Linear Algebra (Lecture Notes)

November 2, 2025

1 Ma trận

Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, ...\}$

với $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông $\Leftarrow$ đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m \times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$.
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m \times n}$$

1.2.2 Nhân

1 số với ma trận

2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m\times n},\ B = (b_{kj})_{n\times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Thuật toán

- Check cột A = hàng B:
  - Nếu không $\rightarrow$ không giải được.
  - Nếu có $\rightarrow$ Ma trận đầu ra là ma trận (hàng A) $\times$ (cột B) $\rightarrow$ Tính c_{ij} = giao hàng A và cột B.

Note

$AB = AC$ và $A \neq 0 \not\rightarrow B = C$.

Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
  - Phần tử chính (PTC) $\rightarrow$ PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

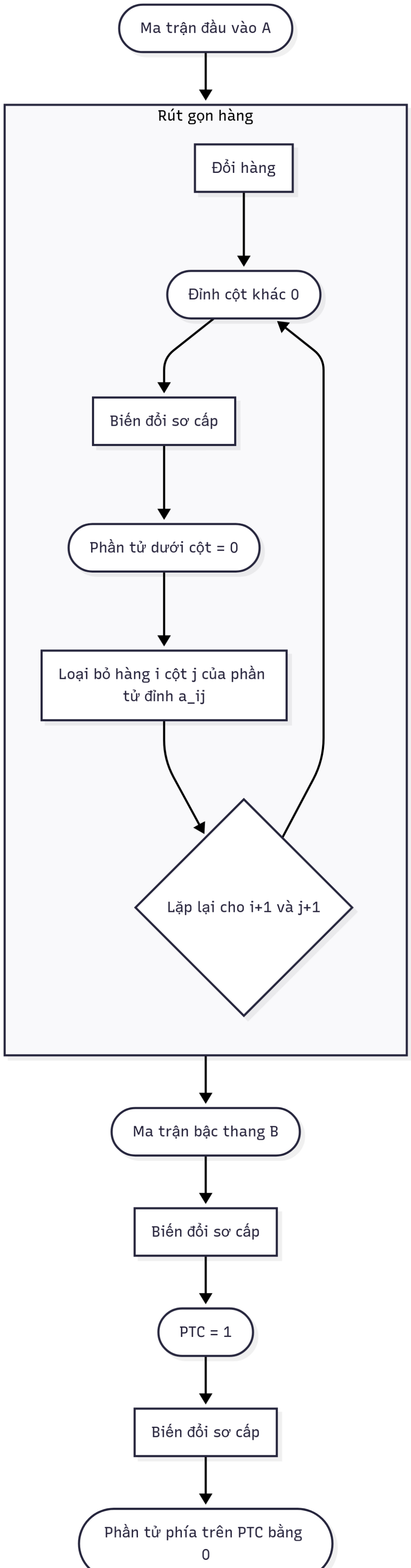
1.3.2 Ma trận rút gọn

- PTC = 1
- Cột chứa PTC $\rightarrow$ PTC là phần tử $\neq 0$ duy nhất.

1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
  - Đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
  - Thay thế tỷ lệ $h_i \leftarrow \alpha h_i$
  - Thay thế hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tương đương hàng
  - $A \rightarrow ... \rightarrow B$, $B \sim A$
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

1.4.1 Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất



1.5 Hạng

$$r(A) = \text{rank}(A) \text{ với } A = (a_{ij})_{m\times n}$$

- Số hàng $\neq 0$ trong **dạng rút gọn** (hoặc **dạng bậc thang**) của A ($A \sim$ Dạng rút gọn (bậc thang))

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

1.6 Ma trận khả nghịch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó, A là ma trận vuông cấp n
- A là **ma trận khả nghịch**.
- B là **ma trận nghịch đảo** của A.
- $B = A^{-1}$.
- Nếu tồn tại B, B là duy nhất.

Định lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
- AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Note

- $A^k = A.A...A$
  - A^k khả nghịch.
  - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

1.6.1 Ma trận sơ cấp

- Ta thực hiện 1 phép biến đổi sơ cấp trên I_n

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- E đgl **ma trận sơ cấp**
- Tồn tại 3 loại ma trận sơ cấp E tương ứng với 3 loại phép biến đổi sơ cấp.

$$EA = \overset{e}{\leftarrow} A$$

- Trong đó $\overset{e}{\leftarrow} A$ là ma trận A sau khi đã thực hiện phép biến đổi sơ cấp e.

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \ldots \xrightarrow{e_k} D$$

Ta được

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$
$$\vdots$$
$$D = (E_k \ldots E_1) A$$

Mà A KN $\Leftrightarrow$ $A \sim I_n$

Do đó,

$$A \xrightarrow{e_1}\xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_k} I_n$$

Vậy

$$I_n \xrightarrow{e_k}\xrightarrow{e_{k-1}} \ldots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \ldots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \ldots E_k) I_n$$

1.6.2 Thuật toán tìm ma trận khả nghịch

Cho $A_{n \times n}$

- B1. Thiết lập $(A|I_n)$
- B2. $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Biến đổi thành ma trận rút gọn}} (D|B)$
  - Nếu $D = I_n \rightarrow A$ khả nghịch và $A^{-1} = B$.
  - Nếu $D \neq I_n \rightarrow A$ không khả nghịch.

1.6.3 Tính chất

- $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- A khả nghịch.
- $r(A) = n$.

- A là tích hữu hạn các ma trận sơ cấp
  - $I_n = (E_1 \dots E_k)A$
  - $A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$
- $AX = B$ có nghiệm duy nhất $\forall B \in M(n \times p, \mathbb{K})$.
- $\exists B$ ma trận vuông cấp n sao cho $AB = I_n$.
- $\exists C$ ma trận vuông cấp n sao cho $CA = I_n$
- A^T khả nghịch.

2 Định thức

2.1 Nền tảng

2.1.1 Phép thế

- Cho $X = \{1, 2, \dots, n\}$
- Song ánh $\sigma : X \to X$ đgl phép thế bậc n.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Tập hợp các phép thế bậc n k/h $|S_n| = n!$.

$$S_n = \{\sigma : X \to X | \sigma \text{ là song ánh}\}$$

- Phép thế đơn vị
- Phép thế sơ cấp
- Cấu trúc
  - Mỗi phép thế đều phân tích được thành tích của các tích độc lập
  - Tích phép thế sơ cấp.

2.1.2 Dấu

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \underset{1 \le i < j \le n}{\pi} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad \in \{\pm 1\}$$

2.1.3 Nghịch thế

- Là số lượng $\sigma(i) - \sigma(j)$ ngược với $i - j$ hay số lượng

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

- Nếu số lượng nghịch thế
  - Chẳn $\to \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.

– Lẻ → $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

- **Note:** Phép thế sơ cấp là phép thế lẻ.

2.2 Công thức

- Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

- Cấp 2
- Cấp 3

2.3 Tính chất - hệ quả - định lý

2.3.1 Tính chất

- Đa tuyến tính

$$\det(A_1 \dots \alpha A_j + \beta A'_j \dots A_n) = \alpha \det(A_1 \dots A_j \dots A_n) + \beta \det(A_1 \dots A'_j \dots A_n)$$

- Thay phiên

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0$$

- Chuẩn hoá

$$\det(I_n) = 1$$

2.3.2 Hệ quả

- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \alpha A_j \dots A_j \dots A_n$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots \alpha A_i \dots A_n) = 0$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$
  - Đổi chỗ chẵn lần → 1.
  - Đổi chỗ lẻ lần → −1.

2.3.3 Định lý

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- A khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.4 Định thức con và phần bù đại số

$i \leq k \leq n$

Chọn $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$ và $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n$

- $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ là định thức con.
- $\overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$
  - Đgl phần bù của $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.
  - Ma trận sau khi bỏ hàng i_k và cột j_k từ $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.
- Lấy theo cột, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{D_1^j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{D_2^j} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj} \overline{D_n^j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- Lấy theo hàng, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{D_i^1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{D_i^2} + ... + (-1)^{i+n} a_{in} \overline{D_i^n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- **Note**
  - Ưu tiên chọn cột (hoặc hàng) nhiều 0. Nếu không có 0 $\rightarrow$ kết hợp các tính chất, định lý và hệ quả trước đó $\rightarrow$ sinh ra 0.
  - Không được dùng $h_i \leftarrow \alpha h_i$ ($h_i \leftrightarrow h_j$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ thì nhớ hệ quả đổi dấu).
  - Chọn cột để biến đổi thành "$0 \dots 1$" thì dùng phép biến đổi trên hàng và ngược lại.

2.5 Ứng dụng

2.5.1 Khả nghịch

- A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{adj}(A)\right)^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó, A ma trận vuông cấp n và

$$\operatorname{adj}(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{cof}(A)$$

trong đó, c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{D_i^j}$$

Thuật toán xác định ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức

B1. Tính c trên hàng (hoặc cột)

B2. Áp dụng công thức tính $\det(A)$ trên hàng (hoặc cột) bằng công thức

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

B3. (Check khả nghịch)

- Nếu $\det(A) = 0 \to$ không khả nghịch và kết thúc.
- Nếu $\det(A) \neq 0 \to A$ khả nghịch và chuyển sang bước 4 (nếu cần tính ma trận nghịc đảo)

B4. Tính hết tất cả c còn lại $\to \operatorname{adj}(A) = C$

B5. Tìm A^{-1} bằng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(\operatorname{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)}C^T$$

2.5.2 Hạng

Thuật toán xác định hạng của ma trận bằng định thức

B1. Tính định thức cấp $1, 2, \dots, n$

B2. (Kết luận hạng)

- Nếu định thức cấp $i \neq 0 \to$ (hàng (hoặc cột) độc lập tuyến tính $\to$ dạng bậc thang 100% có n hàng $\neq 0$) $\to \operatorname{rank}(A) \geq i$
- Nếu định thức cấp $i = 0 \to \operatorname{rank}(A) = i$

3 Hệ phương trình tuyến tính

- $m, n \in \mathbb{N}$, trong đó, m phương trình, n ẩn, ta có hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trong đó
  - a_{ij} là hệ số.
  - b_i là hệ số tự do.
  - x_j là ẩn của hệ.
- Bộ số $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là nghiệm của (1) nếu thay vào (1) thoả tất cả phương trình.
- Giải hệ (1) $\rightarrow$ tìm tập nghiệm của (1).
- Hệ pt có nghiệm đgl hệ tương thích.
- Ma trận hệ số của (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Cột ẩn

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Cột hệ số tự do

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Ta viết gọn

$$AX = b$$

- Ma trận đầy đủ (ma trận bổ sung) k/h

$$A^* = (A|b)$$

3.1 Sự tồn tại và tính duy nhất

- $A^* = (A|b) \to (S|c)$, trong đó S là dạng bậc thang (hoặc dạng rút gọn) của ma trận A^*
- **Điều kiện nghiệm:**
  - Vô nghiệm $\to \exists$ hàng có dạng $(0 \dots 0|c)$, $c_i \neq 0$.
  - Vô số nghiệm $\to$ Phần tử chính $<$ Số ẩn.
  - Có nghiệm duy nhất $\to$ Phần tử chính $=$ Số ẩn.
- **Định lý Kronecker - Capelli**
  - Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \text{rank}(A) < \text{rank}(A^*)$.
  - Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A^*)$:
    * Có nghiệm duy nhất $\to \text{rank}(A) =$ Số ẩn.
    * Vô số nghiệm $\to \text{rank}(A) <$ Số ẩn.
- **Ẩn phụ thuộc** $\to$ Là ẩn nằm trong cột chứa PTC trong dạng bậc thang (rút gọn).
- **Ẩn tự do (độc lập)** $\to$ Các ẩn còn lại.

Note

- Ta kết luận nghiệm theo kiểu
  - $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
  - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
  - $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \vdots \\ x_n = 3 \end{cases}$
- Nghiệm riêng $\to$ Đề cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.
- Nghiệm tổng quát $\to$ Không cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.

3.2 Thuật toán Gauss

B1. Đưa về A^*

B2. Đưa $A^* \to (S|c)$ (Bậc thang)

B3. (Check tồn tại nghiệm)

- Nếu không có nghiệm $\to$ Kết luận.
- Nếu có nghiệm $\to$ Dạng rút gọn $\to$ KL nghiệm.

3.3 Quy tắc Cramer

- Hệ $AX = b$ đgl **Hệ Cramer** nếu
  - A vuông
  - A Khả nghịch

Do đó,

$$X = A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} C^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay $1 \leq j \leq n$

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}(b_1c_{1j} + b_2c_{2j} + ... + b_nc_{nj})$$

$$A_j(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_m & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Do đó ta có

$$D_j = \det(A_j(b)) = b_1c_{1j} + ... + b_mc_{mj}$$

nghiệm của hệ là

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad 1 \leq j \leq n$$

- **Điều kiện nghiệm:**
  - Nghiệm duy nhất $x_j = \frac{D_j}{D} \to D \neq 0$.
  - Vô nghiệm $\to D = 0 \wedge \exists D_j \neq 0$.
  - Không kết luật gì về tương thích hệ $\to D = 0 \wedge \forall D_j = 0$.

Thuật toán tìm nghiệm của hệ bằng quy tắc Cramer

B1. Tìm D và D_j, $1 \leq j \leq n$

B2. (Check điều kiện nghiệm)

- Nếu $D \neq 0 \to$ KL nghiệm duy nhất $x_j = \frac{D_j}{D}, 1 \leq j \leq n \to$ Kết thúc.
- Nếu $D = 0 \to$ Sang bước tiếp theo

B3. (Check trường hợp)

- Nếu $\exists D_j \neq 0 \rightarrow$ KL vô nghiệm $\rightarrow$ Kết thúc.
- Nếu $\forall D_j = 0 \rightarrow$ KL rằng ta không kết luật gì về tương thích hệ $\rightarrow$ Kết thúc.

Note

- Nếu đề hỏi tìm tham số sao cho hệ có nghiệm thì ta tìm trường hợp vô số và nghiệm duy nhất.

3.4 Hệ thuần nhất

- Hệ thuần nhất là hệ (2) như sau

$$AX = 0$$

- Nghiệm tầm thường $\rightarrow X = 0 \rightarrow \text{rank}(A) = n$.
- Vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - \text{rank}(A) \rightarrow \text{rank}(A) < n$.
- **Nhận xét**
  - Nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là nghiệm của (2) $\rightarrow tx = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ là nghiệm của (2).
  - Nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là nghiệm của (2) $\rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ là nghiệm của (2).
  - A có $m < n \rightarrow$ Vô số nghiệm.

4 Không gian Vector

- $V \neq \emptyset$ đgl 1 **không gian vector** $\Rightarrow$ được trang bị 2 phép toán:
  - Cộng vector $+: V \times V \longrightarrow V, \quad (u, v) \longmapsto u + v$.
  - Nhân vô hướng $\cdot: \mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, u) \longmapsto \alpha u$.
- Thoả mãn các tiên đề sau:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (u+v)+w = u+(v+w), \quad \forall u, v, w \in V \\
(2) & u+v = v+u, \quad \forall u, v \in V \\
(3) & \exists 0 \in V : u+0 = u, \quad \forall u \in V \\
(4) & \forall u \in X,\ \exists u' \in V : u+u' = 0 \\
(5) & \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V \\
(6) & (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V \\
(7) & \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V \\
(8) & 1u = u, \quad \forall u \in V
\end{array}$$

- **Note**:
  - $\mathbb{K}$**-Không gian vector** $\leftrightarrow$ Không gian vector trên trường $\mathbb{K}$.

- V là không gian vector trên trường $\mathbb{K} \leftrightarrow v \in V$ là 1 **vector**.
- $\alpha \in \mathbb{K} \rightarrow$ đgl 1 **vô hướng**.
- 0 trong (3) $\rightarrow$ đgl **vector 0**.
- $\forall u \in V, u'$ trong (4) $\rightarrow$ đgl vector đối của vector u, $\quad u' = -u$.

4.1 Tính chất

Cho V là 1 không gian vector

- Vector 0 là duy nhất.
- $\forall u \in V$, $-u$ là duy nhất.
  - $u - v = u + (-v)$.
- Giản ước:
  - $u + w = v + w \Rightarrow u = v$.
  - $u + v = w \Rightarrow u = w - v$.
- $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = 0$.
- $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.
- $\forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ (0 bên dưới là vector 0)
  - $0u = 0$.
  - $\alpha 0 = 0$.
- **Note**:
  - Để c/m **tính duy nhất** $\rightarrow$ ta c/m cả 2 thoả cùng 1 tính chất.

4.2 Ví dụ minh hoạ

- **VD1**

$V = \{$ Vector tự do trong mặt phẳng $\}, +, .$ là 1 không gian vector.

- **VD2**

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

là 1 không gian vector.

- **VD3**

$n \geq 1$, $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

là 1 không gian vector.

- **VD4**

$M(m \times n, \mathbb{K}), +, .$ là không gian vector.

- **VD5**

$\mathbb{K}[x]$ là tập các đa thức biến x hệ số trong $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}[x]$ là không gian vector trên $\mathbb{K}$ với phép cộng các đa thức và phép nhân 1 số với đa thức. (0 là đa thức không)

- **VD6**

Tập các hàm thực xác định trên $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$-Không gian vector với

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

- **VD7**

$\mathbb{K}$ là 1 không gian vector với các phép toán thông thường trên $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

- **VD8**

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ là $\mathbb{Q}$-không gian vector.

4.3 Độc lập tuyến tính & phụ thuộc tuyến tính

Cho $S \subset V$ với V là không gian vector.

4.3.1 Tổ hợp tuyến tính

- **Tổ hợp tuyến tính** của các vector trong S là tổng hữu hạn

$$a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n, \quad a_i \in \mathbb{K}, u_i \in S.$$

4.3.2 Biểu thị tuyến tính

- Cho $v \in V$, **Biểu thị tuyến tính** là

$$v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + ... + \alpha_ku_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}, u_k \in S.$$

- **VDMH**

$\mathbb{R}^3 = S = \{x_1 = (1,2,1), v_2 = (1,2,3), u_3 = (2,4,1)\}, v = (1,2,2), w = (0, 0-3)$, v và w biểu thị tuyến tính được qua S không?

$v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$(1,2,3) = x_1($

4.3.3 Phụ thuộc tuyến tính

- S là **phụ thuộc tuyến tính** nếu

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \neq (0, ... 0) \mid \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0, \quad u_i \in S.$$

4.3.4 Độc lập tuyến tính

- S là **độc lập tuyến tính** nếu không phụ thuộc tuyến tính, hay

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0) \rightarrow \text{ Nghiệm tầm thường.}$$

4.3.5 VDMH

- **VD1**

Trong không gian $\mathbb{R}^3, S = \{u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (\sim\sim\sim), u_3 = (\sim\sim\sim)\}$

Xét $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$\alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(\sim\sim\sim) + \alpha_3(\sim\sim\sim) = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Vô số nghiệm} \Rightarrow \text{ Phụ thuộc tuyến tính.}$$

- **VD2**

Trong không gian $\mathbb{R}[x], S = \{P_1 = 1 + x + x^3, P_2 = 1 + x + x^2, P_3 = 1 + x, P_4 = x + x^3\}$

Xét $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$

$x_1(1 + x + x^3) + x_2(\sim\sim\sim) + x_3(\sim\sim\sim) = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Có nghiệm } (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \text{ Độc lập tuyến tính.}$$

(Note: HPT ở trên được lập ra dựa trên bậc, tức mỗi cột tương ứng với bậc)

4.3.6 Tính chất

- Hệ chỉ gồm 1 vector $\{u\}$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow u = 0$.
- S phụ thuộc tuyến tính
  - $\Rightarrow$ Mọi hệ chứa S phụ thuộc tuyến tính.
  - $\Rightarrow$ Mọi hệ vector chứa vector 0 đều phụ thuộc tuyến tính.
- S phụ thuộc tuyến tính, $S' \supset S \Rightarrow S'$ phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ vô hạn vector S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ Hệ con hữu hạn của S độc lập tuyến tính.

4.3.7 Định lý

- Cho $S = \{u_1, u_2 \dots, u_k\}$, $k \geq 2$, S **phụ thuộc tuyến tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 1 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \widehat{\alpha_i u_i} + \dots + \alpha_k u_k.$$

- **Cách làm bài tìm tổ hợp tuyến tính**
  - B1. Xử lý đến khi ra được hệ phương trình tuyến tính
  - B2. Giải ra nghiệm
  - B3. Cho 1 ẩn $\neq 0 \rightarrow$ Thu được tổ hợp tuyến tính (VD. $u_1 + u_2 + u_3 = \sim \rightarrow u_1 = \sim$)
- Cho $S = \{u_1, u_2 \dots, u_k\}$, $k \geq 2, u_i \neq 0$, S **phụ thuộc tuyến tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i,\ 2 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{i-1} u_{i-1}.$$

(Hơn nữa, có thể chọn i sao cho $\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$ độc lập tuyến tính. (Định lý giúp tìm tập hợp độc lập tuyến tính lớn nhất trong 1 tập))

4.4 Cơ sở và số chiều

Cho V là $\mathbb{K}$-Không gian vector và $B \subset V$.

4.4.1 Hệ sinh

- Mọi vector trong V biểu thị tuyến tính được qua $B \Rightarrow$ Hệ vector B đgl **hệ sinh (tập sinh)** của V.

4.4.2 Cơ sở

- $\begin{cases} B \text{ Hệ sinh của } V \\ B \text{ Độc lập tuyến tính} \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vector B là **Cơ sở** của V.
- Note:
  - $\mathbb{K}$-không gian vector, $\mathbb{C}$-không gian vector có 1 cơ sở là $\{1\}$.
  - $\mathbb{C}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector. $z = a + bi = a1 + bi \Rightarrow \{1, i\}$ là 1 hệ sinh. $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b \Rightarrow \{1, i\}$ là độc lập tuyến tính.
  - $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector với cơ sở là $\{1\}$.
  - $\mathbb{R}$ là $\mathbb{Q}$-không gian vector với cở sở là vô hạn.

VDMH

- **VD1**

$\mathbb{K}^n, \varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, trong đó $e_1 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$\forall x \in \mathbb{K}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\Rightarrow \varepsilon$ là 1 hệ sinh của $\mathbb{K}^n$ (*)

$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = 0 \Leftrightarrow (x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = 0$

$\Rightarrow \varepsilon$ độc lập tuyến tính (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 cơ sở của $\mathbb{K}^n$ (và là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^n$).

- **VD2**

$M(m \times n, \mathbb{K}), \varepsilon = \{E_{ij}\}_{i=1,m}^{j=1,m}$ trong đó $E_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ ... & 1 & ... \\ & \vdots & \end{pmatrix}$. (C/m tương tự) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 cơ sở của $M(m \times n, \mathbb{K})$.

- **VD3**

$\mathbb{K}[x], \varepsilon = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$.

- **VD4**

$\mathbb{K}_n[x], \varepsilon = \{1, x, ..., x^n\}$.

4.4.3 Độc lập tuyến tính cực đại

Cho $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset V$

- Nếu $\begin{cases} S \text{ Độc lập tuyến tính} \\ S \subsetneq S', S' \text{ Phụ thuộc tuyến tính} \end{cases}$ $\Rightarrow S$ **Độc lập tuyến tính cực đại**.

Định lý Cho $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$

- Cho $S \subset V$, các mệnh đề sau là $\Leftrightarrow$:
  - Hệ S là 1 **Cơ sở** của V.
  - Hệ S là Hệ vector **Độc lập tuyến tính cực đại** của V.
  - $\forall$ vector của V đề **Biểu thị tuyến tính** được 1 cách **duy nhất** qua hệ S.
- S là **hệ sinh** của V nếu (1 trong 2 thoả):
  - $\exists u_i, 1 \leq i \leq m$ **Tổ hợp tuyến tính** của các vector còn lại trong $S \Rightarrow \Big(S' = S \setminus \{v\}\Big)$.
  - $\Big(V \neq \{0\}\Big) \Rightarrow V \; \exists 1$ **Cơ sở** $\subset S$.
- **Bổ đề:**
  - Không gian vector V có 1 **cơ sở** gồm n vector $\Rightarrow \forall$ hệ **Độc lập tuyến tính** trong V đều chứa không quá n vector.
- **Note:**
  - Cách chứng minh $A \Rightarrow B$:
    * B1. Đặt A là giả thuyết $\rightarrow$ (1)
    * B2. Xác định điều kiện để có được B (từ tiên đề/định lý/tính chất/...) $\rightarrow$ (2)
    * B3. C/m (1) $\Rightarrow$ (2) $\rightarrow$ C/m xong.
  - Cách biểu diễn **duy nhất**:

    - B1. Đặt Biểu diễn A = Biểu diễn B
    - B2. C/m Hệ số của Biểu diễn A = Hệ số của Biểu diễn B → C/m xong.
  - Cách xây dựng **cơ sở**:
    - C1. Từ độc lập tuyến tính → Thêm vào → Độc lập tuyến tính cực đại.
    - C2. Từ hệ sinh → Bỏ bớt ra → Hệ sinh cực tiểu.

4.4.4 Số chiều

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n \Leftrightarrow V \text{ có 1 cơ sở gồm } n \text{ vector.}$$

- $V \neq \{0\}, V$ không có cơ sở nào gồm hữu hạn vector $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V = \infty$.
- Note: Mọi cơ sở của V đều có cùng số vector (số chiều là số vector trong cơ sở).
- $\dim\{0\} = 0$.

VD

- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(M(m \times n, \mathbb{K})) = mn$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$.
- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}) = 2$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}) = 1$.

Định lý

- $V \neq \{0\}$ đgl không gian hữu hạn sinh (nghĩa là có 1 tập sinh gồm hữu hạn vector) $\Rightarrow V$ có 1 cơ sở gồm hữu hạn vector.

Tính chất

Mệnh đề 1

- $V \neq \{0\}$ (tương tự)

Mệnh đề 2 V là KG vector n-chiều, $\beta = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ (Các mệnh đề sau tương đương)

- β là cở sở của V.
- β là hệ sinh của V.
- β độc lập tuyến tính.

4.5 Toạ độ

- Cố định thứ tự của $B \Rightarrow B = (u_1, \dots, u_n)$ là **cơ sở sắp thứ tự**.
- $B = (u_1, \dots, u_n)$ là cơ sở sắp thứ tự của $\mathbb{K}$-KG vector V

$$\forall v \in V, v = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n.$$

- $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ đgl **toạ độ** của v đối với cơ sở B. K/h:
  - $(v)_B = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.
  - $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
  - $v = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$.

VD: Tìm toạ độ (4.7a)

$((2,3,1))_B = (x_1, x_2, x_3)$

$(2,3,1) = x_1(-1,2,4) + x_2(\sim) + x_3(\sim)$

$$\begin{cases} \sim = 2 \\ \sim = 3 \\ \sim = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = -11 \\ x_3 = \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow ((2,3,1))_B = (-\tfrac{19}{3}, -11, \tfrac{20}{3}).$$

4.5.1 Tính chất

Cho $B = (u_1, ..., u_m)$ là cơ sở của V, $v \in V$, $(v)_B = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $[0] = 0$

- $\forall u, v \in V \quad [u_v]_B = [u]_B + [v]_B$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad [\alpha u]_B = \alpha[u]_B$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad [\alpha u + \beta v]_B = \alpha[u]_B + \beta[v]_B$.
- $[\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n]_B = \alpha_1[u_1]_B + ... + \alpha_n[u_n]_B$.

4.5.2 Mệnh đề

Cho B là 1 cơ sở của V, $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$.

- S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \{[\alpha_1]_B, ..., [\alpha_k]_B\}$ độc lập tuyến tính.
- S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \operatorname{rank}([v_1]_B ... [v_k]_B) = k$.

4.5.3 Định lý

Cho B và C là 2 cơ sở của V

- $\exists$ duy nhất ma trận A vuông, khả nghịch sao cho

$$[v]_B = A[v]_C, \forall v \in V$$

- A đgl **ma trận chuyển cơ sở** từ B sang C, $[v]_B = A[v]_C$ là công thức đổi toạ độ

$$A = P_{B,C} = ([v_1]_B ... [v_n]_B)$$

4.6 Không gian con - Hạng của hệ vector

Cho $\emptyset \neq E \subset V$-KG vector

- E là KG vector cùng với 2 phép toán trên $V \Rightarrow E$ là **KG con** của V.

VD

- V là KG vector
  - $\{0\}$ là KG con của V đgl KG con tầm thường.
  - $V \subset V$.
- $\mathbb{R}^3 \quad P = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ là 1 KG con của $\mathbb{R}^3$.
- $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$.

4.6.1 Định lý

Cho $\emptyset \neq E \subset V$-KG vector, E là KG con của $V \Rightarrow$ thoả điều kiện sau:

- $u + v \in E, \quad \forall u, v \in E$.
- $\alpha u \in E, \quad \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

hoặc

- $(\alpha u + \beta v) \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$.

VD

Cho $\mathbb{Q} = \{(x, y, z)x - 2y + z = 0\}$. C/m $\mathbb{Q}$ là KG con của $\mathbb{R}^3$.

Ta có $0 - 20 + 0 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$\forall u = (x, y, z), v = (a, b, c) \Rightarrow x + 2y + z = 0$ và $a + 2b + c = 0$

Xét $u + v = (x + a, y + b, z + c)$

$(x + a) - 2(y + b) + (z + c) = (x - 2y + z) + (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow u, v \in \mathbb{Q}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y, z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - 2y + z = 0$

Xét $\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Vì $\alpha x - 2\alpha y + \alpha z = \alpha(x + 2y + z) = 0 \Rightarrow \alpha u \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ KG con của $\mathbb{R}^3$.

- Note: Cho 3 toạ độ nếu đi qua gốc toạ độ $\Rightarrow$ KG con (hình dung hình học).

4.6.2 Mệnh đề

- Nếu E là KG con của V
  - $\dim V < \infty \Rightarrow \dim E < \infty \wedge \dim E \leq \dim V$.
  - $\dim E = \dim V \Rightarrow E = V$.
- $\{v_i\}_{i \in I}$ v_i là KG con của V, $\forall i \in I$.
- $\bigcup = \bigcap_{i \in I} v_i$ là KG con của V.

4.6.3 Span

- Cho X là tập con của $\mathbb{K}$-KG vector V, giao của tất cả các KG con của $V \supset X$ là 1 KG con của $V \supset X$, đgl **KG con của V sinh bởi X**.
- K/h: $\mathcal{L}(X) = \text{Span}(X) = \text{Sp}(X)$.
- **Note**
  - $\mathcal{L}(\{0\}) = \{0\}$.
  - $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$.
  - $\mathcal{L}(X)$ là KG con nhỏ nhất của $V \supset X$.
  - $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$.
  - Nếu E là KG con của V, $\mathcal{L}(E) = E$.

Định lý

- Cho $X \subset V$, khi đó

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{\text{hữu hạn}} \alpha_i u_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, u_i \in X \right\} = \text{Span}(X).$$

- Hạng của hệ vector X là số chiều KG con sinh bởi X

4.7 Không gian hàng, cột, nghiệm

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{K}$

- $\text{Row}A = \text{Span}\{m \text{ hàng của } A\} \subset \mathbb{K}^n$.
- $\text{Col}A = \text{Im}A = \text{Span}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subset \mathbb{K}^m$.
- $\text{Nul}A = \text{Ker}A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.

4.7.1 Mệnh đề

Cho A là ma trận cỡ $m \times n$

$$\dim A(\text{Row}A) = \dim(\text{Col}A) = r(A).$$

$$n = \text{rank}A + \dim(\text{Nul}A).$$

- Note: Hỏi số chiều $\rightarrow$ thoải mái, hỏi cơ sở $\rightarrow$ tìm hết.

4.7.2 VDMH

VD1

Tìm cơ sở (bài 4.23a)

Ta có $A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix}$

Col$A$ sinh bởi A_1, A_2, A_3, A_4

Xét $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + \sim -4x_4 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ giải ra dạng bậc thang $\Rightarrow$ Phụ thuộc tuyến tính.

$\Rightarrow \{A_1, A_2\}$ là cơ sở của Col$A$

$\Rightarrow$ row có cơ sở là $\{(1,-2,1,2),(0,-2,-5,-3)\}$ (Hàng chứa PTC trong dạng bậc thang)

$x \in$ Nul$A \Leftrightarrow Ax = 0$

$A \rightarrow$ dạng rút gọn $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Có nghiệm $X = (\sim,\sim,\sim,\sim) \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Đặt $x_3 = 1, x_4 = \sim \Rightarrow X = \{(\sim,\sim,\sim,\sim),(\sim,\sim,\sim,\sim)\}$ là cơ sở của Nul$A$ (Không gian nghiệm).

- **Note**: Để kiểm tra không gian con hay không có thể dùng cách này trừ dạng đa thức với ma trận.

VD2 4.4.12 (Giáo trình)

(i) C/m H là kgian con của $\mathbb{R}^3$

$\forall u \in H, \exists a,b,c \in \mathbb{R}$ sao cho

$u = \begin{pmatrix} a-2b+c \\ a+b-c \\ -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Col}A \Rightarrow H \subset \text{Col}A$

$H \subset$ Col$A, \forall u \in$ Col$A \rightarrow Ax = u$ có nghiệm

$\rightarrow \exists a,b,c \in \mathbb{R}$ sao cho $u = A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ \sim \end{pmatrix} \in H \Rightarrow$ có Col$A \subset H \Rightarrow H =$ Col$A$.

(ii)

$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{K}$

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Bu^T \Rightarrow u \in \text{Nul}B$

4.8 Tổng & Tổng trực tiếp

- $V_1 + V_2 + ... + V_m$ là **KG tổng** của $V_1, V_2, \dots, V_m$.
- Tổng $V_1 + ... + V_m$ đgl **tổng trực tiếp** nếu $\forall v \in V_1 + ... + V_m$ đều có duy nhất 1 cách phân tích $V = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}, \forall u_i \in V_i$, k/h: $V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_m$.

4.8.1 Mệnh đề

Cho $V_1, V_2, \dots, V_m$ là các $\mathbb{K}$-KG con của $\mathbb{K}$-KG vector V

$$V_1 + V_2 + \dots + V_m = \{u_1 + u_2 + \dots + u_m \mid u_i \in V_i\}$$

là 1 KG con của V.

4.8.2 Định lý

Tổng $V_1 + \dots + V_m$ là tổng trực tiếp nếu 1 trong 2 điều kiện tương đương sau thoả:

- $V_j \bigcap (\sum_{i \neq j} V_i) = \{0\} \quad 1 \leq j \leq m.$
- $V_j \bigcap (\sum_{i > j} V_i) = \{0\} \quad 1 \leq j \leq m-1.$

4.8.3 Số chiều không gian tổng

Định lý Cho V_1, V_2 là 2 KG con của V

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Hệ quả

- $V_1 = \mathrm{Sp}(S_1),\ V_2 = \mathrm{Sp}(S_2) \Rightarrow V_1 + V_2 = \mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2).$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$

5 Ánh Xạ Tuyến Tính

- Cho U và V là các $\mathbb{K}$-KGVT, Ánh xạ $f : U \to V$ đgl **AXTT** nếu:
  - $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V.$
  - $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in U.$
- **Định lý:** Cho U và V là các $\mathbb{K}$-KGVT, Ánh xạ $f : U \to V$ đgl **AXTT** nếu

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U$$

- **Tính chất**
  - $f(0_V) = 0_V.$
  - $f(-u) = -f(u).$
  - $f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k).$
- **Mệnh đề:** U, V, W là $\mathbb{K}$-KGTV, ta có:

$$
\begin{aligned}
f : U &\longrightarrow V, \quad u \longmapsto f(u), \\
g : V &\longrightarrow W, \quad v \longmapsto g(v), \\
g \circ f : U &\longrightarrow W, \quad u \longmapsto g(f(u)).
\end{aligned}
$$

- **Định lý về Sự xác định của AXTT:** Cho U, V là các $\mathbb{K}$-KGTV, $(u_1, \dots, u_n)$ là 1 cơ sở của $U, v_1, \dots, v_n \in V$, khi đó $\exists!$ AXTT $f : U \to V$ thoả

$$f(u_i) = v_i, 1 \leq i \leq n.$$

5.1 Đơn cấu, Toàn cấu, Đẳng cấu

- **Định nghĩa:** u, v là các $\mathbb{K}$-KGTV $f : U \to V$, gọi là **đồng cấu**, ta có, f:
  - Đơn ánh $\to$ **Đơn cấu**.
  - Toàn ánh $\to$ **Toàn cấu**.
  - Song ánh $\to$ **Đẳng cấu**. U đẳng cấu với V k/h: $U \cong V$.
- **Nhận xét:**
  - $U \cong U$.
  - $U \cong V \to V \cong U$.
  - $U \cong V, V \cong W \to U \cong W$.

Tính chất Đồng cấu

- **Định lý:** $f : U \to V$ là đồng cấu, $s = \{u_1, \dots, u_k\}$ Phụ thuộc tuyến tính trong $U \Rightarrow f(s) = \{f(u_1), \dots, f(u_k)\}$ Phụ thuột tuyến tính trong V.
  - f đơn cấu $\Leftrightarrow$ (s độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ f(s) Độc lập tuyến tính, $\forall s$).
  - f toàn cấu $\Leftrightarrow$ (s hệ sinh của $U \Rightarrow f(s)$ là hệ sinh của V).
  - f đẳng cấu $\Leftrightarrow$ (s là cơ sở của $U \Rightarrow f(s)$ là cơ sở của V).

5.2 Nhân và Ảnh (Kernel và Image)

- **Định nghĩa:** Cho $f : U \to V$ là AXTT, E là KG con U, F là KG con V. $f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$, $f^{-1}(F) = \{u \in U \mid f(u) \in F\} \subset U$
  - **Ảnh** của f là $f(U) = \mathrm{Im} f$.
  - **Nhân** của f là $f^{-1}(\{0_V\}) = \mathrm{Ker} f$.
- **Định lý:** Cho $f : U \to V$ là AXTT, E là KG con U, F là KG con V
  - $f(E)$ là KG con V.
  - $f^{-1}(F)$ là KG con U.
- **Hệ quả:** Cho $f : U \to V$ là AXTT
  - $\mathrm{Im} f$ là 1 KG con của V.
  - $\mathrm{Ker} f$ là 1 KG con của U. $(f(U) = 0)$

- **Định lý:** Cho $f: U \to V$ là đẳng cấu
  - f là đơn cấu $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_U\}$.
  - f là toàn cấu $\Leftrightarrow \text{Im} f = V$.
- **Định lý:** Cho $f: U \to V$ là AXTT
  - f đơn cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim U$.
  - f toàn cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim V$.
  - f đẳng cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim U = \dim V$.
- **Định lý về hạng của AXTT:** Cho $f: U \to V$ là AXTT, khi đó

$$\dim U = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim(\text{Ker} f) + \text{rank}(f)$$

5.3 Ma trận của AXTT

- **Định lý:** Cho U, V là các KGVT, $\dim U = n$, $\dim V = m$, $\mathcal{B}$ là cơ sở của U, $\mathcal{C}$ là cơ sở của V.
  - $\forall$ AXTT $f: U \to V, \exists!$ ma trận $A_{m\times n}$ sao cho $[f(u)]_{\mathcal{C}} = A[u]_{\mathcal{B}}, \forall u \in U$.
  - $\forall A_{m\times n}$, $\exists!$ AXTT $f: U \to V$ thoả ở trên.
- Note: $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$. $\text{Im} f = \text{Col} A$, $\text{Ker} f = \text{Nul} A$.
- **Định nghĩa:** giáo trình
- **Mệnh đề:** giáo trình

$$[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = Q^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} P$$

- **Định lý:** Cho A ma trận đẳng cấu $f: U \to V$

$$\text{Im} f \cong \text{Col} A, \text{Ker} f \cong \text{Nul} A \Leftrightarrow \text{rank} f = \text{rank} A$$

- **Hệ quả:** f Đẳng cấu $\Leftrightarrow A$ Khả nghịch.

5.4 Không gian các đồng cấu

- **Định nghĩa:** Cho U, V là các $\mathbb{K}$-KGVT, **Không gian các đồng cấu** k/h: $\text{Hom}(U,V) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) \neq \emptyset$, $\text{Hom}(U,V)$ là KGVT với 2 phép toán:
  - Phép cộng: $\forall f, g \in \text{Hom}(U,V)$
    - $f + g : U \to V, u \mapsto f(u) + g(u)$
    - $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$.
  - Phép nhân: $\forall u \in \mathbb{K}, \forall f \in \text{Hom}(U,V)$
    - $\alpha f : U \to V, u \mapsto \alpha f(u)$
    - $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$

5.4.1 Cấu trúc không gian đồng cấu

- **Định lý:** $\dim U = n$, $\dim V = m$
  - $\mathrm{Hom}(U, V) \cong M(m \times n, \mathbb{K})$.
  - $\mathrm{End}(V) \cong M(n \times n, \mathbb{K})$. $\mathrm{GL}(U) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. (general linear group)
- **Mệnh đề:** $\begin{array}{rl} f : U \longrightarrow V, & u \longmapsto f(u), \\ g : V \longrightarrow W, & v \longmapsto g(v), \\ g \circ f : U \longrightarrow W, & u \longmapsto g(f(u)), \end{array}$, Gọi $\mathcal{B}$ là cơ sở của U, $\mathcal{C}$ là cơ sở của V, $\mathcal{D}$ là cơ sở của W.

$$[g \circ f]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

6 Chéo hoá ma trận

6.1 Giá trị riêng & Vector riêng

- **Định nghĩa:** Cho A vuông cấp n, $\exists$ vector $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$$Au = \lambda u$$

  - Giá trị λ đgl **giá trị riêng** của A.
  - Vector u đgl **vector riêng** của A ứng với λ.
    - $A(\alpha u) = \alpha(Au) = A(\alpha u), \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
    - $A(u + v) = Au + Av = Au + \lambda v = \lambda(u + v), \forall v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
    - $Au = \lambda u, Au = \mu u \Rightarrow \lambda u = \mu u \Leftrightarrow (\lambda - \mu)u = 0$.
- **Thuật toán tìm giá trị riêng, vector riêng**
  - B1. $P_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix} = 0$.
  - B2. Giải $P_A(x) \to$ nghiệm x, với từng nghiệm x tương ứng với từng λ
  - B3. Thay λ vào $(A - \lambda I_n) = 0 \to$ giải tìm nghiệm của X.
  - B4. Lặp lại đến khi ko còn λ nào $\to$ kết luận $\to$ với mỗi λ là giá trị riêng, X là các vector riêng của A ứng với $\lambda \to$ kết thúc.
- **Định lý:** A có k giá trị riêng khác nhau $(k \leq n) \Rightarrow k$ vector riêng tương ứng *độc lập tuyến tính.*
- **Định nghĩa:** Cho A vuông cấp n, $\exists$ ma trận P vuông cấp n và ma trận chéo D cấp n sao cho

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$$

  - A đgl **ma trận chéo hoá được**.
  - P đgl **ma trận chéo hoá** A.

- D đgl **dạng chéo** của A.

- **Định lý:** $A_{m\times n}$ chéo hoá được $\Leftrightarrow$ A có n vector riêng *độc lập tuyến tính*.

6.2 Ma trận chéo hoá được

- E_λ đgl **không gian riêng** của A ứng với λ

$$E_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)X = 0\} = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$$

- **Mệnh đề:** A có k giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \Rightarrow E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_k}$ là **tổng trực tiếp**.

- **Định lý:** A có k giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \Rightarrow A$ **chéo hoá được** $\Leftrightarrow$
  - $E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \dots \bigoplus E_{\lambda_k} = \mathbb{K}^n$
  - $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$
  - $\sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Nul}(A - \lambda_i I)) = n$

- **Thuật toán xác định chéo hoá ma trận**
  - B1. (Thuật toán tìm giá trị riêng, vector riêng) $\to \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \to$ vector $u_1, u_2, \dots u_k$ tương ứng với từng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \to$ **số chiều** của cơ sở không gian riêng E_i (Bắt đầu với E_0) tương ứng với từng vector $u_1, u_2, \dots u_k$
  - B2. (Check chéo hoá)
    * $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n \to A$ Chéo hoá được $\to$ B3
    * $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) \neq n \to A$ Không chéo hoá được $\to$ Kết thúc
  - B3. (Kết luận ma trận P và D)
    * Từ vector $u_1, u_2, \dots u_k \to$ hợp các vector lại thành 1 ma trận (theo cột) $\to P$.
    * Tương ứng với giá trị λ_i của u_i trong cột trong $P \to D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$.

6.3 Tự đồng cấu

6.3.1 Giá trị riêng và vector riêng

- **Định nghĩa:** $f : V \to V$ là tự đồng cấu, $\exists v \in V \setminus \{0\}$

$$f(v) = \lambda v$$

  - λ đgl **giá trị riêng** của f.
  - v đgl **vector riêng** của f ứng với λ.

- **Mệnh đề:** $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{K}$-KGVT V, $A = [f]_{\mathcal{B}}$
  - λ là giá trị riêng của $f \Leftrightarrow \lambda$ là giá trị riêng của A.
  - v là vector riêng của f ứng với $\lambda \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$ là vector riêng của A ứng với λ.

- **Note:** Để tìm vector riêng của f ta tìm $X = (\dots, \dots, \dots)$ như thông thường rồi lấy tổng của tích với từng v_i tương ứng ($v = \dots v_1 + \dots v_2 + \dots v_3 + \dots$)

6.3.2 Chéo hoá

- **Định nghĩa:** $f : V \to V$ là tự đồng cấu, $\exists$ cơ sở $\mathcal{C}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{C}}$ là ma trận chéo $\Rightarrow f$ đgl **chéo hoá được**.
- **Note:**
  - $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3) \to$ Thuật toán tìm giá trị riêng, vector riêng $\to X \to p_1 = (..,..,..), p_2 = ..., p_3 = ... \to$ Cơ sở $\mathcal{C} = (..u_1 + ..u_2 + ..u_3, ..u_1 + ..u_2 + ..u_3, ...) \to [f]_{\mathcal{C}} =$ ma trận giống ma trận D.