Tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 2 tháng 3 năm 2024

TÓM TẮT

- Giới thiệu về bài toán tối ưu phân tuyến tính:
  - Cơ sở lý thuyết.
  - Thuật toán Dinkelbach.
- Phương pháp giải bài toán tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên bằng thuật toán nhánh cận (LandDoig).

NỘI DUNG

Giới thiệu bài toán

Tối ưu phân tuyến tính (Linear-Fractional Programming)

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính.**
- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{R}^n_+$. Tập

  $S_F := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \le b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.
- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1\ d_2\ \dots\ d_n)$ $(D(x) > 0, \forall x \in S_F)$.

Bài toán minh hoạ

$$Q(x) = \frac{4x_1 + 2x_2 - 6}{3x_1 + 2x_2 - 5} \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Mối quan hệ với bài toán tối ưu tuyến tính

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 = 1$, bài toán (F) trở thành bài toán tối ưu tuyến tính (P) và ta gọi (F) là bài toán mở rộng của (P):

$$\begin{aligned} &(P) \quad P(x) = p^T x + p_0 \qquad \longrightarrow Max \\ &\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 \neq 0$, ta thu được bài toán tuyến tính (Q):

$$\begin{aligned} &(Q) \quad Q(x) = \frac{p^T}{d_0} x + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0} \qquad \longrightarrow Max \\ &\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

- Ngược lại nếu $p^T = 0$ và $p_0 \neq 0$:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p_0}{d^T x + d_0} = \frac{p_0}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Tương tự bài toán:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{d^T x + d_0}{p_0} = \frac{D(x)}{p_0} \quad \longrightarrow Min$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- Nếu p^T và d^T phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\mu \neq 0$ và $p^T = \mu d^T$, ta thu được hàm:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{\mu d^T x + p_0}{d^T x + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{d^T x + d_0}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (7)$$

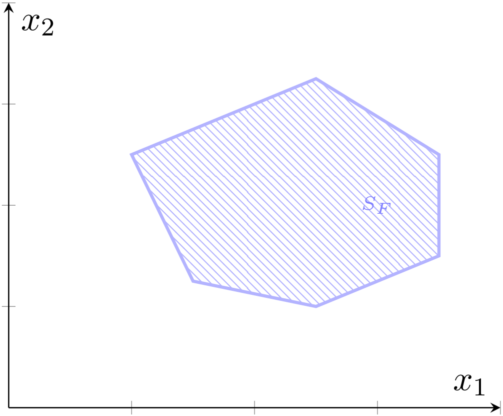
Ta thay bằng hàm $D(x)$ với điều kiện:

- Nếu $p_0 - \mu d_0 > 0$, $D(x) \longrightarrow Min$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 < 0$, $D(x) \longrightarrow Max$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 = 0$ thì $Q(x) = \mu =$ hằng số $(\forall x \in S_F)$, ta bỏ qua bài toán.

Phương pháp hình học

Bài toán trên không gian $\mathbb{R}^2$

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \text{ trong đó } A = m \times 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$



Hình: Tập nghiệm minh hoạ của bài toán (F)

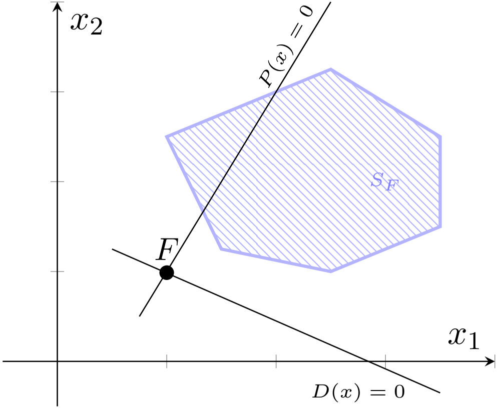
Tính chất

Đặt $Q(x) = K$ ($K \in \mathbb{R}$), ta được:

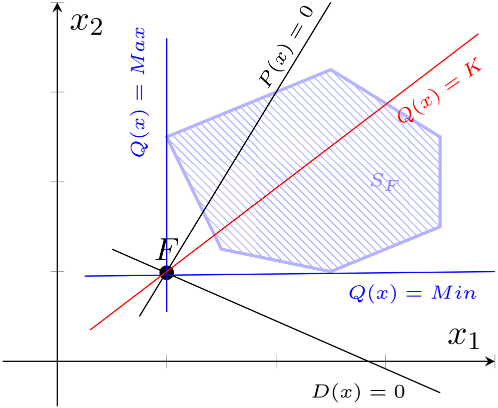
$$(p_1 - Kd_1)x_1 + (p_2 - Kd_2)x_2 + (p_0 - Kd_0) = 0 \qquad (9)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + p_0 &= 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 &= 0 \end{cases} \qquad (10)$$

- $Q(x) = K$ là đường mức quét qua tập S_F, đến khi gặp *cực điểm* thì ở đó ta nhận được giá trị K là giá trị tối ưu của bài toán (F).
- Ta xác định được điểm cố định F là nghiệm của phương trình (9), nói cách khác, điểm cố định F là điểm giao của 2 đường thẳng $P(x) = 0$ và $D(x) = 0$.
- Trường hợp $P(x) = 0$ song song với $D(x) = 0$, hay nói cách khác hệ (9) vô nghiệm thì điểm cố định F không tồn tại.



Hình: Minh hoạ điểm cố định F



Hình: Minh hoạ đường mức $Q(x) = K$

Xét tính biến thiên

Từ phương trình (9), ta có:

$$x_2 = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1 - \frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2}. \tag{11}$$

Đạo hàm 2 vế ta được:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left[-\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1\right] - \frac{d}{dx_1}\left[\frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2}\right]$$

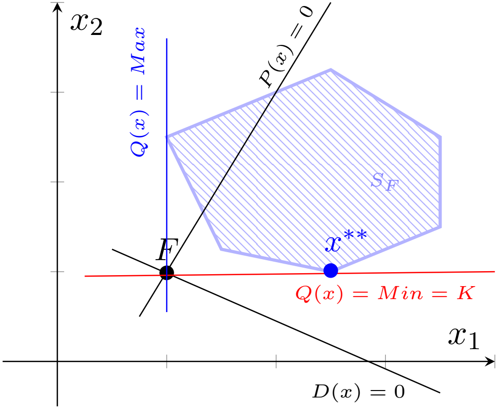
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}$$

$$k = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2} \text{ (Đặt } k = \frac{dx_2}{dx_1}\text{)}$$

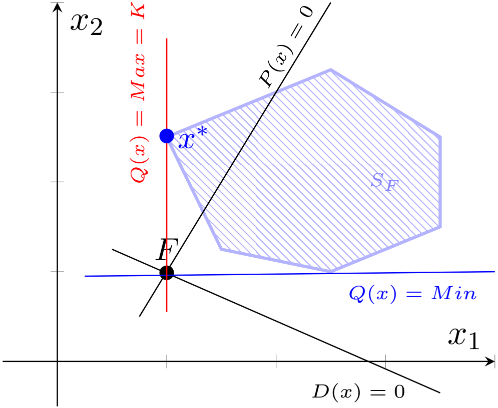
- Ta thấy hệ số góc k phụ thuộc vào tham số K, Khảo sát sự biến thiên của k theo K, ta có:

$$\frac{dk}{dK} = \frac{d_1p_2 - d_2p_1}{(p_2 - Kd_2)^2} \tag{12}$$

- Giá trị của $Q(x)$ tăng hay giảm phụ thuộc vào $(d_1p_2 - d_2p_1)$, do đó k biến thiên theo 1 chiều nhất định. Từ đây, ta có thể tìm được nghiệm tối ưu của bài toán (F).
- Quay đường mức $Q(x) = K$ quanh điểm F đến khi trùng với cực điểm x^* ta nhận được giá trị cực đại của hàm $Q(x)$, x^{**} ta nhận được giá trị cực tiểu của hàm $Q(x)$.



Hình: $Q(x)$ đạt giá trị tối ưu lại điểm x^{**}



Hình: $Q(x)$ đạt giá trị tối ưu lại điểm x^*

Ví dụ minh hoạ

Thuật toán Dinkelbach

Tính chất

- Quay lại bài toán:

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{13}$$

- Ta đặt hàm:

$$F(\lambda) = \max_{x \in S_F}\{P(x) - \lambda D(x)\}, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Định lý 3.1

Vector x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (F) nếu và chỉ nếu

$$F(\lambda^*) = \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0 \tag{15}$$

Với

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \tag{16}$$

Chứng minh.

Nếu vector x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (F), ta có:

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \geq \frac{P(x)}{D(x)}, \ \forall x \in S_F$$

Tương tự,

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq 0, \forall x \in S_F \tag{17}$$

Từ bất phương trình (17), ta được:

$$\Rightarrow \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0$$

Nếu vector x^* là nghiệm tối ưu thì:

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0, \ \forall x \in S_F$$

Với $D(x) > 0,\ \forall x \in S_F$, ta có:

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = -D(x) < 0 \tag{18}$$

Đồng nghĩa $F(\lambda)$ giảm theo λ, từ đó ta thiết lập được thuật toán Dinkelbach.

Thuật toán Dinkelbach

Bước 1. Thiết lập

Đặt $x^{(0)} \in S_F$, tính $\lambda^{(1)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$, $k := 1$.

Bước 2. Tìm nghiệm

Tìm $x^{(k)}$ là nghiệm của bài toán $\max\limits_{x \in S_F}\{P(x) - \lambda^{(k)}D(x)\}$

Bước 3. Kiểm tra

Nếu $F(\lambda^{(k)}) = 0$ thì $x^* = x^{(k)}$ là nghiệm tối ưu và bài toán được giải, nếu không chuyển sang bước 4.

Bước 4. Cải thiện

Đặt $\lambda^{(k+1)} := \frac{P(x^{(k)})}{D(x^{(k)})}$, $k := k + 1$ và quay lại bước 2.

Ví dụ minh hoạ

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach