ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

ĐỖ NGỌC MINH THƯ
NGUYỄN CHÍ BẰNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU TUYẾN TÍNH NGUYÊN

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN
CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2021

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

ĐỖ NGỌC MINH THƯ
NGUYỄN CHÍ BẰNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU TUYẾN TÍNH NGUYÊN

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC SINH VIÊN
CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

Người hướng dẫn

PGS.TS. TẠ QUANG SƠN

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2021

Lời cam đoan

Chúng tôi tên là Đỗ Ngọc Minh Thư và Nguyễn Chí Bằng, là các sinh viên lớp DTU1221, khoa Toán - Ứng dụng , khóa 2022-2026, thuộc trường Đại học Sài Gòn.

Xin cam đoan rằng: Toàn bộ nội dung được trình bày trong đề tài này này đều do chúng tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Quang Sơn. Những kết quả nghiên cứu của tác giả khác được sử dụng trong đề tài đều có trích dẫn đầy đủ. Chúng tôi xin chịu trách nhiệm nếu có các nội dung sao chép không hợp lệ hoặc vi phạm quy chế đào tạo.

Tp. HCM, tháng ... năm 2024

Tác giả

Đỗ Ngọc Minh Thư

Lời cảm ơn

Đề tài nghiên cứu khoa học này được hoàn thành tại trường Đại Học Sài Gòn dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Quang Sơn. Chúng em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Thầy trong suốt quá trình thực hiện đề tài này.

Xin cám ơn Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn, đã tạo nhiều điều kiện thuận lợi, giúp chúng em nâng cao chất lượng và nhiệm vụ học tập qua việc thực hiện đề tài này.

Tp. HCM, tháng ... năm 2024

Tác giả

Đỗ Ngọc Minh Thư

Mục lục

Danh mục các kí hiệu

$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide n-chiều
F	Tập chấp nhận được của bài toán tối ưu
$\langle u, v\rangle$	Tích vô hướng của hai véc tơ u và v trong $\mathbb{R}^n$

Lời nói đầu

Thực tế cho thấy rằng trong nhiều bài toán tối ưu, nghiệm tìm được mong muốn phải là các số nguyên hoặc một bộ phận nghiệm của bài toán phải là các số nguyên. Điều này có thể thấy ở các bài toán như phân phối hàng hóa, sắp xếp tối ưu nhân lực, bài toán trên mạng, phân luồng giao thông,... Đã từng có nhận định về việc tìm nghiệm nguyên của bài toán tối ưu là sau khi tìm được nghiệm tối ưu thì thưc hiện việc làm tròn nghiệm. Cách thức này thường không cho kết quả như mong muốn. Bởi lẽ nghiệm làm tròn có thể không thuộc miền chấp nhận được hoặc có thể việc làm tròn như thế không chắc đã cho nghiệm tốt nhất như mong muốn. Lý thuyết về việc tìm nghiệm nguyên cho các bài toán tối ưu đáp ứng điều mong đợi nêu trên.

Bài toán tối ưu thường được xem xét dưới dạng

$$\begin{aligned} \text{Min (Max)} \quad & f(x) \\ & x \in F, \end{aligned}$$

trong đó $f(x)$ là hàm mục tiêu tối ưu cần xác định, phụ thuộc vào biến x, xác định trên một không gian cho trước và F là tập ràng buộc còn gọi là tập chấp nhận được. Mục tiêu của bài toán là đi tìm $x \in F$ sao cho hàm mục tiêu $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất hay bé nhất. Vì bài toán Max có thể đưa về bài toán Min và ngược lại, nên trong nhiều trường hợp để xây dựng các thuật toán tìm nghiệm cho bài toán, người ta chỉ cần xét một trong hai dạng nêu trên là đủ.

Trong đề tài này chúng tôi quan tâm tìm hiểu về nghiệm nguyên cho bài toán có hàm mục tiêu tuyến tính trên tập chấp nhận được xác định bởi các hàm tuyến tính. Bài toán có dạng như sau

$$\text{Min} \quad c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases}$$

Trong đó, $c_i, i = 1, ..., n$, các hệ số a_{ij} với $i = 1, ..., m$ và $j = 1, ..., n$, và b_i với $i = 1, ..., m$ là các số thực cho trước.

Bằng cách dùng ký hiệu véc tơ và ma trận, bài toán nêu trên được viết dưới dạng

$$\text{Min} \quad \langle c, x\rangle$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Trong đó, cho trước A là ma trận có m dòng và n cột, c là véc tơ n chiều và b là véc tơ m chiều. Chú ý rằng, các ràng buộc bất đẳng thức đều có thể biến đổi về ràng buộc đẳng thức. Vì thế trong nội dung của đề tài này, nếu không nói gì thêm, bài toán luôn được xét dưới dạng tổng quát

$$\text{(IP) Min} \quad \langle c, x\rangle$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Các phương pháp mà đề tài này tìm hiểu là phương pháp sử dụng siêu phẳng cắt Gomory và phương pháp tìm nghiệm nguyên theo kiểu nhánh-cận do Land-Doig đề xuất.

Nội dung đề tài được tổ chức thành 3 chương trong đó

Chương 1; Dành để tóm lược lại một số kiến thức về Đại số tuyến tính liên quan đến véc tơ và ma trận. Đồng thời chương này cũng nhắc lại một số kết quả về phương pháp đơn hình khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Chương 2: Là phần chính của nội dung đề tài. Trong đó được chia làm hai phần. Phần đầu dành để trình bày phương pháp dùng siêu phẳng cắt Gomory và phần tiếp theo dành để trình bày phương pháp nhánh-cận kiểu Land-Doig. Trong mỗi phần đều có các ví dụ minh họa. Ngoài ra, dựa trên thực tế, khi sử dụng các phương pháp này để giải bài toán Quy hoạch nguyên, đề tài cũng đưa ra những nhận xét về phương pháp.

Phần cuối của đề tài này là Chương 3. Chúng tôi thử áp dụng các phương pháp trên để khảo sát việc tìm nghiệm nguyên cho bài toán dạng phân thức tuyến tính.

Do lần đầu tham gia tập dượt nghiên cứu khoa học. Các tri thức chọn lọc và trình bày trong nội dung của đề tài này chưa đầy đủ hoặc còn sơ suất. Chúng em kính mong nhận được sự chỉ bảo từ quý thầy cô.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản về bài toán quy hoạch tuyến tính

Kiến thức trình bày trong chương này, hầu hết được tham khảo từ các tài liệu [?] và [?].

1.1. Véc tơ, ma trận và các tính chất

1.1.1 Véc tơ và các phép toán

- Ký hiệu vector $x \in \mathbb{R}^n$,

  $$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

  Trong đó $x_i \in \mathbb{R}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Các phép toán:

  $$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
  $$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

  Trong đó x, $y \in \mathbb{R}^n$ và $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Thứ tự vector:

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i,$$

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i,$$

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i.$$

  Trong đó $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Vector đơn vị: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$.

- Vector 0: $0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

1.1.2 Ma trận và các phép toán

- Ký hiệu A là ma trận $m \times n$, trong đó $A = (a_{ij})$ và $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. A_i chỉ dòng thứ i của ma trận A và A_j chỉ cột thứ j của ma trận A.

- A là ma trận vuông khi $m = n$.

- Ma trận cột:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

- Ma trận dòng:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

- Ma trận đơn vị:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Cộng ma trận: A, B là ma trận $m \times n$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Trong đó $i = 1, 2, \ldots, m$ và $j = 1, 2, \ldots, n$.

- Nhân với 1 số: A, B là ma trận $m \times n$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Trong đó $i = 1, 2, \ldots, m$ và $j = 1, 2, \ldots, n$.

- Với ma trận dòng

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

và ma trận cột

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ta có tích hai ma trận

$$A \times B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

- Tích của ma trận A cấp $m \times p$ với ma trận B cấp $p \times n$ ta được ma trận C cấp $m \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 & \cdots & A_1 B^n \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 & \cdots & A_2 B^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m B^1 & A_m B^2 & \cdots & A_m B^n \end{bmatrix}.$$

- Hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

có thể viết lại thành

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

1.1.3 Các phép biến đổi trên ma trận

- Các phép biến đổi bao gồm:
  - **Phép đổi hàng.** Đổi chỗ hàng i và hàng j của ma trận, được ký hiệu $h_i \leftrightarrow h_j$.
  - **Phép thay thế tỷ lệ.** Nhân hàng i của ma trận với số $\alpha \neq 0$, được ký hiệu $h_i \leftarrow \alpha h_i$.
  - **Phép thay thế hàng.** Cộng vào hàng i một bội k lần hàng j, được ký hiệu là $h_i \leftarrow h_i + kh_j$, với $j \neq i$.

1.1.4 Định thức của ma trận và ma trận đảo

Cho ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Định thức của ma trận A được tính theo công thức:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{1.2}$$

1.2. Một số kiến thức cơ bản về Bài toán tối ưu tuyến tính

1.2.1 Bài toán dạng chính tắc và chuẩn tắc

- **Bài toán dạng chính tắc**

  Ta có bài toán dạng:

$$\begin{aligned} & f(x) = c^T x \quad \longrightarrow \text{Min} \\ & \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

  Thì ta gọi bài toán trên có dạng chính tắc và có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Min } f(x) = c^T x \\ & \begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

  Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ và $c^T = (c_1 \; c_2 \; \ldots \; c_n)$.

- **Bài toán dạng chuẩn tắc**

  Nếu bài toán có dạng:

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x \quad & \longrightarrow \text{Min} \\
& \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Thì ta gọi bài toán trên có dạng chuẩn tắc và có thể viết lại dưới dạng:

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \text{Min } f(x) = c^T x \\
& \begin{cases} Ax \geq b, \\ x_j \geq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Tương tự A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ và $c^T = (c_1\, c_2\, \ldots\, c_n)$.

1.2.2 Chuyển bài toán về dạng chính tắc

Để thuận tiện, ta chỉ xét dạng bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát là **dạng chính tắc** và bất kỳ bài toán nào cũng có thể đưa về dạng chính tắc.

- **Phương pháp đưa về dạng chính tắc:**
  - Bài toán $\max f(x) \longrightarrow -\min[-f(x)]$.
  - Bằng cách thêm ẩn phụ x_{n+i} tương ứng có hệ số trong hàm mục tiêu là $c_{n+i} = 0$, ta có thể đưa bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

hoặc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

lần lượt thành đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

hoặc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

– Nếu tồn tại bất kỳ x_k không có ràng buộc thì ta viết

$$x_k = x_k^{'} - x_k^{''}$$

với $x_k^{'} \geq 0$ và $x_k^{''} \geq 0$.

Kể từ đây, ta chỉ quan tâm bài toán (1.4).

1.3. Giải bài toán với cơ sở ban đầu

1.3.1 Trường hợp bài toán chưa có cơ sở dạng chính tắc

1.3.1.1 Phương pháp hai pha

Nếu 1 bài toán quy hoạch tuyến tính có hệ ràng buộc theo dạng

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq c \end{aligned} \tag{1.7}$$

Mà $b \geq 0$ thì có thể biến đổi hệ ràng buộc của bài toán dạng chính tắc bằng cách thêm vào hàng thứ i của hệ nói trên ẩn y_i. Hệ được viết lại:

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x, y &> 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Khi đó ta có ngay một phương án xuất phát $(0, \overline{\mathrm{y}})$ với $\overline{\mathrm{y_i}} = b_i; i = 1, 2, \ldots, m$. Thực chất các ẩn y_i là các ẩn giả tạo, bởi lẽ trong miền xác định của bài toán không cần đến các biến này. Ý tưởng này được áp dụng cho bài toán dạng chính tắc để tìm phương án cực biên ban đầu như sau:

Từ bài toán dạng chính tắc

$$\begin{aligned} &Min\, f(x) = \langle c, x\rangle \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &\text{Ta xét } Min \sum_{i=1}^{m} y \\ &Ax + y = b \\ &x, y \geq 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

- Nếu bài toán (1.9) có x_0 chấp nhận được thì bài toán (1.10) đạt giá trị tối ưu với $u_0\, y = 0$

- Nếu bài toán (1.9) ta có u_0 chấp nhận được tức là $A_x \neq 0$ với mọi $x \geq 0$ thì bài toán (1.10) sẽ có u_0 chấp nhận được với $y \neq 0$ tức là giá trị tối ưu của bài toán (1.10) là số dương.

- Dùng thuật toán đơn hình cho bài toán (1.10) ở mỗi bước của thuật giải ta nhận được u_0 chấp nhận được.

- Nếu đến bước mà bài toán có giá trị tối ưu $= 0$ thì ta sẽ nhận được u_0 cơ bản chấp nhận được cuối cùng với các ẩn $y_i = 0, i = 1, 2, \ldots, m$.

Từ đây, bài toán (1.9) được giải với u_0 cơ sở chấp nhận được vừa tìm.

1.3.1.2 Phương pháp bài toán M

Đối với các bài toán quy hoạch tuyến tính nhưng không đủ số vector cơ sở. Ta thêm vào 1 ẩn giả ở ràng buộc và Mx_4 vào hàm mục tiêu với M là số dương rất lớn (đối với bài toán Min). Từ đó ta dẫn đến được dạng bài toán quy hoạch tuyến tính M.

Giả sử ta có bài toán có ma trận A chưa xác định được hệ cơ sở

$$\begin{aligned} & Min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, \mathrm{m}} \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1, \mathrm{n}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Từ đó ta xét BT có ẩn giả tạo sau (gọi là BTM) (1.12)

$$\begin{aligned} & Min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, \mathrm{m}} \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1, \mathrm{n+m}} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Với M là số thực dương lớn tuỳ ý, các ẩn $x_{n+i}, i = \overline{1, \mathrm{m}}$ là các ẩn giả tạo. Việc đưa các ẩn giả tạo nhằm tạo ra 1 cơ sở. Vì vậy, không nhất thiết phải có đủ m ẩn giả tạo.

Định lý 1.1. *Với M đủ lớn thì*

BT (1.11) *có PATU X khi và chỉ khi BT* (1.12) *có PATU* $\overline{\mathrm{X}} = (X, 0)$.

Nếu BT (1.12) *có PATU* $\overline{\mathrm{X}}$ *mà trong đó có chứa* $x_{m+i} > 0$ *thì tập PATU của BT* (1.11) *là rỗng.*

Chú ý 1.1. *Đối với bài toán M,* Δ_j *có dạng* $\Delta_j = \alpha_j + \beta_j M$. *Vì thế dòng thứ* $m+1$ *của bảng đơn hình, ta nên tách thành hai dòng ghi* α_j *và* β_j. *Để đánh giá* Δ_j *ta cần chú ý tới* B_j, *sau đó mới chú ý đến* α_j.

1.3.2 Giải bài toán khi đã có cơ sở chính tắc

Khi bài toán đã có đủ số véc tơ cơ sở

Chương 2

Bài toán quy hoạch tuyến tính có nghiệm nguyên

2.1. Sự cần thiết phải nghiên cứu về bài toán quy hoach có nghiệm nguyên

-Mô tả bằng các vi dụ

2.2. Lý thuyết về cách tìm nghiệm nguyên của bài toán Quy hoạch tuyến tính

2.2.1 Sự cần thiết phải có một lý thuyết riêng

2.2.2 Phương pháp Gomory

2.2.2.1 Giới thiệu phương pháp và ý nghĩa

2.2.2.2 Các bước thực hiện của phương pháp

2.2.2.3 Ví dụ minh họa

2.2.3 Phương pháp Land-Doig

2.2.3.1 Giới thiệu phương pháp và ý nghĩa

2.2.3.2 Các bước thực hiện của phương pháp

2.2.3.3 Ví dụ minh họa

Chương 3

Mở rộng kết quả cho bài toán dạng phân thức tuyến tính

Kết luận

Luận văn này đạt được các vấn đề sau đây:

-
-
-

Tài liệu tham khảo

[1] Erik B. Bajanilov, *Linear fractional programming: Theory, Mẹthods, Applications, and Software*, Springer, 2003.

[2] Stancu Minasian, *Fractional Programming: Theory, Methods, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1992.