

# Tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên

**Nguyễn Chí Bằng**

Ngày 2 tháng 3 năm 2024

# TÓM TẮT

- Giới thiệu về bài toán tối ưu phân tuyến tính:
  - Cơ sở lý thuyết.
  - Thuật toán Dinkelbach.
- Phương pháp giải bài toán tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên bằng thuật toán nhánh cận (LandDoig).

# NỘI DUNG

- 1 Giới thiệu
- 2 Phương pháp hình học
- 3 Thuật toán Dinkelbach
- 4 Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

# Giới thiệu bài toán

# Tối ưu phân tuyến tính (Linear-Fractional Programming)

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Bài toán  $(F)$  gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính**.

- Trong đó  $A$  là ma trận  $m \times n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ , với  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . Tập

$S_F := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.

- $P(x) = p^T x + p_0$ , với  $p^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$  và  $D(x) = d^T x + d_0$ , với  $d^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$  ( $D(x) > 0, \forall x \in S_F$ ).

# Bài toán minh họa

$$Q(x) = \frac{4x_1 + 2x_2 - 6}{3x_1 + 2x_2 - 5} \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

## Mối quan hệ với bài toán tối ưu tuyến tính

- Nếu  $d^T = 0$  và  $d_0 = 1$ , bài toán (F) trở thành bài toán tối ưu tuyến tính (P) và ta gọi (F) là bài toán mở rộng của (P):

$$(P) \quad P(x) = p^T x + p_0 \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Nếu  $d^T = 0$  và  $d_0 \neq 0$ , ta thu được bài toán tuyến tính (Q):

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p^T}{d_0} x + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0} \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

- Ngược lại nếu  $p^T = 0$  và  $p_0 \neq 0$ :

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p_0}{d^T x + d_0} = \frac{p_0}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Tương tự bài toán:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{d^T x + d_0}{p_0} = \frac{D(x)}{p_0} \longrightarrow \text{Min}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- Nếu  $p^T$  và  $d^T$  phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại  $\mu \neq 0$  và  $p^T = \mu d^T$ , ta thu được hàm:



$$(Q) \quad Q(x) = \frac{\mu d^T x + p_0}{d^T x + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{d^T x + d_0} \quad (7)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

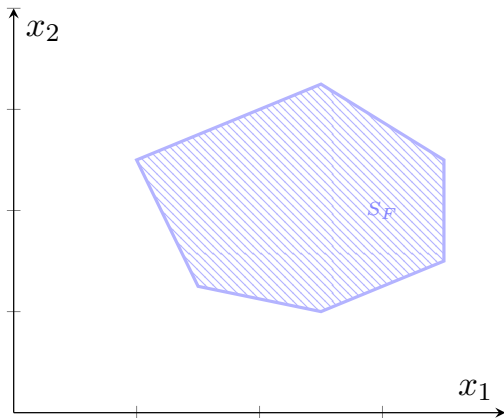
Ta thay bằng hàm  $D(x)$  với điều kiện:

- Nếu  $p_0 - \mu d_0 > 0$ ,  $D(x) \longrightarrow Min$ .
- Nếu  $p_0 - \mu d_0 < 0$ ,  $D(x) \longrightarrow Max$ .
- Nếu  $p_0 - \mu d_0 = 0$  thì  $Q(x) = \mu = \text{hằng số } (\forall x \in S_F)$ , ta bỏ qua bài toán.

# Phương pháp hình học

# Bài toán trên không gian $\mathbb{R}^2$

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \longrightarrow Max \quad (8)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \text{ trong đó } A = m \times 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Hình: Tập nghiệm minh họa của bài toán (F)

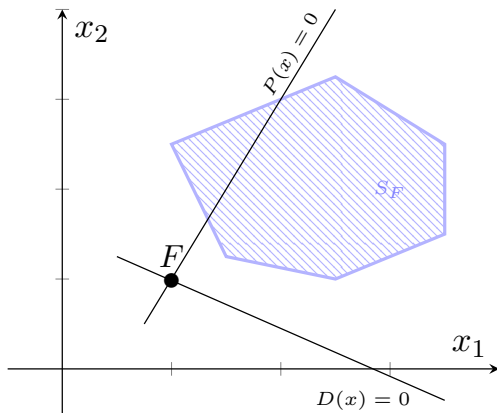
# Tính chất

Đặt  $Q(x) = K$  ( $K \in \mathbb{R}$ ), ta được:

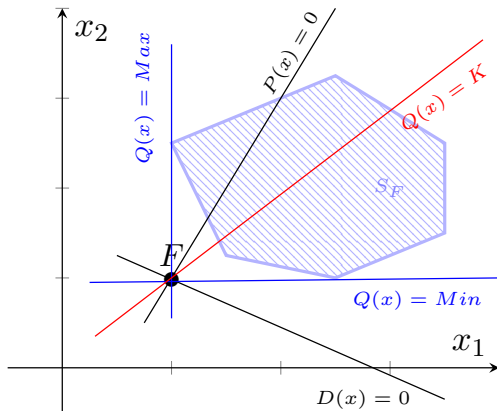
$$(p_1 - Kd_1)x_1 + (p_2 - Kd_2)x_2 + (p_0 - Kd_0) = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + p_0 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

- $Q(x) = K$  là đường mức quét qua tập  $S_F$ , đến khi gặp cực điểm thì ở đó ta nhận được giá trị  $K$  là giá trị tối ưu của bài toán (F).
- Ta xác định được điểm cố định  $F$  là nghiệm của phương trình (9), nói cách khác, điểm cố định  $F$  là điểm giao của 2 đường thẳng  $P(x) = 0$  và  $D(x) = 0$ .
- Trường hợp  $P(x) = 0$  song song với  $D(x) = 0$ , hay nói cách khác hệ (9) vô nghiệm thì điểm cố định  $F$  không tồn tại.



Hình: Minh họa điểm cố định  $F$



Hình: Minh họa đường mức  $Q(x) = K$

# Xét tính biến thiên

Từ phương trình (9), ta có:

$$x_2 = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1 - \frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2}. \quad (11)$$

Đạo hàm 2 vế ta được:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left[ -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1 \right] - \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2} \right]$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}$$

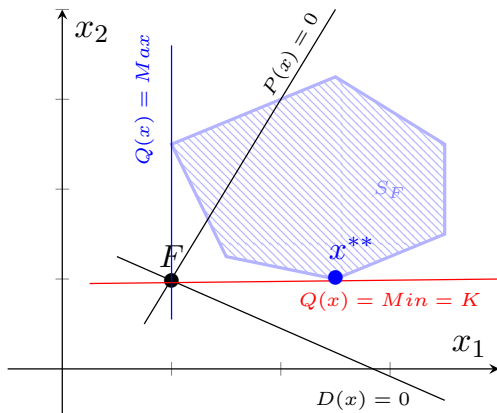
$$k = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2} \quad (\text{Đặt } k = \frac{dx_2}{dx_1})$$



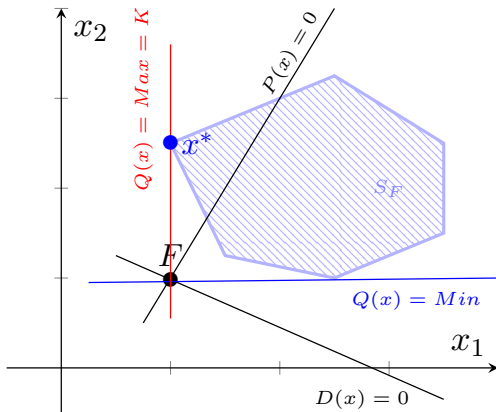
- Ta thấy hệ số góc  $k$  phụ thuộc vào tham số  $K$ , Khảo sát sự biến thiên của  $k$  theo  $K$ , ta có:

$$\frac{dk}{dK} = \frac{d_1 p_2 - d_2 p_1}{(p_2 - K d_2)^2} \quad (12)$$

- Giá trị của  $Q(x)$  tăng hay giảm phụ thuộc vào  $(d_1 p_2 - d_2 p_1)$ , do đó  $k$  biến thiên theo 1 chiều nhất định. Từ đây, ta có thể tìm được nghiệm tối ưu của bài toán (F).
- Quay đường mức  $Q(x) = K$  quanh điểm  $F$  đến khi trùng với cực điểm  $x^*$  ta nhận được giá trị cực đại của hàm  $Q(x)$ ,  $x^{**}$  ta nhận được giá trị cực tiểu của hàm  $Q(x)$ .



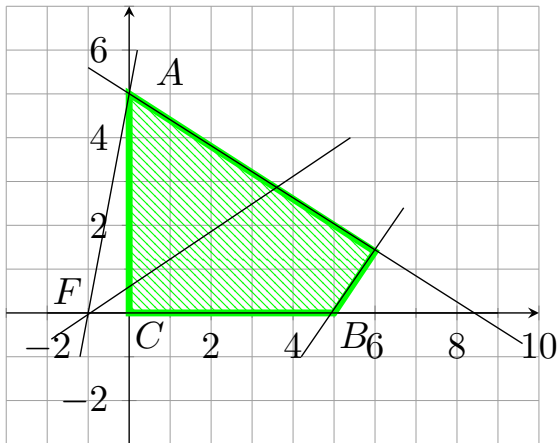
Hình:  $Q(x)$  đạt giá trị tối ưu tại điểm  $x^{**}$



Hình:  $Q(x)$  đạt giá trị tối ưu tại điểm  $x^*$

# Ví dụ minh họa

$$(F) \quad Q(x) = \frac{6x_1 + 3x_2 + 6}{5x_1 + 2x_2 + 5} \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = -6, \\ 5x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  điểm cố định  $F = (-1, 0)$  Ta có các cực điểm

$$A = (0, 5), B = (5, 0), C = (0, 0)$$

với giá trị

$$Q(A) = \frac{21}{15}, Q(B) = \frac{18}{15}, Q(C) = \frac{18}{15}$$

Hàm  $Q(x)$  đạt cực đại tại  $A = (0, 5)$ .

# Thuật toán Dinkelbach

# Tính chất

- Quay lại bài toán:

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow Max \quad (14)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Ta đặt hàm:

$$F(\lambda) = \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda D(x)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (15)$$



### Định lý 3.1

*Vector  $x^*$  là nghiệm tối ưu của bài toán (F) nếu và chỉ nếu*

$$F(\lambda^*) = \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0 \quad (16)$$

*Với*

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \quad (17)$$

## Chứng minh.

Nếu vector  $x^*$  là nghiệm tối ưu của bài toán (F), ta có:

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \geq \frac{P(x)}{D(x)}, \forall x \in S_F$$

Tương tự,

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq 0, \forall x \in S_F \quad (18)$$

Từ bất phương trình (18), ta được:

$$\Rightarrow \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0$$

Nếu vector  $x^*$  là nghiệm tối ưu thì:

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0, \forall x \in S_F$$

Với  $D(x) > 0$ ,  $\forall x \in S_F$ , ta có:

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = -D(x) < 0 \quad (19)$$

Đồng nghĩa  $F(\lambda)$  giảm theo  $\lambda$ , từ đó ta thiết lập được thuật toán Dinkelbach.

# Thuật toán Dinkelbach

## Bước 1. Thiết lập

Đặt  $x^{(0)} \in S_F$ , tính  $\lambda^{(1)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$ ,  $k := 1$ .

## Bước 2. Tìm nghiệm

Tìm  $x^{(k)}$  là nghiệm của bài toán  $\max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^{(k)} D(x)\}$

## Bước 3. Kiểm tra

Nếu  $F(\lambda^{(k)}) = 0$  thì  $x^* = x^{(k)}$  là nghiệm tối ưu và bài toán được giải, nếu không chuyển sang bước 4.

## Bước 4. Cải thiện

Đặt  $\lambda^{(k+1)} := \frac{P(x^{(k)})}{D(x^{(k)})}$ ,  $k := k + 1$  và quay lại bước 2.

# Ví dụ minh họa

$$(F) \quad Q(x) = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3x_1 + 2x_2 + 15} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Với  $x = (0, 0)^T$  ta có  $x^{(0)} \in S_F$ , cho  $x^{(0)} = (0, 0)^T$  ta có

$$\lambda^{(1)} = \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})} = \frac{1}{3}$$

Ta giải bài toán

$$P(x) - \lambda^{(1)} D(x) = P(x) - \frac{1}{3} D(x) = \frac{1}{3} x_2 \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = (0, 3)^T, F(\lambda^{(1)}) = 1$$

vì  $F(\lambda^{(1)}) \neq 0$

$$\lambda^{(2)} = \frac{P(x^{(1)})}{D(x^{(1)})} = \frac{8}{21}$$

$$P(x) - \lambda^{(2)} D(x) = -\frac{1}{7} x_1 + \frac{5}{21} x_2 - \frac{5}{7} \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = (0, 3)^T, F(\lambda^{(2)}) = 0$$

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán (F) là  $x^* = (0, 3)^T$  và giá trị tối ưu  $Q(x^*) = \frac{8}{21}$ .

# Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

# Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn

$$(H) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases} \quad (21)$$

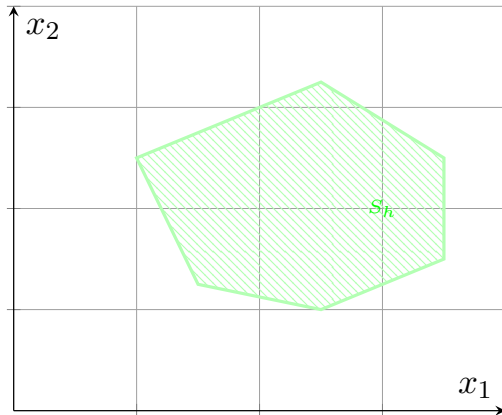
- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn**.

- Trong đó  $A$  là ma trận  $m \times n$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ , với  $x \in \mathbb{Z}_+^n$ . Tập

$S_h := \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Ax \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn.

- $P(x) = p^T x + p_0$ , với  $p^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$  và  $D(x) = d^T x + d_0$ , với  $d^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$  ( $D(x) > 0, \forall x \in S_h$ ).





Hình: Tập nghiệm minh họa của bài toán (H)

# Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận

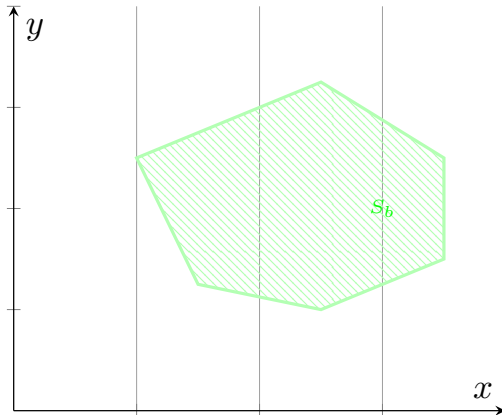
$$(B) \quad Q(x, y) = \frac{P(x, y)}{D(x, y)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

- Bài toán  $(B)$  gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận**.
- Trong đó  $A$  là ma trận  $m \times n$ ,  $G$  là ma trận  $m \times t$ ,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ với } x \in \mathbb{Z}_+^n \text{ và } y \in \mathbb{R}_+^t. \text{ Tập}$$

$S_b := \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^t : Ax + Gy \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận.

- $P(x, y) = p_1^T x + p_2^T y + p_0$ , với  $p_1^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$  và  $p_2^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_t)$ .
- $D(x, y) = d_1^T x + d_2^T y + d_0$ , với  $d_1^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$  và  $d_2^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_t)$  ( $D(x, y) > 0, \forall x \in S_b$ ).



Hình: Tập nghiệm minh họa của bài toán (B)

# Mục tiêu phương pháp

# Bài toán quan tâm

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max} \quad (23)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Trong đó (F) là bài toán (H) với nghiệm thuộc tập số thực, ta nói (F) là bài toán mở rộng của (H).
- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu phân tuyến tính (LFP relaxation).
- Tập  $S_F := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$  là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.

# Phương pháp xử lý bài toán

Giải bài toán (F) ta được nghiệm tối ưu ban đầu, ký hiệu vector  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

- Nếu  $x_j \in \mathbb{Z}_+^n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), thì bài toán (H) được giải.
- Nếu  $\exists x_j \notin \mathbb{Z}_+^n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), ta thêm vào các ràng buộc

$$x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \text{ và } x_j^i \geq \lceil x_j \rceil$$

vào bài toán (F) bằng *lý thuyết nhánh cận* và ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán (F) ban đầu, ký hiệu  $(F_1)$  và  $(F_2)$ :

$$(F_1) \quad \max_{x \in S_1} Q_1(x),$$

và

$$(F_2) \quad \max_{x \in S_2} Q_2(x).$$

Lặp lại quá trình đến khi  $\forall x_j \in \mathbb{Z}_+^n$ .

$$(F_1) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

- Tập  $S_1 := S_F \cap \{x : x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor\}$  là tập nghiệm tối ưu của bài toán con  $(F_1)$ .



$$(F_1) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x_j^i \geq \lceil x_j \rceil \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

- Tập  $S_2 := S_F \cap \{x : x_j^i \geq \lceil x_j \rceil\}$  là tập nghiệm tối ưu của bài toán con  $(F_2)$ .

# Điều kiện nghiệm

- Nếu tồn tại  $(F_i)$  với  $i = 1, 2$  không giải được ( $S_i = \emptyset$ ), ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử  $x^i$  là nghiệm tối ưu của bài toán  $(F_i)$  và giá trị tối ưu là  $Q_i(x)$  với  $i = 1, 2$ .
  - Nếu  $\forall x^i \in Z_+^n$ , ta nói  $S_i$  là tập nghiệm thoả mãn bài toán tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn,  $Q_i^*(x)$  là giá trị tối ưu và bài toán con  $(F_i)$  được giải (**gọt bởi nghiệm nguyên**).
  - Nếu  $\exists x^i \notin Z_+^n$  đồng thời  $Q_i(x) \leq Q_i^*(x)$ , ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán (**gọt bởi cận**).
  - Nếu  $\exists x^i \notin Z_+^n$  đồng thời  $Q_i(x) > Q_i^*(x)$ , bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

# Ví dụ minh họa

# Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

- Ta gọi bài toán  $(F)$  có nút ban đầu là  $N_0$ , tương ứng mỗi bài toán tối ưu phân tuyến tính thông thường  $(F_i)$  ứng với mỗi nút  $N_i$  trên sơ đồ nhánh và  $\mathcal{L}$  là danh sách chứa các nút được lập thông qua lý thuyết xác định cận và lý thuyết nghiệm.
- Ta đánh dấu giá trị tối ưu tốt nhất và nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán lần lượt là  $Q^*(x)$  và  $x^*$ .

# Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

## Bước 0. Thiết lập

Đặt  $\mathcal{L} := N_0$ .

Giải bài toán (F) được nghiệm  $x^* = x$  và  $Q^*(x) = Q(x)$ .

## Bước 1. Kiểm tra

Nếu  $\forall x_j^i \in \mathbb{Z}_+^n$  thì vector  $x$  là nghiệm của bài toán (H), tương ứng  $\mathcal{L} = \emptyset$  và bài toán được giải.

Nếu  $\exists x_j^i \notin \mathbb{Z}_+^n$ , tương ứng  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ , ta chuyển sang bước 2.

## Bước 2. Phân nhánh

Chọn nút  $N_i$  ( $x_j^i \notin \mathbb{Z}_+^n$  có phần thập phân lớn nhất) để phân nhánh bằng cách thêm vào  $S_k$  ràng buộc:

$$x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \text{ và } x_j^i \geq \lceil x_j \rceil$$

lần lượt thành 2 bài toán con  $S_i$  và  $S_k$  ( $k := i + 1$ ).

### Bước 3. Thiết lập bài toán con (các nút)

Ta tập trung xử lý 2 bài toán con (các nút):

$$(F_i) \quad \max_{x \in S_i} Q_i(x),$$

và

$$(F_k) \quad \max_{x \in S_k} Q_k(x).$$

bằng cách dùng *thuật toán Dinkelbach*.

Nếu bài toán vô nghiệm hoặc  $Q_i(x) \leq Q^*(x)$ , đặt  $i := k + 1$  và quay lại bước 1, nếu không, chuyển sang bước 4.

## Bước 4. Kiểm tra

