

Linear Algebra

September 11, 2025

1 Ma trận

Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, \dots\}$

với $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông \Leftarrow đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m \times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$.
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m \times n}$$

1.2.2 Nhân

1 số với ma trận

2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m \times n}, B = (b_{kj})_{n \times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Thuật toán

- Check cột A = hàng B :
 - Nếu không \rightarrow không giải được.
 - Nếu có \rightarrow Ma trận đầu ra là ma trận (hàng A) \times (cột B) \rightarrow Tính c_{ij} = giao hàng A và cột B .

Note

$AB = AC$ và $A \neq 0 \not\rightarrow B = C$.

Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
 - Phần tử chính (PTC) \rightarrow PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

1.3.2 Ma trận rút gọn

- PTC = 1
- Cột chứa PTC \rightarrow PTC là phần tử $\neq 0$ duy nhất.

1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
 - Đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
 - Thay thế tỷ lệ $h_i \leftarrow \alpha h_i$
 - Thay thế hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tương đương hàng
 - $A \rightarrow \dots \rightarrow B, B \sim A$
 - $A \sim A$
 - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
 - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất

