

Ôn tập Phép biến đổi tích phân

May 21, 2025

1 Khai triển chuỗi Fourier

1. Tìm khai triển chuỗi Fourier của hàm số $f(x) = |2x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$
2. Tìm khai triển chuỗi Fourier của hàm số $f(x) = x^2 - 4$, $-\pi \leq x \leq \pi$

2 Tính giá trị của chuỗi số

1. Tính giá trị của chuỗi số: $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$

3 Biểu diễn

1. Tính

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{w^2 + 100} d\omega, \quad x \geq 0$$

4 Đẳng thức Parseval

1. Dùng đẳng thức Parseval tính $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$, biết

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cos nx}{2n+1} - \frac{5 \sin nx}{n^4} \right)$$

2. Dùng đẳng thức Parseval tính $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$, biết

$$f(x) = \frac{\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cos nx}{3^n} - \frac{7 \sin nx}{n} \right)$$

5 Tích chập

1. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-3x^2+1}$, $g(x) = e^{-5x^2+2}$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm $f * g$?
2. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = xe^{-(x^2+2x)}$, với $x \in \mathbb{R}$. Tính $f * g$?
3. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-x^2+2}$, $g(x) = e^{-2x^2+2x}$, với $x \in \mathbb{R}$. Tính $f * g$?
4. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-2x^2+3}$, $g(x) = e^{-3x^2-2}$, với $x \in \mathbb{R}$. Tính $f * g$?
5. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-4x^2+1}$, $g(x) = e^{-9x^2-3}$, với $x \in \mathbb{R}$. Tính $f * g$?

6 Bài toán giá trị biên

1. Dùng phép biến đổi Fourier tìm nghiệm $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, của bài toán giá trị biên sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \frac{5}{x^2 + 4} \end{cases}$$

2. Dùng phép biến đổi Fourier tìm nghiệm $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, của bài toán giá trị biên sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = xe^{-(x^2+2x)} \end{cases}$$

7 Biến đổi Laplace

1. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$5y''' - 4y' = te^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

2. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$y''' + 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

3. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$y''' + 3y'' + y = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

4. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$\begin{cases} x' + 2x + y = 0 \\ y' - 3x + y = 0 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

5. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$y''' - 2y'' + 5y = t + 5, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

8 C/M

1. CMR:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \operatorname{sgn}(x), \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

9 Đề 2022 - 2023

1. Tìm khai triển chuỗi Fourier của hàm số $f(x) = x^2$, với $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. Dùng đẳng thức Parseval tính $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$, biết

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cos nx}{e^{2n}} - \frac{4 \sin nx}{n^2} \right)$$

3. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-2x^2}$ và $g(x) = e^{\frac{1}{2}x^2+2}$, với $x \in \mathbb{R}$

a. Tìm biến đổi Fourier của $f * g$, trong đó $f * g$ là tích chập của f và g .

b. Tìm $f * g$.

4. Dùng phép biến đổi Fourier tìm nghiệm $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, của bài toán giá trị biên sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}, & -\infty < x < \infty, \text{ trong đó } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

5. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = 2e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$