

Art der Arbeit und Nr

Hier steht das Thema der schriftlichen Ausarbeitung

Bearbeiter: Vorname Nachname
Matrikelnummer

Betreuer: Vorname Nachname

Abgabedatum: TT.MM.JJJJ



Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Ort, Datum

Unterschrift

Aufgabenstellung der Arbeit

Thema: Thema der Arbeit

Hier wird die Aufgabenstellung beschrieben. Die Notwendigkeit dieser hängt vom Betreuer ab.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Tabellenverzeichnis	V
1 Einleitung	1
2 Hauptteil	2
2.1 Beschreibung der Integrationsverfahren	2
2.1.1 Einschrittverfahren	2
2.1.2 Schrittweitensteuerung (Adaption)	6
2.1.3 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren	7
2.1.4 Extrapolationsverfahren	8
2.1.5 explizite Mehrschrittverfahren	8
2.1.6 implizite Mehrschrittverfahren	8
2.1.7 Prädiktor-Korrektor-Verfahren	8
2.1.8 BDF-Verfahren	8
2.2 Stabilitätsanalyse der wichtigsten Methoden	9
2.3 Anwendung der Integrationsmethoden in Simulationssoftware	9
2.3.1 PSS Nettomac	9
2.3.2 PowerFactory	9
2.3.3 PSSE	10
2.3.4 Eurostag	10
3 Zusammenfassung und Ausblick	12
A Anhang Teil 1	13
B Anhang Teil 2	14
C Anhang Teil 3	15
Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	16
Literaturverzeichnis	17

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

2.1	Allgemeines Butcher-Schema expliziter Runge-Kutta-Verfahren	5
2.2	Butcher-Schemata für (von links nach rechts): Euler-Verfahren, Heun-Verfahren, <i>klassisches</i> Runge-Kutta-Verfahren	5
2.3	Butcher-Schemata für implizite Verfahren (von links nach rechts): Euler, Mittelpunktsregel, Trapezregel	6
2.4	allgemeines Butcher-Schema für eingebettete Runge-Kutta-Verfahren . .	7
2.5	Butcher-Schema zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten	8

1 Einleitung

Dieses Kapitel dient zur Hinführung an das Thema. Hier ist herauszuarbeiten, warum das Thema von Interesse und Bedeutung ist. Des Weiteren ist kurz der Aufbau der Arbeit anzusprechen. Der Umfang des Kapitels sollte eine oder wenige Seiten betragen.

2 Hauptteil

2.1 Beschreibung der Integrationsverfahren

Ausgangslage: Numerische Lösung von Anfangswertproblemen. Systeme beschrieben durch allgemeine Zustandsdarstellung: (Zur Einfachheit Eingrößensysteme.)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (2.2)$$

Es ergibt sich als Lösung von $\mathbf{x}(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(x, t) dt \quad (2.3)$$

Dafür numerische Lösung erforderlich. Dabei wird mit der (zunächst festen) Schrittweite T gerechnet. Schreibweise festlegen: x_k bezeichnet numerischen Wert im k -ten Abtastzeitpunkt, t_k , die zugehörigen Zeiten. Allgemein soll also in jedem Schritt eine Lösung

$$x_{k+1} = \Phi(x, t) \quad (2.4)$$

mit noch unbekannter Verfahrensfunktion $\Phi(x, t)$ bestimmt werden.

2.1.1 Einschrittverfahren

Explizites Eulerverfahren

Einfachstes Verfahren, ergibt sich aus dem Taylorschen Satz erster Ordnung. Steigung wird in jedem Zeitschritt berechnet und als konstant angenommen. (Zur Verdeutlichung

im Zuge dieser Arbeit nur eine Zustandsgröße!)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x + b \cdot u \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{T} = \lambda \cdot x + b \cdot u \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k + (\lambda \cdot x_k + b \cdot u_k) \cdot T \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \text{Stabilitätsanalyse mit digitaler Regelung Methoden machen!!} \quad (2.8)$$

Implizites Eulerverfahren

Andere Möglichkeit: Annahme der Steigung des $k + 1$ -ten Schrittes für Δx .

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1} \quad (2.9)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{k+1} \text{ mit} \quad (2.10)$$

$$\Delta x_{k+1} = (\lambda \cdot x_{k+1} + b \cdot u_{k+1}) \cdot T \text{ (vorherige Gl. einsetzen)} \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \Delta x_{k+1} = (1 - \lambda \cdot T)^{-1} \cdot (b \cdot u_{k+1} + \lambda x_k) \cdot T \quad (2.12)$$

Es ergibt sich eine implizite Gleichung für die Steigung, und u_{k+1} erforderlich. Besonders: Führt immer zu Stabilität (unabhängig von der Schrittweite), wenn System stabil! (Eigenwerte anschauen!) ABER: oft auch für instabile Systeme stabil!

Trapezregel/Heun-Verfahren

Referenz auf SIEMENS SKRIPT Kombination der beiden Euler-Verfahren \Rightarrow höhere Genauigkeit!

Mittelwert der Steigungen im k -ten und $k + 1$ -ten Schritt:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = \quad (2.13)$$

$$= x_k + T \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(f(x_k, t) + f(x_{k+1}, t + T) \right). \quad (2.14)$$

Dadurch ergibt sich allgemein ebenfalls ein implizites Verfahren. Dies kann nun also möglicherweise nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden, oder durch Abschätzung des unbekannten Wertes $f(x_{k+1}, t + T)$ durch das explizite Euler-Verfahren erhält man

das Heun-Verfahren nach [1]:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k = \\ &= x_k + T \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(f(x_k, t) + f(x_k + T \cdot f(x_k, t), t + T) \right). \end{aligned}$$

Runge-Kutta-Verfahren

Um die bisher betrachteten Methoden zu verbessern, gibt es mehrere Ansätze. Ein naheliegender Gedanke ist, statt nur der Rechten Seite der gew. DGL (REF!), Zeitableitungen höherer Ordnung in die Abschätzung einzubauen. Dies führt zu den Taylor-Methoden, welche auf der Taylor-Satz basieren. Da die Differentiation der Rechten Seite jedoch nach [1] mit verhältnismäßig großem rechnerischen Aufwand verbunden ist, sind diese Verfahren in der Praxis eher ungebräuchlich und sollen im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet werden.

Wie in [1] gezeigt wird, lässt sich der *globale* Fehler $e(t_k) := \|x_k - x(t_k)\|$ gängiger Integrationsverfahren durch

$$e(t) = \mathcal{O}(T^p) \tag{2.15}$$

abschätzen lässt. (Getroffene Annahmen über die rechte Seite der DGL (2.1) sollen im Rahmen dieser Arbeit außer Acht gelassen werden und können in [1] nachgelesen werden.) Dabei legt die Konsistenzordnung p fest, wie schnell der globale Fehler gegen Null geht, wenn die Schrittweite verkleinert wird. Es kann gezeigt werden, dass die Konsistenzordnung der Euler-Verfahren $p = 1$ beträgt. Das Heun-Verfahren ist mit $p = 2$ bereits deutlich genauer.

Deshalb ist der erste Ansatz in der Praxis, die Idee der Trapezregel beziehungsweise des Heun-Verfahrens weiter zu führen und die Konvergenzordnung der Verfahren durch weitere Stützstellen zu erhöhen. Dies führt zum allgemeinen Ansatz der *s-stufigen* expliziten Runge-Kutta-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k + T \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad \text{mit} \tag{2.16}$$

$$k_i = f \left(t + c_i T, x_k + T \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, s. \tag{2.17}$$

c_1					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s\ s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s

Tabelle 2.1: Allgemeines Butcher-Schema expliziter Runge-Kutta-Verfahren

				0			
				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
		0		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
0	1	1		1	0	0	1
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabelle 2.2: Butcher-Schemata für (von links nach rechts): Euler-Verfahren, Heun-Verfahren, *klassisches* Runge-Kutta-Verfahren

Dabei wird die Rechte Seite der DGL an den Stützstellen $t + c_i T$ berechnet, wobei die vorhergehenden Stützstellen gewichtet mit den Koeffizienten a_{ij} zur Berechnung des zur Stützstelle gehörenden Funktionswertes herangezogen werden. Die Gewichtung der berechneten Steigungen bei der Ermittlung des resultierenden Funktionswertes von x_{k+1} erfolgt durch die Koeffizienten b_i . Mit dieser Darstellung ergeben die Runge-Kutta-Verfahren eine unendliche Menge verschiedener Verfahren zur Lösung des Problems.

Um die Runge-Kutta-Verfahren zu klassifizieren, werden die Koeffizienten a_{ij} , b_i , c_i häufig in Form des Butcher-Schemas, nach Tabelle 2.1 dargestellt. Sowohl das explizite Euler-Verfahren ($s=p=1$), als auch das Heun-Verfahren ($s=p=2$) lassen sich auf diese Weise beschreiben. Darüber hinaus ist das *klassische* Runge-Kutta-Verfahren ($s=p=4$) von großer Bedeutung. Für diese Verfahren ergeben sich die in Tabelle 2.2 dargestellten Butcher-Schemata: Die selbe Vorgehensweise lässt sich für implizite Verfahren anwenden, sodass sich als Berechnungsvorschrift für *s-stufige* implizite Runge-Kutta-Verfahren ergibt:

$$x_{k+1} = x_k + T \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad \text{mit} \quad (2.18)$$

$$k_i = f \left(t + c_i T, x_k + T \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, s. \quad (2.19)$$

Beispiele für implizite Runge-Kutta-Verfahren sind das bereits kennengelernte implizite Euler-Verfahren ($s=p=1$), die implizite Mittelpunktsregel ($s=p=2$), sowie die implizite Trapezregel ($s=p=2$), deren Butcher-Schemata in Tabelle 2.3 dargestellt sind. Der Vorteil

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Tabelle 2.3: Butcher-Schemata für implizite Verfahren (von links nach rechts): Euler, Mittelpunktsregel, Trapezregel

der impliziten Verfahren gegenüber den expliziten Verfahren wird sich bei Betrachtung des Stabilitätsverhaltens zeigen.

2.1.2 Schrittweitensteuerung (Adaption)

Um die Verfahren weiter zu verbessern, liegt der Gedanke nahe, die bisher als konstant angenommene Schrittweite T als steuerbar anzusehen, sodass T_k an Stellen, bei welchen sich der Funktionswert stärker ändert, kleiner gewählt werden kann und an Stellen langsamer Änderungen hingegen größer. Aus Gründen der numerischen Effizienz ist es üblich, dass im k -ten Zeitschritt eine „gute“ Schrittweite für den Übergang von t_k nach t_{k+1} bestimmt wird, jedoch keine Anpassung von vorhergehenden Schrittweiten mehr erfolgt.

Um die Schrittweite anzupassen wird gefordert, dass der *lokale* Fehler $\varepsilon(t)$ unter einer gewissen Toleranzgrenze tol liegen soll. Der *lokale* Fehler ist dabei der Anteil am *globalen* Fehler, der durch den Zeitschritt von t_k bis t_{k+1} hervorgerufen wird. Da die exakte Lösung des Funktionsverlaufs nicht bekannt ist, wird für das verwendete Verfahren Φ mit Konsistenzordnung p ein anderes Verfahren $\hat{\Phi}$ zur Abschätzung des Fehlers herangezogen. Die Konsistenzordnung des zweiten Verfahrens \hat{p} wird kleiner als die des verwendeten Verfahrens gewählt, sodass $p \geq \hat{p} + 1$ gilt. Der Schritt von t_k nach $t_{k+1} = t_k + T_k$ wird mit beiden Verfahren berechnet und die Norm der Differenz der Ergebnisse als *Fehlerschätzer* $\bar{\varepsilon}$ bezeichnet.

$$\bar{\varepsilon} := \|\hat{\Phi}(t_k, x_k, T_k) - \Phi(t_k, x_k, T_k)\|. \quad (2.20)$$

Mit Hilfe der Konvergenzeigenschaften lässt sich zeigen, dass die gewünschte Fehlertoleranz näherungsweise eingehalten wird, falls die Schrittweite durch

$$T_{\text{neu}} = \sqrt[p+1]{\frac{tol}{\bar{\varepsilon}}} T_{\text{alt}} \quad (2.21)$$

angepasst wird. Da dies nur approximativ gilt, wird das Argument der Wurzel in der

c_1					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s\,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s
	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\cdots	\hat{b}_{s-1}	\hat{b}_s

Tabelle 2.4: allgemeines Butcher-Schema für eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

Praxis jedoch häufig durch einen „Sicherheitsfaktor“ $f_{ac} \in]0, 1[$ (typisch: 0.9) skaliert.

Nach der Berechnung des Fehlerschätzers $\bar{\varepsilon}$ im Zeitschritt k wird dieser mit der zulässigen Toleranz verglichen. Ist der berechnete Fehler größer, als die zulässige Toleranz ($\bar{\varepsilon} > tol$), wird der selbe Zeitschritt mit der angepassten Schrittweite T_{neu} erneut berechnet.

Gilt jedoch $\bar{\varepsilon} \leq tol$, so ist die gewünschte Genauigkeit erreicht und die der Berechnung zu Grunde liegende Schrittweite wird für diesen Zeitschritt angenommen. Nun wird erneut (2.21) berechnet und T_{neu} als Schrittweite T_{k+1} für den nächsten Zeitschritt angenommen. Dies sorgt dafür, dass die Schrittweite bei hoher Genauigkeit auch vergrößert werden kann.

2.1.3 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

Um den Rechenaufwand der Beschriebenen Schrittweitenanpassung zu reduzieren, können die Verfahrensfunktionen Φ und $\hat{\Phi}$ so geschickt gewählt werden, dass bei deren Auswertungen auf gleiche Zwischenergebnisse zurückgegriffen werden kann. Dies führt auf die sehr häufig verwendeten eingebetteten Runge-Kutta verfahren. Die eingebetteten Verfahren werden mit $RKp(\hat{p})$ bezeichnet. Der Gedanke dahinter ist, dass sich die berechneten Werte der Stützstellen k_i und \hat{k}_i nicht unterscheiden, sondern lediglich deren Linearkombination. Das heißt die Koeffizienten $a_{ij} = \hat{a}_{ij}$ und $c_i = \hat{c}_i$ stimmen in beiden Verfahren überein. Es gilt lediglich $b_i \neq \hat{b}_j$. Für eingebettete Runge-Kutta-Verfahren lassen sich deshalb auch sehr einfach Butcher-Schemata nach Tabelle 2.4 erstellen. Wie in [1] gezeigt wird, muss in diesem Fall zur Konstruktion eines Verfahrens der Konsistenzordnung $\hat{p} = p - 1$ ein Verfahren der Ordnung $\hat{s} = s + 1$ gewählt werden. Für das klassische Runge-Kutta-Verfahren ($s=p=4$) ergibt sich dadurch das Butcher-Schema nach Tabelle 2.5. Um das zugehörige Verfahren $\hat{\Phi}$ mit $\hat{s} = 5$ und $\hat{p} = 3$ zu bestimmen, müssen also die unbekannten Koeffizienten in 2.5 bestimmt werden. Dies kann in [1] nachgelesen werden und soll an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden. Eines der am weitesten verbreiteten

0					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
1	0	0	1		
c_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{b}_4	\hat{b}_5

Tabelle 2.5: Butcher-Schema zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten

Verfahren ist das Dormand-Prince-RK5(4)-Verfahren, welches in der Numerik-Software MATLAB unter dem Namen `ode45` standardmäßig eingestellt ist. Die zugehörigen Koeffizienten können in [1] nachgelesen werden.

2.1.4 Extrapolationsverfahren

2.1.5 explizite Mehrschrittverfahren

2.1.6 implizite Mehrschrittverfahren

2.1.7 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

2.1.8 BDF-Verfahren

TABELLE MIT VERFAHREN, KONSISTENZORDNUNG und STABILITÄT!!!!

2.2 Stabilitätsanalyse der wichtigsten Methoden

2.3 Anwendung der Integrationsmethoden in Simulationssoftware

2.3.1 PSS Nettomac

2.3.2 PowerFactory

RMS Simulation Algorithms

- Highly accurate, fixed or variable step-size integration technique for solving AC and DC network load flow and dynamic model equations. This is combined with a non-linear electromechanical model representation to enable a high degree of solution accuracy, algorithmic stability and time range validity.

- A-stable simulation algorithm for the efficient handling of stiff systems. This is applicable to all or any individually selected model featuring error-controlled automatic step-size adaptation, ranging from milliseconds up to minutes or even hours, including precise handling of interrupts and discontinuities.

EMT Simulation Algorithms

- The calculation of initial conditions is carried out prior to the EMT simulation, and is based on a solved load flow (symmetrical or asymmetrical). Consequently, there is no need for saving steady state conditions being reached after transients are damped out aiming in simulation re-starting under steady state conditions.

- Special numerical integration methods have been implemented in DIgSILENT PowerFactory in order to avoid numerical oscillations caused by switching devices and other non-linear characteristics.

- Highly accurate, fixed or variable step-size integration technique for solving AC and DC network transients and dynamic model equations. This is combined with a non-linear electromechanical model representation to enable a high degree of solution accuracy, algorithmic stability and time range validity.

2.3.3 PSSE

2.3.4 Eurostag

The advanced dynamic functions of EUROSTAG® allow for the full range of transient, mid and long-term stability to be covered thanks to a robust algorithm using an auto-adaptative integration stepsize.

Hier ist das eigentliche Thema zu bearbeiten.

3 Zusammenfassung und Ausblick

In der Zusammenfassung werden die Ergebnisse der Arbeit kurz zusammengefasst. Der Umfang beträgt ca. eine Seite.

A Anhang Teil 1

B Anhang Teil 2

C Anhang Teil 3

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Sollten in einer Ausarbeitung viele Abkürzungen und Formelzeichen auftreten, so empfiehlt es sich, diese gesondert in einem Kapitel aufzuführen. Dieses kann auch nach dem Inhaltsverzeichnis (Abbildungs- und Tabellenverzeichnis) folgen.

A		Abkürzung für ...
$\cos \varphi$		Leistungsfaktor
U_s	V	Betrag der Statorspannung
φ	rad	Winkel zwischen Spannung und Strom

Literaturverzeichnis

- [1] GRÜNE, Lars: Numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen (Numerische Mathematik II) / Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Bayreuth. Sommersemester 2008. – 3. Auflage