Linear Algebra

October 3, 2025

1 Ma trận

Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, ...\}$

với $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông $\Leftarrow$ đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m\times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}$.
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m\times n}$$

1.2.2 Nhân

1 số với ma trận

2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m\times n},\ B = (b_{kj})_{n\times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Thuật toán

- Check cột $A =$ hàng B:
  - Nếu không $\to$ không giải được.
  - Nếu có $\to$ Ma trận đầu ra là ma trận (hàng A) $\times$ (cột B) $\to$ Tính $c_{ij} =$ giao hàng A và cột B.

Note

$AB = AC$ và $A \neq 0 \not\to B = C$.

Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
  - Phần tử chính (PTC) $\to$ PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

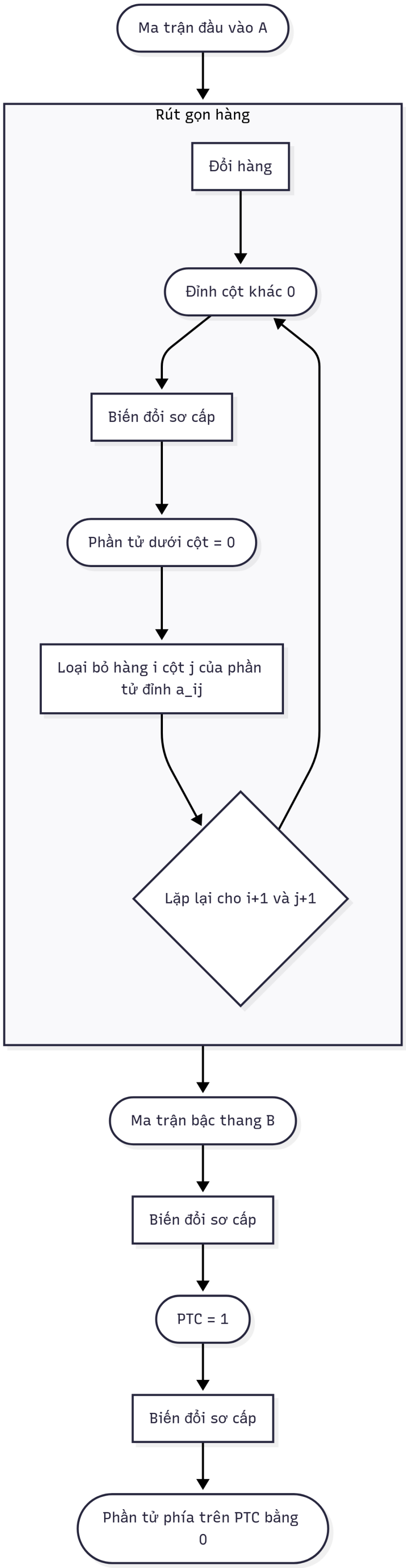
1.3.2 Ma trận rút gọn

- PTC $= 1$
- Cột chứa PTC $\to$ PTC là phần tử $\neq 0$ duy nhất.

1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
  - Đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
  - Thay thế tỷ lệ $h_i \leftarrow \alpha h_i$
  - Thay thế hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j \quad (j \neq i)$
- Tương đương hàng
  - $A \rightarrow ... \rightarrow B$, $B \sim A$
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

1.4.1 Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất



1.5 Hạng

$r(A) = \text{rank}(A)$ với $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Số hàng $\neq 0$ trong **dạng rút gọn** (hoặc **dạng bậc thang**) của A ($A \sim$ Dạng rút gọn (bậc thang))

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

1.6 Ma trận khả nghịch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó, A là ma trận vuông cấp n
- A là **ma trận khả nghịch**.
- B là **ma trận nghịch đảo** của A.
- $B = A^{-1}$.
- Nếu tồn tại B, B là duy nhất.

Định lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Note

- $A^k = A.A...A$
  - A^k khả nghịch.
  - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

1.6.1 Ma trận sơ cấp

Ta thực hiện 1 phép biến đổi sơ cấp trên I_n

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- E đgl **ma trận sơ cấp**
- Tồn tại 3 loại ma trận sơ cấp E tương ứng với 3 loại phép biến đổi sơ cấp.

$$EA = \overset{e}{\leftarrow} A$$

- Trong đó $\overset{e}{\leftarrow} A$ là ma trận A sau khi đã thực hiện phép biến đổi sơ cấp e.

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 ... \xrightarrow{e_k} D$$

Ta được

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$
$$\vdots$$
$$D = (E_k \dots E_1) A$$

Mà A KN $\Leftrightarrow$ $A \sim I_n$

Do đó,

$$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} I_n$$

Vậy

$$I_n \xrightarrow{e_k} \xrightarrow{e_{k-1}} \dots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \dots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \dots E_k) I_n$$

1.6.2 Thuật toán tìm ma trận khả nghịch

Cho $A_{n\times n}$

- B1. Thiết lập $(A|I_n)$
- B2. $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Biến đổi thành ma trận rút gọn}} (D|B)$
  - Nếu $D = I_n \to A$ khả nghịch và $A^{-1} = B$.
  - Nếu $D \neq I_n \to A$ không khả nghịch.

1.6.3 Tính chất

- $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- A khả nghịch.
- $r(A) = n$.
- A là tích hữu hạn các ma trận sơ cấp
  - $I_n = (E_1 \dots E_k) A$
  - $A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$

- $AX = B$ có nghiệm duy nhất $\forall B \in M(n \times p, \mathbb{K})$.
- $\exists B$ ma trận vuông cấp n sao cho $AB = I_n$.
- $\exists C$ ma trận vuông cấp n sao cho $CA = I_n$
- A^T khả nghịch.

2 Định thức

2.1 Nền tảng

2.1.1 Phép thế

- Cho $X = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Song ánh $\sigma : X \to X$ đgl phép thế bậc n.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Tập hợp các phép thế bậc n k/h $|S_n| = n!$.

$$S_n = \{\sigma : X \to X | \sigma \text{ là song ánh}\}$$

- Phép thế đơn vị
- Phép thế sơ cấp
- Cấu trúc
  - Mỗi phép thế đều phân tích được thành tích của các tích độc lập
  - Tích phép thế sơ cấp.

2.1.2 Dấu

$$\text{sgn}(\sigma) = \underset{1 \leq i < j \leq n}{\pi} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad \in \{\pm 1\}$$

2.1.3 Nghịch thế

- Là số lượng $\sigma(i) - \sigma(j)$ ngược với $i - j$ hay số lượng

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

- Nếu số lượng nghịch thế
  - Chẵn $\to \text{sgn}(\sigma) = 1$.
  - Lẻ $\to \text{sgn}(\sigma) = -1$.
- **Note:** Phép thế sơ cấp là phép thế lẻ.

2.2 Công thức

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

- Cấp 2
- Cấp 3

2.3 Tính chất - hệ quả - định lý

2.3.1 Tính chất

- Đa tuyến tính

$$\det(A_1 \dots \alpha A_j + \beta A'_j \dots A_n) = \alpha \det(A_1 \dots A_j \dots A_n) + \beta \det(A_1 \dots A'_j \dots A_n)$$

- Thay phiên

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0$$

- Chuẩn hoá

$$\det(I_n) = 1$$

2.3.2 Hệ quả

- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \alpha A_j \dots A_j \dots A_n$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots \alpha A_i \dots A_n) = 0$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$
  - Đổi chỗ chẵn lần $\to 1$.
  - Đổi chỗ lẻ lần $\to -1$.

2.3.3 Định lý

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- A khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.4 Định thức con và phần bù đại số

$i \leq k \leq n$

Chọn $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$ và $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n$

- $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ là định thức con.
- $\overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$
  - Đgl phần bù của $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.
  - Ma trận sau khi bỏ hàng i_k và cột j_k từ $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.
- Lấy theo cột, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{D_1^j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{D_2^j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \overline{D_n^j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- Lấy theo hàng, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{D_i^1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{D_i^2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \overline{D_i^n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- **Note**
  - Ưu tiên chọn cột (hoặc hàng) nhiều 0. Nếu không có 0 $\rightarrow$ kết hợp các tính chất, định lý và hệ quả trước đó $\rightarrow$ sinh ra 0.
  - Không được dùng $h_i \leftarrow \alpha h_i$ ($h_i \leftrightarrow h_j$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ thì nhớ hệ quả đổi dấu).
  - Chọn cột để biến đổi thành "$0 \dots 1$" thì dùng phép biến đổi trên hàng và ngược lại.

2.5 Ứng dụng

2.5.1 Khả nghịch

- A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, (\text{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó, A ma trận vuông cấp n và

$$\mathrm{adj}(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{cof}(A)$$

trong đó, c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{D_i^j}$$

Thuật toán xác định ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức

B1. Tính c trên hàng (hoặc cột)

B2. Áp dụng công thức tính $\det(A)$ trên hàng (hoặc cột) bằng công thức

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

B3. (Check khả nghịch)

- Nếu $\det(A) = 0 \to$ không khả nghịch và kết thúc.
- Nếu $\det(A) \neq 0 \to A$ khả nghịch và chuyển sang bước 4 (nếu cần tính ma trận nghịc đảo)

B4. Tính hết tất cả c còn lại $\to \mathrm{adj}(A) = C$

B5. Tìm A^{-1} bằng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(\mathrm{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)}C^T$$

2.5.2 Hạng

Thuật toán xác định hạng của ma trận bằng định thức

B1. Tính định thức cấp $1, 2, \dots, n$

B2. (Kết luận hạng)

- Nếu định thức cấp $i \neq 0 \to$ (hàng (hoặc cột) độc lập tuyến tính $\to$ dạng bậc thang 100% có n hàng $\neq 0$) $\to \mathrm{rank}(A) \geq i$

- Nếu định thức cấp $i = 0 \to \mathrm{rank}(A) = i$

3 Hệ phương trình tuyến tính

- $m, n \in \mathbb{N}$, trong đó, m phương trình, n ẩn, ta có hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trong đó
  - a_{ij} là hệ số.
  - b_i là hệ số tự do.
  - x_j là ẩn của hệ.
- Bộ số $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là nghiệm của (1) nếu thay vào (1) thoả tất cả phương trình.
- Giải hệ (1) $\to$ tìm tập nghiệm của (1).
- Hệ pt có nghiệm đgl hệ tương thích.
- Ma trận hệ số của (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Cột ẩn

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Cột hệ số tự do

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Ta viết gọn

$$AX = b$$

- Ma trận đầy đủ (ma trận bổ sung) k/h

$$A^* = (A|b)$$

3.1 Sự tồn tại và tính duy nhất

- $A^* = (A|b) \to (S|c)$, trong đó S là dạng bậc thang (hoặc dạng rút gọn) của ma trận A^*
- **Điều kiện nghiệm:**
  - Vô nghiệm $\to \exists$ hàng có dạng $(0 \dots 0|c)$, $c_i \neq 0$.
  - Vô số nghiệm $\to$ Phần tử chính $<$ Số ẩn.
  - Có nghiệm duy nhất $\to$ Phần tử chính $=$ Số ẩn.
- **Định lý Kronecker - Capelli**
  - Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A^*) = \operatorname{rank}(A)$
  - Có nghiệm duy nhất $\to \operatorname{rank}(A) =$ Số ẩn.
  - Vô số nghiệm $\to \operatorname{rank}(A) <$ Số ẩn.
- **Ẩn phụ thuộc** $\to$ Là ẩn nằm trong cột chứa PTC trong dạng bậc thang (rút gọn).
- **Ẩn tự do (độc lập)** $\to$ Các ẩn còn lại.

Note

- Ta kết luận nghiệm theo kiểu
  - $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
  - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
  - $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \vdots \\ x_n = 3 \end{cases}$
- Nghiệm riêng $\to$ Đề cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.
- Nghiệm tổng quát $\to$ Không cho sẵn ẩn tự do bằng mấy.

3.2 Thuật toán Gauss

B1. Đưa về A^*

B2. Đưa $A^* \to (S|c)$ (Bậc thang)

B3. (Check tồn tại nghiệm)

- Nếu không có nghiệm $\to$ Kết luận.
- Nếu có nghiệm $\to$ Dạng rút gọn $\to$ KL nghiệm.

3.3 Quy tắc Cramer

- Hệ $AX = b$ đgl **Hệ Cramer** nếu
  - A vuông
  - A Khả nghịch

Do đó,

$$X = A^{-1}b$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} C^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay $1 \leq j \leq n$

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}(b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + ... + b_n c_{nj})$$
$$A_j(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_m & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Do đó ta có

$$D_j = \det(A_j(b)) = b_1 c_{1j} + ... + b_m c_{mj}$$

nghiệm của hệ là

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad 1 \leq j \leq n$$

- **Điều kiện nghiệm:**
  - Nghiệm duy nhất $x_j = \frac{D_j}{D} \to D \neq 0$.
  - Vô nghiệm $\to D = 0 \land \exists D_j \neq 0$.
  - Không kết luật gì về tương thích hệ $\to D = 0 \land \forall D_j = 0$.

Thuật toán tìm nghiệm của hệ bằng quy tắc Cramer

B1. Tìm D và D_j, $1 \leq j \leq n$

B2. (Check điều kiện nghiệm)

- Nếu $D \neq 0 \to$ KL nghiệm duy nhất $x_j = \frac{D_j}{D}, 1 \leq j \leq n \to$ Kết thúc.
- Nếu $D = 0 \to$ Sang bước tiếp theo

B3. (Check trường hợp)

- Nếu $\exists D_j \neq 0 \to$ KL vô nghiệm $\to$ Kết thúc.
- Nếu $\forall D_j = 0 \to$ KL rằng ta không kết luật gì về tương thích hệ $\to$ Kết thúc.

Note

- Nếu đề hỏi tìm tham số sao cho hệ có nghiệm thì ta tìm trường hợp vô số và nghiệm duy nhất.

3.4 Hệ thuần nhất

Hệ thuần nhất là hệ (2) như sau

$$AX = 0$$

- Nghiệm tầm thường $\to X = 0 \to \operatorname{rank}(A) = n$.
- Vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - \operatorname{rank}(A) \to \operatorname{rank}(A) < n$.
- **Nhận xét**
  - Nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của (2) $\to tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ là nghiệm của (2).
  - Nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là nghiệm của (2) $\to x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ là nghiệm của (2).
  - A có $m < n \to$ Vô số nghiệm.

4 Không gian Vector

- $V \neq \emptyset$ đgl 1 **không gian vector** $\Rightarrow$ được trang bị 2 phép toán:
  - Cộng vector $+ \colon V \times V \longrightarrow V, \quad (u, v) \longmapsto u + v$.
  - Nhân vô hướng $\cdot \colon \mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, u) \longmapsto \alpha u$.
- Thoả mãn các tiên đề sau:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (u+v)+w = u+(v+w), \quad \forall u, v, w \in V \\
&(2) \quad u+v = v+u, \quad \forall u, v \in V \\
&(3) \quad \exists 0 \in V : u + 0 = u, \quad \forall u \in V \\
&(4) \quad \forall u \in X,\ \exists u' \in V : u + u' = 0 \\
&(5) \quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V \\
&(6) \quad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V \\
&(7) \quad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V \\
&(8) \quad 1u = u, \quad \forall u \in V
\end{aligned}$$

- **Note**:
  - $\mathbb{K}$**-Không gian vector** $\leftrightarrow$ Không gian vector trên trường $\mathbb{K}$.

- V là không gian vector trên trường $\mathbb{K} \leftrightarrow v \in V$ là 1 **vector**.
- $\alpha \in \mathbb{K} \rightarrow$ đgl 1 **vô hướng**.
- 0 trong (3) $\rightarrow$ đgl **vector 0**.
- $\forall u \in V, u'$ trong (4) $\rightarrow$ đgl vector đối của vector $u, \quad u' = -u$.

4.1 Tính chất

Cho V là 1 không gian vector

- Vector 0 là duy nhất.
- $\forall u \in V$, $-u$ là duy nhất.
  - $u - v = u + (-v)$.
- Giản ước:
  - $u + w = v + w \Rightarrow u = v$.
  - $u + v = w \Rightarrow u = w - v$.
- $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = 0$.
- $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.
- $\forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ (0 bên dưới là vector 0)
  - $0u = 0$.
  - $\alpha 0 = 0$.
- **Note**:
  - Để c/m **tính duy nhất** $\rightarrow$ ta c/m cả 2 thoả cùng 1 tính chất.

4.2 Ví dụ minh hoạ

VD1

$V = \{$ Vector tự do trong mặt phẳng $\}, +, .$ là 1 không gian vector.

VD2

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

là 1 không gian vector.

VD3

$n \geq 1$, $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

là 1 không gian vector.

VD4

$M(m \times n, \mathbb{K}), +, .$ là không gian vector.

VD5

$\mathbb{K}[x]$ là tập các đa thức biến x hệ số trong $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}[x]$ là không gian vector trên $\mathbb{K}$ với phép cộng các đa thức và phép nhân 1 số với đa thức. (0 là đa thức không)

VD6

Tập các hàm thực xác định trên $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$-Không gian vector với

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

VD7

$\mathbb{K}$ là 1 không gian vector với các phép toán thông thường trên $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

VD8

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ là $\mathbb{Q}$-không gian vector.

4.3 Độc lập tuyến tính & phụ thuộc tuyến tính

Cho $S \subset V$ với V là không gian vector.

4.3.1 Tổ hợp tuyến tính

- **Tổ hợp tuyến tính** của các vector trong S là tổng hữu hạn

$$a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n, \quad a_i \in \mathbb{K}, u_i \in S.$$

4.3.2 Biểu thị tuyến tính

- Cho $v \in V$, **Biểu thị tuyến tính** là

$$v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + ... + \alpha_ku_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}, u_k \in S.$$

VDMH

$\mathbb{R}^3 = S = \{x_1 = (1,2,1), v_2 = (1,2,3), u_3 = (2,4,1)\}, v = (1,2,2), w = (0,0-3)$, v và w biểu thị tuyến tính được qua S không?

$v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$(1,2,3) = x_1($

4.3.3 Phụ thuộc tuyến tính

- S là **phụ thuộc tuyến tính** nếu

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \neq (0, ... 0) \mid \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0, \quad u_i \in S.$$

4.3.4 Độc lập tuyến tính

- S là **độc lập tuyến tính** nếu không phụ thuộc tuyến tính, hay

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0) \rightarrow \text{ Nghiệm tầm thường.}$$

4.3.5 Ví dụ minh hoạ

VD1

Trong không gian $\mathbb{R}^3, S = \{u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (\sim\sim\sim), u_3 = (\sim\sim\sim)\}$

Xét $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$\alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(\sim\sim\sim) + \alpha_3(\sim\sim\sim) = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Vô số nghiệm} \Rightarrow \text{ Phụ thuộc tuyến tính.}$$

VD2

Trong không gian $\mathbb{R}[x], S = \{P_1 = 1 + x + x^3, P_2 = 1 + x + x^2, P_3 = 1 + x, P_4 = x + x^3\}$

Xét $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$

$x_1(1 + x + x^3) + x_2(\sim\sim\sim) + x_3(\sim\sim\sim) = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Có nghiệm } (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \text{ Độc lập tuyến tính.}$$

(Note: HPT ở trên được lập ra dựa trên bậc, tức mỗi cột tương ứng với bậc)

4.3.6 Tính chất

- Hệ chỉ gồm 1 vector $\{u\}$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow u = 0$.
- S phụ thuộc tuyến tính
  - $\Rightarrow$ Mọi hệ chứa S phụ thuộc tuyến tính.
  - $\Rightarrow$ Mọi hệ vector chứa vector 0 đều phụ thuộc tuyến tính.
- S phụ thuộc tuyến tính, $S' \supset S \Rightarrow S'$ phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ vô hạn vector S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ Hệ con hữu hạn của S độc lập tuyến tính.

4.3.7 Định lý

- Cho $S = \{u_1, u_2 \ldots, u_k\}$, $k \geq 2$, S **phụ thuộc tuyến tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 1 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \widehat{\alpha_i u_i} + \ldots + \alpha_k u_k.$$

Cách làm bài tìm tổ hợp tuyến tính

B1. Xử lý đến khi ra được hệ phương trình tuyến tính

B2. Giải ra nghiệm

B3. Cho 1 ẩn $\neq 0 \rightarrow$ Thu được tổ hợp tuyến tính (VD. $u_1 + u_2 + u_3 = \sim \rightarrow u_1 = \sim$)

- Cho $S = \{u_1, u_2 \ldots, u_k\}$, $k \geq 2, u_i \neq 0$, S **phụ thuộc tuyến tính**

$$\Leftrightarrow \exists u_i,\ 2 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{i-1} u_{i-1}.$$

Hơn nữa, có thể chọn i sao cho $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ độc lập tuyến tính. (Định lý giúp tìm tập hợp độc lập tuyến tính lớn nhất trong 1 tập)

4.4 Cơ sở và số chiều

Cho V là $\mathbb{K}$-Không gian vector và $B \subset V$.

4.4.1 Hệ sinh

- Mọi vector trong V biểu thị tuyến tính được qua $B \Rightarrow$ Hệ vector B đgl **hệ sinh (tập sinh)** của V.

4.4.2 Cơ sở

- $\begin{cases} B \text{ là hệ sinh của } V \\ B \text{ độc lập tuyến tính} \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vector B đgl **Cơ sở** của V.
- Note:
  - $\mathbb{K}$-không gian vector, $\mathbb{C}$-không gian vector có 1 cơ sở là $\{1\}$.
  - $\mathbb{C}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector. $z = a + bi = a1 + bi \Rightarrow \{1, i\}$ là 1 hệ sinh. $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b \Rightarrow \{1, i\}$ là độc lập tuyến tính.
  - $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$-không gian vector với cơ sở là $\{1\}$.
  - $\mathbb{R}$ là $\mathbb{Q}$-không gian vector với cở sở là vô hạn.

4.4.3 VDMH

VD1

$\mathbb{K}^n, \varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, trong đó $e_1 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$

$\forall x \in \mathbb{K}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$

$\Rightarrow \varepsilon$ là 1 hệ sinh của $\mathbb{K}^n$ (*)

$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = 0 \Leftrightarrow (x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = 0$

$\Rightarrow \varepsilon$ độc lập tuyến tính (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 cơ sở của $\mathbb{K}^n$ (và là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^n$).

VD2

$M(m \times n, \mathbb{K}), \varepsilon = \{E_{ij}\}_{i=1,m}^{j=1,m}$ trong đó $E_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ ... & 1 & ... \\ & \vdots & \end{pmatrix}$. (C/m tương tự) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 cơ sở của $M(m \times n, \mathbb{K})$.

VD3

$\mathbb{K}[x], \varepsilon = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$.

VD4

$\mathbb{K}_n[x], \varepsilon = \{1, x, ..., x^n\}$.