

Bézier 单元刚度映射下的高效多重网格等几何拓扑优化方法

丁延冬 罗年猛 杨奥迪 王书亭 朱浩然 谢贤达

华中科技大学机械科学与工程学院, 武汉, 430074

摘要: 等几何拓扑优化方法采用 CAD 的 B 样条或者 NURBS 作为 CAE 未知物理场的形函数, 有效避免了传统有限元拓扑优化由于拉格朗日基函数 C^0 连续所带来的低精度问题。多重网格等几何拓扑优化技术可通过优化域的层间继承显著提高等几何拓扑优化的计算效率, 但存在单元刚度矩阵消耗内存空间及预处理时间过长等问题。针对上述问题, 研究了基于 Bézier 单元刚度映射的多重网格等几何拓扑优化方法, 采用标准 Bézier 单元刚度矩阵与相应的 Bézier 提取矩阵进行任一层级任一 B 样条单元刚度矩阵的等效表达, 进而实现多重网格等几何拓扑优化数据存储结构和预处理过程的优化。数值算例结果表明, 相比于传统多重网格等几何拓扑优化模型, 所提方法具有相同的优化收敛过程和优化结果, 并显著地减小 B 样条单元刚度矩阵的存储空间并缩短预处理时间, 验证了所提方法的有效性。

关键词: 拓扑优化; 等几何分析; 多重网格; Bézier 提取

中图分类号: TH122

DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2022.23.004

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Efficient Multigrid Isogeometric Topology Optimization under Bézier Element Stiffness Mapping

DING Yandong LUO Nianmeng YANG Aodi WANG Shuting ZHU Haoran XIE Xianda
School of Mechanical Science & Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

Abstract: Isogeometric topology optimization (ITO) utilized B-spline or NURBS as the shape function of unknown physical field of CAE, which avoided the low-accuracy problems of traditional FEM-based topology optimization due to the C^0 continuity of Lagrange basis function. Through the inheritance between design variables on different hierarchies, the calculation efficiency of ITO might be significantly improved, while it still suffered from the problems of huge memory burden and complicated pre-processing processes with respect to the elemental stiffness matrices of all elements. To resolve these problems, the multigrid ITO method was put forward based on Bézier element stiffness mapping herein. The standard Bézier element stiffness matrix and the Bézier extraction matrices of all hierarchies were used to express the elemental stiffness matrix of an arbitrary B-spline element on arbitrary grid-level equivalently, which optimized the data storage structure and pre-processing processes for multigrid ITO. Numerical example results show that compared with conventional multigrid ITO method, the proposed method obtains identical optimization processes and results, but significantly reduces the storage burden and pre-processing time of the B-spline elements stiffness matrices. Therefore, the effectiveness of the proposed method was verified.

Key words: topology optimization; isogeometric analysis; multigrid; Bézier extraction

0 引言

拓扑优化是一种在给定条件约束的设计域进行结构设计的有效工具, 被广泛应用于散热结构^[1]、柔性机构^[2]与弹性结构^[3]。经典拓扑优化方法主要有各向同性惩罚微结构法(simple isotropic material with penalization, SIMP)^[4]、进化

法^[5]、水平集法^[6-7]、移动可变形组件/孔洞法^[8-9]等。有限元法是传统拓扑优化的求解基础, 其求解精度对拓扑优化过程的鲁棒性至关重要, 而有限元物理场离散形函数的 C^0 连续无法满足应力约束等高阶拓扑优化问题的求解要求。

为提高有限元求解精度及离散形函数的连续性, HUGHES 等^[10]采用 CAD 系统常用的 B 样条/NURBS 样条基函数替代拉格朗日插值函数作为有限元离散物理场的形函数, 发展出具备

收稿日期: 2022-05-27

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFB1708300); 中国博士后科学基金(2021M701310)

CAD-CAE 统一表达能力的等几何分析技术,并进一步衍生出适合分析的几何计算理论^[11]。由于等几何分析所具备的上述优点,故用等几何分析代替有限元作为拓扑优化的求解器可提高优化过程的稳定性并拓宽拓扑优化的应用场景。SEO 等^[12]率先提出了一种消除设计空间依赖性且简化后处理过程的等几何拓扑优化方法。DEDE 等^[13]提出了基于相场模型的等几何拓扑优化方法,通过等几何分析进行四阶广义 Cahn-Hilliard 方程所描述的相场模型的求解。WANG 等^[14]对等几何分析与水平集拓扑优化进行集成,提出了一种高精度且满足几何限制的等几何拓扑优化方法。XIE 等^[15]基于 R 函数提出了一种 C^1 连续的可移动变形组件等几何拓扑优化模型。ZHUANG 等^[16]采用 Bézier 单元实现了多目标周期微结构等几何拓扑优化,在保证高连续性的同时降低了积分计算的复杂度。

无论是传统有限元拓扑优化程序还是等几何拓扑优化程序,更精确的优化结果均需要规模更大的有限元求解,因此优化过程需消耗大量的计算成本^[17]。通过改进有限元求解算法来提高拓扑优化计算效率一直是拓扑优化的研究热点,主要方法有自适应网格法^[18-19]和多重网格法^[20-22]。WANG 等^[23]将等几何分析求解精度优势与多重网格求解效率的优势相结合,提出了多重网格等几何优化模型。然而,由于 B 样条基函数空间的非单元一致性,上述多重网格等几何拓扑优化方法在每一层的拓扑优化过程中需要进行所有 B 样条单元刚度的计算和存储,进而实现优化过程中等几何单元刚度矩阵的快速更新,导致多重等几何拓扑优化存在数据存储负担过重和预处理时间过长等问题。针对上述问题,可采用 Bézier 提取算子对 B 样条单元数据进行预处理,实现任一层级网格 B 样条基函数通过 C^0 连续且单元空间保持的 Bernstein 基函数来等效表达。其中, Bézier 提取算子作为一种基本的转换方式,被用于保证 B 样条基函数的高阶连续性,已被广泛应用于等几何分析框架中的 T 样条^[24]、截断层次 B 样条^[25-27]与极样条^[28]。

本文提出基于 Bézier 单元刚度映射的多重网格等几何拓扑优化模型,以实现等几何拓扑优化数据的存储结构和预处理过程效率的优化。通过 Bézier 提取算子将各层级的所有 B 样条单元刚度矩阵的大规模存储转换为标准刚度矩阵与各层级 Bézier 提取矩阵的存储,并将任一层级所有 B 样条单元刚度矩阵的计算过程转换为任一层级

若干个(2 或 3)参数方向的 Bézier 提取矩阵的计算过程,进而建立任一层级任一 B 样条单元刚度矩阵与标准 Bézier 单元刚度矩阵的映射关系。利用 B 样条单元刚度矩阵与标准 Bézier 单元刚度矩阵之间的映射法则,显著降低多重网格等几何拓扑优化的刚度矩阵内存占用并减少刚度矩阵预处理流程的时间消耗。最后,通过二维与三维数值算例的优化结果展示本文模型在内存空间和预处理时间两个方面的优势。

1 理论基础

首先介绍 Bernstein 多项式,接着对开节点向量生成 B 样条的递归定义进行回顾,最后基于 Bézier 分解算法引出 Bézier 提取算子。其中, Bézier 提取算子是实现 Bernstein 多项式与 B 样条之间映射的理论基础。

1.1 Bernstein 多项式

对于任意位于 $[0, 1]$ 内的参数坐标 ζ , 相应的 p 阶 Bernstein 多项式由以下递推式获得:

$$B_{i,p}(\zeta) = \begin{cases} (1-\zeta)B_{i,p-1}(\zeta) + \zeta B_{i-1,p-1}(\zeta) & i = 1, 2, \dots, p+1 \\ 0 & i < 1 \text{ 或 } i > p+1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $B_{i,0}(\zeta) = 1$ 。阶次 $p = 1, 2, 3$ 的 Bernstein 基函数如图 1 所示。

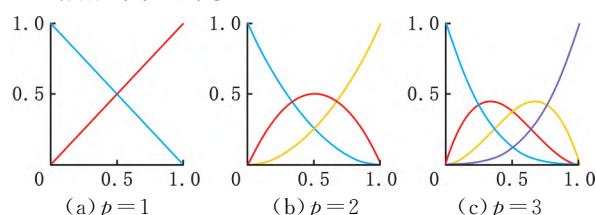


图 1 定义在 $[0, 1]$ 的 Bernstein 基函数

Fig.1 Bernstein basis functions defined in $[0, 1]$

Bézier 曲线可以由 Bernstein 多项式作为基函数并与控制点 P_i 的线性组合来表达,表达式为

$$C_{\text{Bez}}(\zeta) = \sum_{i=1}^p P_i B_{i,p}(\zeta) = P^T B(\zeta) \quad \zeta \in [0, 1] \quad (2)$$

1.2 B 样条

对于给定的开节点向量 $\Xi = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+p+1})$, B 样条的基函数由 Cox-de Boor 递推公式定义:

$$N_{j,p}(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_{j+p} - \zeta_j} N_{j,p-1}(\zeta) + \frac{\zeta_{j+p+1} - \zeta}{\zeta_{j+1} - \zeta_{j+p+1}} N_{j+1,p-1}(\zeta) \quad (3)$$

$$N_{j,0}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \zeta_j \leq \zeta \leq \zeta_{j+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中, p, n 分别表示 B 样条基函数的阶次和相应

控制点个数。通过组合 B 样条基函数与控制点可生成 B 样条曲线, B 样条曲线的表达式如下:

$$C_B(\zeta) = \sum_{j=1}^n P_j N_{j,p}(\zeta) = P^T N(\zeta) \quad (4)$$

多维参数空间下, B 样条基函数由张量积结构生成, 因此, 二维 B 样条基函数由以下公式定义:

$$N_{(j_1, j_2), (p_1, p_2)}(\zeta, \eta) = N_{j_1, p_1}(\zeta) N_{j_2, p_2}(\eta) \quad (5)$$

其中, (ζ, η) 表示二维参数空间下的参数坐标, j_d ($d=1, 2$)、 p_d ($d=1, 2$) 分别表示 d 维参数方向基函数的索引和阶次。开节点向量 $(0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)$ 的 B 样条基函数空间和各节点向量单元的局部 B 样条基函数空间如图 2 所示, 图 3 为图 2 所示 B 样条基函数生成的 B 样条曲线。

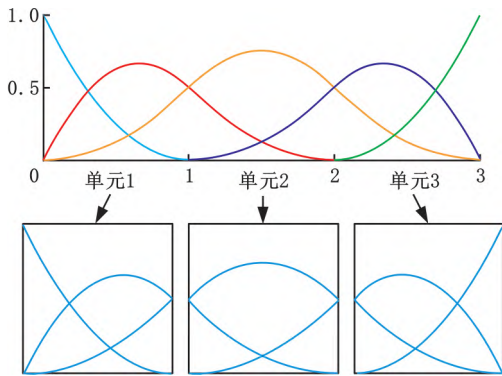


图 2 开节点向量 $(0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)$ 的 2 阶 B 样条基函数

Fig.2 Second-order B-spline basis functions of the open knot vector $(0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3)$

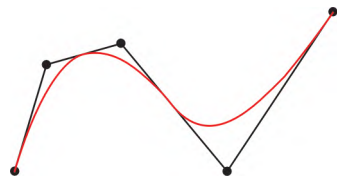


图 3 图 2 中 B 样条基函数所生成的 B 样条曲线
Fig.3 Illustration of B-spline curve generated by the B-spline basis function of fig.2

1.3 Bézier 提取算子

Bézier 分解算法可生成 B 样条曲线的 Bézier 单元, 分解算法由向开节点向量中重复插入内节点直到内节点重复度为 p 来实现。对于开节点向量 $\Xi = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+p+1})$, 插入新节点 ζ' ($\zeta \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$) 后的开节点向量可表示为 $\Xi' = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \zeta', \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_{n+p+1})$, 相应的新控制点 $\{P'_j\}_{j=1}^{n+1}$ 可由初始控制点 $\{P_j\}_{j=1}^n$ 生成, 如下式:

$$P'_j = \begin{cases} P_j & j = 1 \\ \alpha_j P_j + (1 - \alpha_j) P_{j-1} & 1 < j < n + 1 \\ P_n & j = n + 1 \end{cases} \quad (6)$$

其中, α_j 的推导公式为

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & 1 \leq j \leq k - p \\ \frac{\zeta' - \zeta_j}{\zeta_{j+p} - \zeta_j} & k - p \leq j \leq k \\ 0 & j \geq k + 1 \end{cases} \quad (7)$$

令 $\{\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_m\}$ 为实现 Bézier 分解所需插入的节点向量集合。对于插入的新节点 ζ'_k , $k = 1, 2, \dots, m$, 根据式 (7) 可获得它相应的变换系数 α_j , $j = 1, 2, \dots, n + k$ 。因此, Bézier 提取算子为

$$C^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{(n+k-1)} & 1 - \alpha_{(n+k)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$C^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n+k-1) \times (n+k)}$

整体的 Bézier 提取矩阵由 $C^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 组成, 其表达式为

$$C_{\text{ext}} = C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(m)} \quad (9)$$

通过 $n \times (n + m)$ 维度的 Bézier 提取算子 C_{ext} , B 样条基函数 $N(\zeta) = \{N_{j,p}(\zeta)\}_{j=1}^n$ 可映射为 Bernstein 基函数 $B(\zeta) = \{B_{j,p}(\zeta)\}_{j=1}^{n+m}$, 如下式:

$$N(\zeta) = C_{\text{ext}} B(\zeta) \quad (10)$$

Bézier 曲线的控制点 P_B 也可以通过 Bézier 提取算子从相应 B 样条控制点 P 获取, 如下式:

$$P_B = C_{\text{ext}}^T P \quad (11)$$

其中, P_B 的维度为 $(n + m) \times d$; P 的维度为 $n \times d$ 。

借助于 B 样条的张量积结构, 多变量的 Bézier 提取算子可方便地从单变量 Bézier 提取算子生成。双变量情况下, Bézier 提取算子的表达式如下:

$$C(\zeta, \eta) = C_{\text{ext}}(\eta) \otimes C_{\text{ext}}(\zeta) \quad (12)$$

阶次 $p = 2$ 时, 图 2 中任意单元的局部 B 样条基函数均可映射为图 1b 中具有空间保持特点的 Bernstein 基函数。图 4 所示为图 2 中单元 3 的 B 样条基函数空间与 Bernstein 基函数空间之间的映射过程。图 5 所示为 B 样条基函数空间与相应的 Bernstein 基函数空间, 具体的映射关系表达如下:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

2 多重网格等几何拓扑优化模型

首先介绍 B 样条空间下等几何拓扑优化模

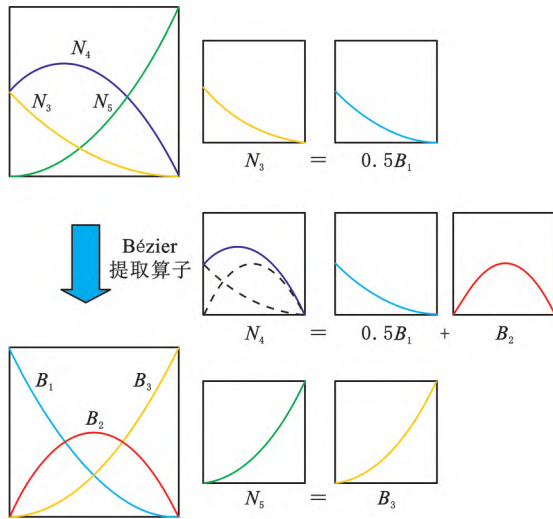


图 4 图 2 中单元 3 的基函数与图 1b 的 Bernstein 基函数的映射关系

Fig.4 Illustration of the mapping between the Bernstein basis function of fig.1b and the basis function of the third element depicted in fig.2

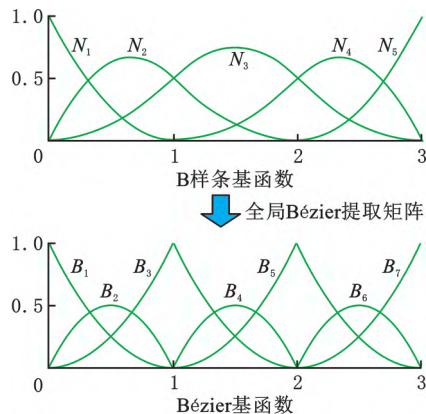


图 5 图 2 中 B 样条基函数与 Bernstein 基函数映射关系

Fig.5 Illustration of the transformation relationship between B-spline basis functions depicted in fig.2 and its Bernstein basis functions

型,在此基础上对传统多重网格等几何拓扑优化模型^[23]进行回顾;接着,基于 Bézier 提取算子对传统等几何拓扑优化模型进行重构,获得改进多重网格模型;最后,通过多重网格各层设计变量之间的映射关系,完成改进多重网格等几何拓扑优化模型的灵敏度分析。

2.1 传统多重网格等几何拓扑优化模型

给定图 6 所示的二维矩形设计域,等几何拓扑优化的设计目标是在约束条件下寻找最优的材料分布,即寻找具有最小应变能的最优结构,目标函数表示为

$$c(x) = f^T u(x) \quad (14)$$

式中, x 为所有 B 样条单元的相对材料密度分布向量; $c(x)$ 为在材料分布 x 下的模型结构柔度; f 为外力向量; $u(x)$ 为各个控制点上的位移向量。

综合 SIMP 方法,B 样条空间下等几何拓扑

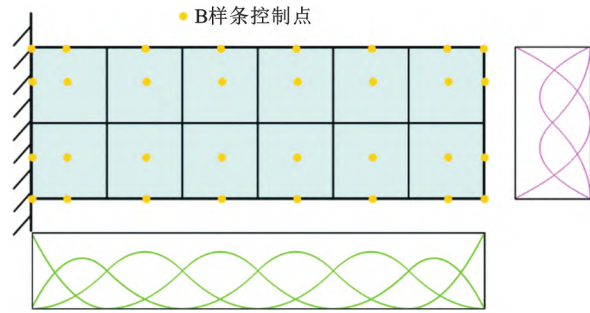


图 6 B 样条空间下的 6×2 网格的二维悬臂梁设计域

Fig.6 2D cantilever design domain with 6×2 mesh size in B-spline space

优化的数学模型可以表示为

$$\begin{aligned} \text{find } & x = (x_1, x_3, \dots, x_{n_e}) \\ \text{min } & c(x) = f^T u(x) = \sum_{e=1}^{n_e} (u_e)^T K_e(x_e) u_e \\ \text{s.t. } & K(x) u(x) = \left(\sum_{e=1}^{n_e} K_e(x_e) \right) u(x) = f \\ & V(x)/V_0 \leq v_f \\ & x \in \mathbb{S} \quad \mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^{n_e}, 0 \leq x \leq 1\} \end{aligned} \quad (15)$$

式中, n_e 为设计域离散成 B 样条网格的单元个数; x_e 、 u_e 、 $K_e(x_e)$ 分别为第 e 个单元的相对密度、位移向量和刚度矩阵; $K(x)$ 为全局刚度矩阵; $V(x)$ 为固体材料的体积; V_0 为设计域的总体积; v_f 为模型限制的材料体积分数; \mathbb{S} 为 x 的可容许空间。

式(15)中的 $K_e(x_e)$ 可由下式获得:

$$K_e(x_e) = E_e(x_e) K_e^0 \quad (16)$$

其中, K_e^0 为单元被实体材料完全填充的单元刚度矩阵; $E_e(x_e)$ 为第 e 个单元的弹性模量,根据 SIMP 模型表达为

$$E_e(x_e) = E_{\min} + (x_e)^p (E_0 - E_{\min}) \quad x_e \in [0, 1] \quad (17)$$

式中, E_0 为实体材料的弹性模量; E_{\min} 为空白单元的弹性模量,通常取 $0 < E_{\min} \ll E_0$ 以避免全局刚度矩阵的奇异性; p (一般取 3) 为优化设计变量的惩罚因子。

基于多重网格的等几何拓扑优化模型是一种平衡优化效率与优化精度的有效手段,具体过程为:首先,等几何拓扑优化在较粗的网格下进行优化,此时迭代的速度较快、计算成本较低;然后,当设计变量变化较小时,将粗网格优化结果映射为更细网格的初始设计,并在细网格上进行等几何分析和优化;最后,重复以上操作若干次,由最精细的网格生成等几何拓扑优化结果。

多重网格优化框架如图 7 所示,其中,等几何拓扑优化部分是基础部分,是迭代过程中的迭代体;设计变量映射继承部分是算法实现的核心,是迭代过程中完成代际继承的关键。本文采用的设计变量映射方法为多维度扩展方法,具体实现过程为:通过 Kronecker 乘积方法将粗网格模型的

优化设计变量以 1 对 4(二维)或 8(三维)的方式等值映射至细网格模型,进而实现细网格模型相应设计变量的初始化,如图 8 所示。通过这样的分层迭代过程与代际映射继承的方式,在保证优化精度的前提下显著提高优化求解的效率。

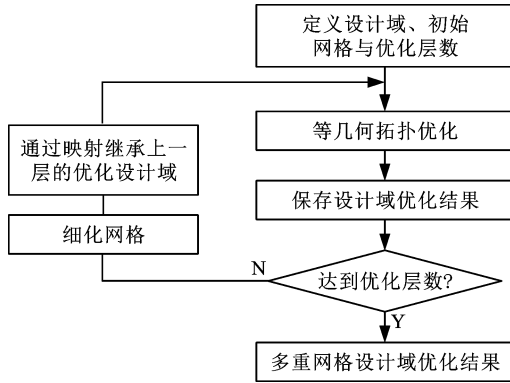
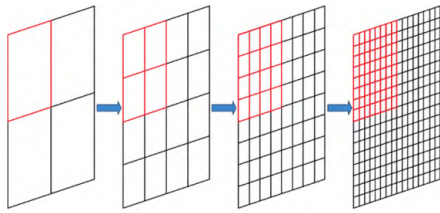
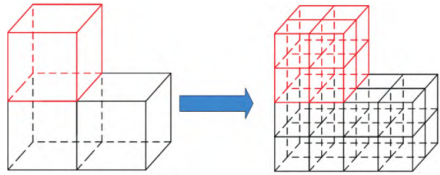


图 7 多重网格等几何拓扑优化的算法流程图

Fig.7 Algorithm flowchart of multigrid isogeometric topology optimization



(a) 二维多重网格模型映射示意图



(b) 三维多重网格模型映射示意图

图 8 多重网格等几何拓扑优化设计变量映射示意图

Fig.8 Schematic diagram of design variable mapping of multigrid isogeometric topology optimization

将多重网格的框架与式(15)所示的数学模型相结合,得到多重网格等几何拓扑优化模型:

$$\left. \begin{aligned} \text{find } \mathbf{x} &= \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L\} \\ \min c(\mathbf{x}_l) &= \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}_l) = \sum_{e=1}^{n_{e,l}} (\mathbf{u}_{e,l})^T \mathbf{K}_{e,l}(\mathbf{x}_{e,l}) \mathbf{u}_{e,l} \\ \text{s.t. } \mathbf{K}(\mathbf{x}_l) \mathbf{u}(\mathbf{x}_l) &= \left\{ \sum_{e=1}^{n_{e,l}} \mathbf{K}_{e,l}(\mathbf{x}_{e,l}) \right\} \mathbf{u}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{f} \\ V(\mathbf{x}_l)/V_0 &\leq v_f \\ \mathbf{x}_l &\in \mathbf{R}^{n_{e,l}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中, l 为多重网格模型的网格层级, $l=1, 2, \dots, L$; \mathbf{x}_l 的元素取值区间为 $[0, 1]$ 。

2.2 基于 Bézier 提取算子的多重网格等几何拓扑优化模型

首先,基于 Bézier 提取算子对传统等几何拓

扑优化模型进行重构;接着,将改进等几何拓扑优化模型与图 7 所示的多重网格的框架结合,提出 B 样条单元刚度矩阵统一表达的多重网格等几何拓扑优化模型。

重构传统等几何拓扑优化模型的目标在于通过 Bézier 提取算子的映射特性进行 B 样条单元刚度矩阵的统一表达,因此,等几何拓扑优化模型重构的关键在于式(16)中 \mathbf{K}_e^0 的映射关系表达。根据刚度矩阵的定义,结合式(11)所示的映射关系,可得 \mathbf{K}_e^0 的推导式:

$$\mathbf{K}_e^0 = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{e,B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{e,B} d\Omega_e = \mathbf{C}_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{e,Ber}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{e,Ber} d\Omega_e \mathbf{C}_e^T = \mathbf{C}_e \mathbf{K}_e^{Bez} \mathbf{C}_e^T \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_e = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{C}_{e,ext} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{e,ext} \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_e^{Bez} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{e,Ber}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{e,Ber} d\Omega_e$$

式(19)中, $\mathbf{B}_{e,Ber}$ 是关于 Bernstein 基函数的偏导数矩阵。根据图 5 可知,任一 B 样条单元的基函数均可使用相同的 Bernstein 基函数空间进行等效表达,即各个单元的 $\mathbf{B}_{e,Ber}$ 均相等。

根据上述特性及式(20),可推导得到图 9 所示的不同 Bézier 单元刚度矩阵之间的关系:

$$\mathbf{K}_1^{Bez} = \mathbf{K}_2^{Bez} = \dots = \mathbf{K}_{n_e}^{Bez} = \mathbf{K}^{0,Bez} \quad (21)$$

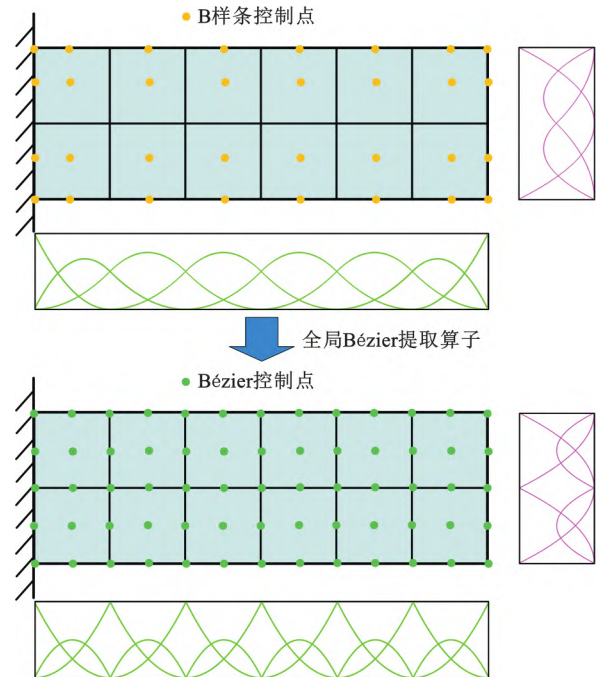


图 9 Bernstein 空间下 6×2 网格的二维悬臂梁设计域

Fig.9 2D cantilever design domain with 6×2

mesh size Bernstein space

通过 Bézier 提取矩阵,图 9 所示的 B 样条单元刚度矩阵表达式如下:

$$\mathbf{K}_e^0 = \mathbf{C}_e \mathbf{K}^{0,Bez} \mathbf{C}_e^T \quad (22)$$

根据等几何分析的等参特性,除了几何空间可使用 Bézier 提取算子进行映射之外,B 样条和 Bézier 控制点的位移向量也可使用 Bézier 提取算子实现二者之间的转换。B 样条控制点位移 \mathbf{u} 到 Bézier 控制点的位移 \mathbf{u}^b 的转换方程如下:

$$\mathbf{u}^b = \mathbf{C}_{\text{ext}}^T \mathbf{u} \quad (23)$$

基于以上的分析推导,对式(15)多重网格等几何拓扑优化模型进行重构,可得

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L) \\ &\min c(\mathbf{x}_l) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}_l) = \\ &\quad \sum_{e=1}^{n_{e,l}} (\mathbf{u}_{e,l})^T \mathbf{E}_{e,l}(\mathbf{x}_{e,l}) \mathbf{K}^{0,\text{Bez}} \mathbf{u}_{e,l}^b \\ &\text{s.t. } \mathbf{K}(\mathbf{x}_l) \mathbf{u}(\mathbf{x}_l) = \\ &\quad \mathbf{C}_l \left(\sum_{e=1}^{n_{e,l}} \mathbf{E}_{e,l}(\mathbf{x}_{e,l}) \mathbf{K}^{0,\text{Bez}} \right) \mathbf{C}_l^T \mathbf{u}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{f} \\ &\quad V(\mathbf{x})/V_0 \leq v_l \\ &\quad \mathbf{x}_l \in \mathbf{R}^{n_{e,l}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中, $\mathbf{u}_{e,l}^b$ 为第 l 层的第 e 个 Bézier 单元的控制点位移向量; \mathbf{C}_l 为第 l 层的全局 Bézier 提取矩阵; \mathbf{x}_l 的元素取值区间为 $[0, 1]$ 。

相对于传统多重网格模型,本文提出的多重网格等几何模型的单元数据存储结构优化如图 10 所示,其中, L 、 n 分别表示多重网格模型的层数与等几何分析域参数空间的维度, \mathbf{KE}_0 为各层统一的标准单元刚度矩阵。传统的多重网格模型每一层都需要进行所有 B 样条单元刚度矩阵的计算和存储,而本文多重网格模型采用标准 Bézier 单元刚度矩阵与相应的 Bézier 提取算子实现任意层级的任一 B 样条单元刚度矩阵的统一表达,大幅减少了多重网格等几何拓扑优化的预处理时耗与单元数据内存的消耗。

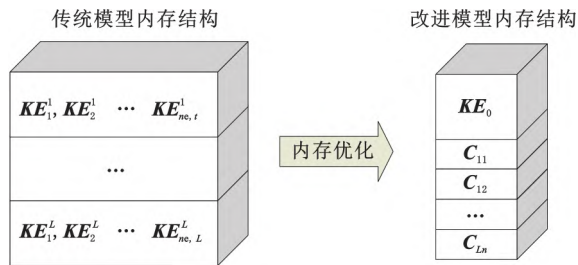


图 10 传统与本文多重网格等几何拓扑优化模型的单元刚度矩阵内存结构对比

Fig.10 Comparison in element stiffness matrix memory structure between traditional and the proposed multi-grid isogeometric topology optimization models

2.3 灵敏度分析

根据式(24)的数学模型以及图 7 所示的算法流程,目标函数相对于第 l 层的任意一个设计变量 $x_{e,l}$ 的灵敏度表达如下:

• 2806 •

$$\frac{\partial c(\mathbf{x}_l)}{\partial x_{e,l}} = - \frac{\partial \mathbf{E}_{e,l}(\mathbf{x}_{e,l})}{\partial x_{e,l}} (\mathbf{u}_{e,l}^b)^T \mathbf{K}^{0,\text{Bez}} \mathbf{u}_{e,l}^b = - p(\mathbf{x}_{e,l})^{p-1} (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_{\min}) (\mathbf{u}_{e,l}^b)^T \mathbf{K}^{0,\text{Bez}} \mathbf{u}_{e,l}^b \quad (25)$$

为避免数值不稳定性现象,本文采用灵敏度过滤器修正目标函数的灵敏度公式:

$$\frac{\partial c(\mathbf{x}_l)}{\partial x_{e,l}} = - \frac{1}{x_{e,l} \sum_{a=1}^{n_{e,l}} w_{a,l}} \sum_{a=1}^{n_{e,l}} w_{a,l} x_{a,l} \frac{\partial c(\mathbf{x}_l)}{\partial x_{a,l}} \quad (26)$$

$$w_{a,l} = \begin{cases} r_{\min} - \text{dist}(e, a) & \text{dist}(e, a) \leq r_{\min} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (27)$$

式中, $w_{a,l}$ 为第 l 层的第 e 个单元与第 a 个单元之间的权重因子; $\text{dist}(e, a)$ 表示第 a 个单元与第 e 个单元的质心之间的欧氏距离; r_{\min} 为由用户定义的过滤器半径。

3 数值算例

本文算例中的程序均运行于 Windows 10 系统的 MATLAB R2021a,所用计算机的配置为 Intel(R)Xeon(R)Gold 5102@2.20 GHz 的 CPU 与 64 GB 内存。图 11 所示为激光雷达测试平台的支撑结构。对于激光雷达的主支撑结构,可使用拓扑优化方法进行优化设计,主支撑厚度较小时可用二维拓扑优化以简化设计与制造流程,主支撑厚度较大时可使用三维拓扑优化。二维和三维的激光雷达主支撑结构设计模型如图 12 所示。

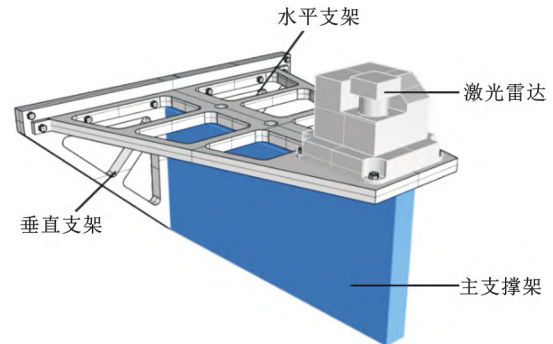


图 11 激光雷达测试平台

Fig.11 LiDAR test platform

图 12a 中二维主支撑结构受到右侧上端向下的外力负载,分别在该二维主支撑结构的计算条件下应用传统多重网格模型^[23]与基于 Bézier 提取的改进多重网格模型。其中,等几何网格的初始尺寸为 40×20 ,多重网格的最大层数为 4。二维主支撑结构的多重网格等几何拓扑优化结果和优化收敛曲线分别如图 13 和图 14 所示,其中, P_{DOF} 为自由度, k 为迭代次数。从图中可知,传统多重网格等几何模型^[23]和所提的改进多重网格等几何模型具有相同的优化收敛过程和优化结果,验证了提出的多重网格 B 样条单元刚度矩阵统一映射法则在二维优化问题中的正确性。

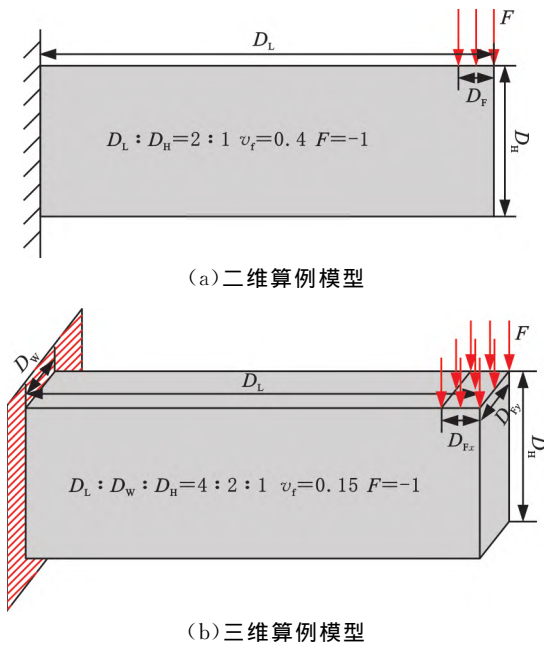


图 12 二维与三维主支撑结构算例模型示意图
Fig.12 Schematic diagram of the 2D and 3D main support frame

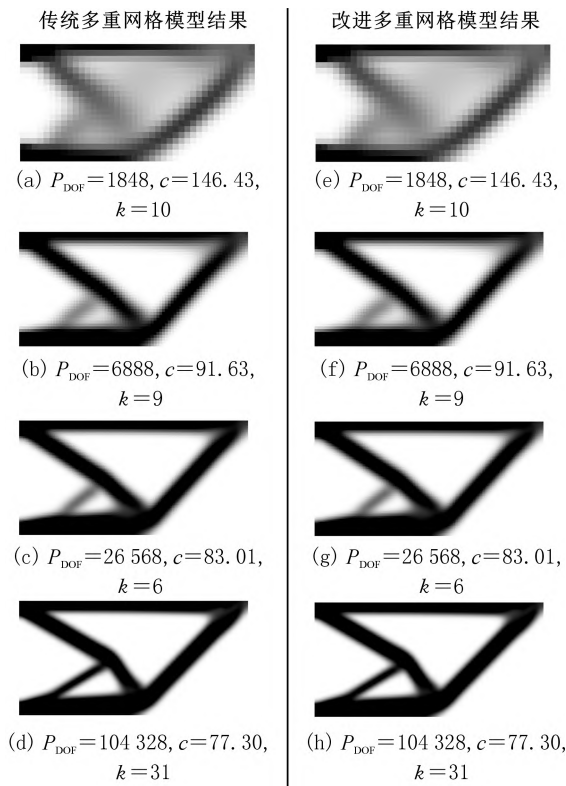


图 13 二维主支撑结构的传统^[23]与改进多重网格模型优化结果对比
Fig.13 Comparison in optimized results for 2D main support frame between the traditional and improved multigrid models

此外,上述两种多重网格等几何拓扑优化模型的各层刚度矩阵计算内存消耗与预处理时间对比结果如图 15 所示。由图 15 可知:在各层刚度矩阵计算的内存消耗上,改进模型较传统模型减

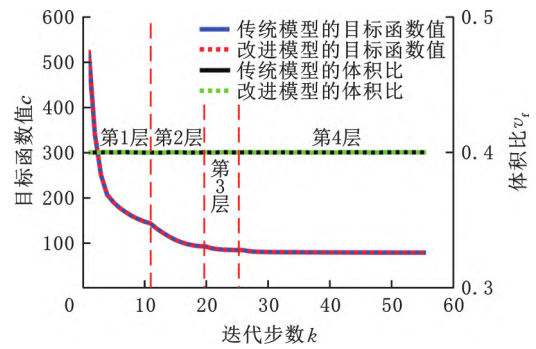


图 14 二维主支撑结构的传统^[23]与改进多重网格模型收敛曲线对比
Fig.14 Comparison in convergence history for 2D main support frame between the traditional and improved multigrid models

少 99.76%~99.96%;在各层的刚度矩阵计算的预处理时间上,改进模型较传统模型缩短 95.89%~99.62%。因此,对于二维拓扑优化问题,所提出的多重网格刚度映射方法可大幅减少多重网格等几何拓扑优化模型各层等几何单元刚度矩阵的内存消耗与预处理时耗。

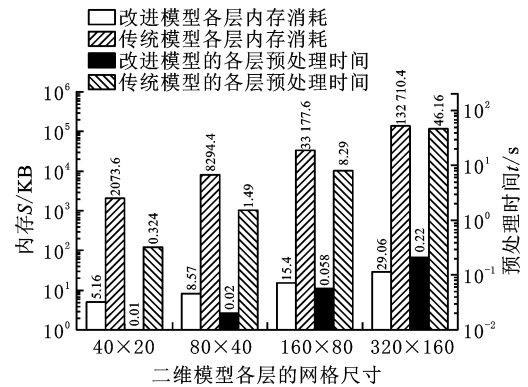


图 15 二维主支撑结构各层等几何刚度矩阵所需的内存空间与预处理时间对比

Fig.15 Comparisons in the required memory and pre-computing time for isogeometric element stiffness matrices on different levels for 2D main support frame

当多重网格的最大层数均为 4 且最大网格尺寸变化时,传统模型与改进模型进行二维主支撑结构优化所需的单元刚度矩阵计算总内存消耗与总预处理时间对比如图 16 所示。在不同网格尺寸下,改进模型刚度矩阵数据的总体内存消耗较传统模型可减少 98.95%~99.48%,总体预处理时间可缩短 99.93%~99.96%。相比于传统模型,改进模型在多种多重网格情况下进行二维优化问题求解所需的等几何单元刚度矩阵的总体内存消耗与总预处理时耗均可大幅减少。

三维主支撑结构算例模型如图 12b 所示,结构的右上部分受到负载的作用。其中,等几何网格的初始尺寸为 40×20×10,多重网格的最大层

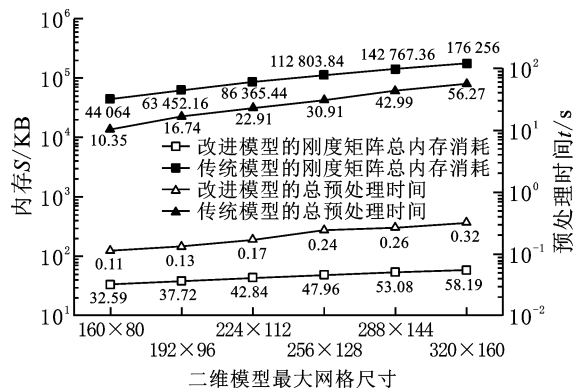


图 16 二维主支撑结构在不同最大网格尺寸下刚度矩阵计算的总内存消耗与总预处理时间变化对比

Fig.16 Comparison in the total memory burden and pre-computing time for element stiffness matrices for 2D main support frame with different maximum mesh sizes

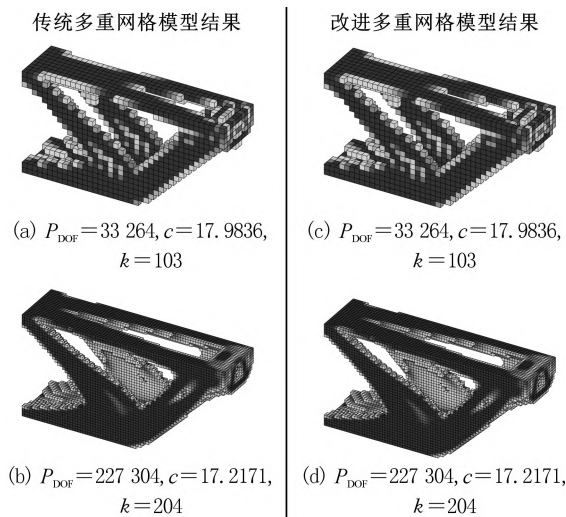


图 17 三维主支撑结构的传统^[23]与改进多重网格等几何拓扑优化模型优化结果对比

Fig.17 Comparison in optimized results for 3D main support frame between the traditional and improved multigrid isogeometric topology optimization models

数为 2。三维主支撑结构等几何拓扑优化的优化结果和优化收敛曲线分别如图 17 和图 18 所示。从图中可知,传统模型和改进模型具有相同的优化收敛过程和优化结果,验证了提出的多重网格 B 样条单元刚度矩阵统一映射法则在三维优化问题中的正确性。

上述两种多重网格等几何拓扑优化模型的各层刚度矩阵计算内存消耗与预处理时间对比结果如图 19 所示。从图 19 中可知:在各层的刚度矩阵计算的内存消耗上,改进模型较传统模型减少 99.97%~99.99%;在各层的刚度矩阵计算的预处理时间上,改进模型较传统模型缩短 94.96%~94.99%。因此,对于三维拓扑优化问题,本文提出的多重网格刚度映射方法可大幅减少多重网格

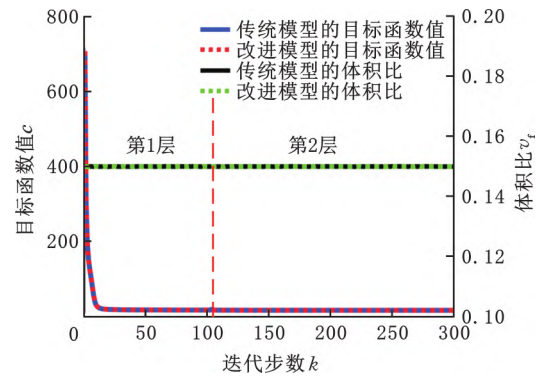


图 18 三维主支撑结构的传统^[23]与改进多重网格模型收敛曲线对比图

Fig.18 Comparison in convergence history between the traditional and improved 3D multigrid models for 3D main support frame

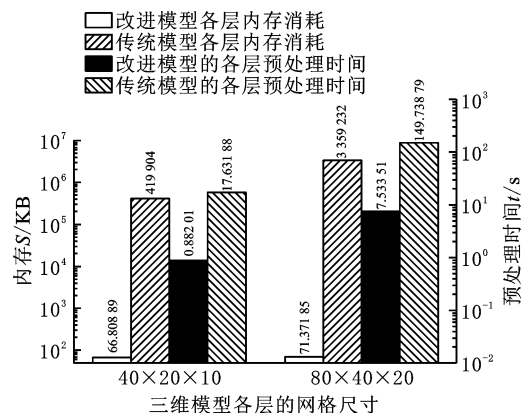


图 19 三维主支撑结构各层等几何刚度矩阵所需的内存空间与预处理时间对比

Fig.19 Comparison in the memory burden and pre-computing time for isogeometric element stiffness matrices on different levels for 3D main support frame

等几何拓扑优化模型的各层等几何单元刚度矩阵的内存消耗与预处理时耗。

当多重网格模型的最大层数为 2 且最大网格尺寸变化时,传统模型与改进模型进行三维主支撑结构优化所需的单元刚度矩阵总内存消耗与总预处理时间对比结果如图 20 所示。在不同网格尺寸下,改进模型单元刚度所需的总内存消耗较传统模型减少 99.98%~99.99%,所需的总体预处理时间缩短 94.97%~95.52%。因此,本文改进模型在不同的多重网格情况下进行三维优化问题求解所需的等几何单元刚度矩阵的总体内存消耗与总预处理时间上都较传统模型有明显优势。

综合优化模型设计分析与实验结果分析,本文提出的改进多重网格模型具有正确性以及内存和预处理时间方面的高效性,具体表现为:本文方案在优化过程与优化结果上与传统方案保持一致,证明了本文方案是传统方案正确有效的替代方案;二维与三维模型的拓扑优化刚度计算中,改

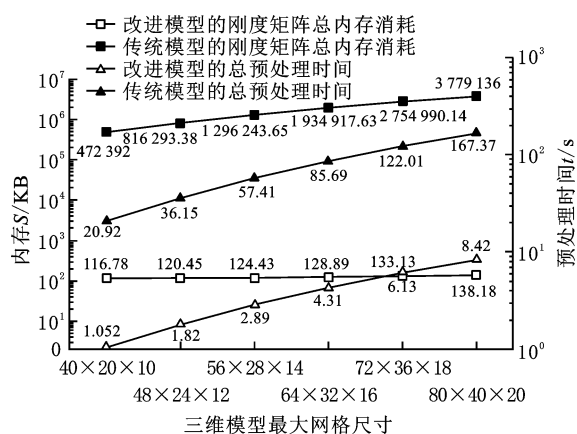


图 20 三维主支撑结构在不同网格尺寸下刚度矩阵计算的总内存消耗与总预处理时间变化对比

Fig.20 Comparison in the total memory burden and pre-computing time for element stiffness matrices for 3D main support frame with different maximum mesh size

改进模型的各层内存消耗与各层预处理时间都较传统模型具有优势;二维与三维模型的拓扑优化刚度计算中,改进模型的总内存消耗与总预处理时间都较传统模型具有优势。

4 结语

本文提出一种基于 Bézier 单元刚度映射的改进多重网格等几何拓扑优化模型,解决了传统的多重网格等几何拓扑优化模型刚度矩阵计算过程存在的单元数据存储内存消耗过大和预处理时间过长的问题。通过 Bézier 提取算子将 B 样条基函数等效表达为具有空间保持特点的 Bernstein 基函数,建立了标准 Bézier 单元刚度矩阵与各层 Bézier 提取算子进行各层级 B 样条单元刚度矩阵的统一表达,实现了多重网格等几何拓扑优化内存结构的优化与 B 样条单元数据预处理过程的简化。在二维和三维拓扑优化问题中,本文提出的模型在数据存储负担与预处理效率上均得到大幅度的改善,进而验证了本文提出的改进多重网格等几何拓扑优化模型的有效性。

参考文献:

- [1] 乔赫廷,张永存,刘书田. 散热结构拓扑优化目标函数的讨论[J]. 中国机械工程, 2011, 22(9):1112-1117.
QIAO Heting, ZHANG Yongcun, LIU Shutian. Discussion on the Objective Function of Topology Optimization of Heat Dissipation Structures [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(9):1112-1117.
- [2] 左孔天,陈立平,王书亭,等. 用拓扑优化方法进行微型柔性机构的设计研究[J]. 中国机械工程,

2004, 15(21):1886-1890.

ZUO Kongtian, CHEN Liping, WANG Shuting, et al. Design and Research of Micro-flexible Mechanisms Using Topology Optimization Method [J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(21):1886-1890.

- [3] 詹阳烈,庄春刚,熊振华,等. 基于水平集方法与 FreeFEM 的弹性结构拓扑优化[J]. 中国机械工程, 2009, 20(11):1326-1331.
ZHAN Yanglie, ZHUANG Chungang, XIONG Zhenhua, et al. Topology Optimization of Elastic Structures Based on Level Set Method and Free FEM [J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(11):1326-1331.
- [4] BENDSOE M P. Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem [J]. Structural Optimization, 1989, 1(4):193-202.
- [5] XIE Y M, STEVEN G P. A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization [J]. Computers & Structures, 1993, 49(5):885-896.
- [6] MEI Y, WANG X. A Level Set Method for Structural Topology Optimization and Its Applications Advances in Engineering Software [J]. 2004, 35(7):415-441.
- [7] LIU J, MA Y. A New Multi-material Level Set Topology Optimization Method with the Length Scale Control Capability [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 329:444-463.
- [8] GUO X, ZHANG W, ZHONG W. Doing Topology Optimization Explicitly and Geometrically—a New Moving Morphable Components Based Framework [J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 2014, 81(8):081009.
- [9] HOU W, GAI Y, ZHU X, et al. Explicit Isogeometric Topology Optimization Using Moving Morphable Components [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 326:694-712.
- [10] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric Analysis; CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39/41):4135-4195.
- [11] 徐岗,李新,黄章进,等. 面向等几何分析的几何计算[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27(4):570-581.
XU Gang, LI Xin, HUANG Zhangjin, et al. Geometric Calculation for Isogeometric Analysis [J]. Journal of Computer Aided Design and Graphics, 2015, 27(4):570-581.

- [12] SEO Y, KIM H, YOUN S. Isogeometric Topology Optimization Using Trimmed Spline Surfaces[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(49):3270-3296.
- [13] DEDÈ L, BORDEN M J, HUGHES T J R. Isogeometric Analysis for Topology Optimization with a Phase Field Model[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2012, 19(3): 427-465.
- [14] WANG Y, BENSON D J. Isogeometric Analysis for Parameterized LSM-based Structural Topology Optimization[J]. Computational Mechanics, 2016, 57(1):19-35.
- [15] XIE X, WANGS T, XU M M, et al. A New Isogeometric Topology Optimization Using Moving Morphable Components Based on R-functions and Collocation Schemes[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 339: 61-90.
- [16] ZHUANG C, XIONG Z, DING H. Bézier Extraction Based Isogeometric Approach to Multi-objective Topology Optimization of Periodic Microstructures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2021, 122(23): 6827-6866.
- [17] AAGE N, ANDREASSEN E, LAZAROV B, et al. Giga-voxel Computational Morphogenesis for Structural Design[J]. Nature, 2017, 550(7674): 84-86.
- [18] XIE X, YANG A, WANG Y, et al. Fully Adaptive Isogeometric Topology Optimization Using MMC Based on Truncated Hierarchical B-splines[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63:2869-2887.
- [19] XIE X, YANG A, JIANG N, et al. Topology Optimization Using Fully Adaptive Truncated Hierarchical B-splines[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 96:131-151.
- [20] LIN C Y, CHOU J N. A Two-stage Approach for Structural Topology Optimization[J]. Advances in Engineering Software, 1999, 30(4):261-271.
- [21] STAINKO R. An Adaptive Multilevel Approach to the Minimal Compliance Problem in Topology Optimization[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2006, 22(2):109-118.
- [22] DU B, ZHAO Y, YAO W, et al. Multiresolution Isogeometric Topology Optimisation Using Moving Morphable Voids[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2020, 122(1): 1119-1140.
- [23] WANG Y, LIAO Z, YE M, et al. An Efficient Isogeometric Topology Optimization Using Multi-level Mesh, MGCG and Local-update Strategy[J]. Advances in Engineering Software, 2020, 139: 102733.
- [24] BORDEN M J, SCOTT M A, EVANS J A, et al. Isogeometric Finite Element Data Structures Based on Bézier Extraction of NURBS[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 87:15-47.
- [25] HENNIG P, MÜLLER S, KÄSTNER M. Bézier Extraction and Adaptive Refinement of Truncated Hierarchical NURBS[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 305: 316-339.
- [26] HENNIG P, AMBATI M, LORENZIS D, et al. Projection and Transfer Operators in Adaptive Isogeometric Analysis with Hierarchical B-Splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 334:313-336.
- [27] ANGELLA D D, REALI A. Efficient Extraction of Hierarchical B-Splines for Local Refinement and Coarsening of Isogeometric Analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 367:113131.
- [28] TOSHNIWAL D, HUGHES T J R. Isogeometric Discrete Differential Forms; Non-uniform Degrees, Bézier Extraction, Polar Splines and Flows on Surfaces[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 376:113576.

(编辑 袁兴玲)

作者简介:丁延冬,男,1999年生,硕士研究生。研究方向为等几何拓扑优化。E-mail:dingyd@hust.edu.cn。谢贤达(通信作者),男,1994年生,博士后研究人员。研究方向为等几何拓扑优化及其工业软件。E-mail:xiandaxie@hust.edu.cn。