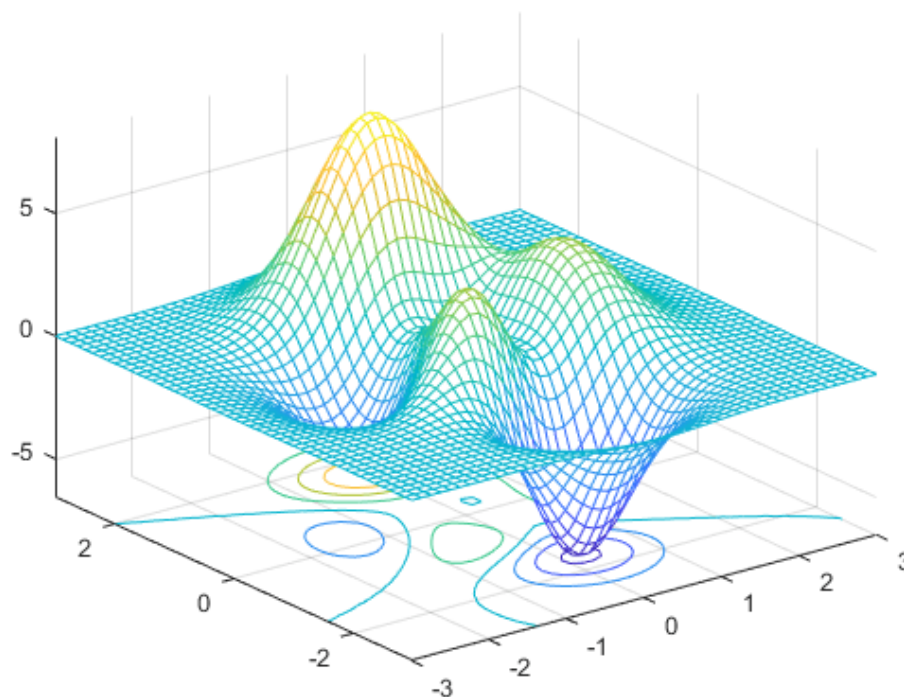


Analyse mathématique et principes de la méthode des éléments finis

Salahdine Ouhmmiali



Contents

1	Introduction	2
2	Partie théorique	2
2.1	Formulation variationnelle du problème	2
2.2	Unicité de la solution	3
2.3	Ecriture du problème sous forme d'un système linéaire	3
2.4	Matrice de raiduer pour l'assemblage Quadrilatère:	5
2.5	Représentation de la solution :	6
2.5.1	Assemblage triangulaire	6
2.5.2	Assemblage mixte	6
3	Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation	7
4	Conclusion	9

1 Introduction

Nous nous proposons d'obtenir par la méthode des éléments finis une approximation de la solution d'un problème dit de Laplace en deux dimensions muni de conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann). Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière partitionnée en deux sous-ensembles $\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, $u_d \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega_n)$, le problème de Laplace revient à déterminer u solution de:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{sur } \Omega \\ u(x, y) = u_d(x, y) & \text{sur } \partial\Omega_d \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = g(x, y) & \text{sur } \partial\Omega_n \end{cases}$$

Nous nous proposons de résoudre le problème (1) en le discrétisant par la méthode des éléments finis de Lagrange avec des éléments finis de type P_1 (approximation polynômiale du premier degré sur un triangle).

2 Partie théorique

2.1 Formulation variationnelle du problème

On cherche $u \in H^2(\Omega)$ tel que : $-\Delta u = f$ et $\gamma_0(u) = u_d$ et $\gamma_1(u) = \sum_{j=1}^n \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_j}) n_j = g$ donc pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$:

$$-\int_{\Omega} \Delta u w dx = \int_{\Omega} f w dx$$

On appliquant la formule de Green sur $\frac{\partial u}{\partial x}$ et w puisque $w \in H_0^1(\Omega)$ et en remplaçant dans l'équation précédente on obtient:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(w) \gamma_1(u) d\gamma = \int_{\Omega} f w dx$$

On distingue entre la frontière de Neumann $\partial\Omega_n$ et celle de Dirichlet $\partial\Omega_d$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g d\gamma - \int_{\partial\Omega_d} \gamma_0(w) \gamma_1(u) d\gamma = \int_{\Omega} f w dx$$

avec $\gamma_0(w) = 0$, donc $\int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g d\gamma = \int_{\Omega} f w dx$

Pour $v = u - u_d$ où $v \in H_0^1$ on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx + \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w dx - \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g d\gamma = \int_{\Omega} f w dx$$

Donc on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\boxed{\int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx = \int_{\Omega} f w dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_0(w) g d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w dx}$$

2.2 Unicité de la solution

On admettra que la forme bilinéaire (qu'on appellera a dans la suite) sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, définie par

$$\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$, et qu'ainsi muni de ce produit scalaire, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On définit :

$$l : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow \int_{\Omega} f w dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w dx$$

- a est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, en effet:

$$|a(v, w)| = | \langle v, w \rangle_{1,\Omega} | \leq |v|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega} \leq |v|_{H^1} |w|_{H^1}$$

- a est coercive en utilisant le lemme de Poincaré, puisque $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ est borné.
- l est linéaire par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.
- l est continue :

$$- \left| \int_{\Omega} f w dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} |w|_{1,\Omega} \quad \text{où } C_{\Omega} \text{ la constante du lemme de Poincaré.}$$

$$- \left| \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) d\gamma \right| \leq K_{\gamma_0} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} |w|_{1,\Omega} \quad \text{où } K_{\gamma_0} \text{ la constante de continuité de la trace } \gamma_0.$$

$$- \left| \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla w dx \right| \leq |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega} \quad \text{par Cauchy shwartz}$$

$$\text{Donc } |l(w)| \leq \left(C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} + K_{\gamma_0} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + |u_d|_{1,\Omega} \right) |w|_{1,\Omega}.$$

Avec les résultats précédents, on applique le théorème de Lax-Milgram :

$$\boxed{\exists ! v \in H_0^1(\Omega), \forall w \in H_0^1(\Omega) : a(v, w) = l(w)}$$

L'unicité de la solution u est issue de l'unicité de v car $v = u + u_d$.

2.3 Ecriture du problème sous forme d'un système linéaire

On est arrivé au problème suivant :

$$\text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega), \forall w \in H_0^1(\Omega) : a(v, w) = l(w)$$

On applique la méthode des éléments finis : On construit $V_h \in H_0^1(\Omega)$ de dimension fini n , et (η_1, \dots, η_n) une base de V_h .

Puisque la restriction du problème à l'espace V_h garde les mêmes constantes de continuité de l et de a , alors le problème: Trouver $v_h \in V_h, \forall w_h \in V_h : a(v_h, w_h) = l(w_h)$ admet une unique solution. Soit v_h cette solution unique.

On réécrit ce problème en utilisant la base de $V_h : \exists! (x_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n, v_h = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$.

Donc $\forall i \in [1, n] : a(v_h, \eta_i) = l(\eta_i)$

puis $\forall i \in [1, n] : a(\sum_{i=1}^n x_i \eta_i, \eta_i) = l(\eta_i)$

Ensuite $\forall i \in [1, n] : a(\sum_{j=1}^n x_j \eta_j, \eta_i) = l(\eta_i)$

donc $\forall i \in [1, n] : \sum_{j=1}^n a(\eta_j, \eta_i) x_j = l(\eta_i)$

Enfin $Ax = b$

Avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n], A_{ij} = a(\eta_j, \eta_i)$

$b = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n : \forall i \in [1, n] : b_i = l(\eta_i)$ et $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$

On a $\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n], A_{ij} = a(\eta_j, \eta_i) = \int_{\Omega} \nabla \eta_i \nabla \eta_j dx$

et $\forall i \in [1, n] : b_i = l(\eta_i) = \int_{\Omega} f \eta_i dx + \int_{\partial \Omega_n} g \gamma_0(\eta_i) d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u_d \nabla \eta_i dx$

On pose $u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$

donc $\int_{\Omega} \nabla u_d \nabla \eta_i dx = \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_k \nabla \eta_i dx$ avec $U_k = 0$ si $(x_k, y_k) \notin \partial \Omega_d$ et $U_k = u_d(x_k, y_k)$ sinon.

Par les conditions de Neumann on a $\gamma_0(\eta_i) = \eta_i$ sur la frontière $\partial \Omega_n$.

On en déduit donc que la forme variationnelle de la question 2 aboutit au système linéaire

$Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$ tels que:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \eta_i^{\top} \nabla \eta_j dx \\ b_i &= \int_{\Omega} f \eta_i dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_i d\gamma - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_i^{\top} \nabla \eta_k dx \end{aligned}$$

Ce système admet une unique solution car la matrice A est définie positive, en effet:

$$\begin{aligned} &x^T Ax \\ &= \sum_{i,j \in [1, n]^2} A_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i,j \in [1, n]^2} a(\eta_i, \eta_j) x_i x_j = a\left(\sum_{j=1}^n x_j \eta_j, \sum_{i=1}^n x_i \eta_i\right) \\ &= a(x, x) \geq 0 \text{ (puisque } a \text{ est coercive)} \end{aligned}$$

2.4 Matrice de raiduer pour l'assemblage Quadrilatère:

On note M la matrice de raideur pour l'assemblage quadrilatère.

On a $M_{ij} = \int_Q \nabla \eta_i \nabla \eta_j = \int_0^1 \int_0^1 \nabla \phi_i^T(u, v) \left(J_\phi J_\phi^T \right)^{-1} \nabla \phi_j(u, v) |J_\phi| du dv$

où J_ϕ la jacobienne : $J_\phi = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$

et $\left(J_\phi J_\phi^T \right)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $|J_\phi| = \det(J_\phi)$ et $(\phi_i)_{1 \leq i \leq 4}$ désignent les fonctions de base sur le carré unité définies par:

$$\phi_1(\xi, \zeta) = (1 - \xi)(1 - \zeta)$$

$$\phi_2(\xi, \zeta) = \xi(1 - \zeta)$$

$$\phi_3(\xi, \zeta) = \xi\zeta$$

$$\phi_4(\xi, \zeta) = (1 - \xi)\zeta$$

On a besoin de calculer que 10 termes de la matrice M car elle est symétrique. ($M_{ij} = \int_Q \nabla \eta_i \nabla \eta_j = M_{ji}$).

On trouve :

$$M = \frac{|J_\phi|}{6} \begin{pmatrix} 2a + 3b + 2c & -2a + c & -a - 3b - c & a - 2c \\ -2a + c & 2a - 3b + 2c & a - 2c & -a + 3b - c \\ -a - 3b - c & a - 2c & 2a + 3b + 2c & -2a + c \\ a - 2c & -a + 3b - c & -2a + c & 2a - 3b + 2c \end{pmatrix}$$

2.5 Représentation de la solution :

2.5.1 Assemblage triangulaire

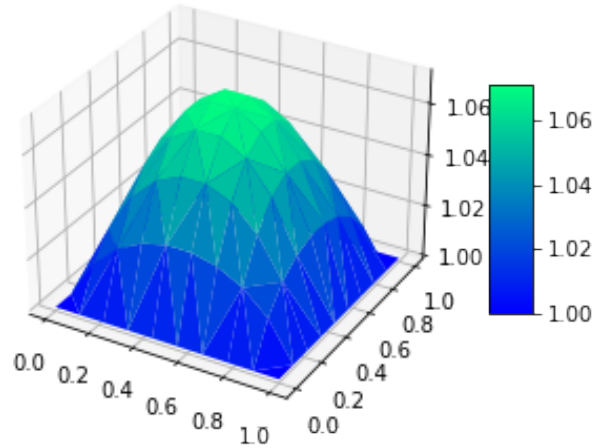


Figure 1: Solution de la méthode des éléments finis avec maillage triangulaire

2.5.2 Assemblage mixte

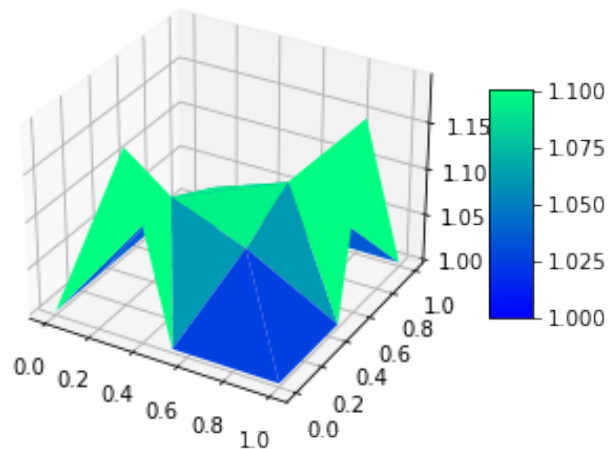


Figure 2: Solution de la méthode des éléments finis avec maillage mixte

3 Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation

En traçant la loi log-log de l'erreur, on obtient la figure suivante:

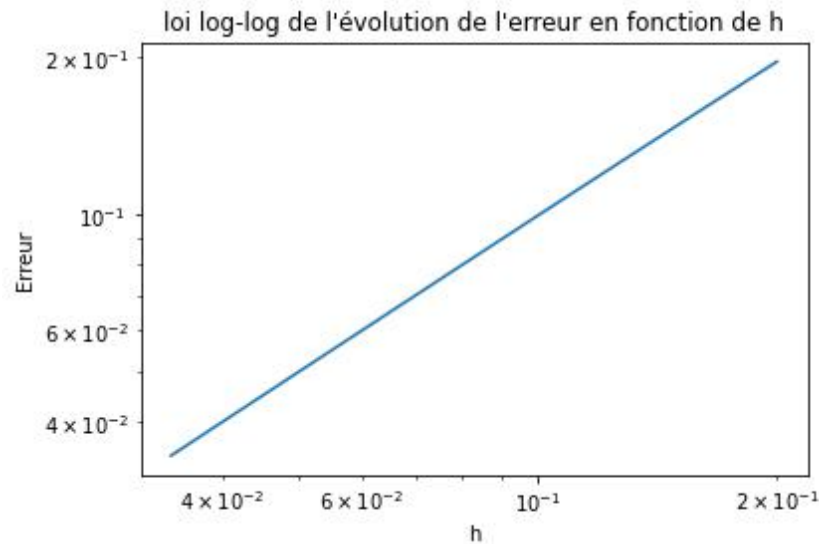


Figure 3: L'erreur entre la solution u et la solution exacte en fonction de h

A partir de la figure on déduit que l'erreur est linéaire et très faible, et on obtient l'ordre de discrétisation h^2 .

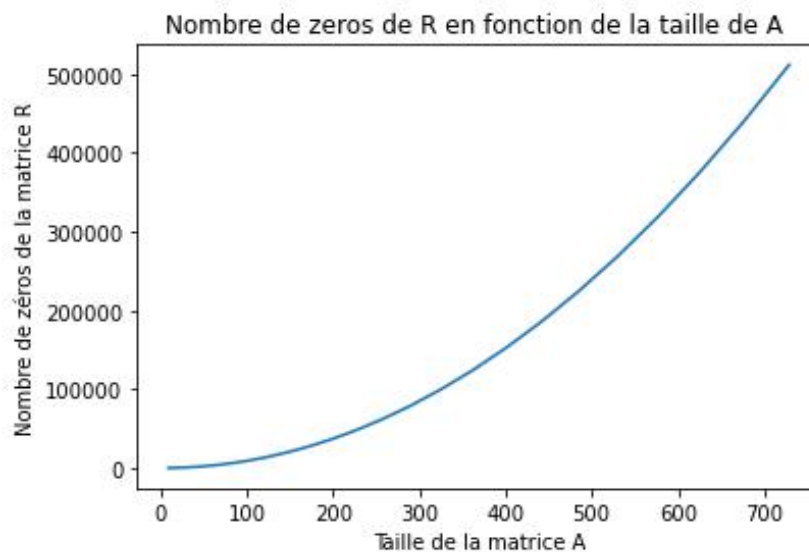


Figure 4: Le nombre de zéros de la matrice R en fonction de la taille de A

La figure précédente montre l'évolution de nombre des éléments non nuls de la matrice R , issue de la factorisation de Cholesky de A , en fonction de la taille de A . On remarque que le nombre de non-zéros augmente significativement avec la taille de A .

On en déduit qu'avec des grandes tailles, on se trouve avec des matrices creuses, on pourra donc utiliser des formats plus convenables aux matrices creuses comme **dok_matrix** et **csr_matrix** de la bibliothèque **scipy.sparse** .

4 Conclusion

Dans cette feuille on a présenté la résolution du problème dit de Laplace par la méthode des éléments finis de Lagrange, avec des éléments finis de type P_1 . Une analyse de l'évolution de nombre des éléments nuls de la matrice A en fonction de sa taille montre que le caractère creux de la matrice R (issue de la factorisation de Cholesky de A) augmente avec le nombre des éléments de maillage. Donc afin d'optimiser la résolution, il faut faire un préconditionnement de la matrice A pour optimiser la factorisation de Cholesky, et utiliser un format de stockage plus optimal comme `scipy.sparse.csr_matrix` en Python.