

混合 B 样条实体模型的等几何拓扑优化

杨佳明¹, 赵 罡^{1,2}, 王 伟^{1,3}, 郭马一¹, 杜孝孝¹

- (1. 北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 北京 100191;
2. 航空高端装备智能制造技术工业和信息化部重点实验室, 北京 100191;
3. 北京市高效绿色数控加工工艺及装备工程技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 等几何拓扑优化方法将经典拓扑优化理论中的有限元分析过程更改为等几何分析计算, 从而提高了拓扑优化的效率与稳定性。针对现有的等几何拓扑优化方法在处理复杂实体结构优化问题时具有一定的局限性, 提出一种非结构化样条实体等几何拓扑优化方法。基于混合 B 样条构造技术, 在非结构化六面体网格上构造具有复杂结构的样条实体, 并将其作为拓扑优化问题的设计域。用于描述这一样条实体的基函数被直接应用于材料密度分布的表达以及等几何分析计算。在数值算例中, 该方法表现出应用于复杂结构时的良好稳定性和鲁棒性。研究成果对等几何拓扑优化方法应用于实际工程问题具有一定的参考意义。

关 键 词: 拓扑优化; 等几何分析; 体参数化; B 样条; 非结构化样条

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGJ.2095-302X.2021030501

文献标识码: A

文章编号: 2095-302X(2021)03-0501-10

Isogeometric topology optimization of blended B-spline solid model

YANG Jia-ming¹, ZHAO Gang^{1,2}, WANG Wei^{1,3}, GUO Ma-yi¹, DU Xiao-xiao¹

- (1. School of Mechanical Engineering & Automation, Beihang University, Beijing 100191, China;
2. Key Laboratory of Aeronautics Smart Manufacturing, Ministry of Industry and Information Technology, Beijing 100191, China;
3. Beijing Engineering Technological Research Center of High-Efficient & Green CNC Machining Process and Equipment, Beijing 100191, China)

Abstract: For isogeometric topology optimization (ITO) methods, isogeometric analysis (IGA) is adopted for topology optimization to address the limitation of the finite element method, which can improve the efficiency and stability of the optimization. However, it is of great challenge for existing ITO methods to manage arbitrarily shaped design domains, especially in three-dimensional solid problems. Therefore, a new ITO method was proposed to handle unstructured solid models. A spline solid with complex structures was obtained from an unstructured hexahedral mesh based on the blended B-spline construction. The basis functions describing the unstructured spline solid were applied to the representation of density distribution and the calculation of IGA. Several examples proved the flexibility and robustness of the proposed method in dealing with complex structures. These results may shed light on the application of ITO in practical engineering problems.

Keywords: topology optimization; isogeometric analysis; volume parameterization; B-spline; unstructured splines

收稿日期: 2020-09-17; 定稿日期: 2020-10-15

Received: 17 September, 2020; Finalized: 15 October, 2020

基金项目: 国家自然科学基金项目(61972011, 61572056)

Foundation items: National Natural Science Foundation of China (61972011, 61572056)

第一作者: 杨佳明(1995-), 男, 北京人, 博士研究生。主要研究方向为等几何拓扑优化、T 样条。E-mail: yangjiaming@buaa.edu.cn

First author: YANG Jia-ming (1995-), male, PhD candidate. His main research interests cover isogeometric topology optimization and T-splines.
E-mail: yangjiaming@buaa.edu.cn

通信作者: 王 伟(1978-), 男, 河北衡水人, 副教授, 博士。主要研究方向为 CAD/CAE、智能计算等。E-mail: jrjt@buaa.edu.cn

Corresponding author: WANG Wei (1978-), male, associate professor, Ph.D. His main research interests cover CAD/CAE, intelligence computation, etc.
E-mail: jrjt@buaa.edu.cn

拓扑优化是一种重要的工程结构优化方法。目前常见的拓扑优化方法包括:均匀化方法^[1]、固体各向同性惩罚微结构模型(solid isotropic microstructures with penalization, SIMP)法^[2-3]、渐进结构优化方法^[4]、水平集方法^[5-7]、移动组件法^[8-9]等。由于这些方法可以在设计域中按照给定约束条件高效地搜索最优的设计结构,因此被广泛应用于各类工程问题。其中, AAGE 等^[10]将千兆体素级的 SIMP 法应用于全尺寸机翼的结构设计并将该成果发表于《Nature》期刊上,体现了拓扑优化技术的应用潜力。

这些经典的拓扑优化方法一般都会通过有限元方法来实现结构响应的计算。但传统的有限元方法存在以下问题和局限性:①低阶连续性的有限元有可能影响优化计算的准确性并导致数值计算的不稳定性^[11];②繁琐耗时的有限元前处理过程割裂了几何设计与力学分析过程,从而使拓扑优化难以作为一种设计工具完全融入到现有的计算机辅助设计系统之中。

HUGHES 等^[12-13]推广的等几何分析方法作为有限元方法,被认为有可能突破上述局限性。其核心思想是直接利用 CAD 中描述几何模型的样条基函数来表达力学分析中的未知场。由于该方法统一了设计与分析过程中模型的基础表达形式,避免了模型转换引起的误差,因此具有诸多优势。国内外很多学者将其应用于拓扑优化,从而形成了等几何拓扑优化方法。其中, SEO 等^[14]最先提出在拓扑优化中使用等几何分析方法及裁剪样条曲面;随后, HASSANI 等^[15]提出了在点密度 SIMP 法基础上引入 NURBS 基函数的等几何拓扑优化方法; QIAN^[16]将设计域嵌入到一个 B 样条空间中,证明了基于样条函数的材料密度分布表示方法不仅具有良好的效率和鲁棒性,并且具有固有的过滤性质。国内 WANG 和 BENSON^[17]将等几何分析引入到水平集方法中,并针对等几何拓扑优化方法提出了一种高效的计算框架^[18]; XIE 等^[19-20]探索了等几何拓扑优化在移动组件法中的应用; GAO 等^[21-22]对基于 NURBS 的等几何拓扑优化方法及相关应用开展了深入的研究。

可以看到,现有的等几何拓扑优化研究大多基于经典的样条构造方法,如 B 样条、NURBS。而这些张量积样条方法受制于矩形的拓扑结构。尽管可以使用裁剪、拼接等造型方法进行处理,但要保证复杂设计域模型的水密性依旧是一件极具挑战的任务。现有的等几何拓扑优化方法大多只能在简单的矩形设计域上进行验证,制约了在复杂问题上的探索。尤其对于三维实体问题,一些在复杂平面

设计域问题中表现良好的方法难以直接推广至实体层面,如 ZHAO 等^[23]提出的基于非结构化 T 样条曲面的等几何拓扑优化方法。

针对上述问题,本文将一种可以在非结构化体网格上构造样条实体的方法引入等几何拓扑优化。由于允许奇异边(点)的存在,因此可以对高亏格的复杂结构进行表达,突破传统方法的矩形拓扑限制,更符合拓扑优化过程的需求。本文使用 WEI 等^[24]提出的混合 B 样条构造方法。此方法构造的样条函数不仅具有优良的性质,如非负性、规范性、线性无关性,并且构造过程可靠,具有很好的适应性。本文基于此方法构造非结构化的样条实体模型,并给出了在此类模型上实现等几何拓扑优化的方法,通过算例验证了其可行性,及对复杂实体结构的处理能力。该研究成果有望推动等几何拓扑优化方法在实际工程问题中的应用与推广。

1 混合 B 样条实体构造方法

本节简要回顾 B 样条及非结构化六面体网格上的混合 B 样条构造方法,相关细节可以参考文献[24-25]。

1.1 B 样条

给定一个非递减的实数序列作为节点矢量, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, 其中 n 为 B 样条基函数的个数, p 为基函数的多项式次数。当节点距 $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n+p$ 的长度相等时,称 Ξ 为均匀节点矢量。

按照 Cox-de Boor 递归形式,可以将单变量 B 样条基函数 $\{N_{i,p}\}_{i=1}^n$ 定义为

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

当 $p \geq 1$ 时,即

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

双变量/三变量 B 样条基函数可以通过单变量 B 样条基函数的张量积得到。

根据 B 样条基函数的性质,在节点区间内部, $N_{i,p}$ 是 C^∞ 连续的;在节点处, $N_{i,p}$ 则是 C^{p-r} 连续的,其中 r 为节点的重度。因此当 $p=3$ 时,可以通过不同的重节点情况分别构造 $C^2(r=1)$, $C^1(r=2)$ 和 $C^0(r=3)$ 连续的 B 样条基函数。下文讨论的混合 B 样条方法,即混合不同连续性的 3 次 B 样条基函数。

1.2 混合 B 样条构造方法

考虑一个具有均匀节点矢量的三-三次 B 样条实体 $S(\xi)$, 可以表示为

$$S(\xi) = P^T B^v(\xi), B^v(\xi) = [B_1^v(\xi), \dots, B_n^v(\xi)]^T \quad (3)$$

其中, P 为控制顶点矩阵; B_i^v 为第 i 个控制顶点所对应的基函数, 易知 B_i^v 是 C^2 连续的 B 样条基函数。

通过在 $S(\xi)$ 的每一个节点处插入重节点, 使所有节点的重度提升为 2, 则可以得到新的控制顶点矩阵 Q^b 以及相应的基函数向量 B^b 。易知 B_i^b 为 C^1 连续的 B 样条基函数。类似的, 继续插入节点使每个节点的重度为 3, 可以得到控制顶点矩阵 Q^0 以及基函数向量 B^0 。此时 B_i^0 为 C^0 连续的 B 样条基函数, 即贝奇尔基函数。图 1 为单变量情况下上述过程的示意图, 可以看到存在下列等价关系

$$S(\xi) = P^T B^v(\xi) = (Q^b)^T B^b(\xi) = (Q^0)^T B^0(\xi) \quad (4)$$

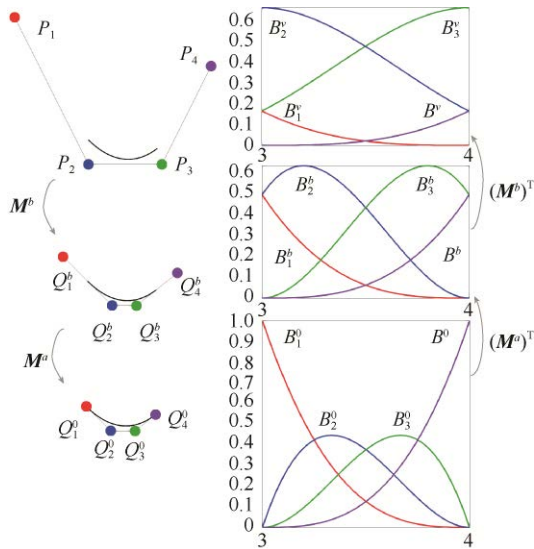


图 1 不同连续性 B 样条基函数/控制点之间的转换关系

Fig. 1 Relationship between B-spline basis and control points with different continuity

混合 B 样条构造所针对的主要问题是: 当给定 C^2 控制顶点以及一部分 C^0 , C^1 控制顶点时, 如何确定 $S(\xi)$ 的表达式。即给定 $Q^b = [Q_a^b, Q_p^b]^T$ 和 $Q^0 = [Q_a^0, Q_p^0]^T$ 中的一部分控制顶点 $[Q_a^b, Q_a^0]^T$, 称其为激活的控制点, 求 $P_{all} = [P_a, Q_a^b, Q_a^0]^T$ 以及基函数向量 $N(\xi)$, 使得

$$S(\xi) = P_{all}^T N(\xi) \quad (5)$$

其中, P_a 为 P 中的一部分控制顶点。

文献[24]给出了一种混合构造方式使得 $N(\xi)$

具有非负性、规范性等优良性质。其核心思想是使用截断(truncation)机制^[26]从高连续的样条基函数中截去已经存在(激活)的子函数的贡献, 从而实现基函数的混合。

由节点插入算法^[27]可知, P , Q^b 和 Q^0 之间存在线性变换关系

$$\begin{aligned} Q^b &= M^b P, \quad Q^0 = M^a Q^b, \\ Q^0 &= M^a M^b P = MP \end{aligned} \quad (6)$$

其中, M^b 和 M^a 可以直接通过节点插入算法得到。将其代入式(4)可以得到基函数之间的线性关系

$$B^v = (M^b)^T B^b, B^b = (M^a)^T B^0, B^v = M^T B^0 \quad (7)$$

于是可以看到, B^b 为 B^v 的子函数, B^0 为 B^b 和 B^v 的子函数。每一个父函数 B_i^v (或 B_i^b) 都可以通过 $(M^b)^T$ (或 $(M^a)^T$, M^T) 中的一行系数唯一确定, 称这一行系数为 B_i^v (或 B_i^b) 的坐标。当子函数 B_j^0 (或 B_j^b) 激活时, 使用截断机制将其从父函数中截去, 等价于将父函数坐标的第 j 个分量置为 0。因此, 从 B^v (或 B^b) 中截去 B_j^0 (或 B_j^b) 等价于将 M^T (或 $(M^a)^T$, $(M^b)^T$) 中的第 j 列全部置为 0。图 2 为一个从 B_i^v 中截去 B_j^0 的实例。

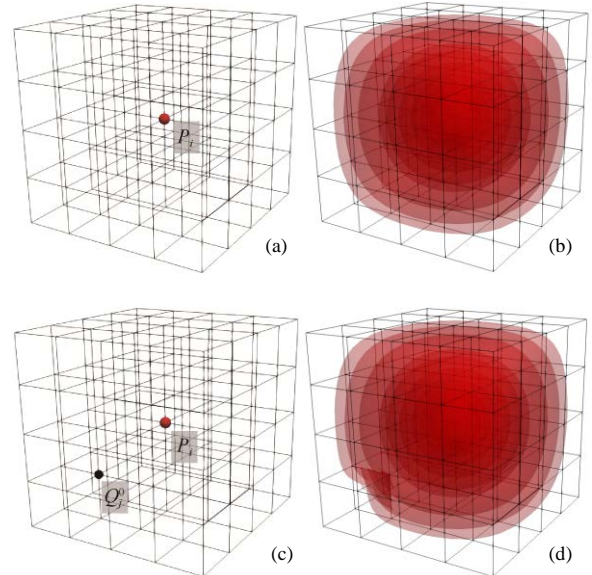


图 2 三变量 B 样条基函数的截断((a)一个 C^2 控制点; (b)基函数 B_i^v 的等值面; (c) C^2 控制点周围存在一个激活的 C^0 控制点; (d)从 B_i^v 中截取 B_j^0 后得到的截断基函数的等值面)

Fig. 2 Truncation of a trivariate B-spline basis ((a) A C^2 control point; (b) Iso-surface of B_i^v ; (c) A C^2 control point around a C^0 control point; (d) Iso-surface of B_i^v after truncation)

本文考虑混合 B 样条构造方法中的一类特殊情况,即激活的控制顶点中只包含 C^0 控制顶点 Q_a^0 。记 Q_a^0 中控制点所对应的基函数为 B_a^0 。那么此时只需考虑从 B^v 中截去 B_a^0 。

首先,将式(7)中 B^v 与 B^0 的关系改写为

$$B^v = M^T B^0 = [M_a^T \quad M_p^T] \begin{bmatrix} B_a^0 \\ B_p^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

于是,从 B^v 中截去 B_a^0 得到的截断基函数 B_t^v 可以表示为

$$B_t^v = [0 \quad M_p^T] \begin{bmatrix} B_a^0 \\ B_p^0 \end{bmatrix} = M_p^T B_p^0 \quad (9)$$

由 B 样条基函数的局部支撑性可知, M_p^T 中可能存在整行都为 0 的情况,则这一行所对应的基函数 $B_{t,i}^v$ 在 $S(\xi)$ 上恒为零,因此也应被去除,即

$$\begin{bmatrix} B_{ta}^v \\ B_{t0}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{pa}^T \\ 0 \end{bmatrix} B_p^0 = \begin{bmatrix} M_{pa}^T B_p^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

将 B_{ta}^v 所对应的 C^2 控制顶点记为 P_a ,可将 $N(\xi)$ 表示为

$$N(\xi) = \begin{bmatrix} B_{ta}^v \\ B_{t0}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_{pa}^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_a^0 \\ B_p^0 \end{bmatrix} = TB^0 \quad (11)$$

其中, I 为单位矩阵。同时可以将 $S(\xi)$ 表示为

$$S(\xi) = P_{\text{all}}^T N = [P_a^T (Q_a^0)^T] \begin{bmatrix} B_{ta}^v \\ B_{t0}^v \end{bmatrix} = P_{\text{all}}^T TB^0 \quad (12)$$

文献[24]将上述情况称为 C02 构造。除此之外,根据激活的 C^0 , C^1 控制顶点不同还存在 C012 和 C02i 构造形式。相比于 C012 和 C02i,本文采用的 C02 方法尽管在奇异点邻域的连续性上存在不足,但具有构造形式简单以及基函数局部线性无关等优势。

1.3 C02 混合 B 样条实体构造方法

一个非结构化六面体网格中包含了顶点、边、面和体单元 4 类元素。定义边(顶点)的价为:包含这条边(顶点)的体单元的个数。定义奇异边为:价不为 4 的内部边以及价不为 1 或 2 的边界边。定义奇异点为:奇异边的端点。

如果一个体单元的顶点中包含了奇异点,则称这个体单元为不规则单元 E^I 。其余的体单元称为规则单元 E^R 。规则单元又可分为 2 类:1-邻域内存在不规则单元的规则单元称为规则过渡单元 E^{RT} ,否则称为规则非过渡单元 E^{RN} 。图 3 为一个包含三价

奇异边的简单非结构化体网格,并通过颜色区分了不同的单元类型。

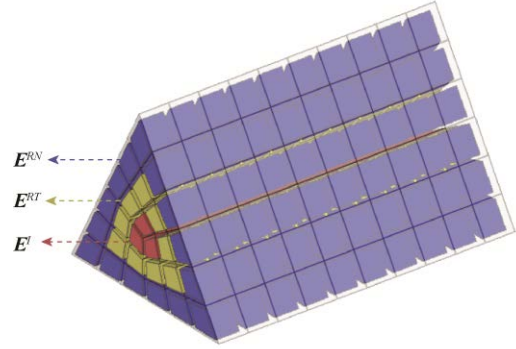


图 3 非结构化体网格及 3 种单元类型

Fig. 3 An unstructured volume mesh and three kinds of elements

样条实体的构造过程即确定每一个单元 e 的样条几何映射 $S^{(e)}: \tilde{\Omega}^{(e)} \rightarrow \Omega^{(e)}$ 的过程,其中 $\tilde{\Omega}^{(e)}$ 为单元的参数域, $\Omega^{(e)} \subset \mathbb{R}^3$ 为物理域。

1.3.1 不规则单元

对于一个不规则单元 $e^I \in E^I$,使用六面体网格的贝奇尔提取算法^[25,28],可以根据网格顶点计算得到该单元的贝奇尔控制顶点 $Q^{(e^I),0}$ 。于是,将 $S^{(e^I)}(\xi)$ 直接定义为

$$S^{(e^I)}(\xi) = (Q^{(e^I),0})^T B^0 \quad (13)$$

其中, B^0 包含了 64 个三-三次贝奇尔基函数。

1.3.2 规则非过渡单元

对于一个规则非过渡单元 $e^{RN} \in E^{RN}$,直接将其视为一个均匀三-三次 B 样条实体块,将其 1-邻域单元的所有网格顶点 $P_{\text{local}}^{(e^{RN})}$ 作为控制顶点,于是 $S^{(e^{RN})}(\xi)$ 可以表示为

$$S^{(e^{RN})}(\xi) = (P_{\text{local}}^{(e^{RN})})^T B^v \quad (14)$$

其中, $B^v(\xi)$ 由定义在均匀节点矢量上的 3 变量 3 次 B 样条基函数组成。由式(7)可将其表示为贝奇尔基函数的形式,即

$$S^{(e^{RN})}(\xi) = (P_{\text{local}}^{(e^{RN})})^T M^T B^0 \quad (15)$$

1.3.3 规则过渡单元

对于一个规则过渡单元 $e^{RT} \in E^{RT}$,首先按式(14)处理为一个均匀三-三次 B 样条实体块,即

$$S^{(e^{RT})}(\xi) = (P_{\text{local}}^{(e^{RT})})^T B^v \quad (16)$$

由于 e^{RT} 的 1-邻域内存在非规则单元,而非规则单元在第 1.3.1 节中被提取为贝奇尔单元的形式。

因此, 如图 4 所示, 在 e^{RT} 中存在激活的 C^0 控制顶点(红色实心点)。于是本文使用第 1.2 节的 C02 方法进行基函数的混合, 即使用式(12)得到 $S^{(e^{RT})}(\xi)$ 的表达式为

$$S^{(e^{RT})}(\xi) = (P_{\text{all}}^{(e^{RT})})^T T^{(e^{RT})} B^0 \quad (17)$$

其中, $P_{\text{all}}^{(e^{RT})}$ 和 $T^{(e^{RT})}$ 需要通过 C02 构造方法获得, 其组成受到 e^{RT} 相邻非规则单元的相对位置以及 1-邻域内非规则单元个数的影响。

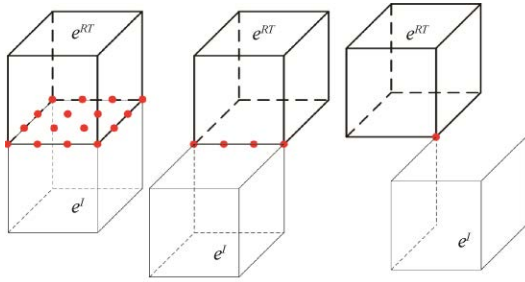


图 4 e^{RT} 与相邻非规则单元之间不同的相对位置关系
Fig. 4 Different relative positions between an e^{RT} and its adjacent irregular elements

1.3.4 统一构造形式

综上, 由式(13)、式(15)和式(17), 可将非结构化六面体网格上的 C02 混合 B 样条实体构造总结为

$$S^{(e)}(\xi) = \begin{cases} (Q^{(e),0})^T B^0, & e \in E^I \\ (P_{\text{local}}^{(e)})^T M^T B^0, & e \in E^{RN} \\ (P_{\text{all}}^{(e)})^T T^{(e)} B^0, & e \in E^{RT} \end{cases} \quad (18)$$

可以发现, 3 类单元均可写为统一的形式, 即

$$S^{(e)}(\xi) = (P^{(e)})^T N^{(e)}(\xi), \quad N^{(e)}(\xi) = C^{(e)} B^0, \quad (19)$$

$$P^{(e)} = \begin{cases} Q^{(e),0}, & e \in E^I \\ P_{\text{local}}^{(e)}, & e \in E^{RN} \\ P_{\text{all}}^{(e)}, & e \in E^{RT} \end{cases}, \quad C^{(e)} = \begin{cases} I, & e \in E^I \\ M^T, & e \in E^{RN} \\ T^{(e)}, & e \in E^{RT} \end{cases}$$

本文将 $N^{(e)}(\xi)$ 统一称为 C02 混合 B 样条基函数。可以看到 $N^{(e)}(\xi)$ 均可直接写为贝奇尔基函数的线性组合, 于是可使用其相关性简化 $N^{(e)}(\xi)$ 的计算。如, 在等几何分析中, $N^{(e)}(\xi) = N^{(e)}(\xi, \eta, \zeta)$ 相对于参数坐标的偏导数可转化为贝奇尔基函数的偏导数计算, 即

$$\frac{\partial N^{(e)}}{\partial \xi} = C^{(e)} \frac{\partial B^0}{\partial \xi} \quad (20)$$

1.3.5 连续性

按照式(19)构造的样条实体模型, 在规则单元间为 C^2 连续, 在非规则单元间为 C^0 连续, 在非规

则单元和规则单元间为 C^0 连续。C02 混合 B 样条实体的连续性分析的简要证明如下:

(1) 讨论非规则单元 E^I 间的连续性。任取 2 个相邻的非规则单元 $e_i^I, e_j^I \in E^I$ 。由六面体网格的贝奇尔提取算法^[25]可知, $S^{(e_i^I)}$ 和 $S^{(e_j^I)}$ 在其交界面上具有相同的贝奇尔控制顶点, 因此其间至少达到 C^0 连续。

(2) 讨论非规则单元 E^I 和规则单元 E^R 间的连续性。该问题等价于非规则单元 E^I 与规则过渡单元 E^{RT} 间的连续性。任取 $e^{RT} \in E^{RT}$, 及一个与其相邻的非规则单元 $e^I \in E^I$, 根据式(11)和式(12)对式(17)进行展开并整理, 可以得到 $S^{(e^{RT})}(\xi) =$

$$[(Q_a^0)^T (M_{pa} P_a)^T] \begin{bmatrix} B_a^0 \\ B_p^0 \end{bmatrix},$$

发现 $S^{(e^{RT})}$ 等价于一个以 Q_a^0 和 $M_{pa} P_a$ 作为控制顶点的贝奇尔单元。设 $S^{(e^I)}$ 与 $S^{(e^{RT})}$ 交界面上的贝奇尔控制顶点为 Q_i^0 , 则根据 1.3.3 节的构造过程可知一定有 $Q_i^0 \subset Q_a^0$ 。因此 $S^{(e^I)}$ 和 $S^{(e^{RT})}$ 在交界面上具有相同的贝奇尔控制顶点, 其间至少达到 C^0 连续。

(3) 讨论规则单元 E^R 间的连续性。该问题可以划分为 2 个方面: ①非过渡单元 E^{RN} 间的连续性; ②过渡单元 E^{RT} 与相邻规则单元(包括 E^{RN} 和 E^{RT})间的连续性。其中, 由 1.3.2 节的构造过程可知, 任取 2 个相邻的非过渡单元 $e_i^{RN}, e_j^{RN} \in E^{RN}$, 则 $S^{(e_i^{RN})}$ 和 $S^{(e_j^{RN})}$ 可以构成均匀三-三次 B 样条实体, 因此其间可以达到 C^2 连续。

为了讨论过渡单元与其相邻规则单元间的连续性, 引入以下结论:

引理^[24]1. 对于任意一个固定的单元, 其混合 B 样条表达式(式(12))等价于这个单元的 B 样条表达式(式(4))。

因此, 有式(17)与式(16)等价。而对于任意的 $e_i^{RT} \in E^{RT}$, 在式(16)的情况下, $S^{(e_i^{RT})}$ 与其相邻的过渡单元和非过渡单元都可以构成均匀三-三次 B 样条实体, 因此过渡单元与其相邻的规则单元间具有 C^2 连续性。综上, E^R 之间都可以达到 C^2 连续。

为了使模型插值于边界, 本文将边界单元均按照非规则单元处理。因此, 此时边界曲面为 C^0 连续曲面。为了提高边界曲面的连续性, 可使用非结构化四边形网格的 C012 混合构造方法对其进行处理。当存在原始的 B-rep 模型时, 也可通过调整边界控制顶点使其恢复原始曲面的光顺性。

2 等几何拓扑优化

本节对混合 B 样条实体的等几何拓扑优化方法进行介绍。为了简化问题的讨论同时又不失一般性, 本文着重考虑拓扑优化问题中的最小化柔顺度问题。

2.1 基于混合 B 样条基函数的材料密度分布

首先, 为了构造密度法拓扑优化中的材料密度分布, 本文赋予控制顶点矩阵 $\mathbf{P}^{(e)}$ 中的每一个控制顶点一个新的系数 $\rho_i \in [0, 1]$ 。该系数代表了该控制顶点的材料密度, 则单元的材料密度分布可表达为

$$\chi^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) = (\rho^{(e)})^T \mathbf{N}^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (21)$$

其中, $\rho^{(e)} = [\rho_1^{(e)}, \rho_2^{(e)}, \dots, \rho_{n_p^{(e)}}^{(e)}]^T$ 为单元的材料密度系数向量; $n_p^{(e)}$ 为 $\mathbf{P}^{(e)}$ 中所包含的控制顶点的个数; $\mathbf{N}^{(e)}(\xi, \eta, \zeta)$ 为式(19)中的 C02 混合 B 样条基函数。

由于 $\mathbf{N}^{(e)}$ 具有良好的规范性和非负性, 因此 $\chi^{(e)}$ 的值被控制在 0~1 之间变化。这一点符合 SIMP 方法的要求, 因此可以使用 SIMP 法的形式定义单元的杨氏模量 $E^{(e)}(\chi^{(e)}(\xi, \eta, \zeta))$ 为

$$E^{(e)}(\chi^{(e)}) = E_{\min} + (\chi^{(e)})^s (E_0 - E_{\min}) \quad (22)$$

其中, E_0 为材料本身的杨氏模量; E_{\min} 为设定的最小刚度值, 用以避免刚度矩阵奇异的情况; s 为惩罚因子。

2.2 等几何分析

考虑线弹性问题, 对于单元的位移场 $\mathbf{u}^{(e)}$, 可表示为

$$\mathbf{u}^{(e)}(\xi) = (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{N}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_p^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)} \mathbf{q}_i^{(e)} \quad (23)$$

其中, $\mathbf{q}_i^{(e)}$ 为单元 e 的第 i 个控制顶点的位移。

在等几何方法中, 可以将静态载荷下线弹性问题的刚度方程表示为

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (24)$$

其中, \mathbf{K} 为刚度矩阵; \mathbf{U} 和 \mathbf{F} 分别为与控制顶点相对应的位移向量和外载荷向量。 \mathbf{K} 需要通过组装所有单元的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^{(e)}$ 来获得。在物理域 $\Omega^{(e)}$, 单元刚度矩阵可表示为

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^{(e)} \quad (25)$$

其中, \mathbf{B} 为几何函数(应变-位移)矩阵; \mathbf{D} 为空间问题的弹性系数矩阵。本文在参数域 $\tilde{\Omega}^{(e)}$ 中完成 $\mathbf{K}^{(e)}$ 的积分运算, 即

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\tilde{\Omega}^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\tilde{\Omega}^{(e)} \quad (26)$$

其中, \mathbf{J} 为几何映射 $\mathbf{S}^{(e)}$ 的雅可比矩阵。同时, \mathbf{B} 可

以通过式(23)对物理域坐标的偏导求得; \mathbf{D} 则通过式(22)表示为

$$\mathbf{D}(\chi^{(e)}(\xi)) = [E_{\min} + [\chi^{(e)}(\xi)]^s (E_0 - E_{\min})] \mathbf{D}_0 \quad (27)$$

其中, \mathbf{D}_0 为杨氏模量等于 1 时的弹性系数矩阵。

使用高斯积分法来完成式(26)的数值积分运算, 则可表示为

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_{gp}} [\mathbf{B}^T(\xi_i) \mathbf{D}(\chi^{(e)}(\xi_i)) \mathbf{B}(\xi_i) |\mathbf{J}(\xi_i)| \omega_i] \quad (28)$$

其中, n_{gp} 为高斯积分点个数; $\xi_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 和 ω_i 为第 i 个高斯积分点及相应的权重。可以看到 $\chi^{(e)}$ 在每一个积分点都需要进行计算, 该方法相比于以单一密度值代表整个单元密度的方法更为精确。

2.3 拓扑优化

给定一个按照第 1.3 节构造的样条实体作为设计域 Ω , 综合第 2.1 节给出的材料密度分布函数构造方法及第 2.2 节介绍的等几何分析方法, 可以得到等几何拓扑优化中最小化柔顺度问题的表达式, 即

$$\begin{cases} \text{Find: } \rho_i (i=1, 2, \dots, n) \\ \text{Min: } c(\chi) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ \text{s.t.: } \begin{cases} g(\chi) = \frac{1}{V_0} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} \chi^{(e)} d\Omega^{(e)} - \gamma \leq 0 \\ \mathbf{K}(\chi) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ 0 \leq \rho_i \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (29)$$

其中, 设计变量 ρ_i 为控制顶点相关的材料密度系数; 目标函数 $c(\chi)$ 为结构的柔顺度; $g(\chi)$ 为体积约束; χ 为由单元材料密度分布函数组成的结构总体密度分布函数; n_e 为 Ω 所包含的单元数; $V_0 = \int_{\Omega} d\Omega$ 是设计域总体积; γ 为给定的容许体积分。 \mathbf{K} , \mathbf{U} 和 \mathbf{F} 的定义同式(24)。并且, ρ_i 被限制在 0~1 之间。

2.4 灵敏度分析

本文使用伴随法^[16,29]来求解目标函数 $c(\chi)$ 相对于设计变量 ρ_i 的一阶偏导数。首先在式(29)的 $c(\chi)$ 表达式中添加一个值为 0 的函数, 得到

$$c(\chi) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} - \lambda^T (\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}) \quad (30)$$

其中, λ 为一个实值向量, 称为伴随向量。由式(30)对设计变量求导并整理, 可以得到

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_i} = (\mathbf{F}^T - \lambda^T \mathbf{K}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} \quad (31)$$

且需伴随向量 λ 满足以下伴随方程

$$\mathbf{F}^T - \lambda^T \mathbf{K} = 0 \quad (32)$$

则目标函数的灵敏度, 即式(31)可写为

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_i} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} \quad (33)$$

其中, $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i}$ 为通过对每个单元上的 $\frac{\partial \mathbf{K}^{(e)}}{\partial \rho_i}$ 进行组装得到。并将式(27)代入式(26)对设计变量求导可得

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{(e)}}{\partial \rho_i} = \int_{\Omega^{(e)}} s N_i^{(e)} [\chi^{(e)}]^{s-1} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{B}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B} |J| d\tilde{\Omega}^{(e)} \quad (34)$$

由式(29)还可得到体积约束 $g(\chi)$ 相对于设计变量 ρ_i 的灵敏度为

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_i} = \frac{1}{V_0} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \rho_i} d\Omega^{(e)} = \frac{1}{V_0} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} N_i^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (35)$$

2.5 优化流程

本文使用移动渐近线 (method of moving asymptotes, MMA)^[30] 方法来求解上述优化问题, 总体优化流程如图 5 所示。首先, 输入数据包括基于 C02 混合 B 样条方法构造的样条实体设计域, 以及优化所需的基本参数, 如体积分数 γ 、惩罚因子 s 等。然后, 按照第 2.1 节构造基于混合 B 样条实体的材料密度分布并初始化设计变量 ρ 。在每一次迭代中, 按照第 2.2 节中的等几何分析方法计算结构力学响应, 从而得到目标函数及约束方程的值。使用第 2.4 节的公式计算灵敏度, 并使用 MMA 方法根据灵敏度更新设计变量。按照此流程不断迭代直到满足收敛条件, 将优化得到的材料密度分布进行后处理输出。

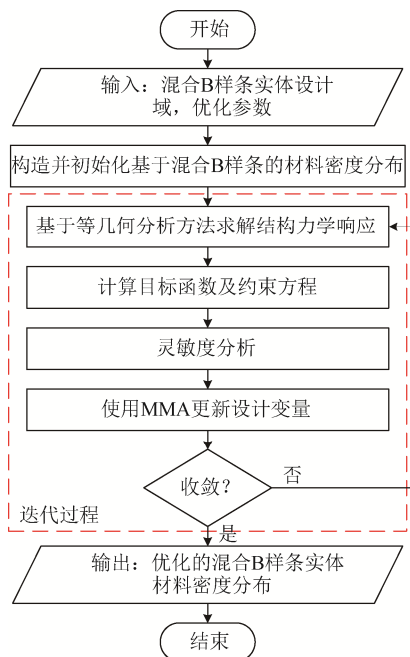


图 5 混合 B 样条实体等几何拓扑优化流程图

Fig. 5 Flowchart of the isogeometric topology optimization based on the blended B-spline method

3 数值算例

通过 3 个数值算例对本文提出的等几何拓扑优化方法的有效性进行验证。其中所有算例的杨氏模量 $E_0 = 1$, $E_{\min} = 1.0e-9$ 。材料的泊松比设为 0.3, 惩罚因子 $s=3$ 。每一个体单元都采用 $3 \times 3 \times 3$ 的高斯积分。收敛准则为: 目标函数的相对变化量小于 $1.0e-4$ 或迭代次数超过 100。

3.1 算例 1

本例为一个带孔悬臂梁的优化问题。设计域和边界条件如图 6(a)所示, 其中 $L=60$, $H=20$, $W=4$, $R=20/3$ 。可以看到, 模型的一侧固定, 另一侧的底边中点受到一个 y 轴负方向载荷, 大小为 1。并将体积分数 γ 取 30%, 设计变量的初始值为 0.3。

图 6(b)为用于构造此设计域样条实体模型的非结构化六面体网格, 通过彩色点标出了模型表面的部分奇异点。可以看到本文所使用的构造方法可以支持边界奇异点, 以及奇异点相邻的情况。图 6(c)和 6(d)分别给出了本文构造的 C02 混合 B 样条实体及其控制顶点分布。此模型的控制顶点数(同时也为设计变量数)为 17 745, 单元数为 540。可以看到模型内部包含了一些奇异边(点)。当直接使用传统张量积样条方法进行构造时, 需要考虑多块拼接、裁剪等问题。而本文使用的 C02 混合构造方法在处理时则较为简洁。

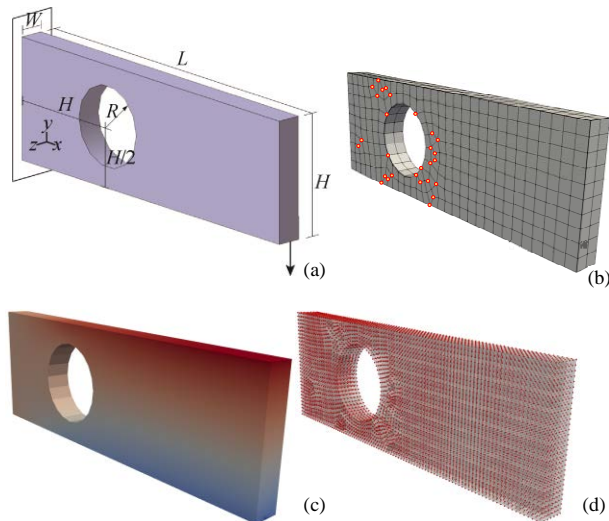


图 6 算例 1 的设计域及混合 B 样条实体模型((a)设计域; (b)用于构造混合 B 样条实体的非结构化六面体网格; (c)构造的混合 B 样条实体模型及等几何分析结果(x 向位移); (d)样条实体模型的控制点)

Fig. 6 The design domain and blended B-spline solid model of example 1 ((a) The design domain; (b) The unstructured volume mesh that used to construct the blended B-spline solid; (c) The blended B-spline solid model and IGA results (x -displacement); (d) Control points of the blended B-spline solid model)

等几何拓扑优化结果如图 7(a)所示, 最终目标函数值为 60.283 8, 迭代次数为 78。作为对比, 图 7(b)中展示了 SIMP 方法的优化结果。该模型的单元数为 22 680, 最终目标函数值为 66.488 1。相比于 SIMP 方法, 本文方法以较少的单元数得到了较好的优化结果(更低的柔顺度)。主要是由于在 SIMP 方法中, 材料密度分布通过离散单元的形式来表达, 每一个单元对应一个单一的密度值。而本文方法以连续的样条函数来表达材料密度分布, 每个单元都具有内部的密度分布函数, 且单元间密度分布连续, 因此可以通过较少的单元表达复杂的材料密度分布结构。

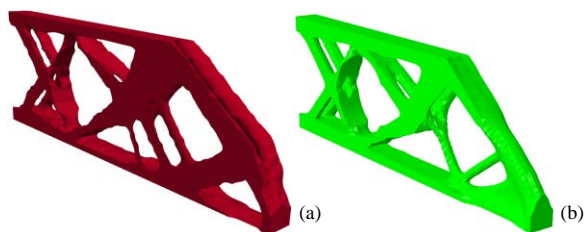


图 7 算例 1 的拓扑优化结果((a)混合 B 样条实体等几何拓扑优化结果; (b) SIMP 法优化结果)

Fig. 7 The optimized results of example 1 ((a) The optimized result of the blended B-spline method; (b) The optimized result of the SIMP method)

图 8 为本例中等几何拓扑优化的收敛曲线以及部分中间结果。可以看到整个优化过程的收敛速度较快, 且较为光滑, 没有出现明显的振荡。说明本文的方法具有较好的收敛性质。

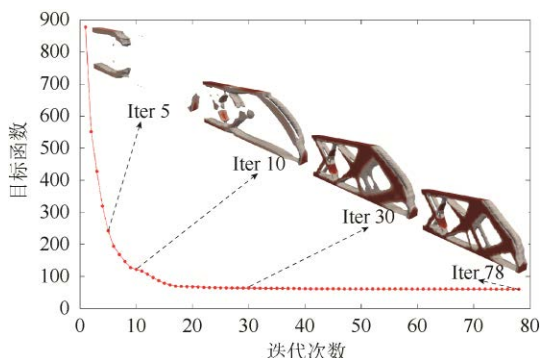


图 8 算例 1 的优化收敛曲线

Fig. 8 Convergence history of example 1 with some intermediate results

3.2 算例 2

本例为一个复杂实体结构的拓扑优化问题。设计域及边界条件如图 9(a)所示, 图中红色圆柱面固定, 3 个角上的蓝色平面施加垂直于平面向外的均

布载荷, 大小为 1。本文将体积分数 γ 设为 40%, 设计变量的初始值为 0.4。

图 9(b)为用于构造此设计域样条实体模型的非结构化六面体网格。在图 9(c)中展示了在样条实体构造过程中识别的不同单元类型。其中, 红色为非规则单元, 白色为规则单元。规则单元间具有 C^2 连续性。图 9(d)为最终构造的 C02 混合 B 样条实体及等几何分析结果。可以看到位移场在模型内部具有较高的连续性。该模型共有 162 303 个控制顶点, 如图 10(a)所示。如果完全采用贝奇尔提取方法来处理此样条实体模型, 则控制顶点数为 197 895, 如图 10(b)所示。由于 C02 构造方法在模型内部具有更高的连续性, 因此使用了更少的控制顶点, 其分布更为稀疏, 同时减少了设计变量的规模。

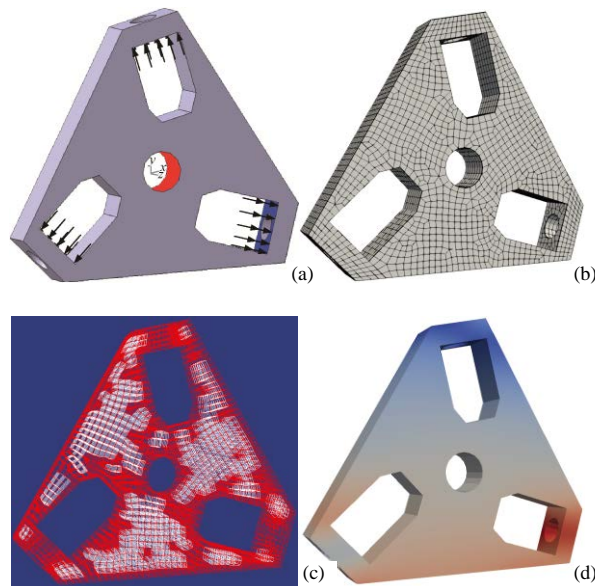


图 9 算例 2 的设计域及混合 B 样条实体模型((a)设计域; (b)用于构造混合 B 样条实体的非结构化六面体网格; (c)不同的单元类型: 红色为非规则单元, 白色为规则单元; (d)构造的混合 B 样条实体模型及等几何分析结果(x 向位移))

Fig. 9 The design domain and blended B-spline solid model of example 2 ((a) The design domain; (b) The unstructured volume mesh that used to construct the blended B-spline solid; (c) Different kinds of elements: irregular elements in red and regular elements in white; (d) The blended B-spline solid model and IGA results (x-displacement))

图 11 为本例中等几何拓扑优化的结果, 最终目标函数值为 112.159, 迭代次数为 100。图 12 为目标函数收敛曲线、体积分数收敛曲线, 以及部分中间结果。可以看到, 同算例 1, 在本例中优化收敛速度较快, 无明显振荡, 说明本文方法在处理复杂结构时也具有较好的稳定性和鲁棒性。

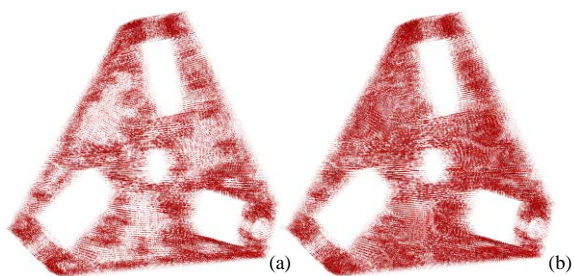


图 10 混合 B 样条实体与完全采用贝奇尔提取方法时的控制顶点分布对比, 图中每一个红色点表示一个控制顶点, 红色点越密集的区域控制顶点数目越多((a)混合 B 样条实体的控制顶点分布; (b)完全采用贝奇尔提取方法时的控制顶点分布)

Fig. 10 Comparison of the distribution of control points between the blended B-spline method and the Bézier extraction method. Each red point in the figure represents a control point. The area with denser red points cloud contains more control points ((a) Distribution of the blended B-spline control points; (b) Distribution of the Bézier control points)



图 11 算例 2 的等几何拓扑优化结果

Fig. 11 The optimized result of example 2

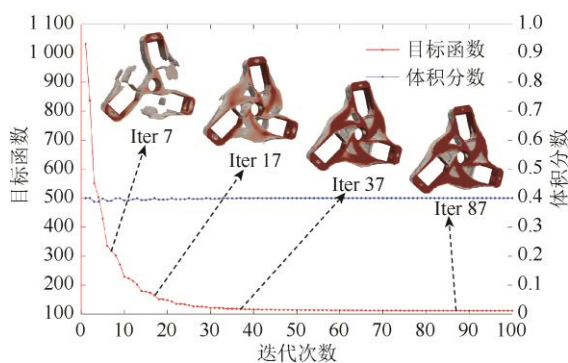


图 12 算例 2 的优化收敛曲线

Fig. 12 Convergence history of example 2

3.3 算例 3

本例为一个多工况复杂实体结构的拓扑优化问题。设计域及 2 个工况状态如图 13(a)和图 13(b)所示。图中 4 个红色圆柱面固定。在工况 1 时两侧悬臂的蓝色圆柱面区域分别受到 z 轴正向和负向的载荷, 大小为 1。在工况 2 时两侧悬臂的蓝色圆柱面区域分别受到 x 轴正向和负向的载荷, 大小为 1。

取体积分数约束 γ 为 30%。

按照本文方法所构造的样条实体如图 13(c)所示, 图中同时显示了工况 1 下的等几何分析结果。此模型的控制顶点分布如图 13(d)所示, 总个数为 110 283。可以看到由于此模型包含了多个孔洞结构, 因此如果直接使用张量积 NUBRS 实体进行构造将会遇到很大困难。

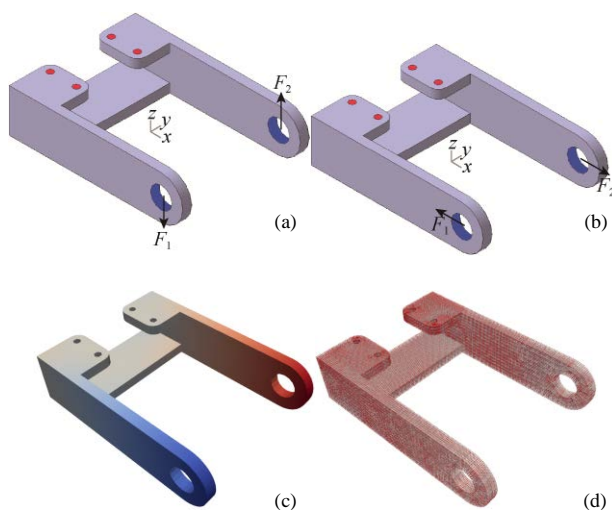


图 13 算例 3 的设计域及混合 B 样条实体模型((a)设计域及工况 1; (b)设计域及工况 2; (c)构造的混合 B 样条实体模型及等几何分析结果(z 向位移); (d)样条实体模型的控制点)

Fig. 13 The design domain and blended B-spline solid model of example 3 ((a) The design domain and the first load case; (b) The design domain and the second load case; (c) The blended B-spline solid model and IGA results (z -displacement); (d) Control points of the blended B-spline solid model)

在优化过程中本文设定目标函数为 2 种工况下柔顺度的平均值。等几何拓扑优化结果如图 14 所示, 最终目标函数值为 141.173, 其中工况 1 的柔顺度为 267.901, 工况 2 为 14.445, 迭代次数为 100 次。此算例进一步证明了该方法在复杂实体结构拓扑优化问题中具有良好的适应性。



图 14 算例 3 的等几何拓扑优化结果

Fig. 14 The optimized result of example 3

4 结 束 语

本文针对现有等几何拓扑优化方法难以处理复杂实体结构设计域这一问题,提出了一种基于混合 B 样条构造的非结构化样条实体等几何拓扑优化方法。此方法可在非结构化六面体网格上构造具有一定内部连续性的样条实体。本文将构造得到的样条基函数直接用于描述拓扑优化问题中的材料密度分布,以及结构响应计算中的未知场。给出了等几何拓扑优化表达式以及相应的灵敏度计算公式。最后,通过 3 个算例验证了本文方法在处理复杂结构优化问题时的有效性和稳定性。在这一研究成果基础之上,有望形成面向实际工程中复杂模型的等几何拓扑优化设计工具。在后续研究中,如何提高奇异点邻域的连续性将会是一个关键的研究方向。

参考文献 (References)

- [1] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224.
- [2] ZHOU M, ROZVANY G I N. The COC algorithm, part II: topological, geometry and generalized shape optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89(1-3): 309-336.
- [3] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69(9-10): 635-654.
- [4] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. *Computers & Structures*, 1993, 49(5): 885-896.
- [5] SETHIAN J A, WIEGMANN A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 163(2): 489-528.
- [6] WANG M Y, WANG X, GUO D. A level set method for structural topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(1-2): 227-246.
- [7] ALLAIRE G, JOUVE F, TOADER A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 194(1): 363-393.
- [8] GUO X, ZHANG W S, ZHONG W L. Doing topology optimization explicitly and geometrically - a new moving morphable components based framework[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, 81(8): 081009.
- [9] ZHANG W S, SONG J F, ZHOU J H, et al. Topology optimization with multiple materials via Moving Morphable Component (MMC) method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 113(11): 1653-1675.
- [10] AAGE N, ANDREASSEN E, LAZAROV B S, et al. Giga-voxel computational morphogenesis for structural design[J]. *Nature*, 2017, 550: 84-86.
- [11] SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1998, 16(1): 68-75.
- [12] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(39-41): 4135-4195.
- [13] COTTRELL J A, HUGHES T J R, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: toward Integration of CAD and FEA[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2009: 1-18.
- [14] SEO Y D, KIM H J, YOUN S K. Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(49-52): 3270-3296.
- [15] HASSANI B, KHANZADI M, TAVAKKOLI S M. An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, 45(2): 223-233.
- [16] QIAN X P. Topology optimization in B-spline space[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 265(1): 15-35.
- [17] WANG Y J, BENSON D J. Isogeometric analysis for parameterized LSM-based structural topology optimization[J]. *Computational Mechanics*, 2016, 57(1): 19-35.
- [18] WANG Y, LIAO Z Y, YE M, et al. An efficient isogeometric topology optimization using multilevel mesh, MGCG and local-update strategy[J]. *Advances in Engineering Software*, 2020, 139: 102733.
- [19] XIE X D, WANG S T, XU M M, et al. A new isogeometric topology optimization using moving morphable components based on R-functions and collocation schemes[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 339(1): 61-90.
- [20] GAI Y D, ZHU X F, ZHANG Y J, et al. Explicit isogeometric topology optimization based on moving morphable voids with closed B-spline boundary curves[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 61: 963-982.
- [21] GAO J, LUO Z, XIAO M, et al. A NURBS-based Multi-Material Interpolation (N-MMI) for isogeometric topology optimization of structures[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 81: 818-843.
- [22] GAO J, XUE H P, GAO L, et al. Topology optimization for auxetic metamaterials based on isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 352(1): 211-236.
- [23] ZHAO G, YANG J M, WANG W, et al. T-splines based isogeometric topology optimization with arbitrarily shaped design domains[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2020, 123(3): 1033-1059.
- [24] WEI X D, ZHANG Y J, TOSHNIWAL D, et al. Blended B-spline construction on unstructured quadrilateral and hexahedral meshes with optimal convergence rates in isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 341(1): 609-639.
- [25] WEI X D, ZHANG Y J, HUGHES T J R. Truncated hierarchical tricubic C0 spline construction on unstructured hexahedral meshes for isogeometric analysis applications[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2017, 74(9): 2203-2220.
- [26] GIANNELLI C, JÜTTLER B, SPELEERS H. THB-splines: the truncated basis for hierarchical splines[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2012, 29(7): 485-498.
- [27] BOEHM W. Inserting new knots into B-spline curves[J]. *Computer Aided Design*, 1980, 12(4): 199-201.
- [28] SCOTT M A, SIMPSON R N, EVANS J A, et al. Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 254: 197-221.
- [29] BENDSØE M P, SIGMUND O. Topology optimization: theory, methods, and applications[M]. Heidelberg: Springer, 2004: 9-28.
- [30] SVANBERG K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373.