



Integrationsverfahren zur Simulation im Zeitbereich

Simon Kerschbaum

3.12.2013



Agenda

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
-  Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen 
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

Was ist das?

- Analytische Berechnung von komplexen Systemen nicht möglich (z.B.: Energieversorgungsnetz)



- Verwendung des PC als Simulationsmedium

- Aufgabe: Lösung von *Anfangswertproblemen*: 

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad x(0) = x_0 \quad \text{führt zu Integration: } x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(t) dt$$


- Numerische Approximation erforderlich:



$$x_i = ?$$

- ➔ Integrationsverfahren

Agenda

- Was ist das?
-  • **Ein Beispielsystem**
 - Die einfachsten Verfahren
 - Stabilitätsbetrachtungen
 - Schrittweitensteuerung
 - Zusammenfassung und Ausblick

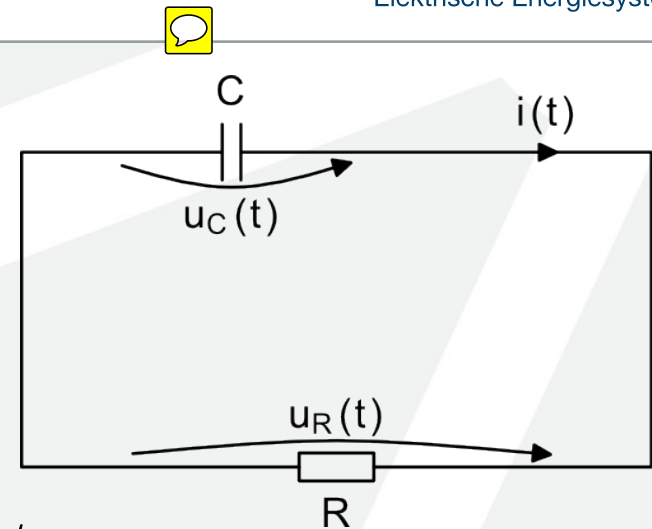
Ein Beispielsystem

- Entladung eines Kondensators:
- Modellbildung durch Spannungs- und Strombeziehungen:

$$u_C(t) = u_R(t) := u(t) \quad u_C(t) = u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$
$$i(t) = \frac{-u_R(t)}{R} \quad \dot{u}(t) = \frac{-1}{RC} u(t), \quad u(0) = u_0$$

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = 1$$

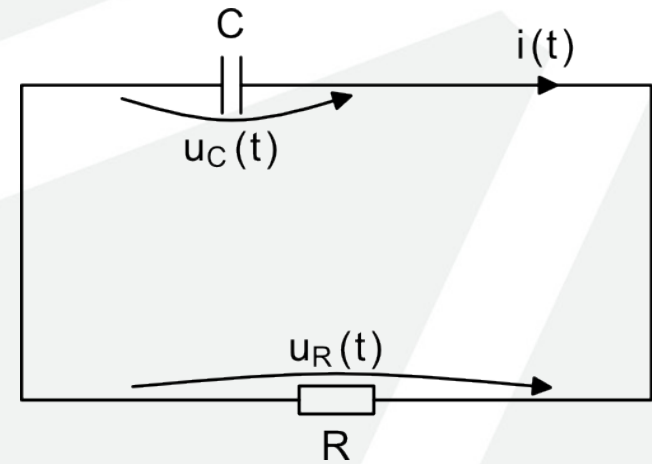
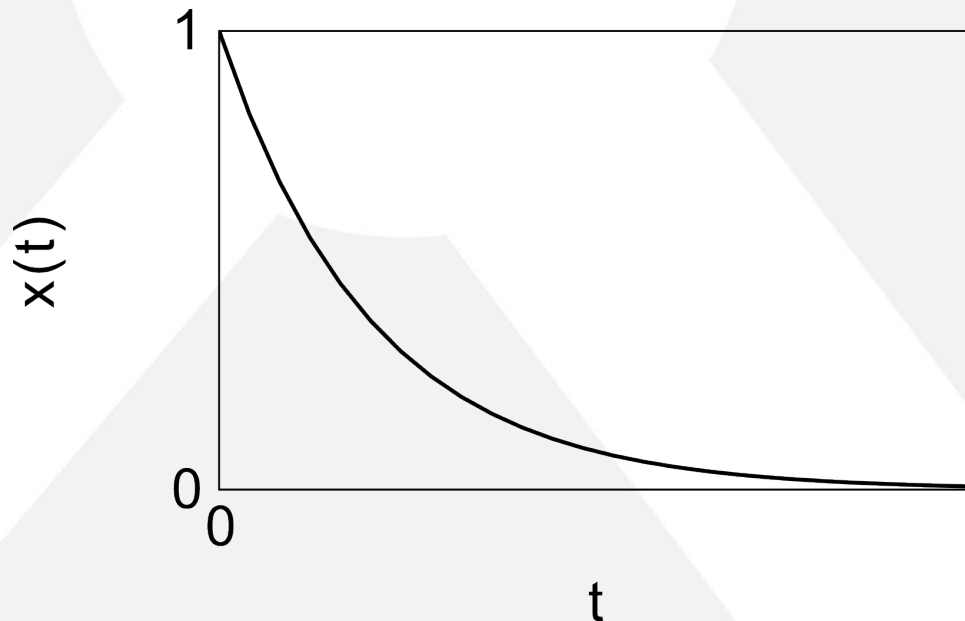
- hier: $\lambda = -1$, $\dot{x} = -x$





Ein Beispielsystem

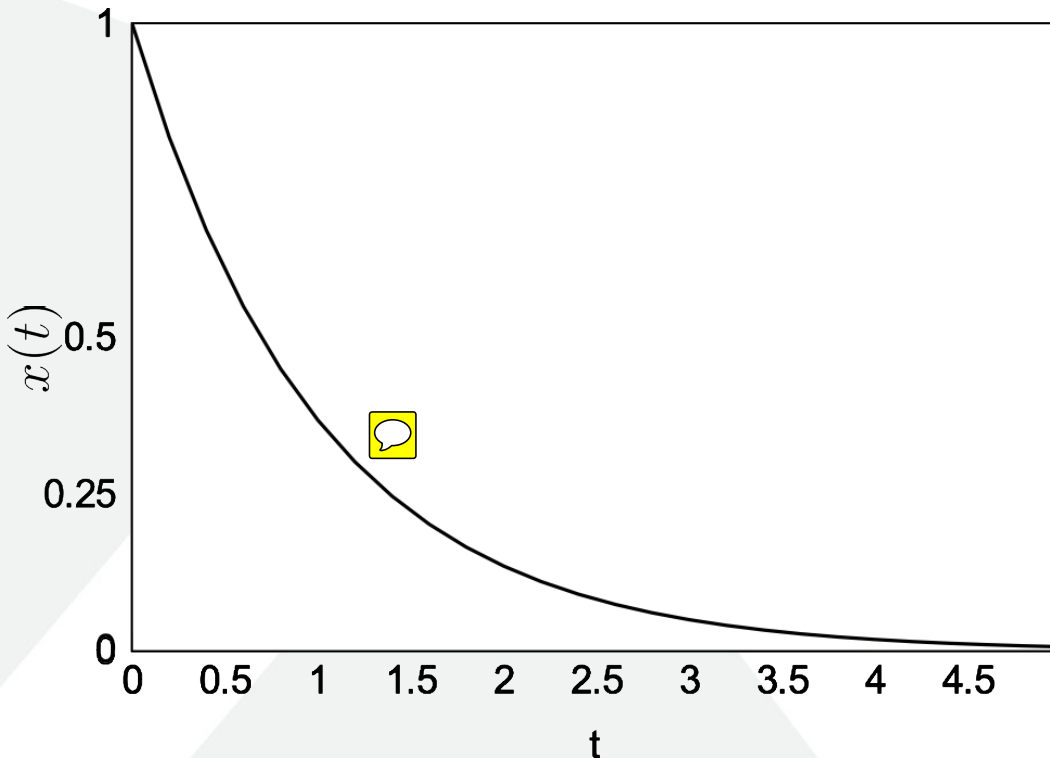
- hier: $\lambda = -1$, $\dot{x} = -x$
- Tatsächliche Lösung: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$




Die einfachsten Verfahren

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

Das explizite Euler-Verfahren



- Wahl der Schrittweite:
 $T = 0.5$

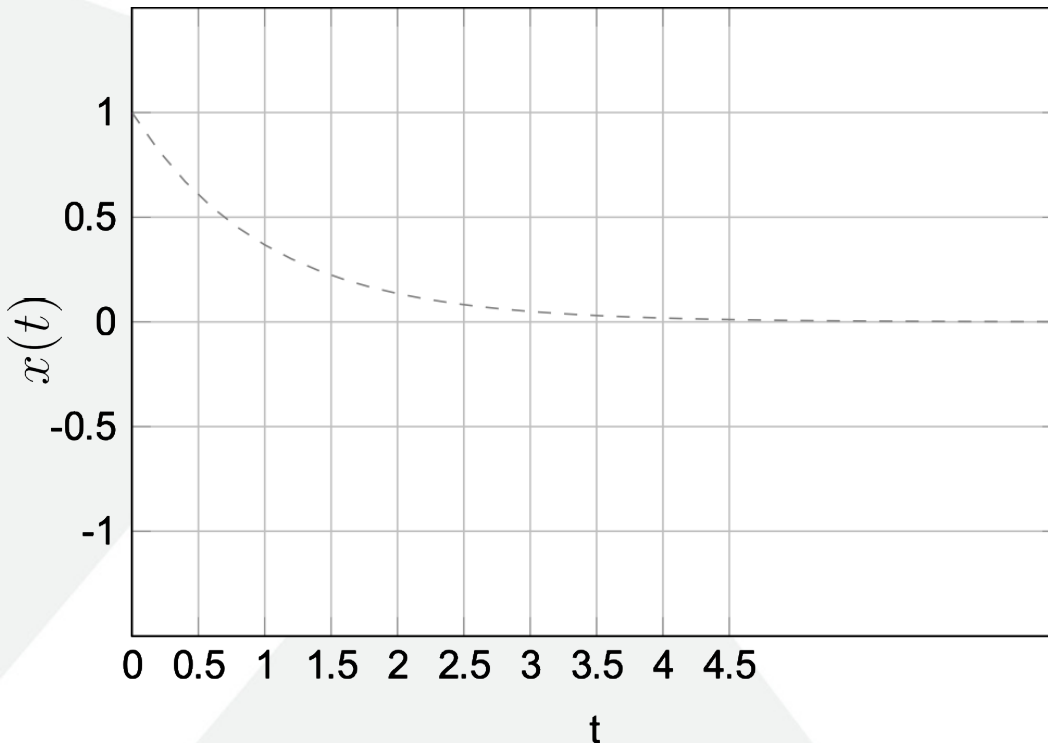
- Annahme konstanter Steigung 



$$x_{i+1} = x_i + T \cdot \dot{x}$$

$$x_{i+1} = (1 - T)x_i$$

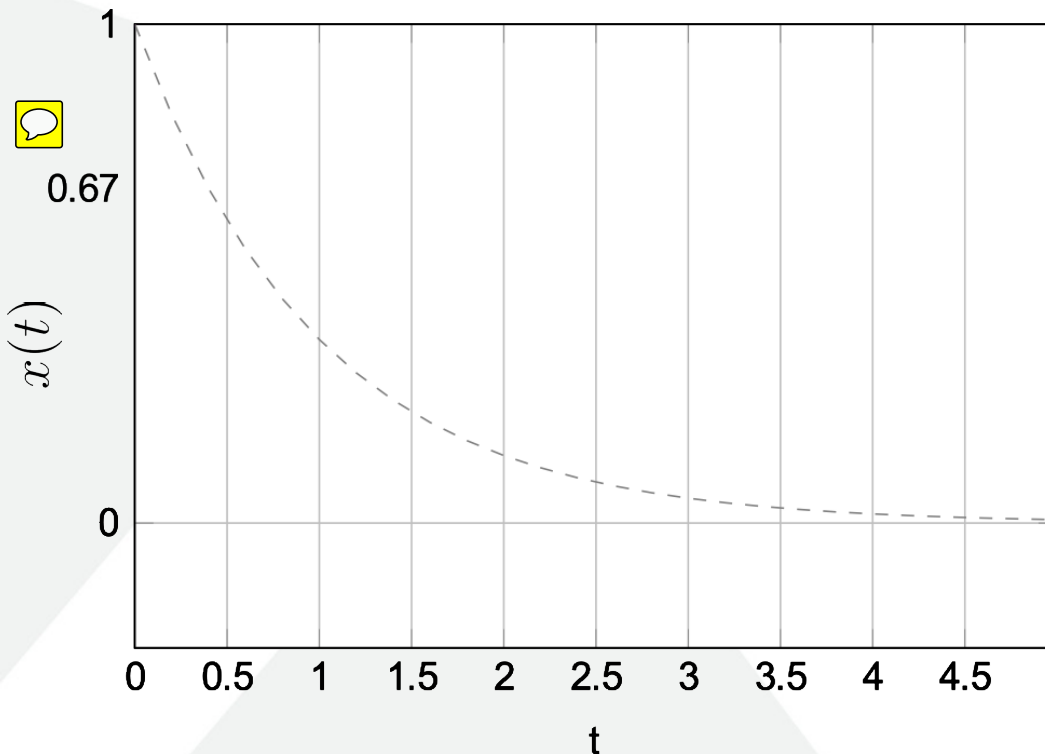
$$x_1 = x(0) = 1 \Rightarrow x_2 = 0.5$$

Das explizite Euler-Verfahren



- Wahl der Schrittweite:
 $T = 2$ 
- **Instabilität** bei zu großer Schrittweite! 

Das implizite Euler-Verfahren



- Annahme der Steigung des Intervallendes:

$$x_{i+1} = x_i + T \cdot f(x_{i+1})$$

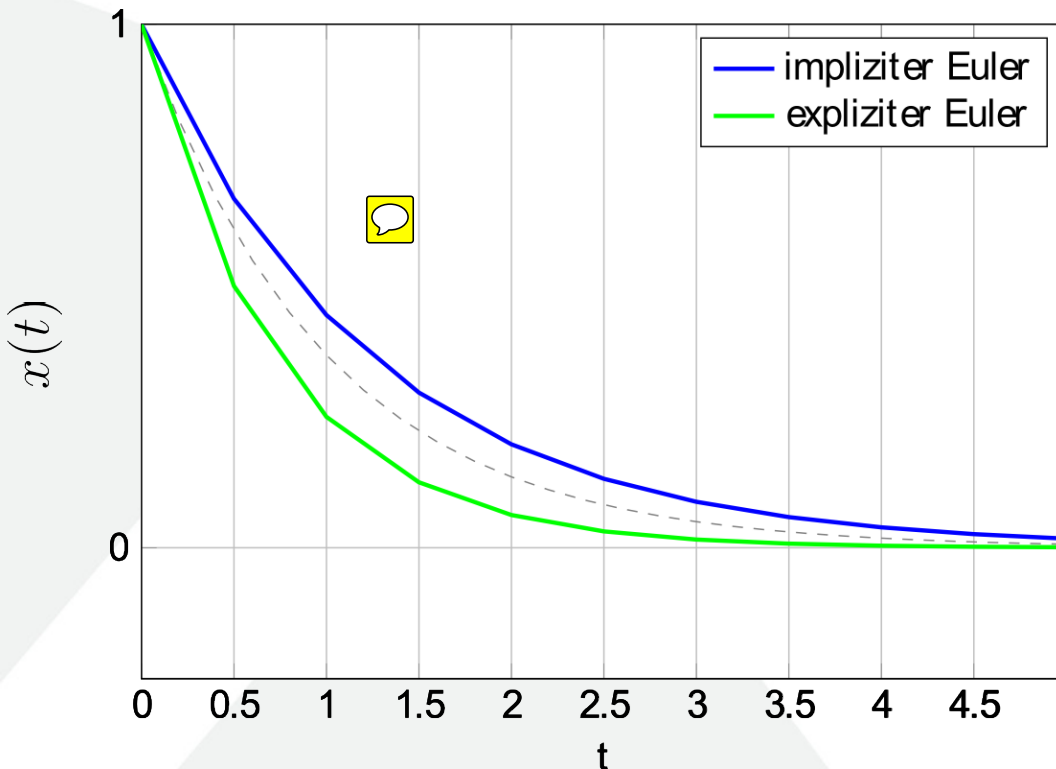
$$x_{i+1} = x_i - T \cdot x_{i+1}$$

- (Nichtlineare) Gleichung muss gelöst werden

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{1 + T}$$

- **Keine Instabilität**

Die Trapezregel



- Mittelwert der Steigungen von explizitem und implizitem Euler:

$$x_{i+1} = T \cdot \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

- Implizite Gleichung
→ Auflösen

$$x_{i+1} = x_i \frac{1 - T/2}{1 + T/2}$$

- Keine Instabilität

Die Trapezregel

- Bessere Ergebnisse als Euler-Verfahren:

Konsistenzordnung p :

$$e(t) = \mathcal{O}(T^p)$$

- Euler: $p = 1$
- Trapez: $p = 2$

- **Problem:**

implizite Gleichung $x_{i+1} = T \cdot \frac{1}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$

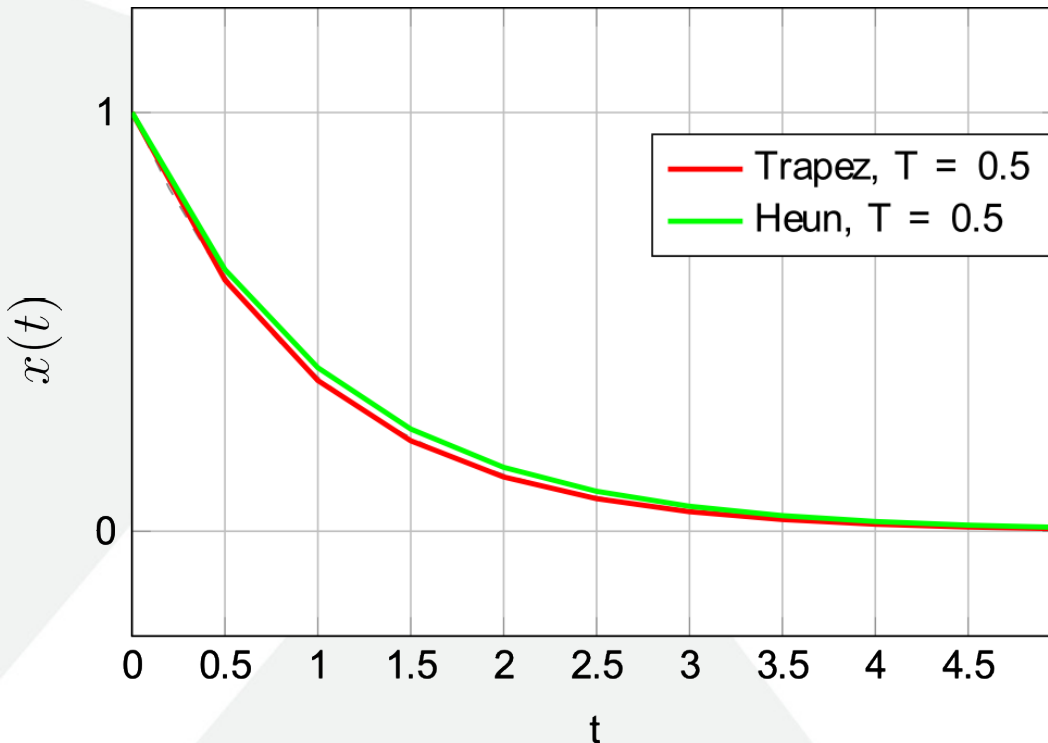
nicht lösbar oder **Rechenaufwand zu groß**

→explizites Verfahren benötigt

→Idee: Schätzung des unbekannten Wertes x_{i+1} durch expliziten Euler

→*Heun*-Verfahren: $x_{i+1} = T \cdot \frac{1}{2} \left(f(x_i) + f(x_i + T f(x_i)) \right)$

Das Heun-Verfahren



- Hier:
$$x_{i+1} = x_i \left(1 - T + \frac{T^2}{2} \right)$$
- Instabilität bei zu großer Schrittweite!

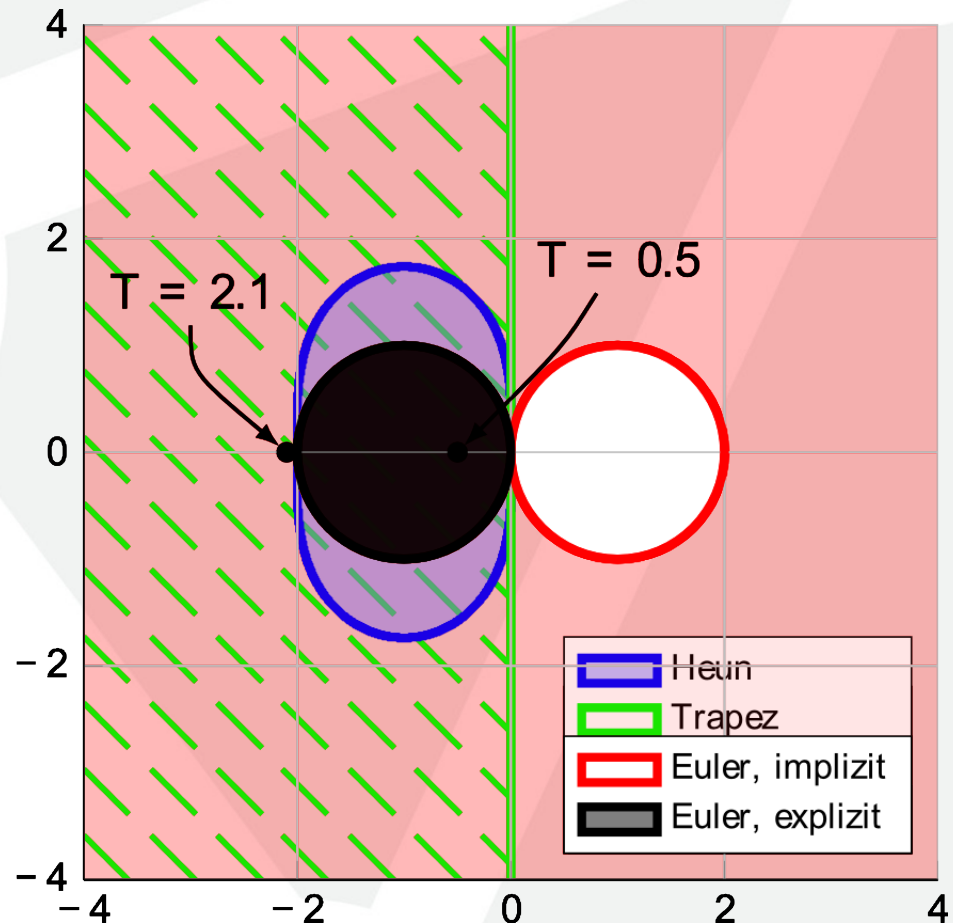
Stabilitätsbetrachtungen

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- **Stabilitätsbetrachtungen**
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

Stabilitätsbetrachtungen

- **Stabilitätsgebiet S:**
Bereich, in dem $T \cdot \lambda_i$ liegen
müssen, damit Verfahren stabil

λ_i : Eigenwerte der
Dynamikmatrix A in
System $\dot{x} = Ax$



Quelle: nach Deuffhard, P.; Bornemann, F.: Numerische Mathematik. II:
Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

Schrittweitensteuerung

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- **Schrittweitensteuerung**
- Zusammenfassung und Ausblick

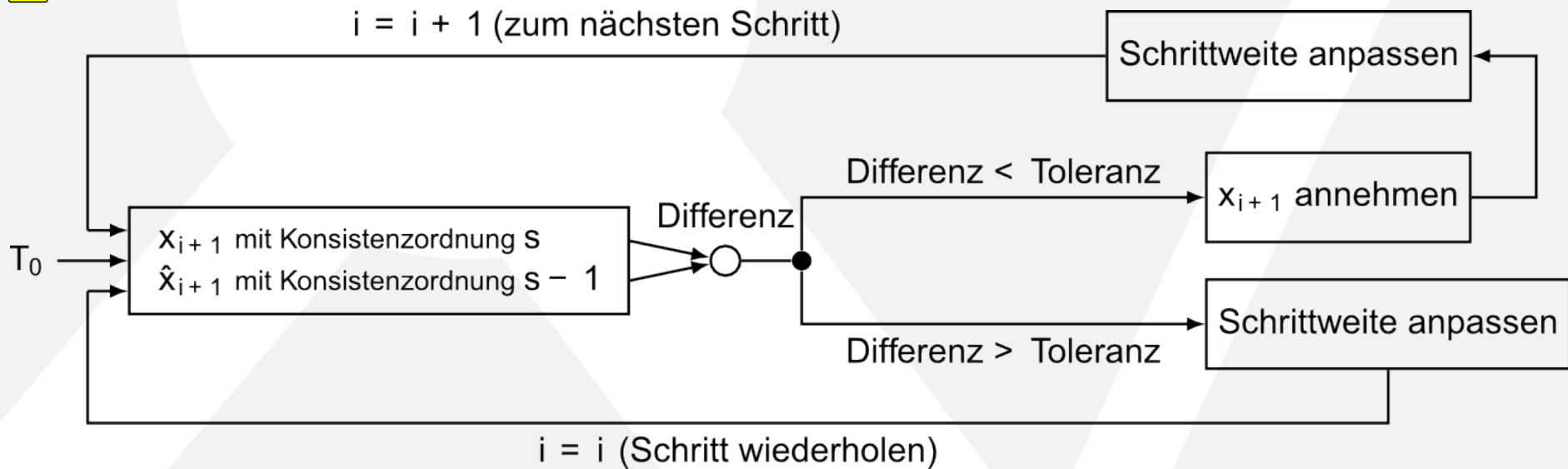


Schrittweitensteuerung

- **Bisher:** konstante Schrittweite T
- **Gedanke:** Anpassung der Schrittweite in jedem Schritt:
 - Starke Änderung \rightarrow kleine Schrittweite
 - Schwache Änderung \rightarrow große Schrittweite
- **Ziel:** Verringerung der Rechenzeit
- **Vorgabe** von Toleranz und T_0

Schrittweitensteuerung

- **Ablauf:**



Zusammenfassung und Ausblick

- Was ist das?
- Ein Beispielsystem
- Die einfachsten Verfahren
- Stabilitätsbetrachtungen
- Schrittweitensteuerung
- Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

- Verfahren unterschiedlicher Konsistenzordnung
- Explizite / Implizite Verfahren
 - Implizit: + Stabilitätsverhalten
 - Rechenaufwand/Auflösen der Gleichung (Realisierbarkeit)
 - Explizit: vice versa
- Schrittweitensteuerung
 - Kann Rechenaufwand verringern
 - Wahl der Toleranz von wesentlicher Bedeutung

Ausblick

- Erhöhung der Stützstellen (allgemeine Runge-Kutta-Verfahren)
- Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren (zur Schrittweitensteuerung)
- Mehrschrittverfahren
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren

