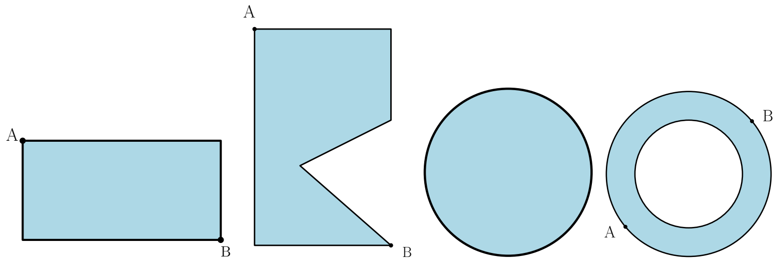


Hình 1: (a) Tập lồi (b) Tập lõm (c) Tập lồi (d) Tập lõm

0.0.1 Phương pháp hình học

Vấn đề về tập lồi

Định nghĩa 1 (Tập lồi)**.** *Tập S được gọi là **tập lồi** nếu S thoả điều kiện:*

- *Cho bất kỳ 2 điểm A và B nằm trong tập S.*
- *Đường thẳng nối 2 điểm A và B luôn nằm trong S.*

Định nghĩa 2 (Cực điểm)**.** *Với bất kỳ tập S, điểm $P \in S$ được gọi là **cực điểm** nếu thoả các điều kiện:*

- *Tồn tại đoạn thẳng AB nằm hoàn toàn trong S.*
- *Tồn tại điểm P sao cho $P := \{x \in AB : x = A \vee x = B\}$.*

Định nghĩa 3 (Siêu phẳng)**.** *Tập S gọi là một **siêu phẳng** nếu S gồm các vector*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

trong không gian $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

trong đó c là một hằng số và $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$.

Bài toán trong không gian $\mathbb{R}^2$

$$(P) \quad \text{Min } f(x) = c^T x \qquad \begin{cases} Ax = b, \\ x_j \geq 0, \;\; j = 1, 2. \end{cases} \tag{1}$$

Trong đó A là ma trận $m \times 2$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ và $c^T = (c_1\ c_2)$.

- **Tập nghiệm của bài toán**

  Ta có bài toán minh hoạ sau:

$$(P) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

  Với từng ràng buộc, ta có thể biểu thị trên đồ thị bằng từng đường thẳng tương ứng, ví dụ, ràng buộc

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

  tương ứng với mặt phẳng bên dưới đường thẳng CD trong hình 2.

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

  tương ứng với mặt phẳng bên dưới đường thẳng AB.

$$x_1 \leq 4$$

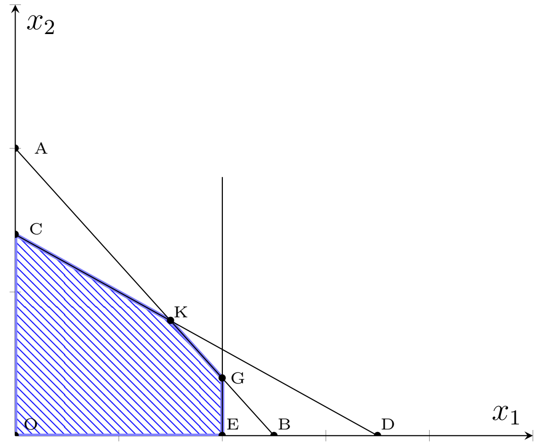
  tương ứng với mặt phẳng bên trái đường thẳng EG. Tập nghiệm của bài toán là đa giác $OCKGE$ được biểu thị trong đồ thị hình 2.

- **Phương án tối ưu của bài toán**

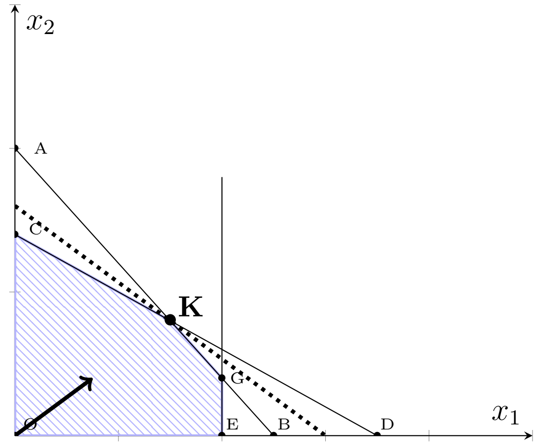
  - Để tìm phương án tối ưu của bài toán ta thiết lập phương thay đổi của hàm mục tiêu

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2,$$

    trong đó phương trình mô tả họ đường thẳng phụ thuộc theo tham số $f(x)$ với pháp vector $v = (c_1, c_2)$, giá trị $f(x)$ tăng hoặc giảm theo một hướng của vector v.
  - Từ phương trình hàm mục tiêu ta thiết lập các đường mức.
  - Tịnh tiến song song các đường mức theo chiều tăng nếu Max hoặc giảm nếu Min để tìm phương án tối ưu của bài toán. (Hình 3)



Hình 2: Đa giác $OCKGE$ là tập nghiệm của bài toán (P).



Hình 3: Minh hoạ phương pháp tìm phương án tối ưu của bài toán (P).

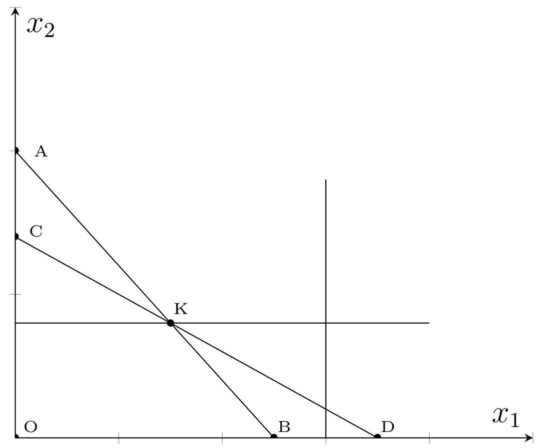
Các trường hợp đặc biệt

- **Vô nghiệm**

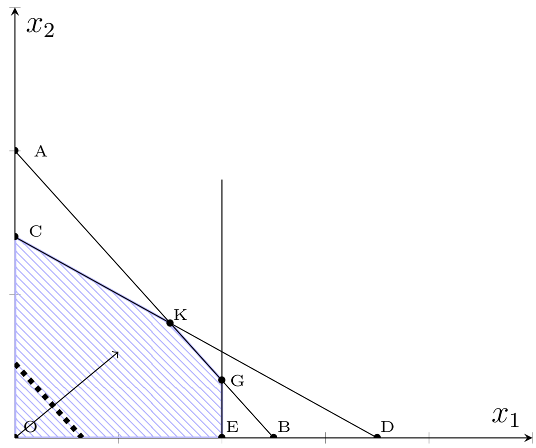
  Trường hợp bài toán có các ràng buộc không cùng tạo ra miền nghiệm của bài toán, xem Hình 4. thì bài toán được gọi là vô nghiệm.

- **Vô số nghiệm**

  Trường hợp bài toán có đường mức được tạo ra từ phương trình hàm mục tiêu song song với cực biên của tập nghiệm, bài toán cho ra vô số nghiệm. (Hình 5)

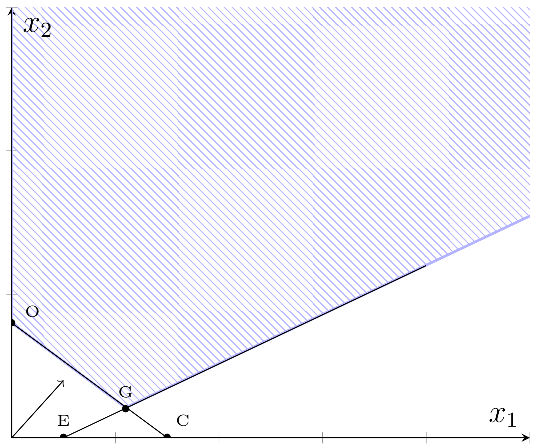


Hình 4: Minh hoạ trường hợp bài toán vô nghiệm.



Hình 5: Minh hoạ trường hợp bài toán có vô số nghiệm.

- **Giá trị tối ưu đạt vô hạn**



Hình 6: Minh hoạ trường hợp bài toán có giá trị vô hạn.

Trường hợp miền nghiệm của bài toán là một tập mở đồng thời pháp vector cho chiều vô hạn thì bài toán có giá trị tối ưu đạt vô cực. (Hình 6)