GIẢI TÍCH HÀM (Bang Nguyen)

October 3, 2024

1 Giải tích hàm

- Xác định:
  - Cái **đã có**.
  - Cái cần **chứng minh**.
  - Từ đó $\rightarrow$ Cái cần **tìm**.
- Giả thuyết $\rightarrow$ Kết quả.
  - Giả thuyết $\rightarrow$ **đã có**.
  - Kết quả $\rightarrow$ **cần tìm**.

1.1 Các phép toán trên tập hợp

1.1.1 Phép giao

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Note**
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cap B \subset A$
  - $A \cap B \subset B$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

1.1.2 Phép hợp

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Note**
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \subset A \cup B$
  - $B \subset A \cup B$
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.1.3 Phép trừ

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- **Note**

- $A \subset X$, $B \subset X$.
- $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$
- $X \setminus (X \setminus A) = A$
- $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
- $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

- **De Morgan**
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.2 Định nghĩa

1.2.1 Metric

- **TXĐ:** $X \neq \emptyset$
- $\forall x, y, z \in X :$
  - $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - $d(x,y) = d(y,x)$
  - $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

1.2.2 Tập

- **TXĐ:**
  - (X, d) là không gian metric
  - $a \in X$
  - $r > 0$
  - $A \subset X$
- **Quả cầu mở** (tâm a, bán kính r) trong X:

$$B(a;r) = \{x \in X | d(a,x) < r\}$$

- **Quả cầu đóng** (tâm a, bán kính r) trong X:

$$B'(a;r) = \{x \in X | d(a,x) \leq r\}$$

- **Mặt cầu** (tâm a, bán kính r) trong X:

$$S(a;r) = \{x \in X | d(a,x) = r\}$$

Tập mở

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d) $a \in X$ $r > 0$ $A \subset X$	A là **tập mở** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in A$ $\exists r > 0$ $B(x;r) \subset A$

Tập đóng

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d) $a \in X$ $r > 0$ $A \subset X$	A là **tập đóng** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$X \setminus A$ tập mở
(X, d) $a \in X$ $r > 0$ $A \subset X$	A là **tập đóng** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$A = \overline{A}$ (phần dính)
(X, d) $a \in X$ $r > 0$ $A \subset X$	A là **tập đóng** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\forall (x_n) \subset A : x_n \to x \in X \Rightarrow x \in A$
(X, d) $A \subset Y \subset X$ Y đóng trong X	A đóng trong Y	$\Leftrightarrow$	A đóng trong X

Tập bị chặn

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d) $a \in X$ $r > 0$ $A \subset X$	A là **tập bị chặn**	$\Leftrightarrow$	$\exists a \in X$ $\exists r > 0$ $A \subset B(a; r)$

1.2.3 Dãy

Dãy hội tụ

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d) (x_n)	(x_n) **hội tụ** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $d(x_n, x) < \epsilon$
(X, d) (x_n)	(x_n) **hội tụ** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\exists x \in X : x_n \to x$ khi $n \to \infty$
(X, d) (x_n)	(x_n) **hội tụ** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\exists x \in X : d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$

Dãy Cauchy

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d) (x_n)	(x_n) **dãy Cauchy** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} :$ $\forall m, n \geq n_0$ $d(x_m, x_n) < \epsilon$

Dãy bị chặn

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d) (x_n)	(x_n) **dãy bị chặn** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\exists a \in X$ $\exists r > 0 :$ $(x_n) \subset B(a; r)$

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d) (x_n)	(x_n) **dãy bị chặn** (trong X)	$\Leftrightarrow$	$\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(a;r)$

1.2.4 Đầy đủ

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d)	(X,d) **đầy đủ**	$\Leftrightarrow$	$\forall(x_n) \subset X$ (x_n) dãy Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) hội tụ

- **Tip**
  - Lấy $(x_n) \subset X$
  - (x_n) dãy Cauchy
  - C/m (x_n) hội tụ.

1.2.5 Compắc

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d)	(X,d) **compắc**	$\Leftrightarrow$	$\forall(x_n) \subset X$ $\exists(x_{n_k}) \subset (x_n)$: (x_{n_k}) hội tụ

- **Tip**
  - Lấy $(x_n) \subset X$
  - C/m (x_n) có dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ sao cho (x_{n_k}) hội tụ.

1.3 Kết quả

1.3.1 Giao/hợp các tập mở (đóng)

- **TXD:**
  - (X,d)
  - $\forall i \in I$
  - $(A_i)_{i\in I} \subset X$
  - $A_i = \emptyset$ #### Mở
- A_i mở $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ mở
- A_i mở (I hữu hạn)$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ mở #### Đóng
- A_i đóng $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i$ đóng
- A_i đóng (I hữu hạn) $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ đóng ### Phần dính, phần trong #### Phần dính $(\overline{A})$

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d) $A \subset X$ $a \in X$	$x \in \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	$\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
(X,d) $A \subset X$ $a \in X$ $x \in X$	$x \in \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	$\exists (x_n) \subset A : x_n \to x \in X \Rightarrow x \in A$
(X,d) $A \subset X$ $x \in X$	$x \in \overline{A}$	$\Leftrightarrow$	$\exists (x_n) \subset A : x_n \to x$ khi $n \to \infty$

- **Note**

  $\overline{A}$ là **tập đóng** & là **tập đóng nhỏ nhất** chứa A

Phần trong ($\mathring{A}$)

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d) $A \subset X$ $a \in X$	$x \in \mathring{A}$	$\Leftrightarrow$	$\exists r > 0$ $B(x,r) \subset A$

- **Note**
  - $\mathring{A}$ là **tập mở** & là **tập mở lớn nhất** chứa trong A
  - $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

1.3.2 Vết của tập mở (đóng)

- **Note**
  - $\forall a \in Y$, $\forall r > 0$
    - $B_Y(a,r) = Y \cap B_X(a,r)$
  - $V \subset X$, $V \cap Y$ là **vết** của V lên Y

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X,d) $A \subset Y \subset X$ $Y \neq \emptyset$	A **mở** trong Y	$\Leftrightarrow$	$\exists V$ mở trong X $A = V \cap Y$
(X,d) $A \subset Y \subset X$ $Y \neq \emptyset$	A **đóng** trong Y	$\Leftrightarrow$	$\exists F$ đóng trong X $A = F \cap Y$
(X,d) $A \subset Y \subset X$ $Y \neq \emptyset$	A **mở (đóng)** trong Y	$\Leftrightarrow$	A là vết của tập mở (đóng) trong X lên Y
(X,d) $A \subset Y \subset X$ $Y \neq \emptyset$	A **mở (đóng)** trong X	$\Rightarrow$	A mở (đóng) trong Y
(X,d) $A \subset Y \subset X$ $Y \neq \emptyset$	A **mở (đóng)** trong Y Y **mở (đóng)** trong X	$\Rightarrow$	A mở (đóng) trong X

1.3.3 Kgian metric con đầy đủ, compắc

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d) $Y \subset X$	Y **đầy đủ**	$\Rightarrow$	Y đóng trong X
(X, d) $Y \subset X$	Y **đóng** trong X X **đầy đủ**	$\Rightarrow$	Y đầy đủ
(X, d) $\emptyset \neq Y \subset X$	Y **compac**	$\Rightarrow$	Y đầy đủ Y bị chặn (tập đóng)
(X, d) $\emptyset \neq Y \subset X$	Y **đóng** trong X X **compac**	$\Rightarrow$	Y compac

1.3.4 Tiền compắc

ĐIỀU KIỆN	VẾ TRÁI		VẾ PHẢI
(X, d)	X **tiền compac**	$\Leftrightarrow$	$\forall \epsilon > 0$ $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$
(X, d)	X **compac**	$\Leftrightarrow$	X tiền compac X đầy đủ