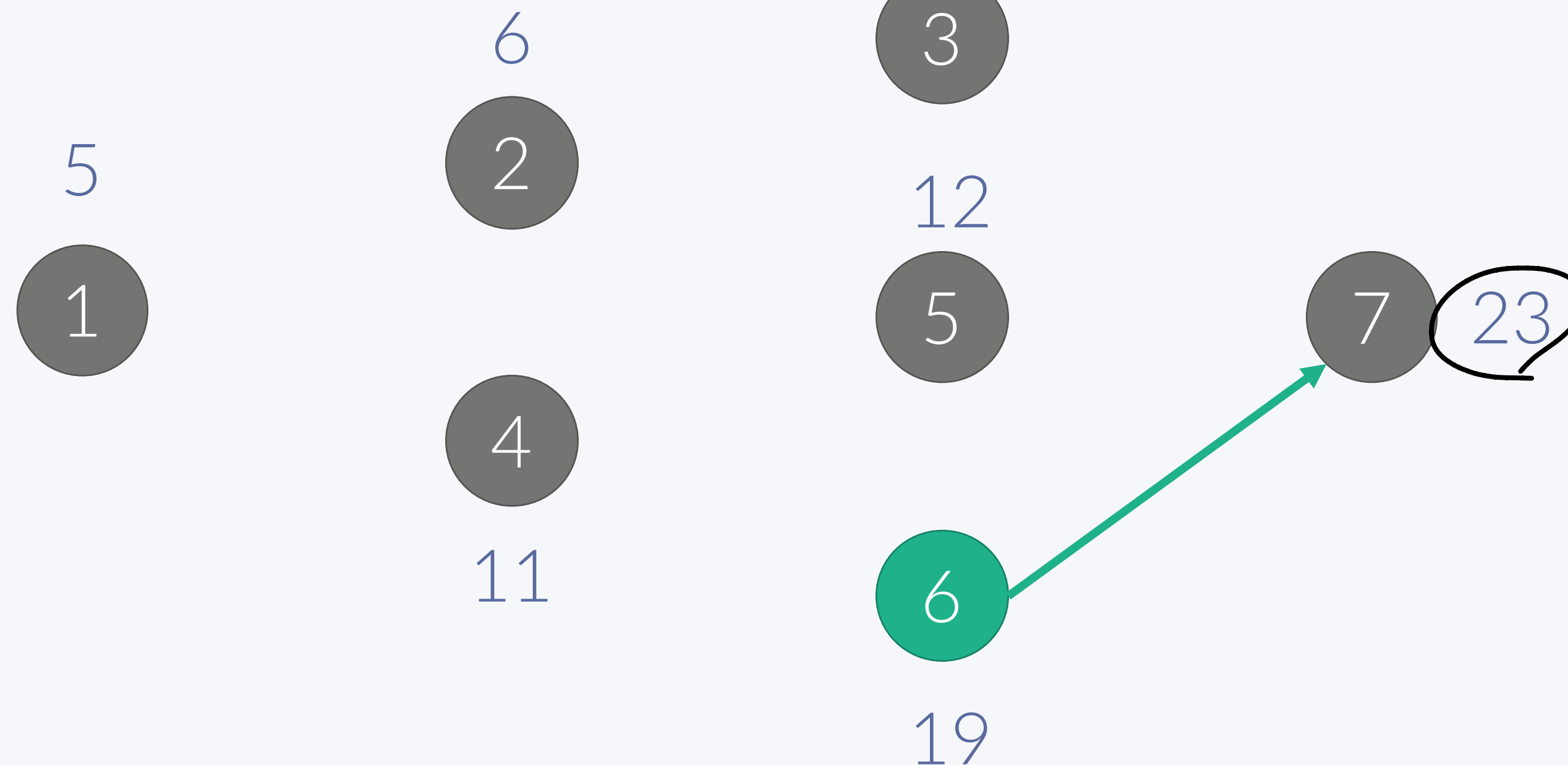
• 현재 작업: 6

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

BFS

$O(V+E)$

$O(V \lg V)$

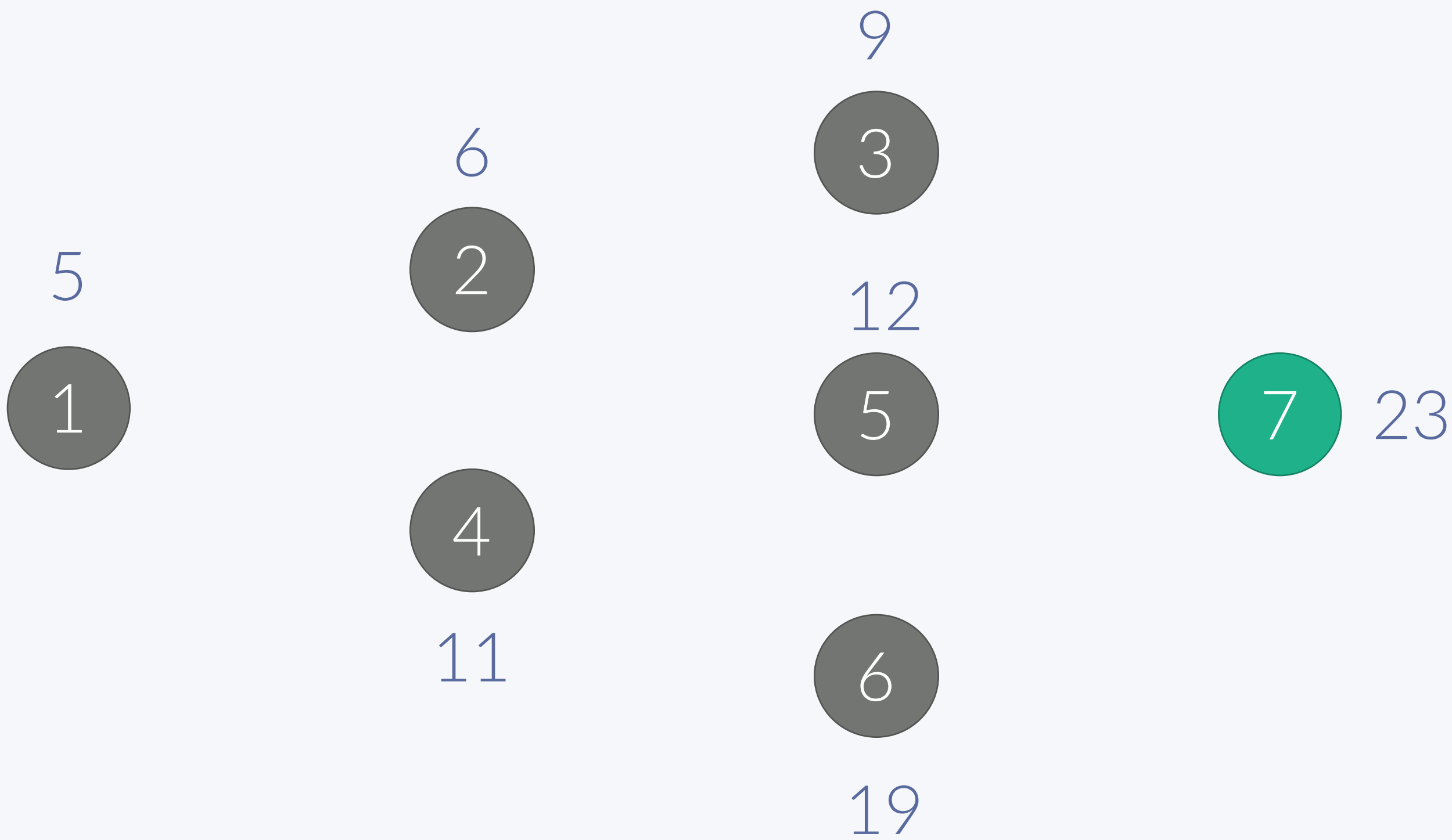


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐:
- 현재 작업: 7

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4

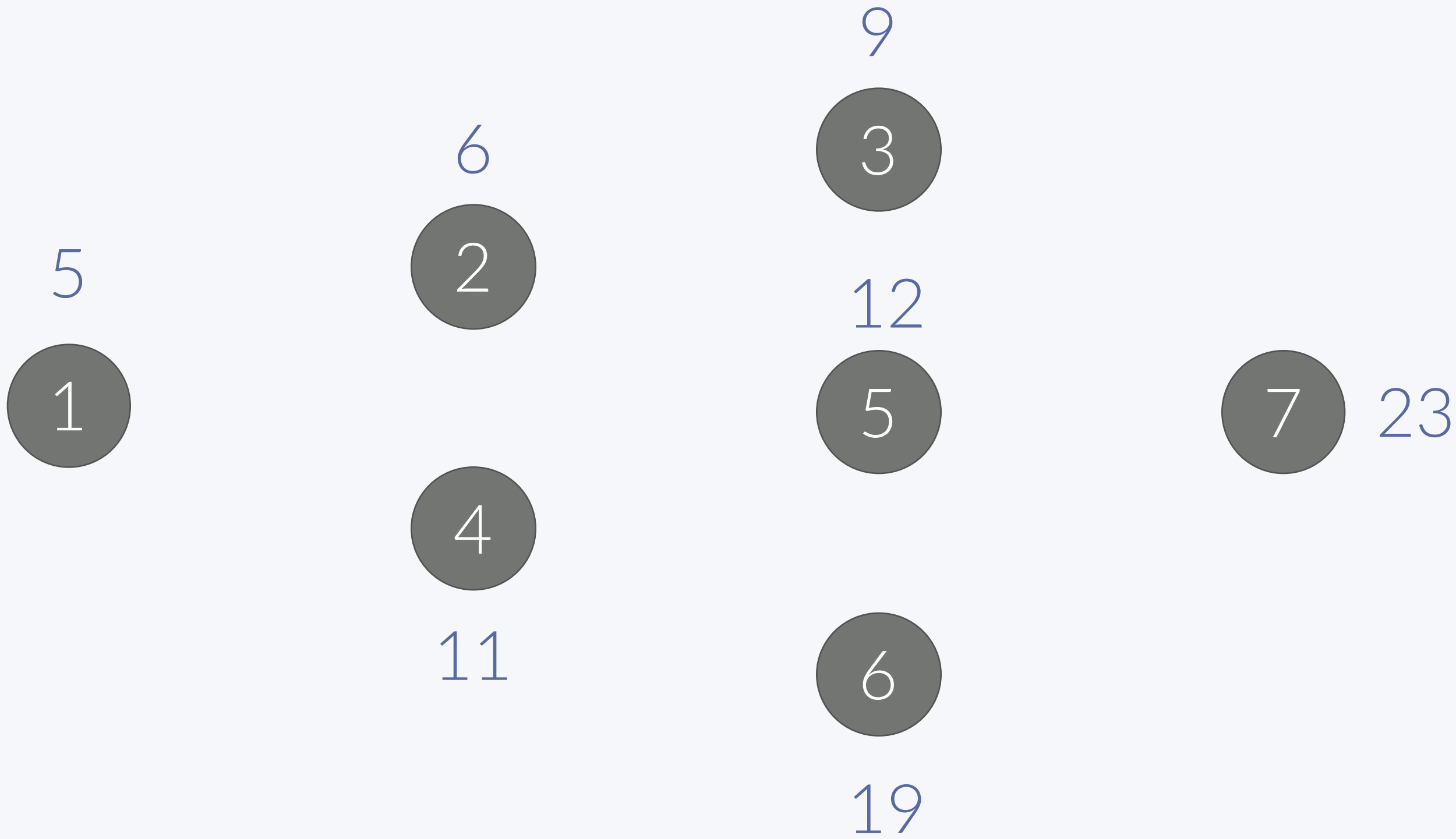


작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- 큐:
- 현재 작업:

i	1	2	3	4	5	6	7
시간	5	1	3	6	1	8	4



작업

<https://www.acmicpc.net/problem/2056>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/fc6e0f974a4d65309e85>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/13769e8e0f06fa9ae383>

게임 개발

48

<https://www.acmicpc.net/problem/1516>

- N개의 각 건물이 완성되기까지 걸리는 최소 시간 구하기

MST

Minimum
Spanning
Tree

최소 스패닝 트리

Minimum Spanning Tree

스패닝 트리: 그래프 → 트리
있던 간선만 사용

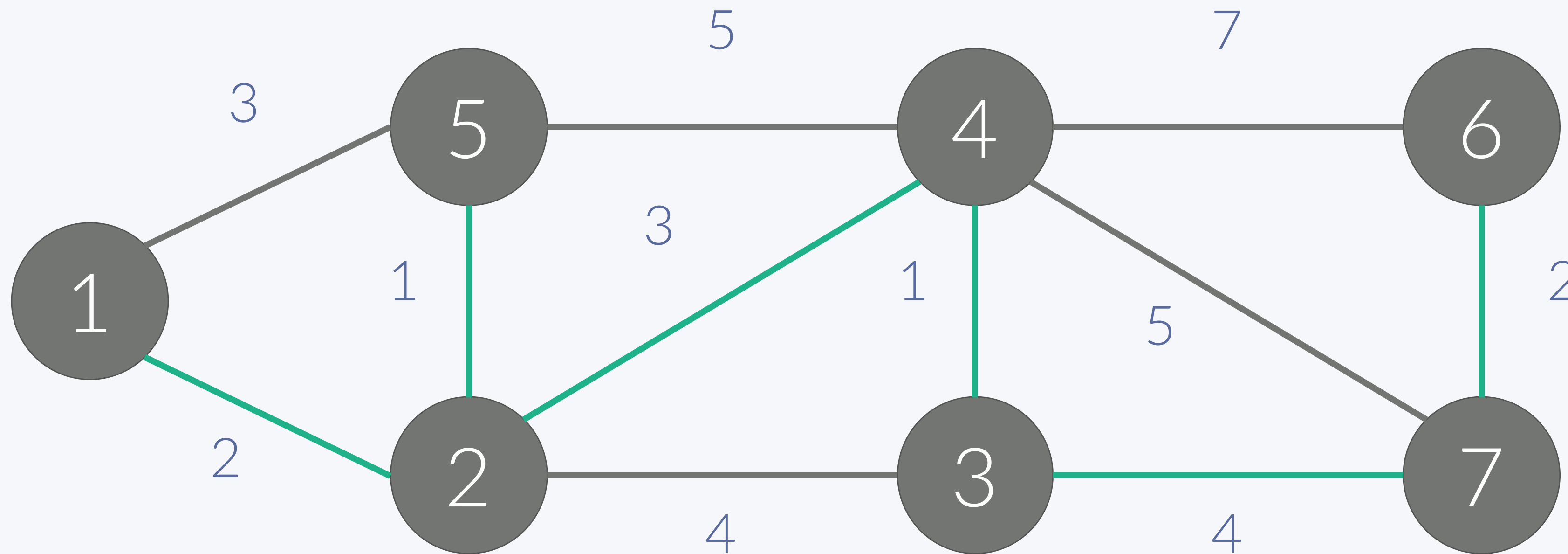
50

- 스패닝 트리: 그래프에서 일부 간선을 선택해서 만든 트리

- 최소 스패닝 트리: 스패닝 트리 중에 선택한 간선의 가중치의 합이 최소인 트리

선택하는 간선
가중치 합 최소

MST



프림

2기21

프림 (prim)

크루스칼 (kruskal)

MST

점점 ↑

간선 ↑

프림

Prim

1. 그래프에서 아무 정점이나 선택한다.
2. 선택한 정점과 선택하지 않은 정점을 연결하는 간선중에 최소값을 고른다. 이 간선을 (u, v) 라고 한다. ($u =$ 선택, $v =$ 선택하지 않음)
3. 선택한 간선을 MST에 추가하고, v 를 선택한다.
4. 모든 정점선택하지 않았다면, 2번 단계로 돌아간다.

프림

Prim

- 선택: 1

합: (점 번호, 가중치)

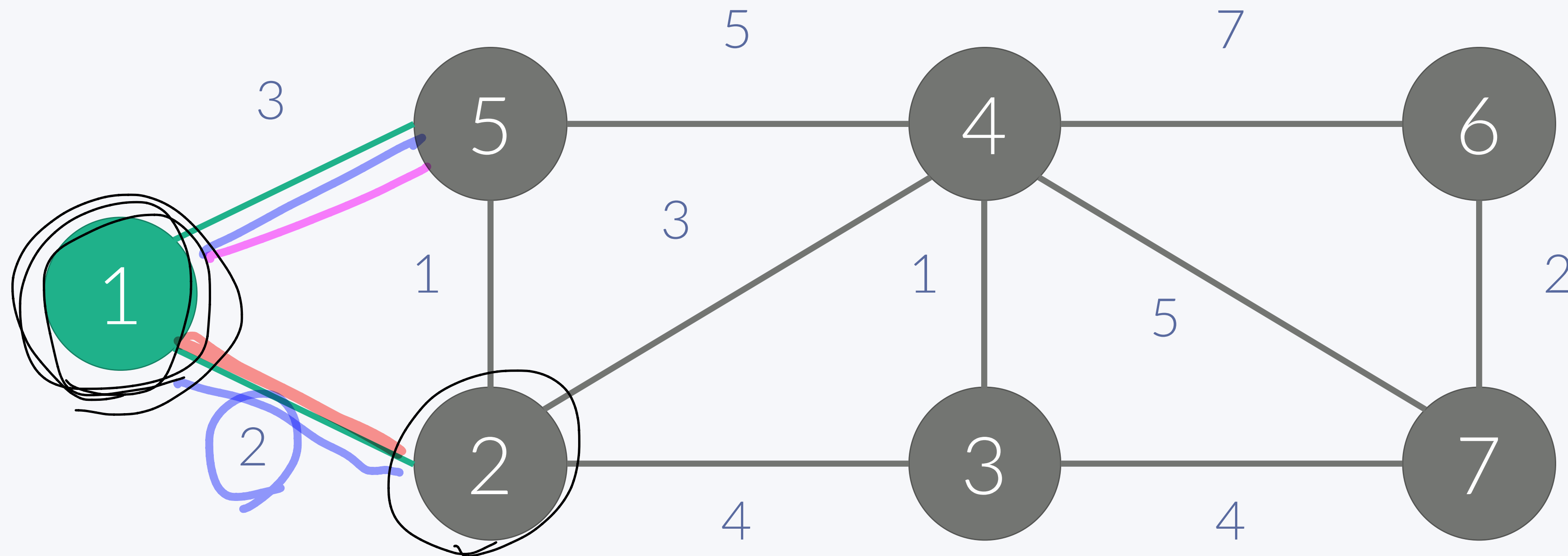
(2, 2)

(5, 3)

모든 간선

(선택 - 선택 x)

간선 포함



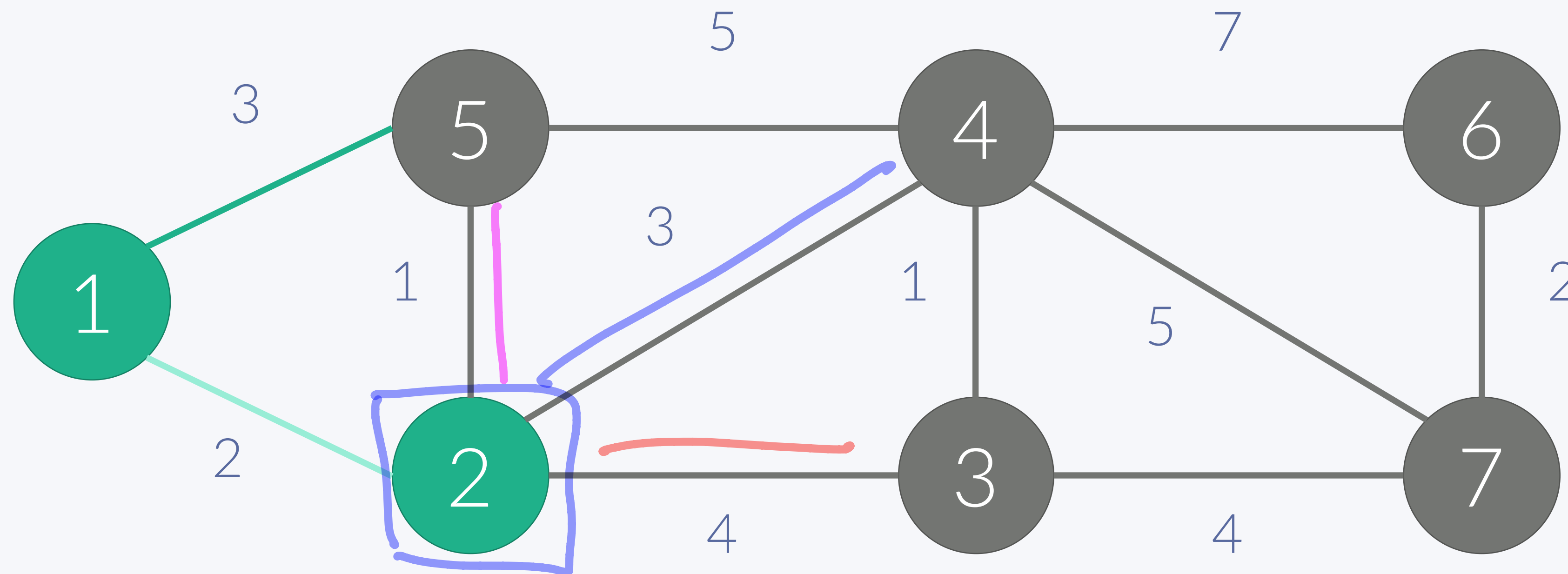
프림

Prim

- 선택: 1 2

$\frac{1}{0}$

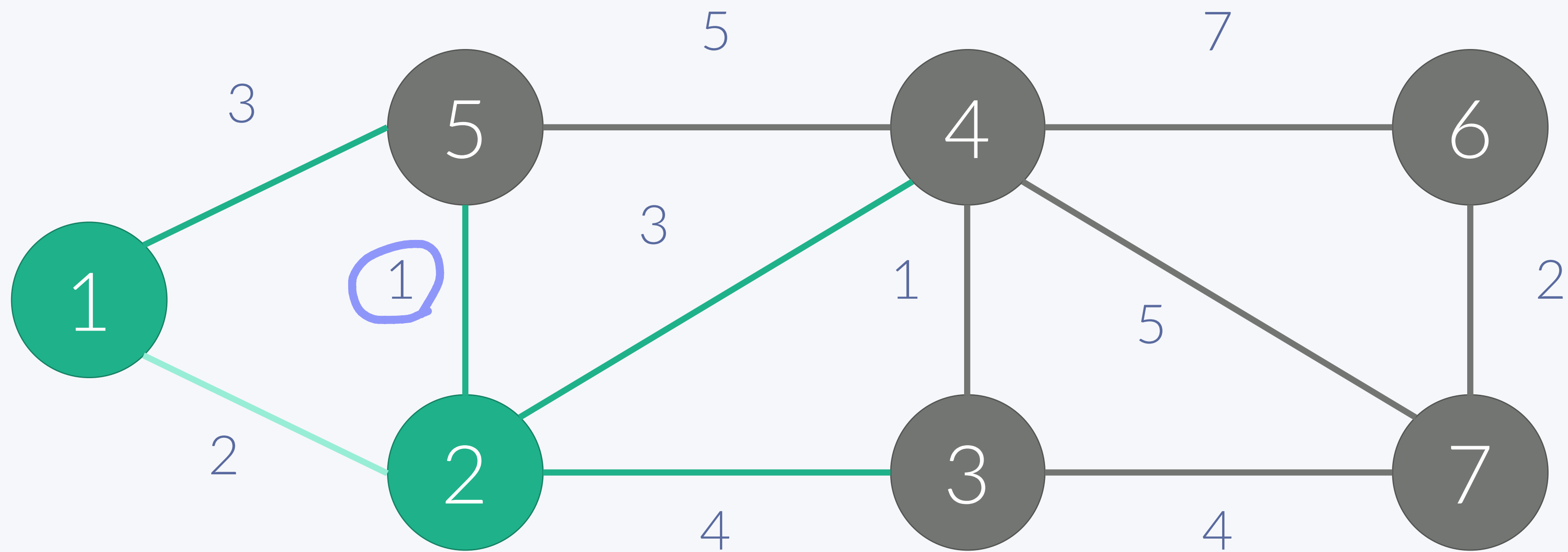
$(5, 3)$
 $(5, 1)$
 $(4, 3)$
 $(3, 4)$



프림

Prim

- 선택: 1 2

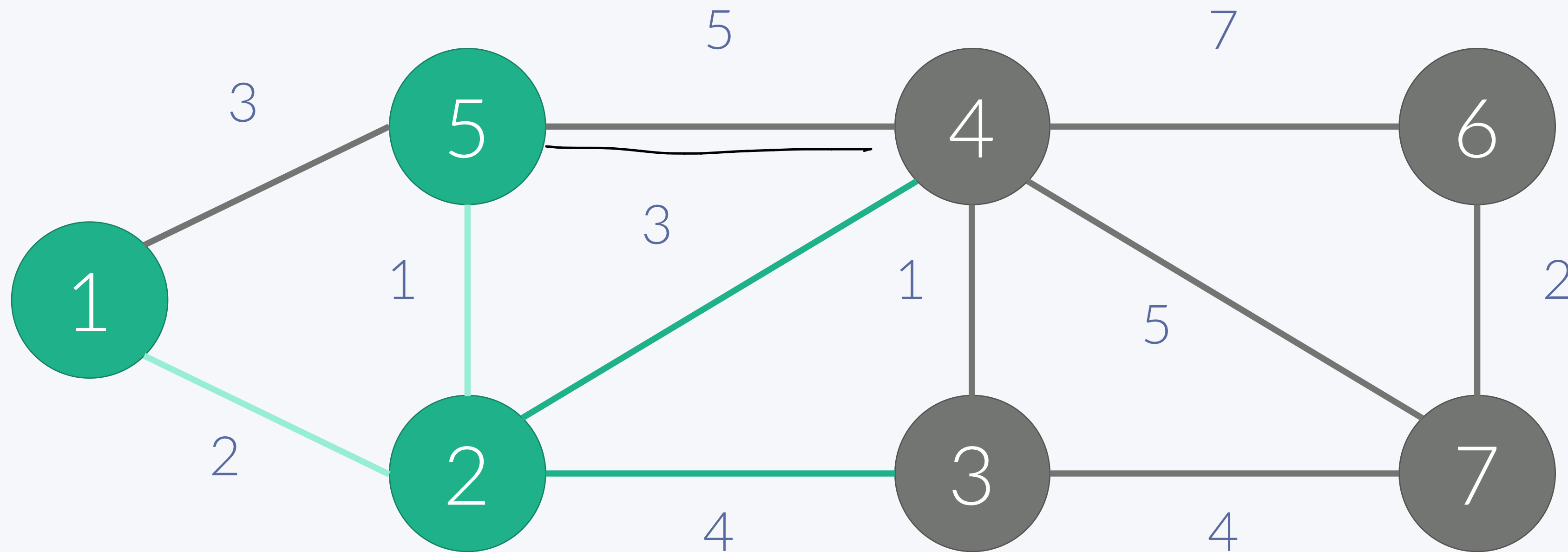


프림

Prim

- 선택: 1 2 5

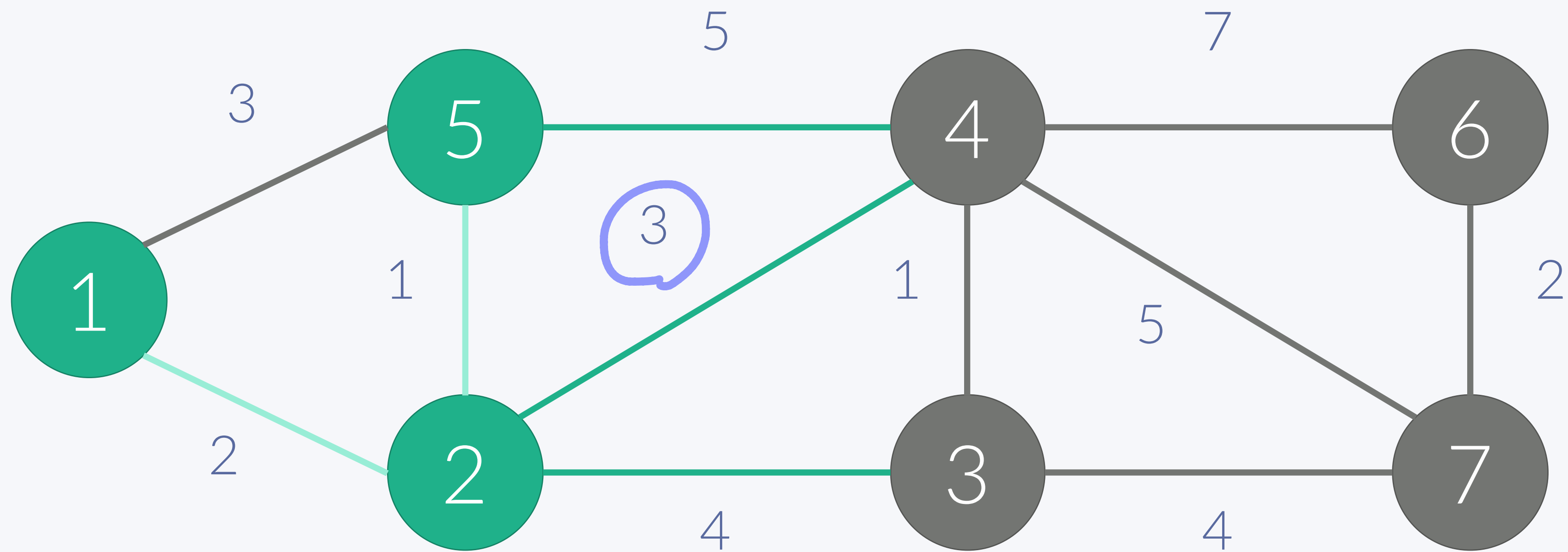
$(4, 5)$
 $(4, 3)$ ←
 $(3, 4)$



프림

Prim

- 선택: 1 2 5

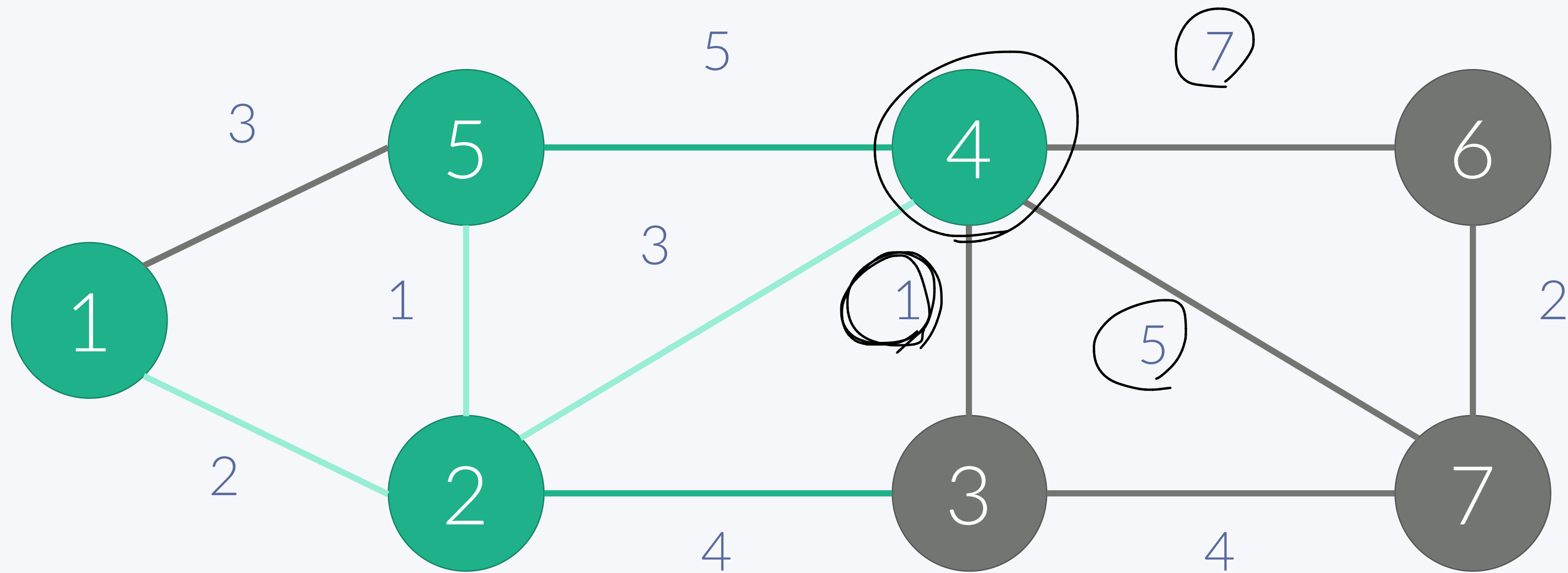


프림

Prim

- 선택: 1 2 5 4

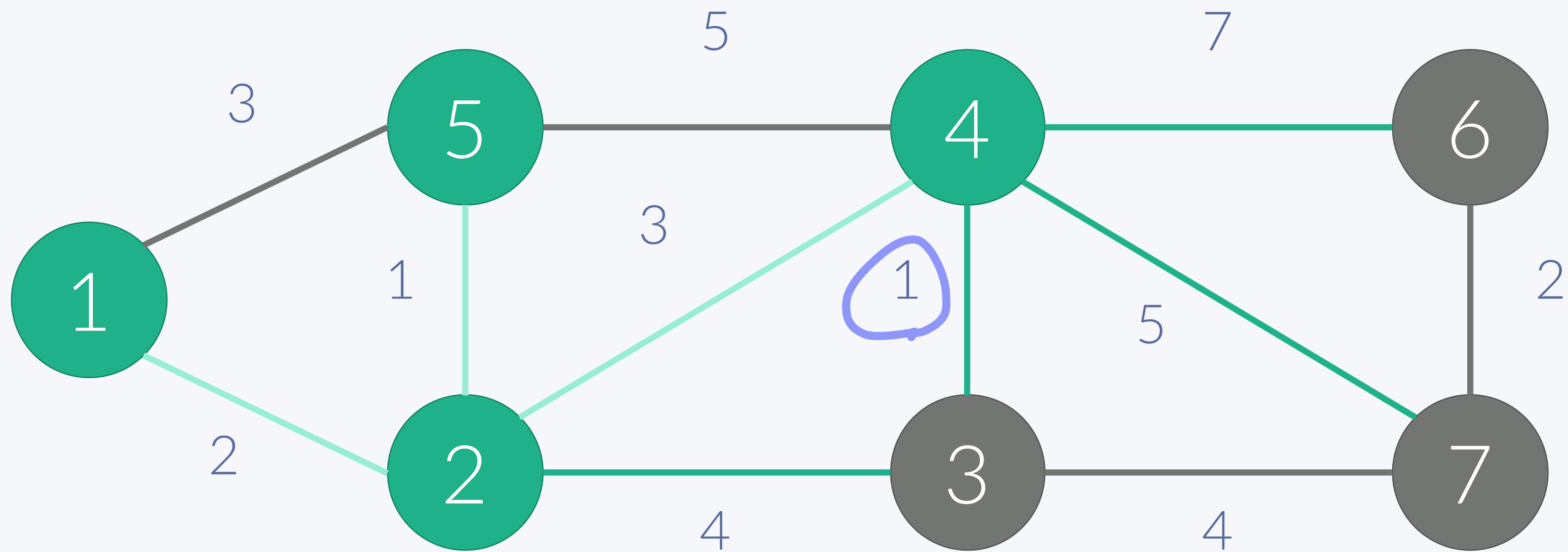
$(4, 5)$ $(6, 7)$
 $(3, 4)$ $(7, 5)$
 ~~$(3, 1)$~~



프림

Prim

- 선택: 1 2 5 4

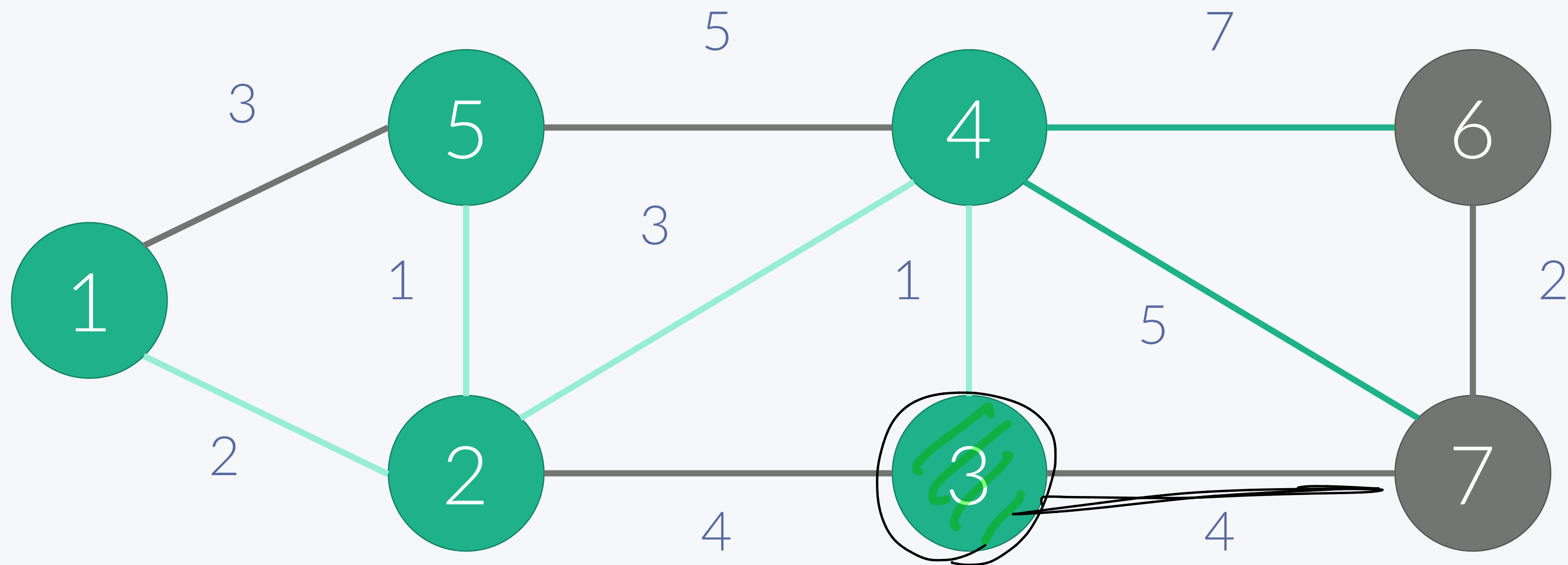


프림

Prim

- 선택: 1 2 5 4 3

$(4, 5)$ $(6, 7)$
 ~~$(3, 4)$~~ $(7, 5)$
 $(7, 4)$

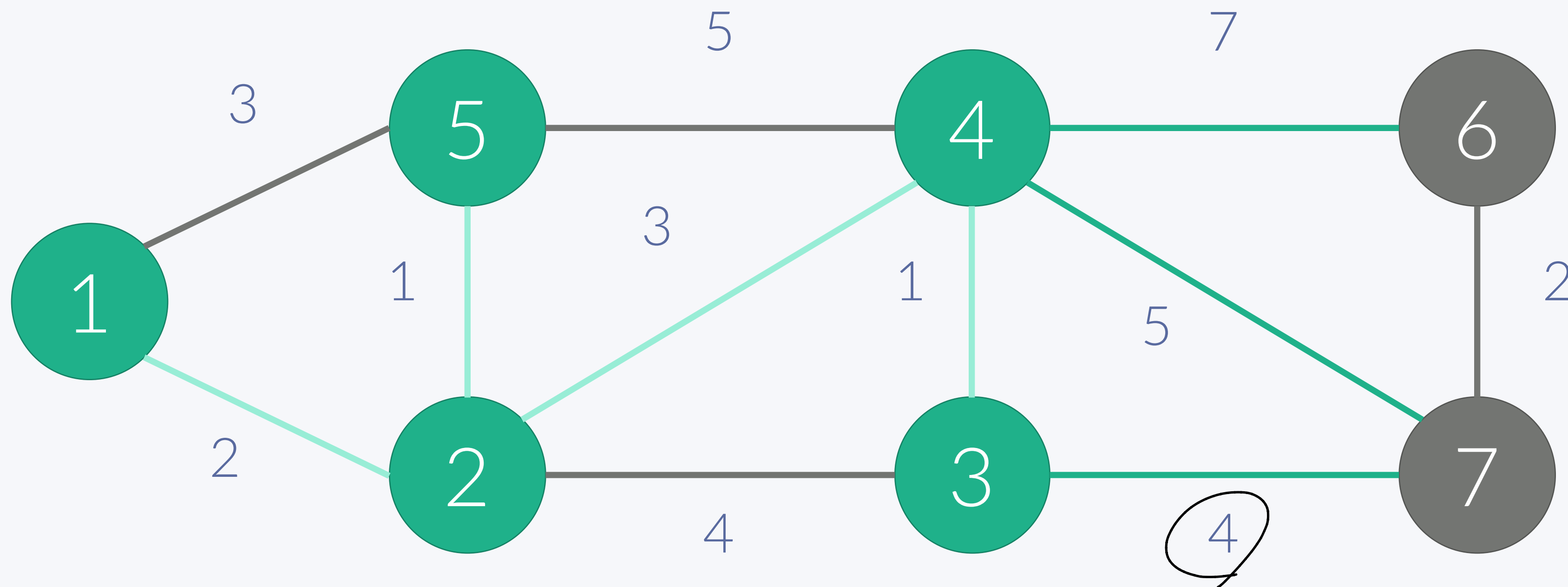


프림

Prim

- 선택: 1 2 5 4 3

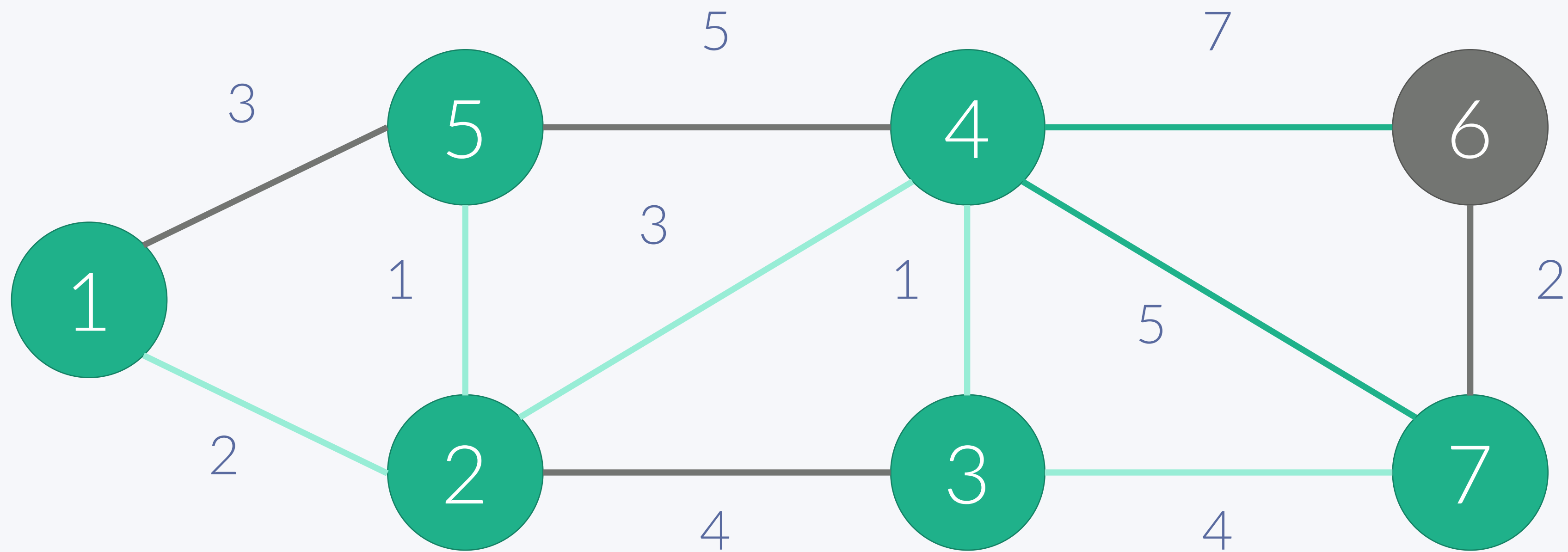
선택 - 선택



프림

Prim

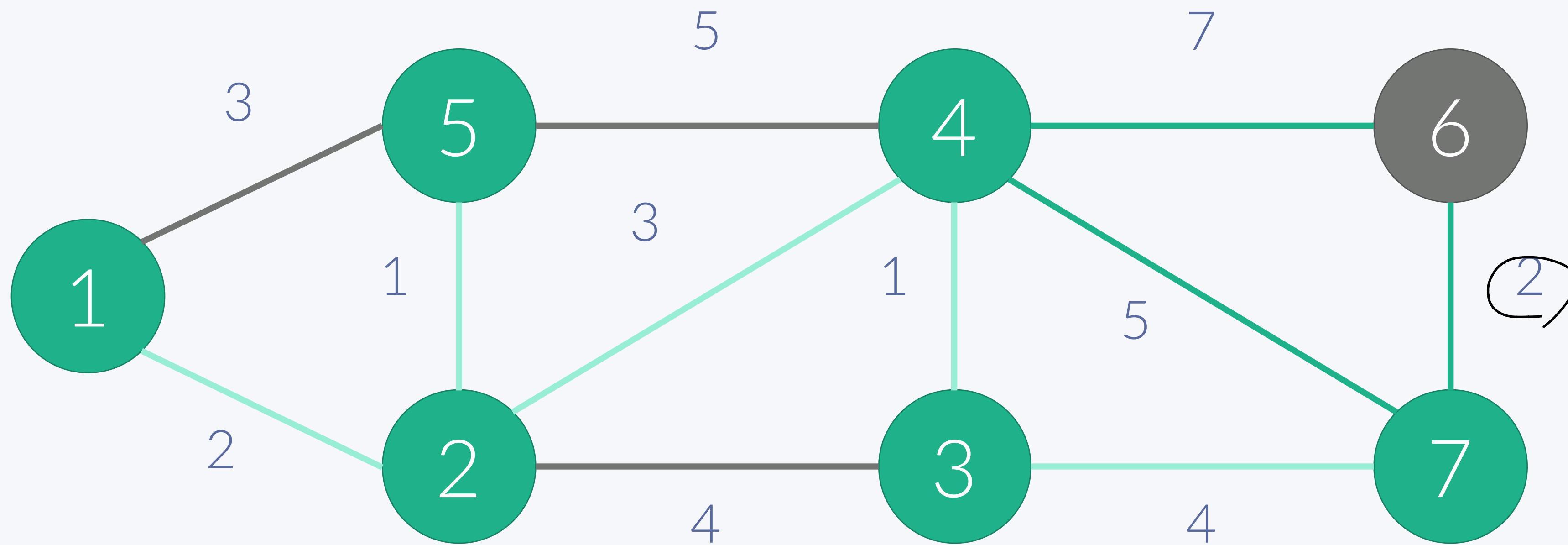
- 선택: 1 2 5 4 3 7



프림

Prim

- 선택: 1 2 5 4 3 7

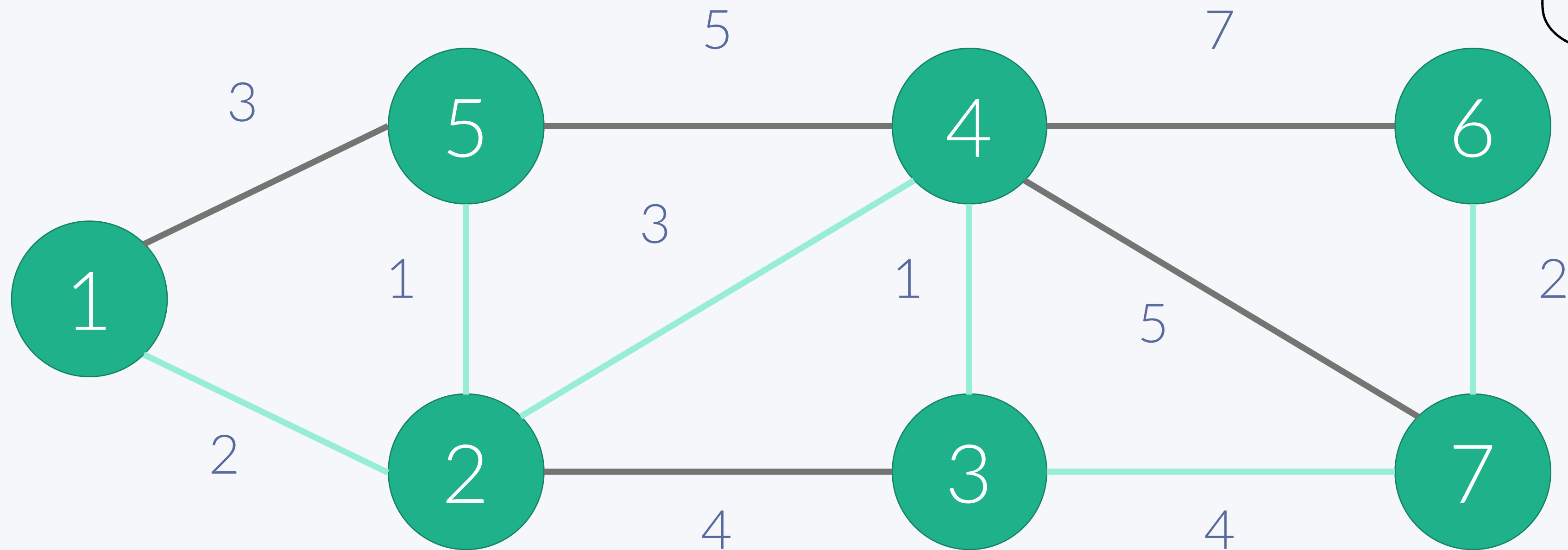


프림

Prim

- 선택: 1 2 5 4 3 7 6

(V) 저장된 선택을 (한 번) 하기
 $O(E)$ 모든 간선
선택 ~ 선택 X 최소
 $O(V E)$ 확인



프림

Prim

1. 그래프에서 아무 정점이나 선택한다.
 2. 선택한 정점과 선택하지 않은 정점을 연결하는 간선중에 최소값을 고른다. 이 간선을 (u, v) 라고 한다. (u = 선택, v = 선택하지 않음)
 3. 선택한 간선을 MST에 추가하고, v 를 선택한다.
 4. 모든 정점선택하지 않았다면, 2번 단계로 돌아간다.
- 각각의 정점을 선택하고 모든 간선을 살펴봐야 한다.
 - 시간 복잡도: $O(V \cdot E)$ 최대 $O(V^3)$

프림

Prim

모든 간선이
중요이
나오기 때문
1번씩 들어갔다
66

1. 그래프에서 아무 정점이나 선택한다.
2. 선택한 정점과 선택하지 않은 정점을 연결하는 간선중에 최소값을 고른다. 이 간선을 (u, v) 라고 한다. (u = 선택, v = 선택하지 않음)
3. 선택한 간선을 MST에 추가하고, v 를 선택한다.
4. 모든 정점선택하지 않았다면, 2번 단계로 돌아간다.

$$O(E \lg E)$$

- 최소값을 우선 순위 큐를 이용하면 최소값을 $\lg E$ 만에 찾을 수 있다
- 시간 복잡도: $O(E \lg E)$

$$O(E \lg E)$$

네트워크 연결

Prim

- 그래프가 주어졌을 때, 그 그래프의 최소 스패닝 트리를 구하기

네트워크 연결

<https://www.acmicpc.net/problem/1922>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/1e2e79615fe4652e2944>
- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/each38feb11c3792ebbd>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/45634a257ef865fc6a7b>

Union - Find

크루스칼

크루스칼

Kruskal

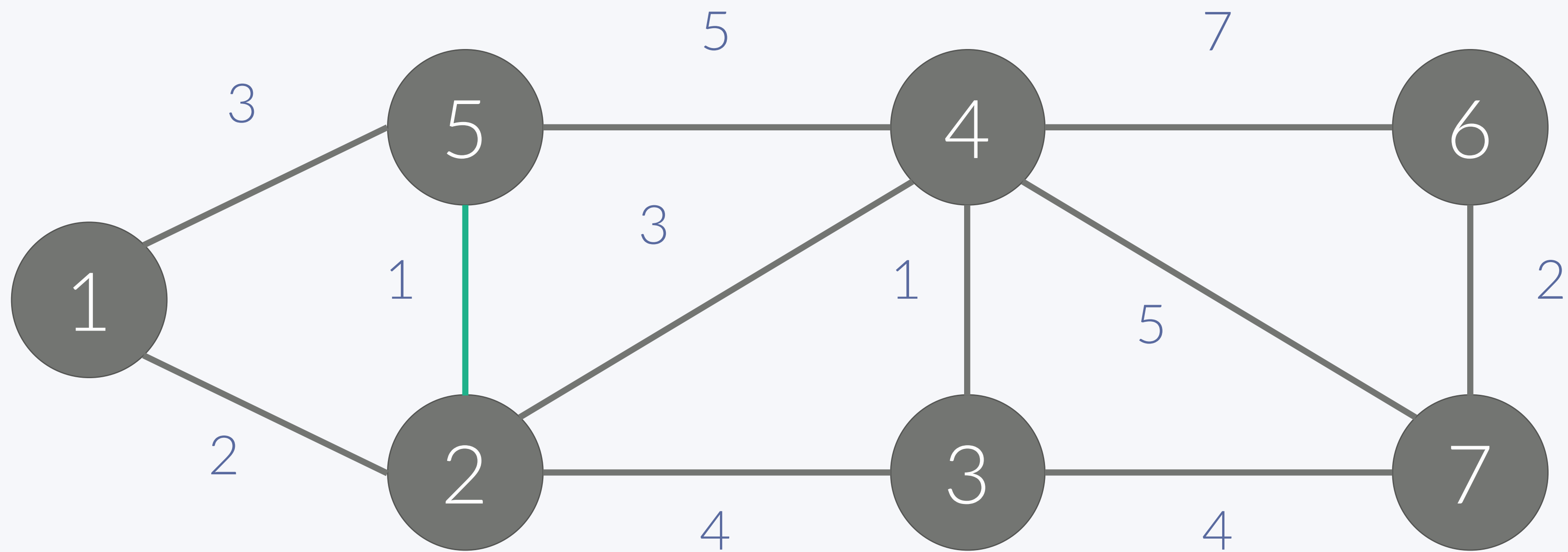
70

- 가중치가 작은 Edge부터 순서대로 살펴본다.
- Edge e 가 (u, v, c) 일 때
- u 와 v 가 다른 집합이면 e 를 MST에 추가한다

크루스칼

Kruskal

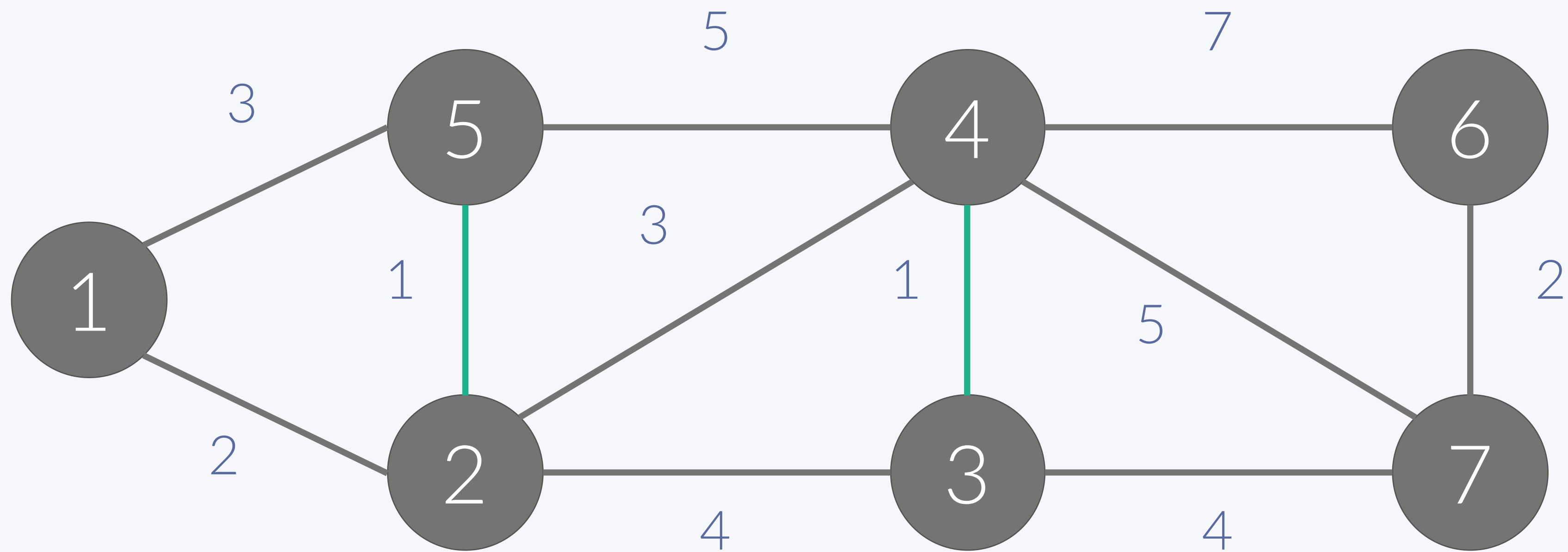
71



크루스칼

Kruskal

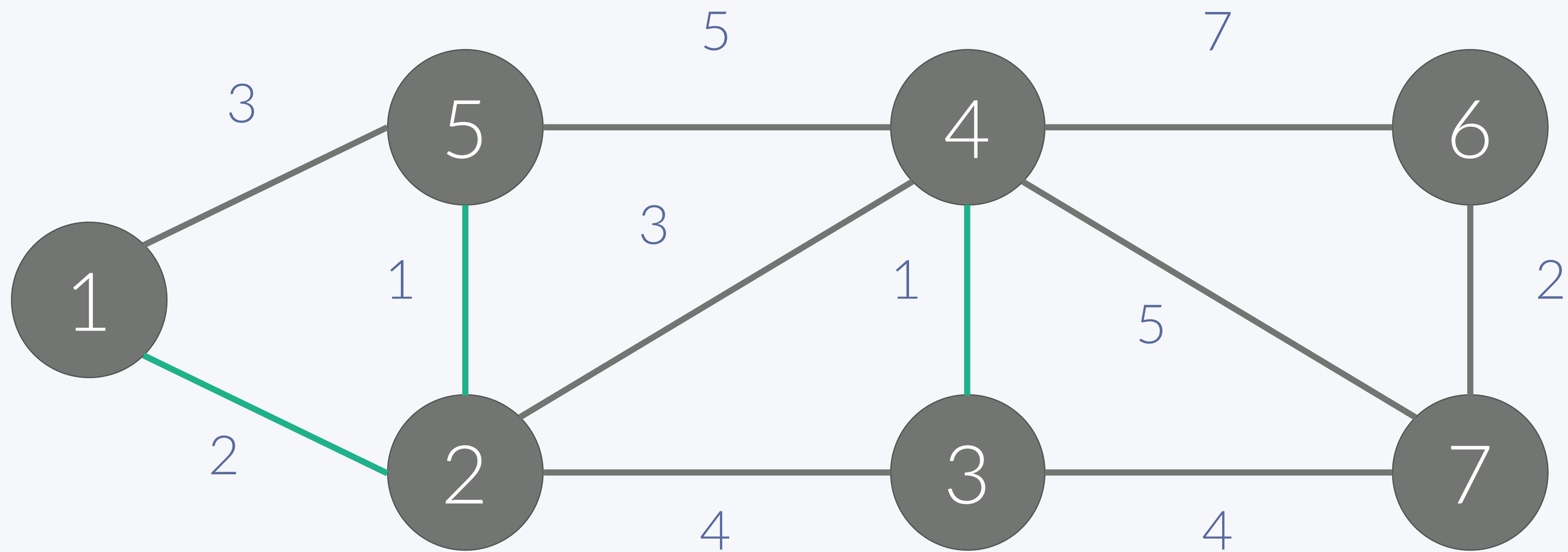
72



크루스칼

Kruskal

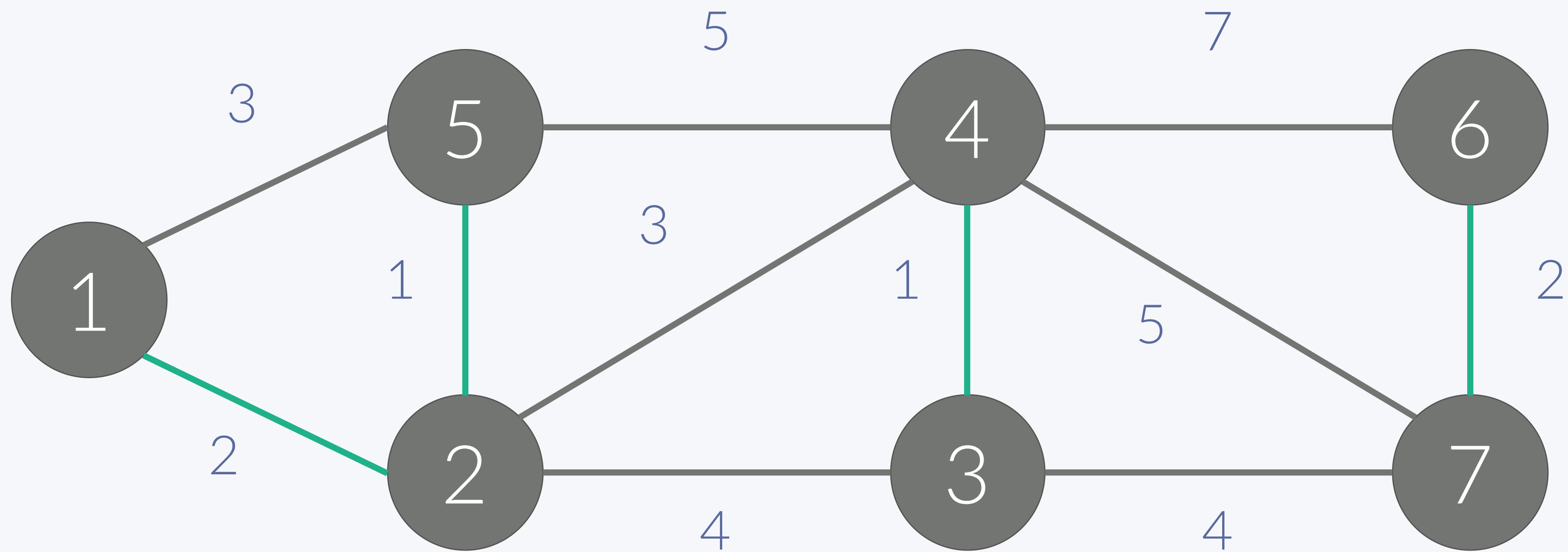
73



크루스칼

Kruskal

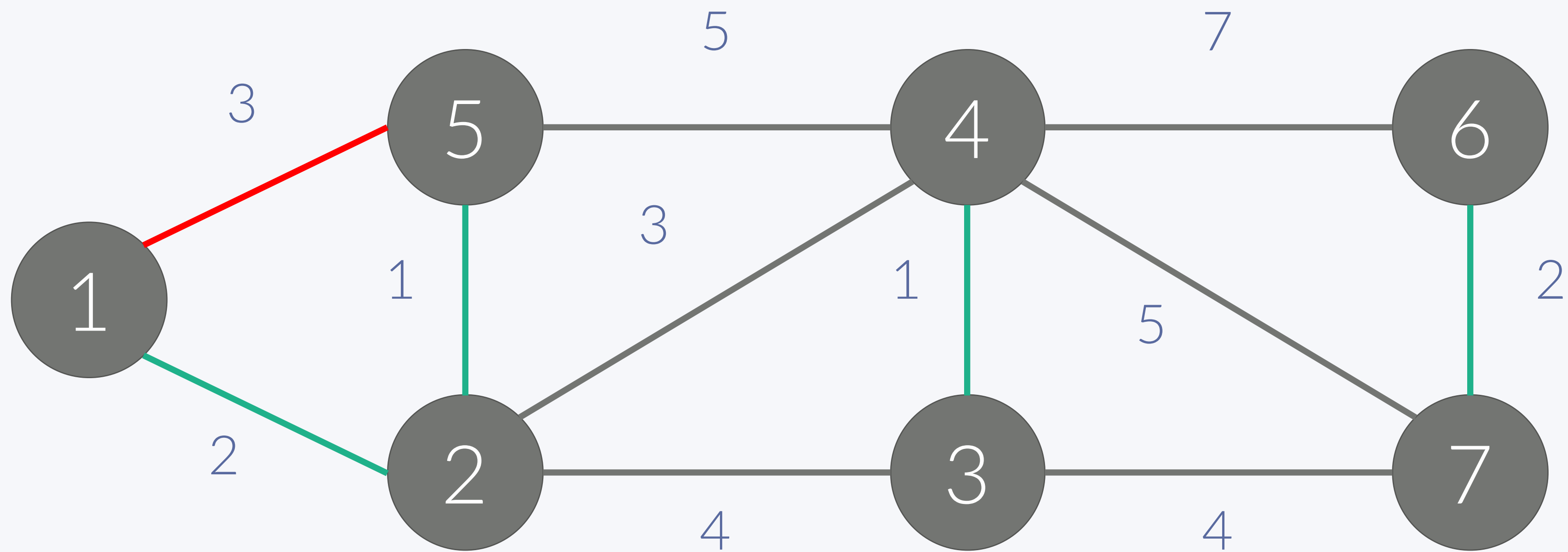
74



크루스칼

Kruskal

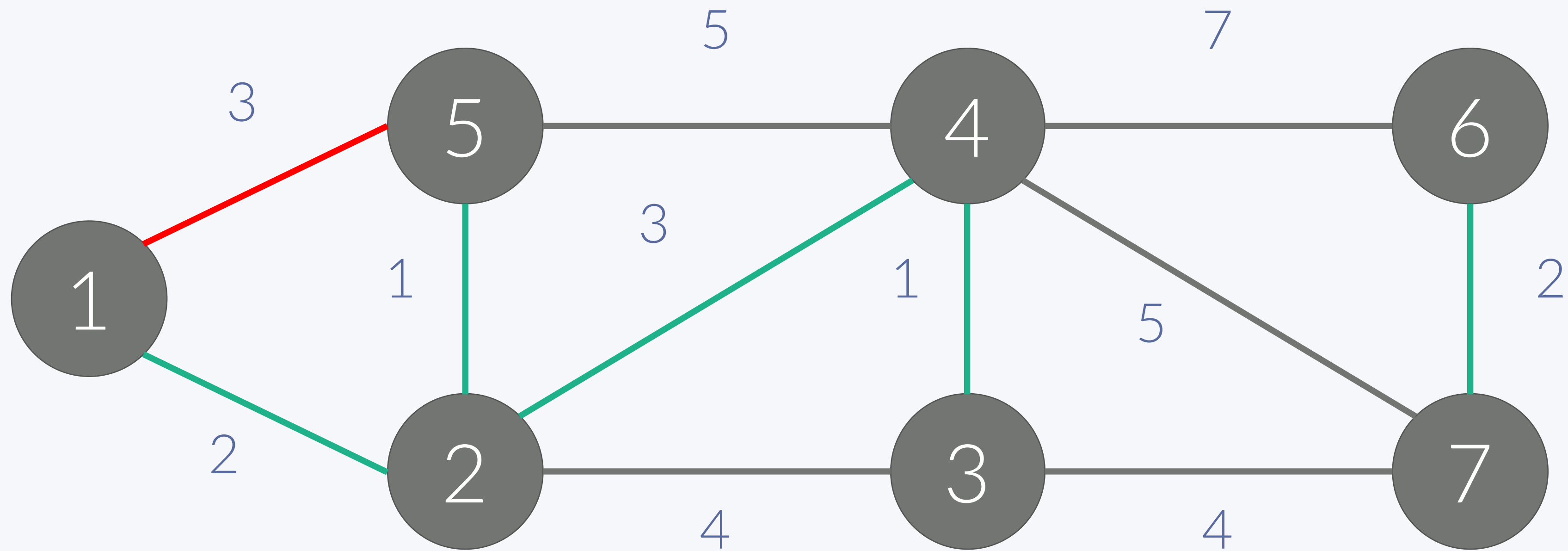
75



크루스칼

Kruskal

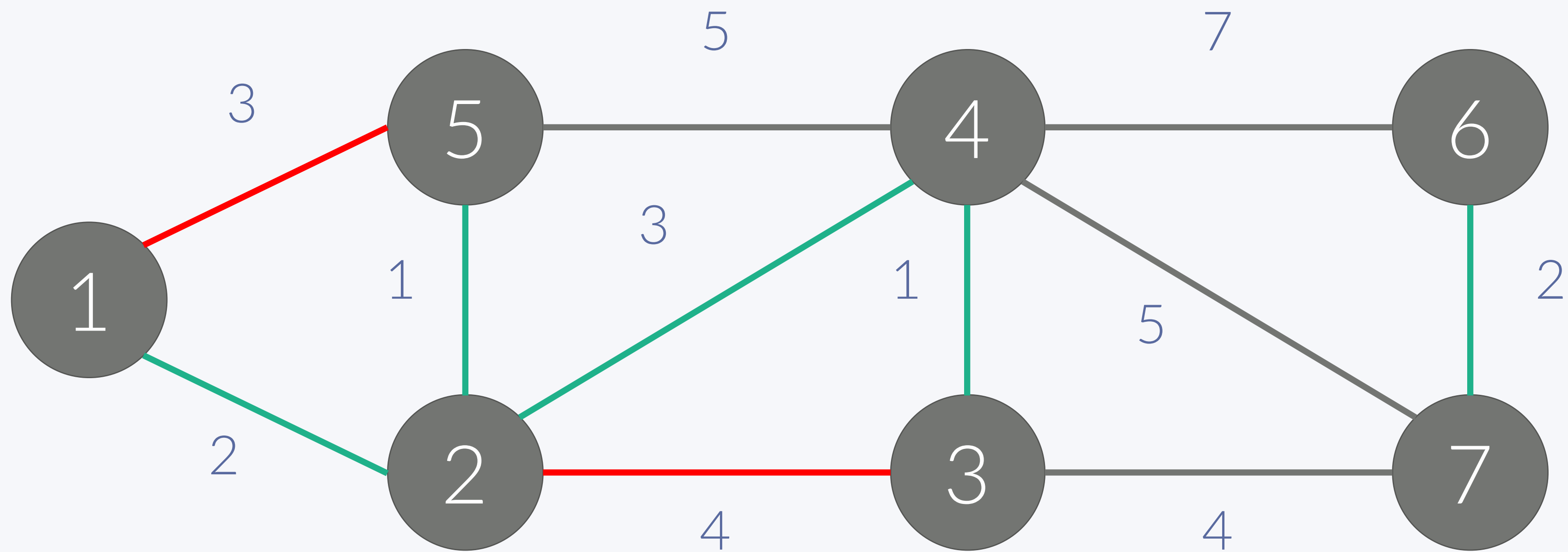
76



크루스칼

Kruskal

77

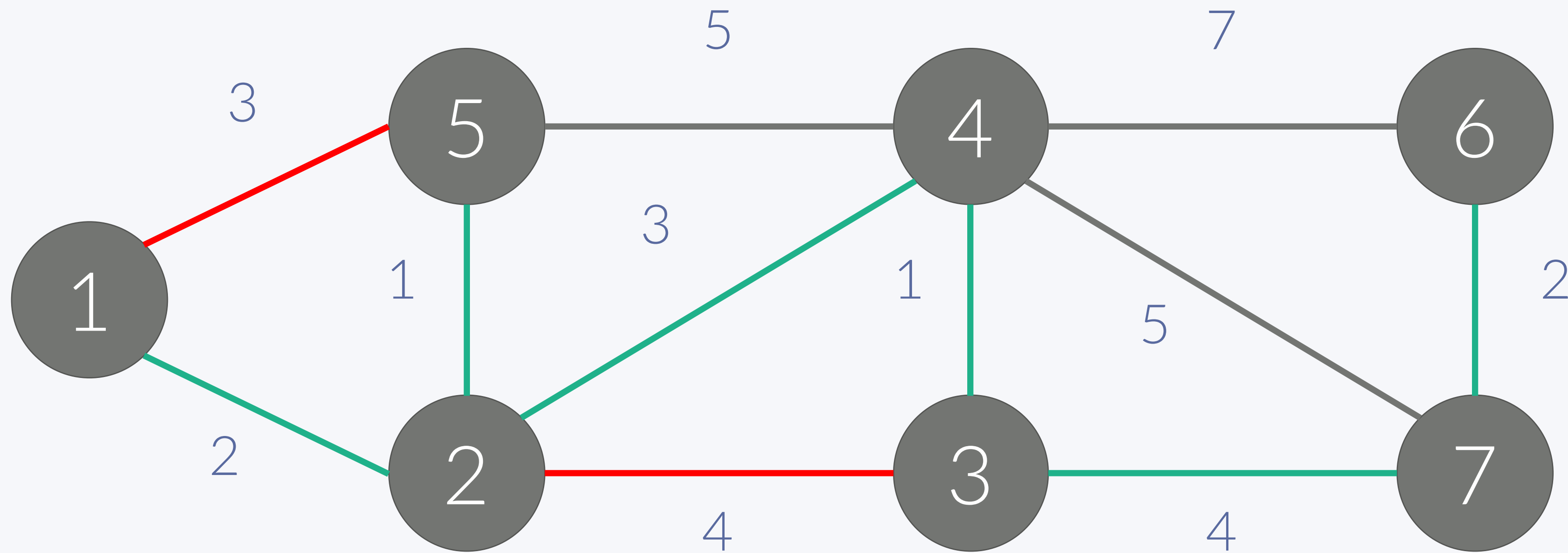


크루스칼

Kruskal

78

정렬
 $E \lg E$ + $O(E)$
 $(E \lg E)$
Union-Find



최소 스패닝 트리

79

<https://www.acmicpc.net/problem/1197>

- 그래프가 주어졌을 때, 그 그래프의 최소 스패닝 트리를 구하기

최소 스패닝 트리

80

<https://www.acmicpc.net/problem/1197>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/47d844c037dedeab690a>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/22d20713a18608a2fbd2>

MST

트리

크루스칼

정점: V 개

시작점 1 개

시작점 0 개 V 개

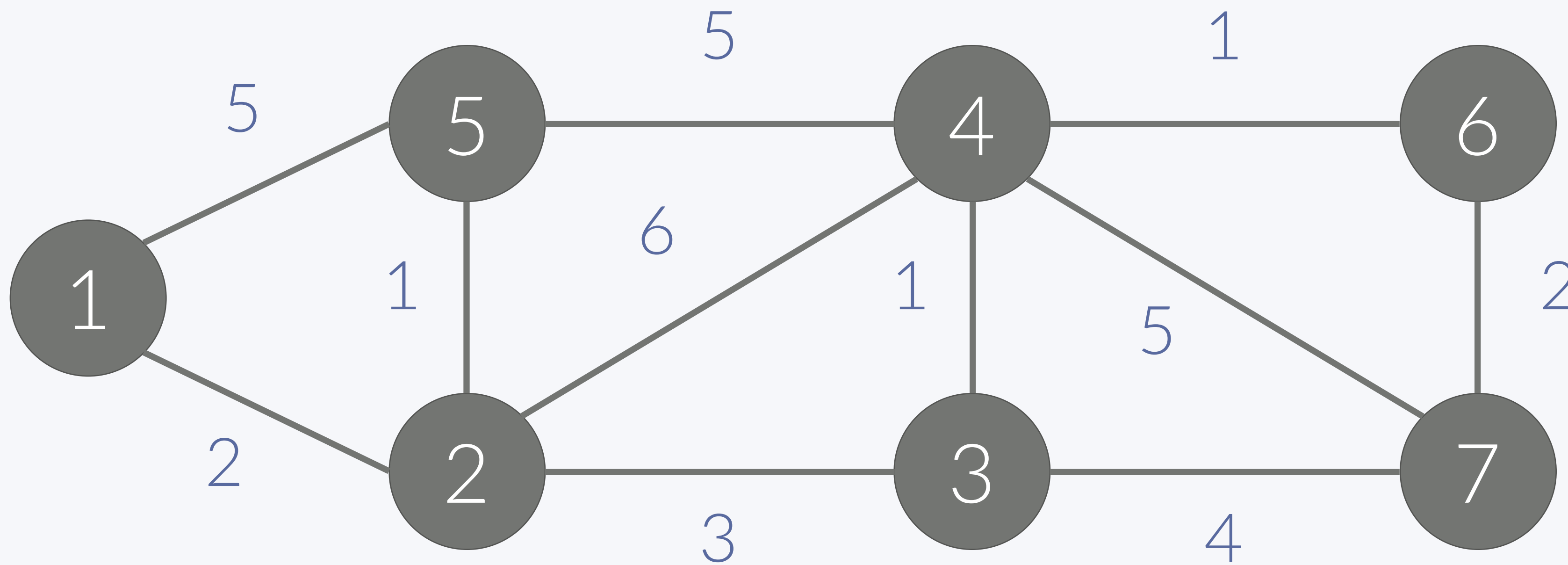
최단 경로

최단 경로

82

Single Source Shortest Path

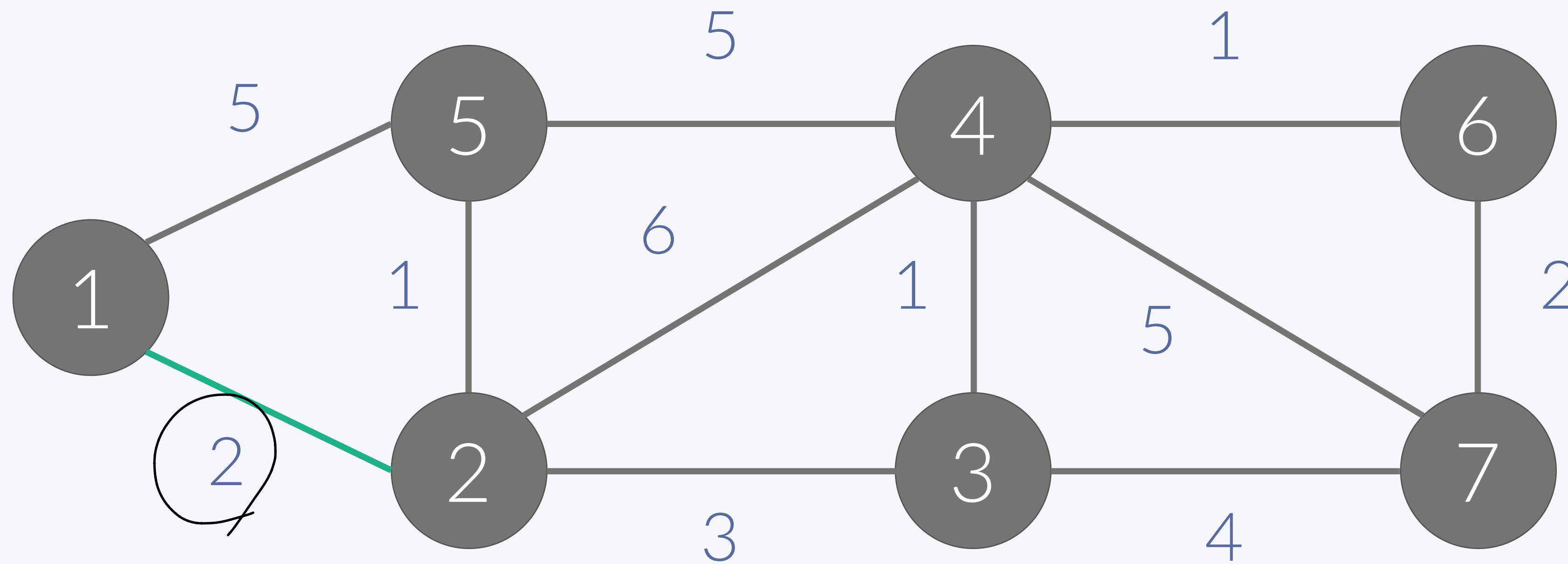
- 시작점이 1개일 때, 다른 모든 곳으로 가는 최단 경로 구하기



최단 경로

Single Source Shortest Path

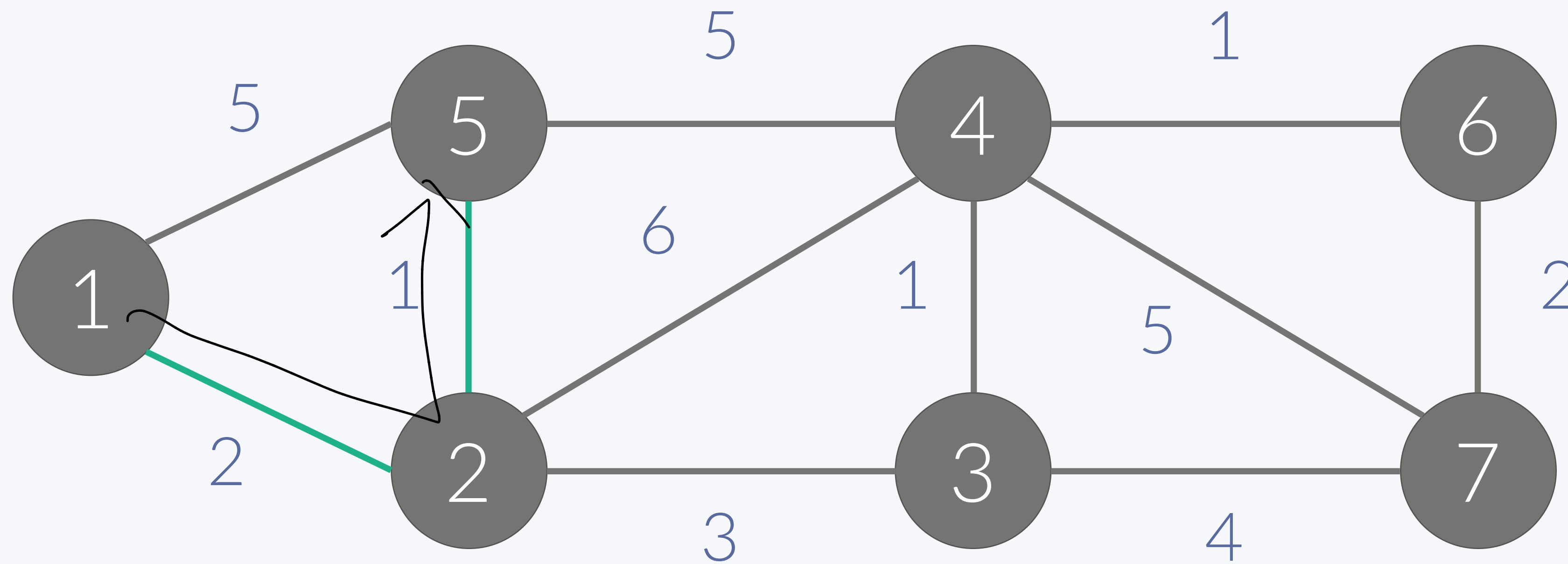
- 1에서 2까지 최단 경로



최단 경로

Single Source Shortest Path

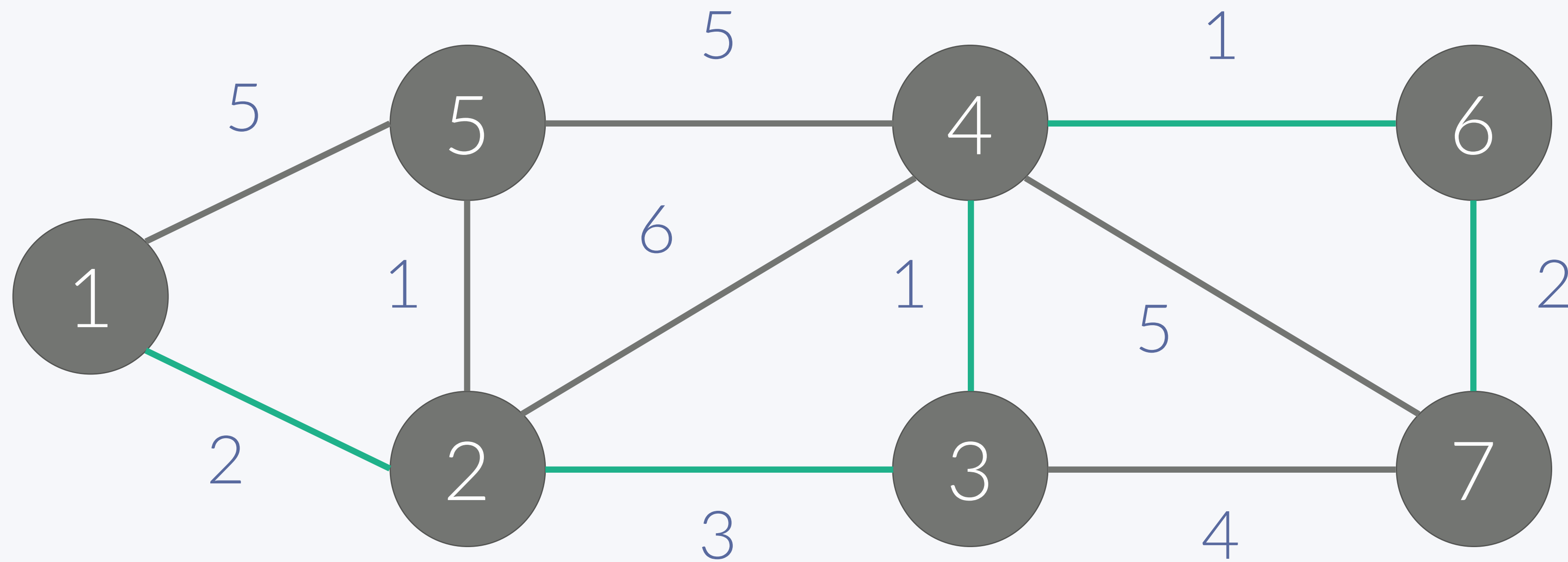
- 1에서 5까지 최단 경로



최단 경로

Single Source Shortest Path

- 1에서 7까지 최단 경로



최단 경로

Single Source Shortest Path

- A → B로 가는 최단 경로는 최대 N-1개의 간선으로 이루어져 있다

정점: N개

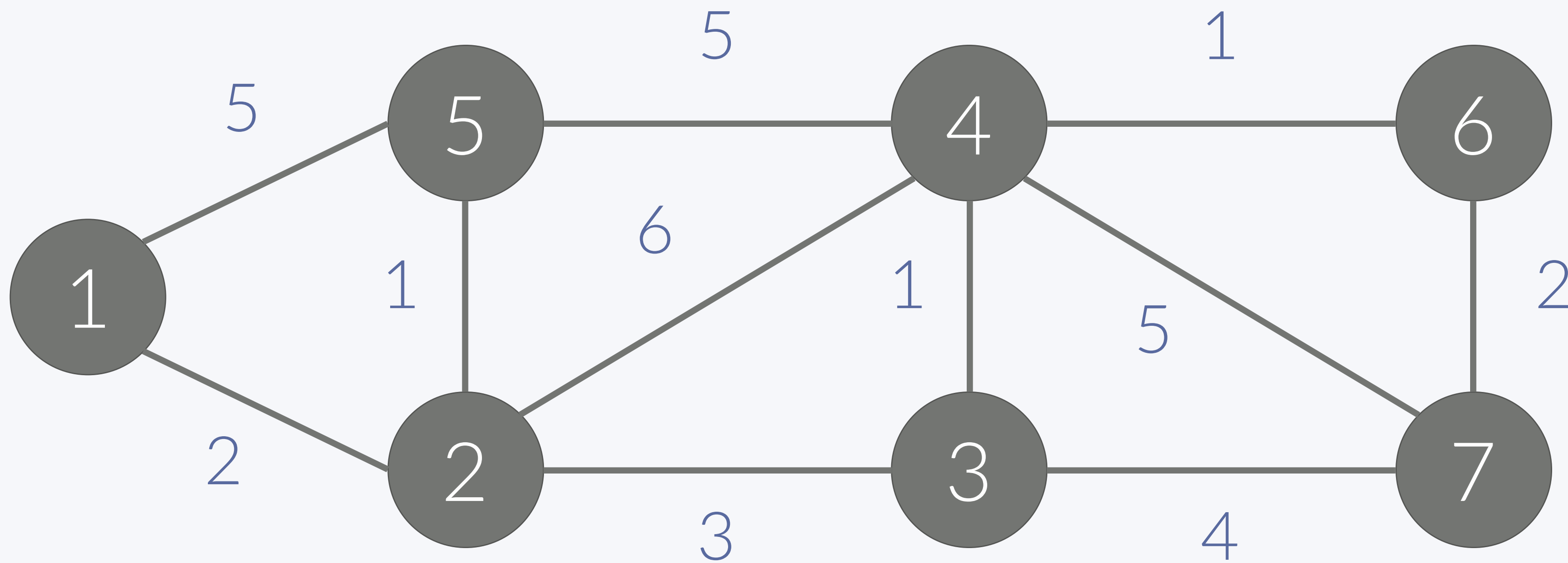
A →

N-2개 → B

간선: N-1개

Bellman-Ford 알고리즘

86



$dist[i] =$ 시작점에서
i로 가는
최단 거리



if ($dist[to] > dist[from] + Cost$)
 $dist[to] = dist[from] + Cost;$

⚡

벨만포드

정점: V 개

가중치: $\sum (V-1)$

디스토포스: $\sum \times 1$

이유: $V-1$ 개 갱신

벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

88

- $D[i]$ = 시작점에서 i 로 가는 최단경로
- 1. 모든 간선 $e(u, v, c)$ 에 대해서 다음을 검사한다.
 - $d[v] = \text{Min}(d[v], d[u] + c)$
- 1번 과정을 총 $N-1$ 번 반복한다.

벨만포드

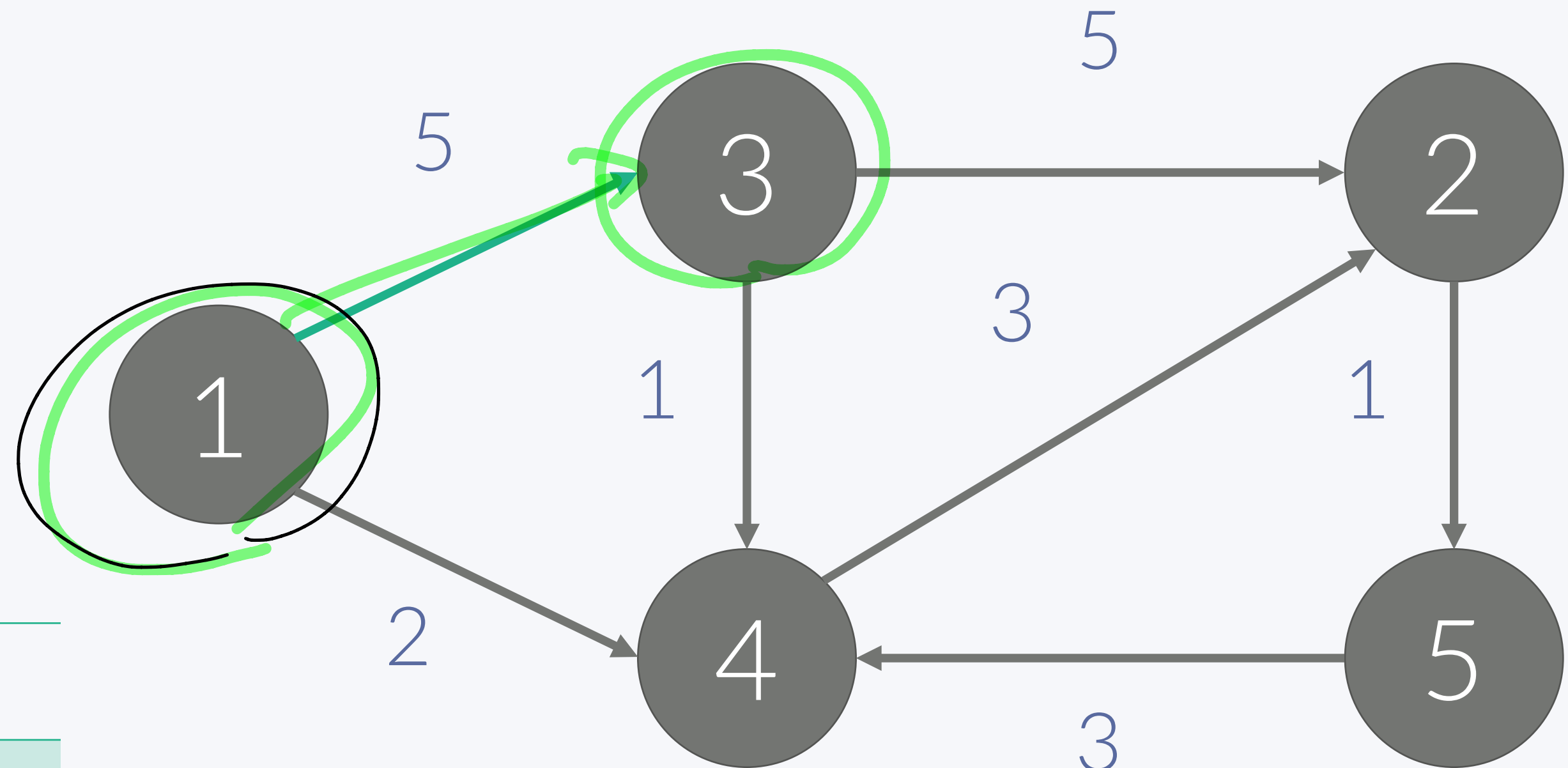
Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

$dist[i] =$ 시작점에서 최단거리

89

i	1	2	3	4	5
dist[i]	0	∞	5	∞	∞

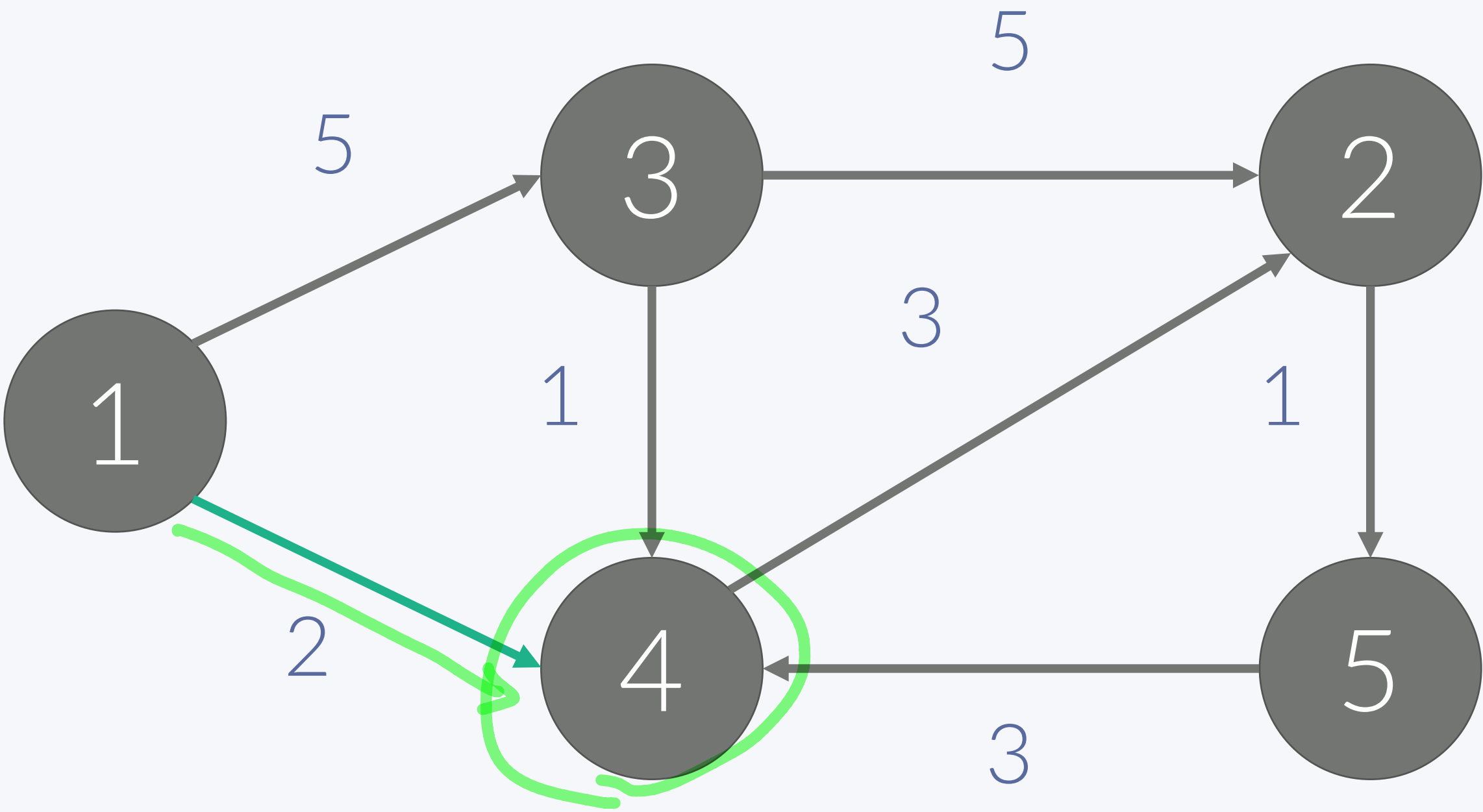


벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	∞	5	2	∞

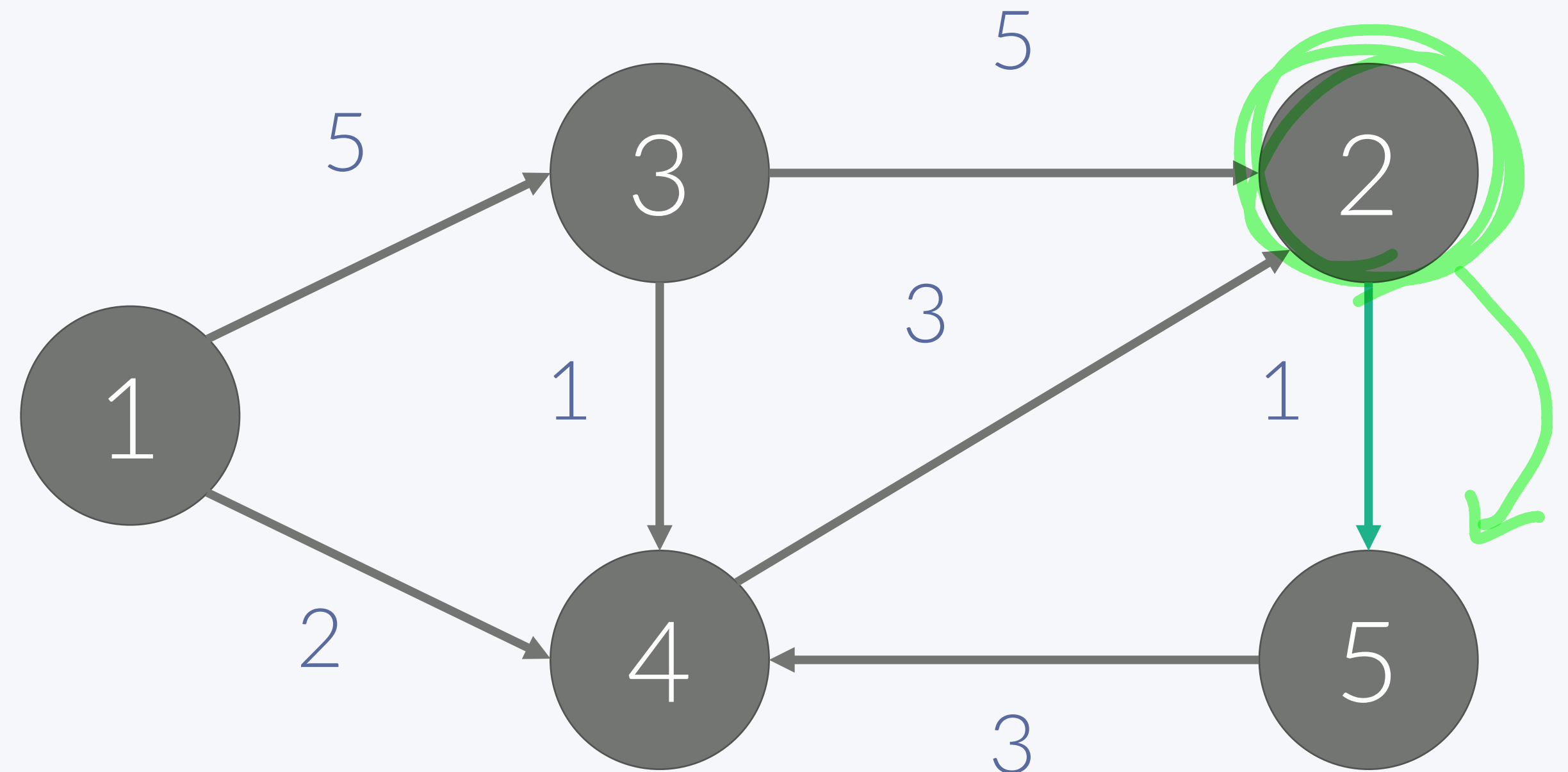


벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	∞	5	2	∞



벨만포드

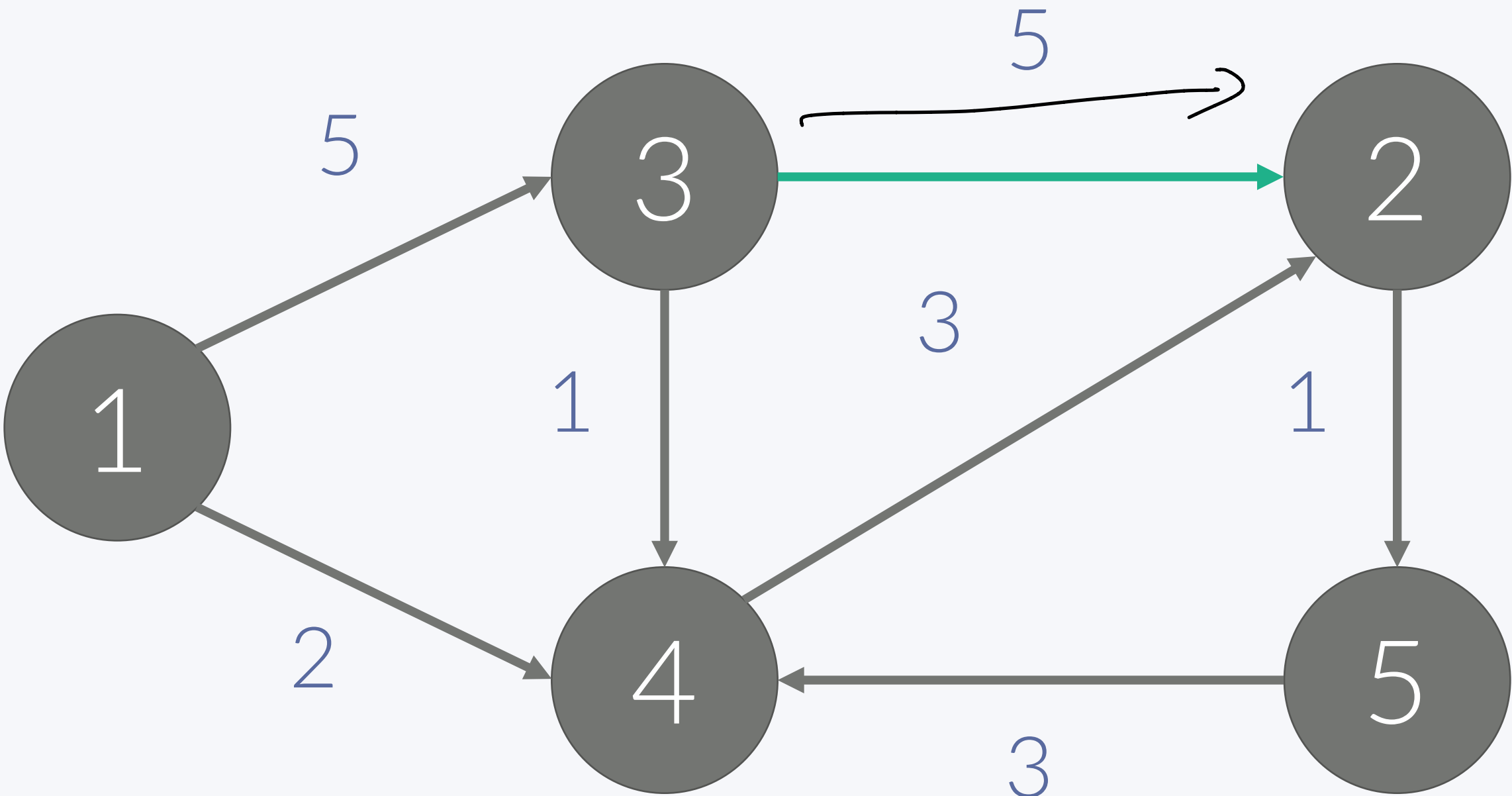
Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	10	5	2	∞

∞

$+5$



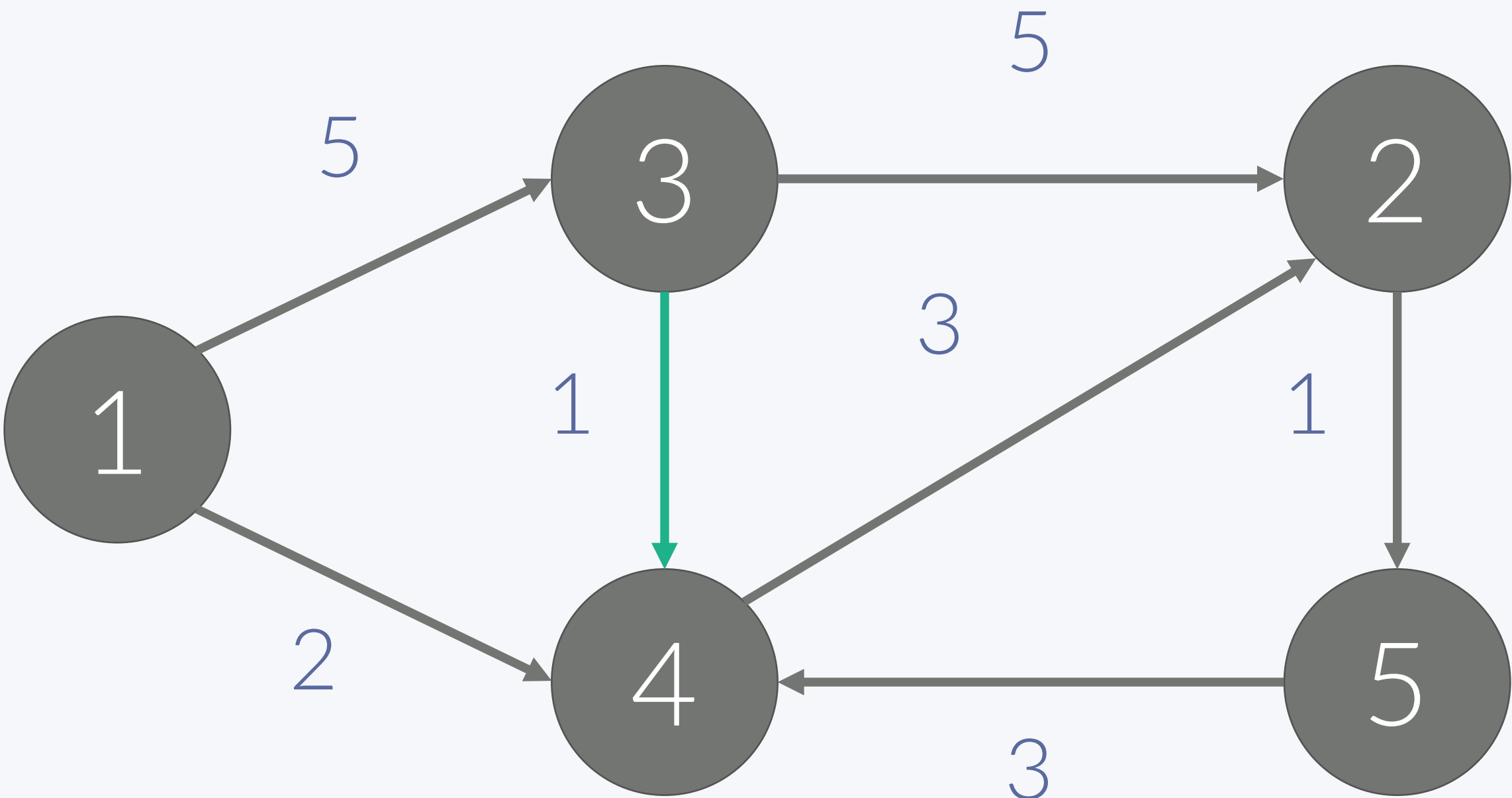
벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	10	5	2	∞

Handwritten annotations: A circle around '2' in the D[i] row, a circle around '4' in the D[i] row, a circle around '6' above '4', and an arrow pointing from '6' to '4' with '+1' written above it.



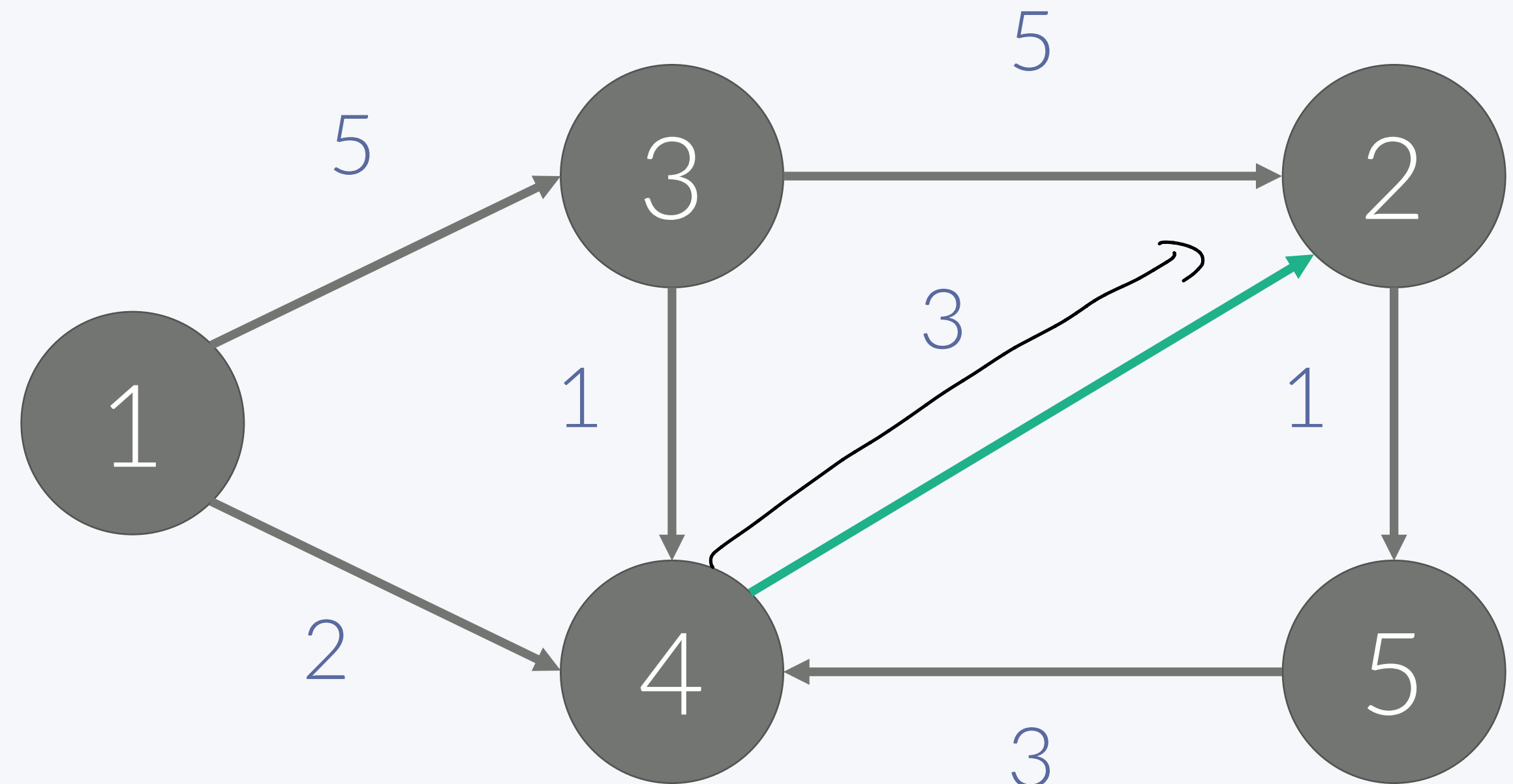
벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	5	5	2	∞

Handwritten annotations: A box around the value 5 in the D[2] cell, and an arrow pointing from the value 2 in the D[4] cell to the boxed 5 with the label +3.



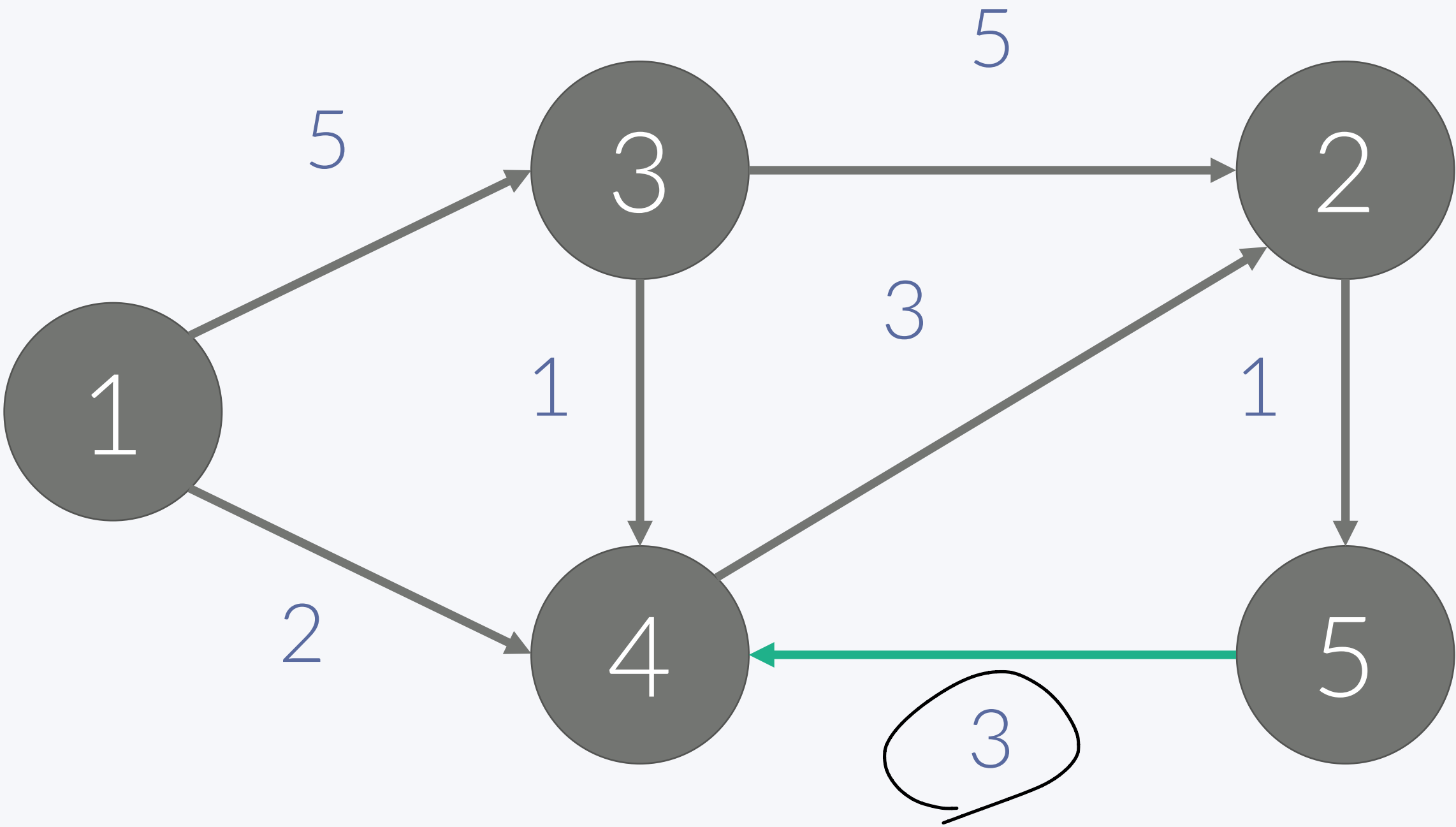
벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

- 1단계

시작 1번

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	5	5	2	∞

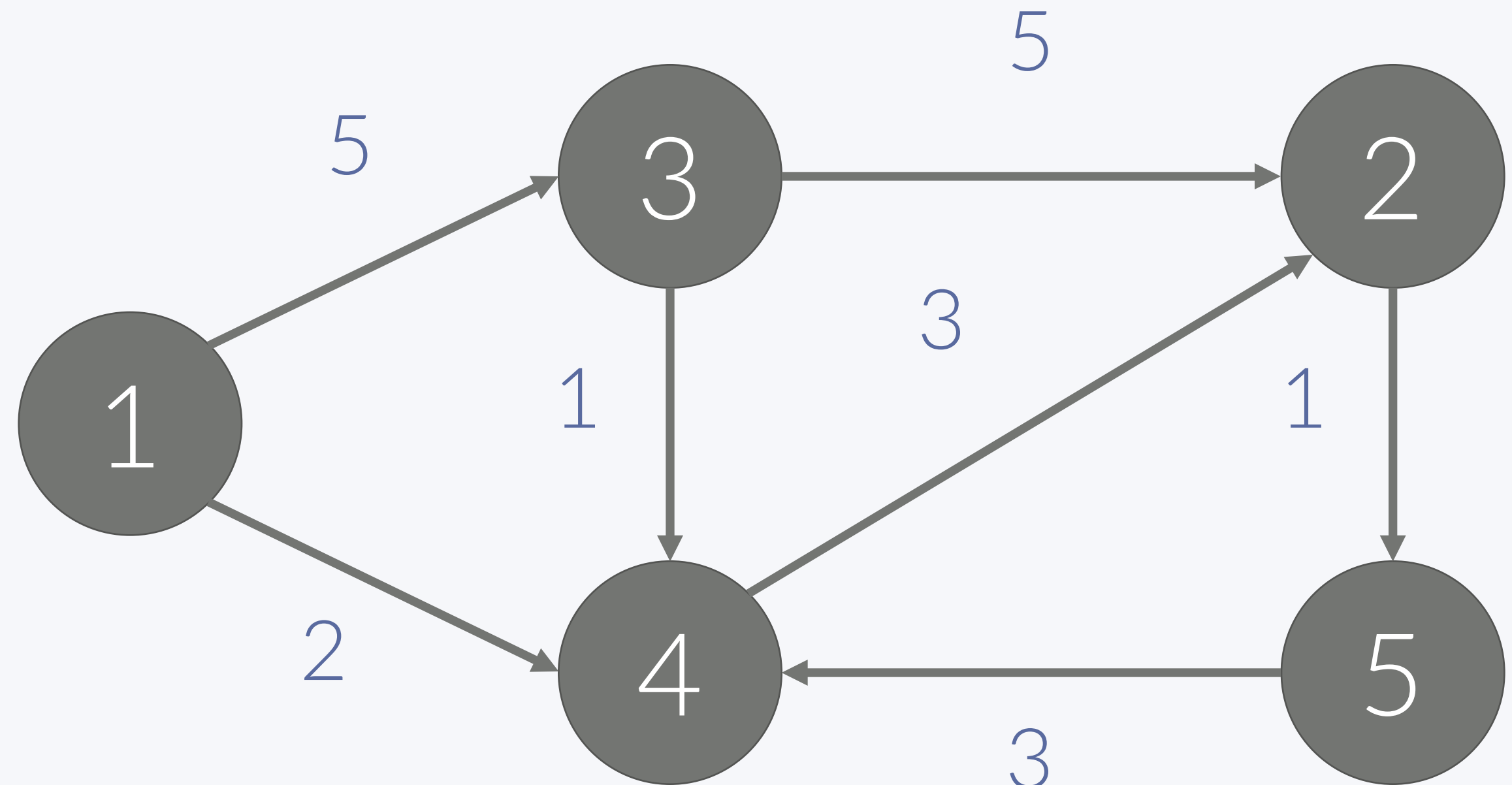


벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

- 이런 단계를 N-1번 반복한다

i	1	2	3	4	5
D[i]	0	5	5	2	∞

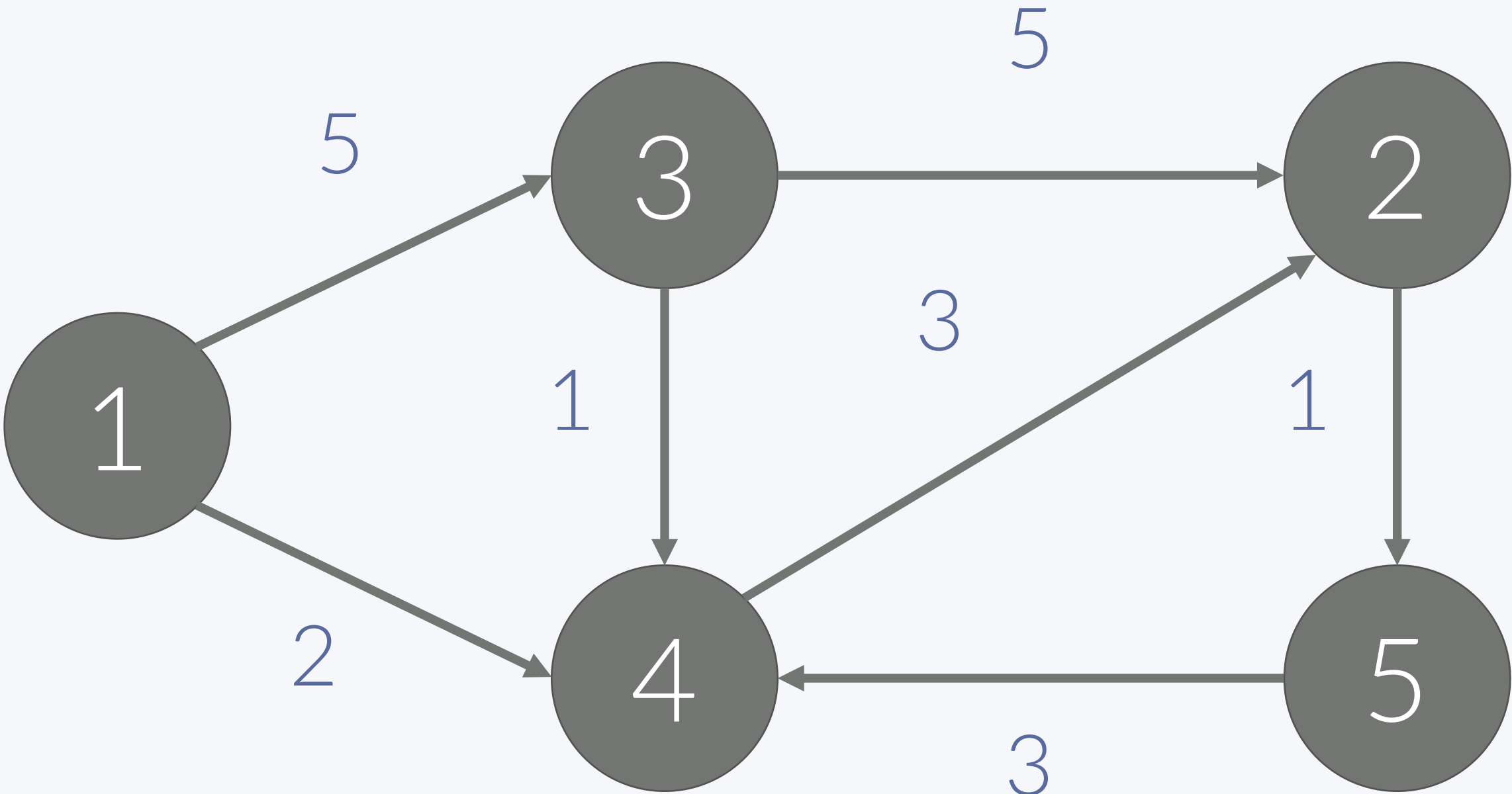


벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

$$\underline{V \cdot E}$$

- 이런 단계를 N-1번 반복한다 $(V-1) \times O(E) = O(VE)$



i	1	2	3	4	5
dist[i]	0	5	5	2	6

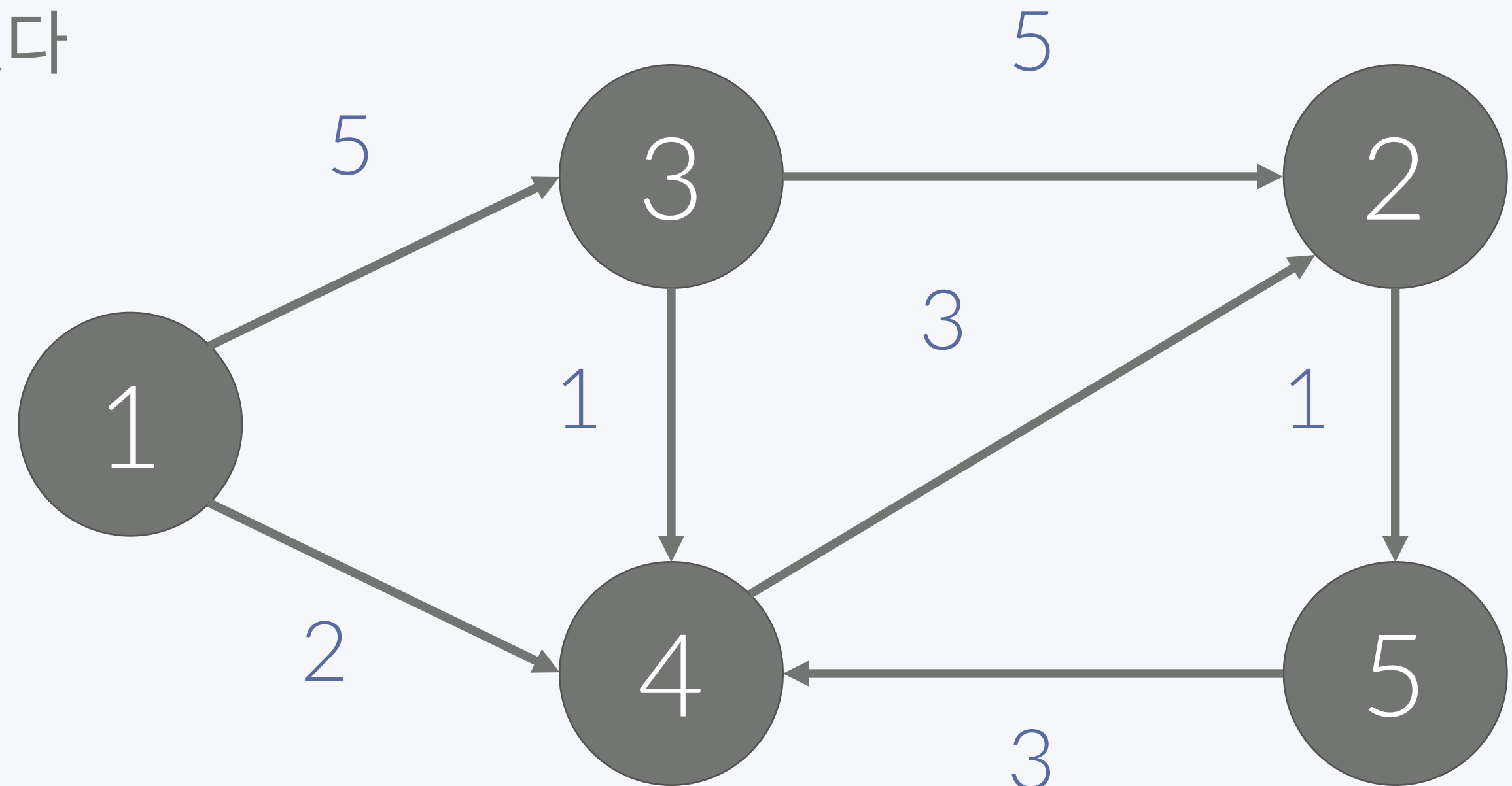
벨만포드

Bellman-Ford Algorithm

98

가중치: 음수

- 시간 복잡도: $O(VE)$
- $E \leq V^2$ 이기 때문에 $O(V^3)$
- 가중치가 음수가 있는 경우에도 사용할 수 있다



i	1	2	3	4	5
D[i]	0	5	5	2	6

타임머신

<https://www.acmicpc.net/problem/11657>

- N개의 도시가 있다
- 한 도시에서 출발하여 다른 도시에 도착하는 버스가 M개 있다
- 각 버스는 A, B, C로 나타낼 수 있는데, A는 시작도시, B는 도착도시, C는 버스를 타고 이동하는데 걸리는 시간이다
- 시간 C가 양수가 아닌 경우가 있다.
- $C = 0$ 인 경우는 순간 이동을 하는 경우, $C < 0$ 인 경우는 타임머신으로 시간을 되돌아가는 경우이다.
- 1번 도시에서 출발해서 나머지 도시로 가는 가장 빠른 시간을 구하는 프로그램을 작성하시오.

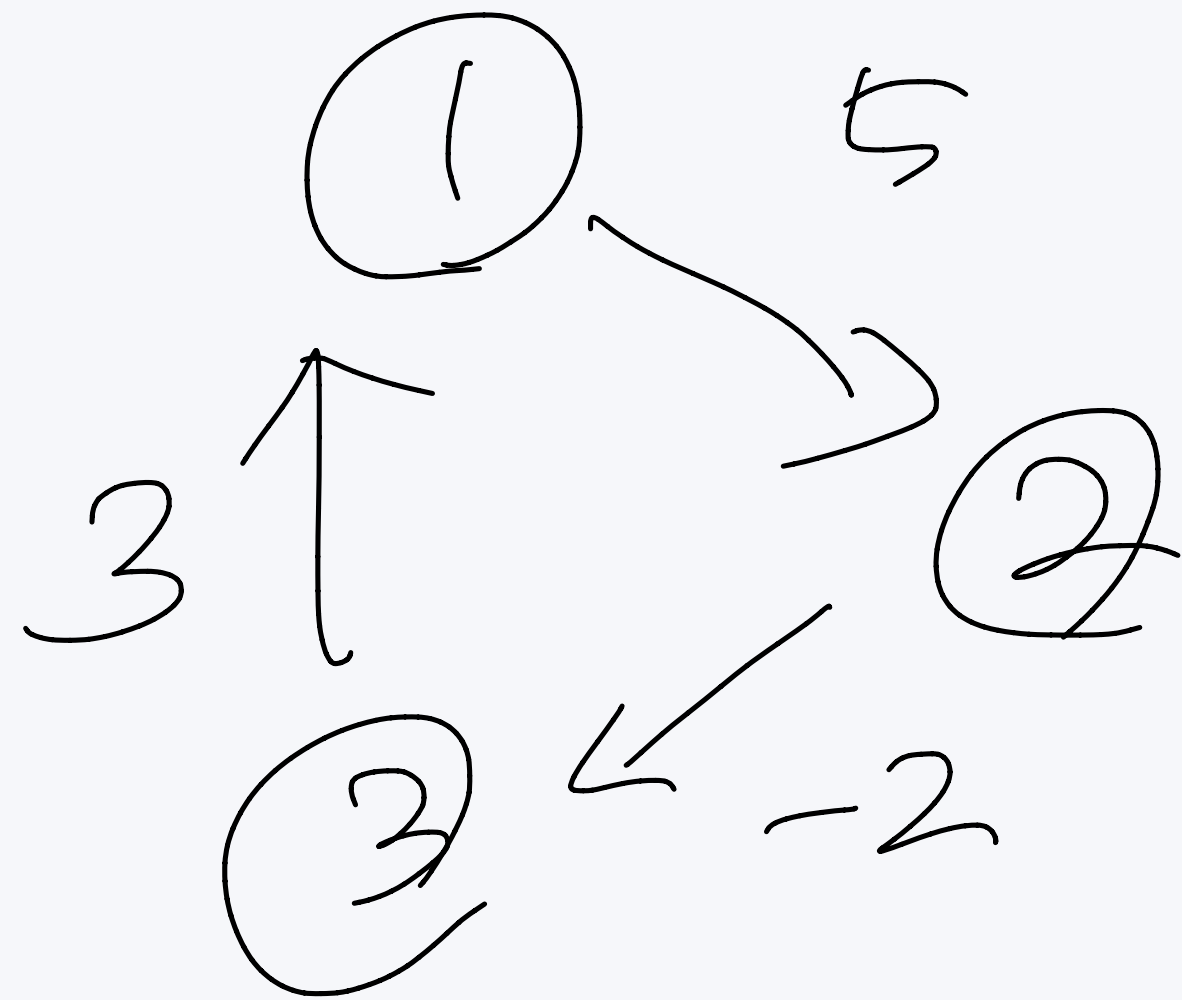
타임머신

<https://www.acmicpc.net/problem/11657>

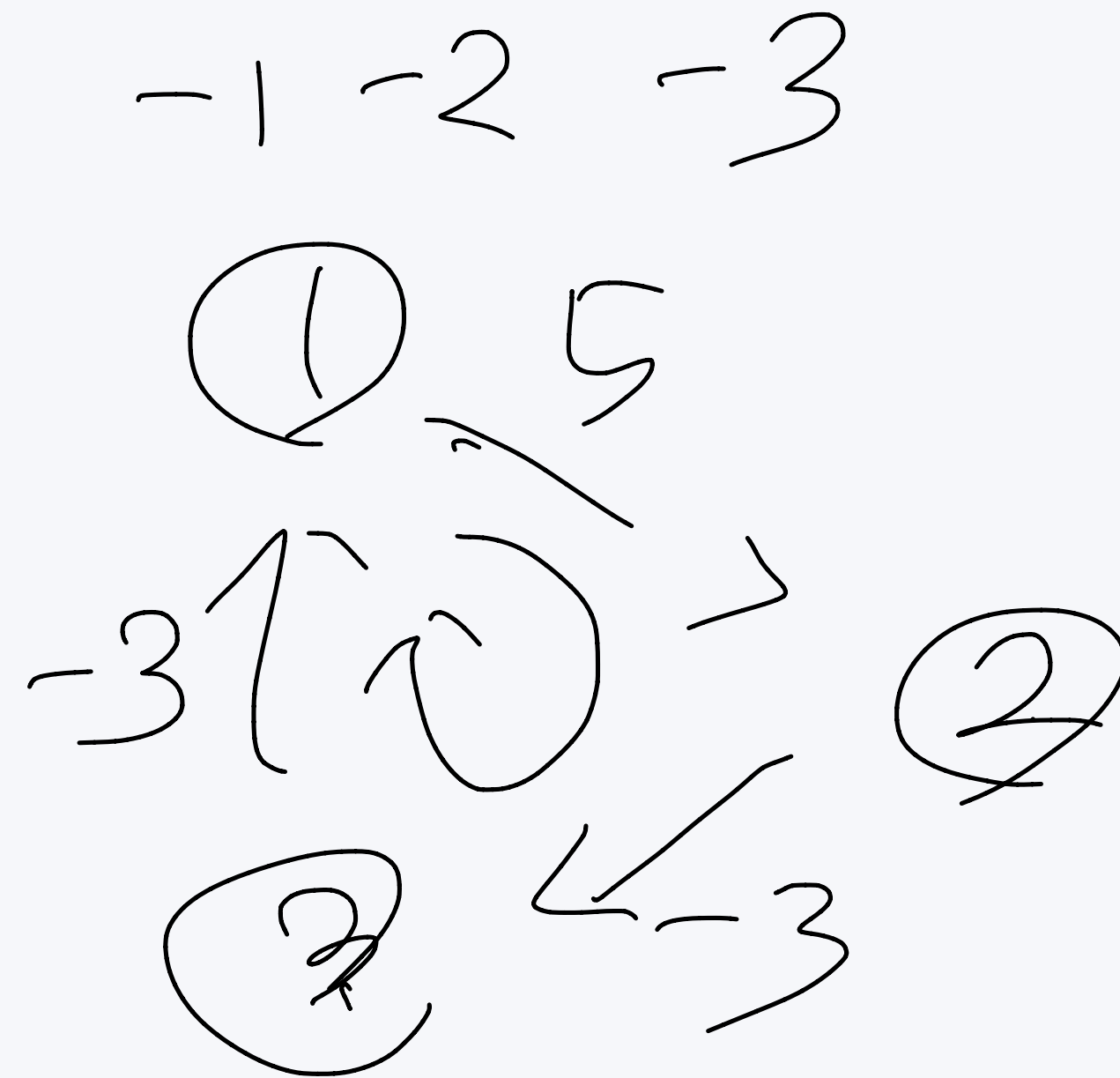
Cycle 음수 : 음수 사이클
최단경로 X

100

- 음수가 있기 때문에, 벨만포드 알고리즘을 이용해서 최단거리를 구해야 한다.



1 \Rightarrow 2 5



1 \Rightarrow 2 5

타임머신

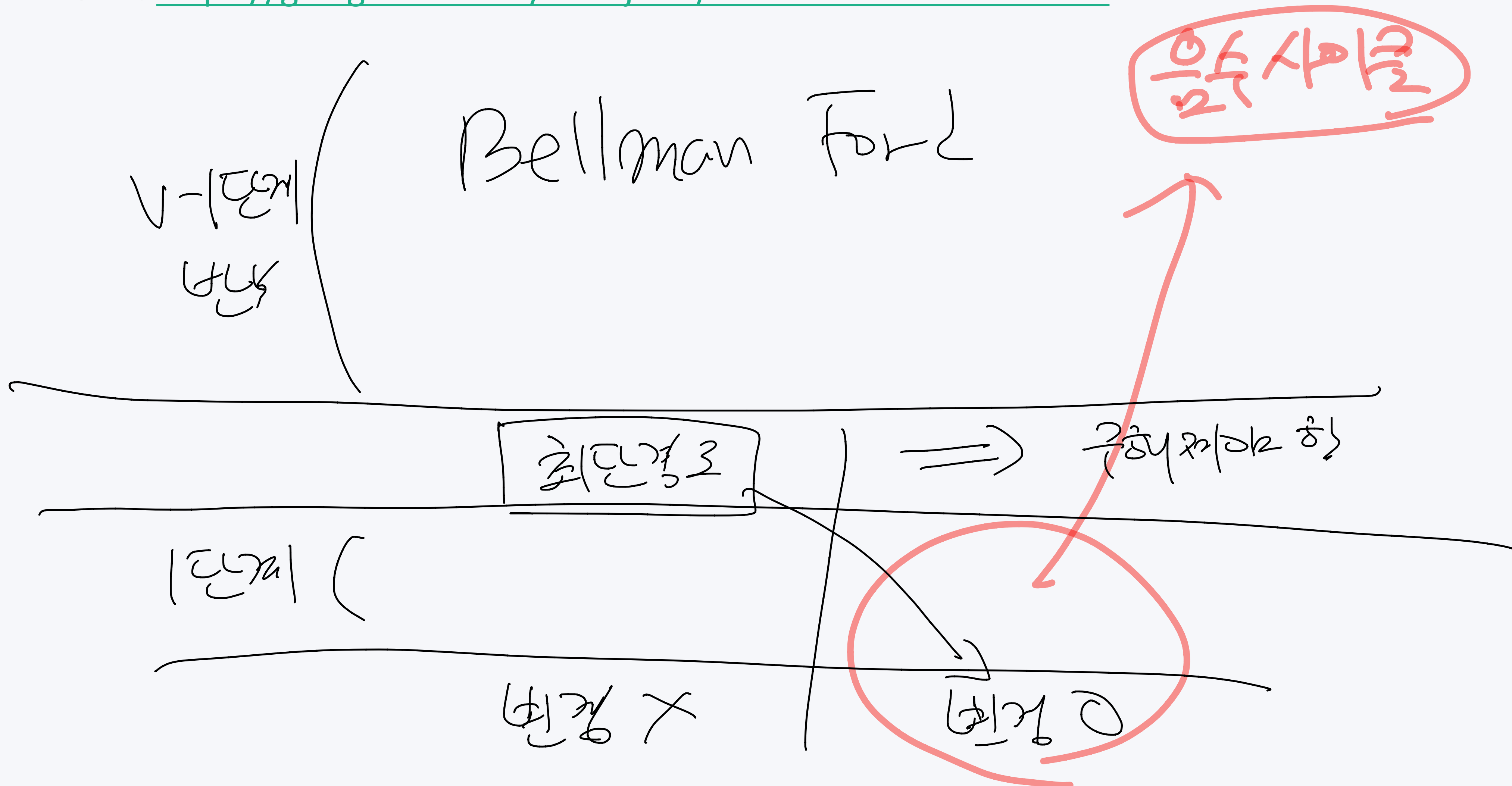
정점: V

최단경로: $V-1$ 간선

101

<https://www.acmicpc.net/problem/11657>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/2376cd9ee0e01a284ad1>



웜홀

<https://www.acmicpc.net/problem/1865>

- N 개의 지점 사이에는 M 개의 도로와 W 개의 웜홀이 있다
- 어떤 지점에서 출발을 하여서 시간여행을 하기 시작하여 다시 출발을 하였던 위치로 돌아왔을 때, 출발을 하였을 때 보다 시간이 되돌아 가 있는 경우 찾기

웜홀

103

<https://www.acmicpc.net/problem/1865>

- 음수로 되어있는 사이클을 찾는 문제

<https://www.acmicpc.net/problem/1865>

- 최단 경로는 항상 최대 $N-1$ 개로 구성되어 있기 때문에
- N 번째 단계에서 최단 경로가 갱신되면, 음수로 되어있는 사이클이 존재하는 것이다

<https://www.acmicpc.net/problem/1865>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/1b249392471b05478fbb>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/e0fdb841ab360f806bc6>

Bellman Ford

- ① 시작점 1개
- ② 음수 가중치 OK
- ③ 음수 사이클 검사가능
- ④ $O(VE)$

다익스트라

해당 노드 : 식 $(N-1)$ $\frac{0 \leq \dots \leq N-1}{2}$ \bigcirc
 다익스트라 : 식 (1) $\frac{0 \leq \dots \leq N-1}{2}$ \times

$(from) \xrightarrow{Cost} (to)$

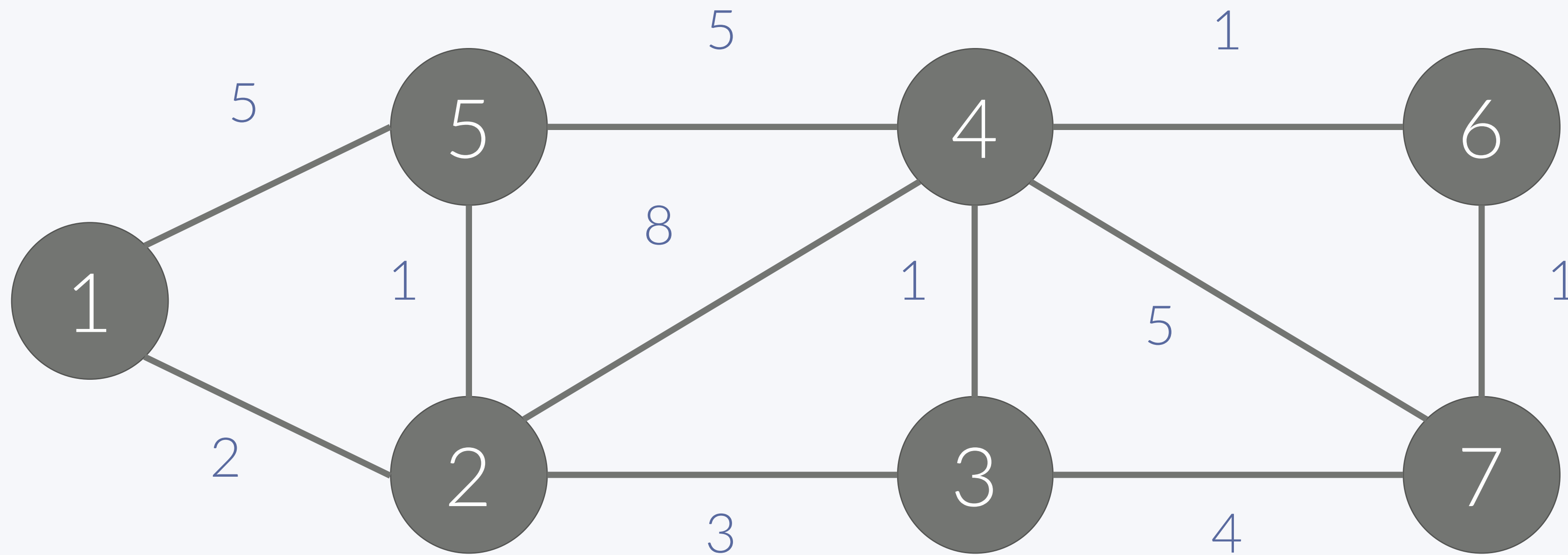
```
if ( dist[to] > dist[from] + Cost ) {
    dist[to] = dist[from] + Cost;
}
```

다익스트라

Dijkstra Algorithm

107

- $D[i]$ = 시작 \rightarrow i 로 가는 최단 거리
- $C[i]$ = i 가 체크되어 있으면 true, 아니면 false



다익스트라

Dijkstra Algorithm

108

1. 체크되어 있지 않은 정점 중에서 D 의 값이 가장 작은 정점 x 를 선택한다.
 2. x 를 체크한다.
 3. x 와 연결된 모든 정점을 검사한다.
 - 간선을 (x, y, z) 라고 했을 때
 - $d[y] > d[x] + z$ 이면 갱신해준다.
- 1, 2, 3단계를 모든 정점을 체크할 때까지 계속한다.

다익스트라

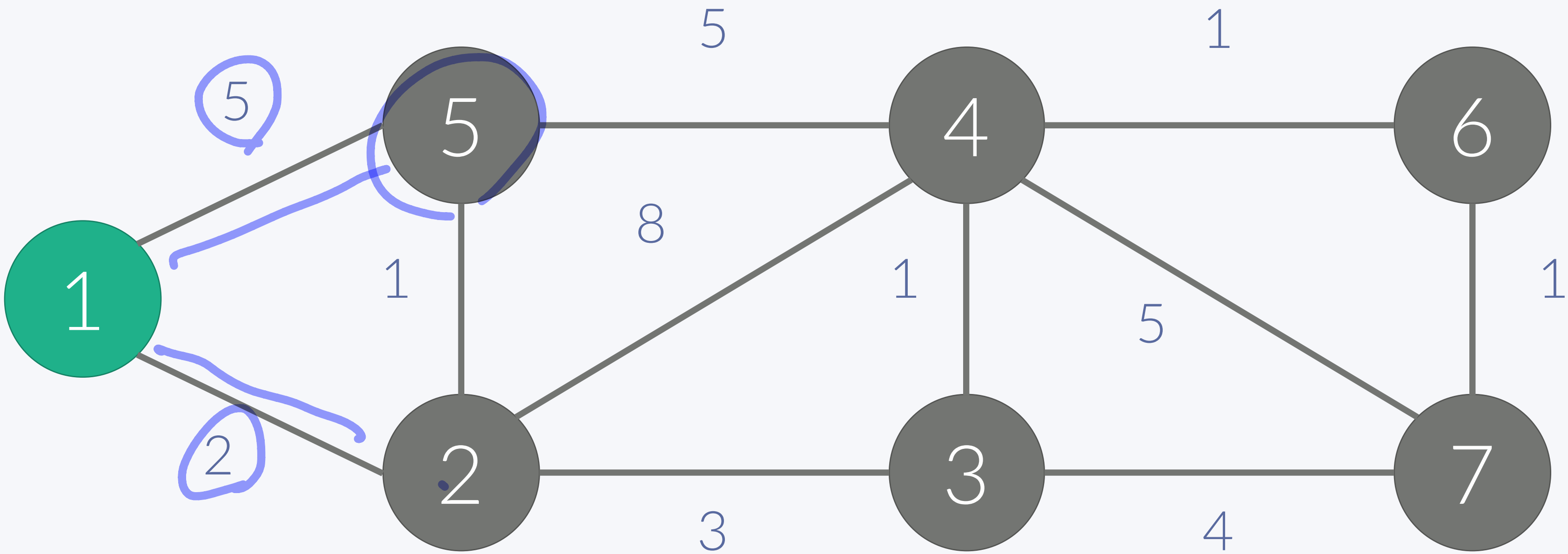
Dijkstra Algorithm

- 선택: 1

(정점 번호, Dist)

(2, 2) ←
(5, 5)

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
C[i]	1						

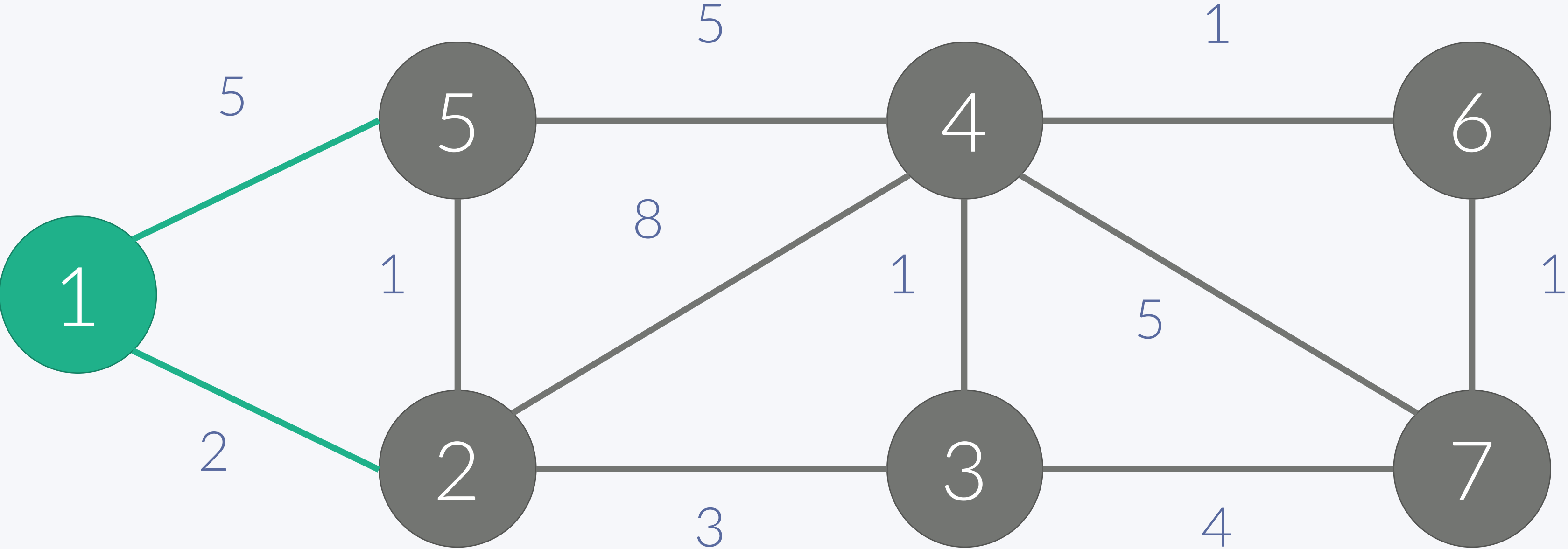


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 1

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	∞	∞	5	∞	∞
C[i]	1						



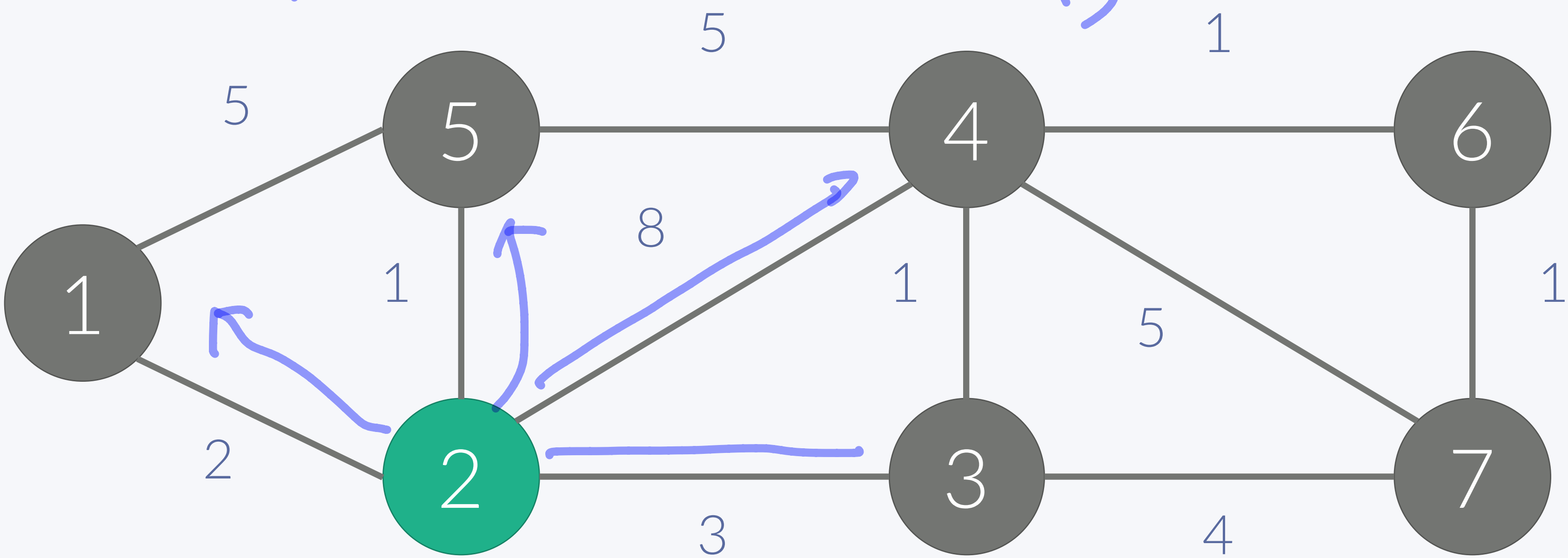
다익스트라

Dijkstra Algorithm

• 선택: 2

$(5, 3)$
 $(5, 5)$
 $(3, 5)$
 $(4, 10)$

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	10	3	∞	∞
C[i]	1	1					

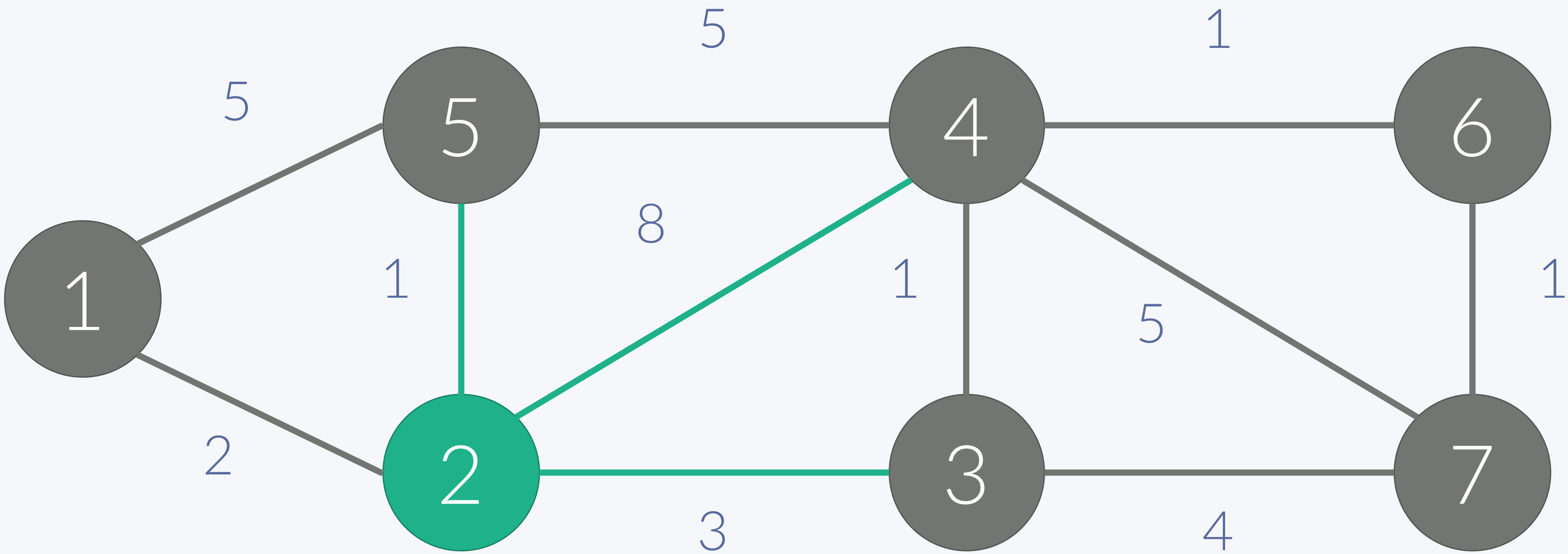


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 2

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	10	3	∞	∞
C[i]	1	1					



다익스트라

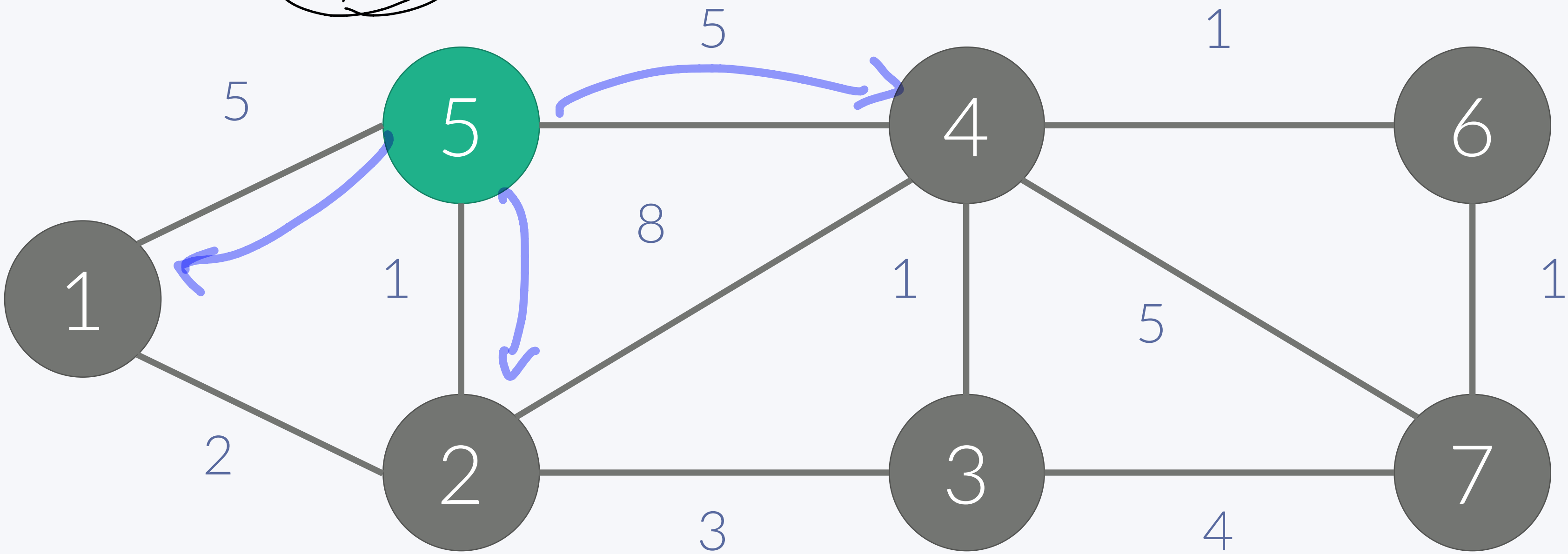
Dijkstra Algorithm

- 선택: 5

~~(5, 5)~~
(3, 5)
~~(4, 10)~~
(4, 8)

Set: 2/4


i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	10	3	∞	∞
C[i]	1	1		8	1		



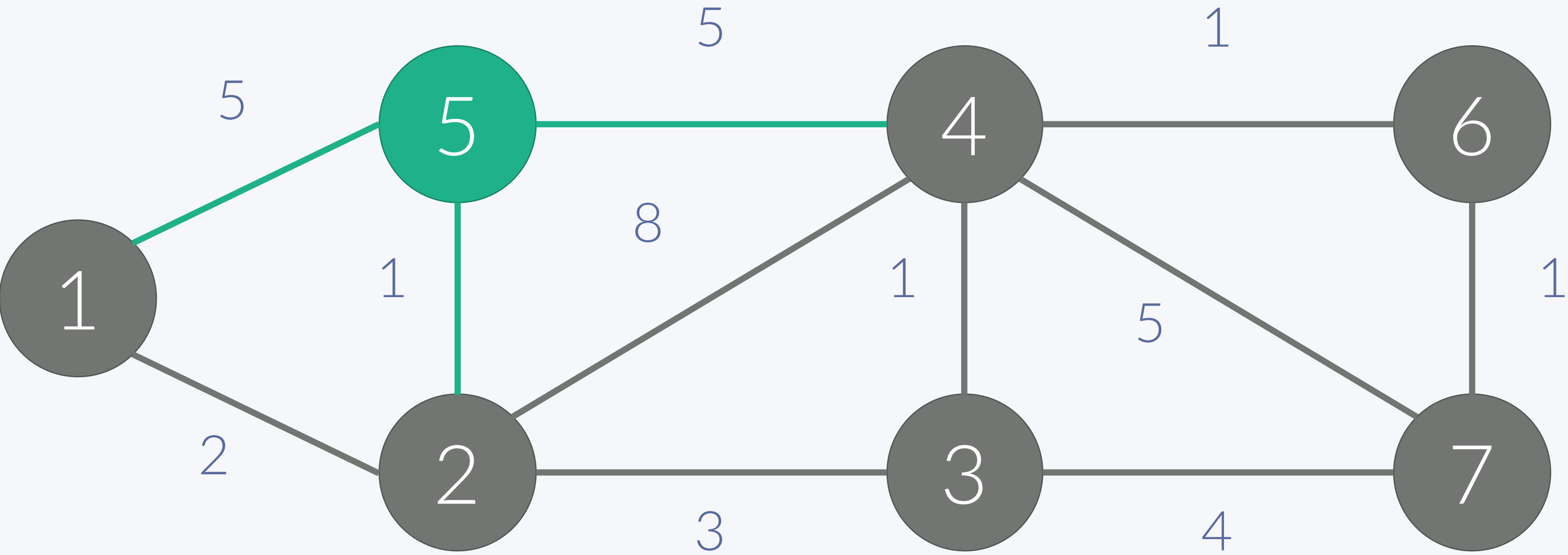
다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 5



i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	8	3	∞	∞
C[i]	1	1			1		



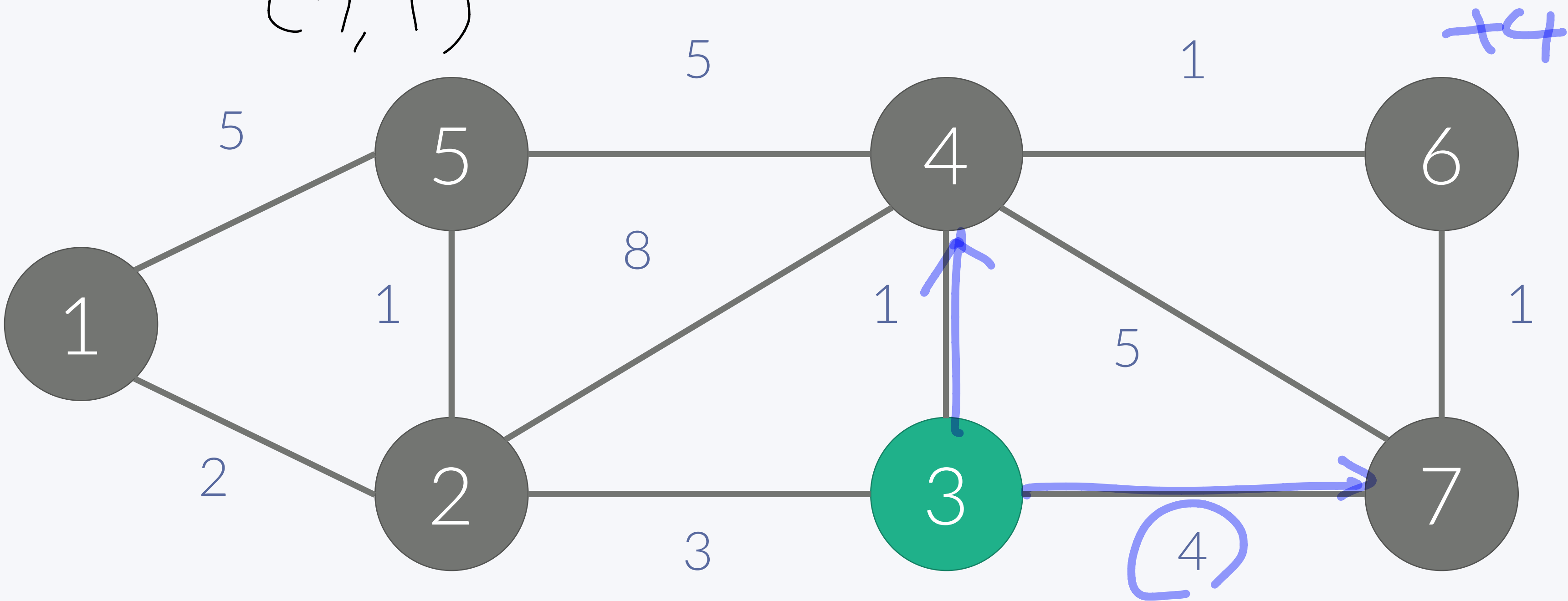
다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 3

(4, 10)
(4, 8)
(4, 6) ←
(7, 9)

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	8	3	∞	∞
C[i]	1	1	1		1		

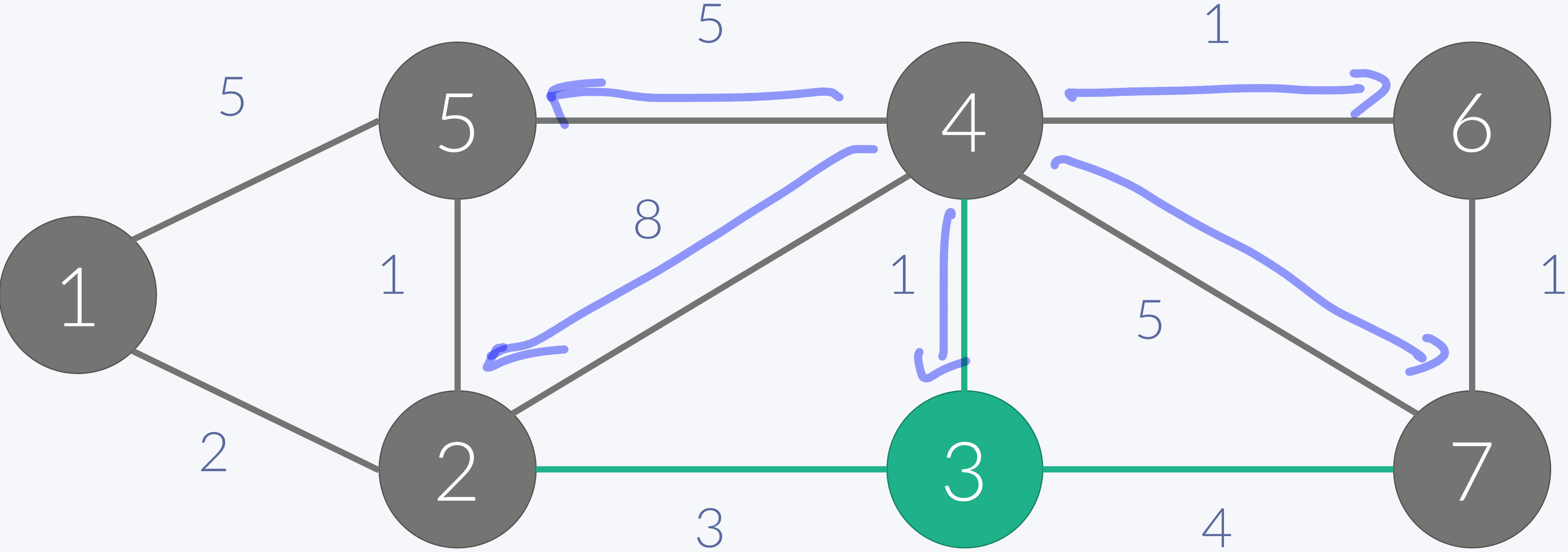


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 3

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	∞ 7	9
C[i]	1	1	1		1		

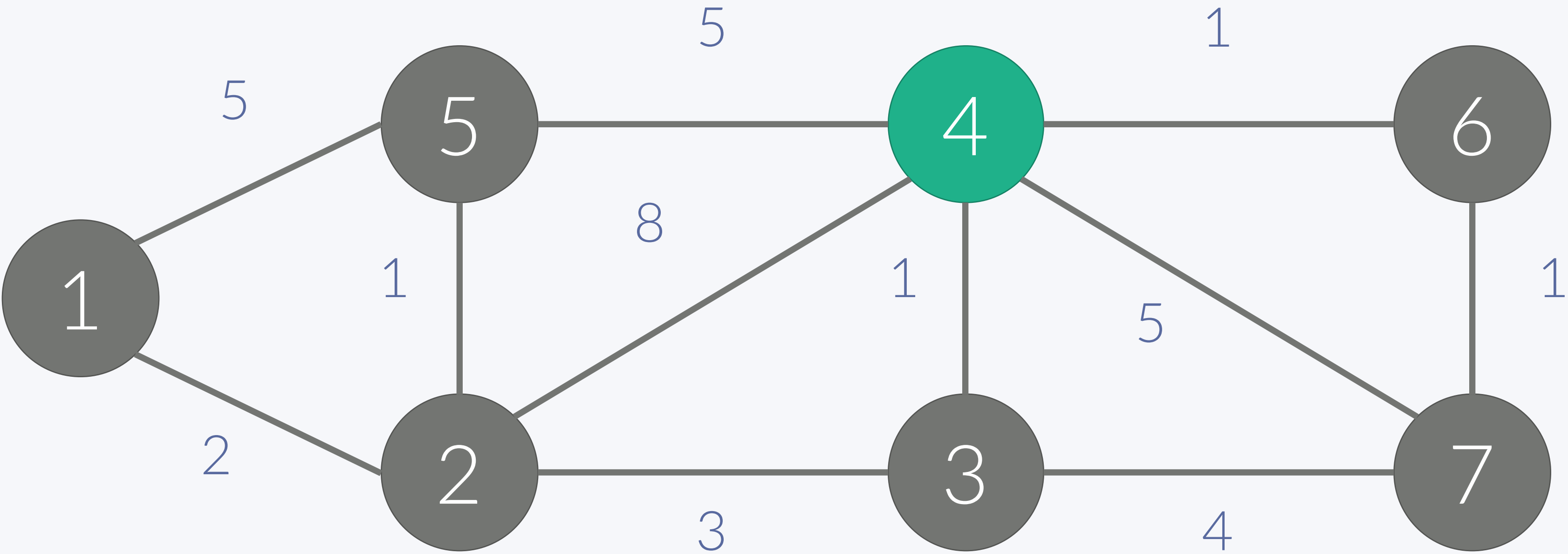


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 4

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	∞	9
C[i]	1	1	1	1	1		



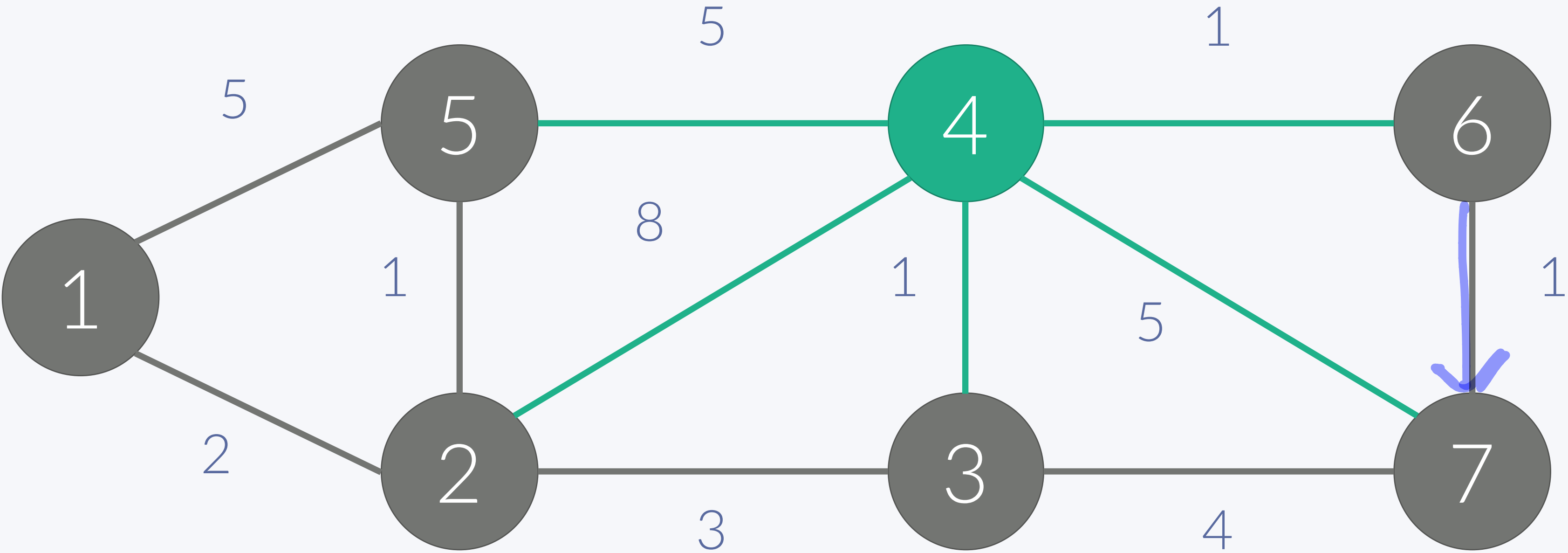
다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 4

↓

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	7	9
C[i]	1	1	1	1	1		

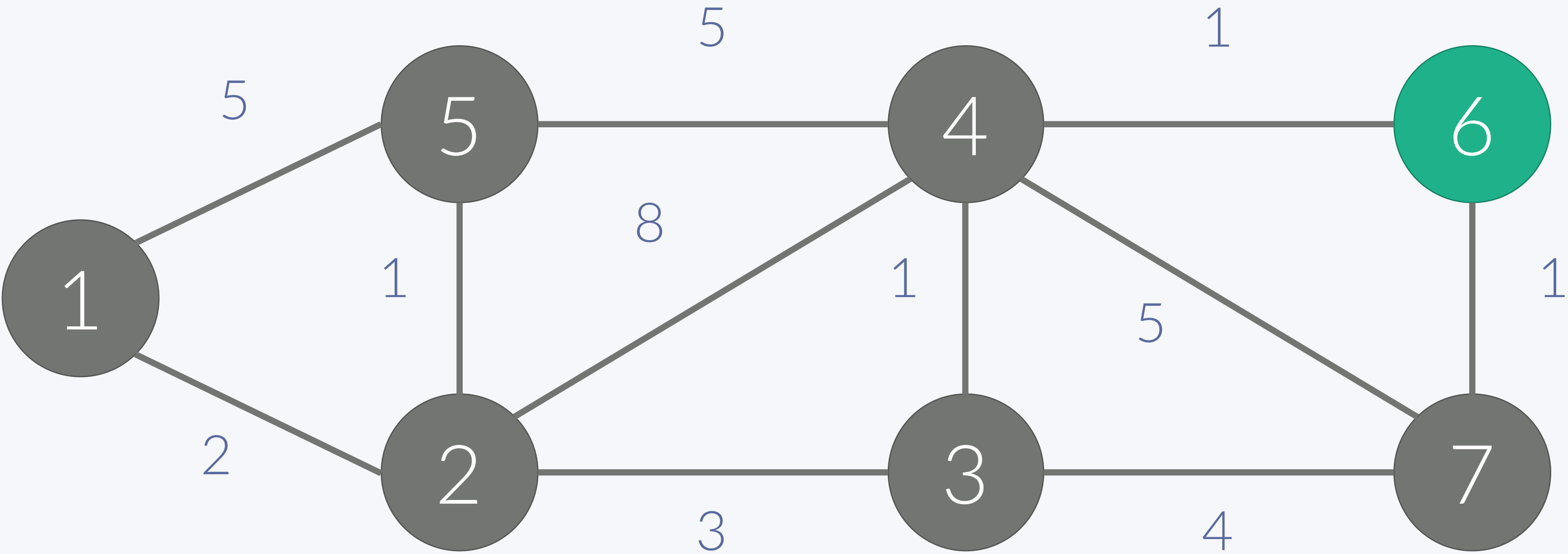


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 6

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	7	9
C[i]	1	1	1	1	1	1	

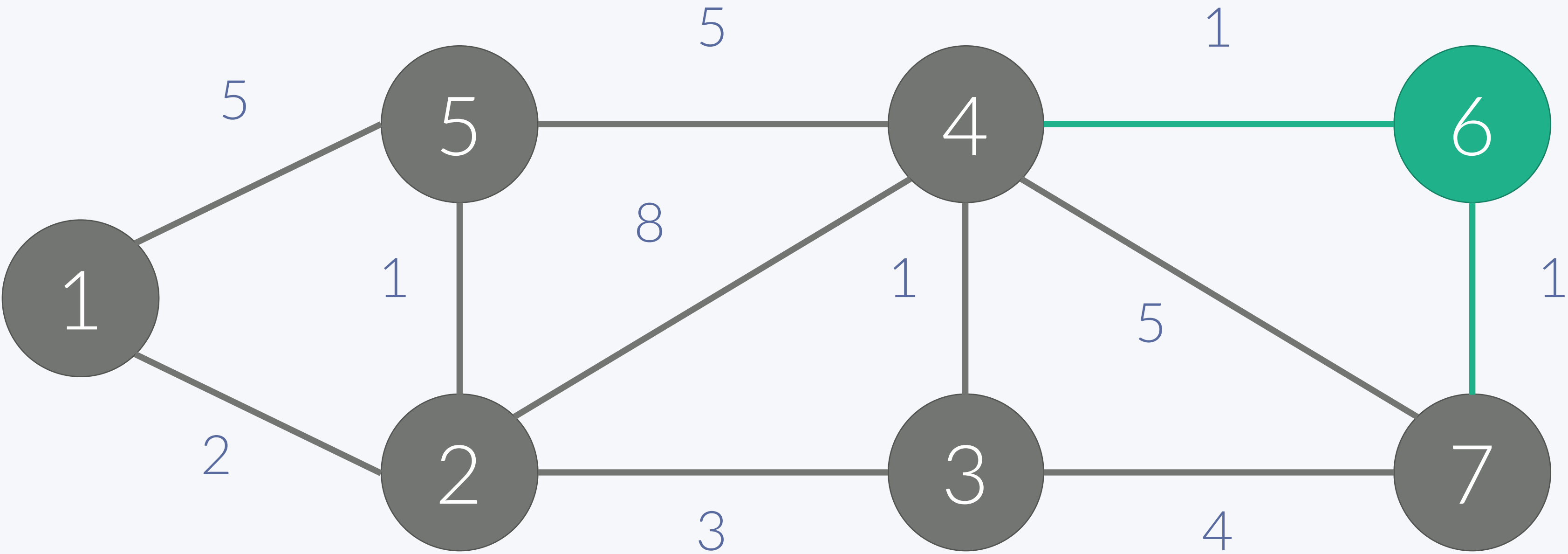


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 6

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	7	8
C[i]	1	1	1	1	1	1	



다익스트라

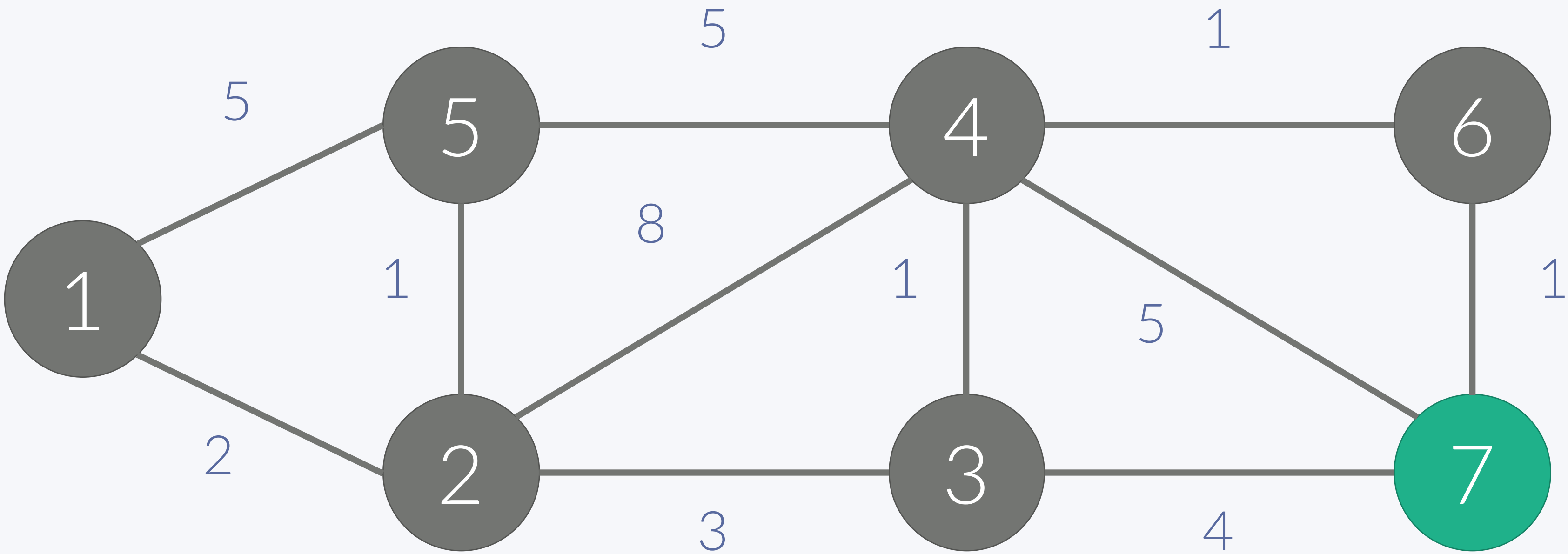
Dijkstra Algorithm

• 선택: 7

$O(V^2)$

2번째 선택 $V-1$ $O(V)$

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	7	8
C[i]	1	1	1	1	1	1	1

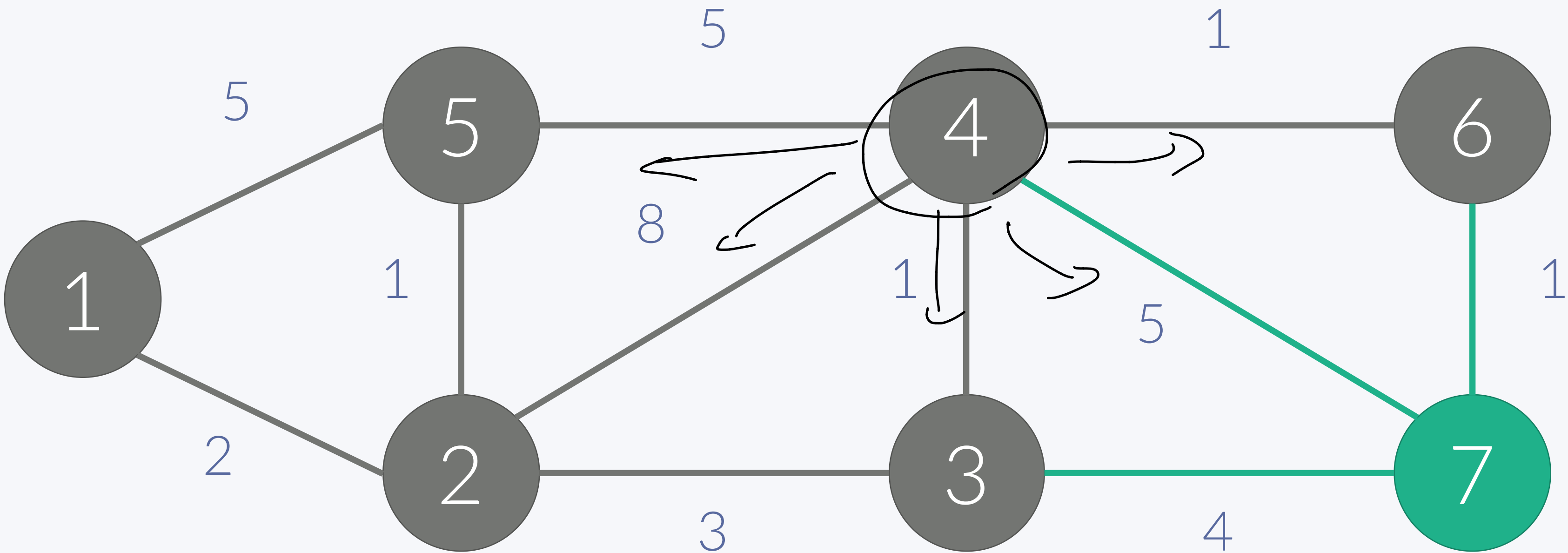


다익스트라

Dijkstra Algorithm

- 선택: 7

i	1	2	3	4	5	6	7
D[i]	0	2	5	6	3	7	8
C[i]	1	1	1	1	1	1	1



다익스트라

Dijkstra Algorithm

123

- 시간 복잡도
- 인접 행렬: $O(V^2)$
- 인접 리스트: $O(V^2)$

최소비용 구하기

<https://www.acmicpc.net/problem/1916>

- A에서 B로 가는 최단 경로

최소비용 구하기

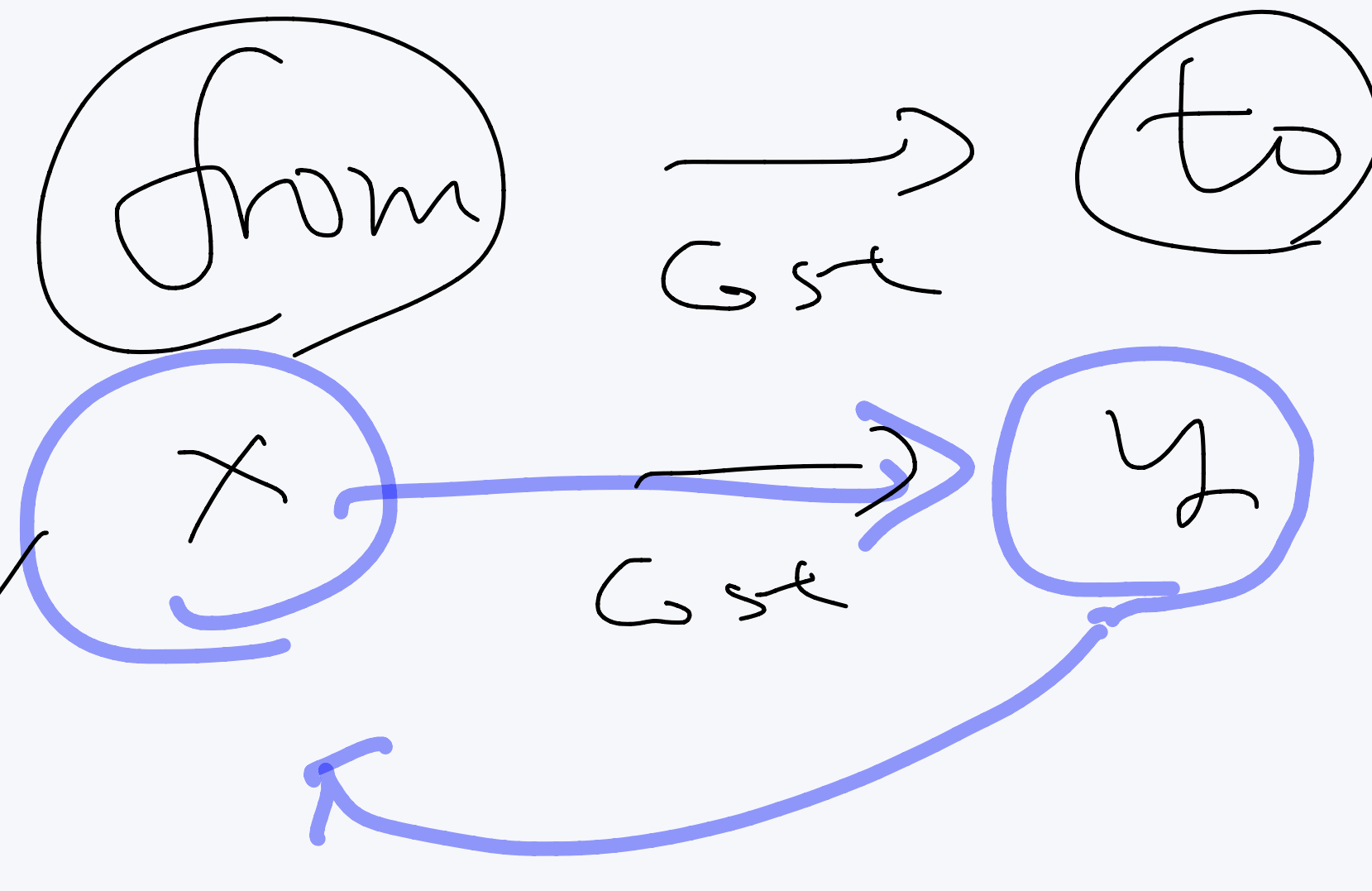
<https://www.acmicpc.net/problem/1916>

- 인접 행렬
- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/910818e0a3aa4244f989>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/742dbb011c0a03fcaae4>
- 인접 리스트
- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/c19590f898e323683648>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/dead4e8e294f79c95e1c>

최소비용 구하기 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11779>

- A에서 B로 가는 최단 경로
- 최단 경로도 구해야 함
- distance 값이 바뀔 때, 어디에서 왔는지를 저장해야 함



```

if (d[y] > d[x] + a[x][i].cost) {
    d[y] = d[x] + a[x][i].cost;
    v[y] = x;
}

```

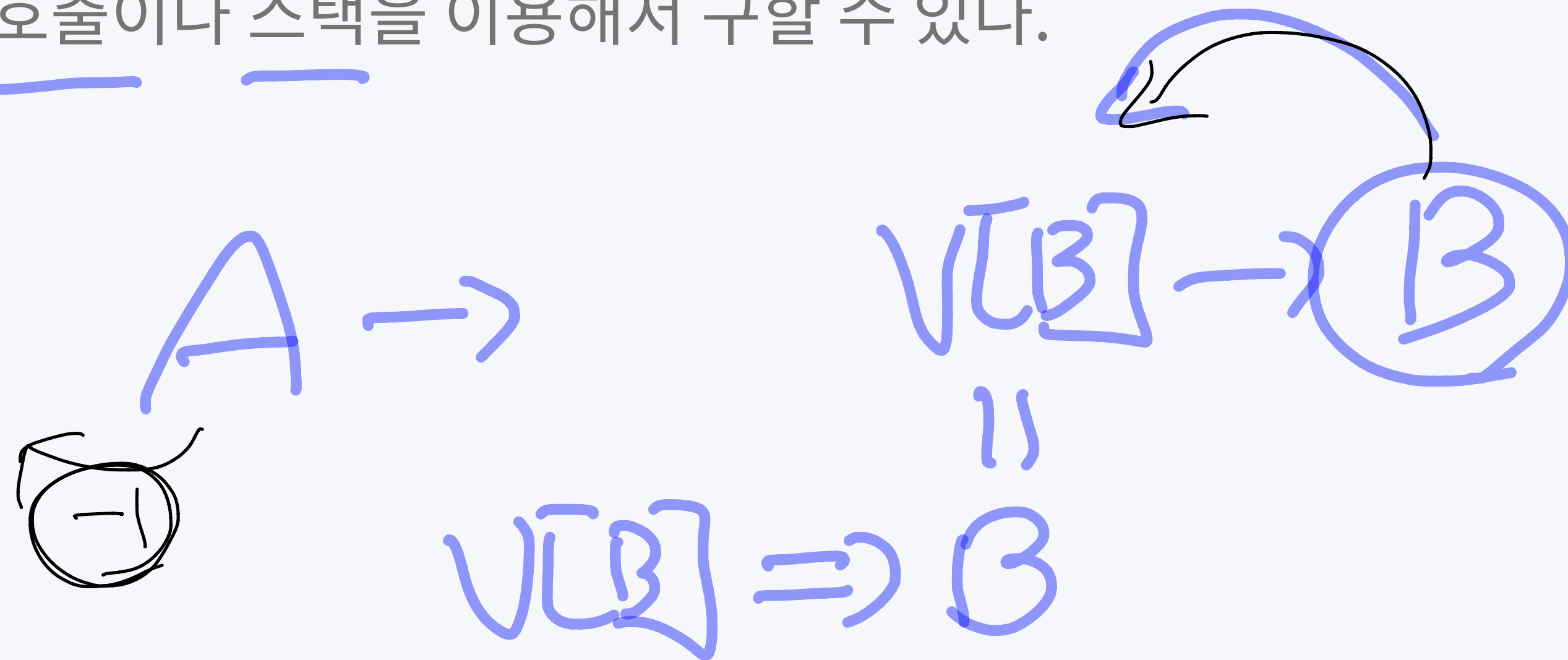
최소비용 구하기 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11779>

- 다시 정답을 찾는 것은 재귀 호출이나 스택을 이용해서 구할 수 있다.
- 도착 -> 출발 과정을 거쳐서

```
stack<int> st;
int x = end;
while (x != -1) {
    st.push(x);
    x = v[x];
}
```

```
printf("%d\n", st.size());
while (!st.empty()) {
    printf("%d ", st.top());
    st.pop();
}
```



최소비용 구하기 2

128

<https://www.acmicpc.net/problem/11779>

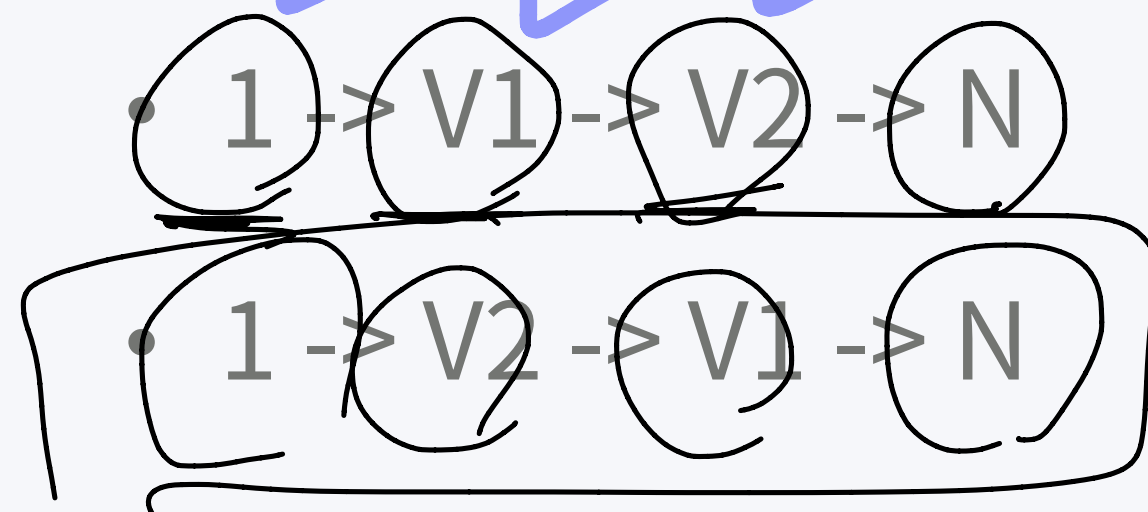
- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/3094b9da5667d56e580a>

특정한 최단 경로

<https://www.acmicpc.net/problem/1504>

- 1 -> N으로 가는데, V1, V2를 꼭 거쳐서 가는 최단 경로

- 가능한 경우 2가지



$1 \Rightarrow V1, V1 \Rightarrow V2, V2 \Rightarrow N$

- 다익스트라의 시작점을 1, V1, V2로 총 3번 알고리즘을 수행한 다음에 답을 구할 수 있다.

특정한 최단 경로

130

<https://www.acmicpc.net/problem/1504>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/1c8872f8eca44ee97e95>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/b8c102094d8c00da95c9>

최단 경로

<https://www.acmicpc.net/problem/1753>

- 다익스트라를 이용해서 최단 경로를 구해야 하는데

$$O(V^2) = 4억$$

- $1 \leq V \leq 20,000$ 이기 때문에

- $O(V^2)$ 이나 $O(VE)$ 는 시간이 너무 오래걸린다

- 인접행렬도 만들 수가 없다.

- 다익스트라에서 시간을 줄일 수 있는 부분은 어디일까?

최단 경로

<https://www.acmicpc.net/problem/1753>

1. 체크되어 있지 않은 정점 중에서 D 의 값이 가장 작은 정점 x 를 선택한다.

$O(V)$

2. x 를 체크한다.

3. x 와 연결된 모든 정점을 검사한다.

- 간선을 (x, y, z) 라고 했을 때
- $d[y] > d[x] + z$ 이면 갱신해준다.

(V^2)
 $O(V+E)$

- 1, 2, 3단계를 모든 정점을 체크할 때까지 계속한다.

최단 경로

<https://www.acmicpc.net/problem/1753>

1. 체크되어 있지 않은 정점 중에서 D의 값이 가장 작은 정점 x 를 선택한다.
2. x 를 체크한다.
3. x 와 연결된 모든 정점을 검사한다.
 - 간선을 (x, y, z) 라고 했을 때
 - $d[y] > d[x] + z$ 이면 갱신해준다.

$O(E \lg E)$
(정점, Dist)

- 1, 2, 3단계를 모든 정점을 체크할 때까지 계속한다.

최단 경로

134

<https://www.acmicpc.net/problem/1753>

- 힙을 사용해서 최소값을 $O(\lg E)$ 만에 찾을 수 있다

최단 경로

<https://www.acmicpc.net/problem/1753>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/653eceb179f8fdc284bf> $E_d T$
- C++ (Set): <https://gist.github.com/Baekjoon/f8445ae5718b7f6acb31b594b9f9439d> $E_d \checkmark$

$E_d T$

Heap
같은 공간

거의 0 x
최소값 0
상위 (최소값)

Set
같은 공간 (대신)

거의 0
최소값 0
상위 (가늠)

\checkmark

$E_d \checkmark$

Bellman Ford) 시간복잡도 $O(V^2)$
Dijkstra

DE 상
IL

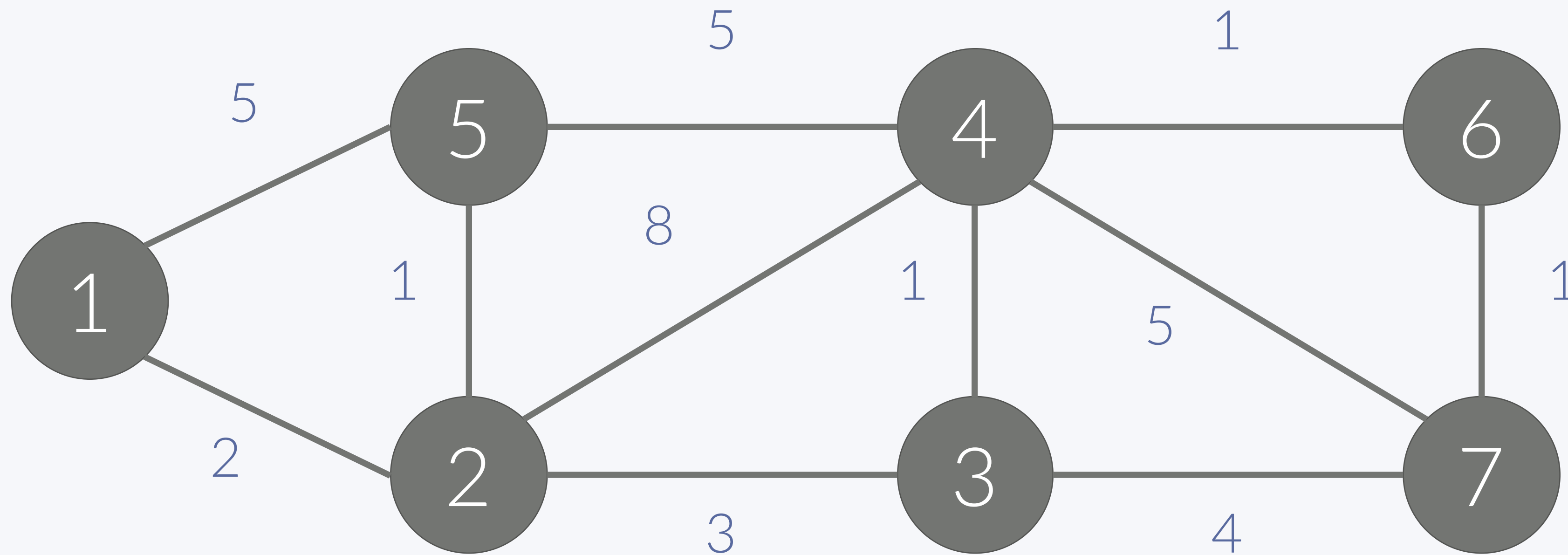
플로이드

플로이드

Floyd-Warshall Algorithm

137

- 모든 쌍의 최단 경로를 구하는 알고리즘



플로이드

Floyd-Warshall Algorithm

```
for (int k=1; k<=n; k++) {  
    for (int i=1; i<=n; i++) {  
        for (int j=1; j<=n; j++) {  
            if (d[i][j] > d[i][k] + d[k][j]) {  
                d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];  
            }  
        }  
    }  
}
```

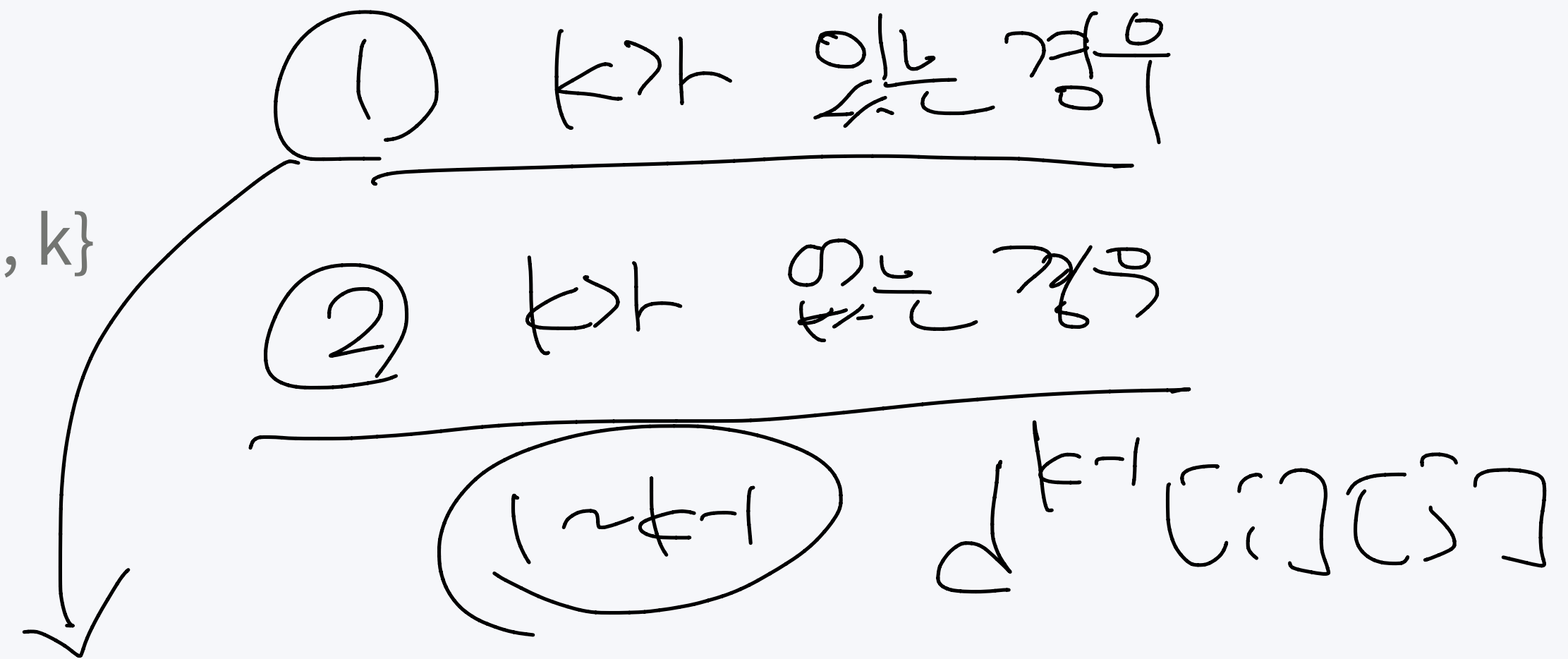
플로이드

Floyd-Warshall Algorithm

139

$$d^k[i][j] = \min_{1 \sim k} \{ d^{k-1}[i][k] + d^{k-1}[k][j] \}$$

- 1~N 까지 정점이 있을 때
- $d[k][i][j]$ 를 다음과 같이 정의
 - $i \rightarrow j$ 로 이동하는 최단 경로
 - 이 때, 중간에 방문할 수 있는 정점은 $\{1, 2, \dots, k\}$
- 그럼 $d[k][i][j]$ 를 구해보자
 - k 가 경로에 없는 경우
 - k 가 경로에 있는 경우



$$d^{k-1}[i][k] + d^{k-1}[k][j]$$

플로이드

140

Floyd-Warshall Algorithm

- 1~N 까지 정점이 있을 때
- $d[k][i][j]$ 를 다음과 같이 정의
 - $i \rightarrow j$ 로 이동하는 최단 경로
 - 이 때, 중간에 방문할 수 있는 정점은 $\{1, 2, \dots, k\}$
- 그럼 $d[k][i][j]$ 를 구해보자
 - k가 경로에 없는 경우
 - $d[k-1][i][j]$
 - k가 경로에 있는 경우
 - $d[k-1][i][k] + d[k-1][k][j]$

플로이드

Floyd-Warshall Algorithm

141

- $d[k][i][j] = a[i][j]$ ($k == 0$)
- $\min(d[k-1][i][j], d[k-1][i][k] + d[k-1][k][j])$ ($k \geq 1$)

플로이드

Floyd-Warshall Algorithm

142

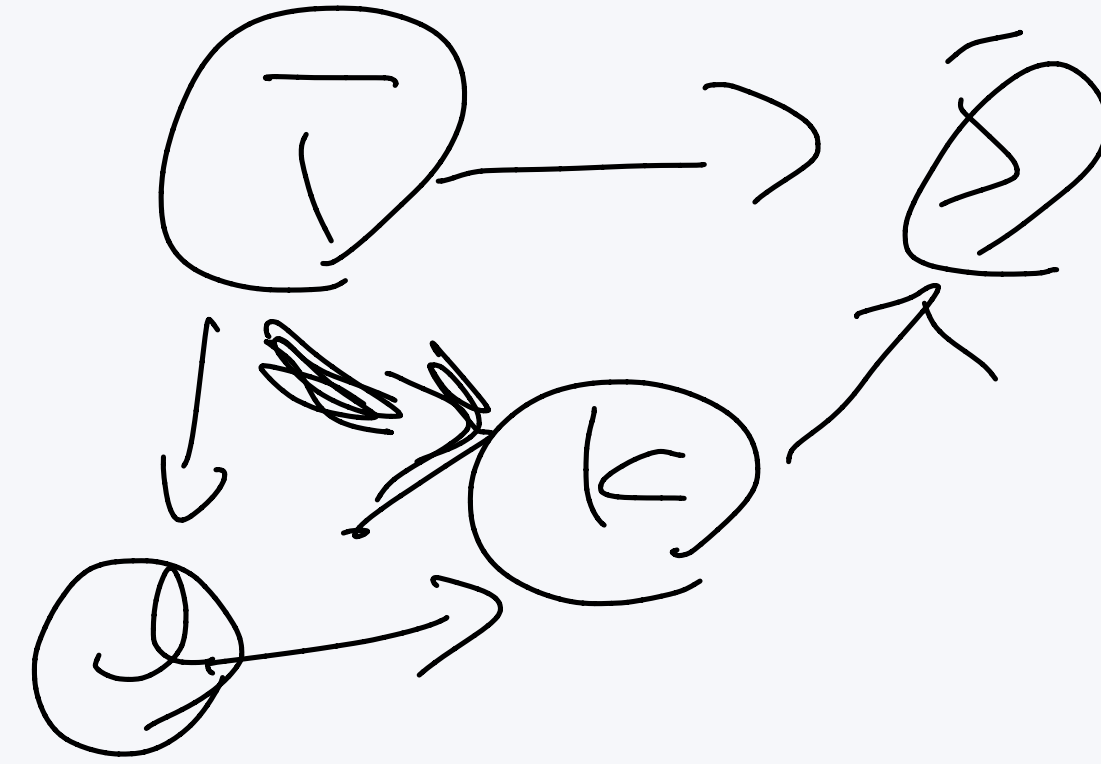
- 구현할 때는 2차원 배열로 구현하면 된다
- `for (int k=1; k<=n; k++) { d[k-1]을 이용해 d[k]를 구한다`

플로이드

Floyd-Warshall Algorithm

143

```
for (int k=1; k<=n; k++) {  
  for (int i=1; i<=n; i++) {  
    for (int j=1; j<=n; j++) {  
      if (d[i][j] > d[i][k] + d[k][j]) {  
        d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];  
      }  
    }  
  }  
}
```



~~$V[i][j] = k$~~

$V[i][j] = V[i][k];$

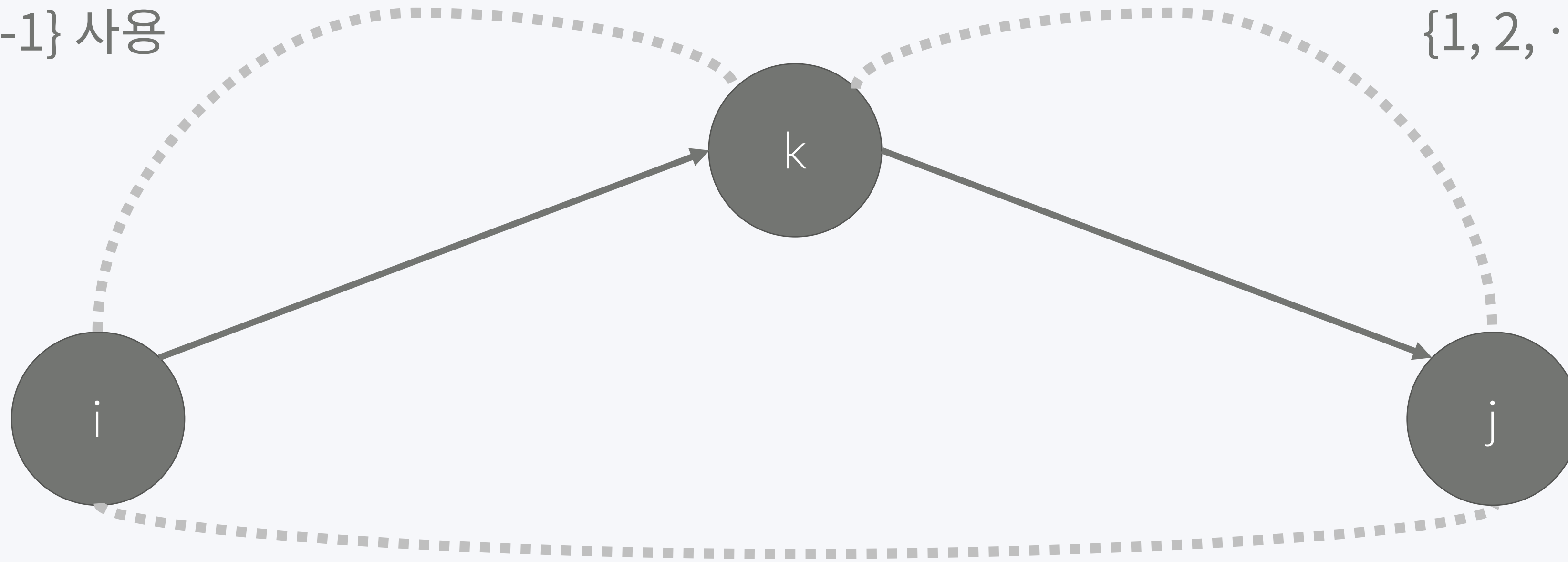
플로이드

144

Floyd-Warshall Algorithm

- $d[k][i][j] = a[i][j]$ ($k == 0$)
- $\min(d[k-1][i][j], d[k-1][i][k] + d[k-1][k][j])$ ($k \geq 1$)

$\{1, 2, \dots, k-1\}$ 사용



$\{1, 2, \dots, k-1\}$ 사용

경로 찾기

145

<https://www.acmicpc.net/problem/11403>

- 가중치 없는 방향 그래프 G 가 주어졌을 때, 모든 정점 (i, j) 에 대해서, i 에서 j 로 가는 경로가 있는지 없는지 구하는 프로그램을 작성하시오.

경로 0 \Rightarrow 최단 경로 0
X \Rightarrow X

경로 찾기

146

<https://www.acmicpc.net/problem/11403>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/e25468e15712435e1dd7>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/d4d31e9ad6e13a731d50>

플로이드

147

<https://www.acmicpc.net/problem/11404>

- $n(1 \leq n \leq 100)$ 개의 도시가 있다
- 한 도시에서 출발하여 다른 도시에 도착하는 $m(1 \leq m \leq 100,000)$ 개의 버스가 있다
- 각 버스는 한 번 사용할 때 필요한 비용이 있다
- 모든 도시의 쌍 (A, B) 에 대해서 도시 A에서 B로 가는데 필요한 비용의 최소값을 구하는 프로그램을 작성하시오

플로이드

148

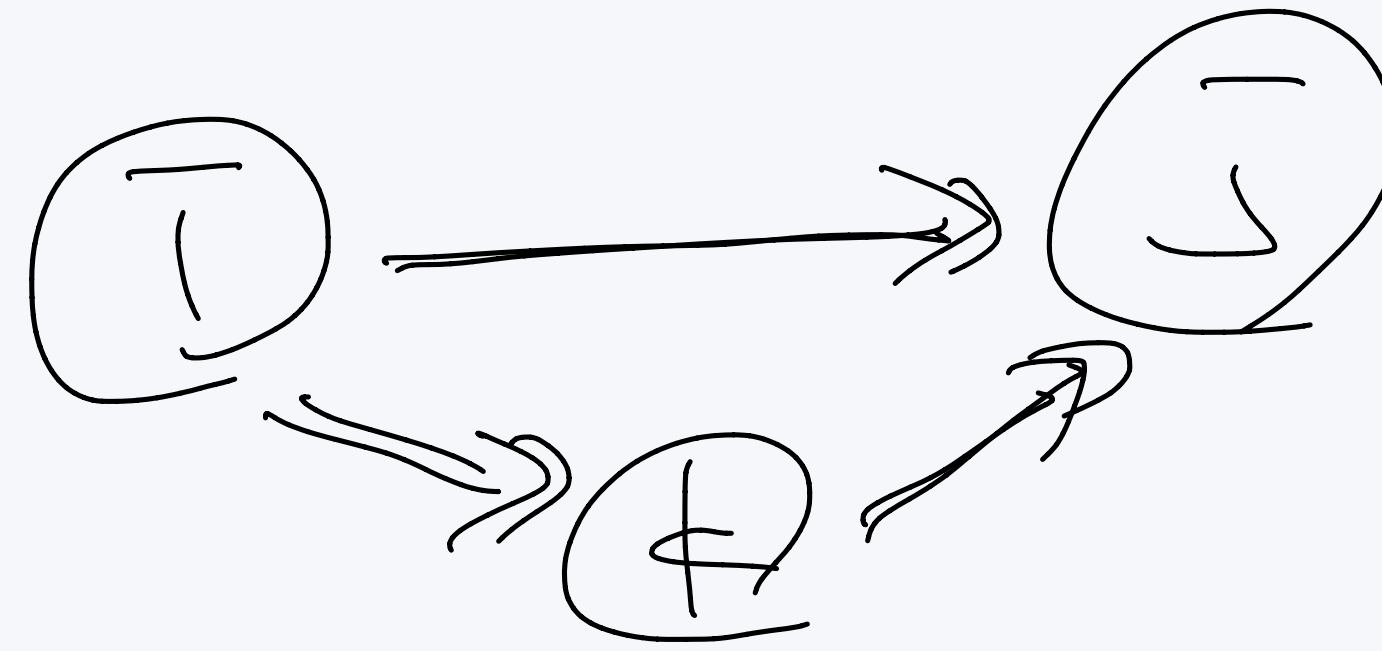
<https://www.acmicpc.net/problem/11404>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/29e8d9d76246ccbffdcd>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/d4d31e9ad6e13a731d50>

플로이드 2

149

<https://www.acmicpc.net/problem/11780>



- 플로이드 구현을 보면
- $i \rightarrow k$, $k \rightarrow j$ 로 가는 간선을 $i \rightarrow j$ 로 바꿔줬기 때문에
- $i \rightarrow j$ 이 원래 어떤 정점을 가르키고 있었는지를 알아야 한다.
- 따라서 다음과 같이 구현을 변경할 수 있다.

$$V[i][j] = j$$

$$V[i][j] = i \rightarrow j \text{ 간선이 원래 어디를 가르키는지}$$

$$i \rightarrow V[i][j] \rightarrow j$$

케빈 베이컨의 6단계 법칙

150

<https://www.acmicpc.net/problem/1389>

- 플로이드 알고리즘을 이용해 모든 쌍의 최단 경로를 구한 다음에 구할 수 있다
- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/499233fa40a691cecf0a>

궁금한 민호

151

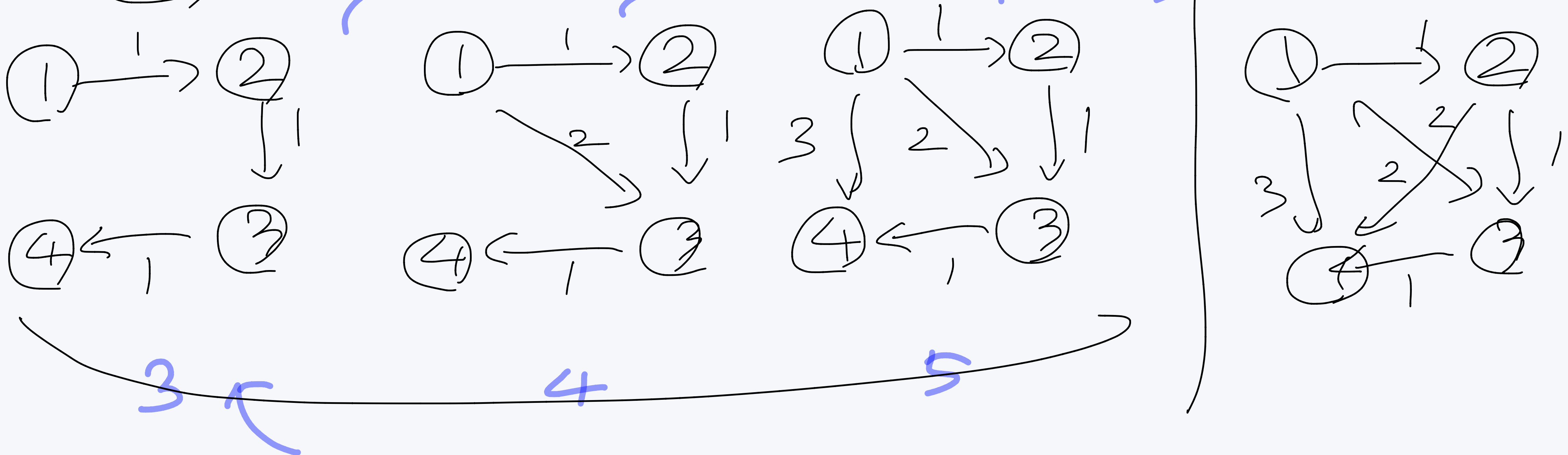
<https://www.acmicpc.net/problem/1507>

- 강호는 모든 쌍의 도시에 대해서 최소 이동 시간을 구해놓았다. 민호는 이 표를 보고 원래 도로가 몇 개 있는지를 구해보려고 한다.

→ 플로이드 워셜

- 모든 쌍의 도시 사이의 최소 이동 시간이 주어졌을 때, 이 나라에 존재할 수 있는 도로의 개수의 최소값과 그 때, 모든 도로의 시간의 합을 구하는 프로그램을 작성하시오.

Floyd 워셜

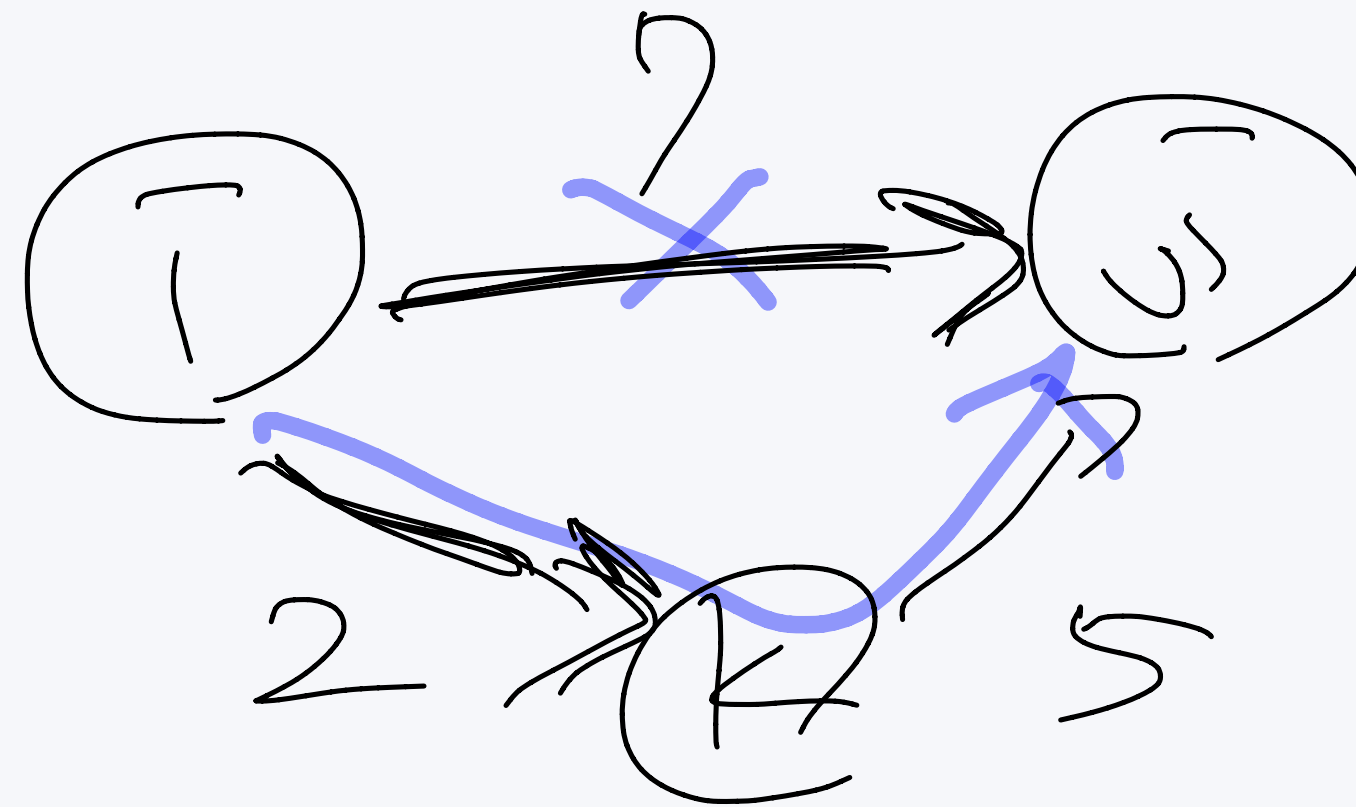


궁금한 민호

<https://www.acmicpc.net/problem/1507>

152

- A에서 B로 가는 비용이 x 일 때
- A->C->B로 가는 비용이 x이면
- A->B로 가는 도로는 필요가 없다
- 이렇게 모든 도시의 쌍을 보면서 필요없는 도로를 제거



$$d[i][j] = d[i][k] + d[k][j]$$

궁금한 민호

153

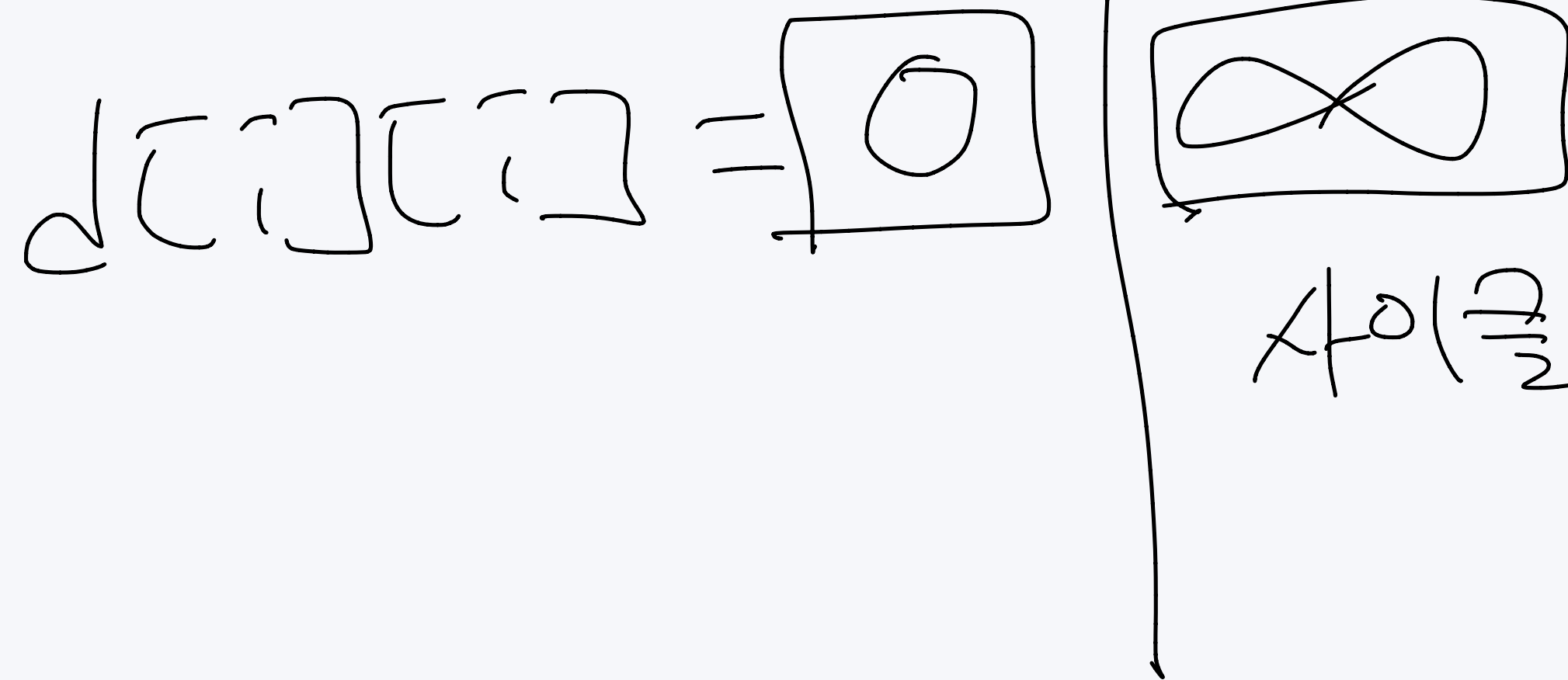
<https://www.acmicpc.net/problem/1507>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/2db040d34d91663a5c41>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/c30a5b1b9254e7dad0c>

운동

<https://www.acmicpc.net/problem/1956>

- 그래프에서 사이클 길이 중 최소길이를 찾는 문제
- 플로이드를 이용한 다음에 $d[i][i]$ 를 검사하면 된다.



<https://www.acmicpc.net/problem/1956>

- C/C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/bda2e8572db7149bb9fd>
- Java: <https://gist.github.com/Baekjoon/3288251c4d2d98301be7>

$$O(V^3) \quad V \leq 500$$

SPFA

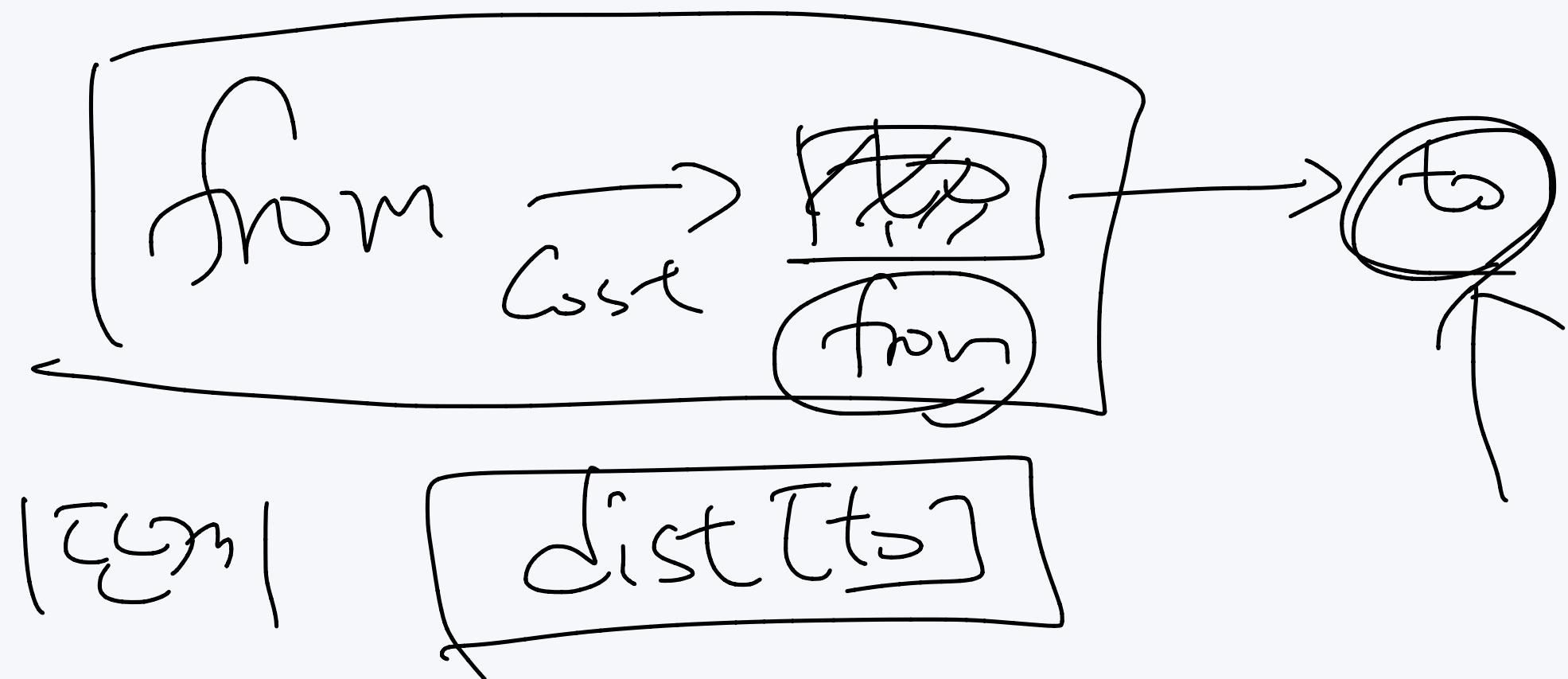
Bellman Ford \downarrow $O(VE)$
 \Downarrow
SPFA $O(VE)$
平均 $O(E)$

SPFA

Shorteest Path Faster Algorithm

- 벨만포드의 성능을 향상시킨 알고리즘
- 최악의 경우에는 벨만 포드의 시간복잡도와 같지만 평균적으로 $O(E)$ 이다
- 벨만포드의 아이디어와 같은 아이디어이다

```
for (int j = 0; j < n; j++) {  
    for (int k = 0; k < m; k++) {  
        int from = edges[k].from;  
        int to = edges[k].to;  
        int cost = edges[k].cost;  
        if (Distance[to] > Distance[from] + cost) {  
            Distance[to] = Distance[from] + cost;  
        }  
    }  
}
```



SPFA

Shorteest Path Faster Algorithm

- 벨만포드는 모든 간선에 대해서 업데이트를 진행하고
- SPFA는 아래 if문에 의해서 바뀐 정점과 연결된 간선에 대해서만 업데이트를 진행한다.
- 따라서, 인접 리스트의 구현이 필요하다.

```
for (int j = 0; j < n; j++) {  
    for (int k = 0; k < m; k++) {  
        int from = edges[k].from;  
        int to = edges[k].to;  
        int cost = edges[k].cost;  
        if (Distance[to] > Distance[from] + cost) {  
            Distance[to] = Distance[from] + cost;  
        }  
    }  
}
```

SPFA

Shorteest Path Faster Algorithm

- 바뀐 정점은 큐를 이용해서 관리하고
- 큐에 들어가있는지, 안 들어가있는지를 배열을 이용해서 체크한다.
- 초기화를 하고, 큐에 시작점을 넣어주고

```
for (int i=1; i<=n; i++) {  
    d[i] = inf;  
}  
d[1] = 0;  
queue<int> q;  
q.push(1);  
c[1] = true;
```

SPFA

Shorteest Path Faster Algorithm

160

$c[i] = \begin{cases} \text{true} & \text{if } i \text{ is in queue} \\ \text{false} & \text{otherwise} \end{cases}$

```
while (!q.empty()) {  
    int from = q.front();  
    c[from] = false; q.pop();  
    for (Edge &e : a[from]) {  
        int to = e.to, cost = e.cost;  
        if (d[to] > d[from] + cost) {  
            d[to] = d[from] + cost;  
            if (c[to] == false) {  
                q.push(to);  
                c[to] = true;  
            }  
        }  
    }  
}
```

Queue V-142

U-174

$O(VE)$

Time: $O(E)$

타임머신

161

<https://www.acmicpc.net/problem/11657>

- C++: <https://gist.github.com/Baekjoon/f50cd9501baec1064eec>

