Linear Algebra

September 14, 2025

1 Ma trận

Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, ...\}$

với $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông $\Leftarrow$ đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m\times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$.
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m\times n}$$

1.2.2 Nhân

1 số với ma trận

2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m \times n},\ B = (b_{kj})_{n \times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Thuật toán

- Check cột A = hàng B:
  - Nếu không $\rightarrow$ không giải được.
  - Nếu có $\rightarrow$ Ma trận đầu ra là ma trận (hàng A) $\times$ (cột B) $\rightarrow$ Tính c_{ij} = giao hàng A và cột B.

Note

$AB = AC$ và $A \neq 0 \not\rightarrow B = C$.

Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
  - Phần tử chính (PTC) $\rightarrow$ PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

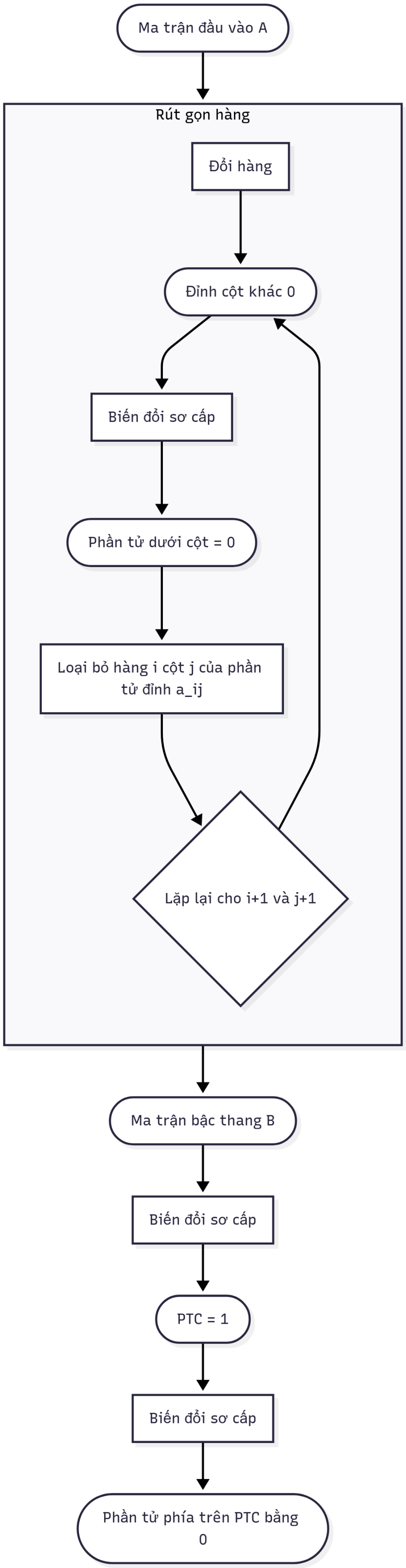
1.3.2 Ma trận rút gọn

- PTC = 1
- Cột chứa PTC $\rightarrow$ PTC là phần tử $\neq 0$ duy nhất.

1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
  - Đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
  - Thay thế tỷ lệ $h_i \leftarrow \alpha h_i$
  - Thay thế hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tương đương hàng
  - $A \rightarrow ... \rightarrow B$, $B \sim A$
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất


Ma trận đầu vào A
Rút gọn hàng
Đổi hàng
Đỉnh cột khác 0
Biến đổi sơ cấp
Phần tử dưới cột = 0
Loại bỏ hàng i cột j của phần tử đỉnh a_ij
Lặp lại cho i+1 và j+1
Ma trận bậc thang B
Biến đổi sơ cấp
PTC = 1
Biến đổi sơ cấp
Phần tử phía trên PTC bằng 0

1.5 Hạng

$r(A) = rank(A)$ với $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Số hàng $\neq 0$ trong **dạng rút gọn** (hoặc **dạng bậc thang**) của A ($A \sim$ Dạng rút gọn (bậc thang))

$$0 \leq rank(A) \leq \min\{m, n\}$$

1.6 Ma trận khả nghịch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó, A là ma trận vuông cấp n
- A là **ma trận khả nghịch**.
- B là **ma trận nghịch đảo** của A.
- $B = A^{-1}$.
- Nếu tồn tại B, B là duy nhất.

Định lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Note

- $A^k = A.A...A$
  - A^k khả nghịch.
  - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

1.7 Ma trận sơ cấp

Ta thực hiện 1 phép biến đổi sơ cấp trên I_n

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- E đgl **ma trận sơ cấp**
- Tồn tại 3 loại ma trận sơ cấp E tương ứng với 3 loại phép biến đổi sơ cấp.

$$EA = \xleftarrow{e} A$$

- Trong đó $\xleftarrow{e} A$ là ma trận A sau khi đã thực hiện phép biến đổi sơ cấp e.

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 ... \xrightarrow{e_k} D$$

Ta được

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$
$$\vdots$$
$$D = (E_k \dots E_1) A$$

Mà A KN $\Leftrightarrow$ $A \sim I_n$

Do đó,

$$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} I_n$$

Vậy

$$I_n \xrightarrow{e_k} \xrightarrow{e_{k-1}} \dots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \dots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \dots E_k) I_n$$