

# Cấu trúc rời rạc

September 21, 2025

## 1 Cơ sở Logic

### 1.1 Phép toán

#### 1.1.1 Phủ định

$P$	$\neg P$
0	1
1	0

#### 1.1.2 Hội (và)

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

#### 1.1.3 Tuyển (hoặc)

$P$	$Q$	$P \vee Q$
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
0	1	1
1	0	1
1	1	1

#### 1.1.4 Kéo theo

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
1	1	1

### 1.1.5 Tương đương (Nếu và chỉ nếu)

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

## 1.2 Dạng mệnh đề

- Sơ cấp
- Hằng đúng
- Hằng sai

## 1.3 Tương đương logic & Hệ quả logic

### 1.3.1 Tương đương logic

- $P, Q \rightarrow$  công thức ...
- $P \Leftrightarrow Q (P \equiv Q, P = Q)$  đgl tương đương logic.
- $P \leftrightarrow Q$  đgl hằng đúng.

### 1.3.2 Hệ quả logic

- $P \Rightarrow Q$  đgl hệ quả logic.
- $P \rightarrow Q$  đgl hằng đúng.

#### Note

- $C/m \ P \Rightarrow Q \rightarrow c/m \ P \rightarrow Q$  chân trị 1.

## 1.4 Quy luật logic

Luật	Công thức
Phủ định của phủ định	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Giao hoán	$P \vee Q \equiv Q \vee P \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Kết hợp	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Phân phối	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Lũy đẳng	$P \wedge P \equiv P \quad P \vee P \equiv P$
Trung hoà	$P \wedge 1 \equiv P \quad P \vee 0 \equiv P$
Phần tử bù	$P \wedge \neg P \equiv 0 \quad P \vee \neg P \equiv 1$
Thống trị	$P \wedge 0 \equiv 0 \quad P \vee 1 \equiv 1$
Hấp thụ	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \quad P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

Luật	Công thức
Phản chứng	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

## 1.5 Quy tắc suy diễn

- Khẳng định

$$\frac{P \rightarrow Q, P}{\therefore Q}$$

- Phủ định

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q}{\therefore \neg P}$$

- Tam đoạn luận

$$\frac{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$$

- Tam đoạn luận rời

$$\frac{P \vee Q, \neg Q}{\therefore P}$$

or

$$\frac{P \vee Q, \neg P}{\therefore Q}$$

- Mâu thuẫn

$$P \rightarrow Q \equiv (P \wedge \neg Q) \rightarrow 0$$

trong đó  $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_N$

## 1.6 Vị từ - lượng từ

### 1.6.1 Vị từ

$P(x, y, \dots) \rightarrow P(a, b, \dots)$  có chân trị 0 hoặc 1.

### 1.6.2 Lượng từ

Với mọi

- $\forall$  trong đó  $\wedge$ 
  - Đúng với tất cả.

- Sai với một.
- $\neg(\forall x \in A, P(x)) \equiv \exists x \in A, \neg P(x)$

### Tồn tại

- $\exists$  trong đó  $\forall$ 
  - Đúng với một.
  - Sai với tất cả.
- $\neg(\exists x \in A, P(x)) \equiv \forall x \in A, \neg P(x)$

### Đặc biệt hoá phổ dụng

### Tổng quát hoá phổ dụng

### 1.6.3 Quy tắc suy diễn

#### C/m Phản chứng

$$P \Rightarrow Q \equiv (P \wedge \neg Q) \Rightarrow 0$$

#### C/m trực tiếp

#### C/m theo trường hợp (vét cạn)

#### C/m gián tiếp (PC) $P \Rightarrow Q$ và $\neg Q \Rightarrow \neg P$

\$ \neg Q \quad \neg P \quad P \quad Q \$

#### C/m quy nạp

$$\frac{P(n_0), \quad \forall n > n_0, P(n) \rightarrow P(n+1)}{\therefore \forall n \geq n_0, P(n)}$$

B1. C/m  $P(n_0)$  đúng

B2. G/s  $n \in \mathbb{N}$  và  $n \geq n_0$ ,  $P(n)$  đúng. C/m  $P(n+1)$  đúng.

$\Rightarrow P(n)$  đúng  $\forall n \geq n_0$

## 2 Tập hợp - Ánh xạ

### 2.1 Tập hợp

- Cách diễn tả
  - Bằng lời
  - Liệt kê
  - Tính chất đặc trưng

- Lực lượng k/h  $|A|$
- Tích Descarte
  - 2 tập hợp
  - Nhiều tập hợp
- Tập con
  - k/h  $B \subset A \Leftrightarrow \{\forall x|x \in B \Rightarrow x \in A\}$
  - Tập hợp tập con của  $A$  k/h  $P(A)$

### 2.1.1 Phép toán

- Hợp  $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$
- Giao  $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$
- Hiệu  $A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$
- Phần bù  $B \subset A$ , k/h  $\overline{B_A}$  or  $\overline{B}$

### Tính chất

Luật	Công thức
Giao hoán	$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
Kết hợp	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Phân phối	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Luỹ đẳng	$A \cap A = A \quad A \cup A = A$

## 2.2 Ánh xạ

Ánh xạ bằng nhau

Ảnh

Ảnh ngược

Tính chất

### 2.2.1 Loại

#### Đơn ánh

- Có tối đa 1 nghiệm

$$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

hay

$$\forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$$

- **Không** là đơn ánh (có nhiều hơn 1 nghiệm)

$$\exists x, x' \in X, x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$$

### Toàn ánh

- Luôn có ít nhất 1 nghiệm

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$$

hay

$$\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

- **Không** là toàn ánh (Tồn tại vô nghiệm)

$$\exists y \in Y, f^{-1}(y) = \emptyset$$

hay

$$\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x)$$

### Song ánh

- Vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x)$$

hay

$$\forall y \in Y, f^{-1}(y) \text{ có đúng 1 phần tử}$$

### 2.2.2 Ngược

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, y \mapsto f^{-1}(y) = x, \quad f(x) = y$$

### 2.2.3 Hợp

$$h = g \circ f : X \rightarrow Y \rightarrow Z, x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

- Định lý

$f : X \rightarrow Y$  song ánh

$$f \circ f^{-1} = Id_Y f^{-1} \circ f = Id_X$$

Trong đó

- $Id_X(x) : X \rightarrow X, \quad Id_X(x) = x$
- $Id_Y(y) : Y \rightarrow Y, \quad Id_Y(y) = y$