

Linear Algebra (Lecture Notes)

November 29, 2025

1 Ma trận

Đặt $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

và $\mathbb{N} = \{1, \dots\}$

với $m, n \in \mathbb{N}$

Ma trận $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$

1.1 Loại ma trận

- Ma trận hàng.
- Ma trận cột.
- Ma trận 0.
- Ma trận vuông \Leftarrow đường chéo.
- Ma trận bằng nhau.
- $M(m \times n, \mathbb{K}) = M_{m \times n}(\mathbb{K}) = M_{\mathbb{K}}(m \times n) = \{A = (a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{K}\}.$
- Ma trận tam giác trên và Ma trận tam giác dưới, gọi chung là Ma trận tam giác.
- Ma trận đường chéo (vừa là mt tam giác trên và dưới).
- Ma trận đơn vị.

1.2 Phép toán

1.2.1 Cộng

$$A + B = (a_j + b_j)_{m \times n}$$

1.2.2 Nhân

1 số với ma trận

2 ma trận

$$A = (a_{ik})_{m \times n}, B = (b_{kj})_{n \times p}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Thuật toán

- Check cột $A =$ hàng B :
 - Nếu không \rightarrow không giải được.
 - Nếu có \rightarrow Ma trận đầu ra là ma trận (hàng A) \times (cột B) \rightarrow Tính $c_{ij} =$ giao hàng A và cột B .

Note

$$AB = AC \text{ và } A \neq 0 \not\rightarrow B = C.$$

Ma trận chuyển vị

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

1.3 Ma trận bậc thang & ma trận rút gọn

1.3.1 Ma trận bậc thang

- Hàng không (nếu có).
- Hàng khác không
 - Phần tử chính (PTC) \rightarrow PTC bên dưới luôn nằm bên phải PTC bên trên.

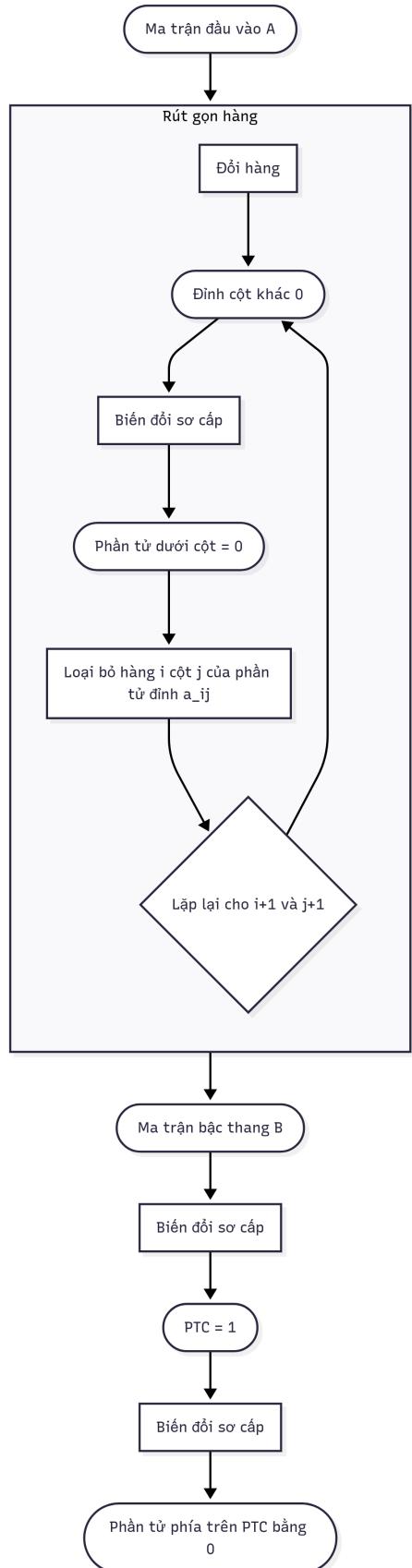
1.3.2 Ma trận rút gọn

- PTC = 1
- Cột chứa PTC \rightarrow PTC là phần tử $\neq 0$ duy nhất.

1.4 Phép biến đổi

- Phép biến đổi sơ cấp, phép biến đổi hàng
 - Đổi hàng $h_i \leftrightarrow h_j$
 - Thay thế tỷ lệ $h_i \leftarrow \alpha h_i$
 - Thay thế hàng $h_i \leftarrow h_i + kh_j$ ($j \neq i$)
- Tương đương hàng
 - $A \rightarrow \dots \rightarrow B, B \sim A$
 - $A \sim A$
 - $A \sim B \rightarrow B \sim A$
 - $A \sim B, B \sim C \rightarrow A \sim C$

1.4.1 Thuật toán cho số phép toán thực hiện nhỏ nhất



1.5 Hạng

$$r(A) = \text{rank}(A) \text{ với } A = (a_{ij})_{m \times n}$$

- Số hàng $\neq 0$ trong **dạng rút gọn** (hoặc **dạng bậc thang**) của A ($A \sim$ Dạng rút gọn (bậc thang))

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

1.6 Ma trận khả nghịch

$$AB = BA = I_n$$

- Trong đó, A là ma trận vuông cấp n
- A là **ma trận khả nghịch**.
- B là **ma trận nghịch đảo** của A .
- $B = A^{-1}$.
- Nếu tồn tại B , B là duy nhất.

Định lý

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
- AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- A^T khả nghịch và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Note

- $A^k = A \cdot A \cdots A$
 - A^k khả nghịch.
 - $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

1.6.1 Ma trận sơ cấp

- Ta thực hiện 1 phép biến đổi sơ cấp trên I_n

$$I_n \xrightarrow{e} E$$

- E đgl **ma trận sơ cấp**
- Tồn tại 3 loại ma trận sơ cấp E tương ứng với 3 loại phép biến đổi sơ cấp.

$$EA = \xleftarrow{e} A$$

- Trong đó $\xleftarrow{e} A$ là ma trận A sau khi đã thực hiện phép biến đổi sơ cấp e .

$$A \xrightarrow{e_1} A_1 \xrightarrow{e_2} A_2 \dots \xrightarrow{e_k} D$$

Ta được

$$A_1 = E_1 A$$

$$\begin{aligned} A_2 &= E_2 A_1 = E_2 E_1 A \\ &\vdots \\ D &= (E_k \dots E_1) A \end{aligned}$$

Mà A KN $\Leftrightarrow A \sim I_n$

Do đó,

$$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_k} I_n$$

Vậy

$$I_n \xrightarrow{e_k} \xrightarrow{e_{k-1}} \dots \xrightarrow{e_1} A^{-1}$$

Hay

$$I_n = (E_1 \dots E_k) A$$

$$A^{-1} = (E_1 \dots E_k) I_n$$

1.6.2 Thuật toán tìm ma trận khả nghịch

Cho $A_{n \times n}$

- B1. Thiết lập $(A|I_n)$
- B2. $(A|I_n) \xrightarrow{\text{Biến đổi thành ma trận rút gọn}} (D|B)$
 - Nếu $D = I_n \rightarrow A$ khả nghịch và $A^{-1} = B$.
 - Nếu $D \neq I_n \rightarrow A$ không khả nghịch.

1.6.3 Tính chất

- $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$
- A khả nghịch.
- $r(A) = n$.

- A là tích hữu hạn các ma trận sơ cấp
 - $I_n = (E_1 \dots E_k)A$
 - $A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$
- $AX = B$ có nghiệm duy nhất $\forall B \in M(n \times p, \mathbb{K})$.
- $\exists B$ ma trận vuông cấp n sao cho $AB = I_n$.
- $\exists C$ ma trận vuông cấp n sao cho $CA = I_n$
- A^T khả nghịch.

2 Định thức

2.1 Nền tảng

2.1.1 Phép thế

- Cho $X = \{1, 2, \dots, n\}$
- Song ánh $\sigma : X \rightarrow X$ đgl phép thế bậc n .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Tập hợp các phép thế bậc n k/h $|S_n| = n!$.

$$S_n = \{\sigma : X \rightarrow X | \sigma \text{ là song ánh}\}$$

- Phép thế đơn vị
- Phép thế sơ cấp
- Cấu trúc
 - Mỗi phép thế đều phân tích được thành tích của các tích độc lập
 - Tích phép thế sơ cấp.

2.1.2 Dấu

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{\pm 1\}$$

2.1.3 Nghịch thế

- Là số lượng $\sigma(i) - \sigma(j)$ ngược với $i - j$ hay số lượng

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

- Nếu số lượng nghịch thế
 - Chẵn $\rightarrow \text{sgn}(\sigma) = 1$.

- Lẻ $\rightarrow \text{sgn}(\sigma) = -1$.
- **Note:** Phép thê sơ cấp là phép thê lẻ.

2.2 Công thức

- Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

- Cấp 2
- Cấp 3

2.3 Tính chất - hệ quả - định lý

2.3.1 Tính chất

- Đa tuyến tính

$$\det(A_1 \dots \alpha A_j + \beta A'_j \dots A_n) = \alpha \det(A_1 \dots A_j \dots A_n) + \beta \det(A_1 \dots A'_j \dots A_n)$$

- Thay phiên

$$\det(A_1 \dots A_i \dots A_i \dots A_n) = 0$$

- Chuẩn hoá

$$\det(I_n) = 1$$

2.3.2 Hệ quả

- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = \det(A_1 \dots A_i + \alpha A_j \dots A_j \dots A_n)$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots \alpha A_i \dots A_n) = 0$.
- $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$
 - Đổi chỗ chẵn lần $\rightarrow 1$.
 - Đổi chỗ lẻ lần $\rightarrow -1$.

2.3.3 Định lý

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- A khả nghịch $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.4 Định thức con và phần bù đại số

$$i \leq k \leq n$$

Chọn $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ và $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n$

- $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ là định thức con.
- $\overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$
 - Đgl phần bù của $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.
 - Ma trận sau khi bỏ hàng i_k và cột j_k từ $D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$.
- Lấy theo cột, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{D_1^j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{D_2^j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \overline{D_n^j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- Lấy theo hàng, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \overline{D_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}}$$

Với $k = 1$,

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{D_i^1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \overline{D_i^2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \overline{D_i^n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{D_i^j}$$

- **Note**

- Ưu tiên chọn cột (hoặc hàng) nhiều 0. Nếu không có 0 \rightarrow kết hợp các tính chất, định lý và hệ quả trước đó \rightarrow sinh ra 0.
- Không được dùng $h_i \leftarrow \alpha h_i$ ($h_i \leftrightarrow h_j$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ thì nhớ hệ quả đổi dấu).
- Chọn cột để biến đổi thành “0 … 1” thì dùng phép biến đổi trên hàng và ngược lại.

2.5 Ứng dụng

2.5.1 Khả nghịch

- A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

trong đó, A ma trận vuông cấp n và

$$\text{adj}(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \text{cof}(A)$$

trong đó, c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{D_i^j}$$

Thuật toán xác định ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức

B1. Tính c trên hàng (hoặc cột)

B2. Áp dụng công thức tính $\det(A)$ trên hàng (hoặc cột) bằng công thức

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

B3. (Check khả nghịch)

- Nếu $\det(A) = 0 \rightarrow$ không khả nghịch và kết thúc.
- Nếu $\det(A) \neq 0 \rightarrow A$ khả nghịch và chuyển sang bước 4 (nếu cần tính ma trận nghịch đảo)

B4. Tính hết tất cả c còn lại $\rightarrow \text{adj}(A) = C$

B5. Tìm A^{-1} bằng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A))^T = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

2.5.2 Hạng

Thuật toán xác định hạng của ma trận bằng định thức

B1. Tính định thức cấp $1, 2, \dots, n$

B2. (Kết luận hạng)

- Nếu định thức cấp $i \neq 0 \rightarrow$ (hàng (hoặc cột) độc lập tuyến tính \rightarrow dạng bậc thang 100% có n hàng $\neq 0$) $\rightarrow \text{rank}(A) \geq i$
- Nếu định thức cấp $i = 0 \rightarrow \text{rank}(A) = i$

3 Hệ phương trình tuyến tính

- $m, n \in \mathbb{N}$, trong đó, m phương trình, n ẩn, ta có hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- trong đó
 - a_{ij} là hệ số.
 - b_i là hệ số tự do.
 - x_j là ẩn của hệ.
- Bộ số (c_1, c_2, \dots, c_n) là nghiệm của (1) nếu thay vào (1) thoả tất cả phương trình.
- Giải hệ (1) \rightarrow tìm tập nghiệm của (1).
- Hệ pt có nghiệm đgl hệ tương thích.
- Ma trận hệ số của (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Cột ẩn

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Cột hệ số tự do

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Ta viết gọn

$$AX = b$$

- Ma trận đầy đủ (ma trận bổ sung) k/h

$$A^* = (A|b)$$

3.1 Sự tồn tại và tính duy nhất

- $A^* = (A|b) \rightarrow (S|c)$, trong đó S là dạng bậc thang (hoặc dạng rút gọn) của ma trận A^*
- **Điều kiện nghiệm:**
 - Vô nghiệm $\rightarrow \exists$ hàng có dạng $(0 \dots 0|c)$, $c_i \neq 0$.
 - Vô số nghiệm \rightarrow Phần tử chính $<$ Số ẩn.
 - Có nghiệm duy nhất \rightarrow Phần tử chính $=$ Số ẩn.
- **Định lý Kronecker - Capelli**
 - Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \text{rank}(A) < \text{rank}(A^*)$.
 - Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A^*)$:
 - * Có nghiệm duy nhất $\rightarrow \text{rank}(A) = \text{Số ẩn}$.
 - * Vô số nghiệm $\rightarrow \text{rank}(A) < \text{Số ẩn}$.
- **Ẩn phụ thuộc** \rightarrow Là ẩn nằm trong cột chứa PTC trong dạng bậc thang (rút gọn).
- **Ẩn tự do (độc lập)** \rightarrow Các ẩn còn lại.

Note

- Ta kết luận nghiệm theo kiểu
 - $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
 - $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
 - $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \vdots \\ x_n = 3 \end{cases}$
- Nghiệm riêng \rightarrow Đề cho sẵn ẩn tự do bằng mây.
- Nghiệm tổng quát \rightarrow Không cho sẵn ẩn tự do bằng mây.

3.2 Thuật toán Gauss

- Đưa về A^*
- Đưa $A^* \rightarrow (S|c)$ (Bậc thang)
- (Check tồn tại nghiệm)
 - Nếu không có nghiệm \rightarrow Kết luận.
 - Nếu có nghiệm \rightarrow Dạng rút gọn \rightarrow KL nghiệm.

3.3 Quy tắc Cramer

- HỆ $AX = b$ đgl **HỆ Cramer** nếu
 - A vuông
 - A Khả nghịch

Do đó,

$$X = A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} C^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay $1 \leq j \leq n$

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} (b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + \dots + b_n c_{nj})$$

$$A_j(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & b_m & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Do đó ta có

$$D_j = \det(A_j(b)) = b_1 c_{1j} + \dots + b_m c_{mj}$$

nghiệm của hệ là

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad 1 \leq j \leq n$$

- **Điều kiện nghiệm:**

- Nghiệm duy nhất $x_j = \frac{D_j}{D} \rightarrow D \neq 0$.
- Vô nghiệm $\rightarrow D = 0 \wedge \exists D_j \neq 0$.
- Không kết luật gì về tương thích hệ $\rightarrow D = 0 \wedge \forall D_j = 0$.

Thuật toán tìm nghiệm của hệ bằng quy tắc Cramer

B1. Tìm D và D_j , $1 \leq j \leq n$

B2. (Check điều kiện nghiệm)

- Nếu $D \neq 0 \rightarrow$ KL nghiệm duy nhất $x_j = \frac{D_j}{D}$, $1 \leq j \leq n \rightarrow$ Kết thúc.
- Nếu $D = 0 \rightarrow$ Sang bước tiếp theo

B3. (Check trường hợp)

- Nếu $\exists D_j \neq 0 \rightarrow$ KL vô nghiệm \rightarrow Kết thúc.
- Nếu $\forall D_j = 0 \rightarrow$ KL rằng ta không kết luật gì về tương thích hệ \rightarrow Kết thúc.

Note

- Nếu đề hỏi tìm tham số sao cho hệ có nghiệm thì ta tìm trường hợp vô số và nghiệm duy nhất.

3.4 Hệ thuần nhất

- Hệ thuần nhất là hệ (2) như sau

$$AX = 0$$

- Nghiệm tầm thường $\rightarrow X = 0 \rightarrow \text{rank}(A) = n$.
- Vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - \text{rank}(A) \rightarrow \text{rank}(A) < n$.

- **Nhận xét**

- Nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của (2) $\rightarrow tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ là nghiệm của (2).
- Nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là nghiệm của (2) $\rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ là nghiệm của (2).
- A có $m < n \rightarrow$ Vô số nghiệm.

4 Không gian Vector

- $V \neq \emptyset$ đgl 1 **không gian vector** \Rightarrow được trang bị 2 phép toán:
 - Cộng vector $+ : V \times V \rightarrow V, (u, v) \mapsto u + v$.
 - Nhân vô hướng $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, (\alpha, u) \mapsto \alpha u$.
- Thoả mãn các tiên đề sau:

- (1) $(u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in V$
- (2) $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V$
- (3) $\exists 0 \in V : u + 0 = u, \quad \forall u \in V$
- (4) $\forall u \in V, \exists u' \in V : u + u' = 0$
- (5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$
- (6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$
- (7) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$
- (8) $1u = u, \quad \forall u \in V$

- **Note:**

- **K-Không gian vector** \leftrightarrow Không gian vector trên trường \mathbb{K} .

- V là không gian vector trên trường $\mathbb{K} \leftrightarrow v \in V$ là 1 **vector**.
- $\alpha \in \mathbb{K} \rightarrow$ đgl 1 **vô hướng**.
- 0 trong (3) \rightarrow đgl **vector 0**.
- $\forall u \in V, u'$ trong (4) \rightarrow đgl vector đối của vector u , $u' = -u$.

4.1 Tính chất

Cho V là 1 không gian vector

- Vector 0 là duy nhất.
- $\forall u \in V, -u$ là duy nhất.
 - $u - v = u + (-v)$.
- Giảm ước:
 - $u + w = v + w \Rightarrow u = v$.
 - $u + v = w \Rightarrow u = w - v$.
- $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = 0$.
- $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$.
- $\forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ (0 bên dưới là vector 0)
 - $0u = 0$.
 - $\alpha 0 = 0$.
- **Note:**
 - Để c/m **tính duy nhất** \rightarrow ta c/m cả 2 thoả cùng 1 tính chất.

4.2 Ví dụ minh họa

- **VD1**

$V = \{ \text{Vector tự do trong mặt phẳng} \}, +, .$ là 1 không gian vector.

- **VD2**

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

là 1 không gian vector.

- **VD3**

$$n \geq 1, \mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

là 1 không gian vector.

- **VD4**

$M(m \times n, \mathbb{K})$, $+, .$ là không gian vector.

- **VD5**

$\mathbb{K}[x]$ là tập các đa thức biến x hệ số trong \mathbb{K} . $\mathbb{K}[x]$ là không gian vector trên \mathbb{K} với phép cộng các đa thức và phép nhân 1 số với đa thức. (0 là đa thức không)

- **VD6**

Tập các hàm thực xác định trên \mathbb{R} là \mathbb{R} -không gian vector với

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- **VD7**

\mathbb{K} là 1 không gian vector với các phép toán thông thường trên $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

- **VD8**

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ là \mathbb{Q} -không gian vector.

4.3 Độc lập tuyến tính & phụ thuộc tuyến tính

Cho $S \subset V$ với V là không gian vector.

4.3.1 Tổ hợp tuyến tính

- **Tổ hợp tuyến tính** của các vector trong S là tổng hữu hạn

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n, \quad a_i \in \mathbb{K}, u_i \in S.$$

4.3.2 Biểu thị tuyến tính

- Cho $v \in V$, **Biểu thị tuyến tính** là

$$v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_ku_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{K}, u_k \in S.$$

- **VDMH**

$\mathbb{R}^3 = S = \{x_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 2, 3), u_3 = (2, 4, 1)\}, v = (1, 2, 2), w = (0, 0, -3)$, v và w biểu thị tuyến tính được qua S không?

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

$$(1, 2, 3) = x_1($$

4.3.3 Phụ thuộc tuyến tính

- S là phụ thuộc tuyến tính nếu

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0) \mid \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0, \quad u_i \in S.$$

4.3.4 Độc lập tuyến tính

- S là độc lập tuyến tính nếu không phụ thuộc tuyến tính, hay

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0) \rightarrow \text{Nghiệm tầm thường.}$$

4.3.5 VDMH

- **VD1**

Trong không gian \mathbb{R}^3 , $S = \{u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (\sim\sim\sim), u_3 = (\sim\sim\sim)\}$

Xét $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$

$$\alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(\sim\sim\sim) + \alpha_3(\sim\sim\sim) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vô số nghiệm} \Rightarrow \text{Phụ thuộc tuyến tính.}$$

- **VD2**

Trong không gian $\mathbb{R}[x]$, $S = \{P_1 = 1 + x + x^3, P_2 = 1 + x + x^2, P_3 = 1 + x, P_4 = x + x^3\}$

Xét $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$

$$x_1(1 + x + x^3) + x_2(\sim\sim\sim) + x_3(\sim\sim\sim) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Có nghiệm } (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \text{Độc lập tuyến tính.}$$

(Note: HPT ở trên được lập ra dựa trên bậc, tức mỗi cột tương ứng với bậc)

4.3.6 Tính chất

- Hệ chỉ gồm 1 vector $\{u\}$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow u = 0$.
- S phụ thuộc tuyến tính
 - \Rightarrow Mọi hệ chứa S phụ thuộc tuyến tính.
 - \Rightarrow Mọi hệ vector chứa vector 0 đều phụ thuộc tuyến tính.
- S phụ thuộc tuyến tính, $S' \supset S \Rightarrow S'$ phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ vô hạn vector S độc lập tuyến tính \Leftrightarrow Hệ con hữu hạn của S độc lập tuyến tính.

4.3.7 Định lý

- Cho $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k \geq 2$, S phụ thuộc tuyến tính

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 1 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \widehat{\alpha_i u_i} + \dots + \alpha_k u_k.$$

- **Cách làm bài tìm tóm hợp tuyến tính**

- B1. Xử lý đến khi ra được hệ phương trình tuyến tính
- B2. Giải ra nghiệm
- B3. Cho 1 ẩn $\neq 0 \rightarrow$ Thu được tóm hợp tuyến tính (VD. $u_1 + u_2 + u_3 = \sim \rightarrow u_1 = \sim$)

- Cho $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $k \geq 2$, $u_i \neq 0$, S phụ thuộc tuyến tính

$$\Leftrightarrow \exists u_i, 2 \leq i \leq k \mid u_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{i-1} u_{i-1}.$$

(Hơn nữa, có thể chọn i sao cho $\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$ độc lập tuyến tính. (Định lý giúp tìm tập hợp độc lập tuyến tính lớn nhất trong 1 tập))

4.4 Cơ sở và số chiều

Cho V là \mathbb{K} -không gian vector và $B \subset V$.

4.4.1 Hệ sinh

- Mọi vector trong V biểu thị tuyến tính được qua $B \Rightarrow$ Hệ vector B đgl **hệ sinh (tập sinh)** của V .

4.4.2 Cơ sở

- $\begin{cases} B \text{ Hệ sinh của } V \\ B \text{ Độc lập tuyến tính} \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vector B là **Cơ sở** của V .

- Note:

- \mathbb{K} -không gian vector, \mathbb{C} -không gian vector có 1 cơ sở là $\{1\}$.
- \mathbb{C} là \mathbb{R} -không gian vector. $z = a + bi = a1 + bi \Rightarrow \{1, i\}$ là 1 hệ sinh. $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b \Rightarrow \{1, i\}$ là độc lập tuyến tính.
- \mathbb{R} là \mathbb{R} -không gian vector với cơ sở là $\{1\}$.
- \mathbb{R} là \mathbb{Q} -không gian vector với cở sở là vô hạn.

VDMH

- **VD1**

$\mathbb{K}^n, \varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, trong đó $e_1 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$\forall x \in \mathbb{K}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\Rightarrow \varepsilon$ là 1 hệ sinh của \mathbb{K}^n (*)

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = 0$$

$\Rightarrow \varepsilon$ độc lập tuyến tính (**)

Từ (*)(**) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 cơ sở của \mathbb{K}^n (và là cơ sở chính tắc của \mathbb{K}^n).

- **VD2**

$M(m \times n, \mathbb{K}), \varepsilon = \{E_{ij}\}_{i=1, m}^{j=1, m}$ trong đó $E_{ij} = \begin{pmatrix} & & \vdots \\ \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$. (C/m tương tự) $\Rightarrow \varepsilon$ là 1 cơ sở của $M(m \times n, \mathbb{K})$.

- **VD3**

$$\mathbb{K}[x], \varepsilon = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}.$$

- **VD4**

$$\mathbb{K}_n[x], \varepsilon = \{1, x, \dots, x^n\}.$$

4.4.3 Độc lập tuyến tính cực đại

Cho $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$

- Nếu $\begin{cases} S \text{ Độc lập tuyến tính} \\ S \subsetneq S', S' \text{ Phù thuộc tuyến tính} \end{cases} \Rightarrow S \text{ Độc lập tuyến tính cực đại.}$

Định lý Cho $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

- Cho $S \subset V$, các mệnh đề sau là \Leftrightarrow :
 - Hệ S là 1 **Cơ sở** của V .
 - Hệ S là Hệ vector **Độc lập tuyến tính cực đại** của V .
 - \forall vector của V đỀ **Biểu thị tuyến tính** được 1 cách **duy nhất** qua hệ S .
- S là **hệ sinh** của V nếu (1 trong 2 thoả):
 - $\exists u_i, 1 \leq i \leq m$ **Tổ hợp tuyến tính** của các vector còn lại trong $S \Rightarrow (S' = S \setminus \{v\})$.
 - $(V \neq \{0\}) \Rightarrow V \exists 1 \text{ Cơ sở } \subset S$.

- **Bố đề:**

- Không gian vector V có 1 **cơ sở** gồm n vector $\Rightarrow \forall$ hệ **Độc lập tuyến tính** trong V đều chứa không quá n vector.

- **Note:**

- Cách chứng minh $A \Rightarrow B$:
 - * B1. Đặt A là giả thuyết $\rightarrow (1)$
 - * B2. Xác định điều kiện để có được B (từ tiên đỀ/dịnh lý/tính chất/...) $\rightarrow (2)$
 - * B3. C/m (1) $\Rightarrow (2) \rightarrow$ C/m xong.
- Cách biểu diễn **duy nhất**:

- * B1. Đặt Biểu diễn A = Biểu diễn B
- * B2. C/m Hệ số của Biểu diễn A = Hệ số của Biểu diễn B \rightarrow C/m xong.
- Cách xây dựng **cơ sở**:
 - * C1. Từ độc lập tuyến tính \rightarrow Thêm vào \rightarrow Độc lập tuyến tính cực đại.
 - * C2. Từ hệ sinh \rightarrow Bỏ bớt ra \rightarrow Hệ sinh cực tiểu.

4.4.4 Số chiều

$\dim_{\mathbb{K}} V = n \Leftrightarrow V$ có 1 cơ sở gồm n vector.

- $V \neq \{0\}$, V không có cơ sở nào gồm hữu hạn vector $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V = \infty$.
- Note: Mọi cơ sở của V đều có cùng số vector (số chiều là số vector trong cơ sở).
- $\dim\{0\} = 0$.

VD

- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(M(m \times n, \mathbb{K})) = mn$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$.
- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}) = 2$.
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}) = 1$.

Định lý

- $V \neq \{0\}$ đgl không gian hữu hạn sinh (nghĩa là có 1 tập sinh gồm hữu hạn vector) $\Rightarrow V$ có 1 cơ sở gồm hữu hạn vector.

Tính chất

Mệnh đề 1

- $V \neq \{0\}$ (tương tự)

Mệnh đề 2

V là KG vector n -chiều, $\beta = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ (Các mệnh đề sau tương đương)

- β là cở sở của V .
- β là hệ sinh của V .
- β độc lập tuyến tính.

4.5 Toạ độ

- Cố định thứ tự của $B \Rightarrow B = (u_1, \dots, u_n)$ là **cơ sở sắp thứ tự**.
- $B = (u_1, \dots, u_n)$ là cơ sở sắp thứ tự của \mathbb{K} -KG vector V

$$\forall v \in V, v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

- $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ đgl **toạ độ** của v đối với cơ sở B . K/h:

$$- (v)_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$- [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$- v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

VD: Tìm toạ độ (4.7a)

$$((2, 3, 1))_B = (x_1, x_2, x_3)$$

$$(2, 3, 1) = x_1(-1, 2, 4) + x_2(\sim) + x_3(\sim)$$

$$\begin{cases} \sim = 2 \\ \sim = 3 \\ \sim = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{19}{3} \\ x_2 = -11 \\ x_3 = \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow ((2, 3, 1))_B = \left(-\frac{19}{3}, -11, \frac{20}{3}\right).$$

4.5.1 Tính chất

Cho $B = (u_1, \dots, u_m)$ là cơ sở của V , $v \in V$, $(v)_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $[0] = 0$

- $\forall u, v \in V \quad [u_v]_B = [u]_B + [v]_B$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad [\alpha u]_B = \alpha[u]_B$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad [\alpha u + \beta v]_B = \alpha[u]_B + \beta[v]_B$.
- $[\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n]_B = \alpha_1[u_1]_B + \dots + \alpha_n[u_n]_B$.

4.5.2 Mệnh đề

Cho B là 1 cơ sở của V , $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$.

- S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \{[v_1]_B, \dots, [v_k]_B\}$ độc lập tuyến tính.
- S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \text{rank}([v_1]_B \dots [v_k]_B) = k$.

4.5.3 Định lý

Cho B và C là 2 cơ sở của V

- \exists duy nhất ma trận A vuông, khả nghịch sao cho

$$[v]_B = A[v]_C, \forall v \in V$$

- A đgl **ma trận chuyển cơ sở** từ B sang C , $[v]_B = A[v]_C$ là công thức đổi toạ độ

$$A = P_{B,C} = ([v_1]_B \dots [v_n]_B)$$

4.6 Không gian con - Hạng của hệ vector

Cho $\emptyset \neq E \subset V$ -KG vector

- E là KG vector cùng với 2 phép toán trên $V \Rightarrow E$ là **KG con** của V .

VD

- V là KG vector
 - $\{0\}$ là KG con của V đgl KG con tầm thường.
 - $V \subset V$.
- $\mathbb{R}^3 \quad P = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ là 1 KG con của \mathbb{R}^3 .
- $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$.

4.6.1 Định lý

Cho $\emptyset \neq E \subset V$ -KG vector, E là KG con của $V \Rightarrow$ thoả điều kiện sau:

- $u + v \in E, \quad \forall u, v \in E$.
- $\alpha u \in E, \quad \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

hoặc

- $(\alpha u + \beta v) \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$.

VD

Cho $\mathbb{Q} = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$. C/m \mathbb{Q} là KG con của \mathbb{R}^3 .

Ta có $0 - 20 + 0 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$\forall u = (x, y, z), v = (a, b, c) \Rightarrow x + 2y + z = 0$ và $a + 2b + c = 0$

Xét $u + v = (x + a, y + b, z + c)$

$$(x + a) - 2(y + b) + (z + c) = (x - 2y + z) + (a - 2b + c) = 0 \Rightarrow u, v \in \mathbb{Q}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u = (x, y, z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - 2y + z = 0$

Xét $\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Vì $\alpha x - 2\alpha y + \alpha z = \alpha(x - 2y + z) = 0 \Rightarrow \alpha u \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ KG con của \mathbb{R}^3 .

- Note: Cho 3 toạ độ nếu đi qua gốc toạ độ \Rightarrow KG con (hình dung hình học).

4.6.2 Mệnh đề

- Nếu E là KG con của V
 - $\dim V < \infty \Rightarrow \dim E < \infty \wedge \dim E \leq \dim V$.
 - $\dim E = \dim V \Rightarrow E = V$.
- $\{v_i\}_{i \in I}$ v_i là KG con của $V, \forall i \in I$.
- $\bigcup_{i \in I} v_i$ là KG con của V .

4.6.3 Span

- Cho X là tập con của \mathbb{K} -KG vector V , giao của tất cả các KG con của $V \supset X$ là 1 KG con của $V \supset X$, đgl **KG con của V sinh bởi X** .
- K/h: $\mathcal{L}(X) = \text{Span}(X) = \text{Sp}(X)$.
- **Note**
 - $\mathcal{L}(\{0\}) = \{0\}$.
 - $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$.
 - $\mathcal{L}(X)$ là KG con nhỏ nhất của $V \supset X$.
 - $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$.
 - Nếu E là KG con của V , $\mathcal{L}(E) = E$.

Định lý

- Cho $X \subset V$, khi đó

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{\text{hữu hạn}} \alpha_i u_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, u_i \in X \right\} = \text{Span}(X).$$

- Hạng của hệ vector X là số chiều KG con sinh bởi X

4.7 Không gian hàng, cột, nghiệm

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$

- $\text{Row}A = \text{Span}\{m \text{ hàng của } A\} \subset \mathbb{K}^n$.
- $\text{Col}A = \text{Im}A = \text{Span}(A_1, A_2, \dots, A_n) \subset \mathbb{K}^m$.
- $\text{Nul}A = \text{Ker}A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.

4.7.1 Mệnh đề

Cho A là ma trận cỡ $m \times n$

$$\dim A(\text{Row}A) = \dim(\text{Col}A) = r(A).$$

$$n = \text{rank}A + \dim(\text{Nul}A).$$

- Note: Hỏi số chiều \rightarrow thoái mái, hỏi cơ sở \rightarrow tìm hết.

4.7.2 VDMH

VD1

Tìm cơ sở (bài 4.23a)

Ta có $A = \begin{pmatrix} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \end{pmatrix}$

$\text{Col}A$ sinh bởi A_1, A_2, A_3, A_4

Xét $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + \sim -4x_4 = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \\ \sim\sim\sim = 0 \end{cases} \rightarrow \text{giải ra dạng bậc thang} \Rightarrow \text{Phụ thuộc tuyến tính.}$$

$\Rightarrow \{A_1, A_2\}$ là cơ sở của $\text{Col}A$

\Rightarrow row có cơ sở là $\{(1, -2, 1, 2), (0, -2, -5, -3)\}$ (Hàng chứa PTC trong dạng bậc thang)

$x \in \text{Nul}A \Leftrightarrow Ax = 0$

$$A \rightarrow \text{dạng rút gọn } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Có nghiệm } X = (\sim, \sim, \sim, \sim) \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Đặt $x_3 = 1, x_4 = \sim \Rightarrow X = \{(\sim, \sim, \sim, \sim), (\sim, \sim, \sim, \sim)\}$ là cơ sở của $\text{Nul}A$ (Không gian nghiệm).

- **Note:** Để kiểm tra không gian con hay không có thể dùng cách này trừ dạng đa thức với ma trận.

VD2 4.4.12 (Giáo trình)

(i) C/m H là kgian con của \mathbb{R}^3

$\forall u \in H, \exists a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$u = \begin{pmatrix} a - 2b + c \\ a + b - c \\ -3b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Col}A \Rightarrow H \subset \text{Col}A$$

$H \subset \text{Col}A, \forall u \in \text{Col}A \rightarrow Ax = u$ có nghiệm

$$\rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ sao cho } u = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ \sim \end{pmatrix} \in H \Rightarrow \text{có } \text{Col}A \subset H \Rightarrow H = \text{Col}A.$$

(ii)

$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \sim & \sim & \sim \\ \sim & \sim & \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Bu^T \Rightarrow u \in \text{Nul}B$$

4.8 Tổng & TỔNG trực tiếp

- $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ là **KG tổng** của V_1, V_2, \dots, V_m .
- **Tổng** $V_1 + \dots + V_m$ đgl **tổng trực tiếp** nếu $\forall v \in V_1 + \dots + V_m$ đều có duy nhất 1 cách phân tích $V = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}, \forall u_i \in V_i$, k/h: $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$.

4.8.1 Mệnh đề

Cho V_1, V_2, \dots, V_m là các KG con của \mathbb{K} -KG vector V

$$V_1 + V_2 + \dots + V_m = \{u_1 + u_2 + \dots + u_m \mid u_i \in V_i\}$$

là 1 KG con của V .

4.8.2 Định lý

Tổng $V_1 + \dots + V_m$ là tổng trực tiếp nếu 1 trong 2 điều kiện tương đương sau thoả:

- $V_j \cap (\sum_{i \neq j} V_i) = \{0\} \quad 1 \leq j \leq m.$
- $V_j \cap (\sum_{i > j} V_i) = \{0\} \quad 1 \leq j \leq m - 1.$

4.8.3 Số chiều không gian tổng

Định lý Cho V_1, V_2 là 2 KG con của V

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Hệ quả

- $V_1 = \text{Sp}(S_1), V_2 = \text{Sp}(S_2) \Rightarrow V_1 + V_2 = \text{Sp}(S_1 \cup S_2).$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$

5 Ánh Xạ Tuyến Tính

- Cho U và V là các \mathbb{K} -KGVT, Ánh xạ $f : U \rightarrow V$ đgl **AXTT** nếu:
 - $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in U.$
 - $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in U.$
- **Định lý:** Cho U và V là các \mathbb{K} -KGVT, Ánh xạ $f : U \rightarrow V$ đgl **AXTT** nếu

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U$$

- **Tính chất**

- $f(0_V) = 0_V.$
- $f(-u) = -f(u).$
- $f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_k f(u_k).$

- **Mệnh đề:** U, V, W là \mathbb{K} -KGTV, ta có:

$$\begin{aligned} f : U \rightarrow V, \quad u \mapsto f(u), \\ g : V \rightarrow W, \quad v \mapsto g(v), \\ g \circ f : U \rightarrow W, \quad u \mapsto g(f(u)). \end{aligned}$$

- **Định lý về Sự xác định của AXTT:** Cho U, V là các \mathbb{K} -KGTV, (u_1, \dots, u_n) là 1 cơ sở của $U, v_1, \dots, v_n \in V$, khi đó $\exists!$ AXTT $f : U \rightarrow V$ thoả

$$f(u_i) = v_i, 1 \leq i \leq n.$$

5.1 Đơn cấu, Toàn cấu, Đẳng cấu

- **Định nghĩa:** u, v là các \mathbb{K} -KGTV $f : U \rightarrow V$, gọi là **đồng cấu**, ta có, f :
 - Đơn ánh \rightarrow **Đơn cấu**.
 - Toàn ánh \rightarrow **Toàn cấu**.
 - Song ánh \rightarrow **Đẳng cấu**. U đẳng cấu với V k/h: $U \cong V$.
- **Nhận xét:**
 - $U \cong U$.
 - $U \cong V \rightarrow V \cong U$.
 - $U \cong V, V \cong W \rightarrow U \cong W$.

Tính chất Đồng cấu

- **Định lý:** $f : U \rightarrow V$ là đồng cấu, $s = \{u_1, \dots, u_k\}$ Phụ thuộc tuyến tính trong $U \Rightarrow f(s) = \{f(u_1), \dots, f(u_k)\}$ Phụ thuộc tuyến tính trong V .
 - f đơn cấu $\Leftrightarrow (s$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow f(s)$ Độc lập tuyến tính, $\forall s)$.
 - f toàn cấu $\Leftrightarrow (s$ hệ sinh của $U \Rightarrow f(s)$ là hệ sinh của $V)$.
 - f đẳng cấu $\Leftrightarrow (s$ là cơ sở của $U \Rightarrow f(s)$ là cơ sở của $V)$.

5.2 Nhân và Ảnh (Kernel và Image)

- **Định nghĩa:** Cho $f : U \rightarrow V$ là AXTT, E là KG con U , F là KG con V . $f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}, f^{-1}(F) = \{u \in U \mid f(u) \in F\} \subset U$
 - **Ảnh** của f là $f(U) = \text{Im } f$.
 - **Nhân** của f là $f^{-1}(\{0_V\}) = \text{Ker } f$.
- **Định lý:** Cho $f : U \rightarrow V$ là AXTT, E là KG con U , F là KG con V
 - $f(E)$ là KG con V .
 - $f^{-1}(F)$ là KG con U .
- **Hệ quả:** Cho $f : U \rightarrow V$ là AXTT
 - $\text{Im } f$ là 1 KG con của V .
 - $\text{Ker } f$ là 1 KG con của U . ($f(U) = 0$)

- **Định lý:** Cho $f : U \rightarrow V$ là đẳng cấu
 - f là đơn cấu $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_U\}$.
 - f là toàn cấu $\Leftrightarrow \text{Im } f = V$.
- **Định lý:** Cho $f : U \rightarrow V$ là AXTT
 - f đơn cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim U$.
 - f toàn cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim V$.
 - f đẳng cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim U = \dim V$.
- **Định lý về hạng của AXTT:** Cho $f : U \rightarrow V$ là AXTT, khi đó

$$\dim U = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rank}(f)$$

5.3 Ma trận của AXTT

- **Định lý:** Cho U, V là các KGVT, $\dim U = n, \dim V = m$, \mathcal{B} là cơ sở của U , \mathcal{C} là cơ sở của V .
 - \forall AXTT $f : U \rightarrow V, \exists!$ ma trận $A_{m \times n}$ sao cho $[f(u)]_{\mathcal{C}} = A[u]_{\mathcal{B}}, \forall u \in U$.
 - $\forall A_{m \times n}, \exists!$ AXTT $f : U \rightarrow V$ thoả ở trên.
- Note: $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$. $\text{Im } f = \text{Col } A$, $\text{Ker } f = \text{Nul } A$.
- **Định nghĩa:** giáo trình
- **Mệnh đề:** giáo trình

$$[f]_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = Q^{-1}[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}P$$

- **Định lý:** Cho A ma trận đẳng cấu $f : U \rightarrow V$

$$\text{Im } f \cong \text{Col } A, \text{Ker } f \cong \text{Nul } A \Leftrightarrow \text{rank } f = \text{rank } A$$

- **Hệ quả:** f Đẳng cấu $\Leftrightarrow A$ Khả nghịch.

5.4 Không gian các đồng cấu

- **Định nghĩa:** Cho U, V là các \mathbb{K} -KGVT, **Không gian các đồng cấu** k/h: $\text{Hom}(U, V) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V) \neq \emptyset$, $\text{Hom}(U, V)$ là KGVT với 2 phép toán:
 - Phép cộng: $\forall f, g \in \text{Hom}(U, V)$
 - * $f + g : U \rightarrow V, u \mapsto f(u) + g(u)$
 - * $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$.
 - Phép nhân: $\forall u \in \mathbb{K}, \forall f \in \text{Hom}(U, V)$
 - * $\alpha f : U \rightarrow V, u \mapsto \alpha f(u)$
 - * $(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$

5.4.1 Cấu trúc không gian đồng cấu

- **Định lý:** $\dim U = n, \dim V = m$
 - $\text{Hom}(U, V) \cong M(m \times n, \mathbb{K})$.
 - $\text{End}(V) \cong M(n \times n, \mathbb{K})$. $\text{GL}(U) \cong \text{GL}_n(\mathbb{K})$. (general linear group)
$$f : U \rightarrow V, \quad u \mapsto f(u),$$
- **Mệnh đề:** $g : V \rightarrow W, \quad v \mapsto g(v), \quad$, Gọi \mathcal{B} là cơ sở của U , \mathcal{C} là cơ sở của V , \mathcal{D} là cơ sở của W .
$$g \circ f : U \rightarrow W, \quad u \mapsto g(f(u)),$$

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$$

6 Chéo hoá ma trận

6.1 Giá trị riêng & Vector riêng

- **Định nghĩa:** Cho A vuông cấp n , \exists vector $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$$Au = \lambda u$$

- Giá trị λ đgl **giá trị riêng** của A .
- Vector u đgl **vector riêng** của A ứng với λ .
 - * $A(\alpha u) = \alpha(Au) = A(\alpha u), \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
 - * $A(u + v) = Au + Av = Au + \lambda v = \lambda(u + v), \forall v \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
 - * $Au = \lambda u, Au = \mu u \Rightarrow \lambda u = \mu u \Leftrightarrow (\lambda - \mu)u = 0$.

- **Thuật toán tìm giá trị riêng, vector riêng**

- B1. $P_A(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$.
- B2. Giải $P_A(x) \rightarrow$ nghiệm x , với từng nghiệm x tương ứng với từng λ
- B3. Thay λ vào $(A - \lambda I_n) = 0 \rightarrow$ giải tìm nghiệm của X .
- B4. Lặp lại đến khi ko còn λ nào \rightarrow kết luận \rightarrow với mỗi λ là giá trị riêng, X là các vector riêng của A ứng với $\lambda \rightarrow$ kết thúc.

- **Định lý:** A có k giá trị riêng khác nhau ($k \leq n$) $\Rightarrow k$ vector riêng tương ứng *độc lập tuyến tính*.
- **Định nghĩa:** Cho A vuông cấp n , \exists ma trận P vuông cấp n và ma trận chéo D cấp n sao cho

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$$

- A đgl **ma trận chéo hoá được**.
- P đgl **ma trận chéo hoá** A .

- D đgl **dạng chéo** của A .
- **Định lý:** $A_{m \times n}$ chéo hoá được $\Leftrightarrow A$ có n vector riêng *độc lập tuyến tính*.

6.2 Ma trận chéo hoá được

- E_λ đgl **không gian riêng** của A ứng với λ

$$E_\lambda = \{\lambda \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)X = 0\} = \text{Nul}(A - \lambda I)$$

- **Mệnh đề:** A có k giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \Rightarrow E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_k}$ là **tổng trực tiếp**.
- **Định lý:** A có k giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \Rightarrow A$ chéo hoá được \Leftrightarrow
 - $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} = \mathbb{K}^n$
 - $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = n$
 - $\sum_{i=1}^k \dim(\text{Nul}(A - \lambda_i I)) = n$
- **Thuật toán xác định chéo hoá ma trận**
 - B1. (Thuật toán tìm giá trị riêng, vector riêng) $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \rightarrow$ vector u_1, u_2, \dots, u_k tương ứng với từng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \rightarrow$ **số chiều** của cơ sở không gian riêng E_i (Bắt đầu với E_0) tương ứng với từng vector u_1, u_2, \dots, u_k
 - B2. (Check chéo hoá)
 - * $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = n \rightarrow A$ Chéo hoá được \rightarrow B3
 - * $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) \neq n \rightarrow A$ Không chéo hoá được \rightarrow Kết thúc
 - B3. (Kết luận ma trận P và D)
 - * Từ vector $u_1, u_2, \dots, u_k \rightarrow$ hợp các vector lại thành 1 ma trận (theo cột) $\rightarrow P$.
 - * Tương ứng với giá trị λ_i của u_i trong cột trong $P \rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$.

6.3 Tự đồng cấu

6.3.1 Giá trị riêng và vector riêng

- **Định nghĩa:** $f : V \rightarrow V$ là tự đồng cấu, $\exists v \in V \setminus \{0\}$

$$f(v) = \lambda v$$

- λ đgl **giá trị riêng** của f .
- v đgl **vector riêng** của f ứng với λ .
- **Mệnh đề:** \mathcal{B} là cơ sở của \mathbb{K} -KGVT V , $A = [f]_{\mathcal{B}}$
 - λ là giá trị riêng của $f \Leftrightarrow \lambda$ là giá trị riêng của A .
 - v là vector riêng của f ứng với $\lambda \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$ là vector riêng của A ứng với λ .

- **Note:** Để tìm vector riêng của f ta tìm $X = (\dots, \dots, \dots)$ như thông thường rồi lấy tổng của tích với từng v_i tương ứng ($v = \dots v_1 + \dots v_2 + \dots v_3 + \dots$)

6.3.2 Chéo hoá

- **Định nghĩa:** $f : V \rightarrow V$ là tự đồng cấu, \exists cơ sở \mathcal{C} của V sao cho $[f]_{\mathcal{C}}$ là ma trận chéo $\Rightarrow f$ đgl chéo hoá **được**.
- **Note:**
 - $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3) \rightarrow$ Thuật toán tìm giá trị riêng, vector riêng $\rightarrow X \rightarrow p_1 = (\dots, \dots, \dots), p_2 = \dots, p_3 = \dots \rightarrow$ Cơ sở $\mathcal{C} = (..u_1 + ..u_2 + ..u_3, ..u_1 + ..u_2 + ..u_3, \dots) \rightarrow [f]_{\mathcal{C}} =$ ma trận giống ma trận D .

7 Không gian vector Euclide

- \mathbb{E} là \mathbb{R} -KGVT, tích vô hướng trên \mathbb{E} là 1 ánh xạ $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả:
 - **Song tuyến tính:** $f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 f(u_1, v) + \alpha_2 f(u_2, v)$
 - **Đối xứng:**
 - **Xác định dương:**