

Tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 2 tháng 3 năm 2024

TÓM TẮT

- Giới thiệu về bài toán tối ưu phân tuyến tính:
 - Cơ sở lý thuyết.
 - Thuật toán Dinkelbach.
- Phương pháp giải bài toán tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên bằng thuật toán nhánh cận (LandDoig).

NỘI DUNG

- 1 Giới thiệu
- 2 Phương pháp hình học
- 3 Thuật toán Dinkelbach
- 4 Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Giới thiệu bài toán

Tối ưu phân tuyến tính (Linear-Fractional Programming)

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max} \quad (1)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính**.

- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{R}_+^n$. Tập

$S_F := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.

- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$ ($D(x) > 0, \forall x \in S_F$).

Bài toán minh họa

$$Q(x) = \frac{4x_1 + 2x_2 - 6}{3x_1 + 2x_2 - 5} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Mối quan hệ với bài toán tối ưu tuyến tính

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 = 1$, bài toán (F) trở thành bài toán tối ưu tuyến tính (P) và ta gọi (F) là bài toán mở rộng của (P):

$$(P) \quad P(x) = p^T x + p_0 \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 \neq 0$, ta thu được bài toán tuyến tính (Q):

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p^T}{d_0} x + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0} \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

- Ngược lại nếu $p^T = 0$ và $p_0 \neq 0$:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p_0}{d^T x + d_0} = \frac{p_0}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Tương tự bài toán:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{d^T x + d_0}{p_0} = \frac{D(x)}{p_0} \longrightarrow \text{Min}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- Nếu p^T và d^T phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\mu \neq 0$ và $p^T = \mu d^T$, ta thu được hàm:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{\mu d^T x + p_0}{d^T x + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{d^T x + d_0} \quad (7)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

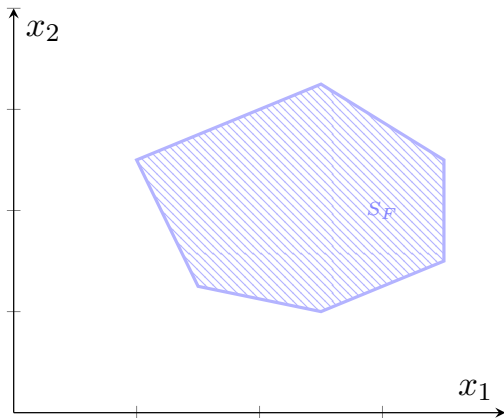
Ta thay bằng hàm $D(x)$ với điều kiện:

- Nếu $p_0 - \mu d_0 > 0$, $D(x) \longrightarrow Min$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 < 0$, $D(x) \longrightarrow Max$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 = 0$ thì $Q(x) = \mu = \text{hằng số } (\forall x \in S_F)$, ta bỏ qua bài toán.

Phương pháp hình học

Bài toán trên không gian \mathbb{R}^2

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \text{ trong đó } A = m \times 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$



Hình: Tập nghiệm minh họa của bài toán (F)

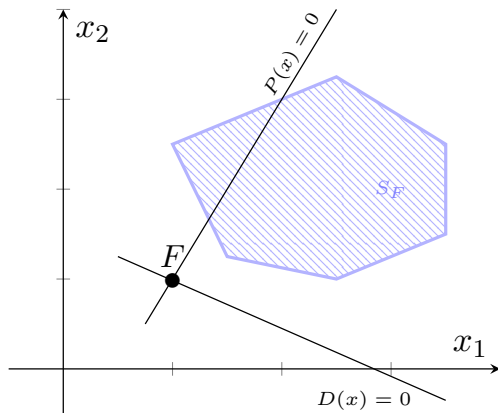
Tính chất

Đặt $Q(x) = K$ ($K \in \mathbb{R}$), ta được:

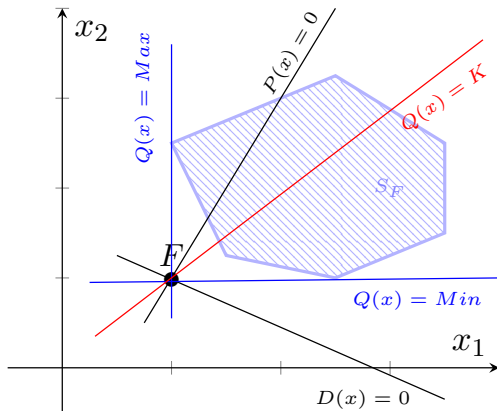
$$(p_1 - Kd_1)x_1 + (p_2 - Kd_2)x_2 + (p_0 - Kd_0) = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + p_0 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

- $Q(x) = K$ là đường mức quét qua tập S_F , đến khi gặp cực điểm thì ở đó ta nhận được giá trị K là giá trị tối ưu của bài toán (F).
- Ta xác định được điểm cố định F là nghiệm của phương trình (9), nói cách khác, điểm cố định F là điểm giao của 2 đường thẳng $P(x) = 0$ và $D(x) = 0$.
- Trường hợp $P(x) = 0$ song song với $D(x) = 0$, hay nói cách khác hệ (9) vô nghiệm thì điểm cố định F không tồn tại.



Hình: Minh họa điểm cố định F



Hình: Minh họa đường mức $Q(x) = K$

Xét tính biến thiên

Từ phương trình (9), ta có:

$$x_2 = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1 - \frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2}. \quad (11)$$

Đạo hàm 2 vế ta được:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left[-\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}x_1 \right] - \frac{d}{dx_1} \left[\frac{p_0 - Kd_0}{p_2 - Kd_2} \right]$$

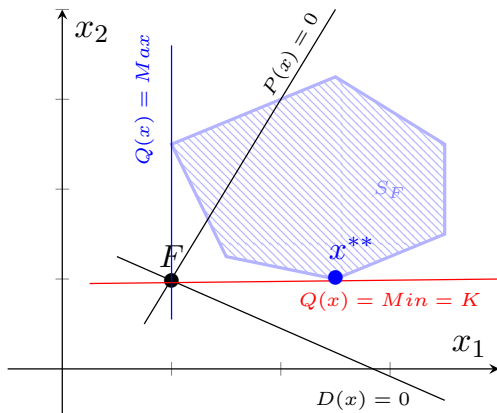
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2}$$

$$k = -\frac{p_1 - Kd_1}{p_2 - Kd_2} \quad (\text{Đặt } k = \frac{dx_2}{dx_1})$$

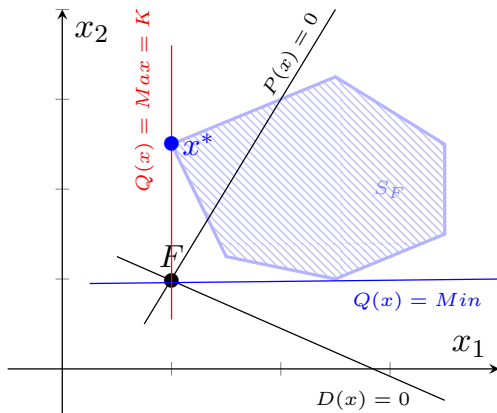
- Ta thấy hệ số góc k phụ thuộc vào tham số K , Khảo sát sự biến thiên của k theo K , ta có:

$$\frac{dk}{dK} = \frac{d_1 p_2 - d_2 p_1}{(p_2 - K d_2)^2} \quad (12)$$

- Giá trị của $Q(x)$ tăng hay giảm phụ thuộc vào $(d_1 p_2 - d_2 p_1)$, do đó k biến thiên theo 1 chiều nhất định. Từ đây, ta có thể tìm được nghiệm tối ưu của bài toán (F).
- Quay đường mức $Q(x) = K$ quanh điểm F đến khi trùng với cực điểm x^* ta nhận được giá trị cực đại của hàm $Q(x)$, x^{**} ta nhận được giá trị cực tiểu của hàm $Q(x)$.



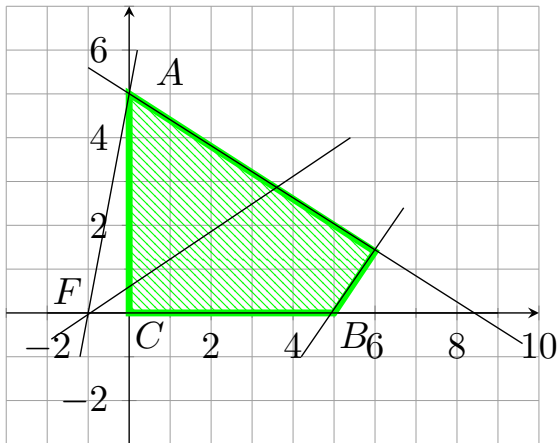
Hình: $Q(x)$ đạt giá trị tối ưu tại điểm x^{**}



Hình: $Q(x)$ đạt giá trị tối ưu tại điểm x^*

Ví dụ minh họa

$$(F) \quad Q(x) = \frac{6x_1 + 3x_2 + 6}{5x_1 + 2x_2 + 5} \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$



Hình: Tập nghiệm của bài toán

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = -6, \\ 5x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$$

\Rightarrow điểm cố định $F = (-1, 0)$ Ta có các cực điểm

$$A = (0, 5), B = (5, 0), C = (0, 0)$$

với giá trị

$$Q(A) = \frac{21}{15}, Q(B) = \frac{18}{15}, Q(C) = \frac{18}{15}$$

Hàm $Q(x)$ đạt cực đại tại $A = (0, 5)$.

Thuật toán Dinkelbach

Tính chất

- Quay lại bài toán:

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow Max \quad (14)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Ta đặt hàm:

$$F(\lambda) = \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda D(x)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (15)$$

Định lý 3.1

Vector x^ là nghiệm tối ưu của bài toán (F) nếu và chỉ nếu*

$$F(\lambda^*) = \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0 \quad (16)$$

Với

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \quad (17)$$

Chứng minh.

Nếu vector x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (F), ta có:

$$\lambda^* = \frac{P(x^*)}{D(x^*)} \geq \frac{P(x)}{D(x)}, \forall x \in S_F$$

Tương tự,

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq 0, \forall x \in S_F \quad (18)$$

Từ bất phương trình (18), ta được:

$$\Rightarrow \max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^* D(x)\} = 0$$

Nếu vector x^* là nghiệm tối ưu thì:

$$P(x) - \lambda^* D(x) \leq P(x^*) - \lambda^* D(x^*) = 0, \forall x \in S_F$$

Với $D(x) > 0$, $\forall x \in S_F$, ta có:

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = -D(x) < 0 \quad (19)$$

Đồng nghĩa $F(\lambda)$ giảm theo λ , từ đó ta thiết lập được thuật toán Dinkelbach.

Thuật toán Dinkelbach

Bước 1. Thiết lập

Đặt $x^{(0)} \in S_F$, tính $\lambda^{(1)} := \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})}$, $k := 1$.

Bước 2. Tìm nghiệm

Tìm $x^{(k)}$ là nghiệm của bài toán $\max_{x \in S_F} \{P(x) - \lambda^{(k)} D(x)\}$

Bước 3. Kiểm tra

Nếu $F(\lambda^{(k)}) = 0$ thì $x^* = x^{(k)}$ là nghiệm tối ưu và bài toán được giải, nếu không chuyển sang bước 4.

Bước 4. Cải thiện

Đặt $\lambda^{(k+1)} := \frac{P(x^{(k)})}{D(x^{(k)})}$, $k := k + 1$ và quay lại bước 2.

Ví dụ minh họa

$$(F) \quad Q(x) = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3x_1 + 2x_2 + 15} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Với $x = (0, 0)^T$ ta có $x^{(0)} \in S_F$, cho $x^{(0)} = (0, 0)^T$ ta có

$$\lambda^{(1)} = \frac{P(x^{(0)})}{D(x^{(0)})} = \frac{1}{3}$$

Ta giải bài toán

$$P(x) - \lambda^{(1)} D(x) = P(x) - \frac{1}{3} D(x) = \frac{1}{3} x_2 \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = (0, 3)^T, F(\lambda^{(1)}) = 1$$

vì $F(\lambda^{(1)}) \neq 0$

$$\lambda^{(2)} = \frac{P(x^{(1)})}{D(x^{(1)})} = \frac{8}{21}$$

$$P(x) - \lambda^{(2)} D(x) = -\frac{1}{7} x_1 + \frac{5}{21} x_2 - \frac{5}{7} \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = (0, 3)^T, F(\lambda^{(2)}) = 0$$

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán (F) là $x^* = (0, 3)^T$ và giá trị tối ưu $Q(x^*) = \frac{8}{21}$.

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn

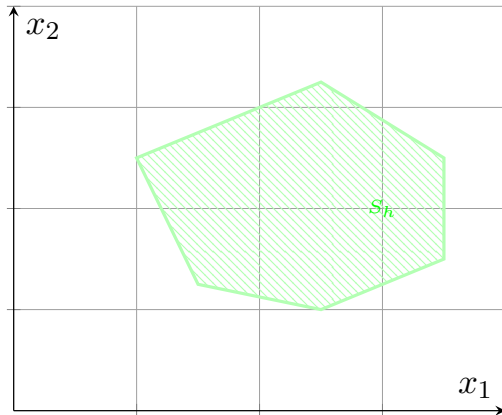
$$(H) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max} \quad (21)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \end{cases}$$

- Bài toán (H) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn**.

- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{Z}_+^n$. Tập

$S_h := \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn.

- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$ ($D(x) > 0, \forall x \in S_h$).



Hình: Tập nghiệm minh họa của bài toán (H)

Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận

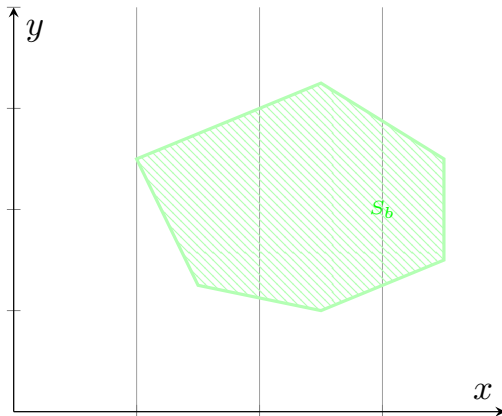
$$(B) \quad Q(x, y) = \frac{P(x, y)}{D(x, y)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax + Gy \leq b, \\ x \geq 0, \text{ nguyên} \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

- Bài toán (B) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận**.
- Trong đó A là ma trận $m \times n$, G là ma trận $m \times t$,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ với } x \in \mathbb{Z}_+^n \text{ và } y \in \mathbb{R}_+^t. \text{ Tập}$$

$S_b := \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^t : Ax + Gy \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính nguyên bộ phận.

- $P(x, y) = p_1^T x + p_2^T y + p_0$, với $p_1^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ và $p_2^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_t)$.
- $D(x, y) = d_1^T x + d_2^T y + d_0$, với $d_1^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$ và $d_2^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_t)$ ($D(x, y) > 0, \forall x \in S_b$).



Hình: Tập nghiệm minh họa của bài toán (B)

Mục tiêu phương pháp

Bài toán quan tâm

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max} \quad (23)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Trong đó (F) là bài toán (H) với nghiệm thuộc tập số thực, ta nói (F) là bài toán mở rộng của (H).
- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính thông thường** hay gọi đơn giản là bài toán Tối ưu phân tuyến tính (LFP relaxation).
- Tập $S_F := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.

Phương pháp xử lý bài toán

Giải bài toán (F) ta được nghiệm tối ưu ban đầu, ký hiệu vector x_j ($j = 1, \dots, n$).

- Nếu $x_j \in \mathbb{Z}_+^n$ ($j = 1, \dots, n$), thì bài toán (H) được giải.
- Nếu $\exists x_j \notin \mathbb{Z}_+^n$ ($j = 1, \dots, n$), ta thêm vào các ràng buộc

$$x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \text{ và } x_j^i \geq \lceil x_j \rceil$$

vào bài toán (F) bằng *lý thuyết nhánh cận* và ta thiết lập được 2 bài toán con từ bài toán (F) ban đầu, ký hiệu (F_1) và (F_2) :

$$(F_1) \quad \max_{x \in S_1} Q_1(x),$$

và

$$(F_2) \quad \max_{x \in S_2} Q_2(x).$$

Lặp lại quá trình đến khi $\forall x_j \in \mathbb{Z}_+^n$.

$$(F_1) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

- Tập $S_1 := S_F \cap \{x : x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (F_1) .

$$(F_1) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x_j^i \geq \lceil x_j \rceil \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

- Tập $S_2 := S_F \cap \{x : x_j^i \geq \lceil x_j \rceil\}$ là tập nghiệm tối ưu của bài toán con (F_2) .

Điều kiện nghiệm

- Nếu tồn tại (F_i) với $i = 1, 2$ không giải được ($S_i = \emptyset$), ta gọi bài toán **vô nghiệm**.
- Giả sử x^i là nghiệm tối ưu của bài toán (F_i) và giá trị tối ưu là $Q_i(x)$ với $i = 1, 2$.
 - Nếu $\forall x^i \in Z_+^n$, ta nói S_i là tập nghiệm thoả mãn bài toán tối ưu phân tuyến tính nguyên hoàn toàn, $Q_i^*(x)$ là giá trị tối ưu và bài toán con (F_i) được giải (**gọt bởi nghiệm nguyên**).
 - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $Q_i(x) \leq Q_i^*(x)$, ta dừng phân nhánh và bỏ qua bài toán (**gọt bởi cận**).
 - Nếu $\exists x^i \notin Z_+^n$ đồng thời $Q_i(x) > Q_i^*(x)$, bài toán chưa tối ưu và có thể tiếp tục cải thiện.

Ví dụ minh họa

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

- Ta gọi bài toán (F) có nút ban đầu là N_0 , tương ứng mỗi bài toán tối ưu phân tuyến tính thông thường (F_i) ứng với mỗi nút N_i trên sơ đồ nhánh và \mathcal{L} là danh sách chứa các nút được lập thông qua lý thuyết xác định cận và lý thuyết nghiệm.
- Ta đánh dấu giá trị tối ưu tốt nhất và nghiệm tối ưu tốt nhất của bài toán lần lượt là $Q^*(x)$ và x^* .

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Bước 0. Thiết lập

Đặt $\mathcal{L} := N_0$.

Giải bài toán (F) được nghiệm $x^* = x$ và $Q^*(x) = Q(x)$.

Bước 1. Kiểm tra

Nếu $\forall x_j^i \in \mathbb{Z}_+^n$ thì vector x là nghiệm của bài toán (H), tương ứng $\mathcal{L} = \emptyset$ và bài toán được giải.

Nếu $\exists x_j^i \notin \mathbb{Z}_+^n$, tương ứng $\mathcal{L} \neq \emptyset$, ta chuyển sang bước 2.

Bước 2. Phân nhánh

Chọn nút N_i ($x_j^i \notin \mathbb{Z}_+^n$ có phần thập phân lớn nhất) để phân nhánh bằng cách thêm vào S_k ràng buộc:

$$x_j^i \leq \lfloor x_j \rfloor \text{ và } x_j^i \geq \lceil x_j \rceil$$

lần lượt thành 2 bài toán con S_i và S_k ($k := i + 1$).

Bước 3. Thiết lập bài toán con (các nút)

Ta tập trung xử lý 2 bài toán con (các nút):

$$(F_i) \quad \max_{x \in S_i} Q_i(x),$$

và

$$(F_k) \quad \max_{x \in S_k} Q_k(x).$$

bằng cách dùng *thuật toán Dinkelbach*.

Nếu bài toán vô nghiệm hoặc $Q_i(x) \leq Q^*(x)$, đặt $i := k + 1$ và quay lại bước 1, nếu không, chuyển sang bước 4.

Bước 4. Kiểm tra

