

# Porównywanie efektywności metod mnożenia macierzy

Sebastian Maciejewski 132275 i Jan Techner 132332  
grupa II, zajęcia we wtorki o 15:10, tygodnie nieparzyste,  
email: maciejewski.torun@gmail.com

30 kwietnia 2019

## 1 Wstęp

Sprawozdanie dotyczy zadania w wariancie 22. - porównywanie efektywności metod mnożenia macierzy:

- dla 3 pętli kolejność jki, podział pracy przed 1. pętlą
- dla 6 pętli kolejność pętli zewnętrznych ijk, wewnętrznych iijjkk, podział pracy przed 4. pętlą

Wszystkie pomiary zostały wykonane na komputerach laboratoryjnych w sali 2.7.6.

## 2 Analiza przygotowania eksperymentu

### 2.1 Kod wykorzystywany przy pomiarach

Kod, którego używaliśmy w eksperymencie został tak podzielony, aby cała logika przetwarzania znajdowała się w pojedynczej funkcji. Poniżej prezentowany jest kod tylko tych funkcji - generowanie macierzy i wypełnianie jej losowymi liczbami, liczenie czasu i wypisywanie wyników działającą w ten sam sposób dla wszystkich wariantów przetwarzania.

#### 2.1.1 Metoda 3 pętli - równoległe

```
1 void multiply_matrices_JKI()
2 {
3     #pragma omp parallel for
4     for (int j = 0; j < COLUMNS; j++)
5         for (int k = 0; k < COLUMNS; k++)
6             for (int i = 0; i < ROWS; i++)
7                 matrix_r[i][j] += matrix_a[i][k] * matrix_b[k][j];
8 }
```

#### 2.1.2 Metoda 3 pętli - sekwencyjnie

```
1 void multiply_matrices_IKJ_sequentially()
2 {
3     for (int i = 0; i < ROWS; i++)
4         for (int k = 0; k < COLUMNS; k++)
5             for (int j = 0; j < COLUMNS; j++)
6                 matrix_r[i][j] += matrix_a[i][k] * matrix_b[k][j];
7 }
```

#### 2.1.3 Metoda 6 pętli - równoległe

```
1 void multiply_matrices_IJK_IJJKK()
2 {
3     int r = 10;
4     for (int i = 0; i < ROWS; i += r)
5         for (int j = 0; j < COLUMNS; j += r)
6             for (int k = 0; k < COLUMNS; k += r)
7                 #pragma omp parallel for
8                     for (int ii = i; ii < i + r; ii++)
9                         for (int jj = j; jj < j + r; jj++)
10                             for (int kk = k; kk < k + r; kk++)
11                                 matrix_r[ii][jj] += matrix_a[ii][kk] * matrix_b[kk][jj];
12 }
```

## 2.2 Analiza podziału pracy na wątki

### 2.2.1 Dyrektywy OpenMP

W naszym kodzie używamy dyrektyw 'pragma omp parallel for', które sprawiają, że iteracje pętli będą wykonane w sposób równoległy przez kilka wątków. Każdy z wątków wykona jednakowy zakres iteracji, w naszym wypadku, przy podziale na 4 wątki, pierwszy wątek wykona pierwszą  $\frac{1}{4}$  operacji, drugi kolejną itd. Dopiero po zakończeniu przetwarzania przez wszystkie wątki następuje synchronizacja i przejście dalej - do zakończenia pomiaru czasu.

### 2.2.2 Analiza ryzyka wystąpienia wyścigu i zjawiska false sharingu

Zjawisko wyścigu, czyli równoległa modyfikacja tej samej zmiennej przez różne procesy, nie występuje w naszym kodzie.

Aby się o tym przekonać wystarczy zwrócić na to, że w naszym przypadku, w równoległym przetwarzaniu dla 3 pętli mamy zapis do *matrix\_r[i][j]*, gdzie wartości *j* są dzielone pomiędzy procesy z powodu wystąpienia dyrektywy 'parallel for' przed pętlą odpowiedzialną za inkrementację licznika kolumn *j* (2.1.1, linijki od 3 do 7). Co za tym idzie każdy proces zawsze zapisuje do innej kolumny niż pozostałe, więc zjawisko wyścigu nie występuje w tym przypadku.

Podobna sytuacja występuje przy 6 pętlach - każdy proces zapisuje do osobnego wiersza z powodu wystąpienia dyrektywy 'parallel for' przed pętlą odpowiedzialną za inkrementację zmiennej *ii* (2.1.3, linijki od 7 do 11) - w tym przypadku również nie dojdzie do wyścigu.

Inaczej sytuacja ma się w przypadku zjawiska false sharingu. False sharing występuje wtedy, gdy różne procesy zapisują zmienne znajdujące się w tej samej linii pamięci - wówczas kopie linii w pamięciach podręcznych innych procesów stają się nieaktualne i dany proces musi ponownie pobrać linię z pamięci aby zapewnić spójność pamięci podręcznej. To zajmuje czas, więc takie zjawisko jest nieporządane, gdyż wpływa negatywnie na efektywność przetwarzania.

Długość linii pamięci w systemach, na których wykonywane były pomiary to 64B, zatem w każdej linii pamięci mieści się 16 zmiennych typu float, używanych przez nas w obliczeniach. Rozmiary instancji w naszych pomiarach były  $\geq 400$ . Mając to na uwadze, możemy się zająć analizą ryzyka wystąpienia zjawiska false sharingu.

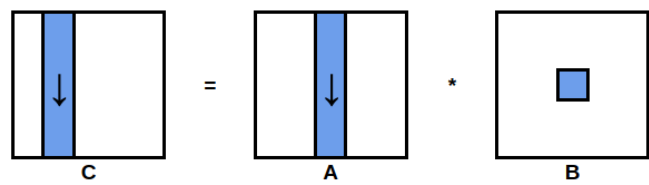
W wersji przetwarzania równoległe dla 3 pętli mamy do czynienia z podziałem pracy przed 1. pętlą, *j*, która odpowiada za licznik kolumn.

DUŻY ZNAK ZAPYTANIA ? NAD TYM:

W tym wypadku możemy stwierdzić, że z uwagi na to, iż każdy z procesów zapisuje dane jedynie do swojej kolumny macierzy, zjawisko false sharingu nie wystąpi gdyż rozmiar jednej kolumny jest znacznie większy od rozmiaru jednej linii pamięci - dla instancji o wielkości 400, w kolumnie mieści się około 50 linii pamięci. Jedynym miejscem, w którym to zjawisko może wystąpić są brzegi kolumn. (ALE CHYBA JEDNAK WIERSZY) CZY JEDNAK WYSTĄPI BO MACIERZ JEST UŁOŻONA W PAMIĘCI WIERSZAMI I KAŻDY PROCES ROBI SOBIE KOPIĘ WIERSZA, WIĘC JAK KTOŚ COŚ ZMIENI W INNEJ KOLUMNIE TO POTRZEBNY JEST PONOWNY ODCZYT CAŁEGO WIERSZA?

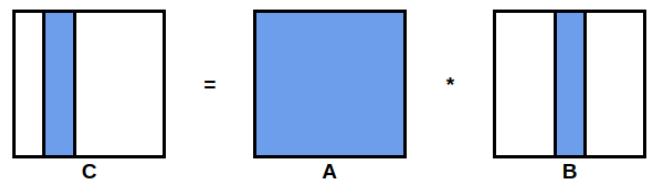
DO OBGADANIA, BO JEŚLI JEST TAK Z WIERSZAMI, TO W 6 PĘTLACH NIE BĘDZIE FALSE SHARINGU A W 3 BĘDZIE.

2.2.3 Podział przetwarzania w metodzie 3-pętlowej



Rysunek 1: Obszar danych dla jednej wewnętrznej pętli

JAKIŚ OPIS

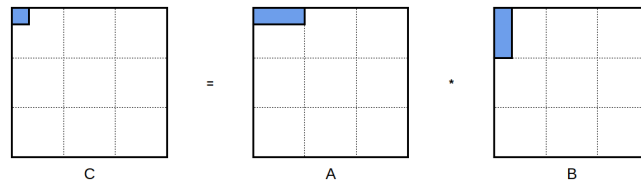


Rysunek 2: Obszar danych dla dwóch wewnętrznych pętli

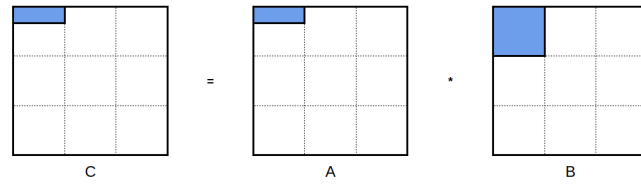
JAKIŚ OPIS

### 2.2.4 Podział przetwarzania w metodzie 6-pętlowej

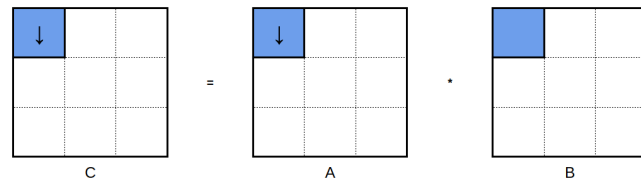
TODO OPISY



Rysunek 3: Obszar danych dla pętli  $kk$



Rysunek 4: Obszar danych dla pętli  $jj, kk$



Rysunek 5: Obszar danych dla pętli  $ii, jj, kk$

## 2.3 Analiza lokalności czasowej

Znaczącym czynnikiem mającym wpływ na efektywność przetwarzania jest czas dostępu do danych. Ten czas jest znacznie krótszy przy dostępie podręcznej pamięci procesora niż przy konieczności odwołania się do pamięci RAM. Bardzo ograniczona pojemność pamięci podręcznej sprawia, że kod powinien być pisany w taki sposób, aby maksymalizować wykorzystanie danych już załadowanych do pamięci podręcznej i minimalizować ilość odczytów z RAM. Przetwarzanie jest efektywne wtedy, gdy kod charakteryzuje się czasową lokalnością odwołań do pamięci, czyli wielokrotnym wykorzystaniem danych załadowanych do pamięci podręcznej zanim zostaną zastąpione innymi danymi odczytanymi z RAM.

Zakładamy, że rozmiar pamięci podręcznej procesora, na którym przeprowadzane są obliczenia to 6 MB. Jest to pojemność pamięci L3 - L2 nie jest tu brane pod uwagę, ponieważ część danych obecnych w niej pokrywa się z danymi w L3. Również pamięć L1 jest przy tym założeniu pomijana, ponieważ jej pojemność jest tak mała, że jej uwzględnianie nie miało by znaczącego wpływu na obliczane wielkości instancji.

Przy obliczeniach zakładamy, że  $1 \text{ MB} = 1000 \text{ KB} = 1000000 \text{ B}$ , przy czym pojedyncza zmienna typu float, z których korzystamy, ma rozmiar 4 B.

Dla metody **3 pętli** wzór, którego używamy do obliczania rozmiaru instancji, dla której będzie zachowana lokalność czasowa to:

$$n^2 * 4B + 2 * n * 64B \leq \frac{6000000B}{4}$$

przy czym  $n$  to rozmiar instancji.

Warunek zachowania lokalności czasowej będzie spełniony jeżeli pamięć podręczna pomieści:

- jedną kolumnę macierzy C (zajmowana pamięć wyniesie  $n * 64B$ , ponieważ macierz jest w pamięci przechowywana wierszami i każdy element kolumny będzie w innej linii pamięci)
- całą macierz A (zajmowana pamięć wyniesie  $n^2 * 4B$  - macierz zawiera  $n^2$  elementów po 4B każdy)
- jedną kolumnę macierzy B (zajmowana pamięć wyniesie  $n * 64B$ , analogicznie do punktu a).

Wielkość pamięci podręcznej w systemie, na którym przeprowadzane były doświadczenia wynosi 6MB i jest to pamięć współdzielona pomiędzy 4 rdzeniami procesora. Stąd też suma wielkości pamięci podręcznej wymaganej do przechowania potrzebnych elementów każdej macierzy powinna być mniejsza niż czwarta część całej pamięci podręcznej w systemie.

Po rozwiązaniu nierówności uzyskana wartość  $n$  rozmiaru instancji, dla której wciąż będzie zachowana lokalność czasowa to w przybliżeniu  $n \leq 596$ .

Dla metody **6 pętli** wzór do obliczenia rozmiaru instancji ma postać:

$$3 * r^2 * 4B \leq 6000000B$$

gdzie  $r$  to rozmiar wykorzystywanego bloku, pobieranego każdorazowo z macierzy.

Każdy z wątków przetwarzania potrzebuje stałego dostępu do fragmentu macierzy B o rozmiarze  $r \times r$ , ponieważ ten fragment czytany jest wielokrotnie przez każdy wątek podczas kolejnych iteracji. Dodatkowo każdy wątek odczytuje dane z kolejnych wierszy fragmentu macierzy A i zapisuje do kolejnych wierszy fragmentu macierzy wynikowej C, więc w pamięci podręcznej należy umieścić również  $r \times r$  elementów dla macierzy C i  $r \times r$  elementów dla macierzy A (jest to pewne uproszczenie obliczeń, ponieważ każdy wątek w kolejnych iteracjach potrzebuje dostępu tylko do wierszy fragmentów macierzy C i A, ale ostatecznie wszystkie wiersze z obu fragmentów zostaną wykorzystane, więc bezpiecznie jest trzymać je wszystkie od razu w pamięci podręcznej). Łącznie więc w pamięci podręcznej musimy przechować 3 fragmenty zawierające  $r \times r$  elementów po 4B każdy.

Wyznaczona wartość  $r$ , dla której będzie zachowana lokalność czasowa to  $r \leq 707$ .

## 2.4 Analiza lokalności przestrzennej

Lokalność przestrzenna jest związana z występowaniem w systemie pamięci wirtualnej. Jest mechanizm, który umożliwia procesowi pracę w jednym, ciągłym obszarze pamięci operacyjnej, nawet gdy fizycznie jest ona po-fragmentowana lub część z niej znajduje się w pliku wymiany, który procesy mogą wykorzystać jako dodatkową pamięć w przypadku, gdy w systemie brakuje fizycznej pamięci operacyjnej. Pamięć wirtualna niesie ze sobą pewne konsekwencje - najważniejszą z nich jest to, że teraz procesy muszą posługiwać się adresami logicznymi zamiast fizycznymi adresami mającymi bezpośrednie odwzorowanie w pamięci RAM. Taka pamięć jest dzielona na strony o rozmiarze 4 kB, które stanowią jeden, ciągły obszar w pamięci. Aby taki system mógł działać,

pamięć RAM jest dzielona na ramki, których rozmiar odpowiada rozmiarowi stron. Strony mogą się znajdować w pamięci lub we wspomnianym wyżej pliku wymiany, co sprawia, że procesor musi posługiwać się logicznymi adresami aby uzyskać dostęp do danych.

Taka organizacja pamięci wymusza obecność mechanizmu tłumaczenia adresów logicznych na fizyczne, czyli odwzorowania adresów strony na adres ramki pamięci. Informacje o takich odwzorowaniach znajdują się w tablicy stron. W tym miejscu stosuje się pewne usprawnienie, jako, że przeglądanie takiej tablicy przy każdym odwołaniu byłoby bardzo mało wydajne. Tym usprawnieniem jest bufor translacji adresu TLB, który posiada określoną, stałą liczbę adresów stron i odpowiadających im ramek, dzięki czemu można szybko dokonać translacji adresu logicznego na fizyczny. Jednak tak jak w pamięci podręcznej, tak i w buforze translacji występuje ograniczenie rozmiaru.

Program chechuje się zachowaniem lokalności przestrzennej wtedy, kiedy nie występują sytuacje, w których w buforze translacji nie znajduje się adres szukanej strony. W procesorze, z którego korzystaliśmy przy obliczeniach bufor translacji mieści 544 pary adres strony - adres ramki. Każda ze stron pamięci wirtualnej ma rozmiar 4 kB, tak więc mieści 1024 liczby z wykorzystywanej przez nas macierzy.

Aby znaleźć wielkości instancji, dla których przetwarzanie zachowa lokalność przestrzenną dla **3 pętli** posłużyliśmy się wzorem:

$$\left\lceil \frac{n^2}{1024} \right\rceil + 2 * \min\left(n, \left\lceil \frac{n^2}{1024} \right\rceil\right) \leq 544$$

gdzie  $n$  to rozmiar instancji.

Pierwszy człon reprezentuje liczbę stron zawierających wszystkie elementy macierzy A, natomiast kolejny to dwukrotność (człon jest identyczny dla macierzy B i C) liczby stron zawierających jedną kolumnę macierzy. Jeżeli rozmiar macierzy  $n$  przekracza 1024 elementy, to każdy element kolumny macierzy będzie na innej stronie, więc, żeby zapewnić dostęp do całej kolumny, potrzebne będą 1024 strony. Jeżeli zaś rozmiar macierzy będzie mniejszy od 1024, to może zdarzyć się, że dwa kolejne elementy macierzy będą znajdowały się na tej samej stronie i liczba stron potrzebnych do zawarcia całej kolumny będzie taka sama jak w przypadku macierzy A.

Po rozwiązaniu nierówności, wartość  $n$ , dla której będzie zachowana lokalność przestrzenna to  $n \leq 430$ .

Dla **6 pętli** wzór na znalezienie takich wartości  $n$  i  $r$ , dla których przetwarzanie zachowa lokalność przestrzenną, wygląda następująco:

$$\min\left(r, \frac{r * n}{1024}\right) + 2 * \min\left(\frac{r}{4}, \frac{\frac{r}{4} * n}{1024}\right) \leq 544$$

gdzie  $n$  to rozmiar instancji, a  $r$  to rozmiar wykorzystywanego bloku.

W przypadku 6 pętli lokalność przestrzenna zależy zarówno od rozmiaru instancji  $n$ , jak i od rozmiaru okna  $r$ . Każdy wątek przetwarzania potrzebuje dostępu do  $r \times r$  elementów fragmentu macierzy B oraz dwóch fragmentów  $r \times \frac{r}{4}$  macierzy C i A. Liczba stron potrzebnych do dostępu do wszystkich elementów fragmentu macierzy B to  $r$  (jeżeli  $n \leq 1024$  - każdy wiersz znajduje się na osobnej stronie) lub  $r * n / 1024$  (w przeciwnym wypadku - kilka wierszy może znajdować się na tej samej stronie). Liczbę stron dla mniejszych fragmentów macierzy C i A można obliczyć w analogiczny sposób, z tym, że w tym przypadku rozpatrywany fragment będzie miał wysokość  $r/4$  zamiast  $r$ .

W naszych pomiarach przyjęliśmy, że rozmiar instancji będzie większy od 1024 (przyjęliśmy 1500). Po podstawieniu wartości 1500 w miejsce  $n$  we wzorze i rozwiązaniu nierówności, wartość  $r$ , przy której zostanie zachowana lokalność przestrzenna to  $r \leq 362$ .

### 3 Analiza wyników eksperymentu pomiarowego

#### 3.1 Wstępny opis eksperymentu pomiarowego

Eksperyment został przeprowadzony na komputerach w sali laboratoryjnej 2.7.6 przy wykorzystaniu funkcji opisanych w punkcie 2.1 wywoływanych w programie, którego jedynym zadaniem poza wywołaniem wymienionych wyżej funkcji było losowanie macierzy (na początku, przed rozpoczęciem pomiaru czasu) i mierzenie czasu

przetwarzania (na podstawie stanu zegara przed i po wywołaniu funkcji). Po podaniu wielkości instancji i kompilacji programu poddawaliśmy go analizie w programie CodeXL. Ogólnie mierzone (lub dane) były następujące wartości:

Zmienna	Oznaczenie	Wartość progu
Wielkość instancji	n	
Wielkość okna	r	
Czas przetwarzania	Tobl	
Liczba instrukcji assemblera	LIA	250 000
Liczba cykli procesora	LCP	250 000
Liczba dostępu do L1	LDP	250 000
Liczba braków trafień do L3	BTL3	50 000
Liczba braków trafień do bufora translacji	BTBT	50 000

Tablica 1: Oznaczenia i progi zmiennych

Wielkością instancji określamy rozmiar mnożonej macierzy kwadratowej. Pomiary zbierane były w taki sposób, aby nie uruchamiać na raz analizy zbyt wielu parametrów, gdyż mogłoby to zakłócić wyniki. Aby tego uniknąć mierzyliśmy najpierw LDP, BTL3 i BTBT, a dopiero później LIA i LCP. Odczytane wyniki zapisywaliśmy do załączonego arkusza kalkulacyjnego. Dokonaliśmy też wstępnej analizy instrukcji assemblera, które składały się na nasz program aby zobaczyć które z nich najbardziej obciążały procesor (było ich najwięcej).

### 3.2 Wyniki uzyskane w eksperymencie

n	Tobl	LIA	LCP	LDP	BTL3	BTBT
400	0.078	1413	1871	925	35	1
450	0.109	1980	4914	1329	53	16
550	0.289	3566	15405	2370	113	1036
600	0.625	4554	29754	3159	136	2697
700	1.683	6856	77515	4999	349	7458

Tablica 2: Wyniki dla 3 pętli, przetwarzanie równoległe

n	r	Tobl	LIA	LCP	LDP	BTL3	BTBT
1500	100	1.5780	233901	97207	33332	2688	44
1500	300	2.6770	105947	131667	33506	2002	153
1500	400	4.4530	98107	232887	87960	1192	653
1500	500	2.9530	241691	154389	31834	720	7617
1500	750	7.3280	101394	366565	31171	1086	40351
2000	200	3.6700	242986	204930	74343	2825	69

Tablica 3: Wyniki dla 6 pętli, przetwarzanie równoległe

n	Tobl	LIA	LCP	LDP	BTL3	BTBT
400	0.0310	774	582	375	18	1
450	0.0630	1073	832	602	17	1
550	0.0940	1877	1431	1060	24	1
600	0.0940	2329	1577	1097	23	0
700	0.1660	3616	2441	1685	42	3
800	0.2340	5299	3534	2454	42	8

Tablica 4: Wyniki dla 3 pętli, przetwarzanie sekwencyjne

### 3.3 Miary efektywności

W celu analizy jakości przetwarzania stosujemy opisane następującymi wzorami miary efektywności:

**Prędkość przetwarzania**

$$PP = \frac{2 * n^3}{Tobl} \quad (1)$$

Liczba instrukcji na cykl procesora IPC1 dla procesora

$$IPC1 = \frac{LIA}{LCP} \quad (2)$$

Liczba instrukcji na cykl procesora IPCS dla systemu

$$IPCS = \frac{LIA * LPF}{LCP} \quad (3)$$

Wskaźnik braków trafień do pamięci podręcznej L3

$$WBTL3 = \frac{BTL3}{LIA} \quad (4)$$

Wskaźnik dostępu do danych

$$WDD = \frac{LDP}{LIA} \quad (5)$$

Wskaźnik braków trafień do głównego bufora translacji adresów

$$WBTBT = \frac{BTBT}{LDP} \quad (6)$$

Krotność pobierania danych instancji do pamięci podręcznej

$$KPD = \frac{BTL3 * 64}{4 * 3 * n * n} \quad (7)$$

Miara kosztu synchronizacji

$$MKS = \frac{CCP - CWP}{CCP} = \frac{LUPF * Tobl - LCP * Tclk}{LUPF * Tobl} \quad (8)$$

Gdzie  $LUPF$  to liczba użytych procesorów fizycznych (liczba wątków OMP), a  $Tclk$  to czas trwania cyklu zegara procesora w sekundach.

Przyspieszenie przetwarzania równoległego

$$Sp(rownolegle A) = \frac{Tobl(obliczenia sekwencyjne IKJ)}{Tobl(obliczenia rownolegle A)} \quad (9)$$

### Komentarz do miar efektywności

Przy obliczaniu  $KPD$  można wydzielić dwa skrajne przypadki:

- w optymistycznym przypadku każda linia pamięci zostanie pobrana dokładnie raz, stąd  $KPD$  w takim przypadku to  $KPD = 1$
- w pesymistycznym przypadku w każdej iteracji algorytmu z trzema pętlami wystąpi brak trafienia do pamięci dla każdej z macierzy, wówczas

$$KPD = \frac{3n^3 * 64}{4 * 3n^2} = 16n^2$$

### 3.4 Obliczone miary efektywności

n	PP [GFLOPS]	IPC1	IPCS	WBTL3	WDD	WBTBT	KPD	MKS	Sp
400	1,6410	0,7552	3,0208	4,95E-03	0,6546	2,16E-04	58,3333		0,3974
450	1,6720	0,4029	1,6117	5,35E-03	0,6712	2,41E-03	69,7942		0,5780
550	1,1514	0,2315	0,9259	6,34E-03	0,6646	8,74E-02	99,6143		0,3253
600	0,6912	0,1531	0,6122	5,97E-03	0,6937	1,71E-01	100,7407		0,1504
700	0,4076	0,0884	0,3538	1,02E-02	0,7291	2,98E-01	189,9320		0,0986

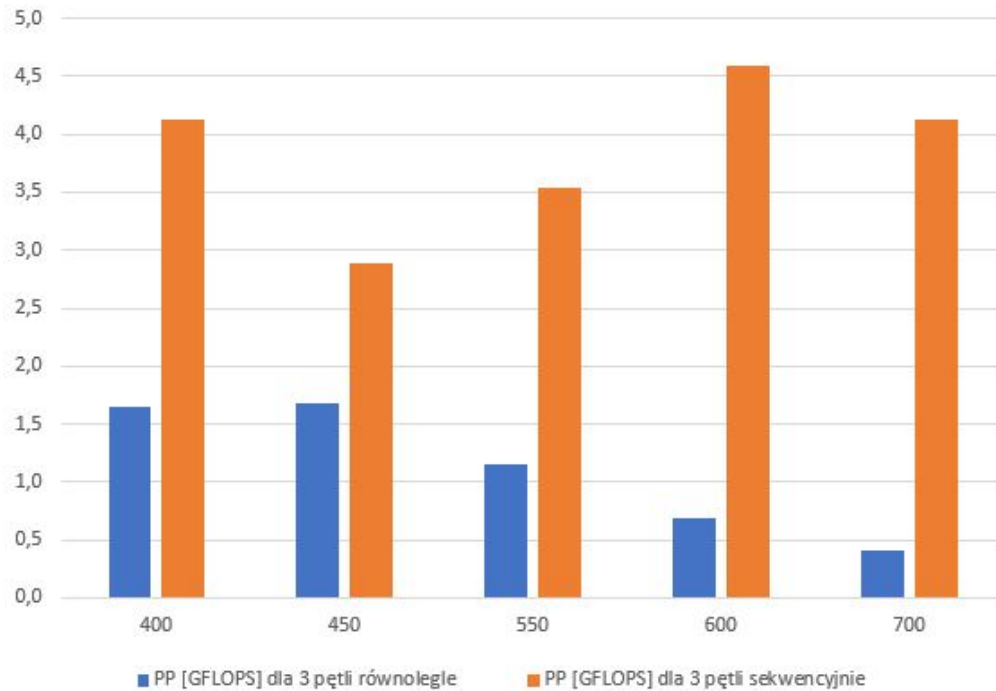
Tablica 5: Miary efektywności dla 3 pętli, przetwarzanie równoległe



n	r	PP [GFLOPS]	IPC1	IPCS	WBTl3	WDD	WBTBT	KPD	MKS
1500	100	4,2776	2,4062	9,6249	2,30E-03	0,1425	2,64E-04	318,5778	
1500	300	2,5215	0,8047	3,2186	3,78E-03	0,3163	9,13E-04	237,2741	
1500	400	1,5158	0,4213	1,6851	2,43E-03	0,8966	1,48E-03	141,2741	
1500	500	2,2858	1,5655	6,2619	5,96E-04	0,1317	4,79E-02	85,3333	
1500	750	0,9211	0,2766	1,1064	2,14E-03	0,3074	2,59E-01	128,7111	
2000	200	4,3597	1,1857	4,7428	2,33E-03	0,3060	1,86E-04	188,3333	

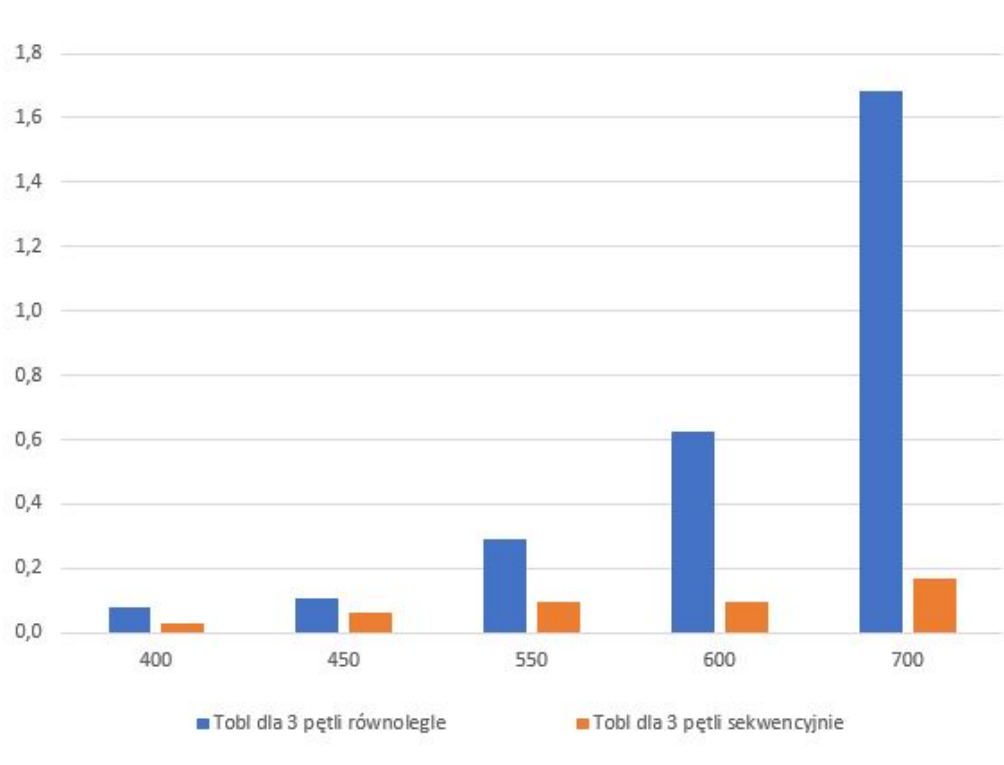
Tablica 6: Miary efektywności dla 6 pętli, przetwarzanie równoległe

## Graficzna prezentacja pewnych zależności



Rysunek 6: Porównanie PP w GFLOPS dla przetwarzania równoległego i sekwencyjnego

## 4 Wnioski



Rysunek 7: Porównanie Tobl w sekundach dla przetwarzania równoległego i sekwencyjnego



Rysunek 8: Zależność SP od wielkości instancji dla metody równoległej z 3 pętlami