

Badanie momentu bezwładności - doświadczenie 104 (sala 217)

Sebastian Maciejewski 132275 i Jan Techner 132332

24 listopada 2017

1 Wstęp teoretyczny

W opisie dynamiki ruchu postępowego pojawia się pojęcie bezwładności związane z masą m poruszającego się ciała. W przypadku ruchu obrotowego znajomość masy ciała jest niewystarczająca, istotny jest również jej przestrzenny rozkład względem osi obrotu. Wielkością fizyczną zawierającą informacje o masie ciała i jej przestrzennym rozkładzie względem osi obrotu jest moment bezwładności I .

Dla pojedynczego punktu materialnego o masie m wirującego wokół osi oddalonej od niego o odległość r możemy zapisać następującą zależność na moment bezwładności:

$$I = mr^2 \quad (1)$$

W przypadku układu N punktów materialnych sztywno połączonych ze sobą względem osi obrotu, zwanej osią bezwładności, moment bezwładności układu jest równy sumie momentów bezwładności poszczególnych punktów materialnych.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (2)$$

gdzie m_i jest masą i -tego punktu materialnego, a r_i jego odległością od osi bezwładności.

Twierdzenie Steinera

Jeżeli chcemy obliczyć moment bezwładności względem dowolnej osi nieprzechodzącej przez środek masy bryły, przydatna staje się twierdzenie Steinera. Mówi ono, że jeżeli moment bezwładności bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez jej środek masy równa się I_0 to moment bezwładności tej bryły obracającej się względem innej osi równoległej do osi przechodzącej przez jej środek masy wynosi:

$$I = I_0 + md^2, \quad (3)$$

gdzie m jest masą bryły, a d odległością między osiami.

Opis doświadczenia

W ćwiczeniu zostaną wyznaczone momenty bezwładności stalowego pręta oraz dysku. Dodatkowym zadaniem będzie eksperymentalne potwierdzenie twierdzenia Steinera. Do badań posłuży wahadło skrętne złożone ze stabilnej podstawy oraz pionowej osi osadzonej na łożyskach o bardzo małym tarciu. Oś oraz podstawa połączone są przy pomocy spiralnej sprężyny, która umożliwi wahania skrętne. Na końcu osi znajduje się śruba umożliwiająca mocowanie na niej brył.

Wahadło skrętne jest szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego. Jeżeli założymy, że wychylenia wahadła są niewielkie (w naszym przypadku ok 90°) oraz zaniedbamy siły oporu, jego ruch można opisać jako ruch harmoniczny prosty. W takim przypadku okres T drgań wahadła można zapisać następująco:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (4)$$

gdzie I jest momentem bezwładności bryły zamocowanej na osi wahadła, a D jest parametrem charakterystycznym dla danej sprężyny - jej momentem kierującym.

Aby wyliczyć moment bezwładności bryły zamocowanej na wahadle zastosujemy przekształcone równanie (4), wynik pomiaru okresu drgań T oraz wyznaczony moment kierujący D :

$$I = D \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (5)$$

W omawianym ćwiczeniu moment kierujący sprężyny wyznaczmy mierząc okresy wahań pręta obciążonego dwoma ciężarkami. Moment bezwładności układu złożonego z pręta z dwoma ciężarkami, umieszczonymi symetrycznie w odległości r od osi obrotu, można zapisać następującym wzorem:

$$I = I_P + 2m_C r^2, \quad (6)$$

gdzie I_P jest momentem bezwładności pręta, a m_C jest masą każdego ciężarka.

Na podstawie wzoru (5) moment bezwładności pręta zamocowanego na osi możemy zapisać równaniem:

$$I_P = D \left(\frac{T_P}{2\pi} \right)^2, \quad (7)$$

gdzie T_P jest okresem drgań wahadła obciążonego prętem (bez ciężarków).

Podstawiając do równania (5) wzory (6) i (7), otrzymujemy zależność:

$$D \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 2m_C r^2 + D \left(\frac{T_P}{2\pi} \right)^2, \quad (8)$$

która po przekształceniu przybiera postać:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m_C}{D} r^2 + T_P^2. \quad (9)$$

Dokonując w powyższym równaniu podstawień, $y = T^2$, $x = r^2$, $a = 8\pi^2 m_C / D$ oraz $b = T_P^2$, uzyskuje się zależność typu $y = ax + b$. Jest to funkcja liniowa, gdzie wartość a jest współczynnikiem kierunkowym prostej, a b punktem przecięcia z osią y . Stąd też moment kierujący wahadła można obliczyć ze wzoru:

$$D = \frac{8\pi^2 m_C}{a}. \quad (10)$$

W celu wyznaczenia momentu bezwładności pręta można skorzystać z pomiaru okresu dla nieobciążonego pręta z równania (7). Chcąc wyznaczyć moment bezwładności dysku należy zamocować jego środek na osi, a następnie zmierzyć okres drgań wahadła. Korzystając z równania (5) wyznaczamy doświadczalną wartość momentu bezwładności dysku. Chcąc porównać uzyskane wartości doświadczalne z wartościami teoretycznymi należy zważyć obie bryły, zmierzyć długość pręta oraz średnicę dysku. Wartości teoretyczne momentów bezwładności obliczymy z równań:

$$I = \frac{1}{12} m l^2, \quad (11)$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2, \quad (12)$$

gdzie m jest masą pręta, l - długością pręta, M - masą dysku, R - promieniem dysku.

Żeby potwierdzić twierdzenie Steinera, dysk będziemy przykręcać na osi dla różnych odległości d od środka tarczy. Następnie dla każdego położenia wyznaczmy okres drgań wahadła a potem korzystając z równania (5), moment bezwładności dysku. Otrzymany wynik porównamy z teoretycznym momentem bezwładności, który obliczymy na podstawie równania:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 + M d^2. \quad (13)$$

2 Wyniki pomiarów

Masa ciężarków, masa i długość pręta, odległości między nacięciami na pręcie zostały zmierzone na początku doświadczenia i wynosiły:

Mierzona wartość	Pomiar	Dokładność pomiarowa
Masa ciężarków m_C	0.259 [kg]	± 0.001 [kg]
Masa pręta	0.136 [kg]	± 0.001 [kg]
Masa dysku M	0.435 [kg]	± 0.001 [kg]
Długość pręta l	0.62 [m]	± 0.001 [m]
Średnica dysku $2R$	0.32 [m]	± 0.001 [m]
Odległość między nacięciami	0.05 [m]	± 0.001 [m]

Dokładność pomiaru czasu ze względu na pomiar manualny wynosi $\pm 0.1s$

Odległość od osi obrotu [cm]	Próba 1 [s]	Próba 2 [s]	Próba 3 [s]
0	12.45	12.50	12.60
5	14.21	14.16	14.37
10	18.39	18.46	18.62
15	24.04	24.09	24.00
20	30.20	30.06	29.75
25	36.29	36.47	36.53
30	42.87	42.83	42.91

Tablica 1: Pomiary czasu t 5 wahań pręta przy różnych odległościach ciężarków od osi obrotu

Odległość od osi obrotu [cm]	Próba 1 [s]	Próba 2 [s]	Próba 3 [s]
0	14.14	14.18	14.23
2	14.26	14.22	14.18
4	14.59	14.41	14.58
6	15.77	15.86	15.98
8	17.27	17.14	17.27
10	19.08	18.97	18.99
12	20.96	20.81	20.76
14	22.80	22.84	22.83

Tablica 2: Pomiary czasu t 5 wahań dysku przy różnych odległościach od osi obrotu

3 Opracowanie wyników

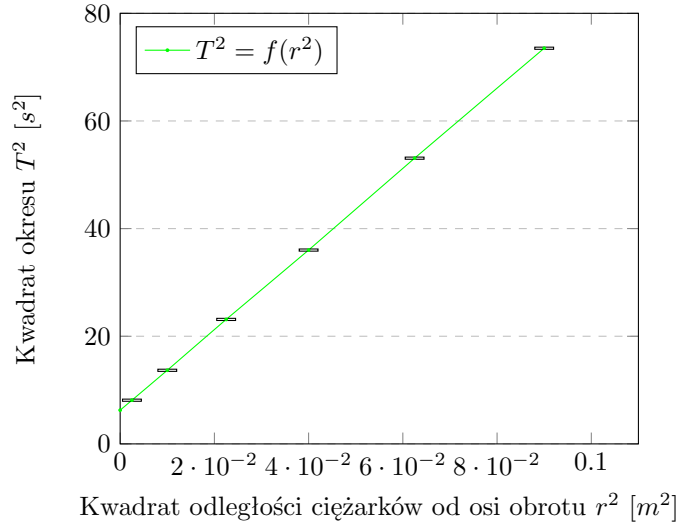
3.1 Wyznaczenie momentu kierującego sprężyny

Dla każdego położenia ciężarków na pręcie (r) wyznaczamy średni czas t_{sr} 5 wahnięć, oraz średni okres jednego wahnięcia T , korzystając z zależności $T = \frac{1}{5}t_{sr}$. Wyniki przedstawiono w Tablicy 3.

	r [m]	t_{sr} [s]	T [s]
Sam pręt	0	12.517	2,503
Ciężarki 5 cm od osi	0.05	14.247	2,849
Ciężarki 10 cm od osi	0.10	18.490	3,698
Ciężarki 15 cm od osi	0.15	24.043	4,809
Ciężarki 20 cm od osi	0.20	30.003	6,001
Ciężarki 25 cm od osi	0.25	36.430	7,286
Ciężarki 30 cm od osi	0.30	42.870	8,574

Tablica 3:

Następnie, korzystając z obliczonych wartości, na rysunku 1 przedstawiono wykres zależności kwadratu okresu od kwadratem odległości ciężarków od osi obrotu $T^2 = f(r^2)$.



Rysunek 1: Zależności kwadratu okresu od kwadratem odległości ciężarków od osi obrotu

Posługując się metodą regresji liniowej opisanej za pomocą wzoru

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (14)$$

gdzie x_i to kolejne kwadraty odległości ciężarków od osi obrotu, a y_i to kwadraty okresu dla danej odległości, wyznaczamy współczynnik nachylenia prostej a , oraz jego niepewność.

$$a = 747.958 \left[\frac{s^2}{m^2} \right] \quad (15)$$

Błąd wyznaczenia wielkości a :

$$\Delta a = \sqrt{\frac{n(\sum y_i^2 - a\sum x_i y_i - b\sum y_i)}{(n-2)(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}} = 2.852$$

Następnie korzystając z równania (10), wyliczamy moment kierujący D , oraz jego niepewność:

$$D = \frac{8\pi^2 m_C}{a} \left[\frac{kg}{\frac{s^2}{m^2}} \right] = 0.02734087 \left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right] \quad (16)$$

Błąd wyznaczenia D obliczamy stosując metodę różniczki logarytmicznej

$$\Delta D = \left(\frac{\Delta m_c}{m_c} + \frac{\Delta a}{a} \right) * D = \left(\frac{0.001}{0.259} + \frac{2.852}{747.958} \right) * 0.02734087 = 0.0002$$

Zatem ostateczne wartości a i D wyglądają następująco:

	a	D
pomiar	747.958	0.02734087
dokładność	2.852	0.0002
po zaokrągleniu	748.0 ± 2.9	0.0273 ± 0.0002

Tablica 4: Współczynnik nachylenia linii a i moment kierujący D wraz z dokładnościami Δa i ΔD

3.2 Wyznaczanie momentów bezwładności pręta i dysku względem ich osi sym.

Korzystając z wyniku uzyskanego powyżej, okresu drgań samego pręta i równania (7) możemy obliczyć moment bezwładności pręta :

$$I_P = D \left(\frac{T_P}{2\pi} \right)^2 = 4.338846 \cdot 10^{-3} [kg \cdot m^2] \quad (17)$$

Umieszczając dysk na wahadle tak, żeby jego środek pokrywał się z osią obrotu, wykonujemy pomiary czasu 5 wahań (t) (pomiary zostały umieszczone w Tablicy 2 w sekcji Wyniki pomiarów). Następnie obliczamy średni czas 5 wahań (t_{sr}) i średni okres wahań dysku T_{sr} .

	t_{sr} [s]	T_{sr} [s]
Dysk	14.185	2.837

Znając okres wahań dysku, możemy za pomocą wzoru (5) obliczyć moment bezwładności dysku I_D :

$$I_D = D \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 5.574 \cdot 10^{-3} [kg \cdot m^2] \quad (18)$$

Korzystając z wyników pomiarów mas brył, długości pręta oraz średnicy dysku możemy, na podstawie wzorów (11) i (12) obliczyć teoretyczne wartości momentów bezwładności pręta I_{TP} oraz dysku I_{TD} :

$$I_{TP} = \frac{1}{12} m l^2 = 4.3565 \cdot 10^{-3} [kg \cdot m^2] \quad (19)$$

$$I_{TD} = \frac{1}{2} M R^2 = 5.568 \cdot 10^{-3} [kg \cdot m^2] \quad (20)$$

Jak widać wartości teoretyczne oraz realne momentów bezwładności dysku i pręta są bardzo zbliżone. Nieznaczne różnice wynikają z błędów pomiaru (szczególnie czasu), oraz czynników, które nie były brane pod uwagę w obliczeniach (np. opór powietrza, czy siły tarcia wahadła).

3.3 Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera

Kontynuując pomiary okresu drgań dysku, zmieniając odległość (r) osi od środka tarczy co 2cm oraz wyliczając średnie wartości okresów wahań otrzymujemy poniższą tablicę :

	r [m]	t_{sr} [s]	T [s]
Dysk 2 cm od osi	0.02	14.22	2,844
Dysk 4 cm od osi	0.04	14.525	2,905
Dysk 6 cm od osi	0.06	15.87	3,174
Dysk 8 cm od osi	0.08	17.225	3,445
Dysk 10 cm od osi	0.10	19.015	3,803
Dysk 12 cm od osi	0.12	20.845	4,169
Dysk 14 cm od osi	0.14	22.825	4,565

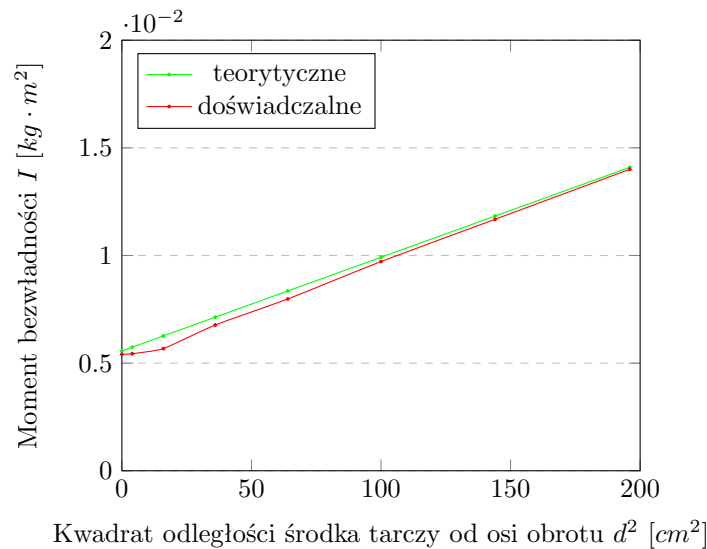
Tablica 5:

Następnie, korzystając z równania (5) obliczamy wartości realne momentów bezwładności I_{TD} dla kolejnych odległości d , a korzystając z równania (13) obliczamy wartości teoretyczne momentów bezwładności I_{RD} . Wyniki tych wszystkich obliczeń zestawione są w tabeli poniżej :

	I_{TD}	I_{RD}	ΔI
Dysk	0,005568	0,005409	0,003000
Dysk 2 cm od osi	0,005742	0,005437	0,006000
Dysk 4 cm od osi	0,006264	0,005674	0,006000
Dysk 6 cm od osi	0,007134	0,006771	0,006000
Dysk 8 cm od osi	0,008352	0,007979	0,006000
Dysk 10 cm od osi	0,009918	0,009719	0,006000
Dysk 12 cm od osi	0,011832	0,011680	0,006000
Dysk 14 cm od osi	0,014094	0,014005	0,006000

Tablica 6: Tabela z wynikami

Dane przedstawione w tabeli można w prosty sposób przyrównać tworząc z nich wykres:



Rysunek 2: Porównanie teoretycznych i rzeczywistych momentów bezwładności dysku w zależności od kwadratu odległości środka tarczy od osi obrotu

Na wykresach, które były przedstawione powyżej, widać, że wykres funkcji zależności $T^2 = f(r^2)$ jest w przybliżeniu prostą. Widać także, że różnica pomiędzy teoretycznie obliczoną (przy pomocy twierdzenia Steinera) wartością momentu bezwładności a wartością zmierzoną jest w większości przypadków mniejsza niż dokładność obliczona na podstawie możliwości przyrządów pomiarowych. Część wyników nieznacznie odstaje od reszty (o więcej niż jeden raz wartość dokładności pomiaru), co prawdopodobnie jest spowodowane błędem wynikającym z opóźnionego czasu reakcji osoby dokonującej pomiarów czasu. Wartość takiego błędu ciężko oszacować, jednak widać, że dla mniejszych wartości T jest on mniej zauważalny, co związane jest z tym, że we wzorze T jest podnoszone do kwadratu (błąd pomiarowy staje się bardziej znaczącym czynnikiem). Mimo tych drobnych błędów uważamy, że nasze pomiary i obliczenia dowodzą w sposób doświadczalny zasadności twierdzenia Steinera.