

# Cấu trúc rời rạc

October 19, 2025

## 1 Cơ sở Logic

### 1.1 Phép toán

#### 1.1.1 Phủ định

$P$	$\neg P$
0	1
1	0

#### 1.1.2 Hội (và)

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

#### 1.1.3 Tuyển (hoặc)

$P$	$Q$	$P \vee Q$
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
0	1	1
1	0	1
1	1	1

#### 1.1.4 Kéo theo

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
1	1	1

### 1.1.5 Tương đương (Nếu và chỉ nếu)

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

## 1.2 Dạng mệnh đề

- Sơ cấp
- Hằng đúng
- Hằng sai

## 1.3 Tương đương logic & Hệ quả logic

### 1.3.1 Tương đương logic

- $P, Q \rightarrow$  công thức ...
- $P \Leftrightarrow Q (P \equiv Q, P = Q)$  đgl tương đương logic.
- $P \leftrightarrow Q$  đgl hằng đúng.

### 1.3.2 Hệ quả logic

- $P \Rightarrow Q$  đgl hệ quả logic.
- $P \rightarrow Q$  đgl hằng đúng.

#### Note

- $C/m P \Rightarrow Q \rightarrow c/m P \rightarrow Q$  chân trị 1.

## 1.4 Quy luật logic

Luật	Công thức
Phủ định của phủ định	$\neg\neg P \equiv P$
De Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Giao hoán	$P \vee Q \equiv Q \vee P \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Kết hợp	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Phân phối	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Lũy đẳng	$P \wedge P \equiv P \quad P \vee P \equiv P$
Trung hoà	$P \wedge 1 \equiv P \quad P \vee 0 \equiv P$
Phần tử bù	$P \wedge \neg P \equiv 0 \quad P \vee \neg P \equiv 1$
Thống trị	$P \wedge 0 \equiv 0 \quad P \vee 1 \equiv 1$
Hấp thụ	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \quad P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

Luật	Công thức
Phản chứng	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

## 1.5 Quy tắc suy diễn

- Khẳng định

$$\frac{P \rightarrow Q, P}{\therefore Q}$$

- Phủ định

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q}{\therefore \neg P}$$

- Tam đoạn luận

$$\frac{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$$

- Tam đoạn luận rời

$$\frac{P \vee Q, \neg Q}{\therefore P}$$

or

$$\frac{P \vee Q, \neg P}{\therefore Q}$$

- Mâu thuẫn

$$P \rightarrow Q \equiv (P \wedge \neg Q) \rightarrow 0$$

trong đó  $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_N$

## 1.6 Vị từ - lượng từ

### 1.6.1 Vị từ

$P(x, y, \dots) \rightarrow P(a, b, \dots)$  có chân trị 0 hoặc 1.

### 1.6.2 Lượng từ

Với mọi

- $\forall$  trong đó  $\wedge$ 
  - **Đúng** với tất cả.

- Sai với một.
- $\neg(\forall x \in A, P(x)) \equiv \exists x \in A, \neg P(x)$

### Tồn tại

- $\exists$  trong đó  $\forall$ 
  - Đúng với một.
  - Sai với tất cả.
- $\neg(\exists x \in A, P(x)) \equiv \forall x \in A, \neg P(x)$

### Đặc biệt hoá phổ dụng

### Tổng quát hoá phổ dụng

### 1.6.3 Quy tắc suy diễn

#### C/m Phản chứng

$$P \Rightarrow Q \equiv (P \wedge \neg Q) \Rightarrow 0$$

#### C/m trực tiếp

#### C/m theo trường hợp (vét cạn)

#### C/m gián tiếp (PC) $P \Rightarrow Q$ và $\neg Q \Rightarrow \neg P$

\$ \neg Q \quad \neg P \quad P \quad Q \$

#### C/m quy nạp

$$\frac{P(n_0), \quad \forall n > n_0, P(n) \rightarrow P(n+1)}{\therefore \forall n \geq n_0, P(n)}$$

B1. C/m  $P(n_0)$  đúng

B2. G/s  $n \in \mathbb{N}$  và  $n \geq n_0$ ,  $P(n)$  đúng. C/m  $P(n+1)$  đúng.

$\Rightarrow P(n)$  đúng  $\forall n \geq n_0$

## 2 Tập hợp - Ánh xạ

### 2.1 Tập hợp

- Cách diễn tả
  - Bằng lời
  - Liệt kê
  - Tính chất đặc trưng

- Lực lượng k/h  $|A|$
- Tích Descarte
  - 2 tập hợp
  - Nhiều tập hợp
- Tập con
  - k/h  $B \subset A \Leftrightarrow \{\forall x|x \in B \Rightarrow x \in A\}$
  - Tập hợp tập con của  $A$  k/h  $P(A)$

### 2.1.1 Phép toán

- Hợp  $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$
- Giao  $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$
- Hiệu  $A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$
- Phần bù  $B \subset A$ , k/h  $\overline{B_A}$  or  $\overline{B}$

### Tính chất

Luật	Công thức
Giao hoán	$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$
Kết hợp	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Phân phối	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Luỹ đẳng	$A \cap A = A \quad A \cup A = A$

## 2.2 Ánh xạ

Ánh xạ bằng nhau

Ảnh

Ảnh ngược

Tính chất

### 2.2.1 Loại

#### Đơn ánh

- Có tối đa 1 nghiệm

$$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

hay

$$\forall x, x' \in X, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$$

- **Không** là đơn ánh (có nhiều hơn 1 nghiệm)

$$\exists x, x' \in X, x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$$

### Toàn ánh

- Luôn có ít nhất 1 nghiệm

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$$

hay

$$\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

- **Không** là toàn ánh (Tồn tại vô nghiệm)

$$\exists y \in Y, f^{-1}(y) = \emptyset$$

hay

$$\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x)$$

### Song ánh

- Vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x)$$

hay

$$\forall y \in Y, f^{-1}(y) \text{ có đúng 1 phần tử}$$

### 2.2.2 Ngược

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, y \mapsto f^{-1}(y) = x, \quad f(x) = y$$

### 2.2.3 Hợp

$$h = g \circ f : X \rightarrow Y \rightarrow Z, x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

- Định lý

$f : X \rightarrow Y$  song ánh

$$f \circ f^{-1} = Id_Y, f^{-1} \circ f = Id_X$$

Trong đó

- $Id_X(x) : X \rightarrow X, \quad Id_X(x) = x$
- $Id_Y(y) : Y \rightarrow Y, \quad Id_Y(y) = y$

### 3 Phương pháp đếm

#### 3.1 Cơ bản

- Cộng
  - Trường hợp
- Nhân
  - Bước
  - Thứ tự không quan trọng
  - Bắt buộc
- Nguyên lý chuồng bồ câu
  - $n$  vật,  $k$  hộp  $\rightarrow \lceil \frac{n}{k} \rceil$  vật trong ít nhất 1 hộp.
- Nguyên lý bù trừ
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

#### 3.2 Hoán vị - Tổ hợp - Chỉnh hợp

- Hoán vị
  - $P_n = n!$
- Tổ hợp
  - $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
  - Không thứ tự, không lặp lại.
- Chỉnh hợp
  - $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
  - Có thứ tự, không lặp lại.

### 3.3 Hoán vị - Tổ hợp - Chỉnh hợp (Lắp)

- Hoán vị lắp

- $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

- Nhóm  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

- Chỉnh hợp lắp

- $\overline{A}_n^k = n^k$

- Tổ hợp lắp

- $\overline{C}_n^k = C_{n+(k-1)}^k$

- Bài toán chia  $k$  vật đồng chất vào  $n$  hộp phân biệt

- \*  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$

- \*  $k \rightarrow$  không phân biệt.

- \*  $n \rightarrow$  phân biệt.

## 4 Hệ thức truy hồi & Hàm sinh

### 4.1 Tuyến tính thuần nhất bậc $k$

(Đề thi sẽ cho (bậc 2, 3 tối đa))

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

- $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$ .

- Các dạng không phải tuyến tính thuần nhất bậc  $k$ :

- $H_n = H_{n-1} + 1$

- $A_n = nA_{n-1}$

- $B_n = 4B_{n-1} - 3B_{n-2}^2$

#### 4.1.1 Phương pháp giải

**Phương pháp thể (giải bậc 1)** B1. Thay  $a_n$  bởi  $a_{n-1}$ ,  $a_{n-1}$  bởi  $a_{n-2}, \dots, a_0$  bởi  $C_0 \rightarrow$  Thu được công thức trực tiếp cho  $a_n$

B2. Chứng minh tính đúng đắn của công thức  $a_n$

**Phương pháp phương trình đặc trưng**



## Bậc 2

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

B1. Tính phương trình đặc trưng  $r^2 = c_1 r + c_2 \rightarrow$  nghiệm  $r$

B2. (Check nghiệm)

- 2 nghiệm phân biệt  $r_1, r_2 \rightarrow a_n = d_1 r_1^n + d_2 r_2^n$
- Nghiệm kép  $r_1 \rightarrow a_n = (d_1 + d_2 n) r_1^n$  và  $a_0 = C_0, a_1 = C_1$

B3. Dùng điều kiện đề cho  $a_0, a_1, \dots \rightarrow d_1, d_2$

B4. Thay  $d_1, d_2$  vào  $a_n$  ở B2 và kết luận.

## Bậc 3 ( $k \geq 3$ ) (tỉ lệ thì thấp)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

B1. Tính phương trình đặc trưng  $r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k$

B2. (Nghiệm tổng quát)

- Nghiệm thực phân biệt  $r_1, r_2, r_k \rightarrow a_n = d_1 r_1^n + d_2 r_2^n + \dots + d_k r_k^n$
- $t$  nghiệm thực phân biệt  $r_1, r_2, \dots, r_t$  tương ứng với bội  $m_1, m_2, \dots, m_t$

$$\rightarrow a_n = (d_{10} + d_{11}n + \dots + d_{1(m_1-1)}n^{m_1-1})r_1^n + \dots + (d_{t0} + d_{t1}n + \dots + d_{t(m_t-1)}n^{m_t-1})$$

## 5 Quan hệ

- $(a, b) \in \mathcal{R}$

$$a\mathcal{R}b$$

- $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \text{ là } \dots b\}$
- $\mathcal{R} = \{(\dots), (\dots), \dots\}$

### 5.1 Các loại quan hệ

#### 5.1.1 Phản xạ

$$(a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in A$$

- Tính chất:
  - $\leq$  Có phản xạ
  - $<$  Không phản xạ
  - $|$  (ước) Có phản xạ

### 5.1.2 Đối xứng

$$\forall a, b \in A$$

$$a\mathcal{R}b \rightarrow b\mathcal{R}a$$

### 5.1.3 Phản xứng

$$\forall a, b \in A$$

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \rightarrow (a = b)$$

### 5.1.4 Bắc cầu

$$\forall a, b, c \in A$$

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \rightarrow a\mathcal{R}c$$

## 5.2 Biểu diễn

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{u, v, w\}, \mathcal{R} = \{(1, u), (1, v), (2, w), (3, w), (4, u)\}$$

Cách biểu diễn

	$u$	$v$	$w$
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, M_{\mathcal{R}} = [m_{ij}]_{m \times n}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & (a_i, b_j) \notin \mathcal{R} \\ 1 & (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \end{cases}$$

- $\mathcal{R}$  quan hệ trên  $A$ , k/h  $M_{\mathcal{R}}$
- Các loại quan hệ:
  - Phản xạ  $\rightarrow m_{ii} = 1$  (đường chéo chính)
  - Đối xứng  $\rightarrow m_{ij} = m_{ji}, \forall i, j$
  - Phản xứng  $\rightarrow m_{ij} = 0 \text{ khi } i \neq j$

### 5.3 Quan hệ tương đương

- Thoả:
  - Phản xứng
  - Đối xứng
  - bắc cầu
- Lớp tương đương,  $\mathcal{R}$  quan hệ tương đương trên  $A, a \in A$  k/h:  $[a]_{\mathcal{R}} = \bar{a} = \{b \in A \mid b\mathcal{R}a\}$
- Định lý:
  - $a\mathcal{R}b \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$
  - $[a]_{\mathcal{R}} \neq [b]_{\mathcal{R}} \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$

### 5.4 Quan hệ thứ tự

- Thoả:
  - Phản xạ
  - Đối xứng
  - bắc cầu
- Tập sắp thứ tự (Poset), k/h:  $(A, <)$
- Sắp thứ tự:
  - Toàn phần
  - Bộ phận
- Trội và Trội trực tiếp
- Tối tiểu và Tối đại
- Phần tử nhỏ nhất và Phần tử lớn nhất