

# Badanie momentu bezwładności - doświadczenie 104 (sala 217)

Sebastian Maciejewski 132275 i Jan Techner 132332

24 listopada 2017

## 1 Wstęp teoretyczny

W opisie dynamiki ruchu postępowego pojawia się pojęcie bezwładności związane z masą  $m$  poruszającego się ciała. W przypadku ruchu obrotowego znajomość masy ciała jest niewystarczająca, istotny jest również jej przestrzenny rozkład względem osi obrotu. Wielkością fizyczną zawierającą informacje o masie ciała i jej przestrzennym rozkładzie względem osi obrotu jest moment bezwładności  $I$ .

Dla pojedynczego punktu materialnego o masie  $m$  wirującego wokół osi oddalonej od niego o odległość  $r$  możemy zapisać następującą zależność na moment bezwładności:

$$I = mr^2 \quad (1)$$

W przypadku układu  $N$  punktów materialnych sztywno połączonych ze sobą względem osi obrotu, zwanej osią bezwładności, moment bezwładności układu jest równy sumie momentów bezwładności poszczególnych punktów materialnych.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (2)$$

gdzie  $m_i$  jest masą  $i$ -tego punktu materialnego, a  $r_i$  jego odległością od osi bezwładności.

### Twierdzenie Steinera

Jeżeli chcemy obliczyć moment bezwładności względem dowolnej osi nieprzechodzącej przez środek masy bryły, przydatna staje się twierdzenie Steinera. Mówi ono, że jeżeli moment bezwładności bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez jej środek masy równa się  $I_0$  to moment bezwładności tej bryły obracającej się względem innej osi równoległej do osi przechodzącej przez jej środek masy wynosi:

$$I = I_0 + md^2, \quad (3)$$

gdzie  $m$  jest masą bryły, a  $d$  odległością między osiami.

### Opis doświadczenia

W ćwiczeniu zostaną wyznaczone momenty bezwładności stalowego pręta oraz dysku. Dodatkowym zadaniem będzie eksperymentalne potwierdzenie twierdzenia Steinera. Do badań posłuży wahadło skrętne złożone ze stabilnej podstawy oraz pionowej osi osadzonej na łożyskach o bardzo małym tarciu. Oś oraz podstawa połączone są przy pomocy spiralnej sprężyny, która umożliwi wahania skrętne. Na końcu osi znajduje się śruba umożliwiająca mocowanie na niej brył.

Wahadło skrętne jest szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego. Jeżeli założymy, że wychylenia wahadła są niewielkie (w naszym przypadku ok  $90^\circ$ ) oraz zaniedbamy siły oporu, jego ruch można opisać jako ruch harmoniczny prosty. W takim przypadku okres  $T$  drgań wahadła można zapisać następująco:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (4)$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności bryły zamocowanej na osi wahadła, a  $D$  jest parametrem charakterystycznym dla danej sprężyny - jej momentem kierującym.

Aby wyliczyć moment bezwładności bryły zamocowanej na wahadle zastosujemy przekształcone równanie (4), wynik pomiaru okresu drgań  $T$  oraz wyznaczony moment kierujący  $D$ :

$$I = D \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (5)$$

W omawianym ćwiczeniu moment kierujący sprężyny wyznaczmy mierząc okresy wahań pręta obciążonego dwoma ciężarkami. Moment bezwładności układu złożonego z pręta z dwoma ciężarkami, umieszczonymi symetrycznie w odległości  $r$  od osi obrotu, można zapisać następującym wzorem:

$$I = I_P + 2m_C r^2, \quad (6)$$

gdzie  $I_P$  jest momentem bezwładności pręta, a  $m_C$  jest masą każdego ciężarka.

Na podstawie wzoru (5) moment bezwładności pręta zamocowanego na osi możemy zapisać równaniem:

$$I_P = D \left( \frac{T_P}{2\pi} \right)^2, \quad (7)$$

gdzie  $T_P$  jest okresem drgań wahadła obciążonego prętem (bez ciężarków).

Podstawiając do równania (5) wzory (6) i (7), otrzymujemy zależność:

$$D \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 = 2m_C r^2 + D \left( \frac{T_P}{2\pi} \right)^2, \quad (8)$$

która po przekształceniu przybiera postać:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m_C}{D} r^2 + T_P^2. \quad (9)$$

Dokonując w powyższym równaniu podstawień,  $y = T^2$ ,  $x = r^2$ ,  $a = 8\pi^2 m_C / D$  oraz  $b = T_P^2$ , uzyskuje się zależność typu  $y = ax + b$ . Jest to funkcja liniowa, gdzie wartość  $a$  jest współczynnikiem kierunkowym prostej, a  $b$  punktem przecięcia z osią  $y$ . Stąd też moment kierujący wahadła można obliczyć ze wzoru:

$$D = \frac{8\pi^2 m_C}{a}. \quad (10)$$

W celu wyznaczenia momentu bezwładności pręta można skorzystać z pomiaru okresu dla nieobciążonego pręta z równania (7). Chcąc wyznaczyć moment bezwładności dysku należy zamocować jego środek na osi, a następnie zmierzyć okres drgań wahadła. Korzystając z równania (5) wyznaczamy doświadczalną wartość momentu bezwładności dysku. Chcąc porównać uzyskane wartości doświadczalne z wartościami teoretycznymi należy zważyć obie bryły, zmierzyć długość pręta oraz średnicę dysku. Wartości teoretyczne momentów bezwładności obliczymy z równań:

$$I = \frac{1}{12} m l^2, \quad (11)$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2, \quad (12)$$

gdzie  $m$  jest masą pręta,  $l$  - długością pręta,  $M$  - masą dysku,  $R$  - promieniem dysku.

Żeby potwierdzić twierdzenie Steinera, dysk będziemy przykręcać na osi dla różnych odległości  $d$  od środka tarczy. Następnie dla każdego położenia wyznaczmy okres drgań wahadła a potem korzystając z równania (5), moment bezwładności dysku. Otrzymany wynik porównamy z teoretycznym momentem bezwładności, który obliczymy na podstawie równania:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 + M d^2. \quad (13)$$

## 2 Wyniki pomiarów

Masa ciężarków, masa i długość pręta, odległości między nacięciami na pręcie zostały zmierzone na początku doświadczenia i wynosiły:

Mierzona wartość	Pomiar	Dokładność pomiarowa
Masa ciężarków $m_C$	0.259 [kg]	$\pm 0.001$ [kg]
Masa pręta	0.136 [kg]	$\pm 0.001$ [kg]
Masa dysku $M$	0.435 [kg]	$\pm 0.001$ [kg]
Długość pręta $l$	0.62 [m]	$\pm 0.001$ [m]
Średnica dysku $2R$	0.32 [m]	$\pm 0.001$ [m]
Odległość między nacięciami	0.05 [m]	$\pm 0.001$ [m]

Dokładność pomiaru czasu ze względu na pomiar manualny wynosi  $\pm 0.1s$

Odległość od osi obrotu [cm]	Próba 1 [s]	Próba 2 [s]	Próba 3 [s]
0	12.45	12.50	12.60
5	14.21	14.16	14.37
10	18.39	18.46	18.62
15	24.04	24.09	24.00
20	30.20	30.06	29.75
25	36.29	36.47	36.53
30	42.87	42.83	42.91

Tablica 1: Pomiary czasu  $t$  5 wahanć pręta przy różnych odległościach ciężarków od osi obrotu

Odległość od osi obrotu [cm]	Próba 1 [s]	Próba 2 [s]	Próba 3 [s]
0	14.14	14.18	14.23
2	14.26	14.22	14.18
4	14.59	14.41	14.58
6	15.77	15.86	15.98
8	17.27	17.14	17.27
10	19.08	18.97	18.99
12	20.96	20.81	20.76
14	22.80	22.84	22.83

Tablica 2: Pomiary czasu  $t$  5 wahanć dysku przy różnych odległościach od osi obrotu

### 3 Opracowanie wyników

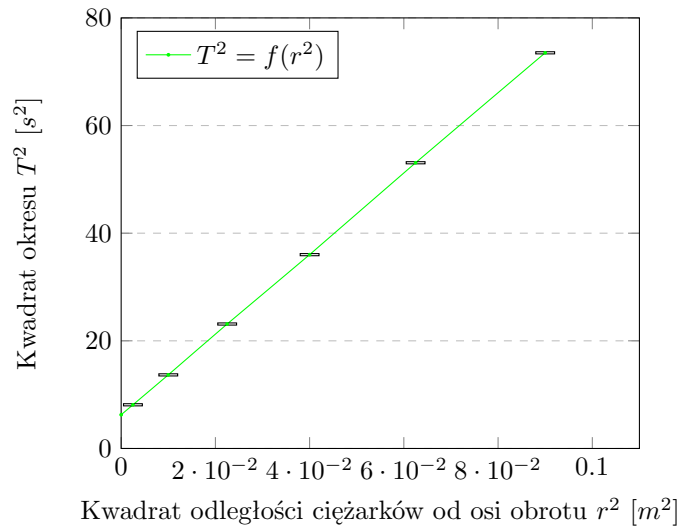
#### 3.1 Wyznaczenie momentu kierującego sprężyny

Dla każdego położenia ciężarków na pręcie wyznaczamy średni czas  $t_{sr}$  5 wahnięć, oraz średni okres jednego wahnięcia  $T$ , korzystając z zależności  $T = \frac{1}{5}t_{sr}$ . Wyniki przedstawiono w Tablicy 3.

	$r$ [m]	$t_{sr}$ [s]	$T$ [s]
Ciężarki 5 cm od osi	0.05	14.247	2,849
Ciężarki 10 cm od osi	0.10	18.490	3,698
Ciężarki 15 cm od osi	0.15	24.043	4,809
Ciężarki 20 cm od osi	0.20	30.003	6,001
Ciężarki 25 cm od osi	0.25	36.430	7,286
Ciężarki 30 cm od osi	0.30	42.870	8,574

Tablica 3:

Następnie, korzystając z obliczonych wartości, na rysunku 1 przedstawiono wykres zależności kwadratu okresu od kwadratu odległości ciężarków od osi obrotu  $T^2 = f(r^2)$ .



Rysunek 1: Zależności kwadratu okresu od kwadratu odległości ciężarków od osi obrotu

Posługując się metodą regresji liniowej opisanej za pomocą wzoru

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (14)$$

gdzie  $x_i$  to kolejne kwadraty odległości ciężarków od osi obrotu, a  $y_i$  to kwadraty okresu dla danej odległości, wyznaczamy współczynnik nachylenia prostej  $a$ , oraz jego niepewność.

$$a = 747.958 \left[ \frac{s^2}{m^2} \right] \quad (15)$$

Następnie korzystając z równania (10), wyliczamy moment kierujący  $D$ , oraz jego niepewność:

$$D = \frac{8\pi^2 m_C}{a} \left[ \frac{kg}{\frac{s^2}{m^2}} \right] = 0.02734087 \left[ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right] \quad (16)$$

—do tego momentu ready—

Błąd wyznaczenia wielkości  $a$ :

$$\Delta a = \sqrt{\frac{n(\sum y_i^2 - a\sum x_i y_i - b\sum y_i)}{(n-2)(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}} = 2,852$$

Błąd wyznaczenia  $D$  obliczamy stosując metodę różniczek logarytmicznej

$$\Delta D = \left( \frac{\Delta m_c}{m_c} + \frac{\Delta a}{a} \right) * D = \left( \frac{0,001}{0,259} + \frac{2,852}{770,663} \right) * 0,026535 = 0,0002$$

W celu obliczenia momentów bezwładności z danych pomiarowych posłużymy się równaniem :

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m_c}{D} r^2 + T_p^2 \quad (17)$$

gdzie  $T$  jest okresem drgań naszego wahadła,  $m_c$  jest zmierzoną masą ciężarka,  $r$  jest odległością ciężarków (lub środka dysku) od osi obrotu, zaś  $D$  jest momentem kierującym.

Równanie (3) oznacza, że zależność kwadratu okresów  $T$  od kwadratów odległości  $r$  jest liniowa (co w przybliżeniu widać na wykresie). Można zatem policzyć współczynnik nachylenia prostej przy pomocy metody regresji liniowej (gdzie  $x = r^2$  i  $y = T^2$ ). Współczynnik  $a$  wyraża się wzorem:

$$D = \frac{kg}{\frac{s^2}{m^2}} = \frac{kg * m^2}{s^2}$$

	$a$	$D$
pomiar	770,66250527943	0,0265353772617267
dokładność	2,852	0,0002
po zaokrągleniu	$770,7 \pm 2,9$	$0,265 \pm 0,0002$

Tablica 4: Współczynnik nachylenia linii  $a$  i moment kierujący  $D$  wraz z dokładnościami  $\Delta a$  i  $\Delta D$

TODO

	Śr. Czas pomiaru $t$	Śr. Okres $T$	Teoretyczny	Zmierzony	Niepewność
Pręt	12.517	2,503	0,004357	0,004212	0,003000
Cieżarki 5 cm od osi	14.247	2,849	0,005652	0,005457	0,006000
Cieżarki 10 cm od osi	18.490	3,698	0,009537	0,009192	0,006000
Cieżarki 15 cm od osi	24.043	4,809	0,016012	0,015542	0,006000
Cieżarki 20 cm od osi	30.003	6,001	0,025077	0,024203	0,006000
Cieżarki 25 cm od osi	36.430	7,286	0,036732	0,035682	0,006000
Cieżarki 30 cm od osi	42.870	8,574	0,050977	0,049412	0,006000
Dysk	14.185	2,837	0,005568	0,005409	0,003000
Dysk 2 cm od osi	14.22	2,844	0,005742	0,005437	0,006000
Dysk 4 cm od osi	14.525	2,905	0,006264	0,005674	0,006000
Dysk 6 cm od osi	15.87	3,174	0,007134	0,006771	0,006000
Dysk 8 cm od osi	17.225	3,445	0,008352	0,007979	0,006000
Dysk 10 cm od osi	19.015	3,803	0,009918	0,009719	0,006000
Dysk 12 cm od osi	20.845	4,169	0,011832	0,011680	0,006000
Dysk 14 cm od osi	22.825	4,565	0,014094	0,014005	0,006000

Tablica 5: Tabela z wynikami