

RMQ

최백준 choi@startlink.io

RMQ

구간의 최소값 구하기

크기: N

3

Range Minimum Query

- 배열 $A[1], \dots, A[N]$ 가 있고, 다음과 같은 연산을 수행해야 한다.
 - 최소값: $A[i], \dots, A[j]$ 중에서 최소값을 찾아 출력한다.
- 이러한 연산이 총 M 개 주어진다.

$i \sim j$ for

Query $M > N$

$3 \sim 8 \Rightarrow 1$
 $6 - 8 \Rightarrow 7$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

다 해보기

다 해보기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값: $A[i], \dots, A[j]$ 중에서 최소값을 찾아 출력한다. $O(N)$

```
int m = a[i];
for (int k=i; k<=j; k++) {
    if (m > a[k]) {
        m = a[k];
    }
}
```

$O(N)$

쿼리 (M)

$O(M \cdot N)$

쿼리, 174

1477

가장 빠른 방법

느린 방법

다 해보기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 하나 구하는데 $O(N)$ 시간이 걸린다.
- 쿼리의 개수는 총 M 개이기 때문에, $O(MN)$ 시간이 필요하다.

저장하기

저장하기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

$D[i][j] = \min_{i \leq k \leq j} A[k]$ 최소값

8

- $D[i][j] = A[i] \sim A[j]$ 중 최소값을 저장한다. ($i \leq j$)
- $D[i][i] = A[i]$
- $D[i][j] = \min(D[i][j-1], A[j])$

선처리 \Rightarrow 쿼리

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]
3	6	2	5	3	1	8

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	3	3	2	2	2	1	1
1		6	2	2	2	1	1
2			2	2	2	1	1
3				5	3	1	1
4					3	1	1
5						1	1
6							8

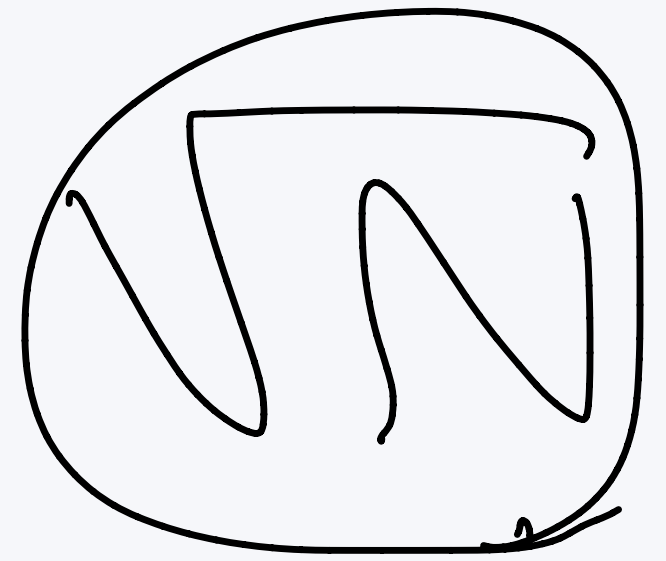
공간: $O(N^2)$
선처리: $O(N^2)$ ←
쿼리: $O(1)$

저장하기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 저장할 N^2 크기의 배열이 하나 필요하다.
- 처음 $O(N^2)$ 시간 동안 배열을 채워놓으면
- 최소값을 구하는데 걸린 시간은 $O(1)$ 이다.

```
int d[N][N];
int a[N];
int n;
for (int i=0; i<n; i++) {
    d[i][i] = a[i];
    for (int j=i+1; j<n; j++) {
        d[i][j] = min(d[i][j-1], a[j]);
    }
}
```



루트N으로 나누기

$$N = \frac{\sqrt{N}}{\text{그루트의 개수}}$$

↑

$$\frac{\sqrt{N}}{\text{그루트의 크기}}$$

↑

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

Square Root Decomposition.

11

- 영어로는 sqrt decomposition 이라고 한다.
- $R = \sqrt{N}$ 이라고 했을 때
- A 를 R 개의 그룹으로 나눈 다음에 Group[i]에 i번 그룹의 최소값을 저장하는 방식

$N=11$ $\sqrt{11} = 3.?$
 $\sqrt{N} = 3$

	A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
	3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5
그룹	0			1			2			3	
	2			1			7			3	

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 영어로는 sqrt decomposition 이라고 한다.
- $R = \sqrt{N}$ 이라고 했을 때
- A 를 R 개의 그룹으로 나눈 다음에, $Group[i]$ 에 i 번 그룹의 최소값을 저장하는 방식

$r = \sqrt{n}$

$\lceil \frac{n}{r} \rceil$

9 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

Group[0] = 2	Group[1] = 1	Group[2] = 7	Group[3] = 3
--------------	--------------	--------------	--------------

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 영어로는 sqrt decomposition 이라고 한다.
- $R = \sqrt{N}$ 이라고 했을 때
- A 를 R 개의 그룹으로 나눈 다음에, $Group[i]$ 에 i 번 그룹의 최소값을 저장하는 방식

선처리 $O(N)$

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    if (i%r == 0) {
        group[i/r] = a[i];
    } else {
        group[i/r] = min(group[i/r], a[i]);
    }
}
```

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 구하는 쿼리 i, j 는 두 가지 경우가 있다. ($i \leq j$)

- 1. i 와 j 가 같은 그룹인 경우
- 2. i 와 j 의 그룹이 다른 경우

① i 와 j 가 같은 그룹
② 다른 그룹

for \sqrt{N} $O(\sqrt{N})$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5
G[0] = 2			G[1] = 1			G[2] = 7			G[3] = 3	

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 구하는 쿼리 i, j 는 두 가지 경우가 있다. ($i \leq j$)

1. i 와 j 가 같은 그룹인 경우

- 이 경우에는 그냥 for loop를 이용해서 최소값을 구하면 된다.
- 그룹에 들어있는 수의 개수는 루트N이기 때문에, 총 걸리는 시간은 $O(\text{루트}N)$ 이다.

```
for (int i=start; i<=end; i++) {  
    ans = min(ans, a[i]);  
}
```

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 구하는 쿼리 i, j 는 두 가지 경우가 있다. ($i \leq j$)

2. i 와 j 가 다른 그룹인 경우

- 이런 경우에는 3가지로 나눌 수 있다.

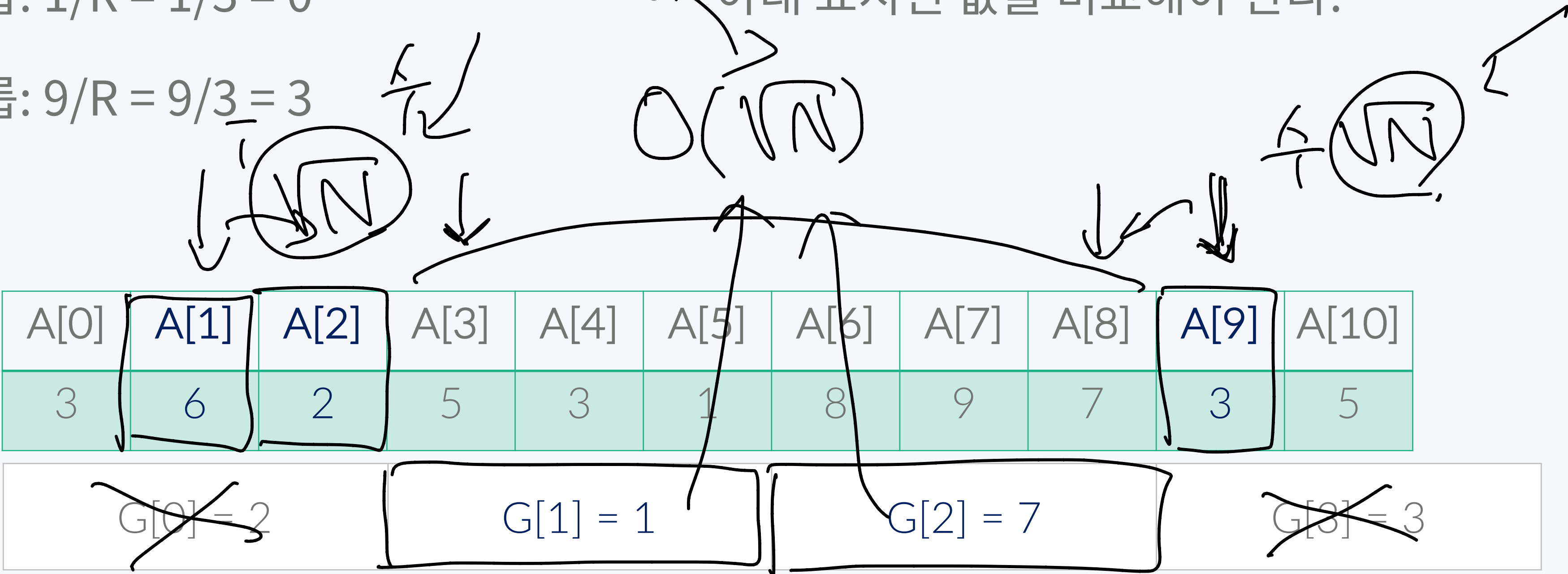
- i 가 들어있는 그룹
- j 가 들어있는 그룹
- i 와 j 사이에 들어있는 그룹

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

$O(\sqrt{N})$

- $A[1] \sim A[9]$ 의 최소값을 구하는 경우
- $N = 11$
- $R = \sqrt{N} = 3$
- 1의 그룹: $1/R = 1/3 = 0$
- 9의 그룹: $9/R = 9/3 = 3$
- 시작 그룹에 들어있는 수의 개수는 R개
- 끝 그룹에 들어있는 수의 개수는 R개
- 시작과 끝 그룹 사이에 있는 그룹의 수는 R개
- 아래 표시된 값을 비교해야 한다.



루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
while (true) {
    ans = min(ans, a[start]);
    start += 1;
    if (start % r == 0) {
        break;
    }
}
```

시작 $\frac{1}{r}$

```
while (true) {
    ans = min(ans, a[end]);
    end -= 1;
    if (end % r == r-1) {
        break;
    }
}
```

끝 $\frac{1}{r}$

```
for (int i=start/r; i<=end/r; i++) {
    ans = min(ans, group[i]);
}
```

사이의 그룹

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 총 $O(3\sqrt{N})$ 의 시간이 걸리게 된다. 공간: $O(\sqrt{N})$, $O(N)$
선처리: $O(N)$
쿼리: $O(\sqrt{N})$

다이나믹 프로그래밍

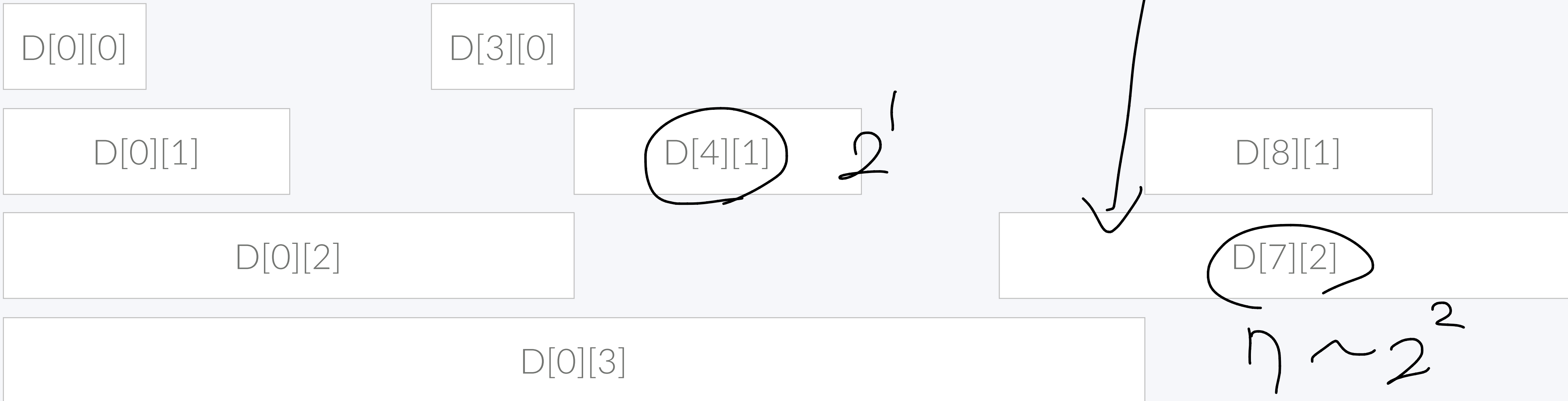
다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- $D[i][j] = A[i]$ 부터 2^j 개의 최소값

$D[i][j] = [부터 2^j개의 수의 최소값]$

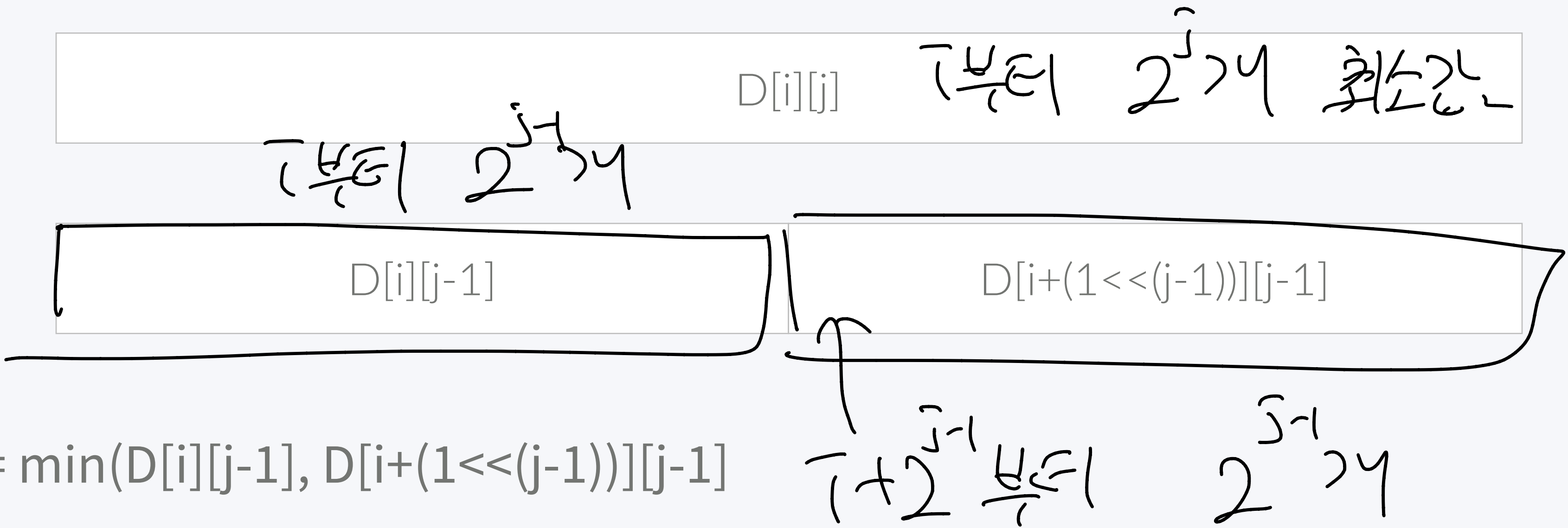
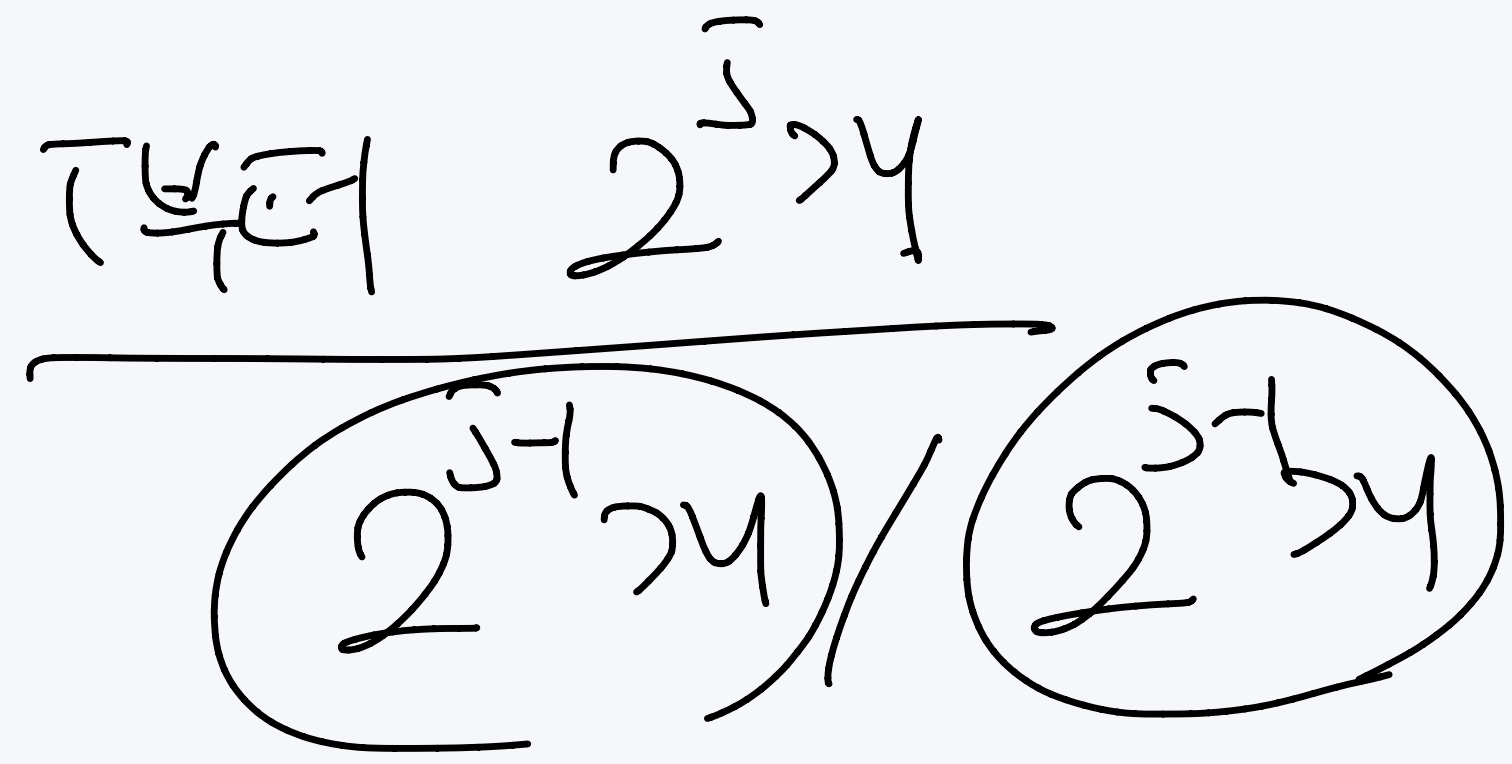
A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5



다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- $D[i][j] = A[i]$ 부터 2^j 개의 최소값
- $A[i]$ 부터 2^j 개의 최소값은
- $A[i]$ 부터 $2^{(j-1)}$ 개의 최소값과 $A[i+2^{(j-1)}]$ 부터 $2^{(j-1)}$ 개의 최소값과 같다.



• $D[i][j] = \min(D[i][j-1], D[i+(1 \ll (j-1))][j-1])$

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 1부터 6까지 최소값 구하기

1부터 7
 $2^3 > 4$
 $2^2 > 4$
 $2^1 > 4 =$
8
(4)

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

1~6까지 최소값

D[1][2]

D[5][1]

5-6

(1~4)

$6 = 110_2$
 $2^2 + 2^1$

다이나믹 프로그래밍

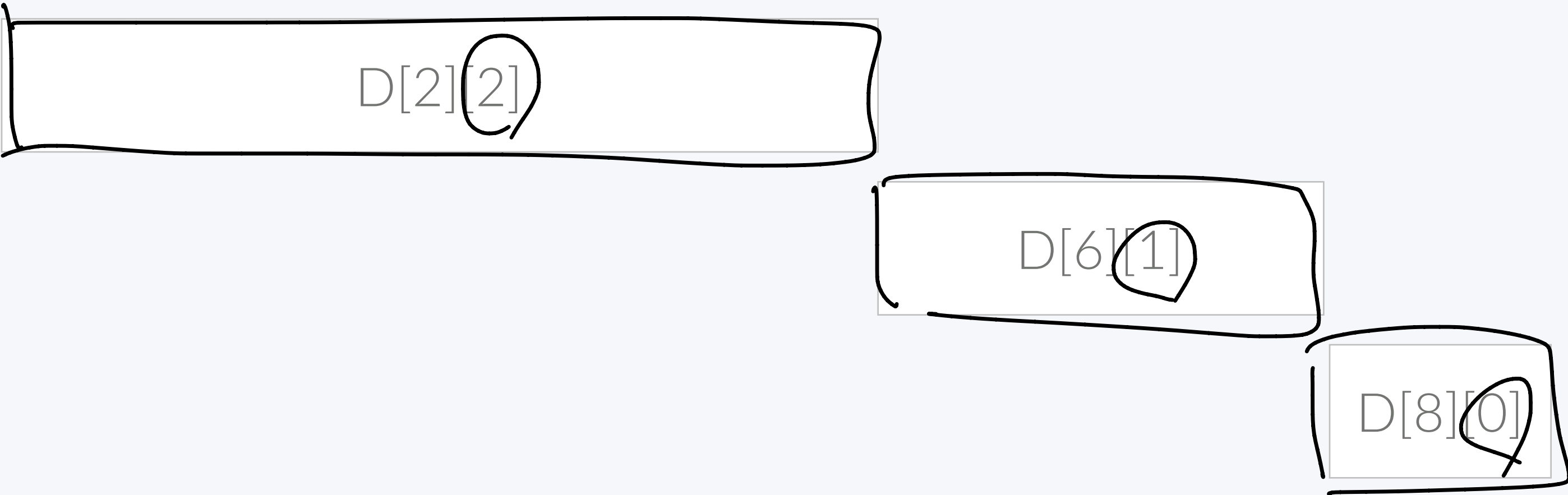
구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 2부터 8까지 최소값 구하기

$2 \sim 8 = 7 = \underbrace{111}_2$
 $2^0 + 2^1 + 2^2$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

2~8까지 최소값

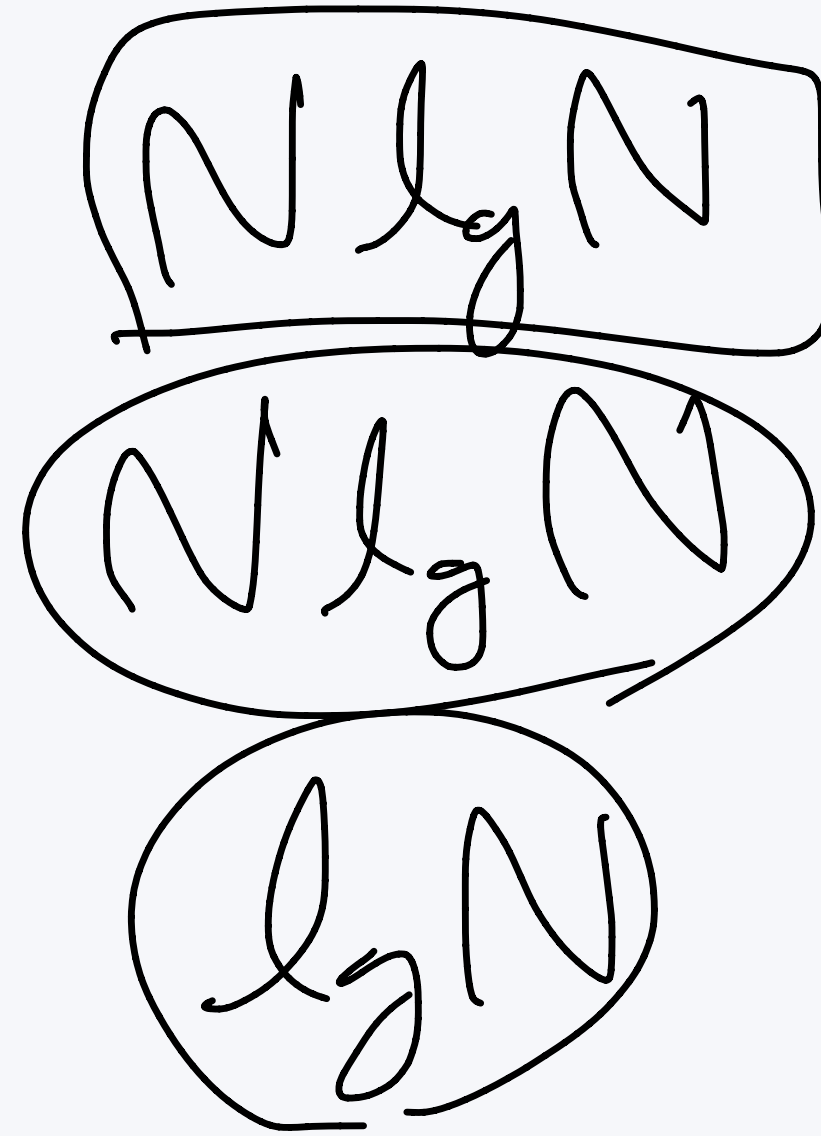


다이나믹 프로그래밍

25

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 공간: $O(N \lg N)$
- 선처리: $O(N \lg N)$
- 최소값 구하는 시간: $O(\lg N)$



다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    d[i][0] = a[i];
}
for (int j=1; j<17; j++) {
    for (int i=0; i<n; i++) {
        if (i+(1<<j)-1 < n) {
            d[i][j] = min(d[i][j-1], d[i+(1<<(j-1))][j-1]);
        } else {
            break;
        }
    }
}
```

$d[i][j]$
 $i \sim 2^j - 1$
 16
 $N \leq 10^5$
 $2^{16} \leq 10^5$

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
int ans = a[start];
int k = 16;
while (start <= end && k >= 0) {
    if (start + (1<<k) - 1 <= end) {
        ans = min(ans, d[start][k]);
        start += (1<<k);
    }
    k -= 1;
}
```

- 위의 소스에서 16은 문제의 N 제한이 10만이기 때문에, 정한 값이다.
- $2^{16} = 65536$ 이라, 2^{17} 크기를 가지는 경우는 없기 때문

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 쿼리는 $O(1)$ 만에 구할 수 있다.
- $k = \lg \text{길이} = \lg(j-i+1)$ 로 한다면
- 정답은 $\min(D[i][k], D[j-(1 \ll k)+1][k])$ 으로 구할 수 있다. (최소값은 겹쳐도 되기 때문)
- 아래 그림은 1~6까지 최소값을 한 번에 구하는 경우
- $\lg(6-1+1) = 2$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

1~6까지 최소값

D[1][2]

D[3][2]

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 쿼리는 $O(1)$ 만에 구할 수 있다.
- $k = \lg \text{길이} = \lg(j-i+1)$ 로 한다면
- 정답은 $\min(D[i][k], D[j-(1 \ll k)+1][k])$ 으로 구할 수 있다. (최소값은 겹쳐도 되기 때문)
- 아래 그림은 2~8까지 최소값을 한 번에 구하는 경우
- $\lg(8-2+1) = 2$

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

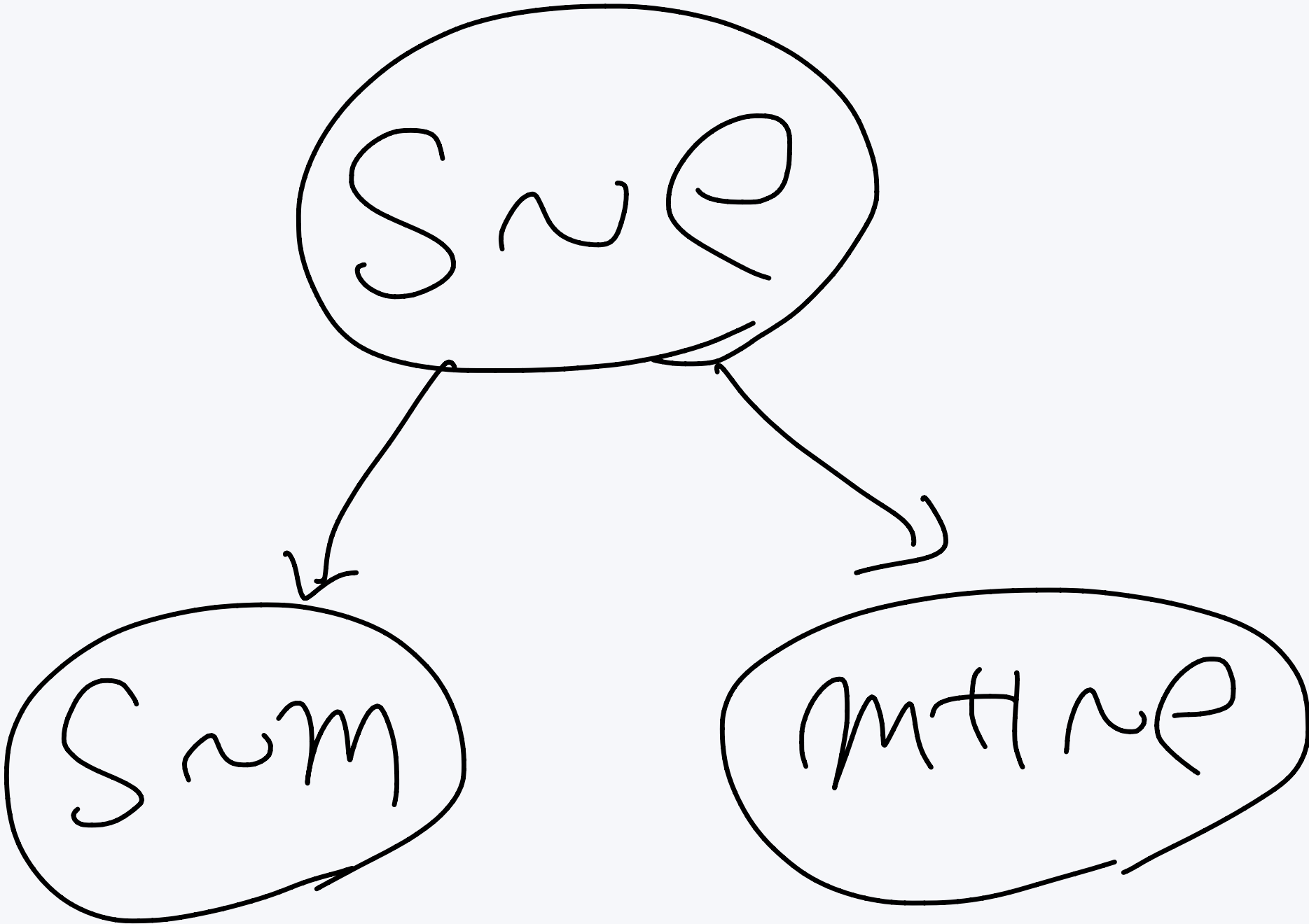
2~8까지 최소값

D[2][2]

D[5][2]

$$m = \frac{S+E}{2}$$

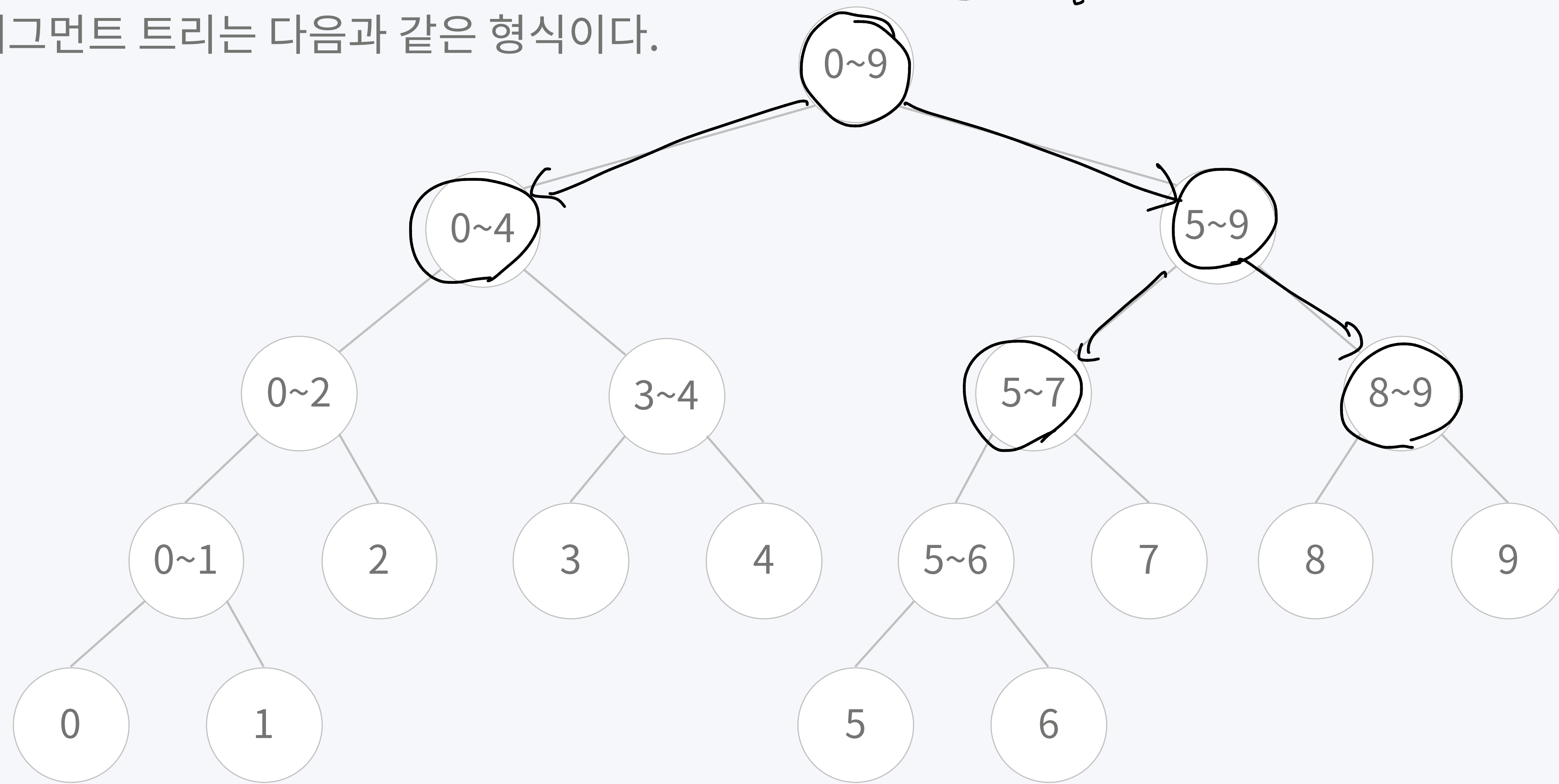
세그먼트 트리



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

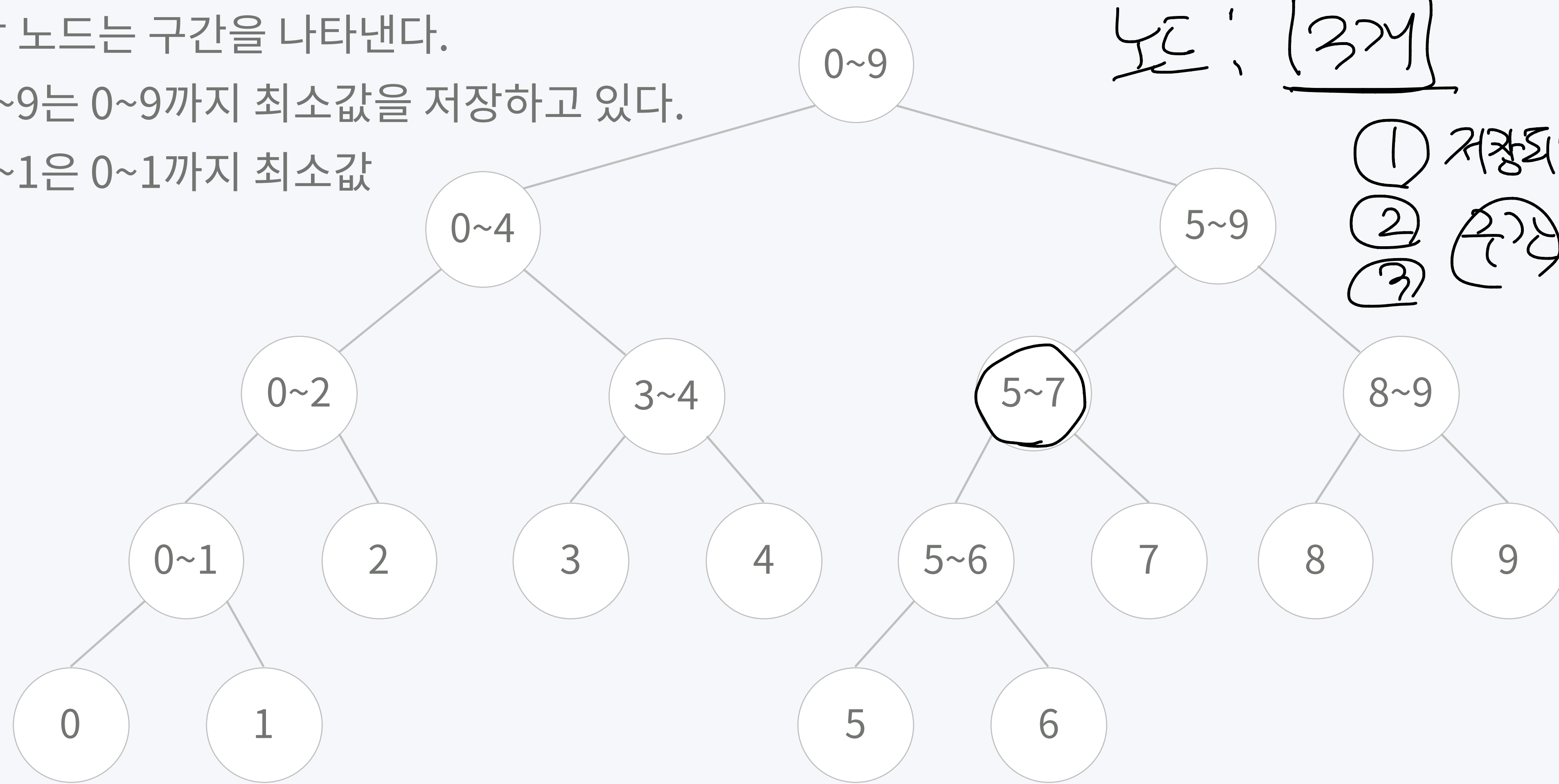
- 세그먼트 트리는 다음과 같은 형식이다.



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 각 노드는 구간을 나타낸다.
- 0~9는 0~9까지 최소값을 저장하고 있다.
- 0~1은 0~1까지 최소값



4402 Heap

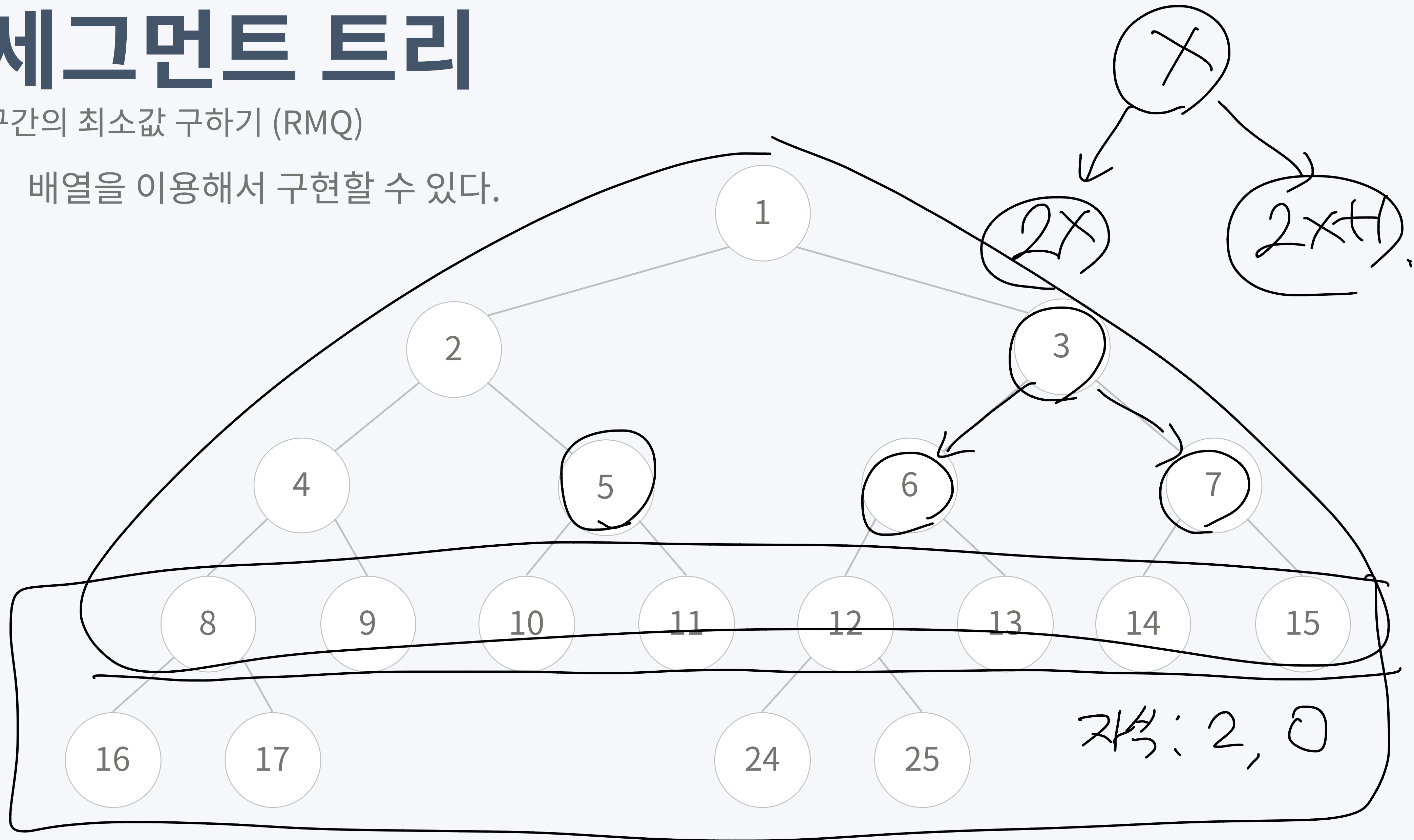
노드: 3개

- ① 저장되는 칸의 번호
- ② 구간 (s~e)
- ③

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

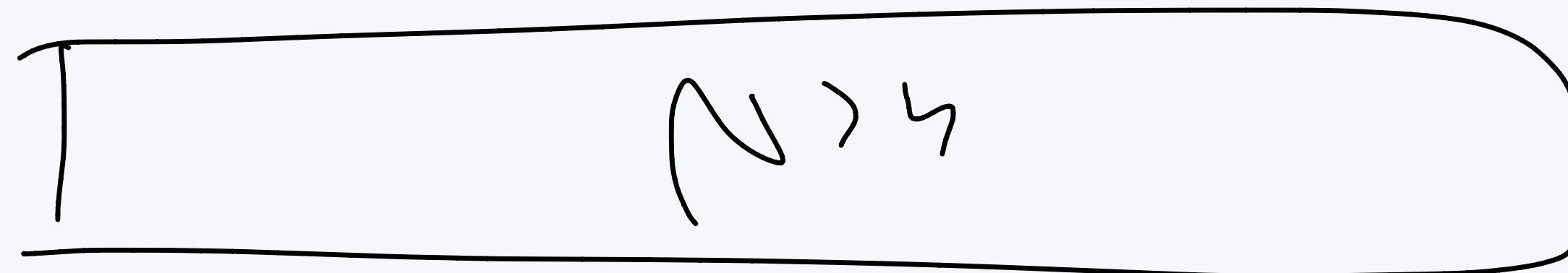
- 배열을 이용해서 구현할 수 있다.



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- N 이 2의 제곱꼴인 경우에는 Full Binary Tree
- 리프 노드가 N 개인 Full Binary Tree: 필요한 노드의 개수: $2N-1$
- 아닌 경우에는 높이 $H = \lceil \lg N \rceil$ 이다.
- 필요한 배열의 크기: $2^{(H+1)}$



A hand-drawn diagram showing a vertical arrow pointing upwards from the array segment to the equation $\lg N = H$.

$$\lg N = H$$

세그먼트 트리

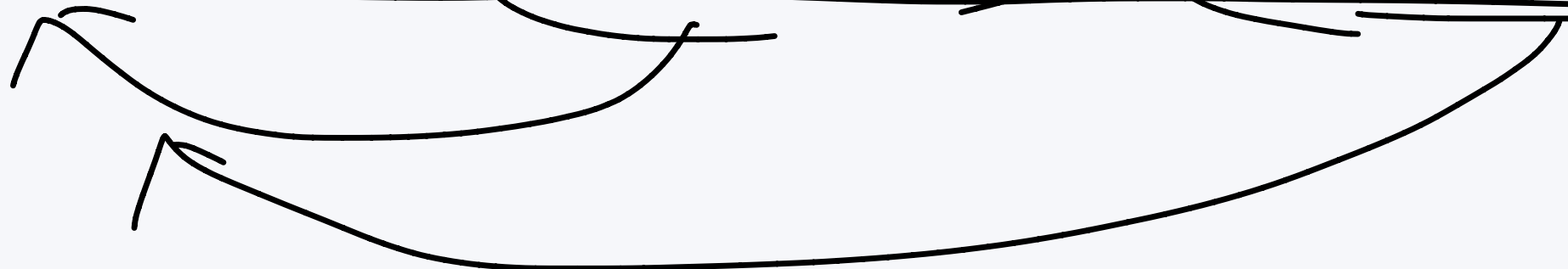
구간의 최소값 구하기 (RMQ)

구간
node 번호 start ~ end

```
void init(int node, int start, int end) {  
    if (start == end) {  
        tree[node] = a[start];  
    } else {  
        init(node*2, start, (start+end)/2);  
        init(node*2+1, (start+end)/2+1, end);  
        tree[node] = min(tree[node*2], tree[node*2+1]);  
    }  
}
```

리프 노드 구간의 크기: 1

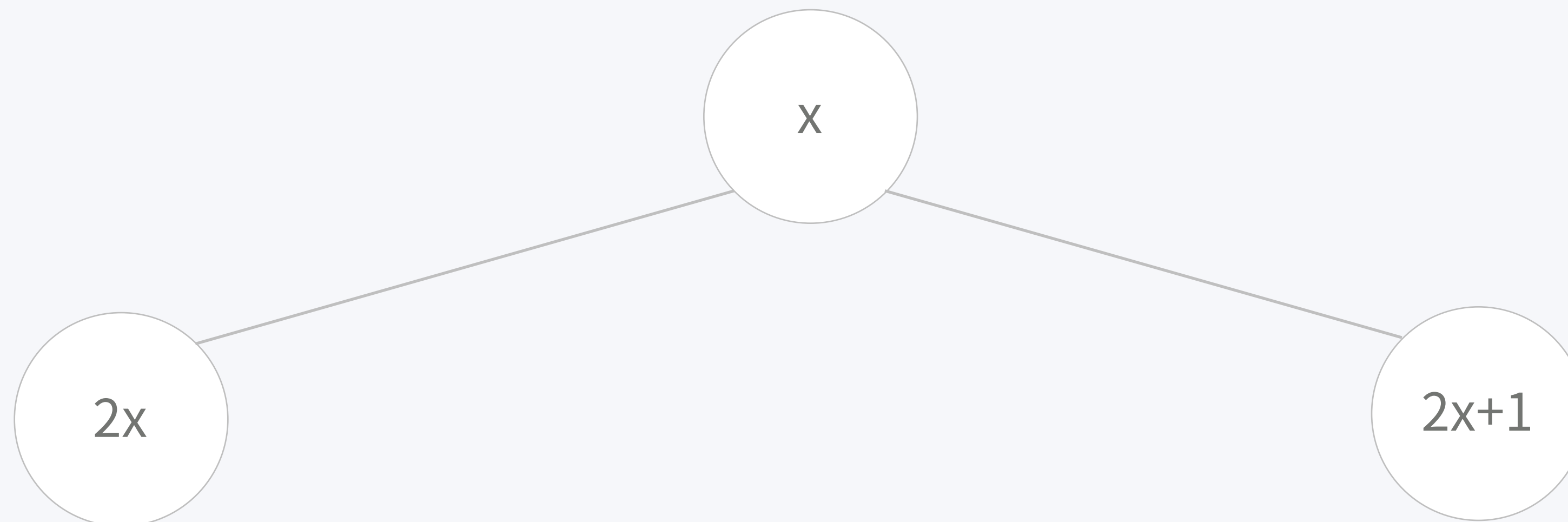
left
right



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

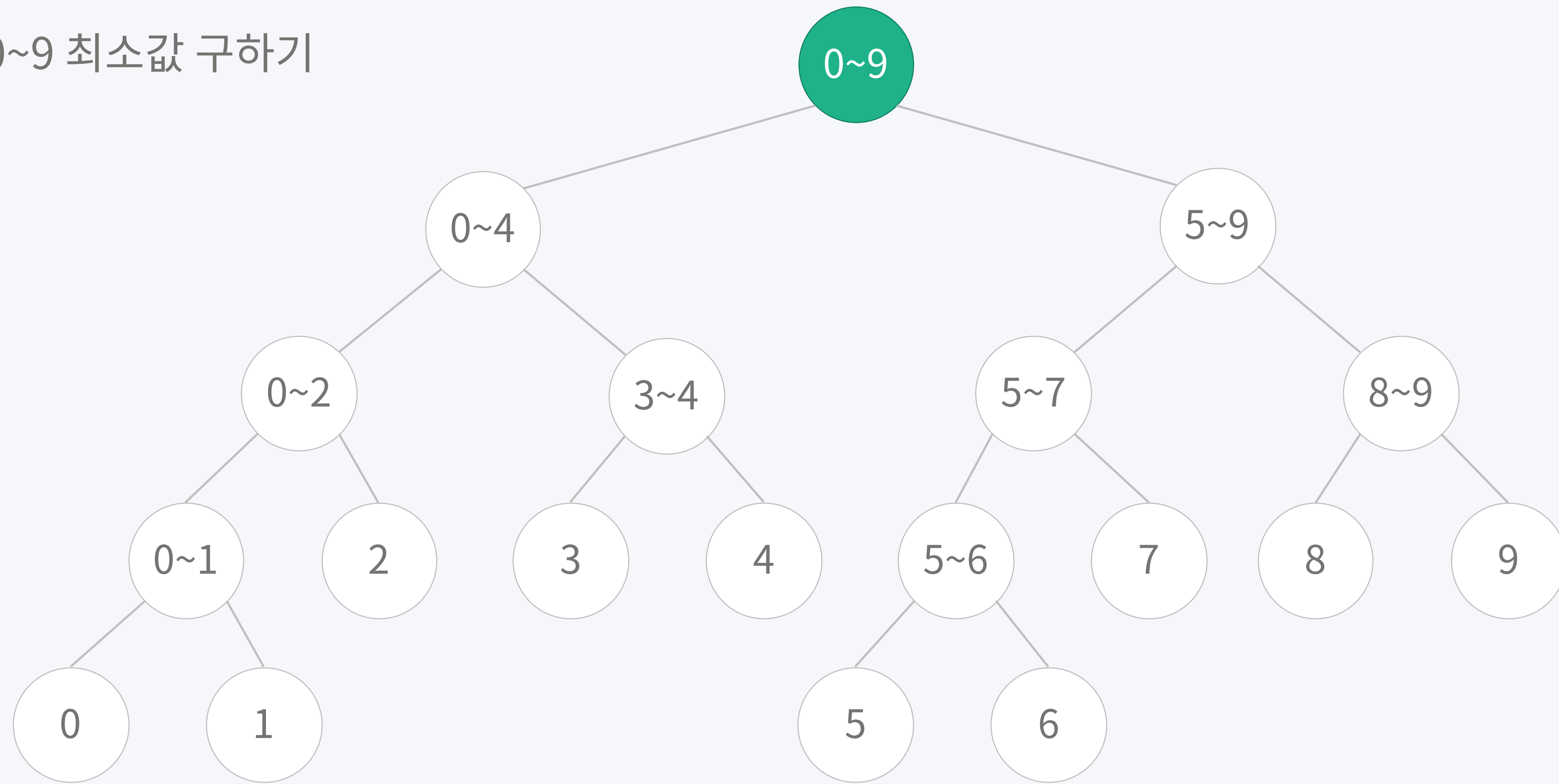
- $start == end$ 인 경우에는 리프 노드
- 노드 $node$ 의 왼쪽 자식: $2*node$, 오른쪽 자식: $2*node+1$
- 어떤 노드가 $[start, end]$ 를 담당한다면
- 왼쪽 자식: $[start, (start+end)/2]$, 오른쪽 자식: $[(start+end)/2+1, end]$ 를 담당해야 한다



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

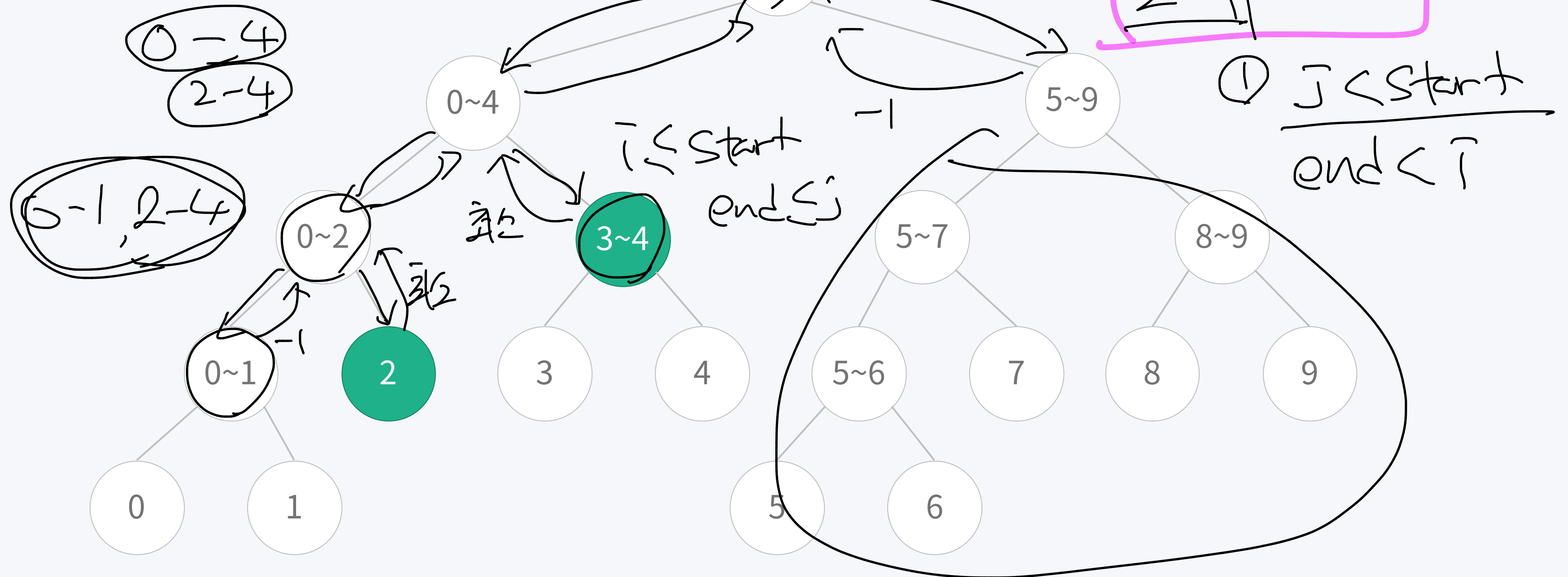
- 0~9 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

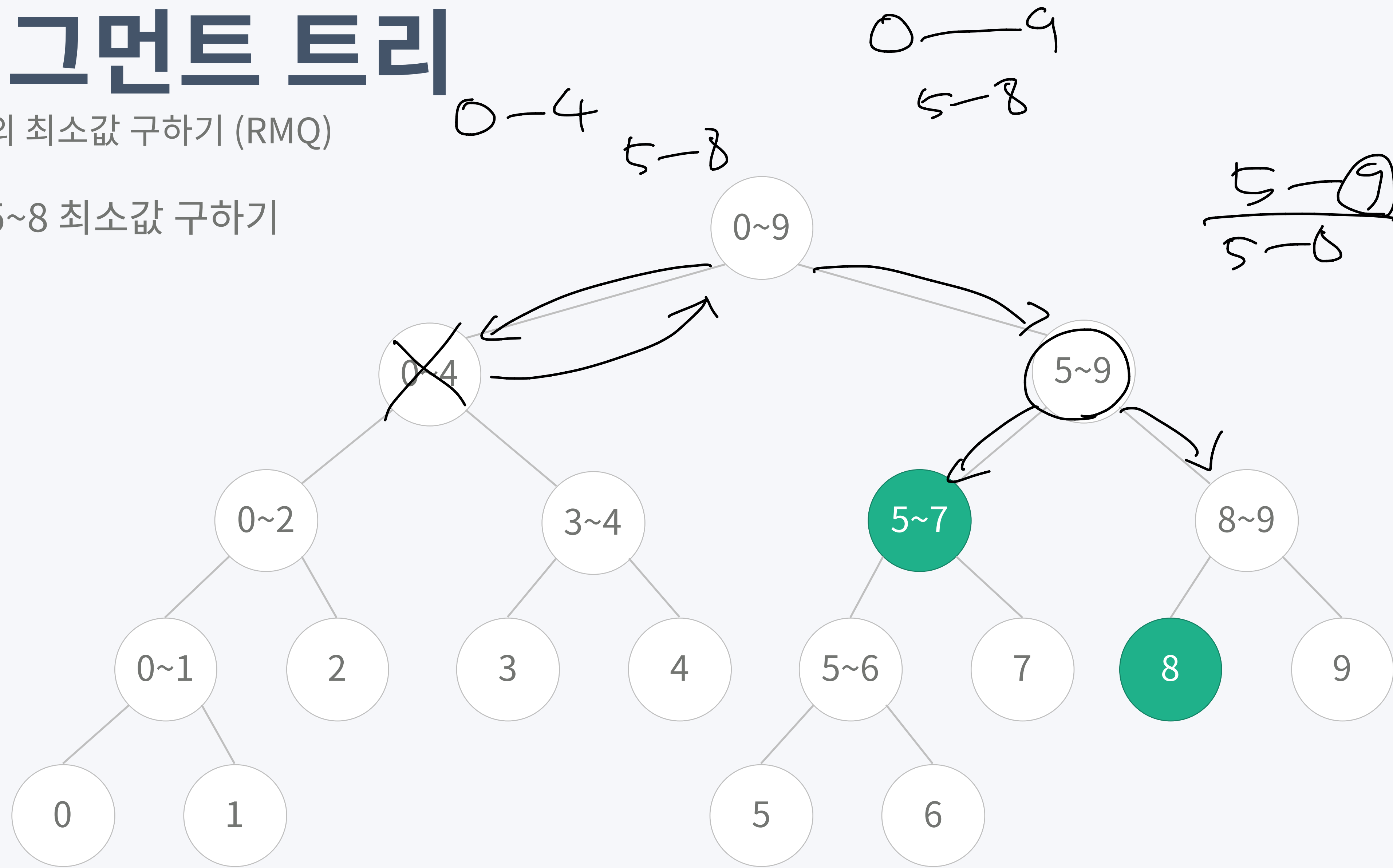
- 2~4 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

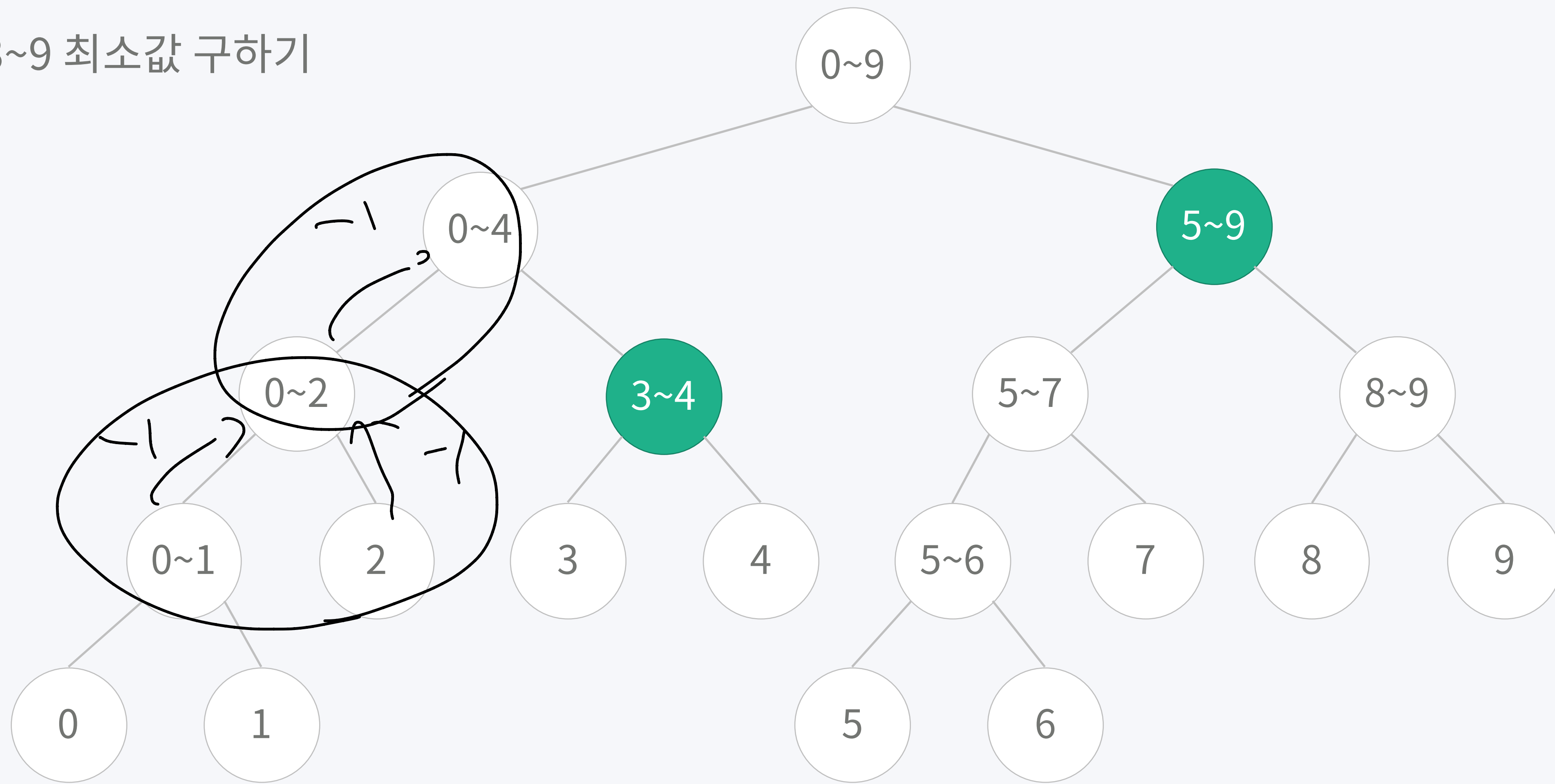
- 5~8 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

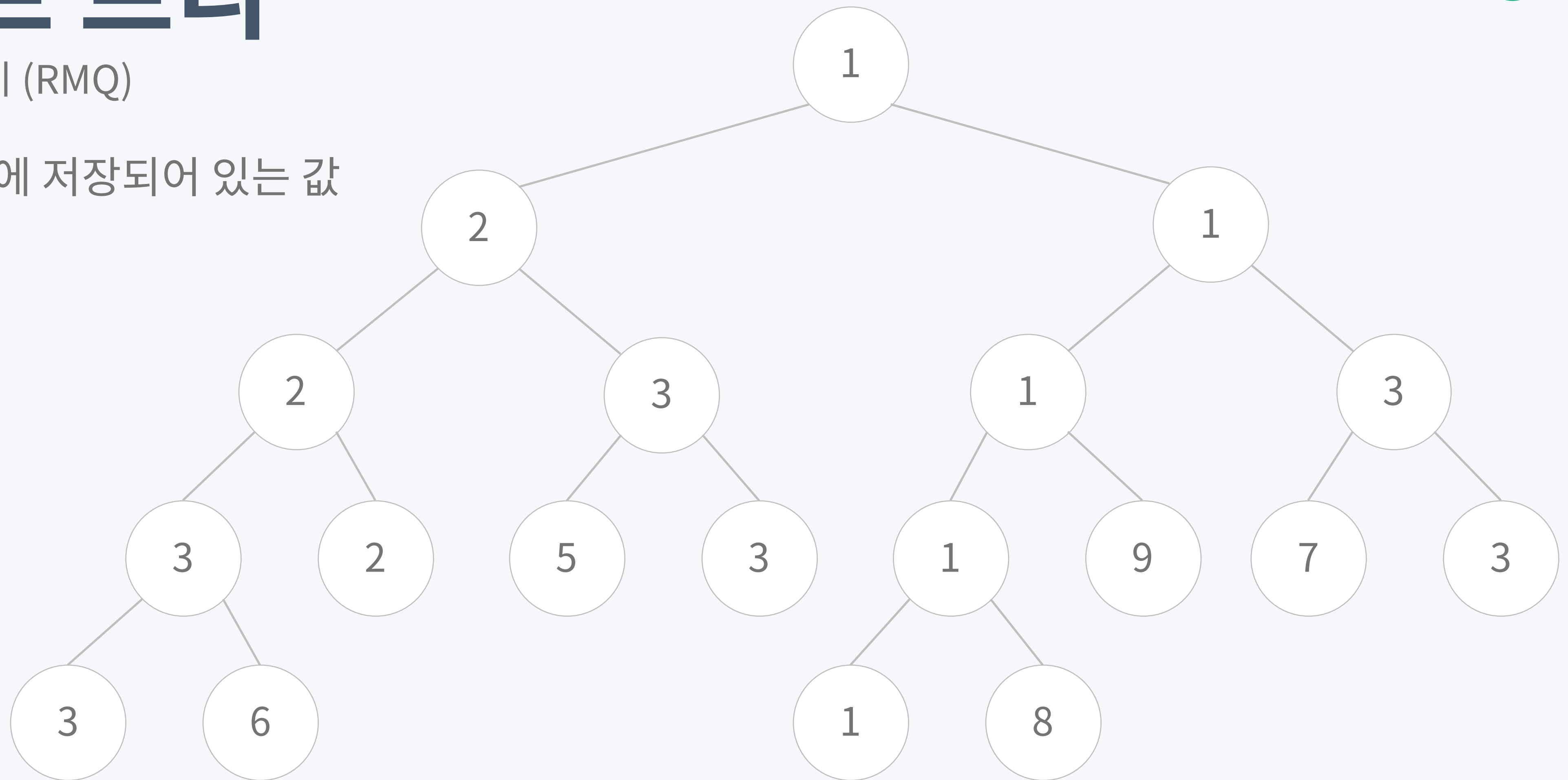
- 3~9 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 세그먼트 트리에 저장되어 있는 값



A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
int query(int node, int start, int end, int i, int j) {
```

```
    if (i > end || j < start)
        return -1;
```

구간이 겹치지 않음 ←

```
    if (i <= start && end <= j)
        return d[node];
```

구간을 포함하는 경우 ←

```
    int m1 = query(2*node, start, (start+end)/2, i, j);
```

왼

```
    int m2 = query(2*node+1, (start+end)/2+1, end, i, j);
```

오

```
    if (m1 == -1) return m2;
```

```
    else if (m2 == -1) return m1;
```

```
    else return min(m1, m2);
```

```
}
```



(m1)

(m2)

~~(m1 == -1 & m2 == -1)~~

최소값

43

<https://www.acmicpc.net/problem/10868>

- 세그먼트 트리를 이용해서 RMQ를 구현하는 문제

최소값과 최대값

<https://www.acmicpc.net/problem/2357>

- 세그먼트 트리를 이용해서 RMQ를 구현하는 문제

Sliding Window

최소값 찾기

<https://www.acmicpc.net/problem/11003>

- N개의 수 $A[1], A[2], \dots, A[N]$ 이 주어졌을 때
- $D[i] = A[i-L+1] \sim A[i]$ 중의 최소값이라고 할 때, D를 구하는 문제
- $1 \leq L \leq N \leq 5,000,000$

구간의 최소값
구간의 크기: L

$O(N)$

$N=12$

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]	A[11]	A[12]
1	5	2	3	6	2	3	7	3	5	2	6
D[1] = 1		D[4] = 2			D[7] = 2			D[10] = 3			
	D[2] = 1		D[5] = 2			D[8] = 2			D[11] = 2		
		D[3] = 1		D[6] = 2			D[9] = 3			D[12] = 2	

최소값 찾기

<https://www.acmicpc.net/problem/11003>

47

덱

값, 인덱스

- 덱을 이용해서 푼다.
- 덱에는 값과 인덱스를 저장한다.
- 덱에는 최대 L개의 값이 저장 된다.
- 덱에 들어있는 값은 항상 증가하는 순서대로 저장되어 있다.

최소값 찾기

덱: 증가

48

<https://www.acmicpc.net/problem/11003>

$L=3$

- 덱은 값이 증가하는 순서대로 저장되어 있기 때문에, 가장 앞에 있는 값이 최소값이 된다.
- 먼저, 가장 앞에 있는 값의 인덱스와 현재 값의 인덱스가 L 보다 많이 차이나는지 검사해야 한다.
- 그 다음에는, 가장 뒤에 있는 값이 현재 값보다 큰지 검사해서 크면 덱에서 뺀다. (반복)
- 이제 현재 값을 덱에 넣는다.

값 3 3
인덱스 6 8

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]	A[11]
1	5	2	3	6	2	3	7	3	5	2	6

Handwritten annotations on the table:
- Above A[0]: 1
- Above A[1]: 1
- Above A[2]: 1
- Above A[3]: 0
- Above A[4]: 4
- Above A[5]: 2
- Above A[6]: 2
- Above A[7]: 2
- Above A[8]: 2
- A red box highlights A[2], A[3], and A[4].
- A[0], A[1], A[2], A[3], A[5], A[6], A[7], and A[8] are circled.
- A bracket connects A[0] and A[1].
- A bracket connects A[2] and A[3].
- A bracket connects A[4] and A[5].

최소값 찾기

<https://www.acmicpc.net/problem/11003>

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]	A[11]
1	5	2	3	6	2	3	7	3	5	2	6

값	1	값	1	5	값	1	2	값	2	3
인덱스	0	인덱스	0	1	인덱스	0	2	인덱스	2	3

값	2	3	6	값	2	값	2	3
인덱스	2	3	4	인덱스	5	인덱스	5	6

값	2	3	7	값	3	3
인덱스	5	6	7	인덱스	6	8

값	3	5	값	2	값	2	6
인덱스	8	9	인덱스	10	인덱스	10	11

57

최소값 찾기

<https://www.acmicpc.net/problem/11003>

```
deque<pair<int, int>> d;
```

```
vector<int> ans(n);
```

```
for (int i=0; i<n; i++) {
```

```
    int cur = a[i];
```

```
    if (!d.empty() && d.front().second <= (i-1)) {
```

```
        d.pop_front();
```

```
    }
```

```
    while (!d.empty() && d.back().first > (cur)) {
```

```
        d.pop_back();
```

```
    }
```

```
    d.push_back(make_pair(cur, i));
```

```
    ans[i] = d.front().first;
```

```
}
```

최소값이 될 수 있는
인덱스 찾기

가장 큰 것