Lehrstuhl für
Elektrische Energiesysteme

# Integrationsverfahren zur Simulation im Zeitbereich

Simon Kerschbaum

13.12.2013

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

# Agenda

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

# Was ist das?

- Analytische Berechnung von komplexen Systemen nicht möglich (z.B.: Energieversorgungsnetz)
- Verwendung des PC als Simulationsmedium
- Aufgabe: Lösung von *Anfangswertproblemen:*

  $\dot{x}(t) = f(x,t), \quad x(0) = x_0$ führt zu Integration: $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{x}(t)\mathrm{d}t$

- Numerische Approximation erforderlich:

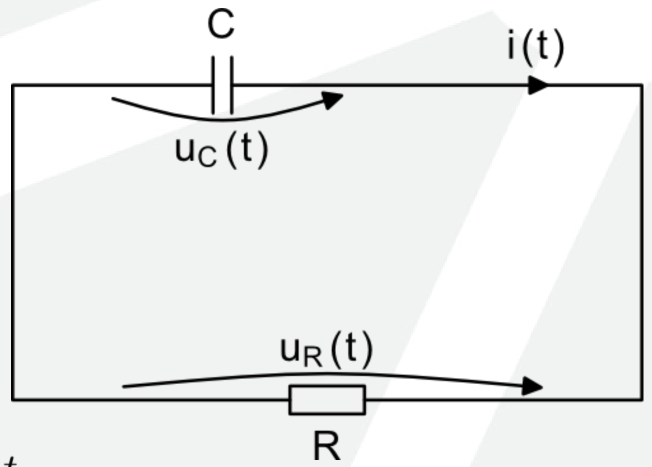
  $x_i = ?$

- ➔ Integrationsverfahren

# Agenda

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

# Ein Beispielsystem




- Entladung eines Kondensators:

- Modellbildung durch Spannungs- und Strombeziehungen:

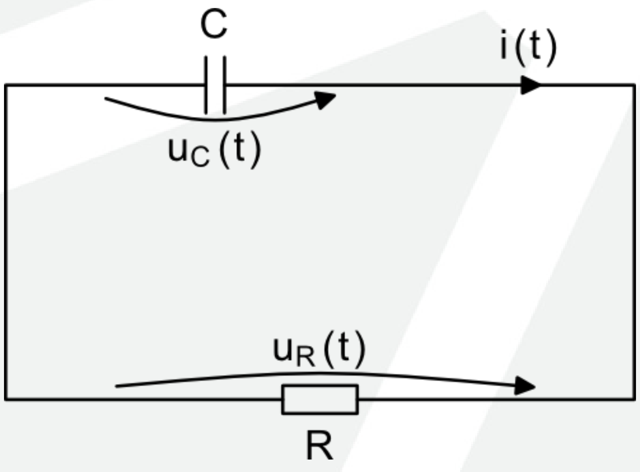
$$u_C(t) = u_R(t) := u(t) \qquad u_C(t) = u_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$$

$$i(t) = \frac{-u_R(t)}{R} \qquad \dot{u}(t) = \frac{-1}{RC}u(t), \quad u(0) = u_0$$

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = 1$$

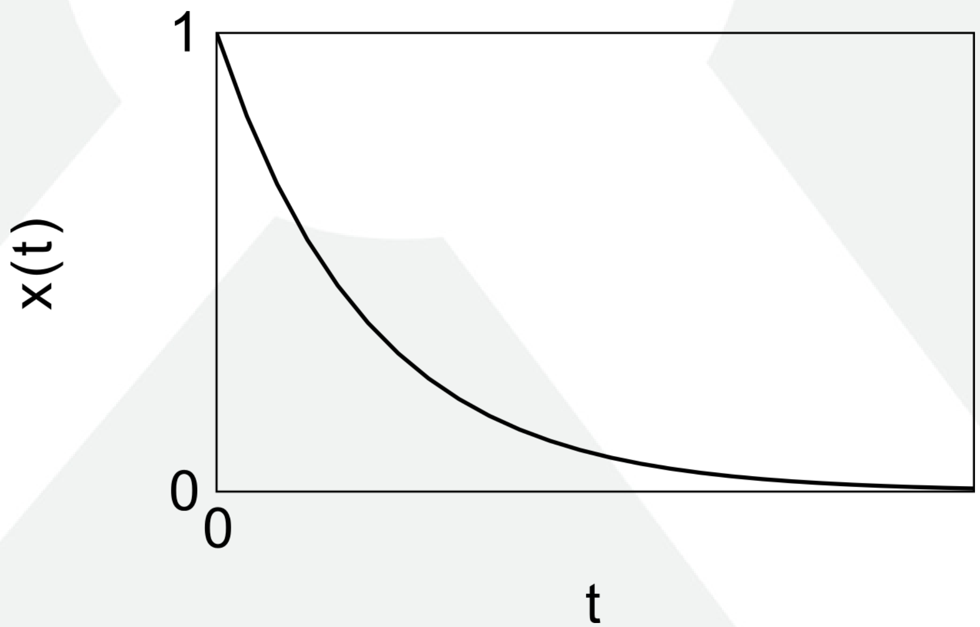
- hier: $\lambda = -1,$ $\boxed{\dot{x} = -x}$

Lehrstuhl für
Elektrische Energiesysteme




## Ein Beispielsystem

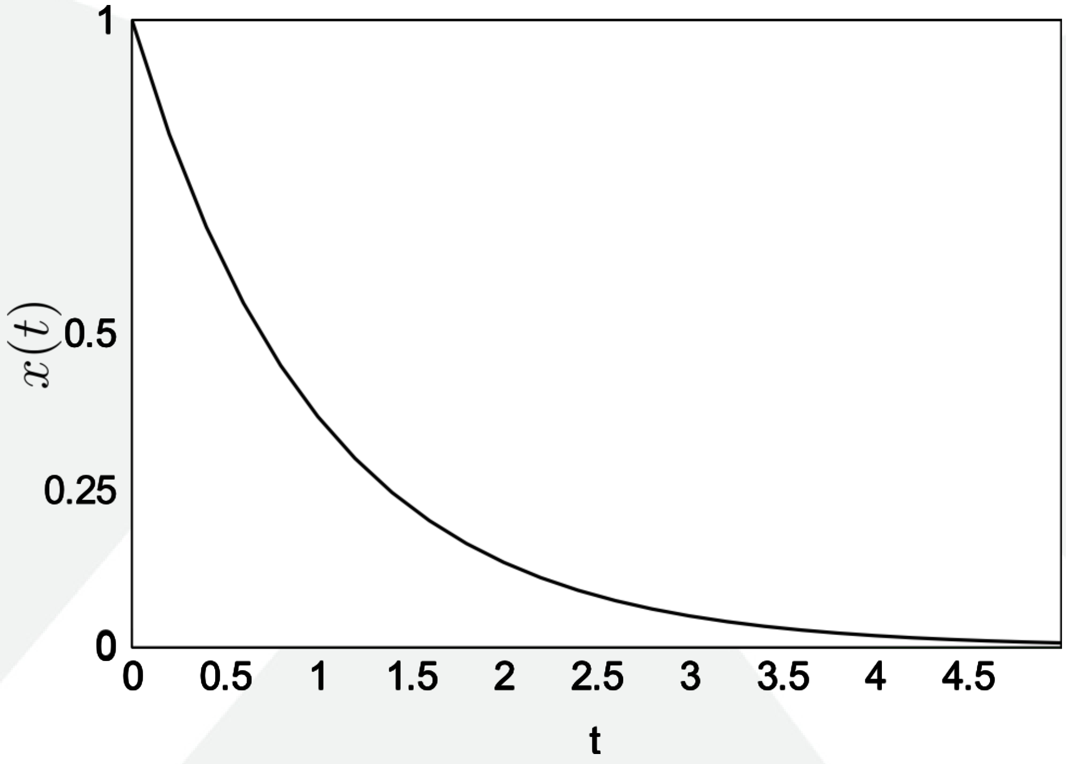
- hier: $\lambda = -1,$ $\boxed{\dot{x} = -x}$
- Tatsächliche Lösung: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$



# Die einfachsten Verfahren

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

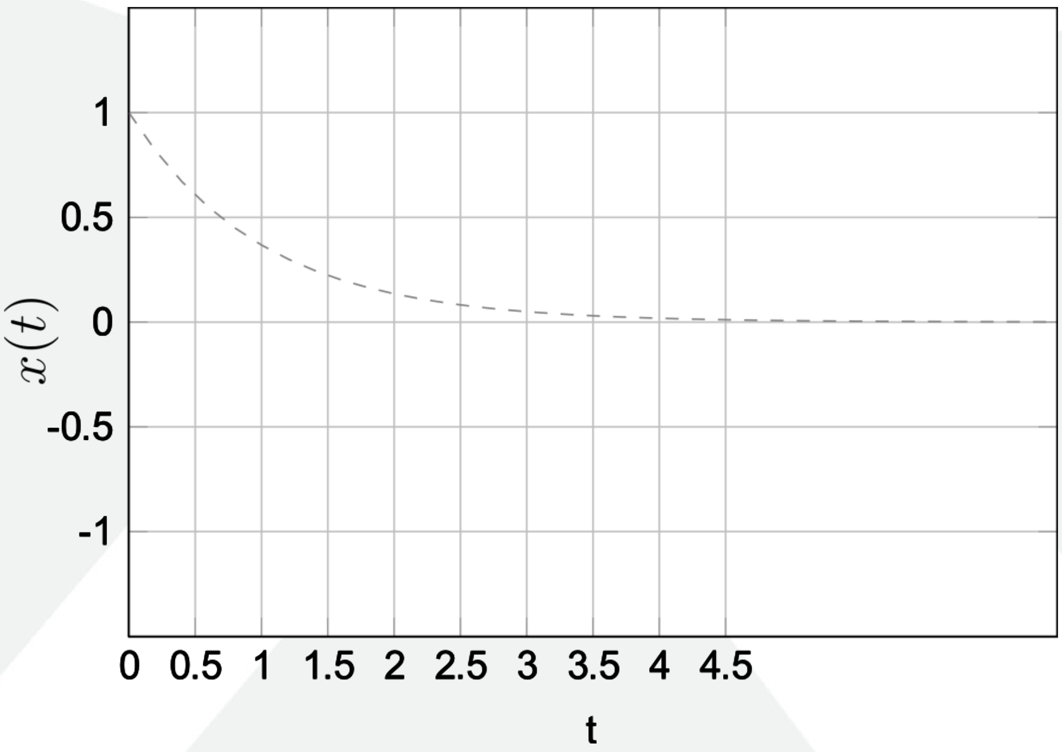
# Das explizite Euler-Verfahren




- Wahl der Schrittweite: T = 0.5
- Annahme konstanter Steigung

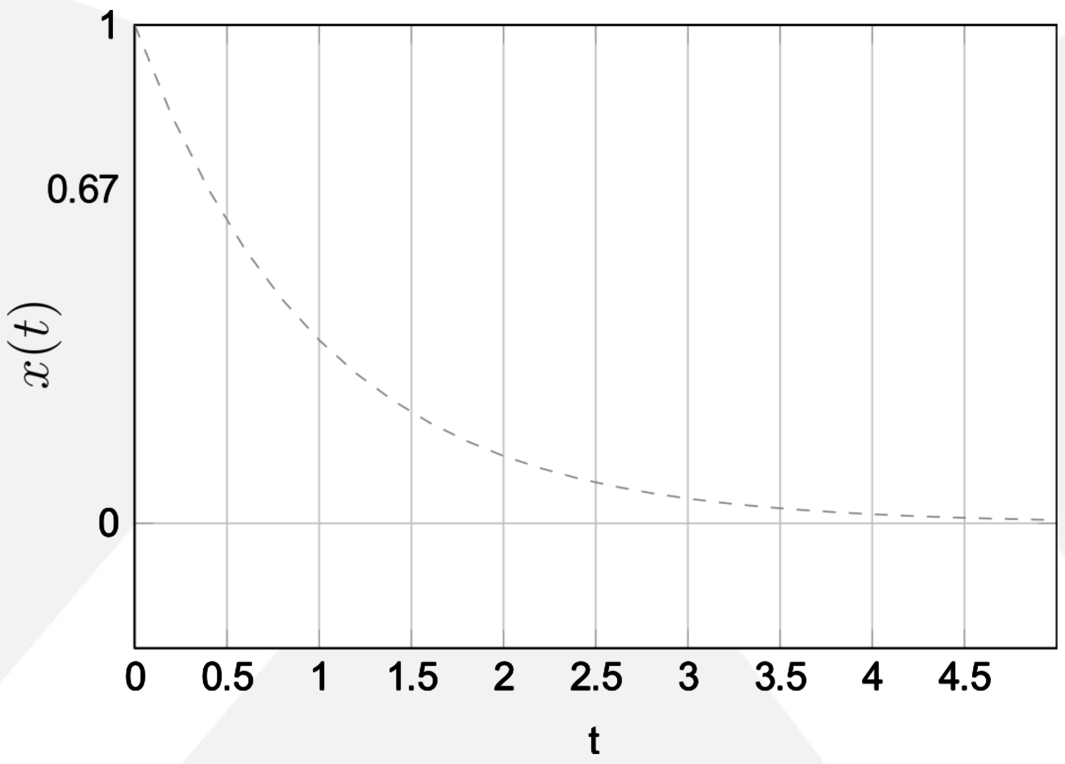
$$x_{i+1} = x_i + T \cdot \dot{x}$$
$$x_{i+1} = (1 - T)x_i$$
$$x_1 = x(0) = 1 \Rightarrow x_2 = 0.5$$

# Das explizite Euler-Verfahren




- Wahl der Schrittweite:
  T =2.1
- **Instabilität** bei zu großer Schrittweite!

# Das implizite Euler-Verfahren




- Annahme der Steigung des Intervallendes:

$$x_{i+1} = x_i + T \cdot f(x_{i+1})$$

$$x_{i+1} = x_i - T \cdot x_{i+1}$$

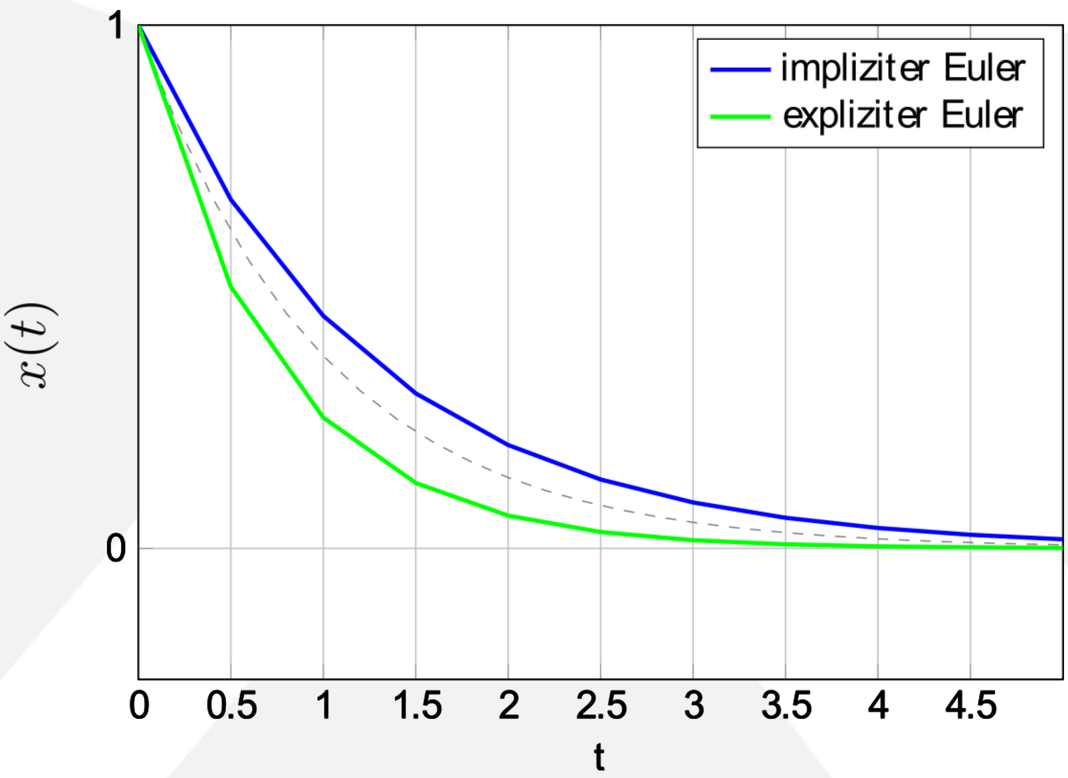
- (Nichtlineare) Gleichung muss gelöst werden

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{1+T}$$

- **Keine Instabilität**

Lehrstuhl für
Elektrische Energiesysteme

# Die Trapezregel




- Mittelwert der Steigungen von explizitem und implizitem Euler:

$$x_{i+1} = T \cdot \tfrac{1}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

- Implizite Gleichung
  → Auflösen

$$x_{i+1} = x_i \frac{1 - T/2}{1 + T/2}$$

- Keine Instabilität

# Die Trapezregel

- Bessere Ergebnisse als Euler-Verfahren:
  **Konsistenzordnung** $p$ **:**
  $e(t) = \mathcal{O}(T^p)$
  - Euler: $p = 1$
  - Trapez: $p = 2$

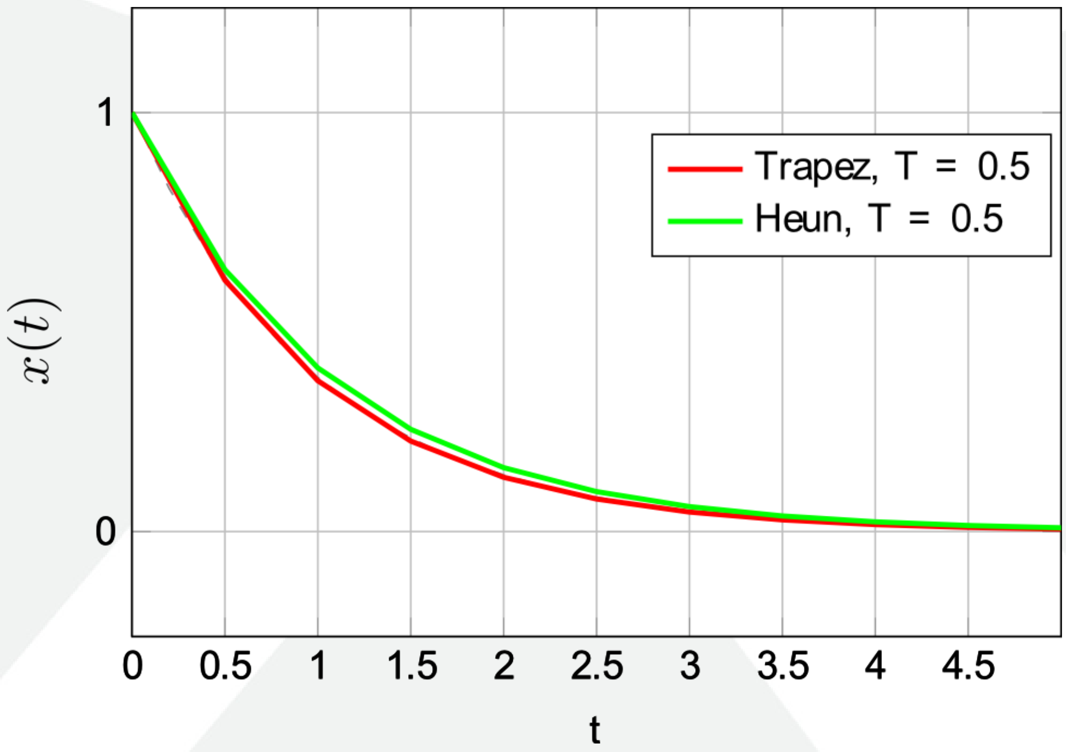
- **Problem:**
  implizite Gleichung $x_{i+1} = T \cdot \frac{1}{2}\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$
  **nicht lösbar** oder **Rechenaufwand zu groß**

→explizites Verfahren benötigt

→Idee: Schätzung des unbekannten Wertes $x_{i+1}$ durch expliziten Euler

→*Heun*-Verfahren: $x_{i+1} = T \cdot \frac{1}{2}\Big(f(x_i) + f\big(x_i + Tf(x_i)\big)\Big)$

# Das Heun-Verfahren




- Hier:

$$x_{i+1} = x_i(1 - T + \frac{T^2}{2})$$

- Instabilität bei zu großer Schrittweite!

# Stabilitätsbetrachtungen

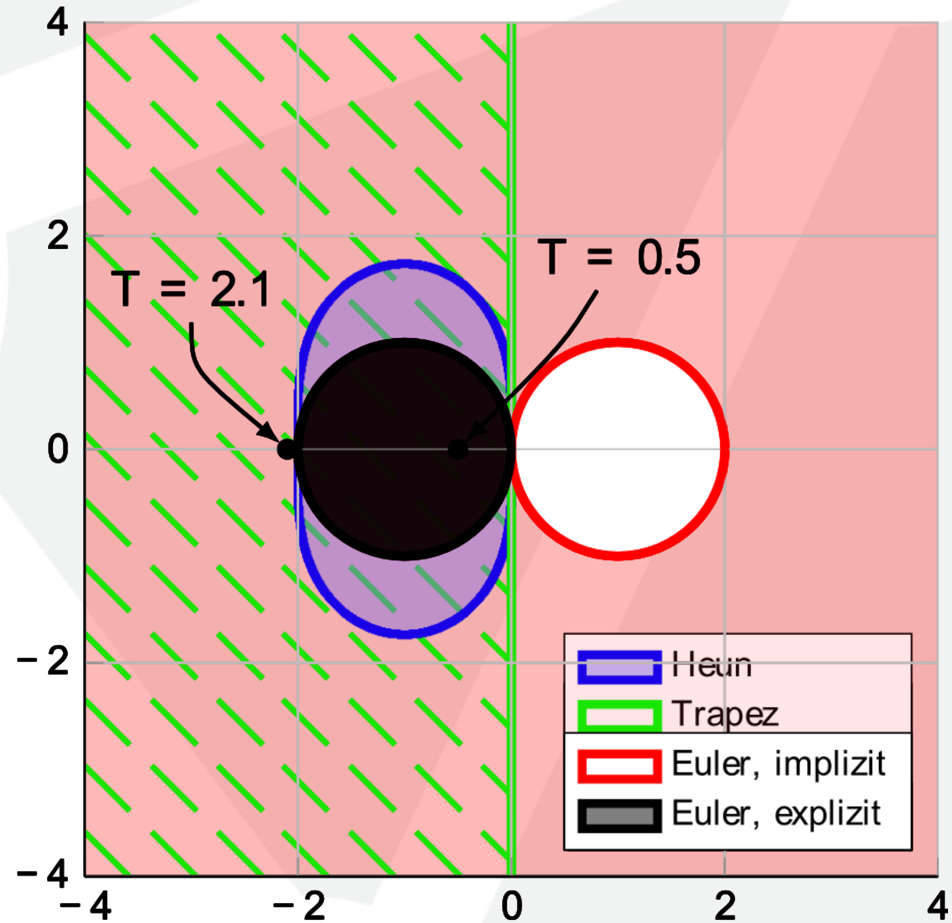
- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- **Stabilitätsbetrachtungen**
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

Lehrstuhl für
Elektrische Energiesysteme

## Stabilitätsbetrachtungen

- **Stabilitätsgebiet S:**
  Bereich, in dem $T \cdot \lambda_i$ liegen müssen, damit Verfahren stabil

  $\lambda_i$ : Eigenwerte der Dynamikmatrix $A$ in System $\dot{x} = Ax$




*Quelle: nach Deuflhard, P. ; Bornemann, F.: Numerische Mathematik. II: Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*

# Schrittweitensteuerung

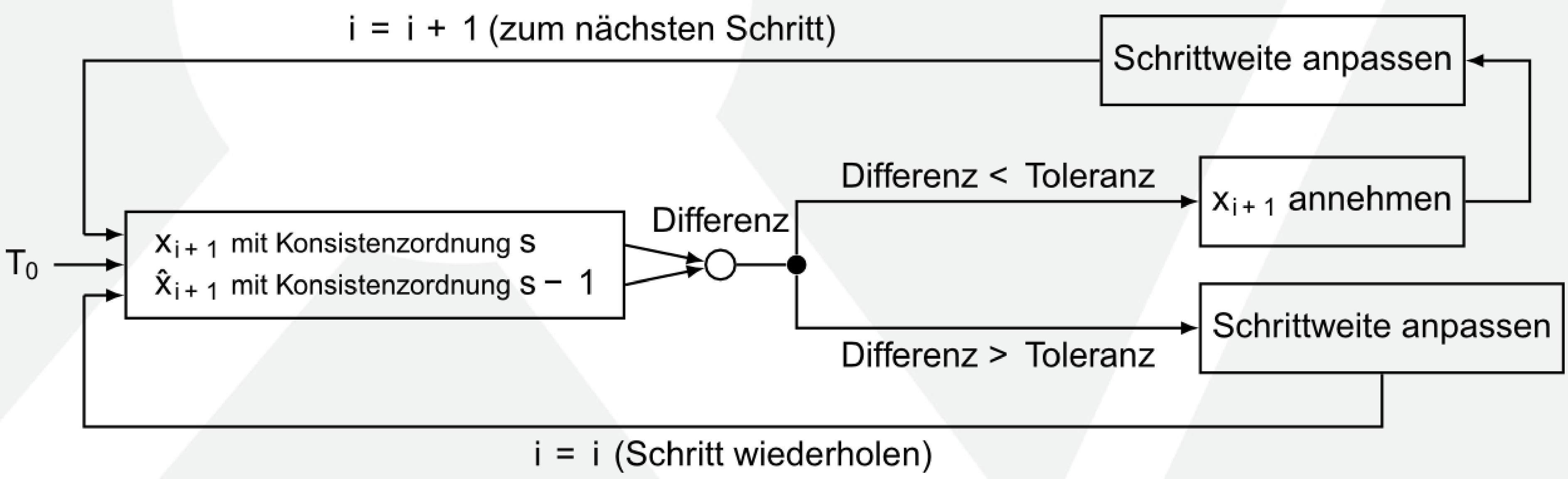
- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

# Schrittweitensteuerung

- **Bisher:** konstante Schrittweite $T$
- **Gedanke:** Anpassung der Schrittweite in jedem Schritt:
  - Starke Änderung → kleine Schrittweite
  - Schwache Änderung → große Schrittweite
- **Ziel:** Verringerung der Rechenzeit
- **Vorgabe** von Toleranz und $T_0$

# Schrittweitensteuerung

- **Ablauf:**



# Zusammenfassung und Ausblick

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

Lehrstuhl für
Elektrische Energiesysteme

# Zusammenfassung

- Verfahren unterschiedlicher Konsistenzordnung
- Explizite / Implizite Verfahren
  - Implizit: + Stabilitätsverhalten
    – Rechenaufwand/Auflösen der Gleichung (Realisierbarkeit)
  - Explizit: vice versa
- Schrittweitensteuerung
  - Kann Rechenaufwand verringern
  - Wahl der Toleranz von wesentlicher Bedeutung

# Ausblick

- Erhöhung der Stützstellen (allgemeine Runge-Kutta-Verfahren)
- Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren (zur Schrittweitensteuerung)
- Mehrschrittverfahren
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren