

Obliczanie wartości i współczynników funkcji sklejanej stopnia trzeciego z zadanymi wartościami jej pochodnej na końcach przedziału

Sebastian Maciejewski
Nr indeksu 132275

29 maja 2018

1 Zastosowanie i opis funkcji

Funkcja *clamped spline value* oblicza w zadanym punkcie wartość funkcji sklejanej stopnia trzeciego, która interpoluje funkcję f p znanymi wartościami $f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ oraz wartościami $f'(x_0)$ i $f'(x_n)$.

Procedura *clamped spline coeffs* oblicza współczynniki przy kolejnych potęgach x funkcji sklejanej trzeciego stopnia, tj.

$$S(x) = a_{0,i} + a_{1,i}x + a_{2,i}x^2 + a_{3,i}x^3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

interpolującej funkcję f , dla której znane są wartości $f(x_i)$ w węzłach x_i oraz $f'(x_0)$ i $f'(x_n)$.

2 Opis metody

Wyznaczanie wartości

Funkcję sklejaną stopnia trzeciego można w każdym z przedziałów $[x_i, x_{i+1})$ przedstawić w postaci

$$S(x) = a_i + b_it + c_it^2 + d_it^3 \quad (1)$$

gdzie $t = x - x_i$ dla $x \in [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. W celu wyznaczenia funkcji sklejanej postaci (1), która spełnia warunki

$$S(x_i) = f(x_i) \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ oraz } S'(x_0) = f'(x_0) \text{ i } S'(x_n) = f'(x_n),$$

tj. określenia współczynników a_i, b_i, c_i oraz d_i dla $i = 0, 1, \dots, n-1$ należy najpierw rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{aligned} 2M_0 + \lambda_0 M_1 &= \delta_0 \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n &= \delta_n, \end{aligned} \quad (2)$$

w którym współczynniki λ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$), μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i δ_i ($i = 0, 1, \dots, n$) są określone

następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= 1, \\
\delta_0 &= \frac{6}{h_1} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} - f'(x_0) \right), \\
\lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i}, \\
\mu_i &= 1 - \lambda_i, \\
\delta_i &= \frac{6}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\
\mu_n &= 1, \\
\delta_n &= \frac{6}{h_n} \left(f'(x_n) - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1}))}{h_n} \right),
\end{aligned}$$

przy czym $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. Po rozwiązaniu układu równań (2) współczynniki funkcji sklejanej wyznacza się z następujących zależności:

$$\begin{aligned}
a_i &= f(x_i), \\
b_i &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_{i+1}, \\
c_i &= \frac{M_i}{2}, \\
d_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}.
\end{aligned}$$

W funkcji *clamped spline value* układ równań liniowych (2) rozwiązuje się metodą Crouta, a następnie określa się przedział $[x_i, x_{i+1})$ zawierający dany punkt x i dla tego przedziału wyznacza się współczynniki a_i, b_i, c_i oraz d_i . Następnie z wzoru (1) oblicza się wartość funkcji sklejanej.

Wyznaczanie współczynników

Współczynniki obliczane przez procedurę *clamped spline coeffs*, tj. $a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}$ oraz $a_{3,i}$, są związane ze współczynnikami a_i, b_i, c_i oraz d_i funkcji sklejanej S zapisanej w postaci (1) następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}
a_{0,i} &= a_i - b_i x_i + c_i x_i^2 - d_i x_i^3, \\
a_{1,i} &= b_i - 2c_i x_i + 3d_i x_i^2, \\
a_{2,i} &= c_i - 3d_i x_i, \\
a_{3,i} &= d_i.
\end{aligned}$$

W celu otrzymania współczynników funkcji S zapisanej w postaci (1) należy skorzystać z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
a_i &= a_{0,i} + a_{1,i} x_i + a_{2,i} x_i^2 + a_{3,i} x_i^3, \\
b_i &= a_{1,i} + 2a_{2,i} x_i + 3a_{3,i} x_i^2, \\
c_i &= a_{2,i} + 3a_{3,i} x_i, \\
d_i &= a_{3,i}.
\end{aligned}$$

3 Wywołanie procedury

Wyznaczanie wartości

intervalclamped spline value ($n, x, f, f1x0, f1xn, xx, st$)

Wyznaczanie współczynników

intervalclampedsplinecoefns ($n, x, f, f1x0, f1xn, a, st$)

4 Dane

n – liczba węzłów interpolacji minus 1 (węzły są ponumerowane od 0 do n),

x – tablica zawierająca wartości węzłów,

f – tablica zawierająca wartości interpolowanej funkcji w węzłach,

$f1x0$ – wartość $f'(x_0)$,

$f1xn$ – wartość $f'(x_n)$,

xx – punkt, w którym należy obliczyć wartość naturalnej funkcji sklejanej stopnia trzeciego.

5 Wyniki

Wyznaczanie wartości

clampedsplinevalue ($n, x, f, f1x0, f1xn, xx, st$) - wartość funkcji sklejanej stopnia trzeciego w punkcie xx .

Wyznaczanie współczynników

a – tablica współczynników funkcji sklejanej (element $a[k, i]$ zawiera wartość współczynnika przy x^k ($k = 0, 1, 2, 3$) dla przedziału $[x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$).

6 Inne parametry

st – zmienna, której w wyniku wykonania funkcji zostanie przypisana jedna z następujących wartości:

- 1, jeżeli $n < 1$,
- 2, gdy istnieją równe wartości $x[i]$ i $x[j]$ dla $i \neq j$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$),
- 3, jeśli $xx < x[0]$ lub $xx > x[n]$,
- 0, w przeciwnym przypadku.

Uwaga: Jeżeli $st \neq 0$, to wartość funkcji *clampedsplinevalue* i elementy tablicy a w funkcji *clampedsplinecoefns* nie są obliczane.

7 Typy parametrów

Wyznaczanie wartości

Integer: n, st

interval: $f1x0, f1xn, xx$

Ivector: x, f

Wyznaczanie współczynników

Integer: n, st

interval: $f1x0, f1xn$

Ivector: x, f

Imatrix: a

8 Identyfikatory nielokalne

Ivector – nazwa typu tablicowego $[q_0 \dots q_n]$ o elementach typu *interval*

Imatrix – nazwa typu tablicowego $[0..3, q_0 \dots q_{n-1}]$ o elementach typu *interval*

9 Funkcje i procedury

10 Przykłady

Zwykła arytmetyka

Arytmetyka przedziałowa