Linear Algebra

September 23, 2025

1 Ma trận

Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, ...\}$

với $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông $\Leftarrow$ đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m\times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$.
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m\times n}$$

1.2.2 Nhân

1 số với ma trận

2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m\times n},\ B = (b_{kj})_{n\times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Thuật toán

- Check cột A = hàng B:
  - Nếu không $\to$ không giải được.
  - Nếu có $\to$ Ma trận đầu ra là ma trận (hàng A) $\times$ (cột B) $\to$ Tính c_{ij} = giao hàng A và cột B.

Note

$AB = AC$ và $A \neq 0 \not\to B = C$.

Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
  - Phần tử chính (PTC) $\to$ PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

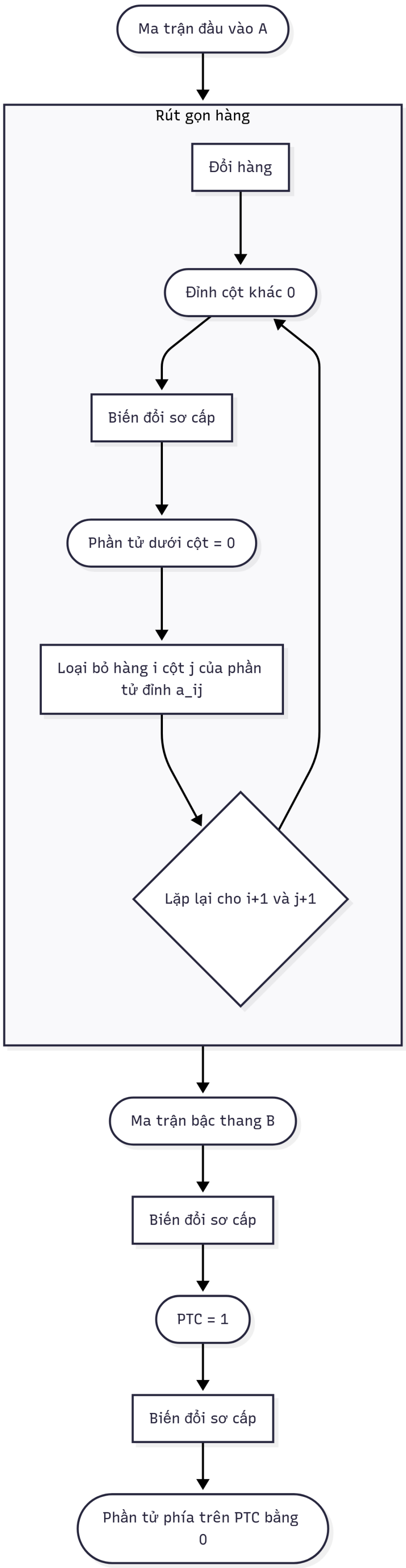
1.3.2 Ma trận rút gọn

- PTC = 1
- Cột chứa PTC $\to$ PTC là phần tử $\neq 0$ duy nhất.

1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
  - Đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
  - Thay thế tỷ lệ $h_i \leftarrow \alpha h_i$
  - Thay thế hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tương đương hàng
  - $A \rightarrow ... \rightarrow B$, $B \sim A$
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

1.4.1 Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất



1.5 Hạng

$r(A) = \text{rank}(A)$ với $A = (a_{ij})_{m\times n}$

Số hàng $\neq 0$ trong **dạng rút gọn** (hoặc **dạng bậc thang**) của A ($A \sim$ Dạng rút gọn (bậc thang))

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

1.6 Ma trận khả nghịch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó, A là ma trận vuông cấp n
- A là **ma trận khả nghịch**.
- B là **ma trận nghịch đảo** của A.
- $B = A^{-1}$.
- Nếu tồn tại B, B là duy nhất.

Định lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
- AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Note

- $A^k = A.A...A$
  - A^k khả nghịch.
  - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

1.6.1 Ma trận sơ cấp

Ta thực hiện 1 phép biến đổi sơ cấp trên I_n

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- E đgl **ma trận sơ cấp**
- Tồn tại 3 loại ma trận sơ cấp E tương ứng với 3 loại phép biến đổi sơ cấp.

$$EA = \overset{e}{\leftarrow} A$$

- Trong đó $\overset{e}{\leftarrow} A$ là ma trận A sau khi đã thực hiện phép biến đổi sơ cấp e.

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \ldots \xrightarrow{e_k} D$$

Ta được

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$
$$\vdots$$
$$D = (E_k \dots E_1) A$$

Mà A KN $\Leftrightarrow$ $A \sim I_n$

Do đó,

$$A \overset{e_1}{\to} \overset{e_2}{\to} \dots \overset{e_k}{\to} I_n$$

Vậy

$$I_n \overset{e_k}{\to} \overset{e_{k-1}}{\to} \dots \overset{e_1}{\to} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \dots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \dots E_k) I_n$$

1.6.2 Thuật toán tìm ma trận khả nghịch

Cho $A_{n\times n}$

- B1. Thiết lập $(A|I_n)$
- B2. $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Biến đổi thành ma trận rút gọn}} (D|B)$
  - Nếu $D = I_n \to A$ khả nghịch và $A^{-1} = B$.
  - Nếu $D \neq I_n \to A$ không khả nghịch.

1.6.3 Tính chất

- $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- A khả nghịch.
- $r(A) = n$.
- A là tích hữu hạn các ma trận sơ cấp
  - $I_n = (E_1 \dots E_k) A$
  - $A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$

- $AX = B$ có nghiệm duy nhất $\forall B \in M(n \times p, \mathbb{K})$.
- $\exists B$ ma trận vuông cấp n sao cho $AB = I_n$.
- $\exists C$ ma trận vuông cấp n sao cho $CA = I_n$
- A^T khả nghịch.

2 Định thức

2.1 Nền tảng

2.1.1 Phép thế

- Cho $X = \{1, 2, \dots, n\}$
- Song ánh $\sigma : X \to X$ đgl phép thế bậc n.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Tập hợp các phép thế bậc n k/h $|S_n| = n!$.

$$S_n = \{\sigma : X \to X | \sigma \text{ là song ánh}\}$$

- Phép thế đơn vị
- Phép thế sơ cấp
- Cấu trúc
  - Mỗi phép thế đều phân tích được thành tích của các tích độc lập
  - Tích phép thế sơ cấp.

2.1.2 Dấu

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \underset{1 \le i < j \le n}{\pi} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad \in \{\pm 1\}$$

2.1.3 Nghịch thế

- Là số lượng $\sigma(i) - \sigma(j)$ ngược với $i - j$ hay số lượng

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

- Nếu số lượng nghịch thế
  - Chẵn $\to \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.
  - Lẻ $\to \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.
- **Note:** Phép thế sơ cấp là phép thế lẻ.

2.2 Công thức

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

- Cấp 2
- Cấp 3

2.3 Tính chất - hệ quả - định lý

2.3.1 Tính chất

- Đa tuyến tính

$$\det(A_1 \dots \alpha A_j + \beta A'_j \dots A_n) = \alpha \det(A_1 \dots A_j \dots A_n) + \beta \det(A_1 \dots A'_j \dots A_n)$$

- Thay phiên

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0$$

- Chuẩn hoá

$$\det(I_n) = 1$$

2.3.2 Hệ quả

- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \alpha A_j \dots A_j \dots A_n$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots \alpha A_i \dots A_n) = 0$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$
  - Đổi chỗ chẵn lần $\to 1$.
  - Đổi chỗ lẻ lần $\to -1$.

2.3.3 Định lý

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- A khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.4 Định thức con và phần bù đại số

$i \leq k \leq n$

Chọn $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$ và $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n$

- $D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$ là định thức con.
- $\overline{D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}}$
  - Đgl phần bù của $D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$.
  - Ma trận sau khi bỏ hàng i_k và cột j_k từ $D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}$.
- Lấy theo cột, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n} (-1)^{i_1 + ... + i_k + j_1 + ... + j_k} D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} \overline{D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{D^j_1} + (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{D^j_2} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj} \overline{D^j_n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D^j_i}$$

- Lấy theo hàng, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n} (-1)^{i_1 + ... + i_k + j_1 + ... + j_k} D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} \overline{D^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{D^1_i} + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{D^2_i} + ... + (-1)^{i+n} a_{in} \overline{D^n_i} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D^j_i}$$

- **Note**
  - Ưu tiên chọn cột (hoặc hàng) nhiều 0. Nếu không có 0 $\rightarrow$ kết hợp các tính chất, định lý và hệ quả trước đó $\rightarrow$ sinh ra 0.
  - Không được dùng $h_i \leftarrow \alpha h_i$ ($h_i \leftrightarrow h_j$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ thì nhớ hệ quả đổi dấu).
  - Chọn cột để biến đổi thành "$0 \dots 1$" thì dùng phép biến đổi trên hàng và ngược lại.

2.5 Ứng dụng

2.5.1 Khả nghịch

- A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \,(\mathrm{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó, A ma trận vuông cấp n và

$$\operatorname{adj}(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{cof}(A)$$

trong đó, c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{D_i^j}$$

Thuật toán xác định ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức

B1. Tính c trên hàng (hoặc cột)

B2. Áp dụng công thức tính $\det(A)$ trên hàng (hoặc cột) bằng công thức

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + ... + a_{1n}c_{1n}$$

B3. (Check khả nghịch)

- Nếu $\det(A) = 0 \to$ không khả nghịch và kết thúc.
- Nếu $\det(A) \neq 0 \to A$ khả nghịch và chuyển sang bước 4 (nếu cần tính ma trận nghịc đảo)

B4. Tính hết tất cả c còn lại $\to \operatorname{adj}(A) = C$

B5. Tìm A^{-1} bằng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(\operatorname{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)}C^T$$

2.5.2 Hạng

Thuật toán xác định hạng của ma trận bằng định thức

B1. Tính định thức cấp $1, 2, ..., n$

B2. (Kết luận hạng)

- Nếu định thức cấp $i \neq 0 \to$ (hàng (hoặc cột) độc lập tuyến tính $\to$ dạng bậc thang 100% có n hàng $\neq 0$) $\to \operatorname{rank}(A) \geq i$
- Nếu định thức cấp $i = 0 \to \operatorname{rank}(A) = i$

3 Hệ phương trình tuyến tính

- $m, n \in \mathbb{N}$, trong đó, m phương trình, n ẩn, ta có hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trong đó
  - a_{ij} là hệ số.
  - b_i là hệ số tự do.
  - x_j là ẩn của hệ.
- Bộ số $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là nghiệm của (1) nếu thay vào (1) thoả tất cả phương trình.
- Giải hệ (1) $\to$ tìm tập nghiệm của (1).
- Hệ pt có nghiệm đgl hệ tương thích.
- Ma trận hệ số của (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Cột ẩn

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Cột hệ số tự do

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Ta viết gọn

$$AX = b$$

- Ma trận đầy đủ (ma trận bổ sung) k/h

$$A^* = (A|b)$$

3.1 Sự tồn tại và tính duy nhất

- $A^* = (A|b) \to (S|c)$, trong đó S là dạng bậc thang (hoặc dạng rút gọn) của ma trận A^*
- **Điều kiện nghiệm:**
  - Vô nghiệm $\to \exists$ hàng có dạng $(0 \dots 0|c)$, $c_i \neq 0$.
  - Vô số nghiệm $\to$ Phần tử chính $<$ Số ẩn.
  - Có nghiệm duy nhất $\to$ Phần tử chính $=$ Số ẩn.
- **Định lý Kronecker - Capelli**
  - Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \text{rank}(A^*) = \text{rank}(A)$
  - Có nghiệm duy nhất $\to \text{rank}(A) =$ Số ẩn.
  - Vô số nghiệm $\to \text{rank}(A) <$ Số ẩn.
- **Ẩn phụ thuộc** $\to$ Là ẩn nằm trong cột chứa PTC trong dạng bậc thang (rút gọn).
- **Ẩn tự do (độc lập)** $\to$ Các ẩn còn lại.

Note

- Ta kết luận nghiệm theo kiểu
  - $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
  - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.
  - $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \vdots \\ x_n = 3 \end{cases}$
- Nghiệm riêng $\to$ Đề cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.
- Nghiệm tổng quát $\to$ Không cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.

3.2 Thuật toán Gauss

B1. Đưa về A^*

B2. Đưa $A^* \to (S|c)$ (Bậc thang)

B3. (Check tồn tại nghiệm)

- Nếu không có nghiệm $\to$ Kết luận.
- Nếu có nghiệm $\to$ Dạng rút gọn $\to$ KL nghiệm.