Linear Algebra (Lecture Notes)

December 2, 2025

1 Ma trn

Đt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, \ldots\}$

vi $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trn $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loi ma trn

- Ma trn hàng.
- Ma trn ct.
- Ma trn 0.
- Ma trn vuông $\Leftarrow$ đng chéo.
- Ma trn bng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m \times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$.
- Ma trn tam giác trên và Ma trn tam giác di, gi chung là Ma trn tam giác.
- Ma trn đng chéo (va là mt tam giác trên và di).
- Ma trn đn v.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m \times n}$$

1.2.2 Nhân

1 s vi ma trn

2 ma trn

$$A = (a_{ik})_{m\times n},\ B = (b_{kj})_{n\times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Thut toán

- Check ct A = hàng B:
  - Nu không → không gii đc.
  - Nu có → Ma trn đu ra là ma trn (hàng A) × (ct B) → Tính c_{ij} = giao hàng A và ct B.

Note

$AB = AC$ và $A \neq 0 \not\rightarrow B = C$.

Ma trn chuyn v

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

1.3 Ma trn bc thang & ma trn rút gn

1.3.1 Ma trn bc thang

- Hàng không (nu có).
- Hàng khác không
  - Phn t chính (PTC) → PTC bên di luôn nm bên phi PTC bên trên.

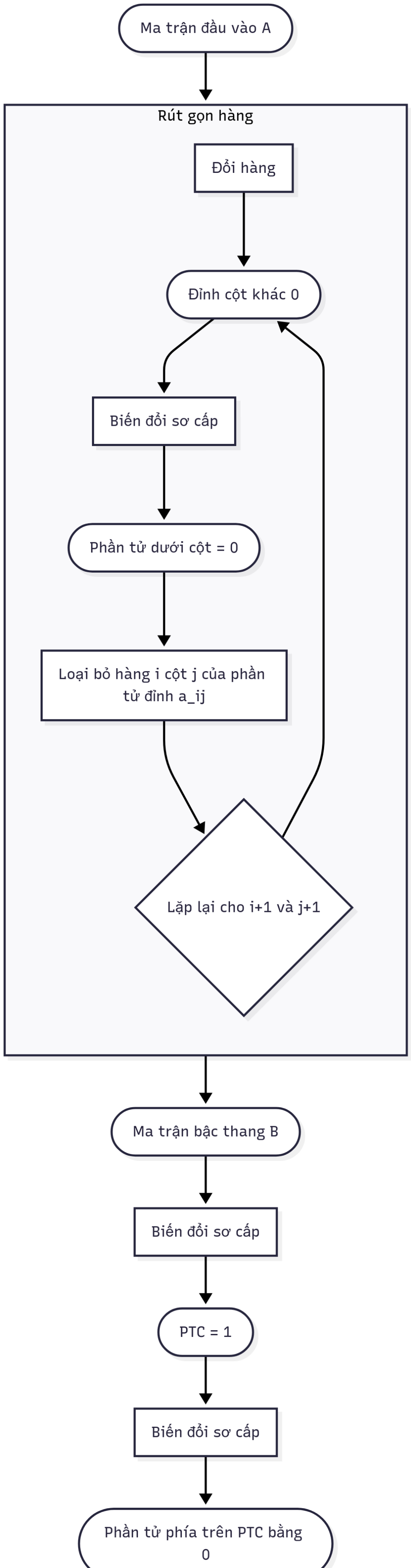
1.3.2 Ma trn rút gn

- PTC = 1
- Ct cha PTC → PTC là phn t ≠ 0 duy nht.

1.4 Phép bin đi

- Phép bin đi s cp, phép bin đi hàng
  - Đi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
  - Thay th t l $h_i \leftarrow \alpha h_i$
  - Thay th hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tng đng hàng
  - $A \rightarrow \ldots \rightarrow B$, $B \sim A$
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

1.4.1 Thut toán cho s phép toán thc hin nh nht



1.5 Hng

$$r(A) = \text{rank}(A) \text{ vi } A = (a_{ij})_{m\times n}$$

- S hàng $\neq 0$ trong **dng rút gn** (hoc **dng bc thang**) ca A ($A \sim$ Dng rút gn (bc thang))

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

1.6 Ma trn kh nghch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó, A là ma trn vuông cp n
- A là **ma trn kh nghch**.
- B là **ma trn nghch đo** ca A.
- $B = A^{-1}$.
- Nu tn ti B, B là duy nht.

Đnh lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- αA kh nghch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
- AB kh nghch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^T kh nghch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Note

- $A^k = A.A...A$
  - A^k kh nghch.
  - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

1.6.1 Ma trn s cp

- Ta thc hin 1 phép bin đi s cp trên I_n

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- E đgl **ma trn s cp**
- Tn ti 3 loi ma trn s cp E tng ng vi 3 loi phép bin đi s cp.

$$EA = \xleftarrow{e} A$$

- Trong đó $\xleftarrow{e} A$ là ma trn A sau khi đã thc hin phép bin đi s cp e.

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \ldots \xrightarrow{e_k} D$$

Ta đc

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$

$$\vdots$$

$$D = (E_k \dots E_1) A$$

Mà A KN $\Leftrightarrow$ $A \sim I_n$

Do đó,

$$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} I_n$$

Vy

$$I_n \xrightarrow{e_k} \xrightarrow{e_{k-1}} \dots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \dots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \dots E_k) I_n$$

1.6.2 Thut toán tìm ma trn kh nghch

Cho $A_{n \times n}$

- B1. Thit lp $(A|I_n)$
- B2. $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Bin đi thành ma trn rút gn}} (D|B)$
  - Nu $D = I_n \to A$ kh nghch và $A^{-1} = B$.
  - Nu $D \neq I_n \to A$ không kh nghch.

1.6.3 Tính cht

- $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- A kh nghch.
- $r(A) = n$.
- A là tích hu hn các ma trn s cp
  - $I_n = (E_1 \dots E_k) A$
  - $A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$

- $AX = B$ có nghim duy nht $\forall B \in M(n \times p, \mathbb{K})$.
- $\exists B$ ma trn vuông cp n sao cho $AB = I_n$.
- $\exists C$ ma trn vuông cp n sao cho $CA = I_n$
- A^T kh nghch.

2 Đnh thc

2.1 Nn tng

2.1.1 Phép th

- Cho $X = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Song ánh $\sigma : X \to X$ đgl phép th bc n.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Tp hp các phép th bc n k/h $|S_n| = n!$.

$$S_n = \{\sigma : X \to X | \sigma \text{ là song ánh}\}$$

- Phép th đn v
- Phép th s cp
- Cu trúc
  - Mi phép th đu phân tích đc thành tích ca các tích đc lp
  - Tích phép th s cp.

2.1.2 Du

$$\text{sgn}(\sigma) = \underset{1 \le i < j \le n}{\pi} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad \in \{\pm 1\}$$

2.1.3 Nghch th

- Là s lng $\sigma(i) - \sigma(j)$ ngc vi $i - j$ hay s lng

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

- Nu s lng nghch th
  - Chn $\to \text{sgn}(\sigma) = 1$.
  - L $\to \text{sgn}(\sigma) = -1$.
- **Note:** Phép th s cp là phép th l.

2.2 Công thc

- Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

- Cp 2
- Cp 3

2.3 Tính cht - h qu - đnh lý

2.3.1 Tính cht

- Đa tuyn tính

$$\det(A_1 \dots \alpha A_j + \beta A_j' \dots A_n) = \alpha \det(A_1 \dots A_j \dots A_n) + \beta \det(A_1 \dots A_j' \dots A_n)$$

- Thay phiên

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0$$

- Chun hoá

$$\det(I_n) = 1$$

2.3.2 H qu

- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \alpha A_j \dots A_j \dots A_n$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots \alpha A_i \dots A_n) = 0$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$
  - Đi ch chn ln $\to 1$.
  - Đi ch l ln $\to -1$.

2.3.3 Đnh lý

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- A kh nghch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.4 Đnh thc con và phn bù đi s

$i \leq k \leq n$

Chn $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$ và $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k \leq n$

- $D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$ là đnh thc con.
- $\overline{D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}}$
  - Đgl phn bù ca $D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$.
  - Ma trn sau khi b hàng i_k và ct j_k t $D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$.
- Ly theo ct, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k} \overline{D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}}$$

Vi $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{D_1^j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{D_2^j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \overline{D_n^j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- Ly theo hàng, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k} \overline{D_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}}$$

Vi $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{D_i^1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{D_i^2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \overline{D_i^n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- **Note**
  - u tiên chn ct (hoc hàng) nhiu 0. Nu không có 0 $\rightarrow$ kt hp các tính cht, đnh lý và h qu trc đó $\rightarrow$ sinh ra 0.
  - Không đc dùng $h_i \leftarrow \alpha h_i$ ($h_i \leftrightarrow h_j$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ thì nh h qu đi du).
  - Chn ct đ bin đi thành "$0 \ldots 1$" thì dùng phép bin đi trên hàng và ngc li.

2.5 ng dng

2.5.1 Kh nghch

- A kh nghch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{adj}(A)\right)^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó, A ma trn vuông cp n và

$$\mathrm{adj}(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{cof}(A)$$

trong đó, c_{ij} là phn bù đi s ca a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{D_i^j}$$

Thut toán xác đnh ma trn kh nghch và tìm ma trn nghch đo bng đnh thc

B1. Tính c trên hàng (hoc ct)

B2. Áp dng công thc tính $\det(A)$ trên hàng (hoc ct) bng công thc

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$$

B3. (Check kh nghch)

- Nu $\det(A) = 0 \rightarrow$ không kh nghch và kt thúc.
- Nu $\det(A) \neq 0 \rightarrow A$ kh nghch và chuyn sang bc 4 (nu cn tính ma trn nghc đo)

B4. Tính ht tt c c còn li $\rightarrow \mathrm{adj}(A) = C$

B5. Tìm A^{-1} bng công thc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ (\mathrm{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

2.5.2 Hng

Thut toán xác đnh hng ca ma trn bng đnh thc

B1. Tính đnh thc cp $1, 2, \ldots, n$

B2. (Kt lun hng)

- Nu đnh thc cp $i \neq 0 \rightarrow$ (hàng (hoc ct) đc lp tuyn tính $\rightarrow$ dng bc thang 100% có n hàng $\neq 0$) $\rightarrow \mathrm{rank}(A) \geq i$
- Nu đnh thc cp $i = 0 \rightarrow \mathrm{rank}(A) = i$

3 H phng trình tuyn tính

- $m, n \in \mathbb{N}$, trong đó, m phng trình, n n, ta có h phng trình tuyn tính tng quát (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trong đó
  - a_{ij} là h s.
  - b_i là h s t do.
  - x_j là n ca h.
- B s $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là nghim ca (1) nu thay vào (1) tho tt c phng trình.
- Gii h (1) $\rightarrow$ tìm tp nghim ca (1).
- H pt có nghim đgl h tng thích.
- Ma trn h s ca (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ct n

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Ct h s t do

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Ta vit gn

$$AX = b$$

- Ma trn đy đ (ma trn b sung) k/h

$$A^* = (A|b)$$

3.1 S tn ti và tính duy nht

- $A^* = (A|b) \to (S|c)$, trong đó S là dng bc thang (hoc dng rút gn) ca ma trn A^*
- **Điu kin nghim:**
  - Vô nghim $\to \exists$ hàng có dng $(0 \dots 0|c)$, $c_i \neq 0$.
  - Vô s nghim $\to$ Phn t chính < S n.
  - Có nghim duy nht $\to$ Phn t chính = S n.
- **Đnh lý Kronecker - Capelli**
  - H vô nghim $\Leftrightarrow \text{rank}(A) < \text{rank}(A^*)$.
  - H có nghim $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A^*)$:
    * Có nghim duy nht $\to \text{rank}(A) =$ S n.
    * Vô s nghim $\to \text{rank}(A) <$ S n.
- **n ph thuc** $\to$ Là n nm trong ct cha PTC trong dng bc thang (rút gn).
- **n t do (đc lp)** $\to$ Các n còn li.

Note

- Ta kt lun nghim theo kiu
  - $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
  - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
  - $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \vdots \\ x_n = 3 \end{cases}$
- Nghim riêng $\to$ Đ cho sn n t do bng my.
- Nghim tng quát $\to$ Không cho sn n t do bng my.

3.2 Thut toán Gauss

B1. Đa v A^*

B2. Đa $A^* \to (S|c)$ (Bc thang)

B3. (Check tn ti nghim)

- Nu không có nghim $\to$ Kt lun.
- Nu có nghim $\to$ Dng rút gn $\to$ KL nghim.

3.3 Quy tc Cramer

- H $AX = b$ đgl **H Cramer** nu
  - A vuông
  - A Kh nghch

Do đó,

$$X = A^{-1}b$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} C^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay $1 \leq j \leq n$

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}(b_1c_{1j} + b_2c_{2j} + \ldots + b_nc_{nj})$$
$$A_j(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_m & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Do đó ta có

$$D_j = \det(A_j(b)) = b_1c_{1j} + \ldots + b_mc_{mj}$$

nghim ca h là

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad 1 \leq j \leq n$$

- **Đíu kin nghim:**
  - Nghim duy nht $x_j = \frac{D_j}{D} \to D \neq 0$.
  - Vô nghim $\to D = 0 \wedge \exists D_j \neq 0$.
  - Không kt lut gì v tng thích h $\to D = 0 \wedge \forall D_j = 0$.

Thut toán tìm nghim ca h bng quy tc Cramer

B1. Tìm D và D_j, $1 \leq j \leq n$

B2. (Check điu kin nghim)

- Nu $D \neq 0 \to$ KL nghim duy nht $x_j = \frac{D_j}{D}, 1 \leq j \leq n \to$ Kt thúc.

- Nu $D = 0 \to$ Sang bc tip theo

B3. (Check trng hp)

- Nu $\exists D_j \neq 0 \to$ KL vô nghim $\to$ Kt thúc.
- Nu $\forall D_j = 0 \to$ KL rng ta không kt lut gì v tng thích h $\to$ Kt thúc.

Note

- Nu đ hi tìm tham s sao cho h có nghim thì ta tìm trng hp vô s và nghim duy nht.

3.4 H thun nht

- H thun nht là h (2) nh sau

$$AX = 0$$

- Nghim tm thng $\to X = 0 \to \text{rank}(A) = n$.
- Vô s nghim ph thuc vào $n - \text{rank}(A) \to \text{rank}(A) < n$.
- **Nhn xét**
  - Nu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là nghim ca (2) $\to tx = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ là nghim ca (2).
  - Nu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là nghim ca (2) $\to x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ là nghim ca (2).
  - A có $m < n \to$ Vô s nghim.

4 Không gian Vector

- $V \neq \varnothing$ đgl 1 **không gian vector** $\Rightarrow$ đc trang b 2 phép toán:
  - Cng vector $+ \colon V \times V \longrightarrow V, \quad (u, v) \longmapsto u + v$.
  - Nhân vô hng $\cdot \colon \mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, u) \longmapsto \alpha u$.
- Tho mãn các tiên đ sau:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (u+v)+w = u+(v+w), \quad \forall u, v, w \in V \\
(2) & u+v = v+u, \quad \forall u, v \in V \\
(3) & \exists 0 \in V : u+0 = u, \quad \forall u \in V \\
(4) & \forall u \in X,\ \exists u' \in V : u+u' = 0 \\
(5) & \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V \\
(6) & (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V \\
(7) & \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V \\
(8) & 1u = u, \quad \forall u \in V
\end{array}$$

- **Note**:

- $\mathbb{K}$**-Không gian vector** $\leftrightarrow$ Không gian vector trên trng $\mathbb{K}$.
- V là không gian vector trên trng $\mathbb{K} \leftrightarrow v \in V$ là 1 **vector**.
- $\alpha \in \mathbb{K} \rightarrow$ đgl 1 **vô hng**.
- 0 trong (3) $\rightarrow$ đgl **vector 0**.
- $\forall u \in V, u'$ trong (4) $\rightarrow$ đgl vector đi ca vector u, $\quad u' = -u$.

4.1 Tính cht

Cho V là 1 không gian vector

- Vector 0 là duy nht.
- $\forall u \in V$, $-u$ là duy nht.
  - $u - v = u + (-v)$.
- Gin c:
  - $u + w = v + w \Rightarrow u = v$.
  - $u + v = w \Rightarrow u = w - v$.
- $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = 0$.
- $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.
- $\forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ (0 bên di là vector 0)
  - $0u = 0$.
  - $\alpha 0 = 0$.
- **Note**:
  - Đ c/m **tính duy nht** $\rightarrow$ ta c/m c 2 tho cùng 1 tính cht.

4.2 Ví d minh ho

- **VD1**

$V = \{$ Vector t do trong mt phng $\}, +, .$ là 1 không gian vector.

- **VD2**

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

là 1 không gian vector.

- **VD3**

$n \geq 1$, $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

là 1 không gian vector.

- **VD4**

$M(m \times n, \mathbb{K}), +, .$ là không gian vector.

- **VD5**

$\mathbb{K}[x]$ là tp các đa thc bin x h s trong $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}[x]$ là không gian vector trên $\mathbb{K}$ vi phép cng các đa thc và phép nhân 1 s vi đa thc. (0 là đa thc không)

- **VD6**

Tp các hàm thc xác đnh trên $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$-Không gian vector vi

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

- **VD7**

$\mathbb{K}$ là 1 không gian vector vi các phép toán thông thng trên $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

- **VD8**

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ là $\mathbb{Q}$-không gian vector.

4.3 Đc lp tuyn tính & ph thuc tuyn tính

Cho $S \subset V$ vi V là không gian vector.

4.3.1 T hp tuyn tính

- **T hp tuyn tính** ca các vector trong S là tng hu hn

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n, \quad a_i \in \mathbb{K}, u_i \in S.$$

4.3.2 Biu th tuyn tính

- Cho $v \in V$, **Biu th tuyn tính** là

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}, u_k \in S.$$

- **VDMH**

$\mathbb{R}^3 = S = \{x_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 2, 3), u_3 = (2, 4, 1)\}, v = (1, 2, 2), w = (0, 0 - 3)$, v và w biu th tuyn tính đc qua S không?

$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$

$(1, 2, 3) = x_1($

4.3.3 Ph thuc tuyn tính

- S là **ph thuc tuyn tính** nu

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \neq (0, \ldots 0) \mid \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0, \quad u_i \in S.$$

4.3.4 Đc lp tuyn tính

- S là **đc lp tuyn tính** nu không ph thuc tuyn tính, hay

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0) \rightarrow \text{ Nghim tm thng.}$$

4.3.5 VDMH

- **VD1**

Trong không gian $\mathbb{R}^3, S = \{u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (\sim\sim\sim), u_3 = (\sim\sim\sim)\}$

Xét $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$\alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(\sim\sim\sim) + \alpha_3(\sim\sim\sim) = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Vô s nghim} \Rightarrow \text{ Ph thuc tuyn tính.}$$

- **VD2**

Trong không gian $\mathbb{R}[x], S = \{P_1 = 1 + x + x^3, P_2 = 1 + x + x^2, P_3 = 1 + x, P_4 = x + x^3\}$

Xét $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$

$x_1(1 + x + x^3) + x_2(\sim\sim\sim) + x_3(\sim\sim\sim) = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Có nghim } (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \text{ Đc lp tuyn tính.}$$

(Note: HPT trên đc lp ra da trên bc, tc mi ct tng ng vi bc)

4.3.6 Tính cht

- H ch gm 1 vector $\{u\}$ ph thuc tuyn tính $\Leftrightarrow u = 0$.
- S ph thuc tuyn tính
  - $\Rightarrow$ Mi h cha S ph thuc tuyn tính.
  - $\Rightarrow$ Mi h vector cha vector 0 đu ph thuc tuyn tính.
- S ph thuc tuyn tính, $S' \supset S \Rightarrow S'$ ph thuc tuyn tính.
- H vô hn vector S đc lp tuyn tính $\Leftrightarrow$ H con hu hn ca S đc lp tuyn tính.

4.3.7 Đnh lý

- Cho $S = \{u_1, u_2 \ldots, u_k\}$, $k \geq 2$, S **ph thuc tuyn tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 1 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \widehat{\alpha_i u_i} + \ldots + \alpha_k u_k.$$

- **Cách làm bài tìm t hp tuyn tính**
  - B1. X lý đn khi ra đc h phng trình tuyn tính
  - B2. Gii ra nghim
  - B3. Cho 1 n $\neq 0 \rightarrow$ Thu đc t hp tuyn tính (VD. $u_1 + u_2 + u_3 = \sim \rightarrow u_1 = \sim$)
- Cho $S = \{u_1, u_2 \ldots, u_k\}$, $k \geq 2, u_i \neq 0$, S **ph thuc tuyn tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i,\ 2 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} u_{i-1}.$$

(Hn na, có th chn i sao cho $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ đc lp tuyn tính. (Đnh lý giúp tìm tp hp đc lp tuyn tính ln nht trong 1 tp))

4.4 C s và s chiu

Cho V là $\mathbb{K}$-Không gian vector và $B \subset V$.

4.4.1 H sinh

- Mi vector trong V biu th tuyn tính đc qua $B \Rightarrow$ H vector B đgl **h sinh (tp sinh)** ca V.

4.4.2 C s

- $\begin{cases} B \text{ H sinh ca } V \\ B \text{ Đc lp tuyn tính} \end{cases} \Rightarrow$ H vector B là **C s** ca V.
- Note:
  - $\mathbb{K}$-không gian vector, $\mathbb{C}$-không gian vector có 1 c s là $\{1\}$.
  - $\mathbb{C}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector. $z = a + bi = a1 + bi \Rightarrow \{1, i\}$ là 1 h sinh. $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b \Rightarrow \{1, i\}$ là đc lp tuyn tính.
  - $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector vi c s là $\{1\}$.
  - $\mathbb{R}$ là $\mathbb{Q}$-không gian vector vi c s là vô hn.

VDMH

- **VD1**

$\mathbb{K}^n, \varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, trong đó $e_1 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$

$\forall x \in \mathbb{K}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

$\Rightarrow \varepsilon$ là 1 h sinh ca $\mathbb{K}^n$ (*)

$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = 0 \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = 0$

$\Rightarrow \varepsilon$ đc lp tuyn tính (**)

T (*)(**) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 c s ca $\mathbb{K}^n$ (và là c s chính tc ca $\mathbb{K}^n$).

- **VD2**

$M(m \times n, \mathbb{K}), \varepsilon = \{E_{ij}\}_{i=1,m}^{j=1,m}$ trong đó $E_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$. (C/m tng t) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 c s ca $M(m \times n, \mathbb{K})$.

- **VD3**

$\mathbb{K}[x], \varepsilon = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$.

- **VD4**

$\mathbb{K}_n[x], \varepsilon = \{1, x, \ldots, x^n\}$.

4.4.3 Đc lp tuyn tính cc đi

Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$

- Nu $\begin{cases} S \text{ Đc lp tuyn tính} \\ S \subsetneq S', S' \text{ Ph thuc tuyn tính} \end{cases}$ $\Rightarrow S$ **Đc lp tuyn tính cc đi**.

Đnh lý Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

- Cho $S \subset V$, các mnh đ sau là $\Leftrightarrow$:
  - H S là 1 **C s** ca V.
  - H S là H vector **Đc lp tuyn tính cc đi** ca V.
  - $\forall$ vector ca V đ **Biu th tuyn tính** đc 1 cách **duy nht** qua h S.
- S là **h sinh** ca V nu (1 trong 2 tho):
  - $\exists u_i, 1 \leq i \leq m$ **T hp tuyn tính** ca các vector còn li trong $S \Rightarrow \Big(S' = S \setminus \{v\}\Big)$.
  - $\Big(V \neq \{0\}\Big) \Rightarrow V\ \exists 1$ **C s** $\subset S$.
- **B đ:**
  - Không gian vector V có 1 **c s** gm n vector $\Rightarrow \forall$ h **Đc lp tuyn tính** trong V đu cha không quá n vector.
- **Note:**
  - Cách chng minh $A \Rightarrow B$:
    - B1. Đt A là gi thuyt $\rightarrow$ (1)
    - B2. Xác đnh điu kin đ có đc B (t tiên đ/đnh lý/tính cht/...) $\rightarrow$ (2)
    - B3. C/m (1) $\Rightarrow$ (2) $\rightarrow$ C/m xong.

- Cách biu din **duy nht**:
  - B1. Đt Biu din A = Biu din B
  - B2. C/m H s ca Biu din A = H s ca Biu din B $\to$ C/m xong.
- Cách xây dng **c s**:
  - C1. T đc lp tuyn tính $\to$ Thêm vào $\to$ Đc lp tuyn tính cc đi.
  - C2. T h sinh $\to$ B bt ra $\to$ H sinh cc tiu.

4.4.4 S chiu

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n \Leftrightarrow V \text{ có 1 c s gm } n \text{ vector.}$$

- $V \neq \{0\}, V$ không có c s nào gm hu hn vector $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V = \infty$.
- Note: Mi c s ca V đu có cùng s vector (s chiu là s vector trong c s).
- $\dim\{0\} = 0$.

VD

- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(M(m \times n, \mathbb{K})) = mn$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$.
- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}) = 2$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}) = 1$.

Đnh lý

- $V \neq \{0\}$ đgl không gian hu hn sinh (nghĩa là có 1 tp sinh gm hu hn vector) $\Rightarrow V$ có 1 c s gm hu hn vector.

Tính cht

Mnh đ 1

- $V \neq \{0\}$ (tng t)

Mnh đ 2 V là KG vector n-chiu, $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ (Các mnh đ sau tng đng)

- β là c s ca V.
- β là h sinh ca V.
- β đc lp tuyn tính.

4.5 To đ

- C đnh th t ca $B \Rightarrow B = (u_1, \ldots, u_n)$ là **c s sp th t**.
- $B = (u_1, \ldots, u_n)$ là c s sp th t ca $\mathbb{K}$-KG vector V

$$\forall v \in V, v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ đgl **to đ** ca v đi vi c s B. K/h:
  - $(v)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
  - $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
  - $v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$.

VD: Tìm to đ (4.7a)

$((2,3,1))_B = (x_1, x_2, x_3)$

$(2,3,1) = x_1(-1,2,4) + x_2(\sim) + x_3(\sim)$

$$\begin{cases} \sim = 2 \\ \sim = 3 \\ \sim = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = -11 \\ x_3 = \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow ((2,3,1))_B = (-\tfrac{19}{3}, -11, \tfrac{20}{3}).$$

4.5.1 Tính cht

Cho $B = (u_1, \ldots, u_m)$ là c s ca V, $v \in V$, $(v)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $[0] = 0$

- $\forall u, v \in V \quad [u_v]_B = [u]_B + [v]_B$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad [\alpha u]_B = \alpha [u]_B$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad [\alpha u + \beta v]_B = \alpha [u]_B + \beta [v]_B$.
- $[\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n]_B = \alpha_1 [u_1]_B + \ldots + \alpha_n [u_n]_B$.

4.5.2 Mnh đ

Cho B là 1 c s ca V, $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$.

- S đc lp tuyn tính $\Leftrightarrow \{[\alpha_1]_B, \ldots, [\alpha_k]_B\}$ đc lp tuyn tính.
- S đc lp tuyn tính $\Leftrightarrow \text{rank}([v_1]_B \ldots [v_k]_B) = k$.

4.5.3 Đnh lý

Cho B và C là 2 c s ca V

- $\exists$ duy nht ma trn A vuông, kh nghch sao cho

$$[v]_B = A[v]_C, \forall v \in V$$

- A đgl **ma trn chuyn c s** t B sang C, $[v]_B = A[v]_C$ là công thc đi to đ

$$A = P_{B,C} = ([v_1]_B \ldots [v_n]_B)$$

4.6 Không gian con - Hng ca h vector

Cho $\varnothing \neq E \subset V$-KG vector

- E là KG vector cùng vi 2 phép toán trên $V \Rightarrow E$ là **KG con** ca V.

VD

- V là KG vector
  - $\{0\}$ là KG con ca V đgl KG con tm thng.
  - $V \subset V$.
- $\mathbb{R}^3 \quad P = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ là 1 KG con ca $\mathbb{R}^3$.
- $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$.

4.6.1 Đnh lý

Cho $\varnothing \neq E \subset V$-KG vector, E là KG con ca $V \Rightarrow$ tho điu kin sau:

- $u + v \in E, \quad \forall u, v \in E$.
- $\alpha u \in E, \quad \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

hoc

- $(\alpha u + \beta v) \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$.

VD

Cho $\mathbb{Q} = \{(x, y, z)x - 2y + z = 0\}$. C/m $\mathbb{Q}$ là KG con ca $\mathbb{R}^3$.

Ta có $0 - 20 + 0 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} \neq \varnothing$

$\forall u = (x, y, z), v = (a, b, c) \Rightarrow x + 2y + z = 0$ và $a + 2b + c = 0$

Xét $u + v = (x + a, y + b, z + c)$

$(x + a) - 2(y + b) + (z + c) = (x - 2y + z) + (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow u, v \in \mathbb{Q}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y, z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - 2y + z = 0$

Xét $\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Vì $\alpha x - 2\alpha y + \alpha z = \alpha(x + 2y + z) = 0 \Rightarrow \alpha u \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ KG con ca $\mathbb{R}^3$.

- Note: Cho 3 to đ nu đi qua gc to đ $\Rightarrow$ KG con (hình dung hình hc).

4.6.2 Mnh đ

- Nu E là KG con ca V
  - $\dim V < \infty \Rightarrow \dim E < \infty \wedge \dim E \leq \dim V$.
  - $\dim E = \dim V \Rightarrow E = V$.
- $\{v_i\}_{i \in I}$ v_i là KG con ca V, $\forall i \in I$.
- $\bigcup = \bigcap_{i \in I} v_i$ là KG con ca V.

4.6.3 Span

- Cho X là tp con ca $\mathbb{K}$-KG vector V, giao ca tt c các KG con ca $V \supset X$ là 1 KG con ca $V \supset X$, đgl **KG con ca V sinh bi X**.
- K/h: $\mathcal{L}(X) = \text{Span}(X) = \text{Sp}(X)$.
- **Note**
  - $\mathcal{L}(\{0\}) = \{0\}$.
  - $\mathcal{L}(\varnothing) = \{0\}$.
  - $\mathcal{L}(X)$ là KG con nh nht ca $V \supset X$.
  - $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$.
  - Nu E là KG con ca V, $\mathcal{L}(E) = E$.

Đnh lý

- Cho $X \subset V$, khi đó

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{\text{hu hn}} \alpha_i u_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, u_i \in X \right\} = \text{Span}(X).$$

- Hng ca h vector X là s chiu KG con sinh bi X

4.7 Không gian hàng, ct, nghim

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{K}$

- $\text{Row}A = \text{Span}\{m \text{ hàng ca } A\} \subset \mathbb{K}^n$.
- $\text{Col}A = \text{Im}A = \text{Span}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subset \mathbb{K}^m$.
- $\text{Nul}A = \text{Ker}A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.

4.7.1 Mnh đ

Cho A là ma trn c $m \times n$

$$\dim A(\text{Row}A) = \dim(\text{Col}A) = r(A).$$

$$n = \text{rank}A + \dim(\text{Nul}A).$$

- Note: Hi s chiu $\to$ thoi mái, hi c s $\to$ tìm ht.

4.7.2 VDMH

VD1

Tìm c s (bài 4.23a)

Ta có $A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix}$

Col$A$ sinh bi A_1, A_2, A_3, A_4

Xét $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + \sim -4x_4 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases}$ $\quad \rightarrow$ gii ra dng bc thang $\Rightarrow$ Ph thuc tuyn tính.

$\Rightarrow \{A_1, A_2\}$ là c s ca Col$A$

$\Rightarrow$ row có c s là $\{(1, -2, 1, 2), (0, -2, -5, -3)\}$ (Hàng cha PTC trong dng bc thang)

$x \in \text{Nul}A \Leftrightarrow Ax = 0$

$A \rightarrow$ dng rút gn $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Có nghim $X = (\sim, \sim, \sim, \sim) \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Đt $x_3 = 1, x_4 = \sim \Rightarrow X = \{(\sim, \sim, \sim, \sim), (\sim, \sim, \sim, \sim)\}$ là c s ca Nul$A$ (Không gian nghim).

- **Note**: Đ kim tra không gian con hay không có th dùng cách này tr dng đa thc vi ma trn.

VD2 4.4.12 (Giáo trình)

(i) C/m H là kgian con ca $\mathbb{R}^3$

$\forall u \in H, \exists a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$u = \begin{pmatrix} a - 2b + c \\ a + b - c \\ -3b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Col}A \Rightarrow H \subset \text{Col}A$$

$H \subset \text{Col}A, \forall u \in \text{Col}A \rightarrow Ax = u$ có nghim

$$\rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ sao cho } u = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ \sim \end{pmatrix} \in H \Rightarrow \text{có Col}A \subset H \Rightarrow H = \text{Col}A.$$

(ii)

$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Bu^T \Rightarrow u \in \text{Nul}B$$

4.8 Tng & Tng trc tip

- $V_1 + V_2 + \ldots + V_m$ là **KG tng** ca $V_1, V_2, \ldots, V_m$.
- Tng $V_1 + \ldots + V_m$ đgl **tng trc tip** nu $\forall v \in V_1 + \ldots + V_m$ đu có duy nht 1 cách phân tích $V = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}, \forall u_i \in V_i$, k/h: $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$.

4.8.1 Mnh đ

Cho $V_1, V_2, \ldots, V_m$ là các KG con ca $\mathbb{K}$-KG vector V

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_m = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_m \mid u_i \in V_i\}$$

là 1 KG con ca V.

4.8.2 Đnh lý

Tng $V_1 + \ldots + V_m$ là tng trc tip nu 1 trong 2 điu kin tng đng sau tho:

- $V_j \bigcap (\sum_{i \neq j} V_i) = \{0\} \quad 1 \leq j \leq m.$
- $V_j \bigcap (\sum_{i > j} V_i) = \{0\} \quad 1 \leq j \leq m - 1.$

4.8.3 S chiu không gian tng

Đnh lý Cho V_1, V_2 là 2 KG con ca V

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

H qu

- $V_1 = \mathrm{Sp}(S_1),\ V_2 = \mathrm{Sp}(S_2) \Rightarrow V_1 + V_2 = \mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2).$
- $V_1 \cap V_2 = \varnothing \Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$

5 Ánh X Tuyn Tính

- Cho U và V là các $\mathbb{K}$-KGVT, Ánh x $f : U \to V$ đgl **AXTT** nu:
  - $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V.$
  - $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in U.$
- **Đnh lý:** Cho U và V là các $\mathbb{K}$-KGVT, Ánh x $f : U \to V$ đgl **AXTT** nu

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U$$

- **Tính cht**
  - $f(0_V) = 0_V.$
  - $f(-u) = -f(u).$
  - $f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_k f(u_k).$
- **Mnh đ:** U, V, W là $\mathbb{K}$-KGTV, ta có:

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow V, \quad u \longmapsto f(u), \\ g : V &\longrightarrow W, \quad v \longmapsto g(v), \\ g \circ f : U &\longrightarrow W, \quad u \longmapsto g(f(u)). \end{aligned}$$

- **Đnh lý v S xác đnh ca AXTT:** Cho U, V là các $\mathbb{K}$-KGTV, $(u_1, \ldots, u_n)$ là 1 c s ca $U, v_1, \ldots, v_n \in V$, khi đó $\exists!$ AXTT $f : U \to V$ tho

$$f(u_i) = v_i, 1 \leq i \leq n.$$

5.1 Đn cu, Toàn cu, Đng cu

- **Đnh nghĩa:** u, v là các $\mathbb{K}$-KGTV $f : U \to V$, gi là **đng cu**, ta có, f:
  - Đn ánh $\to$ **Đn cu**.
  - Toàn ánh $\to$ **Toàn cu**.
  - Song ánh $\to$ **Đng cu**. U đng cu vi V k/h: $U \cong V$.
- **Nhn xét:**
  - $U \cong U$.
  - $U \cong V \to V \cong U$.
  - $U \cong V, V \cong W \to U \cong W$.

Tính cht Đng cu

- **Đnh lý:** $f : U \to V$ là đng cu, $s = \{u_1, \ldots, u_k\}$ Ph thuc tuyn tính trong $U \Rightarrow f(s) = \{f(u_1), \ldots, f(u_k)\}$ Ph thut tuyn tính trong V.
  - f đn cu $\Leftrightarrow$ (s đc lp tuyn tính $\Rightarrow$ f(s) Đc lp tuyn tính, $\forall s$).
  - f toàn cu $\Leftrightarrow$ (s h sinh ca $U \Rightarrow f(s)$ là h sinh ca V).
  - f đng cu $\Leftrightarrow$ (s là c s ca $U \Rightarrow f(s)$ là c s ca V).

5.2 Nhân và nh (Kernel và Image)

- **Đnh nghĩa:** Cho $f : U \to V$ là AXTT, E là KG con U, F là KG con V. $f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$, $f^{-1}(F) = \{u \in U \mid f(u) \in F\} \subset U$
  - **nh** ca f là $f(U) = \text{Im}f$.
  - **Nhân** ca f là $f^{-1}(\{0_V\}) = \text{Ker}f$.
- **Đnh lý:** Cho $f : U \to V$ là AXTT, E là KG con U, F là KG con V
  - $f(E)$ là KG con V.
  - $f^{-1}(F)$ là KG con U.
- **H qu:** Cho $f : U \to V$ là AXTT
  - $\text{Im}f$ là 1 KG con ca V.
  - $\text{Ker}f$ là 1 KG con ca U. $(f(U) = 0)$
- **Đnh lý:** Cho $f : U \to V$ là đng cu
  - f là đn cu $\Leftrightarrow \text{Ker}f = \{0_U\}$.
  - f là toàn cu $\Leftrightarrow \text{Im}f = V$.

- **Đnh lý:** Cho $f : U \to V$ là AXTT
  - f đn cu $\Leftrightarrow r(f) = \dim U$.
  - f toàn cu $\Leftrightarrow r(f) = \dim V$.
  - f đng cu $\Leftrightarrow r(f) = \dim U = \dim V$.
- **Đnh lý v hng ca AXTT:** Cho $f : U \to V$ là AXTT, khi đó

$$\dim U = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rank}(f)$$

5.3 Ma trn ca AXTT

- **Đnh lý:** Cho U, V là các KGVT, $\dim U = n$, $\dim V = m$, $\mathcal{B}$ là c s ca U, $\mathcal{C}$ là c s ca V.
  - $\forall$ AXTT $f : U \to V, \exists!$ ma trn $A_{m\times n}$ sao cho $[f(u)]_{\mathcal{C}} = A[u]_{\mathcal{B}}, \forall u \in U$.
  - $\forall A_{m\times n}$, $\exists!$ AXTT $f : U \to V$ tho trên.
- Note: $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Col} A$, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Nul} A$.
- **Đnh nghĩa:** giáo trình
- **Mnh đ:** giáo trình

$$[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = Q^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}P$$

- **Đnh lý:** Cho A ma trn đng cu $f : U \to V$

$$\mathrm{Im} f \cong \mathrm{Col} A, \mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Nul} A \Leftrightarrow \mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A$$

- **H qu:** f Đng cu $\Leftrightarrow A$ Kh nghch.

5.4 Không gian các đng cu

- **Đnh nghĩa:** Cho U, V là các $\mathbb{K}$-KGVT, **Không gian các đng cu** k/h: $\mathrm{Hom}(U, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V) \neq \varnothing$, $\mathrm{Hom}(U, V)$ là KGVT vi 2 phép toán:
  - Phép cng: $\forall f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$
    - $f + g : U \to V, u \mapsto f(u) + g(u)$
    - $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$.
  - Phép nhân: $\forall u \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
    - $\alpha f : U \to V, u \mapsto \alpha f(u)$
    - $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$

5.4.1 Cu trúc không gian đng cu

- **Đnh lý:** $\dim U = n$, $\dim V = m$
  - $\mathrm{Hom}(U, V) \cong M(m \times n, \mathbb{K})$.
  - $\mathrm{End}(V) \cong M(n \times n, \mathbb{K})$. $\mathrm{GL}(U) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. (general linear group)
- **Mnh đ:** $\begin{array}{rl} f : U \longrightarrow V, & u \longmapsto f(u), \\ g : V \longrightarrow W, & v \longmapsto g(v), \\ g \circ f : U \longrightarrow W, & u \longmapsto g(f(u)), \end{array}$, Gi $\mathcal{B}$ là c s ca U, $\mathcal{C}$ là c s ca V, $\mathcal{D}$ là c s ca W.

$$[g \circ f]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

6 Chéo hoá ma trn

6.1 Giá tr riêng & Vector riêng

- **Đnh nghĩa:** Cho A vuông cp n, $\exists$ vector $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$$Au = \lambda u$$

  - Giá tr λ đgl **giá tr riêng** ca A.
  - Vector u đgl **vector riêng** ca A ng vi λ.
    * $A(\alpha u) = \alpha(Au) = A(\alpha u), \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
    * $A(u + v) = Au + Av = Au + \lambda v = \lambda(u + v), \forall v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
    * $Au = \lambda u, Au = \mu u \Rightarrow \lambda u = \mu u \Leftrightarrow (\lambda - \mu)u = 0$.
- **Thut toán tìm giá tr riêng, vector riêng**
  - B1. $P_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 0$.
  - B2. Gii $P_A(x) \to$ nghim x, vi tng nghim x tng ng vi tng λ
  - B3. Thay λ vào $(A - \lambda I_n) = 0 \to$ gii tìm nghim ca X.
  - B4. Lp li đn khi ko còn λ nào $\to$ kt lun $\to$ vi mi λ là giá tr riêng, X là các vector riêng ca A ng vi $\lambda \to$ kt thúc.
- **Đnh lý:** A có k giá tr riêng khác nhau $(k \leq n) \Rightarrow k$ vector riêng tng ng *đc lp tuyn tính*.
- **Đnh nghĩa:** Cho A vuông cp n, $\exists$ ma trn P vuông cp n và ma trn chéo D cp n sao cho

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$$

  - A đgl **ma trn chéo hoá đc**.
  - P đgl **ma trn chéo hoá** A.
  - D đgl **dng chéo** ca A.
- **Đnh lý:** $A_{m \times n}$ chéo hoá đc $\Leftrightarrow A$ có n vector riêng *đc lp tuyn tính*.

6.2 Ma trn chéo hoá đc

- E_λ đgl **không gian riêng** ca A ng vi λ

$$E_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)X = 0\} = \text{Nul}(A - \lambda I)$$

- **Mnh đ:** A có k giá tr riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \Rightarrow E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_k}$ là **tng trc tip**.
- **Đinh ly:** A có k giá tr riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \Rightarrow A$ **chéo hoá đc** $\Leftrightarrow$
  - $E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \ldots \bigoplus E_{\lambda_k} = \mathbb{K}^n$
  - $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$
  - $\sum_{i=1}^{k} \dim(\text{Nul}(A - \lambda_i I)) = n$
- **Thut toán xác đnh chéo hoá ma trn**
  - B1. (Thut toán tìm giá tr riêng, vector riêng) $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \rightarrow$ vector $u_1, u_2, \ldots u_k$ tng ng vi tng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \rightarrow$ **s chiu** ca c s không gian riêng E_i (Bt đu vi E_0) tng ng vi tng vector $u_1, u_2, \ldots u_k$
  - B2. (Check chéo hoá)
    - $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n \rightarrow A$ Chéo hoá đc $\rightarrow$ B3
    - $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) \neq n \rightarrow A$ Không chéo hoá đc $\rightarrow$ Kt thúc
  - B3. (Kt lun ma trn P và D)
    - T vector $u_1, u_2, \ldots u_k \rightarrow$ hp các vector li thành 1 ma trn (theo ct) $\rightarrow P$.
    - Tng ng vi giá tr λ_i ca u_i trong ct trong $P \rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$.

6.3 T đng cu

6.3.1 Giá tr riêng và vector riêng

- **Đnh nghĩa:** $f : V \rightarrow V$ là t đng cu, $\exists v \in V \setminus \{0\}$

$$f(v) = \lambda v$$

  - λ đgl **gia tri rieng** cua f.
  - v đgl **vector riêng** ca f ng vi λ.
- **Menh đe:** $\mathcal{B}$ là c s ca $\mathbb{K}$-KGVT V, $A = [f]_\mathcal{B}$
  - λ là giá tr riêng ca $f \Leftrightarrow \lambda$ là giá tr riêng ca A.
  - v là vector riêng ca f ng vi $\lambda \Leftrightarrow [v]_\mathcal{B}$ là vector riêng ca A ng vi λ.
- **Note:** Đ tìm vector riêng ca f ta tìm $X = (\ldots, \ldots, \ldots)$ nh thông thng ri ly tng ca tích vi tng v_i tng ng $(v = \ldots v_1 + \ldots v_2 + \ldots v_3 + \ldots)$

6.3.2 Chéo hoá

- **Đinh nghia:** $f : V \to V$ là t đng cu, $\exists$ c s $\mathcal{C}$ ca V sao cho $[f]_{\mathcal{C}}$ là ma trn chéo $\Rightarrow f$ đgl **chéo hoá đc**.
- **Note:**
  - $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3) \to$ Thut toán tìm giá tr riêng, vector riêng $\to X \to p_1 = (.., .., ..), p_2 = ..., p_3 = ... \to$ C s $\mathcal{C} = (..u_1 + ..u_2 + ..u_3, ..u_1 + ..u_2 + ..u_3, \ldots) \to [f]_{\mathcal{C}} =$ ma trn ging ma trn D.

7 Không gian vector Euclide

- $\mathbb{E}$ là $\mathbb{R}$-KGVT, tích vô hng trên $\mathbb{E}$ là 1 ánh x $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ tho:
  - **Song tuyn tính**:
    - $f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v)$
    - $f(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 f(u, v_1) + \beta_2 f(u, v_2)$
  - **Đi xng**:
    - $f(u, v) = f(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbb{E}$
  - **Xác đnh dng**:
    - $f(u, u) \geq 0$ và $f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad \forall u \in \mathbb{E}$
- $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ là 1 tích vô hng, $\langle u, v \rangle = f(u, v)$ là tích vô hng ca u và v.
- **KGVT Euclid** $\mathbb{E}$ là KGVT thc có tích VH.
- Cho $\mathbb{E}$ là KGVT Euclid $\langle , \rangle$,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \forall u \in \mathbb{E}$$

$\|u\| \geq 0, \forall u \in \mathbb{E}, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

- **Mnh đ**: (Bt đng thc Cauchy-Schwarz) trong KGVT Euclid $\mathbb{E}$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in \mathbb{E}$$

- **Đnh nghĩa**

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, 0 \leq \theta \leq \pi, -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$