Tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 2 tháng 3 năm 2024

TÓM TẮT

- Giới thiệu về bài toán tối ưu phân tuyến tính:
    - Cơ sở lý thuyết.
    - Thuật toán Dinkelbach.
- Phương pháp giải bài toán tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên bằng thuật toán nhánh cận (LandDoig).

NỘI DUNG

1. Giới thiệu
2. Phương pháp hình học
3. Thuật toán Dinkelbach
4. Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Giới thiệu bài toán

Tối ưu phân tuyến tính (Linear-Fractional Programming)

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính.**
- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{R}^n_+$. Tập $S_F := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.
- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1\ d_2\ \dots\ d_n)$ $(D(x) > 0, \forall x \in S_F)$.

Bài toán minh hoạ

$$Q(x) = \frac{4x_1 + 2x_2 - 6}{3x_1 + 2x_2 - 5} \quad \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Mối quan hệ với bài toán tối ưu tuyến tính

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 = 1$, bài toán (F) trở thành bài toán tối ưu tuyến tính (P) và ta gọi (F) là bài toán mở rộng của (P):

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & P(x) = p^T x + p_0 \quad \longrightarrow Max \\
& \begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}
$$

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 \neq 0$, ta thu được bài toán tuyến tính (Q):

$$
\begin{aligned}
(Q) \quad & Q(x) = \frac{p^T}{d_0} x + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0} \quad \longrightarrow Max \\
& \begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}
$$

- Ngược lại nếu $p^T = 0$ và $p_0 \neq 0$:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p_0}{d^T x + d_0} = \frac{p_0}{D(x)} \quad \longrightarrow Max$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Tương tự bài toán:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{d^T x + d_0}{p_0} = \frac{D(x)}{p_0} \quad \longrightarrow Min$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

- Nếu p^T và d^T phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\mu \neq 0$ và $p^T = \mu d^T$, ta thu được hàm:

$$
(Q) \quad Q(x) = \frac{\mu d^T x + p_0}{d^T x + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{d^T x + d_0}
$$
$$
\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{7}
$$

Ta thay bằng hàm $D(x)$ với điều kiện:

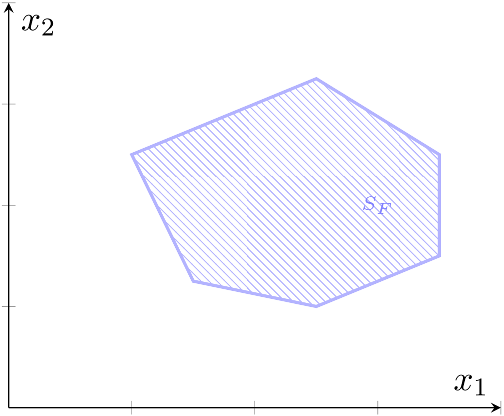
- Nếu $p_0 - \mu d_0 > 0$, $D(x) \longrightarrow Min$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 < 0$, $D(x) \longrightarrow Max$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 = 0$ thì $Q(x) = \mu =$ hằng số $(\forall x \in S_F)$, ta bỏ qua bài toán.

Phương pháp hình học

Bài toán trên không gian $\mathbb{R}^2$

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} Ax \leq b, \text{ trong đó } A = m \times 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$



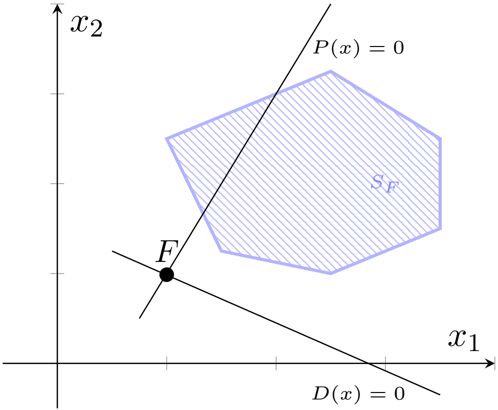
Hình: Tập nghiệm minh hoạ của bài toán (F)

Đặt $Q(x) = K$, với K là một giá trị thực, ta được:

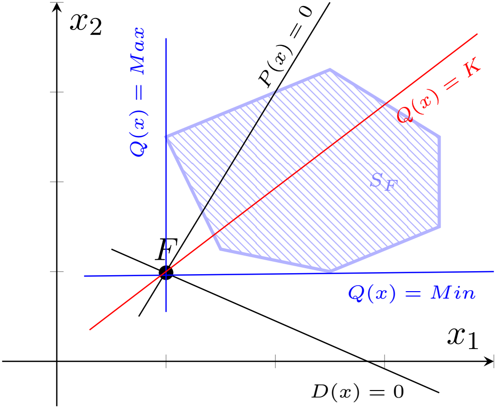
$$(p_1 - Kd_1)x_1 + (p_2 - Kd_2)x_2 + (p_0 - Kd_0) = 0 \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + p_0 & = & 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 & = & 0 \end{cases} \tag{10}$$

- $Q(x) = K$ là đường mức quét qua tập S_F, đến khi gặp *cực điểm* thì ở đó ta nhận được giá trị K là giá trị tối ưu của bài toán (F).
- Ta xác định được điểm cố định F là nghiệm của phương trình (9), nói cách khác, điểm cố định F là điểm giao của 2 đường thẳng $P(x) = 0$ và $D(x) = 0$.



Hình: Minh hoạ điểm cố định F



Hình: Minh hoạ đường mức $Q(x) = K$

Thuật toán Dinkelbach

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach