Lehrstuhl für Elektrische Energiesysteme
Vorstand: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Matthias Luther

Art der Arbeit und Nr

Hier steht das Thema der schriftlichen Ausarbeitung

Bearbeiter: Vorname Nachname
Matrikelnummer

Betreuer: Vorname Nachname

Abgabedatum: TT.MM.JJJJ

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Ort, Datum

Unterschrift

Aufgabenstellung der Arbeit

Thema: Thema der Arbeit

Hier wird die Aufgabenstellung beschrieben. Die Notwendigkeit dieser hängt vom Betreuer ab.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Kapitel dient zur Hinführung an das Thema. Hier ist herauszuarbeiten, warum das Thema von Interesse und Bedeutung ist. Des Weiteren ist kurz der Aufbau der Arbeit anzusprechen. Der Umfang des Kapitels sollte eine oder wenige Seiten betragen.

2 Numerische Integrationsverfahren für Anfangswertprobleme

NOCH SCHAUEN, DASS f(x,t) oder f(t,x) konsistent dargestellt ist! EVENTUELL: $f_n = f(x_n, t_n)$ als Schreibweise einfuehren!! Kann einiges erleichtern!

Die Modellbildung dynamischer Systeme führt in vielen Fällen naturgemäß zu gewöhnlichen Differentialgleichung (beziehungsweise Differentialgleichungssystemen) in Abhängigkeit der Zeit t, so genannten Anfangswertaufgaben:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), t\right), \quad x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

Dabei ist die zeitliche Ableitung der Zustände $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt in Form der Funktion f berechenbar. Dabei mag die Funktion f auch nicht in analytische Form dargestellt werden können, sondern lediglich der Funktionswert berechenbar sein. Darüber hinaus ist der Anfangswert der Lösung $x(0) = x_0$ bekannt.
Die exakte Lösung dieses Problems ergibt sich durch Integration der zeitlichen Ableitung:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(x, t)\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

Um derartige Systeme numerisch, das heißt mit Hilfe von Computersystemen zu simulieren, muss eine numerische Approximation dieser Integration durchgeführt werden. Diese soll zu bestimmten, diskreten Zeitpunkten $t = t_i = i \cdot T, i = 0, \ldots, n$ Näherungslösungen x_i für den Tatsächlichen Funktionswert $x(t_i)$ liefern. Die Schrittweite T legt dabei den Abstand von zwei benachbarten Abtastzeitpunkten t_i fest.

Es soll also allgemein eine Berechnungsvorschrift

$$x_{i+1} = \Phi(x, t) \tag{2.3}$$

mit der Verfahrensfunktion $\Phi(x,t)$ bestimmt werden, welche zum einen eine möglichst genaue Approximation der tatsächlichen Lösung liefert. Zum anderen soll das Verfahren so gewählt werden, dass auch komplexe Systeme approximiert werden können, das heißt, es ist erstrebenswert, den dabei anfallenden Rechenaufwand gering zu halten.

Im Folgenden werden verschiedene Verfahren zur Integration vorgestellt. Diese werden in Einschrittverfahren, Einschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung und Mehrschrittverfahren unterteilt. Soweit nicht anders angegeben wird sich dabei auf [1] bezogen.

2.1 Einschrittverfahren

2.1.1 Explizites Eulerverfahren

Der einfachste Ansatz, (2.2) zu approximieren, ist, die Steigung der Funktion $x(t)$ im Zeitintervall zwischen t_i und t_{i+1} als konstant anzunehmen. Dies entspricht dem Taylor-Satz erster Ordnung und führt auf die Berechnungsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i + Tf(x_i, t_i). \tag{2.4}$$

Dieses Verfahren wird als *explizites Eulerverfahren* bezeichnet.

2.1.2 Impliztes Eulerverfahren

Beim expliziten Eulerverfahren wird angenommen, dass die im Zeitpunkt t_i vorliegende Steigung im gesamten Intervall $t_i \dots t_{i+1}$ gültig ist. Genauso gut könnte angenommen werden, dass im betrachteten Intervall die Steigung des Zeitpunktes t_{i+1} vorliegt:

$$x_{i+1} = x_i + f(x_{i+1}, t_{i+1}) \tag{2.5}$$

In diesem Fall ergibt sich eine implizite Gleichung für den approximierten Wert x_{i+1}, welche nur unter Kenntnis von f aufgelöst werden kann. Deshalb wird das Verfahren als *implizites Eulerverfahren* bezeichnet.

2.1.3 Trapezregel/Heun-Verfahren

Einen Ansatz, die Verfahren zu verbessern, liefert die so genannte *Trapezregel*. Bei dieser werden die beiden Euler-Verfahren gewissermaßen kombiniert. Dabei wird für die Steigung im betrachteten Intervall der Mittelwert der Steigungen im i-ten und $i+1$-ten Schritt angenommen:

$$x_{i+1} = x_i + T \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(f\big(x_i, t_i\big) + f\big(x_{i+1}, t_{i+1}\big) \Big). \tag{2.6}$$

Dadurch ergibt sich allgemein ebenfalls ein implizites Verfahren. Um das Auflösen der impliziten Gleichung zu umgehen, kann der unbekannten Wert $f\big(x_{i+1}, t_{i+1}\big)$ durch das explizite Euler-Verfahren abgeschätzt werden. Dies führt auf das *Heun-Verfahren*:

$$x_{i+1} = x_i + T \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(f\big(x_i, t_i\big) + f\big(x_i + T \cdot f(x_i, t_i), t_{i+1}\big) \Big).$$

2.1.4 Runge-Kutta-Verfahren

Um die bisher betrachteten Methoden zu verbessern, gibt es mehrere Ansätze. Ein naheliegender Gedanke ist, statt nur der rechten Seite der Differentialgleichung (2.1), Zeitableitungen höherer Ordnung in die Abschätzung einzubauen. Dies führt zu den Taylor-Methoden, welche auf dem Taylor-Satz basieren. Da die Differentation der Rechten Seite jedoch mit verhältnismäßig großem rechnerischen Aufwand verbunden ist, sind diese Verfahren in der Praxis eher ungebräuchlich und sollen im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet werden.

Ein anderer Ansatz, die Verfahren zu verbessern ist, zunächst ein Maß einzuführen, mit dem die Verfahren verglichen werden können. Dabei kann gezeigt werden, dass sich für die betrachteten Integrationsverfahren der *globale* Fehler $e(t_i) := ||x_i - x(t_i)||$ durch

$$e(t) = \mathcal{O}(T^p) \tag{2.7}$$

abschätzen lässt. (Getroffene Annahmen über die rechte Seite der Differentialgleichung (2.1) sollen im Rahmen dieser Arbeit außer Acht gelassen werden und können in [1] nachgelesen werden.) Dabei legt die Konsistenzordnung p fest, wie schnell der globale Fehler gegen Null geht, wenn die Schrittweite verkleinert wird und stellt damit ein Maß für die „Güte“ des Verfahrens dar. Es kann gezeigt werden, dass die Konsistenzordnung der Euler-Verfahren $p = 1$ beträgt. Das Heun-Verfahren ist mit $p = 2$ bereits deutlich genauer.

c_1					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	$a_{s\,s-1}$	
	b_1	b_2	$\cdots$	b_{s-1}	b_s

Tabelle 2.1: Allgemeines Butcher-Schema expliziter Runge-Kutta-Verfahren

Deshalb ist der erste Ansatz in der Praxis, die Idee der Trapezregel beziehungsweise des Heun-Verfahrens weiter zu führen und die Konvergenzordnung der Verfahren durch weitere Stützstellen zu erhöhen. Dies führt zum allgemeinen Ansatz der *s-stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahren*. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde der Index $_i$ zum Kennzeichnen des aktuell betrachteten Abtastpunktes im Folgenden weggelassen.

$$\Phi(x,t,T) = x + T\sum_{i=1}^{s} b_i\, k_i, \quad \text{mit} \tag{2.8}$$

$$k_i = f\left(t + c_i T, x + T\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \quad \text{für } i = 1,\ldots,s. \tag{2.9}$$

Dabei wird die Rechte Seite der DGL an den Stützstellen $t + c_i\, T$ berechnet, wobei die vorhergehenden Stützstellen gewichtet mit den Koeffizienten a_{ij} zur Berechnung des zur Stützstelle gehörenden Funktionswertes herangezogen werden. Die Gewichtung der berechneten Steigungen bei der Ermittlung der resultierenden Verfahrensfunktion erfolgt durch die Koeffizienten b_i. Mit dieser Darstellung ergeben die Runge-Kutta-Verfahren eine unendliche Menge verschiedener Verfahren zur Lösung des Problems.
Um die Runge-Kutta-Verfahren zu klassifizieren, werden die Koeffizienten a_{ij}, b_i, c_i häufig in Form des Butcher-Schemas, nach Tabelle 2.1 dargestellt. Sowohl das explizite Euler-Verfahren (s=p=1), als auch das Heun-Verfahren (s=p=2) lassen sich auf diese Weise beschreiben. Darüber hinaus ist das *klassische* Runge-Kutta-Verfahren (s=p=4) von großer Bedeutung. Für diese Verfahren ergeben sich die in Tabelle 2.2 dargestellten Butcher-Schemata.
Die selbe Vorgehensweise lässt sich für implizite Verfahren anwenden, sodass sich als

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Tabelle 2.2: Butcher-Schemata für (von links nach rechts): Euler-Verfahren, Heun-Verfahren, *klassisches* Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Tabelle 2.3: Butcher-Schemata für implizite Verfahren (von links nach rechts): Euler, Mittelpunktsregel, Trapezregel

Berechnungsvorschrift für *s-stufige implizite Runge-Kutta-Verfahren* ergibt:

$$\Phi(x,t,T) = x + T\sum_{i=1}^{s} b_i\, k_i \quad \text{mit} \tag{2.10}$$

$$k_i = f\left(t + c_i T, x + T\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \quad \text{für } i = 1,\ldots,s. \tag{2.11}$$

Beispiele für implizite Runge-Kutta-Verfahren sind das bereits kennengelernte implizite Euler-Verfahren (s=p=1), die implizite Mittelpunktsregel (s=p=2), sowie die implizite Trapezregel (s=p=2), deren Butcher-Schemata in Tabelle 2.3 dargestellt sind. Der Vorteil der impliziten Verfahren gegenüber den expliziten Verfahren wird sich bei Betrachtung des Stabilitätsverhaltens in Kapitel 3 zeigen.

2.2 Schrittweitensteuerung (Adaption)

Um die Verfahren weiter zu verbessern und gleichzeitig Rechenzeit einzusparen, liegt der Gedanke nahe, die bisher als konstant angenommene Schrittweite T als steuerbar anzusehen, sodass T_i an Stellen, bei welchen sich der Funktionswert stärker ändert, kleiner gewählt werden kann und an Stellen langsamer Änderungen hingegen größer. Aus Gründen der numerischen Effizienz ist es üblich, dass im i-ten Zeitschritt eine „gute“ Schrittweite für den Übergang von t_i nach t_{i+1} bestimmt wird, jedoch keine Anpassung von vorhergehenden Schrittweiten mehr erfolgt.

Um die Schrittweite anzupassen wird gefordert, dass der *lokale* Fehler $\varepsilon(t)$ unter einer gewissen Toleranzgrenze *tol* liegen soll. Der *lokale* Fehler ist dabei der Anteil am *globalen* Fehler, der durch den Zeitschritt von t_i bis t_{i+1} hervorgerufen wird. Da die exakte Lösung des Funktionsverlaufs nicht bekannt ist, wird für das verwendete Verfahren Φ mit Konsistenzordnung p ein anderes Verfahren $\hat{\Phi}$ zur Abschätzung des Fehlers herangezogen. Die Konsistenzordnung des zweiten Verfahrens $\hat{p}$ wird kleiner als die des verwendeten Verfahrens gewählt, sodass $p \geq \hat{p} + 1$ gilt. Der Schritt von t_i nach $t_{i+1} = t_i + T_i$ wird mit beiden Verfahren berechnet und die Norm der Differenz der Ergebnisse als *Fehlerschätzer* $\overline{\varepsilon}$ bezeichnet.

$$\overline{\varepsilon} := ||\hat{\Phi}(t_i, x_i, T_i) - \Phi(t_i, x_i, T_i)||. \tag{2.12}$$

Mit Hilfe der Konvergenzeigenschaften lässt sich zeigen, dass die gewünschte Fehlertoleranz näherungsweise eingehalten wird, falls die Schrittweite durch

$$T_{\text{neu}} = \sqrt[\hat{p}+1]{\frac{tol}{\overline{\varepsilon}}} T_{\text{alt}} \tag{2.13}$$

angepasst wird. Da dies nur approximativ gilt, wird das Argument der Wurzel in der Praxis jedoch häufig durch einen „Sicherheitsfaktor“ $f_{ac} \in]0, 1[$ (typisch: 0.9) skaliert.

Nach der Berechnung des Fehlerschätzers $\overline{\varepsilon}$ im Zeitschritt i wird dieser mit der zulässigen Toleranz verglichen. Ist der berechnete Fehler größer, als die zulässige Toleranz ($\overline{\varepsilon} > tol$), wird der selbe Zeitschritt mit der angepassten Schrittweite T_{neu} erneut berechnet.
Gilt $\overline{\varepsilon} \leq tol$, so ist die gewünschte Genauigkeit erreicht und die der Berechnung zu Grunde liegende Schrittweite wird für diesen Zeitschritt angenommen. Nun wird erneut (2.13) berechnet und T_{neu} als Schrittweite T_{i+1} für den nächsten Zeitschritt angenommen. Dies sorgt dafür, dass die Schrittweite bei hoher Genauigkeit auch vergrößert werden kann.

2.3 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

Um den Rechenaufwand der Beschriebenen Schrittweitenanpassung zu reduzieren, können die Verfahrensfunktionen Φ und $\hat{\Phi}$ so geschickt gewählt werden, dass bei deren Auswertungen auf gleiche Zwischenergebnisse zurückgegriffen werden kann. Dies führt auf die sehr häufig verwendeten eingebetteten Runge-Kutta verfahren. Die eingebetteten Verfahren werden mit RK$p(\hat{p})$ bezeichnet. Der Gedanke dahinter ist, dass sich die berechneten Werte der Stützstellen k_i und $\hat{k}_i$ nicht unterscheiden, sondern lediglich deren Linearkombination. Das heißt die Koeffizienten $a_{ij} = \hat{a}_{ij}$ und $c_i = \hat{c}_i$ stimmen in beiden

c_1					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	$a_{s\,s-1}$	
	b_1	b_2	$\cdots$	b_{s-1}	b_s
	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\cdots$	$\hat{b}_{s-1}$	$\hat{b}_s$

Tabelle 2.4: allgemeines Butcher-Schema für eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

0					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
1	0	0	1		
c_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{b}_4$	$\hat{b}_5$

Tabelle 2.5: Butcher-Schema zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten

Verfahren überein. Es gilt lediglich $b_i \neq \hat{b}_j$. Für eingebettete Runge-Kutta-Verfahren lassen sich dehalb auch sehr einfach Butcher-Schemata nach Tabelle 2.4 erstellen. Wie in [1] gezeigt wird, muss in diesem Fall zur Konstruktion eines Verfahrens der Konsistenzordnung $\hat{p} = p-1$ ein Verfahren mit Stufenzahl $\hat{s} = s+1$ gewählt werden. Für das klassische Runge-Kutta-Verfahren (s=p=4) ergibt sich dadurch das Butcher-Schema nach Tabelle 2.5. Um das zugehörige Verfahren $\hat{\Phi}$ mit $\hat{s} = 5$ und $\hat{p} = 3$ zu bestimmen, müssen also die unbekannten Koeffizienten in 2.5 bestimmt werden. Dies kann in [1] nachgelesen werden und soll an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden. Eines der am weitesten verbreiteten Verfahren dieser Klasse ist das Dormand-Prince-RK5(4)-Verfahren, welches in der Numerik-Software MATLAB unter dem Namen `ode45` standardmäßig eingestellt ist. Die zugehörigen Koeffizienten können in Anhang A.2 nachgelesen werden.

2.4 Mehrschrittverfahren

Die bisher betrachteten Verfahren sind dadurch charakterisiert, dass die Verfahrensfunktion $\Phi(x,t)$ lediglich vom aktuellen Funktionswert x_i abhängt. Deshalb werden diese Verfahren als Einschrittverfahren bezeichnet.
Im Gegensatz dazu hängt der Funktionswert x_{i+1} bei Mehrschrittverfahren zusätzlich

dazu von einer beliebigen Anzahl an Vorgängerwerten $x_{i-k+1}, \ldots, x_i$ ab. Damit wird ein k-stufiges lineares Mehrschrittverfahren folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} &a_k x_{i+k} + a_{k-1} x_{i+k-1} + \ldots + a_0 x_i \\ &\quad = T\left(b_k f(x_{i+k}, t_{i+k}) + b_{k-1} f(x_{i+k-1}, t_{i+k-1}) + \ldots + b_0 f(x_i, t_i)\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

mit $a_k \neq 0$. Durch $\mathcal{Z}$-Transformation (nachzulesen zum Beispiel in [2]) lassen sich Mehrschrittverfahren auch durch die beiden Polynome

$$P_a(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k \tag{2.15}$$

$$P_b(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k \tag{2.16}$$

charakterisieren. Ein Beispiel für ein Mehrschrittverfahren ist das (implizite) Milne-Simpson-Verfahren:

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{T}{3}\left(f(x_{i+1}, t_{i+1}) + 4f(x_i, t_i) + f(x_{i-1}, t_{i-1})\right) \tag{2.17}$$

2.4.1 Adams-Verfahren/Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Wie auch bei den Einschrittverfahren können Mehrschrittverfahren in explizite und implizite Verfahren unterteilt werden. In [3] wird gezeigt, dass implizite Verfahren im allgemeinen erheblich bessere Ergebnisse erzielen, als explizite Verfahren, jedoch das Auflösen der impliziten Gleichung nach dem gesuchten Funktionswert nicht realisierbar sein kann oder zumindest mit erheblichem Rechenaufwand verbunden ist.
Dies führt – ähnlich wie bei dem Heun-Verfahren – zu dem Gedanken, Approximationen, welche durch ein explizites Verfahren gewonnen wurden, durch ein implizites Verfahren zu verbessern. Diese Kombination aus explizitem und implizitem Mehrschrittverfahren wird als Prädiktor-Korrektor-Verfahren bezeichnet.

Die hierfür am häufigsten verwendeten Mehrschrittverfahren sind die so genannten Adams-Verfahren. Dabei werden die expliziten Verfahren als *Adams-Bashforth-Verfahren* und die impliziten Verfahren als *Adams-Moulton-Verfahren* bezeichnet. Die Koeffizienten dieser Verfahren können in Anhang A.3 nachgeschlagen werden.
Nach [3] liegen Rechenaufwand und Genauigkeit bei einem m-stufigen *Adams-Bashforth-Verfahren* und einem m-1-stufigen *Adams-Moulton-Verfahren* im gleichen Größenbereich, wobei der lokale Fehler in beiden Fällen von T^{m+1} abhängt. Wie bereits eingangs erwähnt, liefern die impliziten Verfahren jedoch deutlich genauere Approximationen.

Zur Durchführung des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens wird zunächst mit dem expliziten m-stufigen *Adams-Bashforth-Verfahren* ein Approximationswert $x_{i+1}^{(0)}$ berechnet, also die Prädiktion durchgeführt. Dieser wird dann in die rechte Seite der impliziten Gleichung des *Adams-Moulton-Verfahren* eingesetzt, wodurch eine bessere Schätzung $x_{i+1}^{(1)}$ berechnet werden kann (Korrektur). Diese wird nun als Funktionswert $x(t_{i+1})$ angenommen. In [4] wird beschrieben, dass der Korrektor-Schritt in der Praxis iterativ wiederholt werden kann, um eine noch höhere Genauigkeit zu erzielen.

Da ein k-stufiges Mehrschrittverfahren zur Berechnung des Funktionswertes x_i alle zurückliegenden Funktionswerte bis x_{i-k} benötigt, ist der erste überhaupt berechenbare Funktionswert $x(t = t_k)$. Aus diesem Grund müssen Mehrschrittverfahren durch geeignete Einschrittverfahren „gestartet“ werden. Man bezeichnet Einschrittverfahren im Gegensatz zu Mehrschrittverfahren aus diesem Grund auch als *selbststartend*.

2.4.2 BDF-Verfahren

Die zweite sehr bedeutende Klasse der Mehrschrittverfahren sind die so genannten *Backwards Differentiation Formulas* (BDF). Für diese Verfahren gilt $P_b(z) = z^k$. Damit lassen sich eine Reihe impliziter Verfahren erzeugen, die besonders gut für steife Differentialgleichungen geeignet sind. Die Bedeutung dessen wird im folgenden Kapitel erläutert.

3 Stabilitätsanalyse der wichtigsten Methoden

Neben der Konvergenz des Fehlers mit der Schrittweite $e(t) = \mathcal{O}(T^p)$ ist für die Anwendbarkeit eines Verfahrens entscheidend, welche Voraussetzungen an die Schrittweite gestellt werden müssen, damit das Verfahren bei der Lösung von Differentialgleichungen stabil ist. Unter der Stabilität soll in diesem Zusammenhang die exponentielle Stabilität verstanden werden, wie sie in [1] beschrieben wird. Um die Betrachtungen zu vereinfachen, soll sich an dieser Stelle auf die Klasse *linearer zeitinvarianter Systeme* beschränkt werden, für die gilt:

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.1}$$

Aus der Systemtheorie ist bekannt, dass ein solches System genau dann exponentiell stabil ist, wenn für alle Eigenwerte der Matrix A gilt: $\Re\lambda_i < 0$, das heißt, die Eigenwerte liegen in der linken Halbebene der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}^-$.

3.1 Steife Differentialgleichungen

Zur Einführung soll das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

betrachtet werden. Für diese einfache Differentialgleichung lautet die geschlossene Lösung $x(t) = e^{\lambda t}x_0$. Das heißt für $\lambda < 0$ konvergiert diese Lösung gegen 0. Eine Approximation des Systems mit dem expliziten Euler-Verfahren liefert

$$x_{i+1} = x_i + T\lambda x_i = (1 + T\lambda)x_i. \tag{3.3}$$

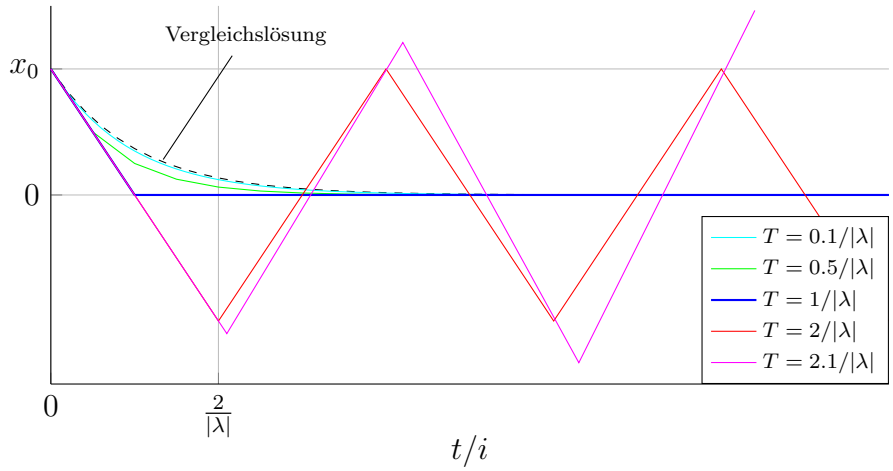

Abbildung 3.1: Simulation des Beispielsystems mit explizitem Euler-Verfahren

Diese Differenzengleichung konvergiert genau dann ebenfalls gegen 0, wenn

$$|1 + T\lambda| < 1 \tag{3.4}$$

gilt. Für die Schrittweite T muss also die Bedingung

$$T < \frac{2}{|\lambda|} \tag{3.5}$$

erfüllt sein, damit die Approximation eine Sinnvolle Näherung darstellt. Es ist augenscheinlich, dass dies bei sehr schnellen Systemen mit $\lambda \ll 0$ zu sehr kleinen notwendigen Schrittweiten führt.
Aus diesem Grund werden solche Differentialgleichungen allgemein als *steif* bezeichnet. Die Approximation von steifen Differentialgleichungen führt vor allem bei expliziten Verfahren zu Problemen und stellt die wesentliche Motivation zur Verwendung von impliziten Verfahren dar. In Abbildung 3.1 ist die Approximation von Gleichung (3.2) mit dem expliziten Euler-Verfahren für verschiedene Schrittweiten dargestellt.

3.2 Einschrittverfahren

Das Beispiel der steifen Differentialgleichungen hat gezeigt, dass durch die Wahl der Schrittweite im allgemeinen das Stabilitätsverhalten des Verfahrens beeinflussen lässt. Im Folgenden sollen Bedingungen aufgezeigt werden, die an die Schrittweite gestellt werden müssen, um die Stabilität eines Verfahrens allgemein zu gewährleisten.

Nach [1] lassen sich alle Runge-Kutta-Verfahren mit konstanter Schrittweite, also alle

bisher betrachteten Einschrittverfahren ohne Schrittweitensteuerung durch die Differenzengleichung

$$x_{i+1} = \tilde{A}x_i \tag{3.6}$$

beschreiben. Nach [2] ist eine solche Differenzengleichung genau dann exponentiell stabil, wenn für alle Eigenwerte der Matrix $\tilde{A}$ stabil sind, das heißt $|\tilde{\lambda}_i| < 1$ gilt. Dieser Bereich wird im Folgenden mit $B_1(0)$ bezeichnet. Zur Untersuchung der Stabilität eines Verfahrens müsste also die Matrix $\tilde{A}$ aus den Koeffizienten des Verfahrens und der Matrix A der zu Grunde liegenden Differentialgleichung berechnet werden. Die Matrix der Differenzengleichung $\tilde{A}$ berechnet sich also als Funktion der Art

$$\tilde{A} = R(TA). \tag{3.7}$$

Diese Funktion nimmt für explizite Werte $z \in \mathbb{C}$ die Form

$$R(z) = 1 + zb^T \left(I - z\mathcal{A}\right)^{-1} e \tag{3.8}$$

an, wobei I für die Einheitsmatrix steht, $b = (b_1, \ldots, b_s)^T$ und $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,s}$ die Koeffizienten des Verfahrens beinhalten und $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$ gilt. $R(z)$ wird als die Stabilitätsfunktion des Verfahrens bezeichnet. Die Stabilitätsfunktion an sich ist nun unabhängig von der Schrittweite und der Dynamik der betrachteten Differentialgleichung und kann damit noch keine endgültige Aussage über die Stabilität des Verfahrens treffen. Um diese zu ermöglichen, gilt es herauszufinden, welche Bedingungen A und T erfüllen müssen, damit die Eigenwerte der Matrix $\tilde{A}$ stabil sind. Hierfür wird das Stabilitätsgebiet $S \subset \mathbb{C}$ eines Runge-Kutta-Verfahrens mit Stabilitätsfunktion R definiert als die Menge von Eigenwerten λ_i, die TA annehmen darf, damit $\tilde{A} = R(TA)$ exponentiell stabil ist. Ein Verfahren wird als A-stabil bezeichnet, wenn es für eine stabile Dynamik A unabhängig von der Schrittweite stabil ist. Das Stabilitätsgebiet entspricht dem Bereich, indem der Betrag der Stabilitätsfunktion kleiner eins ist:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \big| |R(z)| < 1\}. \tag{3.9}$$

Damit lassen sich für alle betrachteten Verfahren Voraussetzungen an die Schrittweite in Abhängigkeit der Eigenwerte von A berechnen. Es gilt zu beachten, dass $\lambda_i \in \Sigma(A) \Rightarrow T\lambda_i \in \Sigma(TA)$. Allgemein gilt somit, je größer das Stabilitätsgebiet S, desto größer kann die Schrittweite T gewählt werden, um Stabilität zu gewährleisten.

Zur Vergleichbarkeit sollen nun die betrachteten Verfahren auf das Stabilitätsgebiet un-

tersucht werden. Für das explizite Euler-Verfahren ergibt sich $R_{\text{Eu,ex}}(z) = 1 + z$. Damit ergibt sich

$$|R_{\text{Eu,ex}}(z)| < 1 \;\Leftrightarrow\; |1 + z| < 1, \tag{3.10}$$

also $S = \{z \in \mathbb{C} \big| |1 + z| < 1\} = B_1(-1)$. Die Schrittweite muss also so gewählt werden, dass $T\lambda_i \in B_1(-1)$ gilt. Für das betrachtete Beispielsystem entspricht dies genau (3.5). Für das implizite Euler-Verfahren erhält man $R_{\text{Eu,im}}(z) = \frac{1}{1-z}$. Für das Stabilitätsgebiet bedeutet das

$$|R_{\text{Eu,im}}(z)| < 1 \;\Leftrightarrow\; |1 - z| > 1, \tag{3.11}$$

das heißt S ist $\mathbb{C}$ ohne den Kreis $B_1(1)$. Damit ist das implizite Euler-Verfahren – wie viele implizite Verfahren – A-stabil, was hilfreich bei der Simulation von stabilen Systemen ist. Allerdings enthält das Stabilitätsgebiet auch Bereiche, in denen die Approximation stabil ist, obwohl das eigentliche System instabil ist, wie zum Beispiel $\Re z > 1$. In diesem Fall würde die Instabilität eines Systems in der Simulation möglicherweise unentdeckt bleiben, was eines der Probleme des impliziten Euler-Verfahrens ist und eine Motivation für die Trapezregel liefert.
Für diese ergibt sich als Sabiltätsfunktion $R_{\text{Trapez}}(z) = \frac{z+2}{z-2}$. Das Stabilitätsgebiet entspricht damit genau der linken Halbebene $S_{\text{Trapez}} = \mathbb{C}^-$. Damit ist die Trapezregel ebenfalls A-stabil, enthält jedoch keine Bereiche, in denen ein instabiles System stabil approximiert werden würde. Man bezeichnet diese Tatsache mit *Erhaltung der Isometrie*, das heißt, die Approximation ist genau dann stabil, wenn auch das zu Grunde liegende System exponentiell stabil ist.
Aufgrund der schwierigen Realisierbarkeit der impliziten Verfahren wurde das Heun-Verfahren auf Basis der Trapezregel und dem expliziten Euler-Verfahren eingeführt. Hierfür ergibt sich die Stabilitätsfunktion $R_{\text{Heun}}(z) = \frac{1}{2}z^2 + z + 1$. Das zugehörige Stabilitätsgebiet ist in Abbildung 3.2 zu sehen. Vergleicht man die Stabilitätsgebiete von explizitem Euler-Verfahren und Heun-Verfahren, so wird deutlich, dass das Stabilitätsgebiet des Heun-Verfahrens nur wenig größer ist, als das des expliziten Euler-Verfahrens. Ein größeres Stabilitätsgebiet kann zum Beispiel mit dem *klassischen* Runge-Kutta-Verfahren mit der Stabilitätsfunktion $R_{RK}(z) = \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + z + 1$ erreicht werden. Ähnlich, wie bei den impliziten Verfahren treten hier jedoch kleine Bereiche auf, in denen ein instabiles System zu einer stabilen Approximation führen würde. Grundsätzlich gilt für explizite Runge-Kutta-Verfahren: Je Höher die Ordnung des Verfahrens, desto größer das Stabilitätsgebiet. Bei der Betrachtung der Stabilitätsgebiete wird auch der große

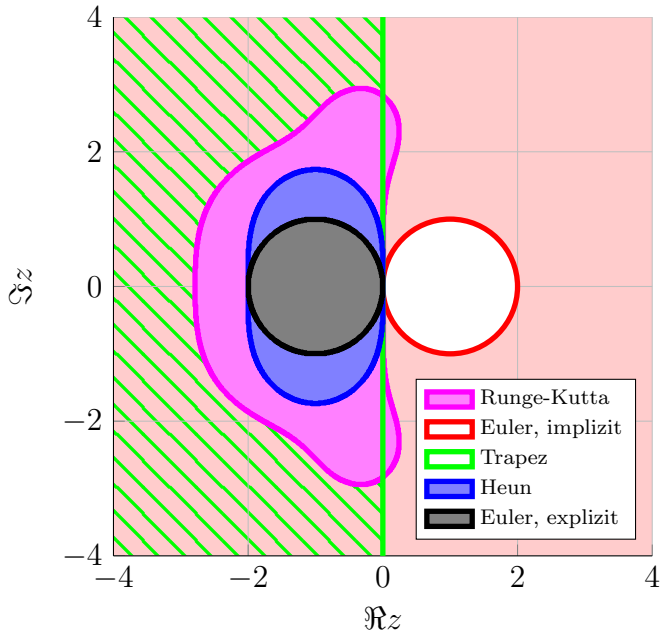

Abbildung 3.2: Stabilitätsgebiete für einige Einschrittverfahren

Vorteil der impliziten Verfahren gegenüber expliziten Verfahren deutlich. Zwar gibt es auch implizite Verfahren, die nur kleine Stabilitätsgebiete besitzen und damit schlecht für die Lösung steifer Differentialgleichungen geeignet sind, jedoch sind die Stabilitätsgebiete von expliziten Verfahren im Allgemeinen kleiner, als die der impliziten Verfahren.

3.3 Mehrschrittverfahren

Die Stabilität von Mehrschrittverfahren ist nicht so einfach allgemein nachzuweisen, wie bei den allgemeinen Runge-Kutta Verfahren. In [1] wird gezeigt, dass die „Stabilität“ des Polynoms $P_a(z)$ eine Voraussetzung für die *Konvergenz* des Fehlers eines Mehrschrittverfahrens darstellt. Dabei gilt das Polynom als stabil, wenn für alle Nullstellen λ_i gilt:

$$|\lambda_i| \leq 1, \tag{3.12}$$

$$|\lambda_i| = 1 \ \Rightarrow \lambda_i \text{ ist einfache Nullstelle.} \tag{3.13}$$

Diese „Stabilitätsbedingung“ darf jedoch nicht mit den für Einschrittverfahren gezeigten Stabilitätskriterien verwechselt werden, da sie noch keine Aussage über die tatsächliche Stabilität des Verfahrens trifft, sondern lediglich die Konvergenz des Fehlers ermöglicht, welche bei den Einschrittverfahren ohnehin vorausgesetzt wurde. Da eine allgemeine Aus-

sage über die Stabilität eines Mehrschrittverfahrens schwierig ist, wird in [5] gezeigt, dass die Stabilität eines Verfahrens im konkreten Fall überpüft werden kann, indem es folgendermaßen umgeformt wird:

$$x_{i+1} + a_{k-1}x_i + a_{k-2}x_{i-1} + \ldots + a_0 x_{i+1-k} = 0. \tag{3.14}$$

Das heißt, die Koeffizienten $a_l (l = 0, \ldots, s-1)$ beinhalten bereits die Koeffizienten des gewählten Verfahrens, sowie die gewählte Schrittweite. Ähnlich wie bei der Herleitung der Polynome $P_a(z)$ und $P_b(z)$ erhält man damit ein *charakteristisches Polynom*

$$P_k(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + a_{k-2}z^{k-2} + \ldots + a_0 = \sum_{l=0}^{k} a_l z^l. \tag{3.15}$$

Das gewählte Verfahren ist mit der verwendeten Schrittweite genau dann stabil, wenn für alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms $z_l, (l = 1, \ldots, k)$ gilt:

$$|z_l| < 1. \tag{3.16}$$

4 Anwendung der Integrationsmethoden in Simulationssoftware

4.1 PSS Nettomac

4.2 PowerFactory

RMS Simulation Algorithms
•Highly accurate, fixed or variable step-size integration technique for solving AC and DC network load flow and dynamic model equations. This is combined with a non-linear electromechanical model representation to enable a high degree of solution accuracy, algorithmic stability and time range validity.
•A-stable simulation algorithm for the efficient handling of stiff systems. This is applicable to all or any individually selected model featuring error-controlled automatic step-size adaptation, ranging from milliseconds up to minutes or even hours, including precise handling of interrupts and discontinuities. EMT Simulation Algorithms
•The calculation of initial conditions is carried out prior to the EMT simulation, and is based on a solved load flow (symmetrical or asymmetrical). Consequently, there is no need for saving steady state conditions being reached after transients are damped out aiming in simulation re-starting under steady state conditions.
•Special numerical integration methods have been implemented in DIgSILENT PowerFactory in order to avoid numerical oscillations caused by switching devices and other non-linear characteristics.
•Highly accurate, fixed or variable step-size integration technique for solving AC and DC network transients and dynamic model equations. This is combined with a non-linear electromechanical model representation to enable a high degree of solution accuracy, algorithmic stability and time range validity.

4.3 PSSE

4.4 Eurostag

The advanced dynamic functions of EUROSTAG® allow for the full range of transient, mid and long-term stability to be covered thanks to a robust algorithm using an auto-adaptative integration stepsize.

Hier ist das eigentliche Thema zu bearbeiten.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In der Zusammenfassung werden die Ergebnisse der Arbeit kurz zusammengefasst. Der Umfang beträgt ca. eine Seite.

A Überblick einiger Verfahren

A.1 Einschrittverfahren

Name	**Ordnung**	**Butcher-Schema**	**Art**	**Stabilität**	Stabilitätsfunktion/Bereich
Euler	1	$\begin{array}{c\|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$	explizit	...	
Heun	2	$\begin{array}{c\|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$	explizit	...	
klassisches Runge-Kutta	4	$\begin{array}{c\|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$	explizit	...	
Euler	1	$\begin{array}{c\|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$	implizit	...	

Mittelpunktsregel	2	$\begin{array}{c\|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$	implizit	...
Trapezregel	2	$\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$	implizit	...

A.2 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren (Schrittweitensteuerung)

Name/ Ordnung	Stufen	Butcher-Schema
Fehlberg-RK4(3)	5	$\begin{array}{c\|ccccc} 0 & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$
Dormand-Prince-RK5(4)	6	$\begin{array}{c\|ccccccc} 0 & & & & & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & & \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & & \\ \frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & & & & \\ \frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{64448}{6561} & -\frac{5103}{18656} & & & \\ 1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} & & \\ 1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{92} & -\frac{2187}{6487} & \frac{11}{84} & \\ \hline & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{92} & -\frac{2187}{6487} & \frac{11}{84} & 0 \\ \hline & \frac{5179}{57600} & 0 & \frac{7571}{16695} & \frac{393}{640} & -\frac{92097}{339200} & \frac{187}{2100} & \frac{1}{40} \end{array}$

A.3 Mehrschrittverfahren

k	**Name**	$P_a(z)$	$P_b(z)$	**Art**	**Stabilität**
2	Milne-Simpson	$z^2 - 1$	$\frac{1}{3}z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$	implizit	...? (Sinn?)
1	Adams-Bashforth	$z^k - z^{k-1}$	1 ($\hat{=}$ Euler, explizit)	explizit	...
2			$(3z - 1)/2$		
3			$(23z^2 - 16z + 5)/12$		
4			$(55z^3 - 59z^2 + 37z - 9)/24$		
2	Adams-Moulton	$z^k - z^{k-1}$	$(5z^2 + 8z - 1)/12$	implizit	...
3			$(9z^3 + 19z^2 - 5z + 1)/24$		
4			$(251z^4 + 646z^3 + -246z^2 + 106z - 19)$		
1	BDF	$z - 1$ ($\hat{=}$ Euler, implizit)	z^k	implizit	unendlich großes Stabilitätsgebiet $\Rightarrow$ gut für steife DGL
2		$\frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2}$			
3		$\frac{11}{6}z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{3}$			
4		$\frac{25}{12}z^4 - 4z^3 + 3z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{4}$			

B Anhang Teil 2

C Anhang Teil 3

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Sollten in einer Ausarbeitung viele Abkürzungen und Formelzeichen auftreten, so empfiehlt es sich, diese gesondert in einem Kapitel aufzufuhren. Dieses kann auch nach dem Inhaltsverzeichnis (Abbildungs- und Tabellenverzeichnis) folgen.

A		Abkürzung für ...
$\cos\varphi$		Leistungsfaktor
U_s	V	Betrag der Statorspannung
φ	rad	Winkel zwischen Spannung und Strom

Literaturverzeichnis

[1] Grüne, Lars: Numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen (Numerische Mathematik II) / Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Bayreuth. Sommersemester 2008, 3. Auflage. – Vorlesungsskript

[2] Harkort, Christian: Digitale Regelung / Lehrstuhl für Regelungstechnik, Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg. Sommersemester 2013. – Vorlesungsskript

[3] Faires, J. D. ; Burden, Richard L.: *Numerische Methoden*. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 1994

[4] SIEMENS AG, PTD SE N.: *NETOMAC – Theorie-Buch*

[5] Friedrich, Hermann ; Pietschmann, Frank: *Numerische Methoden*. De Gruyter, Berlin, New York, 2010