

# Linear Algebra

October 5, 2025

## 1 Ma trận

Đặt  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và  $\mathbb{N} = \{1, \dots\}$

với  $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó  $a_{ij} \in \mathbb{K}$

### 1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông  $\Leftarrow$  đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m \times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$ .
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

### 1.2 Phép toán

#### 1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m \times n}$$

### 1.2.2 Nhân

#### 1 số với ma trận

#### 2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m \times n}, B = (b_{kj})_{n \times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

#### Thuật toán

- Check cột  $A$  = hàng  $B$ :
  - Nếu không  $\rightarrow$  không giải được.
  - Nếu có  $\rightarrow$  Ma trận đầu ra là ma trận (hàng  $A$ )  $\times$  (cột  $B$ )  $\rightarrow$  Tính  $c_{ij}$  = giao hàng  $A$  và cột  $B$ .

#### Note

$AB = AC$  và  $A \neq 0 \not\rightarrow B = C$ .

#### Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

### 1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

#### 1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
  - Phần tử chính (PTC)  $\rightarrow$  PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

#### 1.3.2 Ma trận rút gọn

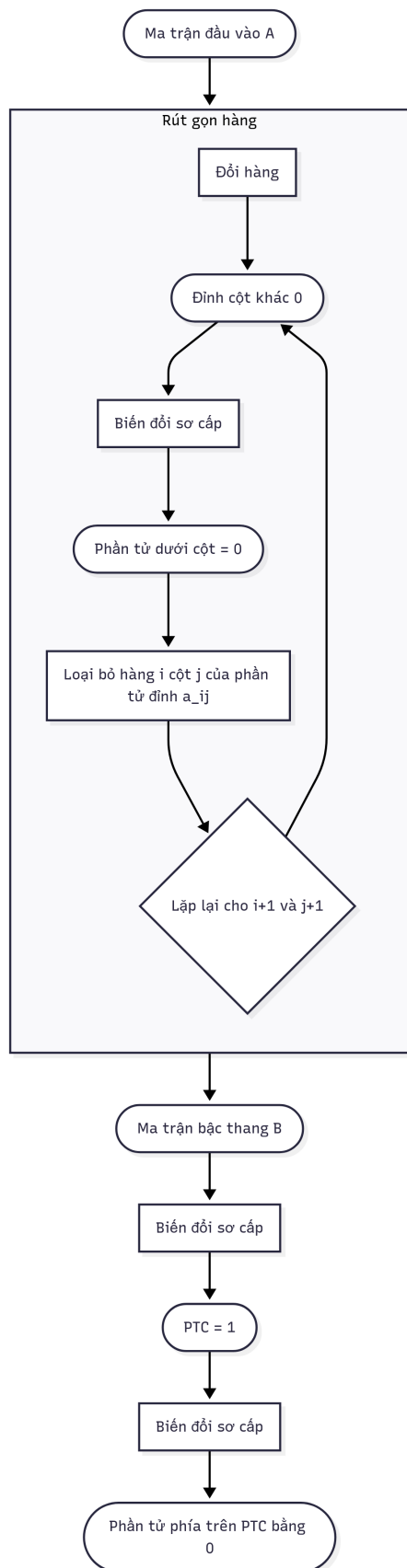
- PTC = 1
- Cột chứa PTC  $\rightarrow$  PTC là phần tử  $\neq 0$  duy nhất.

## 1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
  - Đổi hàng  $h_i \leftrightarrow h_j$
  - Thay thế tỷ lệ  $h_i \leftarrow \alpha h_i$
  - Thay thế hàng  $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tương đương hàng
  - $A \rightarrow \dots \rightarrow B, B \sim A$
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$



#### 1.4.1 Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất



## 1.5 Hạng

$$r(A) = \text{rank}(A) \text{ với } A = (a_{ij})_{m \times n}$$

- Số hàng  $\neq 0$  trong **dạng rút gọn** (hoặc **dạng bậc thang**) của  $A$  ( $A \sim$  Dạng rút gọn (bậc thang))

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

## 1.6 Ma trận khả nghịch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó,  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$
- $A$  là **ma trận khả nghịch**.
- $B$  là **ma trận nghịch đảo** của  $A$ .
- $B = A^{-1}$ .
- Nếu tồn tại  $B$ ,  $B$  là duy nhất.

### Định lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- $\alpha A$  khả nghịch và  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ .
- $AB$  khả nghịch và  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .
- $A^T$  khả nghịch và  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

### Note

- $A^k = A.A \dots A$ 
  - $A^k$  khả nghịch.
  - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$ .

### 1.6.1 Ma trận sơ cấp

- Ta thực hiện 1 phép biến đổi sơ cấp trên  $I_n$

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- $E$  đgl **ma trận sơ cấp**
- Tồn tại 3 loại ma trận sơ cấp  $E$  tương ứng với 3 loại phép biến đổi sơ cấp.

$$EA = \overset{e}{\leftarrow} A$$

- Trong đó  $\overset{e}{\leftarrow} A$  là ma trận  $A$  sau khi đã thực hiện phép biến đổi sơ cấp  $e$ .

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \dots \xrightarrow{e_k} D$$

Ta được

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$

$$\vdots$$

$$D = (E_k \dots E_1) A$$

Mà  $A$  KN  $\Leftrightarrow A \sim I_n$

Do đó,

$$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} I_n$$

Vậy

$$I_n \xrightarrow{e_k} \xrightarrow{e_{k-1}} \dots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \dots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \dots E_k) I_n$$

### 1.6.2 Thuật toán tìm ma trận khả nghịch

Cho  $A_{n \times n}$

- B1. Thiết lập  $(A|I_n)$
- B2.  $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Biến đổi thành ma trận rút gọn}} (D|B)$ 
  - Nếu  $D = I_n \rightarrow A$  khả nghịch và  $A^{-1} = B$ .
  - Nếu  $D \neq I_n \rightarrow A$  không khả nghịch.

### 1.6.3 Tính chất

- $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- $A$  khả nghịch.
- $r(A) = n$ .

- $A$  là tích hữu hạn các ma trận sơ cấp
  - $I_n = (E_1 \dots E_k)A$
  - $A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$
- $AX = B$  có nghiệm duy nhất  $\forall B \in M(n \times p, \mathbb{K})$ .
- $\exists B$  ma trận vuông cấp  $n$  sao cho  $AB = I_n$ .
- $\exists C$  ma trận vuông cấp  $n$  sao cho  $CA = I_n$
- $A^T$  khả nghịch.

## 2 Định thức

### 2.1 Nền tảng

#### 2.1.1 Phép thế

- Cho  $X = \{1, 2, \dots, n\}$
- Song ánh  $\sigma : X \rightarrow X$  đgl phép thế bậc  $n$ .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Tập hợp các phép thế bậc  $n$  k/h  $|S_n| = n!$ .

$$S_n = \{\sigma : X \rightarrow X | \sigma \text{ là song ánh}\}$$

- Phép thế đơn vị
- Phép thế sơ cấp
- Cấu trúc
  - Mỗi phép thế đều phân tích được thành tích của các tích độc lập
  - Tích phép thế sơ cấp.

#### 2.1.2 Dấu

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{\pm 1\}$$

#### 2.1.3 Nghịch thế

- Là số lượng  $\sigma(i) - \sigma(j)$  ngược với  $i - j$  hay số lượng

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

- Nếu số lượng nghịch thế
  - Chẵn  $\rightarrow \text{sgn}(\sigma) = 1$ .



– Lẻ  $\rightarrow \text{sgn}(\sigma) = -1$ .

- **Note:** Phép thế sơ cấp là phép thế lẻ.

## 2.2 Công thức

- Cho  $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

- Cấp 2
- Cấp 3

## 2.3 Tính chất - hệ quả - định lý

### 2.3.1 Tính chất

- Đa tuyến tính

$$\det(A_1 \dots \alpha A_j + \beta A'_j \dots A_n) = \alpha \det(A_1 \dots A_j \dots A_n) + \beta \det(A_1 \dots A'_j \dots A_n)$$

- Thay phiên

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0$$

- Chuẩn hoá

$$\det(I_n) = 1$$

### 2.3.2 Hệ quả

- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \alpha A_j \dots A_j \dots A_n)$ .
- $\det(A_1 \dots A_i \dots \alpha A_i \dots A_n) = 0$ .
- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$ 
  - Đổi chỗ chẵn lần  $\rightarrow 1$ .
  - Đổi chỗ lẻ lần  $\rightarrow -1$ .

### 2.3.3 Định lý

- $\det(A^T) = \det(A)$ .
- $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$
- $A$  khả nghịch  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

## 2.4 Định thức con và phần bù đại số

$i \leq k \leq n$

Chọn  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$  và  $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n$

- $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$  là định thức con.
- $\overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$ 
  - Đgl phần bù của  $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ .
  - Ma trận sau khi bỏ hàng  $i_k$  và cột  $j_k$  từ  $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ .
- Lấy theo cột,  $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với  $k = 1$ ,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{D_1^j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{D_2^j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \overline{D_n^j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- Lấy theo hàng,  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với  $k = 1$ ,

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{D_i^1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{D_i^2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \overline{D_i^n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

### • Note

- Ưu tiên chọn cột (hoặc hàng) nhiều 0. Nếu không có 0  $\rightarrow$  kết hợp các tính chất, định lý và hệ quả trước đó  $\rightarrow$  sinh ra 0.
- Không được dùng  $h_i \leftarrow \alpha h_i$  ( $h_i \leftrightarrow h_j$  hay  $c_i \leftrightarrow c_j$  thì nhớ hệ quả đổi dấu).
- Chọn cột để biến đổi thành “0 ... 1” thì dùng phép biến đổi trên hàng và ngược lại.

## 2.5 Ứng dụng

### 2.5.1 Khả nghịch

- $A$  khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó,  $A$  ma trận vuông cấp  $n$  và

$$\text{adj}(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \text{cof}(A)$$

trong đó,  $c_{ij}$  là phần bù đại số của  $a_{ij}$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{D_i^j}$$

### Thuật toán xác định ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức

B1. Tính  $c$  trên hàng (hoặc cột)

B2. Áp dụng công thức tính  $\det(A)$  trên hàng (hoặc cột) bằng công thức

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

B3. (Check khả nghịch)

- Nếu  $\det(A) = 0 \rightarrow$  không khả nghịch và kết thúc.
- Nếu  $\det(A) \neq 0 \rightarrow A$  khả nghịch và chuyển sang bước 4 (nếu cần tính ma trận nghịch đảo)

B4. Tính hết tất cả  $c$  còn lại  $\rightarrow \text{adj}(A) = C$

B5. Tìm  $A^{-1}$  bằng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

### 2.5.2 Hạng

#### Thuật toán xác định hạng của ma trận bằng định thức

B1. Tính định thức cấp  $1, 2, \dots, n$

B2. (Kết luận hạng)

- Nếu định thức cấp  $i \neq 0 \rightarrow$  (hàng (hoặc cột) độc lập tuyến tính  $\rightarrow$  dạng bậc thang 100% có  $n$  hàng  $\neq 0$ )  $\rightarrow \text{rank}(A) \geq i$
- Nếu định thức cấp  $i = 0 \rightarrow \text{rank}(A) = i$

## 3 Hệ phương trình tuyến tính

- $m, n \in \mathbb{N}$ , trong đó,  $m$  phương trình,  $n$  ẩn, ta có hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trong đó
  - $a_{ij}$  là hệ số.
  - $b_i$  là hệ số tự do.
  - $x_j$  là ẩn của hệ.
- Bộ số  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  là nghiệm của (1) nếu thay vào (1) thoả tất cả phương trình.
- Giải hệ (1)  $\rightarrow$  tìm tập nghiệm của (1).
- Hệ pt có nghiệm đgl hệ tương thích.
- Ma trận hệ số của (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Cột ẩn

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Cột hệ số tự do

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Ta viết gọn

$$AX = b$$

- Ma trận đầy đủ (ma trận bổ sung) k/h

$$A^* = (A|b)$$

### 3.1 Sự tồn tại và tính duy nhất

- $A^* = (A|b) \rightarrow (S|c)$ , trong đó  $S$  là dạng bậc thang (hoặc dạng rút gọn) của ma trận  $A^*$
- **Điều kiện nghiệm:**
  - Vô nghiệm  $\rightarrow \exists$  hàng có dạng  $(0 \dots 0|c)$ ,  $c_i \neq 0$ .
  - Vô số nghiệm  $\rightarrow$  Phần tử chính  $<$  Số ẩn.
  - Có nghiệm duy nhất  $\rightarrow$  Phần tử chính  $=$  Số ẩn.
- **Định lý Kronecker - Capelli**
  - Hệ có nghiệm  $\Leftrightarrow \text{rank}(A^*) = \text{rank}(A)$
  - Có nghiệm duy nhất  $\rightarrow \text{rank}(A) = \text{Số ẩn}$ .
  - Vô số nghiệm  $\rightarrow \text{rank}(A) < \text{Số ẩn}$ .
- **Ẩn phụ thuộc**  $\rightarrow$  Là ẩn nằm trong cột chứa PTC trong dạng bậc thang (rút gọn).
- **Ẩn tự do (độc lập)**  $\rightarrow$  Các ẩn còn lại.

Note

- Ta kết luận nghiệm theo kiểu
  - $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
  - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .
  - $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \vdots \\ x_n = 3 \end{cases}$
- Nghiệm riêng  $\rightarrow$  Đưa cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.
- Nghiệm tổng quát  $\rightarrow$  Không cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.

### 3.2 Thuật toán Gauss

B1. Đưa về  $A^*$

B2. Đưa  $A^* \rightarrow (S|c)$  (Bậc thang)

B3. (Check tồn tại nghiệm)

- Nếu không có nghiệm  $\rightarrow$  Kết luận.
- Nếu có nghiệm  $\rightarrow$  Dạng rút gọn  $\rightarrow$  KL nghiệm.

### 3.3 Quy tắc Cramer

- Hệ  $AX = b$  đgl **Hệ Cramer** nếu
  - $A$  vuông
  - $A$  Khả nghịch

Do đó,

$$X = A^{-1}b$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} C^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay  $1 \leq j \leq n$

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} (b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + \dots + b_n c_{nj})$$
$$A_j(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & b_m & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Do đó ta có

$$D_j = \det(A_j(b)) = b_1 c_{1j} + \dots + b_m c_{mj}$$

nghiệm của hệ là

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad 1 \leq j \leq n$$

- **Điều kiện nghiệm:**

- Nghiệm duy nhất  $x_j = \frac{D_j}{D} \rightarrow D \neq 0$ .
- Vô nghiệm  $\rightarrow D = 0 \wedge \exists D_j \neq 0$ .
- Không kết luận gì về tương thích hệ  $\rightarrow D = 0 \wedge \forall D_j = 0$ .

#### Thuật toán tìm nghiệm của hệ bằng quy tắc Cramer

B1. Tìm  $D$  và  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq n$

B2. (Check điều kiện nghiệm)

- Nếu  $D \neq 0 \rightarrow$  KL nghiệm duy nhất  $x_j = \frac{D_j}{D}, 1 \leq j \leq n \rightarrow$  Kết thúc.
- Nếu  $D = 0 \rightarrow$  Sang bước tiếp theo

B3. (Check trường hợp)

- Nếu  $\exists D_j \neq 0 \rightarrow$  KL vô nghiệm  $\rightarrow$  Kết thúc.
- Nếu  $\forall D_j = 0 \rightarrow$  KL rằng ta không kết luận gì về tương thích hệ  $\rightarrow$  Kết thúc.

**Note**

- Nếu đề hỏi tìm tham số sao cho hệ có nghiệm thì ta tìm trường hợp vô số và nghiệm duy nhất.

### 3.4 Hệ thuần nhất

- Hệ thuần nhất là hệ (2) như sau

$$AX = 0$$

- Nghiệm tầm thường  $\rightarrow X = 0 \rightarrow \text{rank}(A) = n$ .
- Vô số nghiệm phụ thuộc vào  $n - \text{rank}(A) \rightarrow \text{rank}(A) < n$ .
- **Nhận xét**
  - Nếu  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  là nghiệm của (2)  $\rightarrow tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$  là nghiệm của (2).
  - Nếu  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  là nghiệm của (2)  $\rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  là nghiệm của (2).
  - $A$  có  $m < n \rightarrow$  Vô số nghiệm.

## 4 Không gian Vector

- $V \neq \emptyset$  đgl 1 **không gian vector**  $\Rightarrow$  được trang bị 2 phép toán:
  - Cộng vector  $+: V \times V \rightarrow V, (u, v) \mapsto u + v$ .
  - Nhân vô hướng  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V, (\alpha, u) \mapsto \alpha u$ .
- Thỏa mãn các tiên đề sau:

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in V$
- (2)  $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V$
- (3)  $\exists 0 \in V : u + 0 = u, \quad \forall u \in V$
- (4)  $\forall u \in V, \exists u' \in V : u + u' = 0$
- (5)  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$
- (6)  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$
- (7)  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$
- (8)  $1u = u, \quad \forall u \in V$

- **Note:**

- $\mathbb{K}$ -**Không gian vector**  $\leftrightarrow$  Không gian vector trên trường  $\mathbb{K}$ .

- $V$  là không gian vector trên trường  $\mathbb{K} \leftrightarrow v \in V$  là 1 **vector**.
- $\alpha \in \mathbb{K} \rightarrow$  đgl 1 **vô hướng**.
- 0 trong (3)  $\rightarrow$  đgl **vector 0**.
- $\forall u \in V, u'$  trong (4)  $\rightarrow$  đgl vector đối của vector  $u, \quad u' = -u$ .

#### 4.1 Tính chất

Cho  $V$  là 1 không gian vector

- Vector 0 là duy nhất.
- $\forall u \in V, -u$  là duy nhất.
  - $u - v = u + (-v)$ .
- Giảm ước:
  - $u + w = v + w \Rightarrow u = v$ .
  - $u + v = w \Rightarrow u = w - v$ .
- $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = 0$ .
- $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$ .
- $\forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$  (0 bên dưới là vector 0)
  - $0u = 0$ .
  - $\alpha 0 = 0$ .
- **Note:**
  - Để c/m **tính duy nhất**  $\rightarrow$  ta c/m cả 2 thoả cùng 1 tính chất.

#### 4.2 Ví dụ minh hoạ

##### • VD1

$V = \{ \text{Vector tự do trong mặt phẳng} \}, +, .$  là 1 không gian vector.

##### • VD2

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

là 1 không gian vector.

##### • VD3

$$n \geq 1, \mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$



là 1 không gian vector.

- **VD4**

$M(m \times n, \mathbb{K}), +, \cdot$  là không gian vector.

- **VD5**

$\mathbb{K}[x]$  là tập các đa thức biến  $x$  hệ số trong  $\mathbb{K}$ .  $\mathbb{K}[x]$  là không gian vector trên  $\mathbb{K}$  với phép cộng các đa thức và phép nhân 1 số với đa thức. (0 là đa thức không)

- **VD6**

Tập các hàm thực xác định trên  $\mathbb{R}$  là  $\mathbb{R}$ -Không gian vector với

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- **VD7**

$\mathbb{K}$  là 1 không gian vector với các phép toán thông thường trên  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

- **VD8**

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  là  $\mathbb{Q}$ -không gian vector.

### 4.3 Độc lập tuyến tính & phụ thuộc tuyến tính

Cho  $S \subset V$  với  $V$  là không gian vector.

#### 4.3.1 Tổ hợp tuyến tính

- **Tổ hợp tuyến tính** của các vector trong  $S$  là tổng hữu hạn

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n, \quad a_i \in \mathbb{K}, u_i \in S.$$

#### 4.3.2 Biểu thị tuyến tính

- Cho  $v \in V$ , **Biểu thị tuyến tính** là

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}, u_k \in S.$$

- **VDMH**

$\mathbb{R}^3 = S = \{x_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 2, 3), u_3 = (2, 4, 1)\}, v = (1, 2, 2), w = (0, 0, -3), v$  và  $w$  biểu thị tuyến tính được qua  $S$  không?

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

$$(1, 2, 3) = x_1 ($$

#### 4.3.3 Phụ thuộc tuyến tính

- $S$  là **phụ thuộc tuyến tính** nếu

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0) \mid \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0, \quad u_i \in S.$$

#### 4.3.4 Độc lập tuyến tính

- $S$  là **độc lập tuyến tính** nếu không phụ thuộc tuyến tính, hay

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0) \rightarrow \text{Nghiem tầm thường.}$$

#### 4.3.5 VDMH

- **VD1**

Trong không gian  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \{u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (\sim\sim\sim), u_3 = (\sim\sim\sim)\}$

Xét  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$$\alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(\sim\sim\sim) + \alpha_3(\sim\sim\sim) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vô số nghiệm} \Rightarrow \text{Phụ thuộc tuyến tính.}$$

- **VD2**

Trong không gian  $\mathbb{R}[x]$ ,  $S = \{P_1 = 1 + x + x^3, P_2 = 1 + x + x^2, P_3 = 1 + x, P_4 = x + x^3\}$

Xét  $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$

$$x_1(1 + x + x^3) + x_2(\sim\sim\sim) + x_3(\sim\sim\sim) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Có nghiệm } (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \text{Độc lập tuyến tính.}$$

(Note: HPT ở trên được lập ra dựa trên bậc, tức mỗi cột tương ứng với bậc)

#### 4.3.6 Tính chất

- Hệ chỉ gồm 1 vector  $\{u\}$  phụ thuộc tuyến tính  $\Leftrightarrow u = 0$ .
- $S$  phụ thuộc tuyến tính
  - $\Rightarrow$  Mọi hệ chứa  $S$  phụ thuộc tuyến tính.
  - $\Rightarrow$  Mọi hệ vector chứa vector 0 đều phụ thuộc tuyến tính.
- $S$  phụ thuộc tuyến tính,  $S' \supset S \Rightarrow S'$  phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ vô hạn vector  $S$  độc lập tuyến tính  $\Leftrightarrow$  Hệ con hữu hạn của  $S$  độc lập tuyến tính.

### 4.3.7 Định lý

- Cho  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ,  $k \geq 2$ ,  $S$  **phụ thuộc tuyến tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 1 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \widehat{\alpha_i u_i} + \dots + \alpha_k u_k.$$

- **Cách làm bài tìm tổ hợp tuyến tính**

- B1. Xử lý đến khi ra được hệ phương trình tuyến tính
- B2. Giải ra nghiệm
- B3. Cho 1 ẩn  $\neq 0 \rightarrow$  Thu được tổ hợp tuyến tính (VD.  $u_1 + u_2 + u_3 = \sim \rightarrow u_1 = \sim$ )

- Cho  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ,  $k \geq 2, u_i \neq 0$ ,  $S$  **phụ thuộc tuyến tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 2 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{i-1} u_{i-1}.$$

(Hơn nữa, có thể chọn  $i$  sao cho  $\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$  độc lập tuyến tính. (Định lý giúp tìm tập hợp độc lập tuyến tính lớn nhất trong 1 tập))

## 4.4 Cơ sở và số chiều

Cho  $V$  là  $\mathbb{K}$ -Không gian vector và  $B \subset V$ .

### 4.4.1 Hệ sinh

- Mọi vector trong  $V$  biểu thị tuyến tính được qua  $B \Rightarrow$  Hệ vector  $B$  đgl **hệ sinh (tập sinh)** của  $V$ .

### 4.4.2 Cơ sở

- $\begin{cases} B \text{ Hệ sinh của } V \\ B \text{ Độc lập tuyến tính} \end{cases} \Rightarrow$  Hệ vector  $B$  là **Cơ sở** của  $V$ .
- Note:
  - $\mathbb{K}$ -không gian vector,  $\mathbb{C}$ -không gian vector có 1 cơ sở là  $\{1\}$ .
  - $\mathbb{C}$  là  $\mathbb{R}$ -không gian vector.  $z = a + bi = a1 + bi \Rightarrow \{1, i\}$  là 1 hệ sinh.  $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b \Rightarrow \{1, i\}$  là độc lập tuyến tính.
  - $\mathbb{R}$  là  $\mathbb{R}$ -không gian vector với cơ sở là  $\{1\}$ .
  - $\mathbb{R}$  là  $\mathbb{Q}$ -không gian vector với cơ sở là vô hạn.

### 4.4.3 VDMH

- **VD1**

$\mathbb{K}^n, \varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ , trong đó  $e_1 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$\forall x \in \mathbb{K}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\Rightarrow \varepsilon$  là 1 hệ sinh của  $\mathbb{K}^n$  (\*)

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = 0$$

$\Rightarrow \varepsilon$  độc lập tuyến tính (\*\*)

Từ (\*)(\*\*)  $\Rightarrow \varepsilon$  là 1 cơ sở của  $\mathbb{K}^n$  (và là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{K}^n$ ).

• **VD2**

$M(m \times n, \mathbb{K}), \varepsilon = \{E_{ij}\}_{i=1, m}^{j=1, m}$  trong đó  $E_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ . (C/m tương tự)  $\Rightarrow \varepsilon$  là 1 cơ sở của

$M(m \times n, \mathbb{K})$ .

• **VD3**

$\mathbb{K}[x], \varepsilon = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ .

• **VD4**

$\mathbb{K}_n[x], \varepsilon = \{1, x, \dots, x^n\}$ .

#### 4.4.4 Độc lập tuyến tính cực đại

Cho  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$

- Nếu  $\begin{cases} S \text{ Độc lập tuyến tính} \\ S \subsetneq S', S' \text{ Phụ thuộc tuyến tính} \end{cases} \Rightarrow S \text{ Độc lập tuyến tính cực đại.}$

#### 4.4.5 Định lý

Cho  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

- Cho  $S \subset V$ , các mệnh đề sau là  $\Leftrightarrow$ :
  - Hệ  $S$  là 1 **Cơ sở** của  $V$ .
  - Hệ  $S$  là Hệ vector **Độc lập tuyến tính cực đại** của  $V$ .
  - $\forall$  vector của  $V$  đều **Biểu thị tuyến tính** được 1 cách **duy nhất** qua hệ  $S$ .
- $S$  là **hệ sinh** của  $V$  nếu (1 trong 2 thỏa):
  - $\exists u_i, 1 \leq i \leq m$  **Tổ hợp tuyến tính** của các vector còn lại trong  $S \Rightarrow \left(S' = S \setminus \{u\}\right)$ .
  - $\left(V \neq \{0\}\right) \Rightarrow V \exists 1 \text{ **Cơ sở** } \subset S$ .
- **Bổ đề:**
  - Không gian vector  $V$  có 1 **cơ sở** gồm  $n$  vector  $\Rightarrow \forall$  hệ **Độc lập tuyến tính** trong  $V$  đều chứa không quá  $n$  vector.
- **Note:**
  - Cách chứng minh  $A \Rightarrow B$ :
    - \* B1. Đặt  $A$  là giả thuyết  $\rightarrow (1)$
    - \* B2. Xác định điều kiện để có được  $B$  (từ tiên đề/định lý/tính chất/...)  $\rightarrow (2)$
    - \* B3. C/m  $(1) \Rightarrow (2) \rightarrow$  C/m xong.

- Cách biểu diễn **duy nhất**:
  - \* B1. Đặt Biểu diễn A = Biểu diễn B
  - \* B2. C/m Hệ số của Biểu diễn A = Hệ số của Biểu diễn B  $\rightarrow$  C/m xong.
- Cách xây dựng **cơ sở**:
  - \* C1. Từ độc lập tuyến tính  $\rightarrow$  Thêm vào  $\rightarrow$  Độc lập tuyến tính cực đại.
  - \* C2. Từ hệ sinh  $\rightarrow$  Bỏ bớt ra  $\rightarrow$  Hệ sinh cực tiểu.