

Tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên

Nguyễn Chí Bằng

Ngày 1 tháng 3 năm 2024

TÓM TẮT

- Giới thiệu về bài toán tối ưu phân tuyến tính:
 - Cơ sở lý thuyết.
 - Thuật toán Dinkelbach.
- Phương pháp giải bài toán tối ưu phân tuyến tính cho nghiệm nguyên bằng thuật toán nhánh cận (LandDoig).

NỘI DUNG

- 1 Giới thiệu
- 2 Phương pháp hình học
- 3 Thuật toán Dinkelbach
- 4 Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

Giới thiệu bài toán

Tối ưu phân tuyến tính (Linear-Fractional Programming)

$$(F) \quad Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \longrightarrow \text{Max} \quad (1)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- Bài toán (F) gọi là bài toán **Tối ưu phân tuyến tính**.

- Trong đó A là ma trận $m \times n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, với $x \in \mathbb{R}_+^n$. Tập

$S_F := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$ là tập nghiệm của bài toán Tối ưu phân tuyến tính.

- $P(x) = p^T x + p_0$, với $p^T = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ và $D(x) = d^T x + d_0$, với $d^T = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n)$ ($D(x) > 0, \forall x \in S_F$).

Bài toán minh họa

$$Q(x) = \frac{4x_1 + 2x_2 - 6}{3x_1 + 2x_2 - 5} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Mối quan hệ với bài toán tối ưu tuyến tính

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 = 1$, bài toán (F) trở thành bài toán tối ưu tuyến tính (P) và ta gọi (F) là bài toán mở rộng của (P):

$$(P) \quad P(x) = p^T x + p_0 \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Nếu $d^T = 0$ và $d_0 \neq 0$, ta thu được bài toán tuyến tính (Q):

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p^T}{d_0} x + \frac{p_0}{d_0} = \frac{P(x)}{d_0} \longrightarrow \text{Max} \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

- Ngược lại nếu $p^T = 0$ và $p_0 \neq 0$:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{p_0}{d^T x + d_0} = \frac{p_0}{D(x)} \longrightarrow \text{Max}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Tương tự bài toán:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{d^T x + d_0}{p_0} = \frac{D(x)}{p_0} \longrightarrow \text{Min}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

- Nếu p^T và d^T phụ thuộc tuyến tính, khi đó tồn tại $\mu \neq 0$ và $p^T = \mu d^T$, ta thu được hàm:

$$(Q) \quad Q(x) = \frac{\mu d^T x + p_0}{d^T x + d_0} = \mu + \frac{p_0 - \mu d_0}{d^T x + d_0} \quad (7)$$
$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Ta thay bằng hàm $D(x)$ với điều kiện:

- Nếu $p_0 - \mu d_0 > 0$, $D(x) \rightarrow \text{Min}$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 < 0$, $D(x) \rightarrow \text{Max}$.
- Nếu $p_0 - \mu d_0 = 0$ thì $Q(x) = \mu = \text{hằng số } (\forall x \in S_F)$, ta bỏ qua bài toán.

Phương pháp hình học

Thuật toán Dinkelbach

Thuật toán LandDoig - Dinkelbach

