

Ôn tập Phép biến đổi tích phân

May 17, 2025

1 Khai triển chuỗi Fourier

C1. Tìm khai triển chuỗi Fourier của hàm số $f(x) = |2x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$

2 Biểu diễn

C1. Tính

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{w^2 + 100} d\omega, \quad x \geq 0$$

3 Đẳng thức Parseval

C1. Dùng đẳng thức Parseval tính $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$, biết

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cos nx}{2n+1} - \frac{5 \sin nx}{n^4} \right)$$

4 Tích chập

C1. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-3x^2+1}$ và $g(x) = e^{-5x^2+2}$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm $f * g$?

C2. Cho $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = xe^{-(x^2+2x)}$. Tính $f * g$?

C3. Cho $f(x) = e^{-x^2+2}$, $g(x) = e^{-2x^2+2x}$. Tính $f * g$?

C4. Cho $f(x) = e^{-2x^2+3}$, $g(x) = e^{-3x^2-2}$. Tính $f * g$?

5 Bài toán giá trị biên

C1. Dùng phép biến đổi Fourier tìm nghiệm $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, của bài toán giá trị biên sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \frac{5}{x^2+4} \end{cases}$$

6 Biến đổi Laplace

C1. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$5y''' - 4y' = te^{2t}, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

C2.

$$y''' + 3y' + 2y = e^{-4t}, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

C3.

$$y''' + 3y'' + y = te^{-t}, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

C4.

$$\begin{cases} x' + 2x + y = 0 \\ y' - 3x + y = 0 \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 1$$

7 Đề 2022 - 2023

C1. Tìm khai triển chuỗi Fourier của hàm số $f(x) = x^2$, với $-\pi \leq x \leq \pi$.

C2. Dùng đẳng thức Parseval tính $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, biết

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cos nx}{e^{2n}} - \frac{4 \sin nx}{n^2} \right)$$

C3. Cho hai hàm số $f(x) = e^{-2x^2}$ và $g(x) = e^{\frac{1}{2}x^2+2}$, với $x \in \mathbb{R}$

a/ Tìm biến đổi Fourier của $f * g$, trong đó $f * g$ là tích chập của f và g .

b/ Tìm $f * g$.

C4. Dùng phép biến đổi Fourier tìm nghiệm $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, của bài toán giá trị biên sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}, -\infty < x < \infty, \text{ trong đó } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

C5. Dùng phép biến đổi Laplace tìm nghiệm $y = y(t)$, $t \geq 0$, của bài toán sau:

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = 2e^{-t}, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2.$$