

物理の進化 1
黎明期から解析力学の完成まで

S. Tajima

2018 年 7 月- 2019 年 2 月 (Ver 0.8)

©s.tajima 2019

目次

第 1 章	力学の初期	10
1.1	力学以前の状況	10
1.2	ティコ・ブラーエの考えと業績	11
1.2.1	ティコ・ブラーエの人生	11
1.2.2	ティコ・ブラーエの観測機器	12
1.2.3	ティコ・ブラーエの功績	14
1.3	ケプラー	14
1.3.1	ケプラーの人生	14
1.3.2	ケプラーの第 1、第 2 法則	15
1.3.3	ケプラーの第 1、第 2 法則の論理	16
1.3.4	ケプラーの第 3 法則	18
1.3.5	ケプラー式望遠鏡	18
1.3.6	超新星	18
1.4	三角法	19
1.4.1	三角法の発展	19
1.4.2	三角法の応用	19
1.5	注記	20
1.5.1	ノニウスあるいはバーニア	20
1.5.2	アリストアルコスによる地球、太陽間の距離測定	21
1.5.3	火星軌道の作図	21
1.5.4	参考資料	21
第 2 章	地上から天体、そして運動の力学へ	23
2.1	ガリレオ・ガリレイの考えと業績	23
2.2	ガリレオ・ガリレイの人生	23
2.2.1	パドヴァ大学時代	23
2.2.2	フィレンツェ時代	24
2.2.3	異端審問	25
2.3	ガリレオの設計した機器	25
2.3.1	ガリレオの測温器	25
2.3.2	ガリレオの天秤	26
2.3.3	ガリレオのコンパス	27
2.3.4	ガリレオの望遠鏡、顕微鏡	29
2.4	ガリレオの研究活動	30
2.4.1	観測主体の研究活動	30
2.4.2	思索主体の研究活動	30
2.5	注記	31
2.5.1	眼鏡レンズ	31

2.5.2	参考資料	32
第 3 章	ホイヘンスの時代	33
3.1	幾何学の抱える問題	33
3.2	代数	34
3.3	幾何の代数的解釈	34
3.4	デカルト	35
3.5	ホイヘンス	35
3.5.1	振り子時計	35
3.5.2	望遠鏡光学	36
3.5.3	光の波動説	37
3.5.4	力学	40
3.6	参考資料	41
第 4 章	ニュートン力学の誕生	42
4.1	ニュートン	42
4.2	ニュートン力学の誕生	45
4.2.1	ニュートンの法則	45
4.2.2	ニュートンの法則の大前提	47
4.2.3	ニュートンのプリンキピア	48
4.2.4	ニュートン力学への批判	49
4.3	ライプニッツ	50
4.3.1	ライプニッツの人生	50
4.3.2	ニュートンとライプニッツの争い	51
4.3.3	ライプニッツの微積分	51
4.4	注記	52
4.4.1	ニュートンによるケプラーの法則の証明	52
4.4.2	π について	54
4.4.3	$\varepsilon - \delta$ 論法について	54
4.4.4	参考資料	54
第 5 章	ニュートン力学の応用	56
5.1	放物運動から円運動	56
5.2	非慣性座標系の例	57
5.3	回転座標系	58
5.3.1	角速度、角加速度ベクトル	58
5.3.2	非慣性座標上の運動	59
5.4	静止衛星の軌道	61
5.5	惑星の軌道計算	62
5.5.1	惑星の運動計算	62
5.5.2	惑星の運動計算（別解）	67
5.6	注記	69
5.6.1	非慣性座標の座標変換	69
5.6.2	極座標による円運動表現	71
5.6.3	楕円の中心による表現	72
5.6.4	ニュートンの計算	72

5.6.5	参考資料	74
第 6 章	エネルギー	75
6.1	初期の運動量、エネルギー議論	75
6.2	運動量、エネルギー論争	75
6.2.1	ライプニッツのエネルギー	76
6.2.2	ライプニッツのエネルギーに対する反論	77
6.2.3	ライプニッツのエネルギーについての認識	78
6.3	運動量、エネルギーの測定	78
6.3.1	運動量の測定	79
6.3.2	エネルギーの測定	79
6.3.3	ガウス加速器	80
6.4	運動量とエネルギー	80
6.4.1	運動量	80
6.4.2	運動エネルギー	81
6.5	ポテンシャルエネルギー	82
6.6	運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの応用例	83
6.7	注記	86
6.7.1	参考資料	86
第 7 章	静力学	87
7.1	仕事	87
7.1.1	仕事の定義	87
7.1.2	力の無い状態とつり合い状態	88
7.1.3	つり合い状態の表現	88
7.1.4	仕事をしない力	89
7.2	仮想仕事の原理	90
7.3	仮想仕事の原理の本質	90
7.4	工学からみた仮想仕事の原理	91
7.5	ダランベールの原理	92
7.6	静力学の応用	92
7.7	注記	94
7.7.1	参考資料	94
第 8 章	微分方程式	95
8.1	17 世紀の微積分の概況	95
8.2	多変数の微分	96
8.2.1	1 変数の微分	96
8.2.2	多変数の微分	97
8.3	ベクトルの微分	98
8.3.1	足し算と掛け算	98
8.3.2	ベクトルの掛け算	99
8.3.3	ほんの少しの外積代数	99
8.3.4	ベクトルの微分	101
8.3.5	高階微分方程式の 1 階化	101
8.4	力学（物理学）と微分	102

8.4.1	絶対基準を不要とする微分表現	102
8.4.2	力学と微分方程式	103
8.4.3	微分方程式の形式と物理世界	107
8.5	注記	107
8.5.1	参考資料	107
第 9 章	解析力学への助走	109
9.1	最速降下曲線	110
9.1.1	ベルヌーイによる出題	110
9.1.2	変分法による解	112
9.2	変分法の導入	114
9.2.1	オイラー	114
9.2.2	オイラーの方法の現代的解釈	114
9.3	ラグランジュの変分法	116
9.3.1	ラグランジュの考え方	116
9.3.2	ラグランジュの変分法	117
9.3.3	多変数微分方程式としてのオイラー・ラグランジュ方程式	118
9.4	注記	119
9.4.1	ベルトラミの公式	119
9.4.2	ベルヌーイの考えたこと	119
9.4.3	高階のオイラー・ラグランジュ方程式	120
9.4.4	力学と場の理論の関係	121
9.4.5	参考資料	121
第 10 章	ラグランジュ力学	123
10.1	オイラー・ラグランジュの方程式と運動の法則	123
10.1.1	最小化ターゲット関数	124
10.1.2	最小作用の原理	124
10.1.3	変分法の使われ方	125
10.2	オイラー・ラグランジュの方程式の意味	126
10.2.1	座標の多変数化と発展	126
10.3	座標の一般化	126
10.3.1	座標の一般化のプロセス	127
10.3.2	座標の一般化証明	127
10.3.3	座標の一般化証明の分かり難さ	130
10.3.4	一般化運動量	131
10.4	オイラー・ラグランジュの方程式の例	131
10.4.1	自由落下	131
10.4.2	スプリング振り子	131
10.4.3	倒立振り子	132
10.5	ラグランジアンとは何か?	134
10.5.1	ラグランジアンの変数 q, \dot{q}	134
10.5.2	解析力学の発展途中概念としてのラグランジアン	135
10.6	注記	135
10.6.1	解析力学のベクトル表現	135
10.6.2	最小作用の原理	136

10.6.3 参考資料	136
第 11 章 ハミルトン力学	137
11.1 ウィリアム ハミルトン	137
11.2 ハミルトンによるハミルトン力学	137
11.2.1 概要	138
11.2.2 ハミルトンの議論	138
11.3 ハミルトン方程式の導出	140
11.3.1 オイラー・ラグランジュ方程式の不備	140
11.3.2 ハミルトニアンの定義	140
11.3.3 新しい変数の導入；ハミルトン力学のスタート	141
11.3.4 ルジャンドル変換の応用	141
11.3.5 変数 q_i, p_i をもつラグランジアン	142
11.3.6 変分法を $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ に適用	143
11.4 ハミルトン方程式の意味	144
11.5 ハミルトン方程式の例	146
11.5.1 ハミルトニアンによるニュートンの法則	146
11.5.2 極座標によるニュートンの法則	147
11.5.3 自由落下	147
11.5.4 電磁界中の粒子	148
11.6 注記	148
11.6.1 ルジャンドル変換	148
11.6.2 参考資料	149
第 12 章 ハミルトン方程式の正準変換	151
12.1 ハミルトン力学での変換の意味	151
12.2 ハミルトン方程式の変換の論点	151
12.3 関数中に陽に出現する時間	152
12.4 位相空間と循環座標	153
12.4.1 位相空間	153
12.4.2 循環座標	153
12.5 正準変換	154
12.5.1 変数変換の対象	154
12.5.2 正準変換の形式的定義	154
12.5.3 正準変換の導出	155
12.6 正準変換の例	156
12.6.1 ハミルトニアンが保存される変換	156
12.6.2 ハミルトニアンが保存されない変換	157
12.7 ハミルトニアンの保存、非保存	159
12.7.1 正準変換の占める位置	159
12.7.2 ハミルトニアンと全エネルギー	160
12.8 ポアソン括弧	161
12.8.1 ポアソン括弧の出現	161
12.8.2 ポアソン括弧の導出	161
12.9 注記	163
12.9.1 運動量と座標の関係	163

12.9.2 参考資料	163
第 13 章 ハミルトン力学の発展	165
13.1 ハミルトン方程式の限界	165
13.2 終点の制約の取り除き	165
13.2.1 時間変化する力のもとでの運動方程式	165
13.2.2 ハミルトン方程式の拡張；概要	166
13.2.3 ハミルトン方程式の拡張；詳細	167
13.2.4 S の値	169
13.3 ハミルトン力学の拡張	170
13.4 ハミルトン・ヤコビの方程式の変数	170
13.5 注記	171
13.5.1 ハミルトンの主関数	171
13.5.2 参考資料	172
第 14 章 ハミルトン・ヤコビの方程式	173
14.1 歴史	173
14.2 ハミルトン方程式の解法	173
14.3 ハミルトニアンを変える変数変換	173
14.4 生成関数	174
14.4.1 生成関数の性質	174
14.4.2 生成関数の計算	174
14.4.3 生成関数の変数の選択	175
14.4.4 ハミルトン・ヤコビの方程式による正準変換	176
14.5 ハミルトニアン保存系の生成関数の計算	176
14.6 ハミルトニアン非保存系	178
14.7 ハミルトン・ヤコビの方程式の例	179
14.8 ハミルトン・ヤコビ力学（まとめ）	181
14.9 注記	182
14.9.1 ハミルトニアン中の時間 t	182
14.9.2 参考資料	183
第 15 章 付録 1； 多変数制御への応用	184
15.1 評価関数の定義	184
15.2 評価関数をもとにしたシステム関数	185
15.3 制御系設計プロセス	186
15.4 多変数自動制御系の特徴	187
15.5 注記	187
15.5.1 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ とルジャンドル変換	187
15.5.2 制御系方程式の解法	188
15.5.3 参考資料	190
第 16 章 付録 2； 物理変数の保存	191
16.1 無限小変換	191
16.1.1 無限小変換の導出	191
16.1.2 無限小変換の意味	192

16.2 物理量の保存と変換	194
16.2.1 代表的物理量の保存	194
16.2.2 エネルギーの保存	194
16.2.3 ネーターの定理	195
16.3 注記	195
16.3.1 参考資料	195
第 17 章 付録 3 ; 幾何光学 (屈折)	196
17.1 凸レンズ	196
17.1.1 凸レンズの性質	197
17.1.2 レンズの基本式	197
17.1.3 レンズによる倒立像	198
17.1.4 拡大鏡	199
17.2 凹レンズ	200
17.3 具体例	200
17.3.1 凸レンズの具体例-物体が焦点外	201
17.3.2 凸レンズの具体例-物体が焦点内	201
17.3.3 凹レンズの具体例-物体が焦点外	202
17.3.4 凹レンズの具体例-物体が焦点内	202
17.3.5 組み合わせレンズの具体例	203
17.4 望遠鏡	204
17.4.1 ガリレオ式望遠鏡	204
17.4.2 ケプラー式望遠鏡	206
17.5 顕微鏡	207
17.6 近軸光線追跡	207
17.6.1 近軸光線経路の数式化	208
17.6.2 凹レンズの場合	209
17.6.3 レンズによる角度変化	210
17.6.4 ガウス光学	210
17.6.5 レンズ倍率	211
17.7 注記	211
17.7.1 レンズ設計	211
17.7.2 参考資料	212

【前書き】

現在は、物理学やその記述の基本となる数学が体系的に整理され、どのような順序で何を勉強するかが良く整理されていると言えそうです。例えば力学ではニュートンの運動方程式から始まります。これはニュートンが考えた力学の表現方法や考え方が、長い時間をかけて洗練され、中学校や高等学校で学びやすい様にまとめられ、普通の人に理解しやすいまでに発展してきたからと言えるでしょう。決してニュートンが最初に発表した時から私たちに分かり易く書かれていたのではありません。それどころか、ニュートンが最初に彼の考えを発表した時には同時代の「学者」に分かり易いように、幾何学を使い、「微分」という新しい概念は表には出さなかったのです。

力学の勉強法が整理される一方、教科書など随所に論理的な飛躍を入れ、その飛躍が何故なのかを考えたり、議論したりせず、「事実として承認しなさい」という記述が目立ちます。これは、力学をある意味手軽に理解したような気分になり、それなりの応用にはこの方が時間がかからず手軽なためかも知れません。

特に、ニュートンによる初歩的な力学から解析力学、そして解析力学ではラグランジュの方法からハミルトンの方法に移行する時に飛躍があり、これらを通して解説あるいは議論されている文書が少ないのが現状です。

この様な、忙しい環境にあると、人によっては、物理の本質や論理展開が「全く分からない」となり、挫折を余儀なくされるかも知れません。この文書は、この様な事態を多少とも軽減するつもりで書きました。

ここでは、

ニュートン以前；	力学完成まで
ニュートン力学；	ニュートンの運動の法則の 1 変数微分方程式表現
ラグランジュ力学；	ニュートン力学の多変数化、多変数微分方程式（偏微分方程式）表現
ハミルトン力学；	ラグランジュ力学の変数の完全独立化
ハミルトン・ヤコビ力学；	エネルギーの供給、消費のある力学系表現

という大きな流れに基づいて、力学の論理的発展についてまとめてみました。この中には歴史的な記述を含みますが、論理的発展を記述する為に、その当時の数学、論理や技術の様子をある程度知らないとは分かり難いからです。

この文書は教科書ではありませんので、教科書として読むならば、
ニュートン力学については

Michael Cohen,
Classical Mechanics: a Critical Introduction
University of Pennsylvania
[https://www.physics.upenn.edu/sites/www.physics.upenn.edu/files/
Classical_Mechanics_a_Critical_Introduction_0.pdf](https://www.physics.upenn.edu/sites/www.physics.upenn.edu/files/Classical_Mechanics_a_Critical_Introduction_0.pdf)

解析力学については

David Morin
Introductory Classical Mechanics
[http://math-wiki.com/images/a/a9/Morin,_David-Introductory_
Classical_Mechanics_With_Problems_and_Solutions_\(2003\)\(519s\).pdf](http://math-wiki.com/images/a/a9/Morin,_David-Introductory_Classical_Mechanics_With_Problems_and_Solutions_(2003)(519s).pdf)

また解析力学の詳細な議論については

Goldstein

Classical Mechanics, third edition
Addison Wesley, 2000

および

Arnold
Mathematical Methods of Classical Mechanics
Springer, 1989

が現在の多くの議論の源となっています。Goldstein や Arnold は簡単には読めませんが、基本的疑問が沸いた時、先人の元論文までは参照できない時など振り返るべき古典です。

2019 年 2 月、 著者 記。

第1章 力学の初期

1.1 力学以前の状況

現代の力学は、ニュートンの法則を基に、物を投げた時の運動を考え、記述する処から始まります。つまり「物体」の「空間的位置」が時間とともにどう「変化」するかというのが古典力学が説明しようとしている事柄です。ここで、「物体」「位置」「時間」というのは全宇宙共通の普遍的概念となっているのですが、こう考えられるようになったのはニュートン以降、さらに誰も疑わなくなったのは高等教育で力学が普通に教えられるようになってからの事です¹。

一方、人類の歴史を見ると、私たちが習う力学とは違った方向から発展してきました。それは古代エジプトが起源と言われる、農作業の季節を決めたり、政治的判断をするための星座や惑星の運行状況についての研究です。星座や惑星は「物体」とは異なったもので、「神の意志による存在」であり、「神が決めた運動をしている」のです。従って、人々は、星座や惑星の動きを見て、「神の意志」を汲み取るのですが、この行為が体系化し、天文術あるいは占星術と呼ばれるようになりました。

この大きな成果がトレミー (Ptolemy²) の書いた「アルmagest」(Almagest) で、この中で、宇宙は地球を中心として回転しているという、天動説を唱えました。「神」が地球を作り、人間を誕生させたのですから、天動説は自然な発想です。彼は天動説を元に、宇宙の動きを体系的に説明し、この後何世紀も標準的な教科書として使われてきました。

トレミーの説によれば、宇宙の中心は地球であり、恒星は天球（恒星天）に張り付いていて固定、太陽、火星や水星などは天球と地球の間の空間にあって運動するというものです。今の言葉でいえば、地球と「太陽系」とそれ以外の天体という風に、それらの運動をもとに分類したのです。そのため、火星の運動に見られる逆行は、火星が地球をを回る軌道上で、小さな周転軌道を描いているためであり、天球が回転して見えるのは、地球が自転しているからと説明されます。

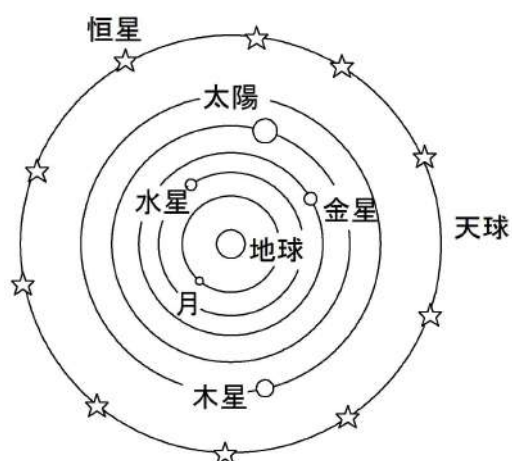


図 1.1: トレミーの地動説によるモデル

¹位置と時間の分離を疑ったのがアインシュタインです。

²Claudius Ptolemaeus, AD83 年頃 - 168 年頃

トレミーのモデルでも、どの季節に恒星や星座が天空のどの方向にあるかは決定でき、農作業には十分役立ったのです。一方、水星や火星などの太陽系惑星は天球に対するその位置が季節により変わるだけでなく、逆行するなど、その位置関係は単純に予測できないのです。従って、天文学あるいは天文術による太陽と惑星の動きの研究は、恒星や惑星の動きに神秘性を加え、地上での災害など³との因果関係とむずび付き占星術が生まれたと考えられます。

もちろん天文術と占星術がはっきりと分化していた訳ではなく、渾然一体となって発展してきたのですが、現在の私たちから見れば、天文術は太陽と惑星の運動状況の研究、占星術は運動状況の解釈論となるでしょう。

これから、「力学」の誕生と発展について述べますが、ニュートンに至るまで、天体の周回運動は、「神の定める円運動」であり、地球上の運動とは別だったのです。つまり、「力学的な円運動はその回転中心に向かって加速度が常に加わるために起こる」のでは無く、神の意志であり、終わりが無く永久に続くと考えられ、これを解析の対象にしなかったのです。地球から見ると、惑星や太陽は天空を永遠に周回している様に見え、また地上の「物体」とは別と考えているのですから無理ありません。

さて、これから議論するのは、「力学」の発展とその折に、先人たちが何をどのように考えたかという点ですので、私たちの考える「力学」に直接つながる時代から始めましょう。

1.2 ティコ・ブラーエの考えと業績

コペルニクス⁴に触れずに天文学は語れないと思いますが、天動説に対して地動説を唱えたという、フィロソフィーの転換を主張した点が重要であり、物理的に詳細な検討対象にはなり難く、論理的思考の変遷を見るには、ティコ・ブラーエから始めても許されると思います。

1.2.1 ティコ・ブラーエの人生

ティコ・ブラーエ⁵は、デンマークの貴族の家に生まれ、裕福、かつ自分のしたい事をし続けた天文学者/占星術師でした。もともとは法律家として育てられる予定でしたが、予言された部分日食を実際に体験し、大きなショックを受けました。つまり、神の支配する事柄を人間が予測できたという訳で、ここから天体の運行に関心を移していき、天文学者となりました。

ティコはデンマーク国王フレデリック二世とも繋がりがあり、デンマーク国王も有名になったティコのため城を用意してやり、ティコは百人ものスタッフを抱える、研究所長兼城主の様な生活を続けます。この研究所には四分儀 (quadrant) や六分儀 (sextant) などの観測装置、観測するスタッフ、装置の製作を行うスタッフおよび出版のための紙の製造、印刷設備まで有ります。また、毎日のように訪れる重要な客人をもてなす機能を持ち、ティコも毎日の宴会を主催し、およそ「学者」とは異なる生活でした。しかし、フレデリック二世がなくなり、クリスチャン四世の時代になると、この環境が維持できなくなり、沢山のスタッフや観測装置ともども、最終的にはプラハに移り、ルドルフ二世がスポンサーとなります。

この様に貴族趣味で、高慢かつ暴君であったティコ⁶も、「観測マニア」という点については生涯変わらず、徹底的に星の位置を高精度に観測、記録し続けました。フレデリック二世やルドルフ二世がスポンサーですから、何等かの成果を要求された筈ですが、占星術的見解には、これほどの高分解能、高精度は必要とは思われず、この様な観測をし続けた理由は彼の宇宙観の証明にあったと思われる。

³自然災害だけではなく、国の動乱など人にまつわる事件も含めてです。

⁴Nicolaus Copernicus, 1473 年 2 月-1543 年 5 月

⁵Tycho Brahe, 1546 年 - 1601 年。

⁶1600 年頃の貴族や城主を考えれば、極く普通で、逆に彼の論理性が異常に見えます。

つまり、ティコは地球を中心に太陽が回り、惑星は太陽の周りを周転しているというモデルを持っており、これを証明するために生涯をかけて観測し続けたものの、計算家ではなかったのです。ティコが亡くなる直前に「無駄な人生であったと思われないことを望む」と言ったそうですが、これは、彼の宇宙観の証明の「データは揃っている」という意味かも知れません。

1.2.2 ティコ・ブラーエの観測機器

ティコの業績を振り返る時に、彼がどのような観測装置を製作、使用したかについて調査しないと、彼の偉大さは分かりません。すべて天体を観測するための装置で、対象とする星の見上げる角度 (altitude)、方位 (azimuth) を測定する四分儀、六分儀、測定タイミングを正確に記録するための時計、天球の星の位置を記載した天球儀 (armillary sphere) などを製作しました。時計は当時でも、非常に高精度のものが作られており、ティコが発明した訳ではありませんが、四分儀や六分儀などは彼の工夫と、知恵がつまっております、今考えてもただ驚くばかりのものです。

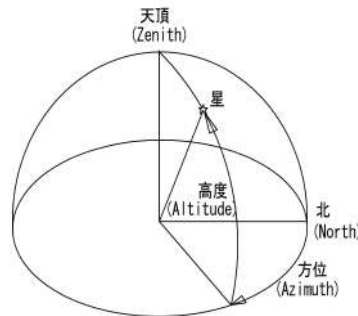


図 1.2: 星の位置の定義

四分儀 (図 1.3) は、星の高度を測定する機械⁷で、全周の 1/4 (だから quadrant) の部分を使い、観測者が対象となる星を対物照準と接眼照準でとらえ、その時の角度を測定するものです。従って四分儀に回転台座をつけ、回転させて測定するならば高度と方位の両方が一台で測定できます。

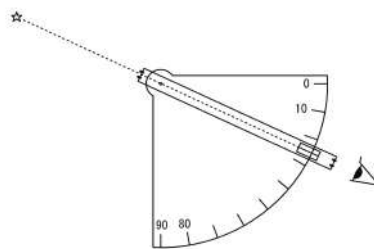


図 1.3: 四分儀の原理図

ここでは、恐らく最も知られている壁面四分儀 (Tychoian quadrant) を例に、その構造を調べてみます。

図 1.4 が壁面四分儀を描いたものですが、円弧上のものが金属製の目盛り、右上の端に観測者が見えます。観測者は接眼照準から対物照準 (描かれていません) を覗き、左上の窓越しに星を観測する訳です。中央の人物はティコですが、これは壁画で、実際の観測者は 3 人です。右側の星を覗く人、時計を監視している人そして記録をとる人です。

⁷高度測定一般に使用されます。



図 1.4: 壁面四分儀; (出典 <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9b/Mauerquadrant.jpg>)

壁面四分儀は壁に取り付けられ回転できませんので、方位測定には、別の回転可能な四分儀が必要です。こちらにも専任スタッフが必要となり、ティコの観測がいかに大掛かりかはこれだけでも想像できます。



図 1.5: 壁面四分儀の接眼照準部分の拡大図

この装置は、角度を測定するものですから、装置の分度器の部分（半径）を大きくすれば、角度目盛が広がります。つまり大型であるほど測定分解能はよくなるわけです。壁面四分儀では、この半径が1940mmあったと記録に残っています。この場合、1度の円周は33.8mmとなりますが図1.6にあるような横断線を引き、1度の長さの拡大を図っています。この横断線の長さは良く分からないのですが、図1.5より、外周の1度の長さの2倍程度の所に内周があるとすると約74.4mmとなります。この横断線は6分割され10分の日盛をつけましたが、この長さは約12.4mmとなり、これをさらに



図 1.6: 壁面四分儀の目盛り部分の模式図

10 分割すると 1 分の目盛りですが、これは 1.24mm です。そしてその半分の 0.5 分の分解能で測定できたそうですが、これは 0.6mm 位で納得のいく数値でしょう。

分度器の部分は真鍮製で幅が 127mm 厚さ 50mm あり⁸、この上を接眼照準をスライドさせて観測する訳です。特に、接眼照準と目盛り板の中心を腕木で結んでおらず、いわば巨大な円形のノギスを製作したことになりますが、スライド部分をガタが無い様にせねばならず、驚くべき装置です。

この時は未だ望遠鏡は発明されておらず、最終的観測精度は人間の眼の分解能となります。人の眼の静的分解能は 1 分と言われ、従って観測装置の 0.5 分というのはかなり最適設計です。ティコは何台もの様々な大きさの四分儀を製作し、これよりも大型、高分解能のものを製作した事があります。しかし、早々と使用しなくなったようで、この壁面四分儀で、観測装置としての分解能、可搬性を含め最適化がされたと考えられます。

こうして、0.5 分という分解能で、星の位置を記録し続け、膨大なデータを残したのです。

1.2.3 ティコ・ブラーエの功績

ティコの人柄はさておき、彼の功績あるいは、先人からの考え方の進化という面では、とにかく観測分解能と精度、そして時間的に絶え間ないデータの積み重ねを実現した点にあるでしょう。これは、言い換えると、ティコは宇宙を観測可能な論理モデルとして見ていたわけで、ここに占星術的非論理性が全くありません。生活のため、あるいは世間を渡るために占星術（や錬金術）にも関わったのですが、彼の頭は、極めて論理的構造を持っていたのです。

一方、観測装置の開発という面からは、バーニア（ノニウス）を取り入れたり⁹、装置の分解可搬性を実現したりと技術的な面でも非常に高度であり、彼の使用した装置は何も残っていないというのがまことに残念です。（プラハ時代に三十年戦争が始まり、このために破壊されてしまったようです。）

1.3 ケプラー

1.3.1 ケプラーの人生

ケプラー¹⁰ は傭兵の父、居酒屋の母の息子として生まれましたが未熟児でした。貧しい環境で育ち、天然痘にかかるなど非常に苦難の多い子供時代を送りました。その後奨学金を得て、チュービン

⁸この目盛り板の部分の重さを計算すると 158kg となりますが、これなら移動も可能でしょう。

⁹壁面四分儀よりも小型の装置に使用されました。

¹⁰Johannes Kepler, 1571 年 - 1630 年。

ゲン大学で数学を学びましたが、このころ才能を開花させます。大学では、コペルニクスの天動説を公然と支持し、このため卒業後テュービンゲン大学に残ることが叶わず、グラーツ大学で数学と天文学を教えるようになります。グラーツ大学では占星術を使った予言も仕事の一つとなっており、これが苦痛の種でしたが、寒い冬やトルコ軍の侵入などの予言を当て地位も高まっていきました。

大学で教えながら、地動説のもとで惑星の軌道がどの様に決められているかについて考えを巡らせ「宇宙の神秘」(Mysterium Cosmographicum) という本を出版しました。正多面体が6個しかないという事と太陽系の惑星は6個(当時はこう信じられていました)である点を結び付けた理論です。この本を当時高名な天文学者に送り、これがきっかけとなりティコとの議論も始まりました。ティコはケプラーを批判、特にケプラーの不正確なデータにもとづく結論についてはケプラーも反論するすべがありませんでした。

この様に名声は高まっていったものの、オーストリア大公フェルディナンド二世がルター派を追放したため、プロテスタントであったケプラーは街を追われるという憂き目にあってしまいました。

このようなタイミングに、グラーツに居たティコに招かれ、彼の元で働くこととなります。ケプラーは共同研究者と考えたらしいのですが、ティコはそうは思わず、実際ティコのデータは一部を除いて、ティコの生存中にはケプラーには開示されませんでした。

ケプラーはティコが Rudolphine Tables¹¹ プロジェクトの許可をルドルフ二世から得て、始めて共同研究者となったのです。ところがケプラーがティコと働き始めてから、一年半後にティコが急死、ルドルフ二世はケプラーを後任に据えました。一方、ティコの遺族は、可能な限りの財産を金に換えようとしており、ケプラーは非常手段を用いて¹² ティコのデータを入手しました。

ティコのデータが完全に使え、ルドルフ二世に支えられたその後の11年間はケプラーにとって最も充実した時でした。観測家ティコのデータを計算家のケプラーが使えたというのは、その後の科学の発展上非常に幸いとなったのです。もちろん、これはケプラーの3法則として結実したと言うだけでなく、物体の運動のあり方、力の働き方など、ニュートンの法則が生まれる基礎となったのです。

1.3.2 ケプラーの第1、第2法則

ケプラーは、当時知られていた惑星の中でも、観測データが最も円軌道からのずれが大きい火星の軌道を計算しました。このためのデータはティコから提供され、ケプラーの計算の仮定は以下の様でした。

- (1) 火星は円軌道を持つ。
- (2) 太陽は火星の円軌道の中心からずれている(対心点)。
- (3) 火星は対心点の周りに等角速度運動をしている。

ケプラーは8日で計算ができると思っていたらしいのですが、実際には8年を要し、しかもその結果はティコの観測データと8分の誤差がありました。ティコの観測装置の分解能が0.5分程度である事を考えると、ケプラーでなくとも、計算結果と観測結果は合致しないと言わざるを得ません¹³。

一方、ケプラーは太陽が火星に力を及ぼして回転させていると信じており、これは距離が遠くなると弱まり、近づけば強くなると考えました。地球および火星の近日点(perihelion)と遠日点(ahelion)の計算から、火星の運動速度は太陽からの距離に反比例するという式に至りました。しかしこの計算は大変で、簡単化のため、火星がある時間にスイープする面積は等しいという仮定をしました(ケプラーの第2法則)。そして種々の軌道について計算、遂に、火星は楕円軌道を描き¹⁴、その焦点に太陽がある事をつかんだのです。1605年でした。彼は、すぐに他の惑星の軌道も楕円である(ケプ

¹¹ 星のカタログですが、それまであったものよりも精度を高めたもの。スポンサーがルドルフ二世なので、こう呼ばれます。

¹² 17.7.2 参考資料「Arthur Koestler」による。

¹³ ティコの観測装置の分解能について、詳しく述べたのは、実は、この「8分」という誤差の大きさを実感して頂くためです。

¹⁴ あまりにも簡単な軌道なので、それ以前の天文学者が見落とす筈は無いと考え、後回しにしていたようです。

ラーの第1法則)と確信し、Astronomia nova という本にまとめたのですが、出版は1609年にずれ込みました。ティコのデータの使用で遺族ともめたのです。

1.3.3 ケプラーの第1、第2法則の論理

【火星軌道計算の考え方】

ここでは、ケプラーが、火星の観測データからどのようにして、火星軌道を決定していったかについて説明しましょう。

まず大前提ですが、地球-太陽間や火星-太陽間の距離は分かっていません¹⁵。アリストアルコスによる地球-太陽間の計算値はあったのですが、ケプラーとしては参考にできる精度ではありません。

太陽を中心とした惑星の軌道は、その惑星が太陽を一周する各々の時刻における角度と惑星までの距離が分かれば決まります。ところが、この距離を正確に測定する方法が、ケプラーの時代にはありません。彼がMysterium Cosmographicumで述べた太陽系の構造でも、絶対距離は使われていません。また、ティコの観測データは惑星を見上げる角度の時系列データですから、これから惑星までの距離はそもそも得られません。

つまり、絶対距離計算は期待できないので、次善の策として軌道の形(太陽を中心とする円形では無い事は分かっていますが、卵型なのかそれとも?...)を計算する事を考えたのです。

その為には、絶対距離を使わずに、ある基準となる距離を選択、それをすべての基として軌道を計算する事です¹⁶。

【地球軌道の計算】

地球の軌道、火星の軌道とも知られていませんでしたので、まず地球の軌道の形を計算します。

ケプラーに知られていたのは

- (1) 地球と火星の軌道面は一致しないけれど、近似的に一致すると見做せる。
- (2) 地球の公転周期は365日であり、火星の公転周期は687日である。

という事と、もちろんティコのデータが手許にあるのです。

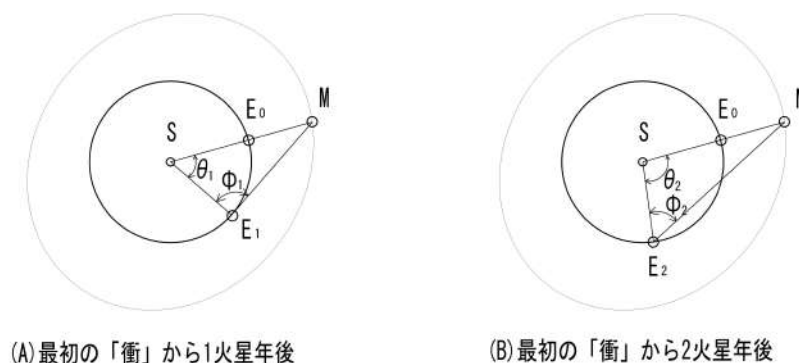


図 1.7: 太陽、地球、火星の位置関係

ケプラーは、太陽、地球、火星が一直線上に重なる「衝」(Opposition)¹⁷を基準とします。図1.7(A)

¹⁵このような前提はケプラー自身には当然なのですが、現在の私たちにとっては念をおして置く必要があります。

¹⁶ここでは、ティコのデータがそのまま使えたかの様に記述しましたが、実際にはケプラーは非常に難しいプロセスを実施しています。第1.5.4節 Wouter Koot 参照。

¹⁷やや狭い意味での定義ですが、地球から見て、火星が太陽と反対の位置にあるときです。この時は火星が一番大きく、かつ夜中が見えるので観測に都合がいい。

は、時間 t_0 で太陽、地球、火星が「衝」となり、さらに火星の一年後（地球の 687 日後）に再び M の位置となった特を示します。この時、地球は E_1 の位置にいますが、 θ_1 は E_0 から 687 日後太陽を観測すれば分かります（図は正確ではありませんが、半時計まわりに回転した状況を示しています）。一方 ϕ_1 は地球から太陽と火星を観測すれば分かります。すると、三角形 SME_1 が決まり

$$L_1 = \overline{SE_1} / \overline{SM}$$

が得られます。火星の 2 年後では、

$$L_2 = \overline{SE_2} / \overline{SM}$$

が得られ、これを続けると、

$$L_1, L_2, L_3, \dots$$

が得られます。これは火星の衝のときの、太陽-火星間の距離 \overline{SM} を単位とした太陽-地球間の距離ですから、絶対値は分からないものの、距離 \overline{SE} と角度 θ が決まり、極座標として地球の軌道¹⁸が表される訳です。

ここで、火星の 1 年は 687 日ですから、これらの点はこの時間経たないと得られません。しかし、ここにティコのデータが有るのです。ティコの観測史から考えると、ケプラーが計算した時までには、かなりデータが蓄積されていた筈です。

【火星軌道の計算】

地球はほとんど円軌道を持つことが分かったので、ここではやや単純化して、地球の軌道が円形であるとしましょう。まず時間 t_0 で太陽、地球、火星の衝が発生したとすると、火星は図 1.8(A) の

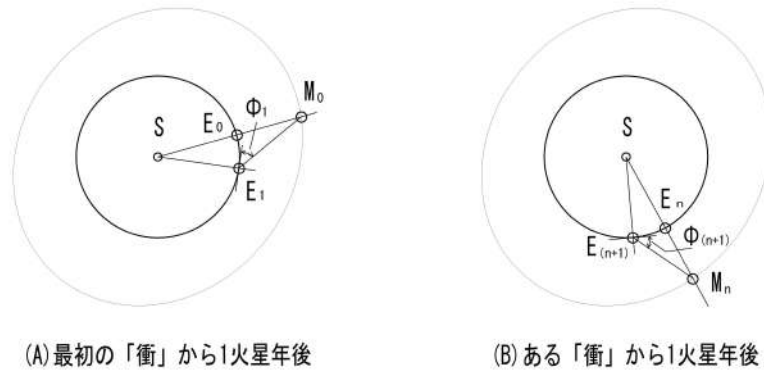


図 1.8: 火星の軌道

$\overline{SE_0}$ を結ぶ直線上のどこかにあることがわかります。 t_0 から 1 火星年後の地球の位置 E_1 から火星を観測したデータより $\angle E_0 E_1 M_0$ がわかり、この方向の延長線上に火星がありますから、 t_0 の時の火星の位置が $\overline{SE_0}$ を基準としてわかります。このように、火星の位置は衝の発生タイミングと、その 1 火星年後毎に計算されます。火星の実位置は、各衝が発生するインターバル間でしか計算できませんし、その位置が火星軌道上に様々に分布する筈がありません。ケプラーの苦労が忍ばれます。なお、実際にティコのデータを使った、火星軌道作図については、試した結果を第 1.5.3 節に示します。

¹⁸殆ど円軌道であることが分かりました。

1.3.4 ケプラーの第3法則

ケプラーは *Astronomia Nova* の出版後、*Rudolphine Tables* の編集に従事しましたが¹⁹、やがて宇宙のハーモニーという観点に興味を移していきました。ケプラーは科学者であると共に、神を深く信じていましたので、宇宙の創造は神によるもので、それはあるハーモニーを持っていると考えた訳です。この中から、ケプラーの第3法則が生まれるのですが、これの経緯についてケプラーは語っていません。またこの法則の物理的意味も、40年以上後に、ホイヘンス、ニュートン、ハレーなどにより明らかにされました。

そこで、ケプラーの第3法則については、逆にニュートンの運動の法則から導きます。 m 、 M 、 ω をそれぞれ、惑星、太陽の質量そして惑星の公転角速度とすると、

$$mr\omega^2 = G \frac{mM}{r^2}.$$

一方 T を公転周期とすると

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ですから、

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

が直ちに得られます。これを言葉で言うと

「公転周期の2乗は距離の3乗に比例する」

となりますが、言葉で言い表しても私達の物理的な感覚と繋がりません。ケプラーが導き出すのに苦労したというのがよく分かります。またそれが正しいという証明をケプラー自身は出来なかった訳です。

1.3.5 ケプラー式望遠鏡

力学の黎明期には、望遠鏡が観測装置として非常に大きな役割を果たします。そのため、この時代の力学を議論する時、光学の話題をさける訳にはいきません。光学については別途、第17章にまとめます。

天体望遠鏡として最初に使われたものは、ガリレオによるガリレオ式望遠鏡ですが、ケプラーも1611年に発明しています。しかしケプラー自身は眼が悪くなく、製作も観測も他の人に任せています。またケプラー式望遠鏡は、太陽などを投射し観測する用途で使用され、天体の肉眼観測には暫くガリレオ式望遠鏡が用いられました。

ケプラー式望遠鏡はガリレオ式に比べ、画像は反転するものの視野角が広いという特徴があり、最終的にはガリレオ式望遠鏡は使われなくなりました²⁰。

1.3.6 超新星

1604年に突如、明るい星が出現、これについてケプラーは明滅および視差が無いため、この星は天球にあると結論しました。これはアリストテレス以来信じられてきた、天球の恒星の不変性を覆す考えにつながります。

この時の超新星の出現は歴史上もっとも明るいものと言われ、肉眼でも見えました。ケプラーの超新星と呼ばれます。

¹⁹これが完成したのは1623年です。

²⁰ガリレオを記念する意味で、実験的に作られたりはします。

1.4 三角法

1.4.1 三角法の発展

ティコ・ブラーエやケプラーの軌道計算の基本は三角法です。つまりサインやコサインを駆使しているのですが、この三角法の発展について述べておきます。ただし、歴史的発展というよりも、三角法の論理の発展という見方をします。

三角法自体の歴史は、古代エジプトやバビロニアにさかのぼると言われていますが、現在の私たちに理解しやすいサインやコサインというものの具体的な例はヒッパルコスやトレミーに見られます。どちらもサインの数表を残しており、現在の電卓計算の代わりに表を用いたのです。ヒッパルコスの数表は現存しません（トレミーの *Almagest* に記載）が 7.5 度刻みのもので、その他の角については、近似²¹を併用して計算しました。トレミーはこの数表をさらに精密にし、0.5 度刻みで 180 度までの表を作り、これが何世紀に渡って使用されてきました。長期に渡って使える精度も持っていたのです。

現在、三角関数として使われる $\sin, \cos, \tan, \sec, \csc, \cot$ 即ちサイン、コサイン、タンジェントとその逆関数を最初にまとめたのは、コペルニクスの学生、ゲオルク・レティクス (Georg Joachim Rheticus)²² と言われています。彼は三角関数を直角三角形で定義しました。

当然、三角関数値を単に数表で引くのではなく、計算で求めたくなりますが、これにはニュートンやスターリングが生まれる 17 世紀の数展開まで待たなくてはなりませんでした。さらに複素化がありますが、これは省略します。

1.4.2 三角法の応用

惑星を観測して、ただ記録すればいいという物では無く、当然観測結果に対する計算が必要です。しかも、これには非常に大きな数（桁数）の掛け算、割り算が必要で、計算機の無い時代にどうしていたのでしょうか？

実は、対数が発明されるまで²³、三角関数の応用である *prosthaphaeresis* というアルゴリズムが使われていました。いわゆる三角関数の加法定理

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

を用います。この式を見ると掛け算を足し算で実行する計算式となっているのが分かり、足し算 \leftrightarrow 掛け算変換公式なのです。

例えば掛け算 ab は、

- (1) a, b の小数点を移動し、どちらも -1 と 1 の間にあるようにする。
- (2) $a = \cos \alpha, b = \cos \beta$ となる α, β を求める。
- (3) $\frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ を計算する。
- (4) 小数点の位置を元に戻す。

となる訳です。

三角関数の加法定理や倍角の公式などと言う物を、やみくもに暗記させられた記憶を持つ方も多いと思いますが、これらの式は、「足し算 \leftrightarrow 掛け算変換」という観点で見るのが妥当で、現在でもこの意味で有効です²⁴。

²¹ θ が小さい時は $\sin \theta = \theta$ となるという例のものです。

²²1514 年 2 月 16 日 - 1574 年 12 月 4 日。

²³ケプラーの軌道計算のためヨスト ビュルギがブラハに行っていますので、この時は対数を使用したと思われます。対数はジョン ネイピア (John Napier) およびヨスト ビュルギ (Jost Bürgi) により、独立に発明されました。

²⁴ある未知の波形に既知の周波数の波形を掛け、その結果を周波数を変えながらプロットして、未知の波形のスペクトラムを得る、フーリエ変換の基礎となります。

1.5 注記

1.5.1 ノニウスあるいはバーニア

Pedro Nunes²⁵ はポルトガルの数学者（ラテン語表記で Petrus Nonius）で、日本語では通常バーニアと呼ばれる、目盛りの分解能の拡大方法を考え出しました。バーニア自体はフランスの数学者 Pierre Vernier に由来しますが、彼は 1580 年生まれですから、ノニウスの方が先な事は明らかで、国によってはこの方法をノニウスと呼ぶそうです。

この原理は現在でも（デジタル表示ではない）ノギス²⁶などに使用されています。

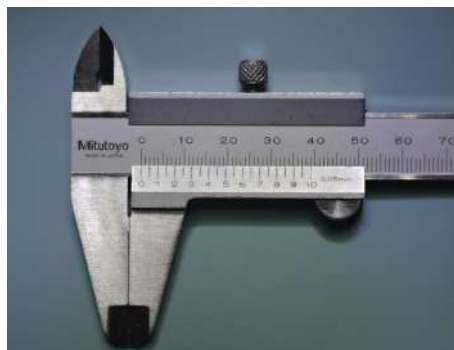


図 1.9: ノギスのバーニア (1/20 mm)

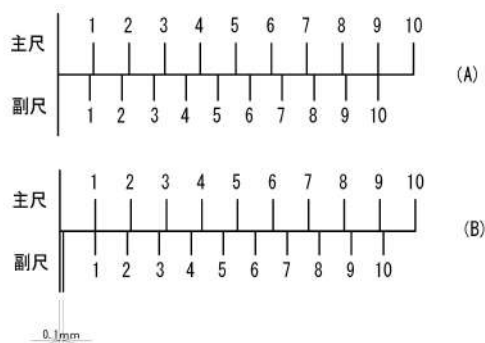


図 1.10: バーニアの原理

この原理は以下の様になります。簡単のため、1mm を 1/10mm まで読む場合を考えます。図 1.10、(A) は主尺と副尺の関係を示したもので、ノギスが閉じた状態です。副尺は主尺の 9 目盛りを 10 等分していますから、(B) のように主尺の 1 と副尺の 1 が重なった長さは、 $1 - 0.9 = 0.1\text{mm}$ を示します。同様に、主尺の 2 と副尺の 2 が重なると、 $2 - 2 \times 0.9 = 0.2\text{mm}$ となります。つまり、主尺とのずれを示すのが副尺で、これを n とし ($0 \leq n \leq 10$)、主尺が N の場合 (主尺の読みが N 以上、 $N+1$ 未満) n と N が一致すると、

$$L = N + N - 0.9n$$

が実際の長さになります。

²⁵1502 年 - 1578 年 8 月。

²⁶ノギスとはノニウスのなまったものの事です。

1.5.2 アリストタルコスによる地球、太陽間の距離測定

アリストタルコス²⁷は太陽中心説を唱え、太陽と地球の距離の測定を行いました。彼の方法は三角法の応用で、太陽-地球間の距離は、地球の直径の380倍と計算しました。現在、この値は23,500倍という事ですので、誤差というより、測定法を評価すべきものです。

出典 Wikipedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sizes_and_Distances_\(Aristarchus\)](https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sizes_and_Distances_(Aristarchus))

1.5.3 火星軌道の作図

第17.7.2節の資料(6)の方法で火星の軌道を作図して見ました²⁸。(番号は資料に示されている火星の位置に対応しています。)

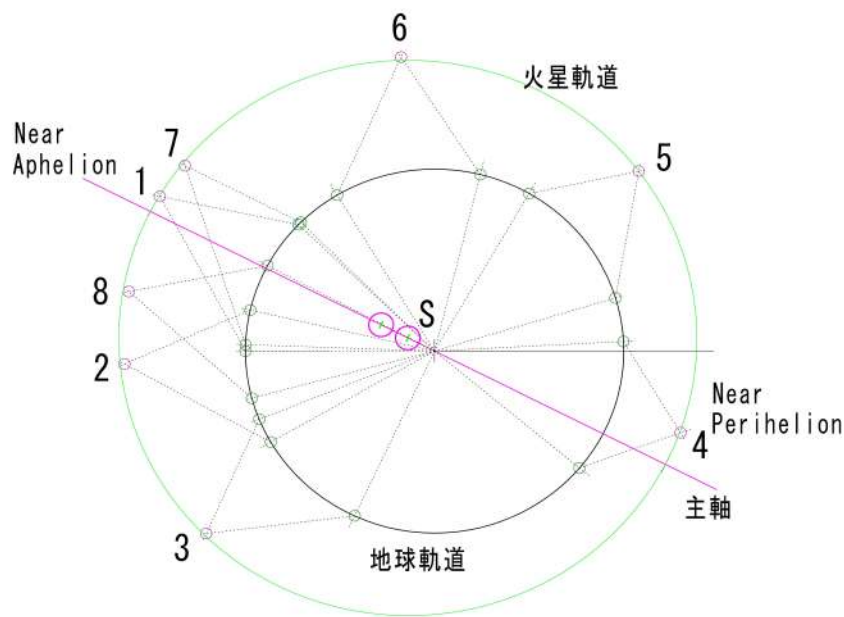


図 1.11: 火星軌道の作図

まず、ティコのデータ8点を使用したものでは、データが軌道のある位置に集中し、とても、簡単に補間すれば軌道が得られるというものではありません。従って、ケプラーが苦心した一端が覗けます。

図 1.11 で、内側の円が地球軌道、外側が火星軌道、赤い線が軌道の主軸、Sが太陽の位置、隣の赤丸がもう一つの焦点です。主軸は推定で引いたもので、従って火星軌道もこの主軸に関して作図されていますが、思ったよりも火星軌道の楕円ははっきりしていて、円からのずれ、2つの焦点の離れ具合もはっきりわかります。

1.5.4 参考資料

(1) 朝永 振一郎

朝永 振一郎 著作集 7 物理学とはなんだろうか

²⁷Aristarchus, BC310 年 - BC230 年頃。

²⁸最初は手書きで、次に CAD で作図。当然 CAD の方がはるかに容易で精度も良好です。

みすず書房、1982、ISBN 4-622-09807-6

(2) Arthur Koestler

The Sleepwalkers, Arkana Books, London, 1989.

(3) デンマーク王室の文書

http://www.kb.dk/en/nb/tema/webudstillinger/brahe_mechanica/introduktion.html

(4) Michael Fowler の Web ページ

<http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/1995/lectures/tychob.html>

(5) Wouter Koot

Kepler's battle with the Mars orbit

A modern approach to the steps taken by Kepler

September 30, 2014

(6) Make Up Lab: Kepler's First Law and the Orbit of Mars

ティコのデータをもとにした、火星軌道の描き方です。試してみる価値があります。

<https://faculty.uca.edu/njaustin/PHYS1401/Laboratory/kepler.pdf>

(7) 古代の天文学

http://asait.world.coocan.jp/kuiper_belt/eclipse/astronomy.htm

第2章 地上から天体、そして運動の力学へ

第1章では、天体の観測に起源を持つ力学の黎明について記しました。この章では、ガリレオの考えをたどり、地上の物体の動きから天体の運動、そして物体の運動の仮設という推移を調べます。

天体の動きの結果である「軌道」の観測が宗教権威と衝突してしまい、転向を余儀なくされた結果、「物体はどう動くのか」という「運動」力学の初期段階が見えてきます。

2.1 ガリレオ・ガリレイの考えと業績

ガリレオ・ガリレイ¹から、多くの人が連想するのは、「それでも地球は動く」ではないでしょうか？ 彼が宗教裁判にかけられ、地動説を放棄させられた後につぶやいたと言われる言葉です。そして、ピサの斜塔から鉄球を落とした話と教会の振り子がそれに続くのでは？

ガリレオについて、アインシュタインは「近代科学の父」、ホーキングスは「恐らく近代科学の誕生に一番貢献した人物」と評価、Web上でも彼について大変詳細に語られます。しかし、これらの情報の多くの部分がガリレオとカトリック教会（バチカン）との闘いやメディチ家との関係に割かれ、科学的に見たガリレオの位置が分かり難いと感じるのです。「ガリレオの法則」とか、「ガリレオの定理」とかがないのもこの理由かもしれません。

これから、ガリレオの科学的な思考にフォーカスを当てて議論しますが、背景となる当時のフィレンツェの政治、経済的状況や技術、芸術が彼の活動に大きな影響を与えています。これは、ある意味どの科学者にも当てはまるのですが、ティコ・ブラーエやケプラーのように、いわば王室の中で研究したのではなく、市民生活の中に存在したと言えます。

2.2 ガリレオ・ガリレイの人生

2.2.1 パドヴァ大学時代

1564年にピサに生まれましたが、8歳の時にフィレンツェに移り、16歳でピサ大学に入学、医者を目指しました。大きな不幸もなく大学に入り、父親の判断で経済的に有利な医者の道を選んだと言われます。しかし、在学中に興味は物理に移り、父親を説得し進路変更をしたのです。いわゆる振り子の等時性を発見したのも在学中です。この時、シャンデリアの揺れが振幅によらず一定である事を自分の心拍数を指標にして測定、その後すぐに振り子を作って実験もしました。

1589年にはピサで、1592年にはパドバ大学で幾何、機械、天文学を教える事になります。このころ父親が死去、弟の学費の面倒も見なければいけないなど、経済的に大変なようでしたが、これを補うため各種機器を考案して販売しています（これらの機器の具体例については第2.3節に記します）。コンパス²や、温度計、望遠鏡や顕微鏡を作ったり（このためレンズも自作）、市民が購入可能な計算、観測機器を製作しています。

特に、望遠鏡についてはベニス兵器工場への売り込みにも成功、この業績により大学でのサラリーも上がるがど前途洋々たる教授でしたが、これで月を観測し始めたのが、ガリレオの人生を決定的に

¹Galileo Galilei, 1564年2月 - 1642年1月。

²これは私たちの言うコンパスではなく、メカニカルな関数電卓あるいは、昔存在した計算尺の方が近いかも。

変えてしまいます。

製作した望遠鏡で月を観測すると、月がこれまで信じられていたように平らではなく、クレータや山も有るのが見え、これをスケッチします³。これは実は困ったことなのです。月は「Heavenly body」と考えられてきたのに、地球の様な、凸凹の地形を持っているというのは、「Heaven」自体が完全では無いかも知れず、カトリックの信仰に反するのです。

この月の観測が、天体観測へと発展、木星の衛星を発見します。最初は木星の近くの恒星かと思ったのですが、次の夜に再び観測すると、木星との位置がずれており、一週間後にはこれらが木製の「月」だと結論づけたのです。木星が月を持つということは、全ての天体が地球中心に回転するというドグマにも反します。

木星の月の発見は1610年1月7日から15日であり、ガリレオはすぐに論文を用意し始め、Sidereus Nuncius (Starry Messenger⁴) として3月12日には印刷しています。ガリレオの意気込みが感じられます。この本はすぐに売り切れ、ヨーロッパ中に名声が広がります（これとともにガリレオも高慢になっていった様ですが）。同時にこの年にはパドヴァ大学の終身数学教授となっています。

2.2.2 フィレンツェ時代

ガリレオはこの本と望遠鏡そして、木星の四つの衛星にメディチ家四兄弟の名前を付けたのを手土産にフィレンツェに戻ります。メディチ家のトスカーナ大公コジモ二世がパトロンとなれば、さらなる地位が得られると考えたのです。パドバ大学での学生の教育からメディチ家での研究という階段を上った訳で、mathematician および philosopher として待遇されました。

フィレンツェで有名な人となったガリレオに、言動の危険性を忠告する人もありましたが、地動説の正当性を確信するようになり、証拠を探し始めました。この時、Benedetto Castelli⁵ がガリレオに「もし、金星が太陽の周りを移動するならば、月のように満ち欠けが観測されるのではないのでしょうか?」と言ったのです。金星は肉眼では単なる点にしか見えませんが、望遠鏡で観測すると円に見え、確かに、季節により満ち欠けが起こっているのが分かりました。これが地動説の決定的な証拠で、金星だけでなく、地球やそれ以外の惑星も太陽を中心に回転していると確信しました。1611年でした。

この時はまだ、トスカーナ大公の信頼もあり、ローマの Jesuit College から名誉学位を送られるなど、カトリック教会との関係は悪くありません。

1615年にトスカーナ大公妃に、自分の考えを説明した手紙を出したあたりから、バチカンにいらまれ始め、トスカーナ大公も自分の宮廷にカトリックの異端者が居るのではと怖れ始めます。1616年にはローマでの異端審判でコペルニクス説を信じるのを禁じられます。またコペルニクスの De revolutionibus orbium coelestium も禁書に指定されます。

ただこの時、カトリック教会は（金星の満ち欠けは証拠にならないが）本当に地球が動いているという証拠があればという条件をつけており、これがガリレオが潮の満ち引きの研究に向かわせます。潮の満ち引きと月の位置関係は昔から知られていたのに、これと地球の自転を結び付けようとした。もちろん今の私たちはこれが誤りだったと知っていますが、この中から、地球が自転、即ち非常に高速に動いているのに、誰もそれを感じないのは何故かという問題を考えています。

そこで、馬に乗っている時にボールを落としたらどうなるかという思考実験を行いました。馬が止まっていれば、もちろんそのすぐ下の地面に落ちますが、走っていても馬に対して同じ位置に落ちるだろう、つまり乗馬者にとって馬の移動は感じられないのではないかという内容です。ガリレオにとっては、これは改めて実験するまでも無いもので、思考実験だけで十分でした。

このような状況の中でガリレオは観測を続け、太陽の黒点について研究をしています。ドイツの天文

³3月の望遠鏡による観測自体は Thomas Harriot (1560 - 1621) の方が早かったのですが、観測にとどまっていたようです。

⁴ガリレオが「星からの使者」と言うタイトルに込めた意味が想像できます。

⁵1578 - 1643 4月。ガリレオの弟子でもあり、ガリレオの支持者です。

学者の黒点は太陽の惑星では無いかとの意見に対し、惑星ならあれほど不規則な形と、不規則に発生、消滅する筈がないと明確に否定しました。そして、これが太陽自身が自転しているという考えとなっていました。

2.2.3 異端審問

1623年に、古くからの友人でもある Maffeo Barberini⁶ がローマ教皇ウルバヌス八世 (Urban VIII) となり、状況が大きく変わりました。この祝福も兼ねてガリレオはローマを訪問、教皇から、コペルニクスの理論を仮説として扱う条件で、自身の本の出版許可を得ました。(この年には The Assayer を出版、教皇にも称賛されますが、これは 1619 年にガリレオを批判した Orazio Grassi に対する反論の書で、まだガリレオの本命の書ではありません⁷。)

ガリレオは 60 歳になっていましたが、彼の本当に考えている内容をまとめ始め、1629 年のクリスマスには「天文対話」(Dialogue Concerning the Two Chief World Systems) を書き上げました。これはラテン語ではなくイタリア語で書かれ、ベニスの貴族と二人の客人との対話という形式です。客人の一人はコペルニクスを支持 (ガリレオ)、もう一人はカトリックドグマを妄信するシンプリチオ (Simpleton; 愚か者) でした。

ローマの教会の検閲はずっと困難だと分かっていたので、フィレンツェの教会の許可を得、コピーをバチカンにも送ったのですが、反応が返ってくる前にフィレンツェでベストが大流行、ローマとの往来も絶たれてしまいます。

しかし、バチカン内では回し読みされ、シンプリチオは教皇のことであり、教皇を馬鹿にしていると取られ、教皇の本当の意志に関わらず、放ってはおけないとなっていました。例えば古い友人であっても、教皇には教皇の立場もあり、ガリレオのために何かをする訳にはいかないのです。

「天文対話」はようやく 1632 年に出版されるのですが、結局はこの本が問題視され、異端審判にかけられ 1633 年には有罪となってしまうのです。「天文対話」も禁書となりました⁸。このあとは、1642 年に亡くなるまで、フィレンツェ近郊で軟禁生活でした。この最後の不自由な時期に、地動説以前に自分が実験したり、考えたものをさらに深く考察し、これを最後の本「新科学対話」(Dialogues Concerning Two New Sciences) にまとめましたが、これはイタリア国内では出版できず、オランダで 1638 年に出版されました。もちろんこのコピーもフィレンツェに入ってきて、すぐに売り切れてしまったのですが、バチカンからは何も言って来ませんでした。

2.3 ガリレオの設計した機器

当時のフィレンツェは、ルネサンスの約 100 年後、メディチ家が支配するトスカーナ大公国でした。金属、ガラス、皮革工芸や木工が発達していて、ガリレオにとっては、自分の発明を実際の製品にするためのアウトソースが可能な街でした。

2.3.1 ガリレオの測温器

1593 年頃パドヴァ大学の数学教授になったばかりの時期の製作で、細いガラス管の頂上に閉じたガラス球を取り付け、それを水の入ったガラス容器と組み合わせたものです。ガラス容器を手で覆うと、体温により水が上昇します。温度変化を観測するためのものですが、気圧も影響してしまいま

⁶1568 年 4 月 - 1644 年 7 月。

⁷ただ、この本は、「科学は数学という言葉で書かれている」(mathematics is the language of science) という有名なパラグラフを含みます。

⁸解除されるのは 200 年後の 1835 年です。

す。まだ目盛りはついておらず定量的測定はできません。フィレンツェのガラス工芸が活かされているのが分かります。



図 2.1: 測温器

出典 <https://catalogo.museogalileo.it/>

2.3.2 ガリレオの天秤

アルキメデスは、王冠を水につけて、純金製か混じり物を含んでいるかを見分けたと伝わっています。これが「アルキメデスの原理」を考え付くきっかけですが、これは複雑な形状の物体の体積を溢れる水の量として測定した事がポイントです。

金、銀、鉛の比重が 19.32、10.50、11.35 ですから、形状が同等なら、金とそれ以外の金属を重さで見分けるのは困難ではありません⁹。

しかし、実際は形状が複雑かつ、金かその合金かという問題で困難さがぐっと増し、歴史的伝聞だけでは「本当に可能なのだろうか?」という疑問が沸くのです。

ガリレオも正にこの疑問を感じ、自分ならばどうしただろうと考え「ガリレオの天秤」を実験したと言われます (第 2.5.2 節、参考資料 (4))。

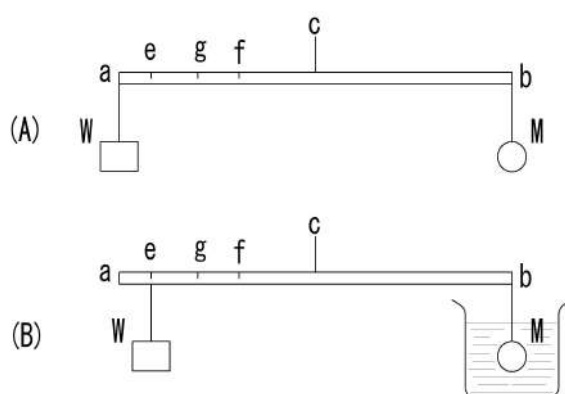


図 2.2: ガリレオの天秤

長さ a, b の天秤を支点 c で支え、まず空気中で非測定物（金とします） M と錘り W のつり合いを取ります (図 2.2 (A))。次に、非測定物のみを水中につけ、つり合う点を探します。(図 2.2 (B))。

⁹現在では、オスミウム 22.57、イリジウム 22.42 白金 21.45 等が分かっていますが、当時の話です。

これを e としましょう。同じ（空気中での）重さの銀を用意して、銀を水中につけて測定、この時 f の点で釣り合うとします。もし、金と銀の合金を使って、実験すれば、釣り合う点は ef の間のどこかの点 g になる筈です。そして金と銀の成分比は eg と gf の比で表され、合金の成分比率が測定できる筈です。

ガリレオは原理を議論した後、実際にどうするか具体的に述べています。天秤の腕が長いほど高精度が得られるので、この長さは少なくとも 117cm とすべきだとか書いていますが、面白いのは精度の高い目盛りを作る方法です。それによると、 e 、 f やその間に細い鉄線を一回巻いて粗い目盛りを付け、それらを真鍮のやはり細い線で埋めます。真鍮を使うのは粗い目盛りとの区別の為で、バランスが取れたところまでの線の数を数えるのです。この数え方がまた、極めて实际的で、目で数えようとしても無理だから、小さなナイフの刃先をスケールに当て、その「凸凹の数を手と耳を使いながら数えよ」と言っています。この方法ならば、直径 0.2mm 位の分解能で測定できると思われ、木にナイフで目盛るよりもずっと細かく測定できます。

この例は、ガリレオの実験的、実証的な性格を良く示しています。他の科学者の結果を再現実験で確認、これにより主張の正しさが裏付けられ、次の段階に進むと言うのは現代でも標準的な作業です¹⁰。

2.3.3 ガリレオのコンパス

図 2.3 がその写真ですが、二つの真鍮製のスケールが、ヒンジで止めてあり、開閉できるのでコンパスと呼ばれるのでしょう。英語では geometric and military compass と呼ばれ、幾何学的計算や軍事用途のための、現場で使用できる器具です。つまり、研究用具ではなく、実用品なのです。1595 年から 1598 年頃と言われますから、パドヴァ大学に移ってほどなくの事です。類似の器具はすでにありましたので、完全にガリレオのオリジナルではありません。



図 2.3: ガリレオのコンパス

By Sage Ross - Own work, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8619404>

コンパスには、さらに $1/4$ 円周となる目盛り板が取り付けられています。写真でははっきりしませんが、用途を考えると、これは取り外し可能で（そうでないと、コンパスの様に開閉もできない）

¹⁰再現実験ができない内容を主張する科学者は現在でも絶えません⁹。

取り付けた状態では四分儀のように使えます。また目盛り板には、蝶ネジで固定できるカーソルも見えます。

Wikipedia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Sector_\(instrument\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Sector_(instrument))) によると、このコンパスには次の様な目盛りが振られています。

(1) Arithmetic Lines

1 から 250 までは分割した目盛り。単位は $1/250L$ です。

(2) Geometric Lines

$$f(n) = L\sqrt{\frac{n}{50}} \quad n = 1 - 50 \text{ の整数}$$

(3) Stereometric Lines

$$f(n) = L\left(\frac{n}{148}\right)^{\frac{1}{3}} \quad n = 1 - 148 \text{ の整数}$$

(4) Metallic Lines

金、鉛、銀、銅、鉄、錫、大理石、石の比重を比べるための目盛り。

(5) Polygraphic Lines

辺の長さおよび、辺数から正多角形の外接円の半径を与える目盛り。

(6) Tetragonic Lines

$$f(n) = L\sqrt{\sqrt{3}\frac{\tan(\frac{180}{n})}{n}} \quad n = 3 - 13 \text{ の値}$$

(7) Added Lines

他の目盛りと一緒に使用して複雑な計算を行う目盛り¹¹。

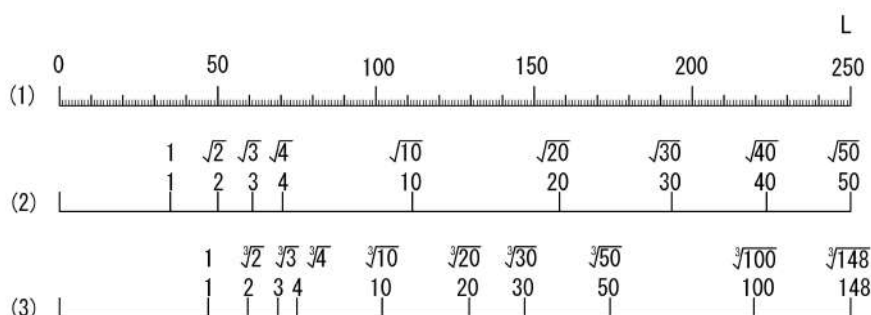


図 2.4: ガリレオのコンパスの目盛り (一部)

図 2.4 にガリレオのコンパスの目盛りの内 (1),(2),(3) を示します (CAD で書いたものです)。(1) は L を 250 等分したもので L の長さは不明ですが、定規として使用するものでしょう。一方 (2)、(3) はそれぞれ、単位目盛りの \sqrt{n} 、 $\sqrt[3]{n}$ 倍の長さを表示するものです。つまり 0-10 の目盛りの長さは 1 の目盛りに対して $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt[3]{10}$ 長です (上の目盛りが、実際の値、下の目盛りは n を示します)。従って、上下の目盛りの相対的関係を使うものではなく、それぞれ単独の目盛りとして使います。

(6) の Tetragonic line の使い方はやや不思議なもので第 2.5.2 参考資料 (1) によると、正多角形や円の面積と等しい面積をもつ正方形を求めるものです¹²。このために、別のコンパス (デバイダー) を使用して対象物の半径を測り、これにガリレオコンパスを Tetragonic Lines の目盛りに合う様に

¹¹詳細は不明です。

¹²「square the circle」古代より関心を持たれていた、円の面積と同じ面積の正方形が作図できるかという問題です。この不可能性は 1882 年に Lindemann により証明されました。ただし、ガリレオの時代にこれが何に使用されたか不明です。

開きます。そして二本の脚の 4-4 の距離を測れば、正 4 角形の面積、5-5、6-6 ならばそれぞれ正 5、6 角形の面積が得られます。さらに別の計算もできますが、これは省略します。

また、この器具は、大砲の照準を決める（だから military とついている）のにも使われ、その為にコンパスの左脚には 1 点の、右脚には 2 点の支点が用意され、3 点支持をしていたことが分かります。この時、1/4 円周目盛りやおもりが役立つ訳です。（図 2.5。）

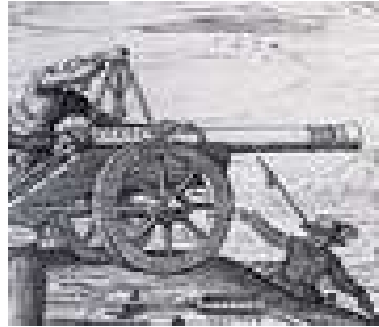


図 2.5: 大砲の水平位置決め

出典 https://brunelleschi.imss.fi.it/esplora/compasso/dswmedia/storia/estorial1_st.html

現在の私たちが、ここに記した様な詳細な目盛りを使用して何か作業をする機会はありませんが、当時の現場での感じが想像できます。また、現在、デジタル回転計、温度計、レーザ距離計、風速計、照度計など非常に豊富な現場用測定器があるのと、全く同様に思えます。

2.3.4 ガリレオの望遠鏡、顕微鏡

望遠鏡は 1608 年にハンス リパーシー (Hans Lippershey) により発明され、特許申請され、軍事的に重要なこの技術はすぐに広まりました。望遠鏡は（恐らくパリ経由で）フィレンツェにも入ってきましたが、倍率も 3 倍程度と低く、観測向けではありませんでした。もともとレンズの拡大効果は昔から知られており、眼鏡も 1284 年頃にイタリアで発明されたと言われます。ガリレオは望遠鏡の原理を研究、焦点距離の長い凸レンズと焦点距離の短い凹レンズを組み合わせれば、倍率の高い望遠鏡が製作可能であると気づいた訳です¹³。そこで、レンズを眼鏡メーカーに発注しましたが、思ったようなものが製作出来ず自分でレンズを製作しています。

眼鏡用凹レンズでは、焦点距離が短くても、-330mm 程度（第 2.5.1 節参照）ですから、自分でさらに中心を薄くする必要があった訳です。凸レンズは眼鏡用のものが使えたかも知れません。

この様にして、ガリレオは 1609 年から 1610 年頃に独自に望遠鏡を作りました。数ヶ月の間に 100 台ほど製作、しかし実用に耐えるものは 10 台程度でしたが、その内の一つは、次の様な仕様です（出典は第 2.5.2 節、(2)）。

全長： 927mm

対物レンズ： 平凸レンズ（凸側が被観測体側）、直径 37mm、アパーチャ 15mm、焦点距離 980mm

接眼レンズ： 両凹レンズ、直径 22mm、焦点距離 -47.5mm

倍率、視野： $\times 21$, 15 分

上記の仕様からも明らかな様に、ガリレオは（天体）観測用に望遠鏡を設計、製作したのであり、リパーシーが（恐らく）出来合いの眼鏡レンズを組み合わせで製作したものから格段に進歩しています。

¹³ ガリレオほどの程度の光学知識を持っていたか、そしてそれに基づいて設計したのか、あるいは試行錯誤だったのかについては議論があります。2.5.2(3) 参照

さらに、太陽観測のためのヘリオスコープ (helioscope) を作り、太陽の黒点を観測、マイクロメータ (micrometr) を作り、木星とその月の間の距離を測定しています。

ガリレオは望遠鏡をどう考えて製作したかについては語っておらず、1610年にケプラーからのレンズ供給依頼の際にも、忙しいからと言って断っていますが、研究競争も意識していたのでしょう。もっともケプラーは1611年にはケプラー式望遠鏡の原理を考察、1615年にはこの方式の望遠鏡が作られ、現在使われるのは専らケプラー式です。

2.4 ガリレオの研究活動

2.4.1 観測主体の研究活動

パドヴァ大学の教授時代初期の頃は、色々な物理現象に興味をもち、科学を実用に落とし込んだ器具を設計、製作し販売もするという大学発ベンチャー起業家の様でした。この時代に物体の運動の仕方などの実験も行っているのですが、望遠鏡の設計製作の成功により、天体観測が研究の主体となりました。そしてこの天体観測こそ、今まで信じられて来た事を覆す発見につながるのですが、これがカトリックのドグマであったため、科学的な研究自体が阻まれたのです。

従って、ガリレオが科学者として十分活動できたのは、1590年頃から、1616年までと言っていいでしょう。特にパドヴァ大学からフィレンツェにもどり、トスカーナ大公の宮廷に勤め始めた頃がいわば絶頂期で、この間に現在まで残る殆どのガリレオの科学的仕事がなされました。

2.4.2 思索主体の研究活動

軟禁状態にあり、さらにコペルニクスの理論に関して考えたり、書くのを禁じられ、若い頃（1600年以前頃）に考えて来たことを再検討するしかありませんでした。以下、この軟禁時代に書かれた Dialogues Concerning Two New Sciences の内容からです。

この中に、物体の運動があります。これに関して、ピサの斜塔から大小二つの鉄球を落としたという、殆ど神話化している実験があります。ピサの斜塔は高さが $55.86[m]$ 、傾きは4度（これは直接関係しません）ありますが、この頂上から落とすのは構造上無理と思われるので、 $54[m]$ の高さから落としたとすると、

$$v = \sqrt{2gh}, \quad g = 9.8m/s^2$$
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

より、 $s = 3.32$ 秒です。この短い時間の中で¹⁴、さらに二つの物体の差を計測しようというのは、このままでは困難で第2.3.2節での態度を考えただけでも、この通りの実験をしたとは思えません。

また、もし落下速度が鉄球の大小（重さ）で異なり、重いものの方が速いなら、二つの鉄球をくっつけると

(1) 重い方と軽い方の中間の速さとなる筈。

(2) 合成された重量は、重い鉄球よりもさらに重いことから、速度は増すはず。

という矛盾が簡単に出現します。

そこで物体の落下運動を考えるため、緩い傾斜にボールを転がすことで、スピードを等価的に遅くしたのです。

¹⁴この計算はもちろんニュートンの法則の簡単な応用で、ガリレオが計算した訳ではありませんが、この程度の値はガリレオならばすぐに知る事ができたでしょう。

このようなガリレオが若いころに行った実験装置は、図面も残っていませんが、彼の思考方法はおよそ次のようでした。

ガリレオはまず、「落下する物体は単位時間内に等しい加速を受ける」つまり、単位時間内の速度変化が一定なので、

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

とう仮説を述べます。

ところが、ピサの斜塔の例を考えると、物体の速度も時間も測定が非常に困難です。そこで、速度を測らずに済む方法を探るのです。

まず短い時間 Δt に進む距離 Δd はこの間の平均速度を v_{ave} 、出発点の速度 v_{ini} 、到達点の速度 v_{fin} とすると

$$\begin{aligned}\Delta d &= v_{ave} \Delta t \\ &= \frac{1}{2}(v_{ini} + v_{fin}) \Delta t.\end{aligned}$$

静止状態から始めると、 $v_{ini} = 0$ なので、

$$\Delta d = \frac{1}{2} v_{fin} \Delta t$$

一方

$$\Delta v = a \Delta t = (v_{fin} - v_{ini}) \Delta t = v_{fin} \Delta t$$

より、

$$\Delta d = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2.$$

これで、速度を使用せず、加速度と時間の関係が求められました。ところが、これまでの計算で、距離や時間を「小さな」(Δ) と考えねばならないのは、出発点と到達点の速度を平均する場合のみです。しかも、出発点の速度をゼロとしてしまうと、 Δ と限定する必要がなく、

$$d = \frac{1}{2} a t^2$$

と書けます。つまり、

$$\frac{d}{t^2} = constant$$

が得られました。このようにしてガリレオは仮説を導いたのです。

一方、これを実験で確認するためには、距離は速度より測りやすいものの、時間は未だ困難です。そこで、距離も時間も拡大する事を考え、傾斜を転がるボールも同様の法則に従うと仮定しました。そしてその実験器具を細かく説明していますが、要は斜めに傾けた樋に沿ってボールを転がし、この転がす距離を変えて行くのです。そして実験を多数回実施、平均をとります。

ガリレオはこのような内容を Dialogues Concerning Two New Sciences に記し、決して代数的に計算した訳ではありませんが、ニュートンの運動の法則¹⁵ につながる、物体の運動距離と時間に関する具体的な関係を得ました。

2.5 注記

2.5.1 眼鏡レンズ

通常、視力は 1.2 とか 0.2 とかという数字で表現しますが、視力矯正のためのレンズはディオプトリ (diop¹⁶) で表し、ディオプトリは焦点距離の逆数です。従って単位は $[m^{-1}]$ です。健康な眼球

¹⁵ これについては、第 4 章で詳しく述べます。

¹⁶ 語源はケプラーの用いた dioptrice だそうです。

のレンズは、約 60diopter で、これを眼の筋肉で調整し、焦点を合わせています。この筋肉の動きが年齢で弱まると、レンズの調整範囲が狭まり、いわゆる老眼となります。近眼や遠視はレンズの厚さにバイアスがかかった状態で、例えば筋肉の調整範囲があっても、全体として焦点調整が困難になる訳です。

そこで、人工的レンズを使用して、ディオプトリ調整をするのですが、眼鏡用レンズの範囲は、凸レンズで+1 から+3 程度、凹レンズ-1 から-3 程度です。つまり、どちらも焦点距離で言うと、1m から 0.33m 程度で、既製の眼鏡レンズはおよそこの範囲をカバーするものが多量に製作されています。

また、ローマ教皇レオ十世 (1475 - 1521) が最初に、凹レンズ眼鏡を使用したと言われているので、ガリレオの時代には、凹レンズ眼鏡も存在していました。

(参考) <http://glassescrafter.com/information/Eyeglasses-History.html>

2.5.2 参考資料

(1) tetragonic line

<https://brunelleschi.imss.fi.it/esplora/compasso/dswmedia/approfondimenti/squaring%20the%20circle.pdf>

ガリレオがコンパスの取り扱い説明書として書いたものの一部です。

(2) Museo Galileo - Istituto e Museo di Storia della Scienza

<https://catalogo.museogalileo.it/index.html>

フィレンツェのガリレオ博物館の中の Virtual museum. ここで素晴らしいカタログがダウンロードできます。

(3) Marc De Mey, Fernand Hallyn

Galileo, the Telescope, and the Science of Optics in the Sixteenth Century
Universiteit Gent - 2002

https://lib.ugent.be/fulltxt/RUG01/000/518/869/RUG01-000518869_2010_0001.AC.pdf

ガリレオと、ガリレオが学んだと思われる中世光学の膨大な研究書。

(4) The golden crown

ガリレオのオリジナル論文 La Bilancetta (“The Little Balance”) の翻訳。

<https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Crown/bilancetta.html>

第3章 ホイヘンスの時代

本章では、デカルトとホイヘンスを中心に話します。彼らの活躍はニュートンに引き継がれますが、彼らの生きた時代関係を見ておくと、より分かりやすいでしょう。

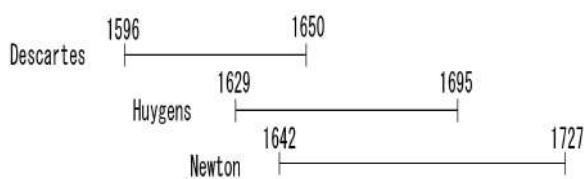


図 3.1: 3 人の時代

当時の物理の大きな話題は物体の運動と、望遠鏡などの光学システムで、それらを扱う数学は幾何学でした。そのため、ホイヘンスもニュートンも幾何学を使って、彼らの考えを表現しています。一方、幾何学を代数的に扱うのもこの頃が起源で、最初に代数がどのように幾何を取り込んでいったかについて議論します。

3.1 幾何学の抱える問題

幾何学はもともと長さや面積を測定したり、体積を計算したりするためのいわば実用的技術として古代に発生、これが紀元前3世紀にユークリッドにより学問としてまとめられました。従って学問としての起源はユークリッドと考えていいでしょう。

幾何学では、点 (point)、線 (line)、平面 (plane)、角 (angle) をもとに三角形 (triangle) や円 (circles) を定義し、合同 (congruence) や相似 (similarity) を使って、問題となる図形の面積や体積などを、計算を使わずに求めるというのが基本です。

もちろん、ピタゴラスの定理の様に、直角三角形に対し

$$c^2 = a^2 + b^2$$

のように通常は数式で表すものもありますが、これとて、ピタゴラスの証明は図形的なものです。

幾何学の方法論では、最初に点や線などを

点：位置だけがあって面積を持たない

線：長さだけが有って幅を持たない

などという公理として表しこれらを基に、種々の定理を証明、内容を充実させていく訳です。

この方法は、さすがに古代に発明されただけに、考え方が非常に具体的かつ目に見えるもので、多少の経験をつめば、誰にも（常識の範囲で）納得の行くものです¹。

¹点や直線の公理などは実はすでに常識を超えてしまっているのですが、まだ直感的に納得させ易いものです。これが無限小を扱うようになると、とても直感では済まなくなります。

従って、幾何学を教科書としてまとめようとする、どうしても問題とその解答集²となってしまう。つまり、問題の一般化や考え方の一般化ができないのです。これは学問としては致命的な欠点で、このままでは幾何学の発展は有り得ません。

3.2 代数

代数の起源は物を数える事にあります。従って、最初は1、2、3…という自然数から始まり、整数、分数や少数が生まれました。中でも「ゼロの発見」は代数史の中の一大イベントでしたし、負数や無理数、さらには複素数へと数の概念が拡張されていく訳です。

さらに数字の間の演算があります。最初は単純な足し算、引き算だったと思われますが、これから掛け算、割り算が生まれる訳です。負数を使うようになると、負数×負数=正数を定義しますが、この計算など、数に意味を見出そうとすると、理解不能になってしまいます。抽象化された「数」なので、このような演算も定義、数学的に矛盾なく使える訳です。

いい換えると、代数は幾何に比べて、その生い立ちから抽象化、拡張化を内包しており、さらにそれが代数の威力をどんどん増加させてきたのです。

代数や幾何をこのような見方をすると、代数の中に幾何的な方法論が取り込まれていくのは必然と思われます。

3.3 幾何の代数的解釈

幾何でも長さ、面積や体積は最終的には数字で表されます。長さ、面積、体積の比較は数字の比較に抽象化されます³。

すると、三角形や四角形など幾何学的図形を視覚的、数字的に比較、ひいては計算に結びつける手段が必要になります。

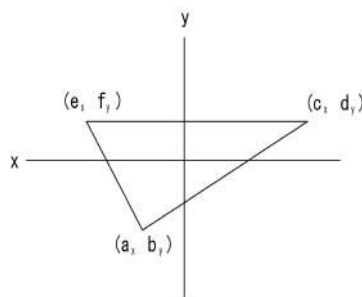


図 3.2: 直交座標又はデカルト座標

現在の私たちにとってはあまりにも当たり前になってしまって、これをわざわざ考案した人が居たなどとは思えない程なのですが、これを考えついたのが、かのデカルト⁴です。彼の考えた（平面ならば）直交する x 軸と y 軸を用いる空間の数字的表現は、日本では普通直交座標と呼ばれますが、英語圏では Cartesian coordinates と、デカルトの名前で呼ばれます。この座標表現では、例えば平面は二組の数字 (x, y) で表現でるのですが、もし数字が有理数までしか使えないと、直角三角形の斜辺の長さはもう表現できない場合が発生します。

²定理とその証明集。

³例えば数字で表されても、長さや面積は違うものだという認識が「単位」あるいはその拡張版ともいえる「次元 (dimension)」を生みます。

⁴Rene Descartes, 1596 年 3 月 - 1650 年 2 月

例えば、直角二等辺三角形は、その等しい二辺を a とすると、斜辺の長さは $\sqrt{2}a$ となり、こんな簡単な図形でさえ、斜辺の長さを x もしくは y 軸上に描けません。従って、数は直ちに無理数まで拡張される必要があります。つまり、デカルト座標は、実数 (x, y) の組を要求し、初歩的なユークリッド幾何学に座標を導入するだけでも、数学的な抽象度がぐっと高まっているのです。

3.4 デカルト

デカルトはフランス生まれのフランス人ですが、主としてオランダで活躍した学者です。精神と身体の独立性 (cartesian dualism) を主張、物体の運動は神の意思とは関係ないとも述べ、教会に睨まれ *Meditations* や *Les passions de l'âme* は禁書となります。

一方、彼の「Je pense, donc, je suis.」という言葉があまりにも有名で、物理や数学者としての業績は「デカルト座標」くらいしか意識されなくなっています。しかし、デカルトの基本姿勢である、「複雑な問題は分解して簡単なものにして解決する⁵」というのは、21世紀に至るまでの科学や技術の基本フィロソフィーであり、近年、ようやくこれだけでは解決できない問題が認識されています。

また、身近な影響として変数を x, y で、係数を a, b で表現する事や、べき乗の表現などがあり、

$$y = ax^2 + bx + c,$$

などの表現法はデカルトに負うものですし、ニュートンやライプニッツに解析幾何（つまり座標を使う幾何学）を教えました。私たちに馴染みの深い書き方もこの頃確立し、変数や係数を文字で表現する方法が、数学そして物理学の一般性を飛躍的に高めたたわけです。

物理の分野では光学の研究もあります。球面レンズには収差があり、フォーカスが1点に決まらないが、放物線や楕円面レンズとすれば、収差が無くなることを指摘しています。ただ、レンズ単体の議論にとどまり、望遠鏡のようなレンズシステムへとは発展させませんでした。

力学に関しては、「物体は力が働かなければ静止または直線等速運動をする」と述べ⁶、後にニュートンがまとめた運動の法則の一つはデカルトの考えです。しかし、惑星の運動の原因について「宇宙を満たす流体と渦が惑星の運動を引き起こす」と考えており、これは当時の数学者や天文学者共通の認識となっていました。

3.5 ホイヘンス

ホイヘンス⁷はオランダの裕福な家庭に生まれた物理学者/数学者で、ライデン大学時代にフェルマーやデカルトに微分幾何学を学び、始めて物理の記述に数式を用いました。物理問題を幾何学的に考えるのは、この時代の一般的方法ですが、それにデカルトのアイデアを融合させたのです。

彼は、ダ・ヴィンチやガリレオ・ガリレイのように光学、数学、力学と多方面で活躍したマルチタレントの持ち主です。以下、彼の功績を見て行きましょう。

3.5.1 振り子時計

ガリレオは振り子の等時性を発見しましたが、振り子時計を設計したのはホイヘンスです。ホイヘンスは実際の製作はSalomon Costerに依頼、1657年に完成したと言われています。振り子の等時性には、振幅が小さいことが条件です。しかしホイヘンスは船上で使える時計を考えており、このため

⁵Reductionism と言われます。

⁶アリストテレスも直線運動について同じことを言っています。ただし、永続的直線運動が観測されないため、真空を否定しました。

⁷Christiaan Huygens, 1629年4月 - 1695年7月

に振幅の大きい振り子が必要でした。そこで振り子をサイクロイド状に振らせる工夫をしています。図がそのメカニズムです。振り子の振幅が大きくなったら、押さえ板により振り子の動きをサイクロイドとなる様に規制するのです。図 3.3 の右側に見える「ハ」の字型の部品がそれです。

振り子時計の誕生時点からこれが考えられていたと言うのはホイヘンスの科学的思考の緻密さの現れでしょう。

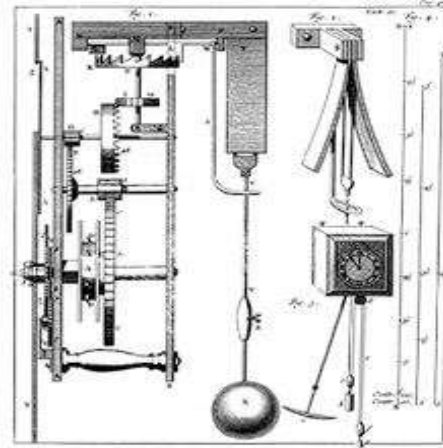


図 3.3: サイクロイド振り子

出典 https://en.wikipedia.org/wiki/Horologium_Oscillatorium

振り子の研究は *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum* (1673) にまとめられ、この中では等速円運動による遠心力、サイクロイド、物体の運動なども議論しています。

3.5.2 望遠鏡光学

ホイヘンスというと光の波動理論が有名なのですが、実際は波動理論の前に幾何光学を確立しています。原論文は失われてしまったのですが、1653 年に発表した「Tractatus」(第 3.6 節 (1)) の中でレンズの公式を導き、望遠鏡の光学設計を論じています。しかも現在の光学では通常、「薄い」レンズとして近似的に扱いレンズの公式を導くのですが、彼は屈折率と光の直進性を論拠にまず一般的なレンズの公式を計算しています。その後、薄いレンズならば可能となる簡略化をしました。

このレンズの理論を基に、望遠鏡の光学系を論じ、自分の兄と共に実際にレンズや望遠鏡を製作しています。当時、ローマの Eustachio Divini が望遠鏡の最高のメーカを自認していましたが、ホイヘンスのものはこれを凌駕し、土星のリングが土星より分離し、軌道面から傾いている事などを発見しています。1656 年でした。1662 年には、2 枚のレンズを使用した接眼鏡を発明、これは「ホイヘンス接眼鏡」として知られています。視野が広がり、収差も小さくなりました。しかも、なぜこのような改善が起こるかを理論的に考察しています。

ホイヘンスは光学理論面でも非常に高度な展開を見せますが、実際にレンズや望遠鏡を製作と言うエンジニアリング、あるいは職人的な面も理解が有り、彼の兄との光学機器製作は十年程続きました。

ホイヘンスは光学の解析を続け、球面レンズの組み合わせで収差が取れることを見出し、実際に設計もしています。しかしこの頃ニュートンが反射望遠鏡を発明、ホイヘンスも彼の方式を高く評価し、ニュートンとの収差に関する議論が始まります。ニュートンは白色光をプリズムで分解、色によって屈折率が異なることを認識しており、このことをホイヘンスに伝えます。しかしホイヘンスは当初球面収差は設計で解決でき、色収差はレンズの材質の問題と考え、論争がしばらく続きました。

ホイヘンスは、レンズの組合わせだけですべての収差がなくなると考えていましたから、色収差が原理的に発生すると、組み合わせレンズによる収差解決の努力を完全に否定してしまうのです。そのため、論争の途中ではニュートンに対し、「白色にするため七色を混ぜる必要があるというのは理論を複雑にするだけだ。青と黄色でも白色が得られる⁸」というような議論も行っており、この頃はまだ光そのものは理解していませんでした。

それでも、ニュートンの色収差の方が球面収差よりも大きくなるという主張を納得せざるを得ず、(屈折)望遠鏡開発に大きな打撃となりました。ホイヘンスは科学者と技術者両方の眼をもち、望遠鏡の性能を上げることに最高のプライオリティーを感じていました⁹ので、ニュートンの結果は相当こたえた様です。

3.5.3 光の波動説

レンズの収差の理論で、ニュートンの色収差が支配的であるという事実は、ホイヘンスがこれまで基礎としてきた幾何光学の限界を露呈しました。当時の幾何光学では光の色の違いを考慮していないので、全く新しい問題が明らかになったのです。

さらに1669年にE.Bartolinにより方解石の不思議な光学現象が報告されます。方解石を通してみると、文字が二重に見え、かつ方解石の向きによって見え方が変わるのですが、この現象の説明がつかないのです。

自分が作り上げようとしてきた光学理論がレンズやガラスの性質ではなく、光の物理的性質によって阻まれてしまい、また方解石の光学特性のように光そのものを考えねば理解不能な事実が表れ、ホイヘンスは、光そのものの物理解釈に取り組みます。1677年頃です。

ホイヘンスは精緻な理論家(しかも実用的な技術家)でしたから、彼にとっての光の物理理論は、今までに分かっている光の性質全てを完全に説明し、かつ方解石の光学特性も説明できねばなりません。今までに分かっている事とは

- (1) 光の直進性
- (2) 光の屈折法則 (Snell の法則¹⁰)
- (3) 光の反射
- (4) 光の収差
- (5) 方解石の光学特性

等です。光の収差や方解石の光学特性以外は、それまでも様々な理論があります¹¹。しかし、色収差つまり光の色の分解(スペクトラム分解)はまだ端緒についた処でしたし、方解石については納得いく理論がありません。

ホイヘンスは光を波動と考える事で、彼の新しい光の理論を作っていくのですが、波動説そのものはHookeやPardiesによって提唱されています。そのため、ホイヘンスが考えたのは波動がどのような形を取ったならば、問題が説明できるかという点であり、ここに彼の精緻さが発揮されます。

ホイヘンスの考えたものは、光は物体により放射される非常に小さな球面波の重なり合いで、それらの包絡線が波面になると言うものです。ただ、ここで「波動」と言われて、注意したいのは、ホイヘンスの考えていたのは沢山の孤立波の重ね合わせで、サイン波としてきれいに連続して発生している¹²訳ではありません。当時はサイン波や、複合波形のサイン波への分解はおろか、周波数という考えも確立していません。

従って、波動説の説明に使われる球面波には周波数や位相といった考えが無く、波面の形と波の強

⁸青と黄色は補色関係にあるので混合すると無彩色が得られます。

⁹土星の環について発見しても、それ以上天体観測にのめり込んだり、望遠鏡ビジネスに専念もしませんでした。

¹⁰通常こう呼ばれますが、984年にペルシャの科学者Ibn Sahlが述べているそうです。

¹¹Descartes, Hooke, Pardiesなどの理論。

¹²これはレーザです。

度のみです。一方、「波」である以上、有限の伝搬速度を持つ必要があり、ホイヘンスはこれを仮定して考え始めました¹³。従って、ホイヘンス理論の骨子は「波である」および「速度が有限、かつ速度は媒質による」の二点です。

それでは、以下波動理論により光の性質をどう説明されるか見ていきます。

【光の直進性】

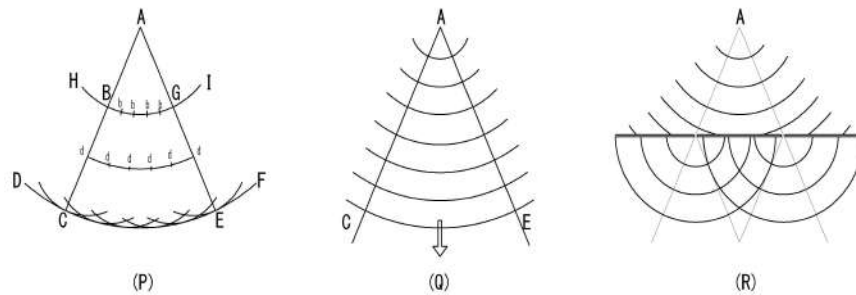


図 3.4: 光の進行の波動説解釈

図 3.4(P) はホイヘンスの著書 *Traité de la lumière* 中の図を書き直したものです。この頃は、光は粒子であり、空間に満ちている粒子が光源からの力で衝突し、これが光を進行させると考えていました。ホイヘンスもこれを意識した説明をしていて、光は発生源 A からあらゆる方向に向いて進みますが、これが途中にある、仮想的な粒子に作用し、そこが新しい波源になるとしました。

この時、波を小さな球面波と考え、中継する仮想粒子が少ない所は、球面波が少なく、次第に波がなくなります。

この球面波の包絡線が波面となり、進行方向は波面と直交します。また、波の強度は距離の 2 乗に比例して弱まりますが、波の強さが特定の方向に強くなるのは構いませんので、光を光束と見ても矛盾は発生しません。

現在の波動の説明では、図 (Q)、(R) のように説明しますが、内容はホイヘンスの図と同じになります。特に (R) には、スリットを通過したあとの回折を記しましたが、これは波動源が新たにスリットのところに出来るのを示すためです。ホイヘンスが回折まで理解していたわけではありません。

【光の屈折】

ホイヘンスの説で、考え方として一番重要なのは、「波」と考えることより必然的に得られる、波の進行速度です。彼はこの速度の違いをもとに屈折を説明していきます。進行速度は媒体に依存し、空気中を 1 とすると、ガラスでは約 2/3 になります。

図 3.5(S) に示すように平行な包絡線の波面を持つ球面波が、ガラスに入射すると、入射した順に速度が遅くなり、従って進行方向が曲げられます。空気中とガラスの境界で、波面は連続で、これは位相関係に変化なしという意味です。

図 3.5(T) で、入射角 θ_1 に対して、

$$\frac{AG}{AB} = \sin \theta_1$$

$$\frac{AN}{AB} = \sin \theta_2$$

¹³ホイヘンスが考えている途中で Romer が光速が有限である事を示し、ホイヘンスにとっては補強材料になりました。

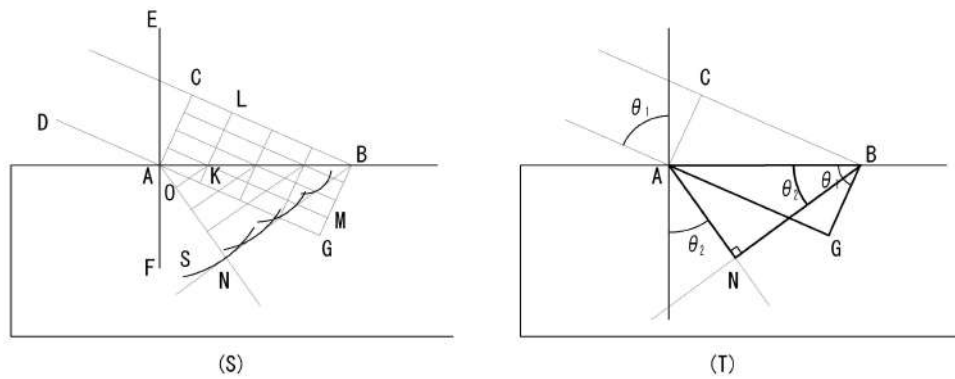


図 3.5: 光の進行の波動説解釈

ですが、光が空气中で AG を進む時間と、ガラス中を AN 進む時間は等しいので、

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

というスネルの法則が直ちに得られます。 n_1 、 n_2 はそれぞれの媒質中の屈折率です。幾何光学では、スネルの法則は入射角と屈折角の関係と理解されますが¹⁴、波動説では異なる媒質中での速度差と考えます。

【光の反射】

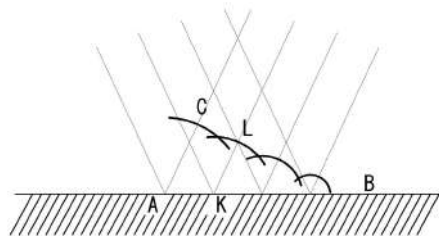


図 3.6: 光の反射

光の屈折の説明の延長で解釈できます。図 3.6 より明らかでしょう。

【光の収差】

これは光の色（波長）による媒体中の進行速度差により発生します。ホイヘンスもこれを正確に説明したとは言えませんが、彼の「光の媒体中の速度」により、色収差を説明する準備完了です。

【方解石の光学特性】

ここはホイヘンスも非常に苦労した点です。彼の考えは、方解石では結晶との位置関係で、光の速度に違いが発生するというものです。この結果、結晶内部での波が球面波ではなく楕円体になると解説しています。ただし、なぜこうなるかは説明できませんでした。彼の時代には「波」に対して振

¹⁴ スネルの法則は実験則です。何故かという説明は含みません。

幅、周波数、位相、振動方向などの概念が確立していませんので、正確とは言えませんが、一応現象が説明できました。今では、光を「偏光」させる結晶であり、偏光による物理現象と理解されています。波の振動の向き（偏光）に、球面が潰れたと考えれば楕円体となります。

3.5.4 力学

ニュートン以前の話題なので、本来は避けるべき「遠心力」、「向心力」という言葉を使います。現在、これらの考えがどの様に不適当かは第5章で述べます。

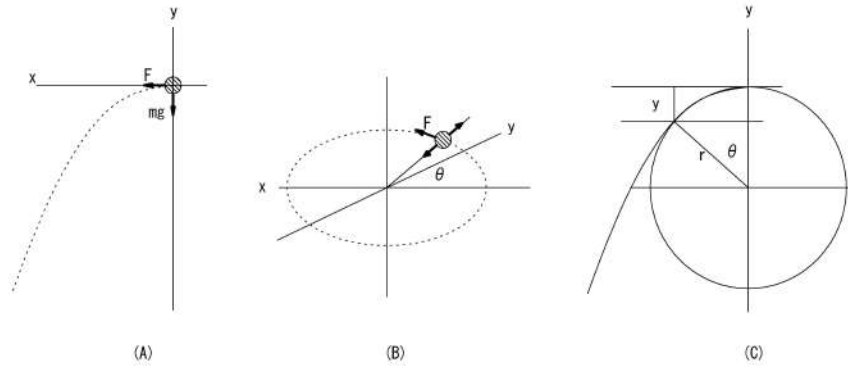


図 3.7: G の計算

ホイヘンスは重力加速度や向心力の研究を行い、向心力を距離の2乗に反比例する力として数式化しています。これはニュートンの第2法則と同じものです。

決して彼の中心的課題では無かったのですが、物体を垂直に落下させた時の時間を測る（ホイヘンスは正確な時計を作りました）という直接的な方法を実験し、やはり中々精度が得られず、理論的考察へと目を向けたのです。彼の頭の使い方、そして当時の力学の方法論が垣間見えます。

図3.7で(A)は適当な高さから物体を水平に投げ、自然落下に任せた時の軌跡です。ある水平方向の力Fが投げる瞬間に働き、あとは重力のみが物体mにかかります。ホイヘンスもこれが放物線になる事を知っていました（ガリレオが導いています）が、問題は重力加速度Gの測定にあります。

図(A)の落下時間の実測定では精度よく決められないので、次のような問題に置き換えました。ひもにつけた物体mを水平面で定速回転させます。すると、物体には遠心力に釣り合う向心力 F_C が働きます。一方円周方向は、回転を開始させる時に物体mに働いた力Fにより運動し続けます。これが(B)です。

さて、ここで、(A)、(B)を重ねると(C)が得られますが、(C)で θ が小さなうちは放物線の円軌道と良く一致します（本当はこれを証明しないといけませんが、ホイヘンスは別の所で、これを計算、知っていました）。つまり円軌道上を動く物体の向心力の計算から重力加速度を求めるのです。

ここでは、実際にどう計算し、Gの値がいくつかになったかではなく、この方法論が正しいというのを証明しましょう。ただし、現在私たちが知っている方法を使ってしまいます。

図3.7(C)を参照すると、

$$y = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta).$$

一方、 $\cos \theta$ をテーラー展開すると

$$\cos \theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

となりますが、最初の項だけを残して、近似すると、

$$y = \frac{1}{2}r\theta^2$$

を得ます。 θ は一定なので、これを時間と読み替えれば、 y が時間の 2 乗に比例するのが分かります。ガリレオが導いた関係がこの様な方法でも得られるのです。

3.6 参考資料

- (1) Dijksterhuis, Fokko Jan
Lenses and Waves
Springer 2004
<https://ris.utwente.nl/ws/portalfiles/portal/6074921/t0000003.pdf>
- (2) W. W. Rouse Ball
A Short Account of the History of Mathematics (4th Edition, 1908).
https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Huygens/RouseBall/RB_Huygens.html
- (3) Hans Freudenthal
Huygens' Foundations of Probability
http://www.staff.science.uu.nl/~hietb101/gnpdf/freudenthal_Huygens_foundations.pdf
- (4) Huygens biography
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Huygens.html>

第4章 ニュートン力学の誕生

私たちが力学で習う原理や法則の中で、アルキメデスの原理とニュートンの運動の法則は最も早い段階で出会う物でしょう。

アルキメデスの原理とは「液体中の物体はそれが押しのけた液体の重さと同じ浮力を受ける」というもので、彼が風呂に入っている時にひらめいたと言われます。内容も、私たちがプールに入った時の感触からも、「何となくそんなものかな」と感じますが、これはそれ程簡単に実験で確認できず、ガリレオが若いころ「アルキメデスは どうやって確かめたのか」という疑問から、その為の実験装置を考えたりしています(第2.3.2節参照)。

このアルキメデスの原理に比べ、ニュートン力学は簡単な数式という形に整理され、ある問題が与えられても、この式に当てはめて計算すればいい、あるいはコンピュータで計算すればいいという位に一般化され、多くの人にとって分かり難いと思わないでしょう。

その位咀嚼され、大学の入試問題としての問題例も解答例も洗練され、ニュートンの法則が生活の中に溶け込んでいるのは「プリンキピア」の内容からは想像不能です。

以下、そのニュートン力学の意味そして、どのように完成したかについて見ていきます。

4.1 ニュートン

【大学時代まで】

ニュートン¹は1642年 Lincolnshire, Woolsthorpe に生まれました。父親はニュートンが生まれる前に亡くなり、ニュートンも未熟児でした。生存が危ぶまれたのですが、幸いにも成長し、12歳でグランサムのパブリックスクールに入学します。この頃まではあまりできの良くない子供と思われていました。しかしある時から、急に才能を発揮し始め、この才能はこの後も維持され続けたのです。彼は、非常に器用で、鋸やハンマー、手斧などの道具を使いこなし、グランサムの近くに風車を建てたりしています。時間の計測にも興味を持ち、水時計や日時計を製作、特に Isaac's Dial と呼ばれた日時計は村人にあてにされたそうです。

18歳で ケンブリッジの Trinity College に入学します。1660年です。大学ではユークリッド幾何、デカルトの解析幾何、ウォリスの求積法²、バロー³の無限小解析、ケプラーの光学などを学んでいます。

【二項定理の一般化】

大学の教授職に就ってから5年後(1665年)頃に、二項定理の一般化⁴に成功しているのですが、これはこの後のニュートンの研究の強力なツールとなります。そこで、二項定理がどう求積法に使われ

¹Sir Issac Newton, 1642 年 12 月 - 1727 年 3 月。

²John Wallis, 1616 年 11 月- 1703 年 10 月。ニュートンのケンブリッジ時代の数学の先生。立体を高さ h で割切りにし、1,2,3... と番号と付け、これを無限大にして輪切りを加え、体積を求めるという方法を述べています。しかし、 h を有限の値としたまま、無限大の輪切りを考えるなど、論理が未熟です。

³Isaac Barrow, 1630 年 10 月-1677 年 5 月。

⁴かのモリアーティ教授が19世紀後半に発見したとコナン・ドイルが書いているところを見ると、ドイルは数学には疎いでしょう。

たか見ておきましょう⁵。

ウォリス先生は

$$\int_0^1 (1-x^2)^r dx$$

を議論していますが、ニュートンはこの積分の上限を変数 x にして

$$\int_0^x (1-x^2)^r dx$$

を考えます。特に、 $r = \frac{1}{2}$ の場合、

$$\int_0^x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 \dots$$

が得られます。ここで、 $r = \frac{1}{2}$ の場合

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

は

$$x^2 + y^2 = 1$$

ですから、半径 1 の円です。そしてこの円の面積は既知 (π) ですから、

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 \dots = \frac{\pi}{4}$$

となります。つまり、多項式の計算により $(1/4)$ 円の面積が計算されたました。

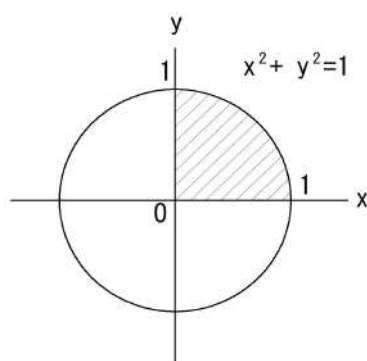


図 4.1: 円の面積

ニュートンは、上記のような事柄を考えながら、点の動きが曲線、線の動きが曲面、曲面の動きが曲面体を生むというように一般化しました。また、横軸を時間とみると、得られる結果は、単なる曲線や曲面ではなく、時間によって変化していく量となります。つまり、静的な図形ではなく運動の状態を表現していると考えたのです。このように、二項定理の一般化は種々の形状の面積計算を可能とただけでは無く、物体の運動に結びつきました。

なお現在、二項定理は組み合わせ記号を用いて、

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_r x^{n-k} y^k$$

と表現されます。

⁵現在使われるライプニッツの記法で書きます。

【光学の研究】

ガリレオやケプラーの望遠鏡が宇宙のとらえ方に大きな影響を与えたように、光学は当時、多くの科学者や数学者が関心を持った分野です。特に幾何光学はホイヘンスによる研究が決定的ですが、ニュートンは自分でレンズを磨いたりしている内にレンズそのものの特性に疑問を持ちます。そこでプリズムを使用して、レンズの特性を考え、光が単一ではなく複数の成分から構成されていると結論します。これが、光のスペクトラム分解です。しかしこの頃にペストの流行があり、故郷に暫く戻っています。1666 年でした。

光学の研究は暫くの中断の後、1668 年にケンブリッジに戻ってから再開されます。そしてまず反射望遠鏡を手作りします。長さが 180cm、倍率は 40 倍でした。この成功に気を良くし、まもなく次の望遠鏡を製作、1671 年にはこれがロンドンの王立協会で公開され高い評価を得ました。このころ協会の会員にもなり、彼の光の理論も論文として公開されました。

ニュートンの光のスペクトラム理論はじきに、強い反論があり⁶、結局説得したもの、ニュートンは論争に随分疲れ、後悔したようです⁷。

1675 年には、物質が透明や不透明となる理由、また物質が色を持つ理由などを Theory of colours of natural bodies の中で、光の粒子説をもとに説明しています。またこの過程でニュートンリングを見つけ出しています。ニュートンリングは光を波動とすれば容易に説明されるのですが、ニュートンは粒子と考えたため、苦しい解説となりました。

【万有引力の法則、運動の法則】

最初に引力の着想を得たのはペストを避けるため、故郷に帰っていた 1666 年だと言われます。リンゴが木から落ちる話はともかく、物体が地面に落ちるのは、何らかの力で引かれるからと考えました。そしてその力が地上の物体だけではなく、月にも及ぼすのではと想像したのです。もし、そうならば火星や木星など他の惑星と太陽間にも同様の事が言え、力の働き方をこれら惑星の軌道と周期から計算し 2 乗に反比例するだろうと予測しました。早速計算してみたのですが、データの精度が悪く、考えとは合いません。

このあと長い間ニュートンはこの問題を暖めていて、ようやく 1679 年になって王立協会の広報担当をしていたフック⁸に、月の軌道の測定を提案します。この時ニュートンは、高い山から水平に物を投げると、投げる速さが速い程遠くまでとどくが、十分な速度ならばその軌道はらせんを描くと考えました。つまり、地球を一周するくらいの距離を想定（思考実験）したのです。フックとの議論の中から、ニュートンは楕円軌道に気づき、楕円を調べ、惑星は距離の 2 乗に反比例する引力により楕円軌道を描く運動をするという考えに至ります。

そして 1682 年に、地球の子午線の計測値を知り、これから地球の直径を得、ケプラーの第 3 法則を計算しなめました。この結果 16 年前に試算した時とは全く異なり（この計算は第 5 章、第 5.6.4 節参照）⁹、月が地球の周りを運動する力と、地上の物体が地球に引かれる力は同じものだと結論します。

この結果をもとに 3 巻からなるプリンキピアは 1686-7 年にかけて出版されました。この中に、万有引力、運動の法則すべてが書かれています。

⁶特にフックとホイヘンスからです。

⁷一方、ホイヘンスも「色収差」という事実はおおきなダメージでした。

⁸Robert Hooke、1635 年 7 月-1703 年 3 月。フックは王立協会の中で、種々の実験を試みていました。

⁹ニュートンが簡単に計算してみると、まさに考えていた通りの結果が予想され、あまりの驚きにそれ以上計算が続けられず、友人に細かい計算を頼んだそうです。

4.2 ニュートン力学の誕生

4.2.1 ニュートンの法則

【デカルトの影響】

デカルトは惑星の円運動などを、エーテルの渦によるものとし「円運動」と直線運動を別物と考えていましたが¹⁰、ニュートンはすべて直線運動であると考えているにいたります。

ニュートンは、運動方向と直角に連続的な力が働き、直線運動が軌道変更された結果、円運動や楕円運動になると考えました。

デカルトは物体の衝突も研究していて、ニュートンは直線運動と、この衝突についてのみデカルトの考えに同意、以下の2法則に至りました。

慣性の法則： 物体は力が加わらない限り、静止または等速直線運動をする。

作用・反作用の法則： 二つの物体の間に力が働くとき、物体1から2に働く力は、物体2から1に働く力と向きが反対で、大きさは等しい。

この「直線運動がすべて」という単純化は当時の学者にとって正に革命的な考えですが、私たちにとっても、これから議論するニュートンの真意を理解するためのキーワードです。

【ガリレオの影響】

ガリレオは「運動距離は時間の2乗に比例する」すなわち

$$d = \frac{1}{2}at^2$$

を示しましたが（第2.4.2節）、これから、物体を水平に投げた時の放物線運動がただちに得られます。この放物運動は水平方向での等速直線運動と、垂直方向の等加速度運動とに分解できます。等速運動については、運動中には力が働いておらず、初期値のみで決まるのに対し、等加速度運動は連続的に力が加わる運動であり、移動距離は質量には依存しません。

この考察から、質量を m 、力を F とすると、加速度 a との間には

$$a = \frac{F}{m} \quad : \text{運動方程式}$$

という簡単な比例関係が成立するとなりました。

【ニュートンの独創】

ニュートンの大きな関心事は惑星の運動でしたので、木星の衛星¹¹や土星の衛星の公転周期はその半径の3/2乗に比例するというのを知っていました。またケプラーにより、

(A) 惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円である

(B) 惑星の軌道が描く面積は一定

(C) 惑星の（平均）公転周期は太陽までの距離の3/2乗に比例する

の3法則が示されています。

¹⁰ コペルニクスにせよケプラーにせよ、天体（宇宙）の運動は終わりのない円運動が基本と考えて来ました。この考えはアリステレスにまでさかのぼります。

¹¹ ガリレオが、4個の衛星、イオ、エウロパ、ガニメデ、カリストを発見しています。

ニュートンはケプラーの法則（上記 (B)、(C)）より、まず太陽と惑星間に働く力は距離の 2 乗に反比例することを示します。

$$F \propto \frac{K}{r^2}, \quad K = \text{constant}.$$

次に、太陽と惑星の間の力は、惑星と衛星との間に働く力と同等と考え、木星の衛星について考えます。木星の衛星は円軌道を描くので、公転半径を R 、質量を m 、速度を v とすると、

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

であり（第 5.6.1 節参照）、公転周期 T は

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

なので、力は、

$$F = \frac{4\pi^2 m R}{T^2}$$

となります。一方ケプラーの法則より、

$$T^2 = kR^3.$$

従って、

$$F = \frac{4\pi^2 m R}{kR^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \frac{1}{R^2}.$$

これは木星が衛星に及ぼす引きつける力ですが、衛星が木星を引きつける力に等しい筈なので、木星の質量を M とすると、

$$Mm \propto \frac{4\pi^2 m}{k}$$

が得られます。これらより、 G を比例係数として

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

が結論されました。

ここまでは、惑星と太陽、惑星と衛星との引力の関係でしたが、これを地球が地上の物体に及ぼす力、さらには物体が別の物体に及ぼす力と考え、物体間の力を

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad : \text{万有引力の法則}$$

と表現しました。天体以外も含むという意味で、距離を小文字 r で書き換えてあります。

【ニュートンの法則の確立】

ニュートンの法則も最初はすべて仮説で始まり、ケプラーの（観測による）法則を証明して始めて、物体間の力、そして運動の法則として確立されました。この間二十年以程かかっています（確証が得られるまで発表しませんでした）。ここには、神秘的な円運動も、物体には働くが、運動には影響しないという都合のいいエーテルも存在せず、天上界地上界の区別も無し、驚くべき単純化があるのみです¹²。

¹²これがニュートンの天才を示し、当時の人々にとってはとんでもない認識革命です。このような認識の不連続ジャンプはアインシュタインの相対論、量子論の創始を思わせます。

4.2.2 ニュートンの法則の大前提

ニュートンの法則の大前提として「力」とそれを認識（測定）する基準、つまり「座標系」を定義する必要があります。ニュートンの法則が成立する座標系を慣性座標系と言います。しかし、実用面（天体の運動の様な周回運動など）で、非慣性座標を使用するのが便利で、この非慣性座標の力の扱い方に関して、今までの力学の教科書は無頓着な傾向があります。この点に関しては、主として第5章で議論しますが、「遠心力」「コリオリの力」等の話題になった時に、ご都合主義が露呈します。ニュートンのフィロソフィーを正しく理解すれば、この様な妥協を必要としません。

【力の定義】

まず「力」とは、その源が存在するものに限ります。具体的には「物体間の引力」「電気力」「磁気力」の3つです¹³。従って、乗り物が急発進する時に感じる力はその発生源が存在せず、「力」の中には入れません。同様に、回転するテーブル上で中心から端に向かって物を転がすとその軌跡は曲線となり、これも「力」が働いた結果と同じように見えますが、「力」からは除外します。

【慣性座標系】

ニュートンの法則を議論する土台となる座標が「慣性座標」です。慣性座標とは、等速直線運動をしている座標で、これに平行な座標は無限にあります。ひとまとめにして「慣性座標系」と呼びます。座標自体が直線的に加速しているもの、および原点は等速直線運動でも、この周りに回転しているものは慣性座標ではありません。

例えば、ボールを投げた時の運動を考えるならば、地球上に固定したデカルト座標が慣性座標になります。

一方、地球から惑星などの位置を論じるには、仮に地球に固定したデカルト座標を使用しても、地球の自転による回転があり慣性座標とはなりません。この場合は宇宙に固定した座標が慣性座標となります。

【非慣性座標での仮想的力】

最も頻繁に出現する非慣性座標は、回転体を扱う時に使用する、極座標です。この使用はほぼ避けられませんので、極座標は、非慣性座標であることを意識しながら、注意深く使用すべきです。

デカルト座標を使って問題になる例として、軍艦から砲弾を南（北）向きに発射すると、弾がそれてしまう問題があります。これは地球上に固定したデカルト座標が地球の回転のため、慣性座標と見做せなくなるためで、このつじつま合わせのために仮想的な「コリオリの力」などを使い説明されてきました。乗り物の発進時に感じる加速度による力も、乗り物中にデカルト座標を設定すると、加速/減速時には非慣性座標になってしまうためで、できるだけ「見かけ」の力を導入する必要のない慣性座標を選ぶべきです。

これらの座標に関する実例については第5章で議論します。

【遠心力、向心力】

遠心力（centrifugal force）はホイヘンスにより、向心力（centripetal force）はニュートンにより名づけられました。物体にひもを付けて回転させると、引っ張られる力を感じますから、この回転

¹³物理学で言う力にはこの他に「弱い力」「強い力」がありますが、古典力学ではこれらは扱いません。

中心から離れようとする力を遠心力と呼びます。従って、この様に回転する物体の力に関して、「物体の遠心力と向心力が釣り合って周回をする」という言い方をすることが少なくありません。

しかし、「遠心力」には力の発生源（他の質量や電磁気力）がありません。従って、本来「力」と考えるべきでは無いもので、ニュートンはこれを排除するため「向心力」という言葉をつくったのです。「遠心力」が回転体の運動を決めている訳では無く、回転中心に向かう力が軌道修正を掛けているのです。これは、ひものない天体を考えれば明らかで、本来なら直線運動をする天体が周回運動をするのは、その回転中心にある力の源（質量）に向かっていつも力が働き続けるからです。

このニュートンの運動の法則に従い、現在では遠心力は極座標を使用した時のみ出現する仮想的力と考えられています¹⁴。

一方、「向心力」についても、重力および電磁気力以外の「第4の力」という印象を与えかねず、本書でも誤解が発生しない様、できるだけ使用しない予定です。

「...demons like “centrifugal force” ... which must be expunged from the list of forces.」;
Michael Cohen (参考資料 4.4.4 (9)).)

4.2.3 ニュートンのプリンキピア

【プリンキピアの記法】

ニュートンが彼の運動の法則を明らかにしたのは 1687 年刊行の「プリンキピア」(Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica) という、3 巻で優に 500 ページを超える本の中でした。ラテン語で書かれており、基本的にイギリスおよびヨーロッパ大陸の学者向けの内容で、英語に翻訳されたのは 1729 年です (1726 年の第 3 版の翻訳)。

現在では、この英語版が pdf で公開されており、誰でも読む事が出来ます (第 4.4.4 節 (1))、英語に翻訳されるまで 40 年以上経っている訳です。

現代の英語から見ると、やや難しいのですが、決して読めない訳ではありません。しかし、英語圏を含め、殆ど書かれた当時から「難しくて読めない本」として有名です。ですから、現在の私たちがニュートン力学を勉強する際に、これを原本として参照する事はしません。理由は、ニュートンの悪い癖で、原稿をまとめた後に分かった事、気付いた事を適宜本文に追加し、全体を整理しなおさない、あるいは用語の使い方が現在とは異なっているという点にもあります¹⁵。しかし、本質的な難しさ（や面倒さ）は記述法がすべてユークリッド幾何学的記法を取っているからだと思われます。

ニュートン自身は、デカルトの解析幾何も読んだのですが、この方法があまり好きになれず¹⁶、終始ユークリッド幾何学を用いて記述しています。

ユークリッド幾何学を用いた、プリンキピア流の証明については、第 4.4.1 節に、ケプラーの第 2 法則の例を記します。プリンキピアにはもちろんケプラーの第 3 法則に関する証明もあり天体の動きを証明しつくしています。さらに地上のように空気があり、摩擦のある場合の運動なども扱い、最初から完成された力学を構築しました。しかし、今の私たちがこれを読む必要はなくなっていて、一つの例を見ればニュートン流の「書き方」はわかるでしょう。

¹⁴ それでも工学的には「遠心力」も極く一般的に使います。工学の場合、自動車のタイヤのように中心と周辺が機械的に結合されているのが普通で、周辺の質量分布にムラがあると振動の元になるなど、「向心力」より「遠心力」の方が実情を良く表現するからでしょう。

¹⁵ この意味ではラテン語の第一版、あるいはそれ以前の On Motion の方が論旨が通じやすいそうです。またニュートンも自覚していて、ごめんなさいと言っています。

¹⁶ プリンキピアにはガリレオの功績は示されているのに、デカルトについては何も書かれておらず、ニュートンはデカルト嫌いになったという説があります。

【プリンキピアの評判】

ユークリッド幾何学は、命題（定理）とその証明集という構造をもち、全体としてのフィロソフィーを表現するものではありません。一方ニュートンの法則のように、いくつかの数式があれば表現可能なフィロソフィーを、命題とその証明というユークリッド幾何学形式に収めようとするのは、現在の私たち（そして当時の学生たちにも）にとって兎に角分量が多くなりすぎます¹⁷。

ラグランジュもニュートンの本を、「私ならこう書く」と言って、彼の「解析力学」を書き¹⁸、「私の本には、図は一切無い（から安心してね）。」と記しています。ラグランジュにはニュートンや当時の学者たちの幾何学的無限小の扱いが大いに不満だったようで、この批判がニュートン力学を超えていくのですが、これについては第9章で述べます。大変さについてはニュートンも自覚しており「第1巻の、定義、運動の法則、そして最初の3節を注意深く読めばいいですよ」と書いています。

またイギリス外での当時の評価は散々で、ライプニッツは遠隔作用論に反発、ホイヘンスは一部否定、ベルヌーイは反対という具合で、後にボルテールの言った「ニュートンの本は40年以上もったが、彼の死後、理解者は大陸には20人もいないだろう」という状況でした。

ところが、このような歴史を経た現在、ニュートン力学を語るには、引力と運動の3法則を述べ、あとはいくつかの例題を示すという事で済んでしまうのです。これほどの大著がたった数行の数式に凝縮されてしまったというのは科学史上他に無いのではと思います。それ程基本的な法則を述べたのです。

【プリンキピアの微分】

微分や積分は理工系の人にとっては必須の考え方ですが、微分 (Differential) という呼び方も、 d/dx という記法も、実はライプニッツに由来し、ニュートンが呼んだ「fluxions」という呼び方は使われていません。ニュートンとライプニッツの先人争いは、第4.3.2節に記しますが、現在の記法は、実際どちらが早かったかを反映しているのではなく、代数的記法が幾何的記法よりも明確に使い易く、その本質を簡明に表現できる点にあります。

ニュートンがプリンキピアを古典幾何学風に記述したことは既にものべましたが、微分の基本的考え方である、極限の扱い方まで代数的ではなく、幾何的に扱っています。このため、プリンキピア中に私たちが想像するような形での、微積分は明示的には出現せず、その基本的フィロソフィーは「存在するが隠れている」状況です。

具体的な微積分の記述はむしろ、1669年に書かれた文書「On Analysis by Equations with an Infinite Number of Terms」の中に述べられています。

4.2.4 ニュートン力学への批判

ニュートン力学では、引力は距離に関わらずゼロ時間で働くと考えます。いわゆる遠隔作用論 (action at a distance) です。これが科学的に否定されるにはアインシュタインを待たねばなりませんが、この考え自体は当時直ちに批判されています。

ライプニッツは、ニュートンの本を読んで、「遠隔作用を考えるなんて、まるでオカルト時代に逆戻りだ」と言っています。この背景には、デカルトによる「エーテルの渦」、つまり何か実体のあるものが宇宙に存在、それが物体を具体的に押すから運動が発生するという考えがあり¹⁹、力が働く原因の説明が無いのが不満だったのです。

¹⁷一方、新しい考え方を微積分という新しい方法を用いて書いてしまうと、当時の学者たちにとっても、大変すぎたでしょう。

¹⁸Mécanique Analytique, 1788

¹⁹このような状況でのライプニッツの批判で、ライプニッツが決して場の理論などを念頭においていた訳ではありません。

ニュートンも始めはデカルト風に考えていましたが、「エーテルの渦」が本当に力を及ぼすならば、それは摩擦としても働き、「天体の永久運動と矛盾する筈」で、やがてデカルト説を否定します。そして、ニュートンは「力の働く原因」は棚上げにし、数学的に表現するには、どうあるべきかと考えたのです²⁰。

4.3 ライプニッツ

ライプニッツと言う名前からまず思うのは数学者ですが、彼は現在では存在しない、マルチタレントの天才、しかも天才にありがちな付き合いにくい部分の無い偉人でした。

ライプニッツのキャリアを見ると、微分や積分を応用して何かの問題を解かねばならない状況は見当たらず、彼にとっての数学は、第三者からは趣味の領域に見えます。しかし彼にとっては、国王のアドバイザー、外交官活動、ハノーバー家の歴史編纂、数学の研究もすべて自分の主活動でしかなく、特にどれかに重点を置いたという形跡がありません。

また、ライプニッツがいかに多忙で、多くの仕事をこなしたかは、200,000 ページにおよぶ文書を残したのでもわかります。2012 年現在、彼の文書の半分程しか活字にまとめられていません。

現在の私たちにとっては、微積分に関して最もライプニッツに負っていますので、数学者として彼がどの様に考えていったかにできるだけフォーカスします。数学者としてのライプニッツはパリ時代が幕あけで、彼がどの様に微積分を考えていったかは第 4.3.3 項で述べます。

この項の出典は注記 4.4 の (4),(5),(7),(8) です。

4.3.1 ライプニッツの人生

ライプニッツ²¹ は 1646 年、ライプツヒにライプツヒ大学教授の息子として生まれます。ライプニッツが 6 歳の時に父親が他界したため、主として母親に育てられました。父親は大学のルター派の神学者でしたが、自宅には幅広い書籍が揃っており、ライプニッツは小さい時からこれらを自由に読むことができ、後の彼の柔軟な考えを育みました。13 歳までにはラテン語をマスターし、14 歳でライプツヒ大学入学、15 歳には学士号を得るなど極めて早熟です。

1664 年には修士号取得、1666 年に博士論文を提出しますが、これが却下されてしまいます。この時 19 歳という年齢が理由でした。そこで彼はライプツヒ大学を去り²² ニュルンベルグのアルトドルフ大学 (University of Altdorf) 入学、ここで 6 週間後には博士号を得、かつすぐに大学の教授職に推薦されています。

しかし、ライプニッツはこれを断り、マインツ選帝侯²³ に仕えます。ここで Boyneburg²⁴ に非常に可愛がられマインツ選帝侯のブレインとして極めて多忙な生活を送ります。この中には、1672 年に、フランスのブランデンブルグ選帝侯国に対する軍事的介入をそらすために、エジプト侵略のメリットを構想、フランス国王ルイ 14 世に進言するために外交官としてパリに出かけるミッションがありました。当時フランスはスペイン領ネーデルランドともめており、ネーデルランドにフランス軍が侵攻すると、隣に位置するブランデンブルグ選帝侯国も困る訳です。

しかし、パリに到着する前にイギリスとオランダの戦争開始、フランスも間もなくこれに加わり、ライプニッツの構想は徒労に帰しました。落胆した筈なのですが、ライプニッツはパリの知識階級との交流におおきな刺激を受け、パリに居るのが楽しくて仕方ありませんでした。パリにいたホイヘンスとも出会い、ホイヘンスに数学を学ぶようになります。またロンドンに自分の開発した機械式計算

²⁰ この立場は、ディラックなどの学者が量子力学を構築した態度を思わせます。

²¹ Gottfried Wilhelm Leibniz. 1646 年 7 月-1716 年 11 月。

²² そして生涯ライプツヒには戻りませんでした。

²³ Johann Philipp von Schönborn, Catholic Elector and Archbishop of Mainz. 1605 年 8 月-1673 年 2 月。

²⁴ Johann Christian Freiherr von Boyneburg 1622 年 4 月-1672 年 12 月

機を持って出かけ、王立協会で披露したこともあり、ニュートンにも会い、手紙のやり取りもしています。こうしてライプニッツの名声は高まっていったのです。

ライプニッツにとり、パリは魅力的²⁵で、フランス科学アカデミーの会員になりたく運動しますが果たせず²⁶、仕方なく、ハノーバー選帝侯²⁷Johann Friedrich の招きを受け入れます。1676 年でした。のちに Privy Counselor of Justice に昇進し、終生この職にとどまりました。ハノーバー家からはイギリス国王ジョージ 1 世も即位、イギリスと同君連合体制となりましたが、ライプニッツがジョージ一世と共にイギリスに渡る事はありませんでした。ニュートンとの論争が影響したのです。

4.3.2 ニュートンとライプニッツの争い

ニュートンとライプニッツの間の微分、積分の先駆者争いは、それぞれ独立に考え出したと決着がついて居ます。またこの問題を詳細に語りたい訳ではありませんので、簡単に述べておきます。

ニュートンもライプニッツも、1700 年頃まではお互い微積分は独立に思いついたという考えを持っていました。しかし、ニュートンの周りに居た学者や、そもそも事情をよく分かっていない学者たちがライプニッツがニュートンの考えを盗用したと主張し、ライプニッツも、当初はニュートンが先に微積分の考えを持っていたのを認めながらも、ニュートン派に反論する内に泥沼に入ってしまった（この中には、ベルヌーイが勝手にニュートン派を批判し始めるなど、外野が介入しています²⁸）。

この論争は 1684 年、ライプニッツが微積分に関する論文を Acta Eruditorum に発表した頃にその芽があり、1700 年頃論争が始まりました。ピークは 1710 頃で、この時ニュートンは王立協会の会長、ライプニッツはプロイセンの学会プロイセン科学アカデミー²⁹の会長であり、個人的な事実よりも、イギリスとプロイセンの愛国闘争の様相を呈しています。この論争はライプニッツの死後まで続きます。

4.3.3 ライプニッツの微積分

1673 年-1676 年頃、つまりパリに滞在していた頃に着想を得て、1684 年に出版されました。彼の発想のキーワードは、「無限」とは何かです。ガリレオが示した、自然数と自然数の 2 乗数の数は等しいというのは、ユークリッドの公理である「全体は部分より大きい」というのをいとも簡単に否定してしまいます。ライプニッツには、(当時の) 数学で無造作に使われる無限大が信じられず、「任意に与えられた量より大きい量」と定義します。これは量の定義として、ある状態として静的に定義するのではなく、「もし…ならば」という風に動的な定義としたものです。

無限大を考えるのは無限小を考えることになりますから、ライプニッツは無限小につながる、不可分量(indivisibles)を考えます。「不可分量は量ではない」というのが定義でしたが、Cavalieri³⁰の著書には「不可分量とは、線上の点、平面上の線、立体中の曲面」とありました。彼は、不可分量とは「無限小」、「(小さな) 数を割ると無限大を与える量」などと考え、1673 年に「任意に与えられた量よりも小さい量」という、無限大と同様な動的定義に至りました。

これは後に Weierstraß³¹ が定義した $\varepsilon - \delta$ 論法(第 4.4.3 節参照)と呼ばれるものの原型といえます。

²⁵ バスカルに会い、スピノザのサロンに出入りしています。

²⁶ すでに外国人会員が多すぎるという理由で。同様の理由で王立協会の会員になるのが大変でしたが、こちらの方は 1673 年に選定されています。

²⁷ ブラウンシュヴァイク＝リュネブルク選帝侯。

²⁸ ただしベルヌーイの介入は brachistochrone 曲線という物理数学上面白い問題が契機なので、別途述べます。

²⁹ Society of Sciences of the Elector of Brandenburg, 現在は Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities です。

³⁰ Bonaventura Cavalieri, 1598 年-1647 年 11 月。

³¹ Karl Weierstraß, 1815 年 10 月-1897 年 2 月。

このような定義のもとに考えていたのに、彼の書いたものは生前には発表されず³²、何かとライプニッツの方法は厳密性を欠くと批判されてきました。しかも、ライプニッツは「この定義は、わかりにくいので勉強を始めたばかりの時は省略し、少しわかるようになり、厳密性が気になりだした所でもう一度読めばいい」とまで言っています。微積分を学び始めた高校生くらいの頃には $\varepsilon-\delta$ 論法が、特に「なぜこういう構造の議論をするのか」という面から分かりにくいのを承知していたのです。

求積法（定積分です）は、どんな曲線に囲まれる面積でも、それを無限に細かく区切りそれらの細かい部分の面積の無限和として計算します。この点に関しても、ライプニッツは本質を一言で、「どんな曲線も小さく区切るとそれは直線のつながりになる」と言います。ある点の微分係数が *tangent* になることとも等価です。

このような考えは正に、現在の私達が微積分を学ぶ時の非常にオーソドックスな方式と一致しており、ニュートンの微積分の導入の仕方とは全く異なります。ニュートンとの論争を思うと、このような考えを示していたら、独自に構想したのは疑いようがなかったのと思われれます。

また、ライプニッツは微分と積分を当初から逆演算として考えておりましたが、求積法に関しては、ライプニッツはアルキメデス程厳密ではありませんでした³³。

4.4 注記

4.4.1 ニュートンによるケプラーの法則の証明

プリンキピアの第1巻で、ニュートンは万有引力の法則および運動の法則を基に、ケプラーの（観測による）第2、第3法則を数学的に証明します。すべて幾何学的証明ですが、非常に精緻で、しかも3通りのモデルについて議論しています。ここでは、その中で、最初に述べられかつもっとも単純なモデルにを用いた、第2法則の証明を記します。

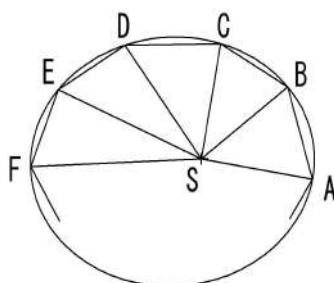


図 4.2: 軌道の直線近似

ニュートンは図4.2に示すように、惑星の運動を直線運動の組み合わせとしてモデル化、点A、B、C、…で軌道の焦点Sに向いた力が瞬間的に働くと考えました。これは実際の円または楕円軌道の内側を弾性的に衝突しながら直線運動するというモデルです。そして、この衝突間隔をどんどん小さくしていけば、最終的に考えている軌道に一致すると主張、ここに微分の考えがあります。

図4.2を、幾何学的証明するために、書き直したものが図4.3ですが、これは実際プリンキピアの定理1の証明に使われているものの写しです。

以下の議論で、ニュートンが使用するのは、慣性の法則と、物体に働く力が特定の点Sに向いているという2点のみです。力の大きさや、力の性質（距離の逆2乗に比例とか）は仮定していません。

³²1993年に発表された、第4.4.4節資料(6)です。

³³これはライプニッツだけではなく、厳密さを再獲得するのは19世紀半ばです。高木貞二；解析概論、第三章。

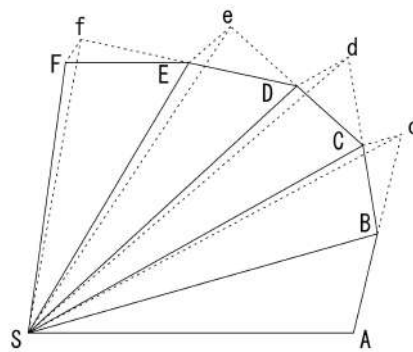


図 4.3: プリンキピア、定理 1 の図

物体に等時間 t 間隔で、点 A、B、C、D、E、F…に点 S に向かう力（インパルス）が働き、この力は物体の軌道修正をするだけとします。この時、もし B 点でこの力が働かないとすると、物体は時間 t 後には点 c に到達します。等速運動ですから、当然

$$AB = Bc.$$

B 点で力を受けると Bd 方向に直線運動しますが、時間 t 後に再び力を受けて、軌道が変化します。この時の C 点は、 Bc を SB に沿って c が Bd 上に重なるまで平行移動した点となります。

ここで、 $\triangle ASB$ と $\triangle BSC$ の面積が等しくなることは以下の様に証明されます。

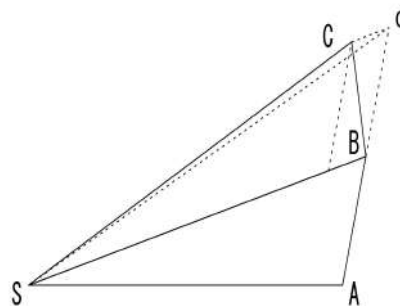


図 4.4: 等面積の証明

図 4.4 において $\triangle ASB$ と $\triangle ASc$ は共通の底辺をもち、かつ $\triangle ASc$ は $\triangle ASB$ の 2 倍の高さですから、面積も 2 倍となります。一方、 $\triangle BSc$ と $\triangle BSC$ は共通の底辺を持ち、点線で示した平行四辺形を参照すると、高さは等しく、従って面積も等しくなります。即ち $\triangle ASB$ と $\triangle BSC$ の面積が等しくなり、これでケプラーの第 2 法則が証明されました。

ニュートンはさらに、描く軌道が直線ではなく円軌道（つまり力が常に働く）場合および楕円軌道に関しても同様の、しかし大分込み入った証明を与えています。

この証明より、慣性の法則と、力がある 1 点に向いた向心力でありさえすれば、「周回運動が単位時間に描く面積が一定となる」という結論が得られます。実際、ニュートンは力が距離の 3 乗、5 乗に反比例する例（物理的には存在しません）も計算しており、この点は今の私たちから見ても驚きの結果です。

また、距離の 2 乗に反比例する引力が働く時のみ、軌道は楕円（円を含む）軌道となります。

4.4.2 π について

円周率を π と表すのは、1706 年に William Jones が彼の本で使用したのが始めて（ただし、彼は John Machin の記法を使用したと書いています）と言われているので、ニュートンは「 π 」の記法を使用していません。（出典：<https://en.wikipedia.org/wiki/Pi>）

また、 π の無限項の積表現は、François Viète により

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \dots$$

あるいはウォリスにより

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots$$

と書かれており、ニュートンも、もちろんこれを知っていました。

4.4.3 $\varepsilon - \delta$ 論法について

数学的には、ある関数 $f(x)$ の変数が a に近づくと、関数の値が b に近づく

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ such that } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

の様に書かれます。ここで \mathbb{R} は実数の集合です。

ライプニッツに言われるまでもなく、一体何を言っているんだろうかという表現です。この定義は Weierstraß によるもので、上の定義を日本語で記述すると、「もし関数 $f(x)$ と b の差を ε 以下にした時は、ある δ が必ず存在し、それを $0 < |x - a| < \delta$ となるように選べばいい」となります。

ポイントは、「無限小」という概念を有限の値 ε, δ を使って定義したことにあります。「無限小」という静的な概念をある操作という動的なものに置き換えたとも言えます。

4.4.4 参考資料

(1) Sir Issac Newton

Principia; Mathematical principles of Natural Philosophy

translated by Andrew Motte, Daniel Adee, New York 1846

http://redlightrobber.com/red/links_pdf/Isaac-Newton-Principia-English-1846.pdf

これは第三版をアメリカに紹介するために印刷されたものです。「Life of Sir Isaac Newton」

という解説がついており、参考になります。また pdf では、一ページ程、写真によるコピーが漏れています。気になる方は Project Gutenberg にラテン語版がありますので、それと比較すればいいでしょう。

(2) Brackenridge, J. Bruce

The Key to Newton's Dynamics: The Kepler Problem and the Principia.

Berkeley: University of California Press, 1996.

<http://ark.cdlib.org/ark:/13030/ft4489n8zn/>

<https://publishing.cdlib.org/ucpressebooks/view?docId=ft4489n8zn;query=;brand=ucpress>

プリンキピアの読み方の解説で、こちらの方が原本よりも適当でしょう。

(3) 上垣渉

はじめて読む数学の歴史

ベレ出版, 2006

(4) Richard Arthur

Faculty of Humanities, MacMaster University

https://www.humanities.mcmaster.ca/~rthur/phil6A03/chapter_1_intro.pdf

<https://www.humanities.mcmaster.ca/~rthur/>

(5) S. Subramanya Sastry

The Newton-Leibniz controversy over the invention of the calculus

<http://pages.cs.wisc.edu/~sastry/hs323/calculus.pdf>

(6) ed. by Eberhard Knobloch, Vandenhoeck & Ruprecht

De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria
sine tabulis

Göttingen, 1993

(7) Eberhard Knobloch

Leibniz and the infinite

Technische Universität Berlin, 2012

https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-ismp/12_knobloch-eberhard-4.pdf

(8) Archive ouverte en Sciences de l'Homme et de la Société

<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01172641/document>

(9) Michael Cohen

Classical Mechanics: a Critical Introduction

University of Pennsylvania, 2012

https://www.physics.upenn.edu/sites/www.physics.upenn.edu/files/Classical_Mechanics_a_Critical_Introduction_0.pdf

第5章 ニュートン力学の応用

本章では、ニュートン力学の応用例を示しながら、慣性座標と非慣性座標の違い、特に「極座標」という極めて良く使われる非慣性座標がどう扱われるかについてフォーカスします。

また、全く非慣性座標を使わず、慣性座標のみを用いる方法についても、第5.3.2節で例を示します。慣性座標から非慣性座標を見ると、「遠心力」や「コリオリの力」の力学的意味が明瞭になり、これらを、なぜ力学的「力」に入れるべきでは無いかが明瞭になります。

扱いがやや面倒な楕円軌道についても、考え方や特徴などを述べます。

5.1 放物運動から円運動

物体を高い塔から水平に投げ出す実験を考える時、塔を高くしていくと、いずれは地球を一周する円運動になります。この話はニュートンが言ったのが最初で、あちこちで引用されていますが、普通の人にとってこの議論はすぐに納得できないでしょう。

この理由を探るため、まず物体の放物運動の運動方程式を求めてみます。適当な高さの地点から水平方向に向かって、質量 m の物体を速度 v_0 で放出した場合を考えます。座標としてはデカルト座標を使い、図 5.1 のように選びましょう。

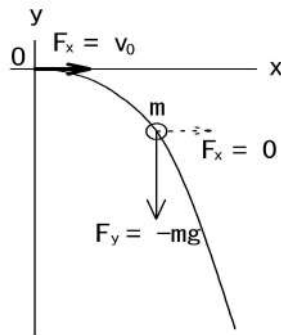


図 5.1: 物体の放物運動

時間 $t = 0$ の時、物体の位置は原点にあり、初速は $v_y = 0, v_x = v_0$ としましょう。運動方程式は g を重力加速度、つまり下向きに働く力とすると、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg,$$

となります。それぞれ、2回積分して、

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2.$$

t を消去、時間によらない表示を求めると、

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

g も v_0^2 も定数なので、放物線となります。この時、横方向に等速運動している物体に、下方向に連続的に一定の力が働き、これが軌道変更を続け続ける訳です。

放物運動の議論では、地球は平ら、物体には運動に対して垂直向き（地表に対して垂直）に力が働くとしています。従って、この放物運動の前提条件のまま、塔を高くしても、円運動とはなりません。これが納得できない直接の理由でしょう。

一方、塔を高くした場合に円運動になるというのは、地球が平面では無くなり、物体に対する力が地球の中心に向かって働くと見られる場合です。つまり、放物運動は、塔があまり高くない場合の近似であって、私達はこの近似が日常感覚と一致しているわけです。ニュートンは、日常感覚が近似であり、力は地球の中心と物体間に働くと見抜いた訳で、私たちが、放物運動が円運動になるという議論にすぐに納得できないのは当然かもしれません。

この問題は、慣性座標系と非慣性座標系の違いを考える入り口でもあります。

5.2 非慣性座標系の例

ニュートンの慣性の法則は力学系が直線的等速運動をしている場合にのみ成立します。非慣性座標の具体例として、「加速中」の列車の天井から吊り下げた振り子を考えましょう。

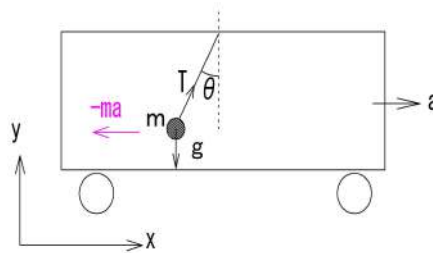


図 5.2: 加速中の車両に吊り下げた振り子

図 5.2 において、列車が加速していると、振り子は角度 θ で傾く筈ですが、これを計算してみます。地上座標から見ると、車両は加速中ですから、振り子は平衡状態¹にはありません。

座標として、地上に固定された、 x, y 座標を選ぶと、これは慣性座標です。振り子には、重力 mg と張力 T および加速度 ma が働きますから、 x, y 成分それぞれについてニュートンの慣性の法則より

$$T \sin \theta = ma,$$

$$T \cos \theta - mg = 0.$$

これらの式から T を消去すると、

$$\tan \theta = \frac{a}{g}$$

が得られます。

この問題で、間違い易いのは、座標を車両上にとってしまうことです。車両上の x, y 座標は加速座標なので、ニュートンの慣性の法則は適用できず、仮想の力 $-ma$ を導入してつじつまを合わせるはめになります（図中赤で示した力）。ところが、この力の発生源（物体による質量、あるいは電気、磁気力）がありません。従って「力」と呼んではいけないものです。

慣性座標系でしか、慣性の法則が適用できないのはニュートンの法則の大前提なので、非慣性座標を扱う時には「仮想の力」の出現元について正しく議論する必要があります。

¹ 平衡状態とは静止または、等速直線運動。

5.3 回転座標系

非慣性座標系とは、慣性座標系に対して、直線的な加速度運動や回転、あるいは両方の運動をしているものです。例えば、航空機の飛行中の運動を、地上に固定したデカルト座標²から見るとその動きは3次元的に向きや速度、加速度が変化し、航空機中に座標を設定すると、これは典型的な非慣性座標になります。

非慣性座標の中でも、最も良く出現する回転座標について、その上での速度や加速度が慣性座標でどう見えるかについて計算します。ここでは、回転する質点を慣性座標から直接計算します。これにより、円軌道、楕円軌道そして、「コリオリの力」等が統一されて扱え、慣性系と非慣性系力学の見通しがよくなります。

非慣性座標を慣性座標に変換するという方法については、第5.6.1節に、極座標による円軌道の扱いについては第5.6.2節に付記します。

5.3.1 角速度、角加速度ベクトル

物体の単位時間あたりの回転速度 $\omega = d\theta/dt$ を角速度といますが、角速度や角加速度はベクトルとしても定義され、やや人工的（あるいは数学的）で分かり難く、先にそれを明確にしておきましょう。一応、定速回転の円運動を仮定しますが、容易に楕円運動に読み替えられます。

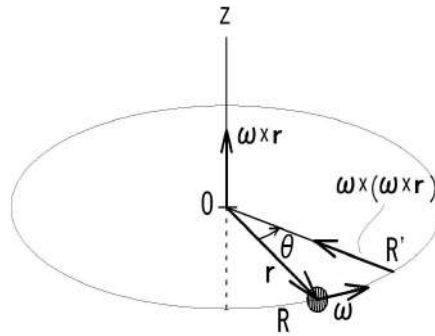


図 5.3: 角速度、角加速度ベクトル

図 5.3 に示すベクトル \mathbf{r} の角速度はベクトル (angular velocity vector) の終点 R の単位時間あたりに進む速さとなり、その絶対値 $|\dot{\mathbf{r}}|$ は、 θ をベクトル \mathbf{r} の回転角として、

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{OR' - OR}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \sin \theta \cdot \omega \Delta t}{\Delta t} = \omega r \sin \theta.$$

となります。一方

$$\omega r \sin \theta = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|,$$

なので、角速度をベクトルで表現するには、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ と定義できます。ここで、角速度ベクトルの向きは、(右手系では) ORR' 平面に直交、 $R \rightarrow R'$ 方向に回転した時右ネジの進む方向と定義します。角加速度ベクトルの向きは直感とは全く一致しませんが、次に示すベクトル積との整合性を取るためにこの様に定義されました。

2つの3次元ベクトル間のベクトル積(外積)は、積の結果が再び3次元ベクトルとなるもので、その向きが元の2つのベクトルいずれにも直交するものと定義されます。このベクトル積が定義でき

²地球の公転や自転があるため、厳密にはこれも慣性座標ではありません。地球を静止しているとした近似です。

るのは、ベクトルの各単位ベクトル間 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} に次のサイクリックな関係がある場合で、1、3、7次元のみです。

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

1次元はトリビアルですし、7次元は一般的でなく、結局ベクトル積は3次元ベクトルのみに定義できると考えていいでしょう。

角速度ベクトルをベクトル積で定義すると、 $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ は角加速度ベクトルとなり、方向は $R \rightarrow O$ となり、ここでつじつまが合います。角加速度の向きは回転中心に向かうので、慣性運動する物体に加速度を加え続け、回転運動となる訳です。

5.3.2 非慣性座標上の運動

回転する非慣性座標の速度および加速度を、慣性座標だけを使用して導出します。(この項は参考資料 5.6.5(2) を基にしました。)

【速度、加速度】

考察の対象は円軌道だけではなく楕円軌道なども含みます。考え方は、空間上の変化するベクトル \mathbf{r} を慣性座標で表現、これの1階、および2階微分を計算して、速度、加速度項を求めます。ベクトル \mathbf{r} は長さ方向と周回方向に変化しますので、直線的加速度と、回転という二つの非慣性要素を含ませる訳です。

ベクトル \mathbf{r} は長さ $|\mathbf{r}|$ を持ち、慣性座標の x 軸に対して角度 θ を持つとします。また \mathbf{r} 方向の単位ベクトルを \mathbf{u} とします³。

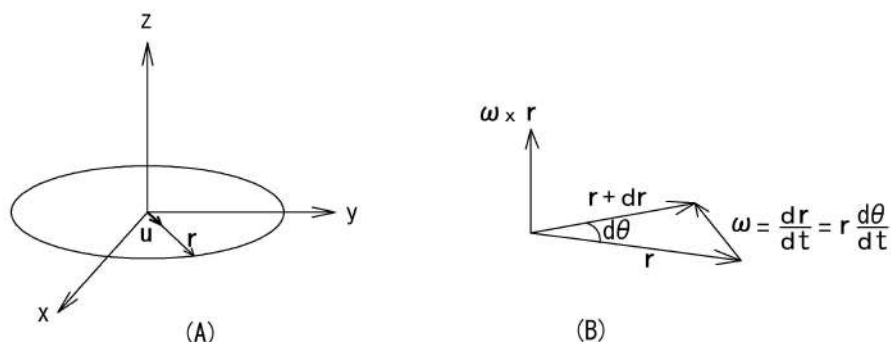


図 5.4: 非慣性座標のベクトル

ベクトル \mathbf{r} の長さの時間変化（圧縮、伸長）は \mathbf{u} 方向に発生するので、この方向の速度は、

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{lin} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}.$$

一方、時間 dt の間に角度が $d\theta$ 変化したとすると、これは、ベクトルの終点 P の周長 $r d\theta$ を生じます。従って周方向の速度は、

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{r d\theta}{dt} = r\omega.$$

³角速度もベクトルで、 \mathbf{r} を $r\mathbf{u}_r$ 、 $\boldsymbol{\omega}$ を $\omega\mathbf{u}_\theta$ と書くべきなのですが、この後、 \mathbf{r} および \mathbf{u} の方向変化のみを議論しますので、角速度に関しては単位ベクトルを明示せず $\boldsymbol{\omega}$ と書きます。

ただし、 $\omega = d\theta/dt$ (角速度) です。角速度ベクトルの方向は第 5.3.1 節で述べたように、 \mathbf{r} かつベクトル $d\mathbf{r}$ にも直交する様定義され、

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

これは、周回軌道平面の中心から上に向くベクトルで、数学的に定義されます。

ベクトル \mathbf{r} の圧縮伸長および回転による速度は次の様に定義できます。

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

この様にベクトル \mathbf{r} の時間変化は、圧縮伸張方向と回転角度方向の 2 方向の速度を発生させます。

加速度は、速度ベクトルを微分して、

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u} + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$|\mathbf{u}| = 1, (d\mathbf{r}/dt)_{rot} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \text{ より}$$

$$\frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt}\mathbf{u}$$

これらを代入すると、加速度ベクトルは、

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt}\mathbf{u} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{dr}{dt}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt}\mathbf{u} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).\end{aligned}$$

このような計算により、力学系に存在するすべての加速度が、その発生源も含めて明示されます。各加速度成分の意味は次のように考えられます。

$\frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}$: \mathbf{r} の圧縮/伸長の加速度。

$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$: 角加速度。

$2\boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt}\mathbf{u}$: いわゆるコリオリ加速度。

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$: \mathbf{r} の回転速度による加速度成分 (向心力)。

$2\boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt}\mathbf{u}$ の力学的意味については、下記「コリオリの力」で議論します。

【円および楕円運動の方程式】

円軌道については

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$$

ですから、加速度は

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

$$|\mathbf{a}| = r\omega^2,$$

となり、「向心力」です。この力は回転の中心を向きますので、質点 m の円軌道の運動方程式は、

$$F = -mr\omega^2$$

となります。楕円軌道についても、極端に扁平軌道でなければ、円軌道と同等になります (第 5.6.1 節参照)。

【コリオリの力】

$2\omega \times \dot{\mathbf{r}}$ は「コリオリ⁴の力」、「コリオリ加速度」と呼ばれ、直線運動をする筈の物体が、回転する基準面上で曲線軌道になってしまう現象のつじつま合わせのために使われる「仮想的」な力です。

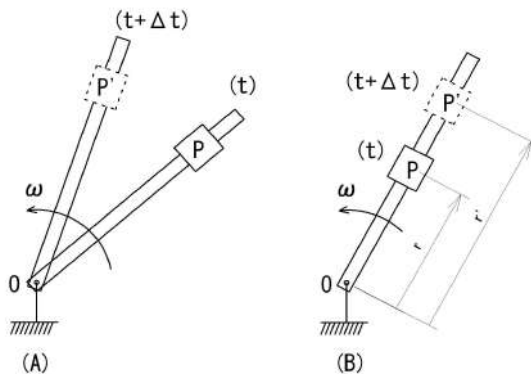


図 5.5: コリオリの力の2つの発生源

コリオリ加速度は数学的記述が同じなため、通常ひとまとめにして $2\omega \times \dot{\mathbf{r}}$ と記述されますが、実際はこれらは別の理由により発生したものの和です。

$\omega \times (dr/dt \mathbf{u})$; スライダー上の物体 P に対してスライダーの回転により発生する成分。図 5.5(A)。

$(\omega dr/dt) \times \mathbf{u}$; 物体 P のスライダー上の移動により発生する成分。図 5.5(B)。

つまり、コリオリ加速度は物体の（回転座標で見た）直線的移動と、座標自体の回転の双方により発生する訳です。

コリオリ加速度の影響は、物体の運動速度と回転座標の回転速度に比例するため、日常的には観測されにくいものです。しかし、地球規模の例としては台風の渦の巻き方に現れます（北半球では左巻き、南半球では右巻き）。また昔から知られているのは、軍艦から（特に、南北方向に向かって）発射した砲弾がそれる現象です。

5.4 静止衛星の軌道

ここでは静止衛星の軌道を計算してみます。人工衛星は地球のまわりを周回しますが、これは地球の引力により、直線運動が連続的に軌道変更を受けた結果です。人工衛星までの距離を R_s とすると、地球が人工衛星に及ぼす、静的な力は

$$F = G \frac{mM}{R_s^2}.$$

人工衛星は等速回転運動をしますが、軌道の接線方向の速度および、地球を向く方向の加速度は

$$v_s = \frac{2\pi R_s}{T}, \quad a_s = \frac{v_s^2}{R_s}.$$

なので、人工衛星に働く力 F は

$$F = ma = \frac{mv_s^2}{R_s}.$$

⁴Gaspard-Gustave de Coriolis, 1792 年 5 月- 1843 年 9 月。

となる筈です。そして、これらの力は等しくなりますから、

$$G \frac{mM}{R_s^2} = \frac{mv_s^2}{R_s} = \frac{m}{R_s} \frac{4\pi^2 R_s^2}{T^2}.$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R_s^3}{GM}.$$

一方、地球上の物体 m に働く重力 mg は、地球の中心に地球の質量がある時の引力と等しいから、

$$mg = G \frac{mM}{R_e^2},$$

$$GM = gR_e^2.$$

従って、

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R_s^3}{gR_e^2}.$$

ここで

$$R_e = 6.3781 \times 10^3 [m]; \quad \text{地球の半径}$$

$$g = 9.81 [m/sec^2]; \quad \text{重力加速度}$$

$$T = 23.9 [hours]; \quad \text{地球の自転周期、恒星時}$$

を代入すると、 $R_s/R_e = 6.6$ が得られ、地上 $35,717.7 km$ となります。衛星の速度は

$$v_s = \frac{2\pi \times 42095.46}{23.9 \times 60 \times 60} = 3074 [m/sec].$$

5.5 惑星の軌道計算

5.5.1 惑星の運動計算

これから惑星の軌道を計算してみますが、「極座標による運動方程式」に記す解法例は、論理的連続性が感じられません。この理由は、解法と思考の順序が一致していない、つまり、最初から解の形が分かっている、それに合うように解を構築していったためと思われます。これは実はよくあり、最初に解が（直感などで）分かっている、あるいは想定でき、それに向かって解を作っていく訳です。

今回の惑星の軌道問題もケプラーが楕円だと言っており、これをニュートンが証明しているのを、単に解析的に（微積分を使って）解を作り上げるというのが実際の作業です。決して、始めて「楕円である」のが証明されるものではありません。

【楕円の解析】

解は楕円になると分かっているの、まずは楕円の性質を考えておきます。何か証明につかえる性質を探す訳です。

解を作り上げる（「問題を解くというのが」表向き）ために、使用する座標系は極座標とするのが標準でしょう。そこで、極座標で楕円がどのように表されるか調べます（別の表現については第 4.4.1 節参照）。

楕円の方程式は、 r を動径、 θ を基準軸からの角度とすると

$$r = r(\theta) = \frac{l}{\sqrt{1 - e \cos \theta}}$$

で表せます。ここで、 e は離心率、 l は焦点の位置に直交する線分と楕円の軌道までの距離です。

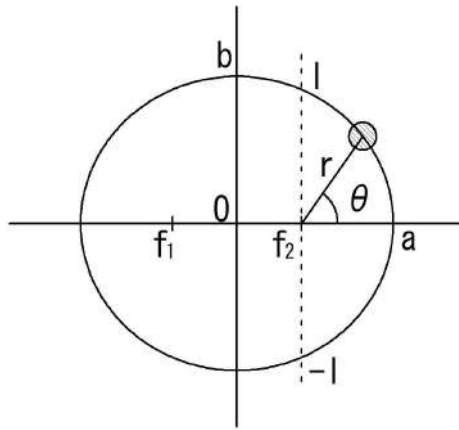


図 5.6: 楕円

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

ですが、線分の長さに関して

$$bf_1 = bf_2 = Oa$$

の関係がありますので、楕円が最初に与えられている時など、作図で容易に焦点が分かります。

上式を書き換えると、

$$r^2(\theta) = \frac{l^2}{1 - e \cos \theta}.$$

$r(\theta)$ の逆数 $p(\theta)$ は、

$$q^2(\theta) = \frac{1}{r^2(\theta)} = l^2(1 - e \cos \theta).$$

e が決まれば楕円の扁平率が決まり、 l も定数になりますが、まずは気にする必要はありません。大事な点は、 $p^2(\theta)$ に $1 - e \cos \theta$ が掛けられている意味です。 $1 - e \cos \theta$ の値は

$$\theta = 0 ; \quad 1 - e$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} ; \quad 1$$

$$\theta = \pi ; \quad 1 + e$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} ; \quad 1$$

となりますから、 $q^2(\theta)$ の値は、 2π 周期でコサイン的に変化しています。楕円はもともと円をつぶした形ですから、このつぶす操作がちょうど軌道一回転に同期して発生している訳です。

これは、楕円軌道の運動方程式を $r(\theta)$ についてではなく、逆数 $q(\theta)$ について解くと、コサイン波が出現する筈という意味です。微分方程式で解がコサイン波（サイン波と言っても同じです）となるのは、いわゆる「波動方程式」であり、これは解けることが分かっています。

この解法も解も知られている波動方程式の形に、楕円軌道の運動方程式を変形するのが、解法の要です。これは惑星の軌道計算の裏側に隠れていて、論理的に誰もが納得のいく解法はこの部分まで述べるべきなのです。

【極座標による運動方程式】

太陽の質量と惑星の質量による引力（惑星から見ると向心力）は、 K を適当な定数とすると、 K/r^2 となりますから、運動方程式は

$$-m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{K}{r^2},$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0.$$

ケプラーにより惑星の軌道は楕円だと知られていますので、動径 r も角速度 θ も時間変化し $r = r(\theta, t)$ 、 $\theta = \theta(r, t)$ です。従って \dot{r} も $\ddot{\theta}$ もゼロにはなりません。最終的には、 \ddot{r} 、 $\ddot{\theta}$ を積分して \dot{r} 、 $\dot{\theta}$ さらに、 r も θ としたいのですが、このショートカットとして、

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

に目をつけます。

今後も折に触れて出現しますが、次式の右辺を見て左辺を思い出すというのは力学解法の定石です。先人の誰かが思いついてのでしょう⁵。

$$\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

すると、 θ に関する運動方程式は

$$F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

となり、 $r^2\dot{\theta}$ は定数となりますので C として

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

が得られます。従って向心力 r についての運動方程式は、

$$m\left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) = -\frac{K}{r^2}.$$

ここまでで θ が消去され、 r に関する（時間）微分方程式が得られました。惑星の軌道を求めるには、この微分方程式から、 t 、 \dot{t} を消去して行きます。

【 r 、 \dot{r} 、 \ddot{r} の予備計算】

r に関する微分方程式の中の \dot{r} 、 \ddot{r} を置き換えるため、これらをあらかじめ計算しておきます。なぜこのような置き換えが可能かと言うのは、 $r = r(\theta)$ であり、 θ の周期関数だからです。まず r に合成関数の微分を適用すると、

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

さらに微分すると、

$$\ddot{r} = -\frac{2C}{r^3} \dot{r} \frac{dr}{d\theta} + \frac{C}{r^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \right).$$

ここで、第二項に $d/dt(dr/d\theta)$ という意味が理解しにくいものが出現しました。そこで、これについて検討します。 $\theta = \theta(r, t)$ ですが、 r と t は独立で、微分の順序を入れ替えられる点に着目すると、

$$\frac{C}{r^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{C}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

⁵力学の試験の時に、これ無から思いつけと言うのは無理です。

が得られます。ところが、今度は $d\dot{r}/d\theta$ という項が出現、これを $dr/d\theta$ に置き換えられないか考えます⁶。

座標 r と θ の関係

$$\dot{r} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

があるので、を θ について微分すると

$$\frac{d}{d\theta} \dot{r} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{C}{r^2} \right) \frac{dr}{d\theta} + \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\dot{\theta} \right) \frac{dr}{d\theta} + \frac{C}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{C}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2}.$$

何故なら、 $\dot{\theta}$ は θ の関数ではないので第一項はゼロとなるためです。

ようやく $d\dot{r}/d\theta$ という項が消去でき、

$$\frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{C}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{C}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{C^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2}.$$

今までの、予備計算から、 \ddot{r} は、

$$\ddot{r} = -\frac{2C^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2}.$$

【運動方程式の変形】

運動方程式は

$$m \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) = -\frac{K}{r^2}$$

でしたから、これに極座標の二階微分形式を代入し

$$m \left(-\frac{2C^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2}{r^4} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{C^2}{r^3} \right) = -\frac{K}{r^2},$$

$$m \left(-\frac{2C^2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{C^2}{r} \right) = -K$$

ここで、「楕円の解析」で述べた、変数の置き換えを行います。 $r = 1/q$ とすると⁷、

$$\frac{dr}{d\theta} = -q^{-2} \frac{dq}{d\theta}, \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = 2q^{-3} \left(\frac{dq}{d\theta} \right)^2 - q^{-2} \frac{d^2 q}{d\theta^2}$$

なので

$$m \left(-2q^3 C^2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + q^2 C^2 \frac{d^2 r}{d\theta^2} - q C^2 \right) = -K,$$

$$m C^2 \frac{d^2 q}{d\theta^2} + q C^2 = K.$$

が得られました。これは

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} + \frac{1}{m} q = \frac{K}{m C^2}$$

のように書くと単振動の方程式であり、当初の戦略通り、解の分かっている方程式となりました。

⁶やたらと式の変形を繰り返しますが、兎に角、できるだけ既出の関係に揃え、変数を少なくしたいのです。

⁷ここが、解法に唐突に出現する技法で、あらかじめ楕円を知っていないと意味が理解できません。

【単振動の解】

単振動の方程式

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} + \frac{1}{m} q = \frac{K}{mC^2}$$

は、まず

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} + \frac{1}{m} q = 0$$

を解きます。この様に微分しても「形」が変わらない関数としては $A \sin(\theta + \phi)$ 、 $A \cos(\theta + \phi)$ 、 re^θ があります。そこで、 $q = A \sin(\theta + \phi)$ を方程式に代入すると、

$$-A \sin(\theta + \phi) + A \sin(\theta + \phi) = 0$$

より解は $q = A \sin(\theta + \phi)$ となるのが分かります。

次に、右辺が K/mC^2 の場合を考えますが、 $q = A \sin(\theta + \phi) + K/mC^2$ と置いて、試してみると、これも解なのが直ちにわかります。この理由は K/mC^2 が定数なので、一度微分しただけで消滅、第二項 $A \sin(\theta + \phi) + K/mC^2$ の K/mC^2 が残り、右辺と等しくなるからです。

解 $p = A \sin(\theta + \phi) + K/mC^2$ の意味は、サイン波振動に、 K/mC^2 という定数が常に加算、つまりバイアスとなるからです。サイン波振動だけだと、例えば振動の midpoint を取ると負にもなりますが、惑星の楕円軌道のように、サイン波によりその動径が回転に同期して伸縮しても、負になるのはゆるされず K/mC^2 がこのバイアスを与える訳です。

数学的サイン波は $\theta = 0$ でゼロですが、自然の中のサイン波的運動では、基準点は無く、人間が適当に決めるしかありません。このパラメータが ϕ で、 $\phi = -\pi/2$ とすると、サイン波はコサイン波となります。これが自然のサイン波的運動をサイン波と言っても、コサイン波と言っても違いがない理由です。

サイン波の係数 A は振幅ですので、惑星の運動の場合、これが楕円のつぶれ具合、つまり楕円の形をきめるのは容易に理解できるでしょう。

【最終解】

人間が適当に決めていい定数 ϕ を $-\pi/2$ とすると⁸、

$$q(\theta) = A \cos \theta + \frac{K}{mC^2},$$

$$r(\theta) = \frac{\frac{K}{mC^2}}{1 + \frac{AmC^2}{K} \cos \theta}$$

となり楕円がえられました。

【解法の特徴】

この解法例を見ると、サイン波の性質を非常にうまく使用しているのが分かります。恐らくこの本質的理由は、自然界の周期運動は、サイン波的振動が基本となるからでしょう。これに当てはまらない物理現象や運動の代表的なものとして、ヒステリシスを持つ現象（例；磁性体の磁場と磁束の関係、機械システムの遊び）があります。これらを表現する関数では一対一の関係がくずれ、近似などの工夫が個別事例毎に必要です。

特に、楕円の中にサイン波が含まれているという点は覚えておく価値があります。円運動では、その円周上の一点を投影すると、正弦波運動が出現するのは広く知られていますが、楕円は動径の伸

⁸単に $\cos \theta$ を出したいただけ。

縮にサイン波が関わっています。しかし、力学現象より発生する楕円は、その回転速度が非等速なので、回転周期は一定でも、その途中で角速度が変化（ケプラーの法則）し、単純な定速回転とならない点に要注意です。

この意味で楕円軌道、

$$r = r(\theta) = \frac{l}{\sqrt{1 - e \cos \theta}}$$

は、静的表現で、時間のパラメータ t が消去されているのにも要注意です。惑星の位置の予想には、動径の描く面積を一定とする計算をせねばならない訳です。

5.5.2 惑星の運動計算（別解）

ここでは、運動エネルギーとケプラーの法則を用いた方法の例を示します。この方法でも、途中で動径 r の逆数を唐突に使用し、やはり、結果を予め知っていてそこに合わせ込むという背景が見えますが、第 5.5.1 節の方法より多少コンパクトです。

太陽、惑星の質量をそれぞれ M 、 m とします。極座標を使い、惑星の角度は θ 、動径は r 、太陽に向かう加速度を a_s とします。

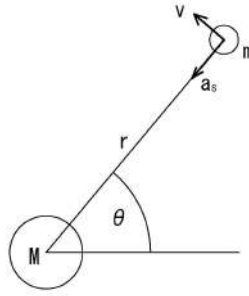


図 5.7: 惑星の軌道

この軌道の弧長を u とすると $u = r\theta$ 、かつ u も r も時間変化するので、速度 v は

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{dr}{dt}\theta + r\frac{d\theta}{dt}.$$

ここで $t \rightarrow dt$ の時 $\theta \rightarrow 0$ となりますが、 $r \rightarrow r$ つまり、 r は定数です。従って上式は、

$$v = \frac{du}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega.$$

ただし $d\theta/dt = \omega$ （角速度）としました。

惑星が太陽の周りを回転するためには、太陽に向かった力で軌道修正を続けます。この力の発生源となる加速度 a_s は、

$$a_s = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

動径の加速度は d^2r/dt^2 ですから、 m に働く加速度 a_s は、

$$a_s = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2$$

ニュートンの万有引力の法則より、太陽が惑星を引く力 F は

$$F = -G\frac{mM}{r^2}.$$

一方 $F = ma$ の関係より、太陽が惑星に対して及ぼす加速度は

$$a_s = -G \frac{M}{r^2}.$$

惑星に働く力は

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = -G \frac{M}{r^2}.$$

ここで、惑星の角運動量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

を導入します。 \mathbf{L} 、 \mathbf{r} 、 \mathbf{p} ともベクトルですが、スカラー量として書くと $p = mr\omega$ より、

$$L = r \cdot mr\omega = mr^2\omega.$$

ケプラーの法則により、惑星が単位時間に描く面積は一定（時間変化なし）です。なぜならば、 $r\omega$ を直線で近似すると、図 5.7(B) の面積は $(1/2)r \cdot r\omega$ で一定、従って $L = mr^2\omega$ も定数となります。角速度 ω は

$$\omega = \frac{L}{mr^2}.$$

ここで、円軌道の加速度 $\mathbf{a} = -v^2/r^2 \mathbf{r} = -v^2/r^2 \mathbf{u}_r$ の関係を使うと⁹、太陽、惑星間の力は、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 = -G \frac{M}{r^2}.$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - G \frac{M}{r^2}$$

ここで変数を置き換え、 $q = 1/r$ とします（この部分が唐突な変数置き換えですが、理由は第 5.5.1 節参照）。角運動量 L を利用、同時に $\omega = d\theta/dt$ が微分（商）になっているのに注意すると、

$$L = r \cdot mr\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = m \frac{1}{q^2} \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Lq^2}{m}.$$

微分のチェイン則を利用すると、

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{Lq^2}{m} \frac{d}{d\theta}.$$

これを適用し、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{q} \right) = \frac{Lq^2}{m} \left(-\frac{1}{q^2} \right) \frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{dq}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{m} \frac{dq}{d\theta} \right) = -\frac{L^2 q^2}{m^2} \frac{d^2 q}{d\theta^2}$$

これらを、太陽惑星間の力のつり合いの式に代入して整理すると、

$$\frac{d^2 q}{d\theta^2} = -q + \frac{m^2 GM}{L^2}$$

が得られ、これは単振動の方程式です。従って解は、

$$q = \frac{m^2 GM}{L^2} + C \cos(\theta + \phi)$$

となり、動径 r は楕円となります。

⁹このようにしていい理由は第 5.5.1 節参照。

5.6 注記

5.6.1 非慣性座標の座標変換

ここで述べるのは、言わばオーソドックスな座標変換による非慣性座標の扱いです。考えは単純でも、計算が面倒なので、参考として記述します。

原点 O は等速運動しているとして、原点 O を中心とする回転だけ、さらに x, y 平面の回転にまで単純化します。図 5.8 において、 x, y, z は基準となる慣性座標、 x', y', z' は非慣性座標で、 z' 軸は z 軸と共通で、これを中心として回転していると仮定します。回転角を $\theta = \theta(t)$ としますが、 $\dot{\omega} = \ddot{\theta} \neq 0$ 、即ち、定速回転では無いとします。

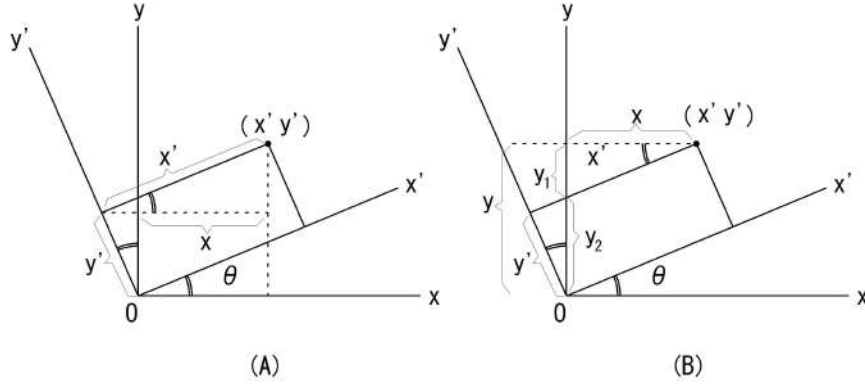


図 5.8: 回転座標の変換

座標 $x - y$ と $x' - y'$ の関係は、図 5.8(A) より、

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta.$$

図 5.8(B) より、

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y_2} + \cos \theta, \quad \frac{y_1}{x} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \\ y = y_1 + y_2 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} x + \frac{y'}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

従って、

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

z については

$$z = z'.$$

x, y の一階微分は (z については省略)、

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \theta - \dot{\theta} x' \sin \theta - \dot{y}' \sin \theta - \dot{\theta} y' \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{x}' \sin \theta + \dot{\theta} x' \cos \theta + \dot{y}' \cos \theta - \dot{\theta} y' \sin \theta.$$

二階微分は、

$$\ddot{x} = \ddot{x}' \cos \theta - \ddot{y}' \sin \theta - 2\dot{\theta}(\dot{x}' \sin \theta + \dot{y}' \cos \theta) - \dot{\theta}^2(x' \cos \theta - y' \sin \theta) - \ddot{\theta}(x' \sin \theta + y' \cos \theta),$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}' \sin \theta + \ddot{y}' \cos \theta + 2\dot{\theta}(\dot{x}' \cos \theta - \dot{y}' \sin \theta) - \dot{\theta}^2(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + \ddot{\theta}(x' \cos \theta - y' \sin \theta).$$

これらの式から $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ を消去するため、 $\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta$ を計算すると

$$a'_x = \ddot{x} \cos \omega t + \ddot{y} \sin \omega t = \ddot{x}' - 2\dot{\theta}\dot{y}' - \dot{\theta}^2 x' - \ddot{\theta} y'.$$

同様に $\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta$ を計算すると、

$$a'_y = \ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta = \ddot{y}' + 2\dot{\theta}\dot{x}' - \dot{\theta}^2 y' - \ddot{\theta} x'.$$

【円軌道の変換】

極座標では、質点 P をベクトル \mathbf{r} 、 θ で表現します。これは、 $x-y$ 座標から見た $x'-y'$ 座標上 ($r=0$) の点が、角速度 $\omega = \dot{\theta}$ で定速回転しているのと同価です¹⁰。

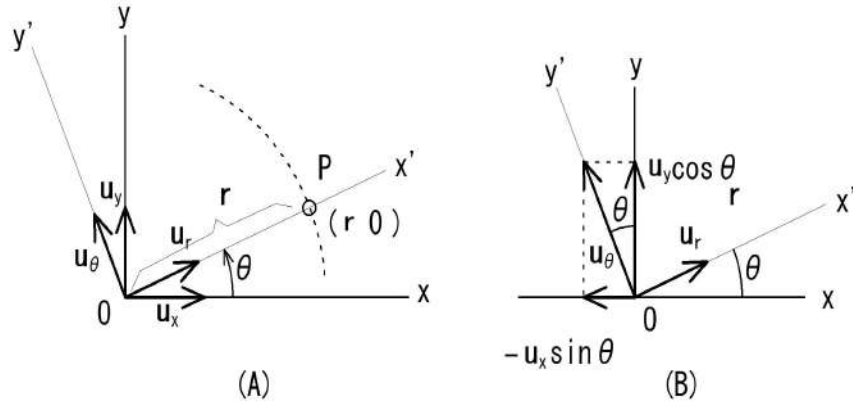


図 5.9: 円軌道の変換

速度については、 $x' = r$ 、 $\dot{x}' = \dot{r} = 0$ 、 $y' = 0$ 、 $\dot{y}' = 0$ とすると、

$$\dot{x} = -\dot{\theta} r \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{\theta} r \cos \theta,$$

を得ます。これをベクトル表示すると、

$$\dot{x}\mathbf{u}_x = -\dot{\theta} r \sin \theta \mathbf{u}_x, \quad \dot{y}\mathbf{u}_y = \dot{\theta} r \cos \theta \mathbf{u}_y.$$

結局、速度 $\dot{\theta} r$ は定数であり、速度ベクトルの向きは y' 方向で (図 5.9(B))

$$\mathbf{v}_\theta = \dot{x}\mathbf{u}_x + \dot{y}\mathbf{u}_y = \dot{\theta} r (-\sin \theta \mathbf{u}_x + \cos \theta \mathbf{u}_y) = -r\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta.$$

ここで、 $\dot{\theta} r$ という変数が出現しましたが、これは

$$\frac{d}{dt}(r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta,$$

という操作から発生したもので、ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ と \mathbf{r} の掛け算（内積にせよ、外積にせよ）とは関係していません。従って、 $\dot{\theta} r$ は単なるスカラーで、これを適当なベクトルの係数としても問題ありません。

加速度については $x' = r$ 、 $\dot{x}' = \dot{r} = 0$ 、 $y' = 0$ に関する成分をすべてゼロ、 $\ddot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$ 、 $\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_r$ なので、

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x = -r\dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r.$$

¹⁰もちろん $x'-y'$ 座標上 ($0 < r$) の点としても同様の結果 ($\theta + \pi/2$ となる) が得られます。

この力は動径と反対向きの力で、これが直線運動を回転運動に変える働きをします¹¹。

一方、ベクトル表現の速度 $\mathbf{v}_\theta = -r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$ をスカラーの関係に書き直すと、

$$v_\theta = -r\dot{\theta}$$

$$v_\theta^2 = r^2\dot{\theta}^2$$

従って、

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\mathbf{u}_r.$$

【楕円軌道の速度、加速度】

ニュートンにより、中心に向かう引力による軌道は、その描画面積が一定になることが証明されています。

$$\begin{aligned} r \cdot r\omega &= r \cdot r\dot{\theta} = \text{constant} \\ \frac{d}{dt}(r \cdot r\dot{\theta}) &= 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \\ r\ddot{\theta} &= -2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}$$

ここで、 $d\theta/dt \neq \text{constant}$ ですが $dr/dt \simeq 0$ となる楕円を仮定すると（つまり極端に扁平でない楕円）

$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

となります。さらに2次の項 $\dot{\theta}^2$ はゼロとします。

ここまでの仮定を置くと、楕円の速度、加速度は円と同様に扱える様になります。結果だけを示すと、速度は、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\theta = -r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta,$$

加速度は、

$$\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{u}_r,$$

を得、円軌道と同じになります。

5.6.2 極座標による円運動表現

普通は、ここで述べるような導出方法がよく用いられます。この方法は簡単でいいのですが、円軌道に限定している点、および非慣性座標から慣性座標への座標変換という視点が明示されないという欠点があります。

慣性座標系（恒星に対して取った座標系）の単位ベクトルを \mathbf{u}_x 、 \mathbf{u}_y とし、これを基準に速度、加速度を計算してみます。

動径 \mathbf{r} をベクトルとして表すと、

$$\mathbf{r} = r(\cos\theta \cdot \mathbf{u}_x + \sin\theta \cdot \mathbf{u}_y).$$

r は一定、 θ だけが時間変化する所以で速度ベクトル \mathbf{v} は、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= +r(-\sin\theta\dot{\theta} \cdot \mathbf{u}_x + \cos\theta\dot{\theta} \cdot \mathbf{u}_y) \\ &= r\dot{\theta}(-\sin\theta \cdot \mathbf{u}_x + \cos\theta \cdot \mathbf{u}_y) \\ &= -r\dot{\theta}\sin\theta \cdot \mathbf{u}_x + r\dot{\theta}\cos\theta \cdot \mathbf{u}_y = -r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta. \end{aligned}$$

加速度ベクトルは、

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -r\dot{\theta}^2\cos\theta\mathbf{u}_x - r\dot{\theta}^2\sin\theta\mathbf{u}_y = -r\dot{\theta}^2\mathbf{u}_r.$$

¹¹ 向心力の発生源です。

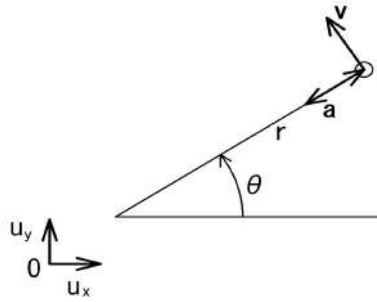


図 5.10: 極座標

5.6.3 楕円の中心による表現

楕円を描くとき、焦点からの距離の代わりに中心からの距離をパラメータとしても構いません。この時 r 、 θ をそれぞれ、動径、回転角度ととると、

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{(b \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 - (e \cos \theta)^2}}$$

と表せます。ここで、 $(e \cos \theta)^2$ に着目すると

$$(e \cos \theta)^2 = e^2 \cos^2 \theta = \frac{e^2}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

ですから、軌道 1 回転に対して、2 回伸縮が発生します。これは θ が $0, \pi$ で動径が最長、 $\pi/2, 3\pi/2$ で最短となっているのでもわかります。この場合でも、 $r(\theta)$ の逆数にサイン波が出現、運動方程式の解法は同じです。

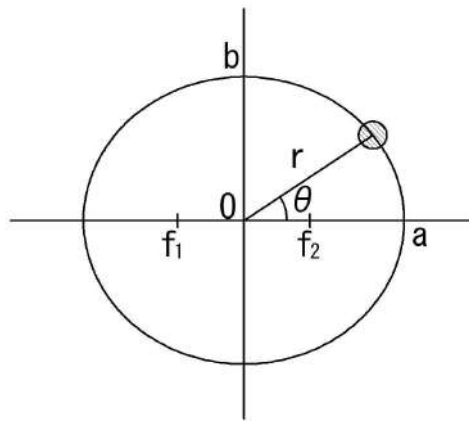


図 5.11: 楕円の中心による表現

5.6.4 ニュートンの計算

ニュートンが天体の運動と地上の運動を比較、万有引力の法則の正当性を確信した計算とは次のようなものでした。

まず、

$$F = ma$$

は、力 F が質量 m の物体に作用すると加速度 a を発生させるという関係を表しているのを確認しておきます。一方、仮説としての

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

を地上の物体 m と地球 M の間に働く力を与える式と考えます。地球の中心から物体までの距離は地球の半径と考えていいので、 r_e は地球の半径となります。これを $F = ma$ と比較すると、

$$ma = G \frac{mM}{r_e^2},$$

$$a_e = G \frac{M}{r_e^2}$$

が成立します。加速度 a_e は物体の質量 m には依存しません。

次に、月の質量 m_m とすると、地球、月間の距離を r_m として（実は、 m_m は関係しません）、

$$a_m = G \frac{M}{r_m^2}.$$

従って、地球と物体間の加速度と、地球と月との加速度の比は、

$$\frac{a_e}{a_m} = \left(\frac{r_e}{r_m} \right)^2$$

が成立する筈です。

そこで、地球が月に及ぼす力（＝月が地球に及ぼす力）を計算します。月の周回速度は

$$v_m = \frac{2\pi R_m}{T} = \frac{2\pi \times 384400 \times 10^3 [m]}{27.3 \times 24 \times 60 \times 60 [sec]} = 1023.969 [m/sec]$$

月の加速度は、

$$a_e = \frac{v_m^2}{T} = \frac{1023.969^2 [sec^2]}{384400 \times 10^3 [m]} = 0.00272766 [m/sec^2]$$

地球の（重力）加速度との比は

$$\frac{a_m}{a_e} = \frac{0.00272766}{9.8} = 0.000278332$$

地球上の物体と、月の距離に関しては

$$\frac{R_m}{R_e} = \frac{1}{60}$$

ですから、

$$\left(\frac{R_m}{R_e} \right)^2 = 0.00027777.$$

これが、ニュートンが略算し、興奮のあまりそれ以上の計算は友人に依頼した内容です。ニュートンならずとも、あまりの一致に驚きます。

以上がニュートンの計算ですが、私たちがこの計算を思いつかない理由は2つほどありそうです。

- (1) $F = ma$ は「地球上」の物体の質量力と加速度の関係、 $F = GmM/r^2$ は「天体の間」の力の法則と思い込んでしまいそう。
- (2) 「月の加速度」の実感がわからない。つまり、月は等速円運動を（勝手に）していて、地球の引力のせいで円軌道になり、かつ引力は加速度を生むという様に思いつかない。

この計算は、天体での運動と地上の運動を統合することで、ニュートンの天才がここに 있습니다。一方、私たちは「ニュートンの法則」は勉強しても、彼の考えの本質まではなかなか理解しないのかも知れません。

5.6.5 参考資料

(1) Michael Cohen

Classical Mechanics: a Critical Introduction

University of Pennsylvania, 2012

https://www.physics.upenn.edu/sites/www.physics.upenn.edu/files/Classical_Mechanics_a_Critical_Introduction_0.pdf

ニュートンの法則の基本精神を追及する名著です。

(2) Allan T. Dolovich *et al.*

The Coriolis effect -What's going on ?

Proc. 2012 Canadian Engineering Education Association (CEEA12) Conf.

<https://ojs.library.queensu.ca/index.php/PCEEA/article/view/4707/4689>

第6章 エネルギー

エネルギーや運動量の保存については、ニュートンがプリンキピアを発表する前から議論されてきました。あるものが「不滅」という考えは、力学的論理から始まったと言うより、神学的信仰に起源があると言えそうです。デカルトは、宇宙を創生した神を信じていましたから、「物体」と「運動の量¹（および静止）」は宇宙の創造時に決まり、全体として総量は保存されるとしています。つまり、運動に関して言えば、どれかの運動の量が増加する時は、別のものの運動の量が減少すると考えたのです。「物体」も「運動の量」も神の創造物であるゆえ不滅な訳です。

この様な、信仰あるいはフィロソフィーを力学的法則の中に発見してきたというのが、力学の発展の一面でした。

本章では、この「保存される量」がどのように明確になって行ったかについて述べます。

6.1 初期の運動量、エネルギー議論

運動量やエネルギーといった概念を議論し始めた時代のキーパーソンは、ニュートンの法則の確立時代の、デカルト、ウォリス、レン²、ニュートン、ホイヘンスそしてライプニッツ等の学者たちです。面白いことに、「運動量、エネルギー論争」がライプニッツを除くデカルト派とライプニッツの間で、「微積分の先行者」争いの前に発生しています。

デカルトは物体の直線上の衝突の研究の結果、運動量 $m|v|$ が保存され、これが力学上の保存量を定量的に規定するものだと考えました。「保存量」である以上、負になっては困るので速度の絶対値とした訳ですが、これは運動の方向は考えないという意味です。

これに対して、ライプニッツは1668年の論文で反論、保存量は $m|v|$ ではなく、 mv^2 であると主張しました。一方、同じ年の少し前には、ウォリス、レン、ホイヘンスが保存量は、方向を入れた mv であるという発表をしています。従って、この時点で、ライプニッツの反論対象は定義を変更してしまい、論争は、それぞれの物理量の意味へと向かうべきだったのです。ところが、当時は、 mv や mv^2 とともに「力 (force)」と呼んでいるなど、概念の明確化もできておらず、学者たちの間での誤解³もあり、しばらく論争が続き決着しませんでした。この決着は、運動量とエネルギーの違いが明確に理解される、約90年後まで持ち越されます（どちらも正しく、ただ別の力学量を議論していたのです）。

6.2 運動量、エネルギー論争

ここでデカルト派とライプニッツの論争の一部を紹介します。これは当時の学者がどういう点で誤解したか、あるいは何を論拠にしたかなど、今の私たちにも参考になる点があるからです。

論争の基となったライプニッツの論文のタイトルは

「Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others Concerning a Natural Law, According to which God is Said to Conserve the Same Quantity of Motion; A Law Which They

¹ 私達の理解している「運動量」とは異なります。

² Christopher Wren, 1632年10月－1723年3月。

³ 同じデカルト派と呼ばれますが、ウォリス、レン、ホイヘンスの周辺にいた人たちの様です。

Also Misuse in Mechanics.」(デカルトおよびデカルト派の主張する「神がそれに従って運動量を保存している筈という自然法則」の著しい間違いについての簡単な証明；彼らもまた、この法則を力学に誤用しているが) という、挑戦的なもので論争を挑む気迫満々です。

本項の内容は第 7.7.1 節、参考資料 (1) によります。

6.2.1 ライブニッツのエネルギー

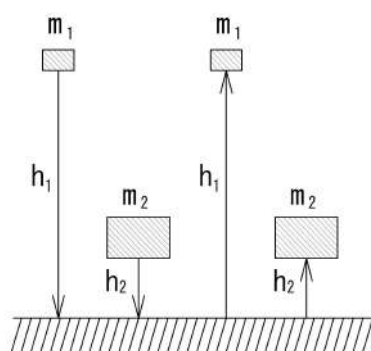


図 6.1: 物体のエネルギー

ライブニッツは、図 6.1 に示すようなモデルで、質量 m_1 (1kg) の物体が高さ 4m のところから地面まで落下した時のエネルギーと、質量 m_2 (4kg) の物体が 1m 落下する時のエネルギーは等しく、地面との衝突が完全弾性ならば、これらは自分自身をそれぞれ 4m 、 1m 持ち上げられるという議論から始めます。そしてこれに関してはデカルト派も同意見であると念をおしており、これによりポテンシャルエネルギー

$$E_p = mgh,$$

は、物体の地面に到達時点で運動エネルギー⁴

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

に変化するとします。従って、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

より

$$v = \sqrt{2gh}.$$

これらの式に $h_1 = 4$ 、 $h_2 = 1$ を代入すると、

$$v_1 = 2\sqrt{2g}, \quad v_2 = \sqrt{2g},$$

$$m_1v_1 = 2\sqrt{2g}, \quad m_2v_2 = 4\sqrt{2g}.$$

結局

$$m_1v_1 \neq m_2v_2$$

となり、 mv をエネルギーの指標とするのは不適格となります。

⁴ライブニッツはこの時は *vis viva* (mv^2) という言葉は使っていませんでした。

ポテンシャルエネルギー mgh と運動エネルギー $1/2(mv^2)$ の間の変換について、ライブニッツはホイヘンスから学んだようですが、上記議論により、 mv をエネルギーの基本式とは出来ないと主張しました。

ただ、ライブニッツは実験的裏付けについては、弾性体の衝突の場合以外を示さず⁵ デカルト派から早速反論がありました。

6.2.2 ライブニッツのエネルギーに対する反論

Abbé Caltan は次の様な反論をしました。

ガリレオにより、落下距離 h は

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

が示されている。これに、 $h_1 = 4$ 、 $h_2 = 1$ を代入すれば、地面までの時間は、それぞれ

$$t_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{g}}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}}$$

となり異なる。従って、異なる時間に得られたエネルギーを比較しているのだから mv が異なるのは当然である。

つまり、時間が等しい状況で比較すべきなので、次の例で考えて見よう。

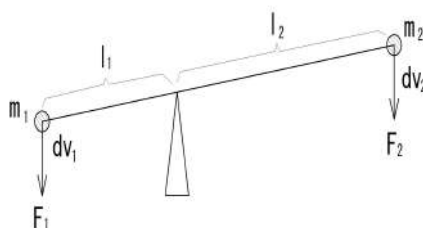


図 6.2: シーソーの平衡

2つの物体が同時間で移動するように、図 6.2 の様に剛体で結合する。

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

であり、天秤は釣り合っている⁶。 m_1 、 m_2 の仮想変位および仮想速度を ds_1 、 ds_2 、 dv_1 、 dv_2 とすると

$$F_1 ds_1 = F_2 ds_2, \quad ds = dv \cdot dt,$$

より

$$ds_1 = dv_1 \cdot dt_1, \quad ds_2 = dv_2 \cdot dt_2,$$

となる。一方、力については $F_1 = m_1 g = m_2 g = F_2$ なので

$$m_1 g dv_1 dt_1 = m_2 g dv_2 dt_2.$$

天秤で結合されているので、運動時間は等しく、 $dt_1 = dt_2$ であるから、

$$m_1 dv_1 = m_2 dv_2.$$

⁵エネルギーの測定は困難です。

⁶仮想変位などの静力学については第 7 章参照。

従って、同時間についての mv は等しく、これを「エネルギー」とすることができる。

Catalan の反論のどこが問題かを考えてみましょう。

(1) mv^2 にせよ mv にせよ、時間とは関係の無い概念なのに、単位時間で比較すべきものと思ってしまった。

(2) 時間を等しくするため、「天秤の釣り合い」に置き換え、この時は成立する

$$m_1 dv_1 = m_2 dv_2,$$

の中の仮想速度 dv を速度 v と誤解してしまった。

などが、主要なところでしょう。これに対してライブニッツは、さらに反論、「時間は関係ない」点については、「同じ金を稼ぐのに、時間を余計かけた方がより金持ちだと言うようなものだ」と書いています。この他にも反論材料をあげていますが、これは省略します。

また、Catalan の反論について、ホイヘンスなどの学者（デカルトは既に故人です）がどう反応したかは不明です。

6.2.3 ライブニッツのエネルギーについての認識

ライブニッツは mv^2 が物体の持つ（運動）エネルギーであると考え、これを *vis viva* と呼びました。一方、ポテンシャルエネルギー mgh との間で変換されること、従って、保存されることも、摩擦によって熱に変換されるのも述べています。

またエネルギーが保存されるため、永久機関はあり得ないとも述べており、現在私たちが理解するエネルギーの基本はすべて認識していたと思われます。ただ、専門用語の定義が未熟、実験的裏付けが少ないなど、当時の学者たちに有無をいわずに納得できる形までにはなっていなかったでしょう。

一方デカルトやニュートンは物体間の衝突の際、運動量 mv が保存されることを述べていますので、「保存量」の存在は当時の学者の間で、共通認識となっていました。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの変換についてはホイヘンスがライブニッツに示唆したようで、言わばやや混沌状態でした。

これが、今日のような運動エネルギー (kinetic energy) と理解されるのは Coriolis により 1829 年に、ポテンシャルエネルギー (potential energy) については 1853 年 William Rankine によります。学者の頭の中が整理されるまでに、実に百年以上を要した訳で、力学量の中ではエネルギーは現在でも、曖昧に扱われます⁷。

6.3 運動量、エネルギーの測定

運動量、エネルギー論争を長引かせてしまった原因の一つには、これらの量の物理的測定が容易では無いこともあります。現在にいたるまで、運動量もエネルギーも測定値として使用する例はあまり見当たりません。これは、測定が難しい上に、日常生活ではこれらの量の正確な値に対して費用を払うという必要性が薄いからでしょう⁸。

ここでは、今までに使用されてきた、あるいは使用中の運動量やエネルギー量の測定方法について概観します。いずれも、（現在でも）測定が比較的難しく、正確な絶対値というより、ある値以上が要求される性質があり、ライブニッツの時代に概念の明確化に手間取ったのも無理ありません。

⁷ 「エネルギー」という言葉は速度や加速度に対して、遥かに社会的、文学的に使われます。

⁸ エネルギー量の正確な測定は唯一、電力量の計測のみと思われます。しかし、ここでは電力には踏み込みません。

6.3.1 運動量の測定

運動量測定の特例ですが、「衝撃振り子」(balistic pendulum)があります。これは1742年頃に発明されたもので、銃弾の初速などを実際に測定するものです。原理的には、弾性衝突による運動量の保存を利用、衝突による運動量を振り子の振れ角度に変換するものです。装置に用意された銃身から弾丸を発射、ハンマー状の振り子にエネルギーを与えます。振り子は、その最大振れ位置から戻ってこないようなラチェット機構を持ち（つまりメモリーがある）それを読むという仕掛けです。

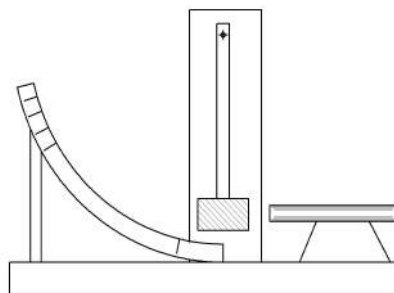


図 6.3: 衝撃振り子

運動量の定義に非常に忠実な測定方法で1.4kg程度の大砲の砲弾の運動量計測まで実施されたと言われます。実用的には、過去の方法となっていますが、現在でも物理実験用途には使われます。

弾丸が振り子に当たった時の速度を v_1 、弾丸および振り子の質量をそれぞれ m_b 、 m_p とすると、発射時の運動エネルギーは、

$$K_{init} = \frac{1}{2}(m_b + m_p) \cdot v_1^2.$$

これがポテンシャルエネルギー

$$E_{fin} = (m_b + m_p)gh,$$

に変換されるので、

$$\frac{1}{2}(m_b + m_p) \cdot v_1^2 = (m_b + m_p)gh.$$

従って

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

発射時の弾丸の速度 v_0 とすると、運動量の保存則より、

$$m_b \cdot v_0 = (m_b + m_p)\sqrt{2gh},$$

$$v_0 = \frac{m_b + m_p}{m_b} \sqrt{2gh}.$$

この様な測定方法が考案された背景には、質量は測定容易でも速度は高速になると困難という事情があります。逆に、高速度撮影が可能な現在では運動量の測定も、原理的に困難ではありませんが、例えば測定環境を考えた場合、やはり色々と問題が想定されます。

6.3.2 エネルギーの測定

エネルギーの測定として、比較的身近なのは、乗用車などの馬力（出力）でしょう。これは販売する上で、他の車種との比較としてカタログにも載せやすく、それなりに気にする値かもしれません。

この出力の測定法として、大きく二種類に分けられます。一つはエンジン単体の出力で、これはエンジンを負荷に接続、種々の回転数でどの位の出力が得られるかを計測するものです。この値は、測定条件が揃えやすく、比較的公平な値が得られますが、車体とは切り離れた値で最終ユーザには、本当に参考にしかありません。従って、これは設計製造でのデータ測定方として適しています。

一方、エンジンを実際の車体に搭載、車として完成したものを、負荷をかけられる台（シャシーダイナモと呼ばれます）にのせ、タイヤを含めた最終的な出力を測定する方法があります。こちらは、最終的な車としてのデータが測定できますが、測定条件（例えば、速度に対応する風を当てるとか、タイヤの空気圧、車中の追加重量等）により変わり、商業的思惑も入り、これも参考と考えるべきでしょう。

さらに昔からある、出力測定としては、機関車（蒸気、ディーゼル、電気⁹）に連結したダイナモメーターカーや、設置型のダイナモメーターがあります。前者は実際に路線上での実力測定となりますが、測定条件が合わせにくく、後者は測定条件は合わせやすいものの、実際の使用状態での実力が把握しにくくなります¹⁰。

上述した出力の測定は、車両などシステムが完成した後に、出力が仕様を満たしているかを確認するため¹¹で、測定値の絶対値を常にモニターする様な用途ではありません。

6.3.3 ガウス加速器

衝撃振り子の変形とも言うべきものですが、こちらの方は実験結果の意外性もあって、力学実験としては面白いでしょう。

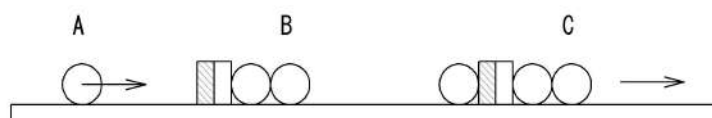


図 6.4: ガウス加速器

図 6.4 に示すように、強力なマグネット（ネオジウム磁石など）に、数個の鉄球をくっつけておき、反対側から同じ鉄球を磁石に引きつけさせると、もともとくっついていた鉄球が勢いよく飛び出すという装置です。非常に簡単な構造ですが、運動量の保存や運動エネルギーの大きさなどを考えるのに、手軽に行えます¹²。

具体的な実験については第 7.7.1 節 (4) を参照ください。

6.4 運動量とエネルギー

6.4.1 運動量

運動量とエネルギーがどの様に異なるかという話題でよく上がるのは、運動量を同一としたとき、トラックと衝突するのと、ソフトボールと衝突するのではどちらがダメージが大きいかという問題です。

⁹電気機関車の場合、電圧 × 電流で、全入力電力は容易に測定できます。従って出力測定の結果から計算すれば効率が容易に計算できます。

¹⁰特に機関車では、出力だけが問題では無いので、こういうデータはほんの一面を示すだけです。

¹¹もし仕様が大幅に満たせない時は、その時どうするか考えるのでしょうか。

¹²それでも、弾かれる鉄球のスピードは想像以上なので、こちら側に人が立たない様な注意は必要です。

ソフトボールの重さを $190g(0.19kg)$ 、小型トラック¹³の重量を $2430kg$ とすると、トラックが $1[m/s]$ で走っている時のエネルギーは

$$E_t = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 2430 \times 10^3 \times 1 = 1215 \times 10^3 \left[\frac{kgm^2}{s^2} = Joule \right]$$

トラックの運動量は、

$$p = mv = 2430 \times 10^3 [kg \cdot m].$$

これと同じ運動量をソフトボールに与えるとその速度は、

$$v_b = \frac{2430 \times 10^3}{0.19} = 12789.5 \times 10^3 [m/s].$$

このスピードのソフトボールの運動エネルギーは

$$E_b = 1554 \times 10^{10} [Joule].$$

これを比較すれば、ソフトボールの運動エネルギーはトラックよりも 10^7 倍も大きく、したがってダメージも大きいという訳です。

運動量 $p = mv$ より、運動エネルギーは

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

となり、質量に反比例します。これが質量が小さい方が運動エネルギーが大きくなる理由ですが、この議論では、「同じ運動量」なので、ソフトボールは極端に大きな速度を持つ訳です。

この例から分かるように、運動量は、ベクトルであるため、座標に縛られた概念となります。しかし、解析力学ではこれを各座標成分に分解、座標と共に多変数化したために力学が物理学へと一般化されるキープポイントとなります。これについては第 11.3 節で議論します。

6.4.2 運動エネルギー

運動エネルギーは速度でましますから、物体の位置から原理的に独立で、力の発生源も不要です。複数の物体の衝突など、運動エネルギーだけで力学を考える事もありますが、普通はポテンシャルエネルギーと組み合わせた議論になります。ポテンシャルエネルギーは力の発生源からの位置になるので、自然に座標を定めることになり、これに対する速度により運動エネルギーが決められます。

運動エネルギーは、普通以下の様に導出されます。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) \\ d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) &= \frac{m}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{m}{2} dv^2 = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \\ E_k &= \int_0^t \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^t \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) = \int_0^v d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

ここで、エネルギー導出の最初の段階で、 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ という様にスカラー積としたために、2つのベクトルの積がスカラー積として伝搬して行きます。

運動量はベクトル \mathbf{v} に、スカラー m を掛けたものですから、相変わらずベクトルで、運動量の比較あるいは変換は、この同じベクトル空間内の値となります。一方運動エネルギーは、ベクトルからスカラーに変換したため、座標とは無関係になり、比較対象あるいは変換対象が大幅に広がりました。この点が運動量と（運動）エネルギーの根本的な違いで、力学の範囲では変換対象はポテンシャルエネルギーしかありませんが、これは、電磁気学では電磁気的エネルギーという全く異なるものを含むことになります。

¹³日野自動車製、XKC605M-TQUMC。

6.5 ポテンシャルエネルギー

ある物体のポテンシャルエネルギーとは、他の力の発生源（質量、電気力、磁気力）との相対的位置関係により決定される保存エネルギーです。

ポテンシャルエネルギーの例としては、

- * 一様重力場の重力ポテンシャル； mgh
- * スプリングによるポテンシャル； $\frac{1}{2}kx^2$
- * 2 個の質点による重力ポテンシャル； $-\frac{GMm}{r}$
- * 点電荷による電気ポテンシャル； $\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_1q_2}{r}$
- * 一様電界（電場）のポテンシャル； $-qEx$
- * 磁気ポテンシャル； $-\mu B$

があります。スプリングによるポテンシャルエネルギーはスプリングの伸びの無い状態を基準に、伸びあるいは縮み長で表現されます¹⁴。

ポテンシャルエネルギーは（基本的に）2 個の物体の位置関係だけで決まるエネルギーですから、基準位置をどこにするかの自由度があります。2 個の質点による重力ポテンシャルの場合、質点間距離が無限大に離れた時にポテンシャルエネルギーがゼロとなる様にえらび、地球の重力ポテンシャルの場合、地表基準に取ります。ちょっとご都合主義の気もしますが、どちらも表現する数式は共通で、相対的位置関係を有効に使っていると考えられます。

【2 個の質点による重力ポテンシャルの計算】

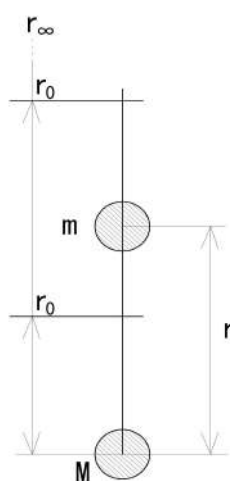


図 6.5: 質点 m 、 M のポテンシャルエネルギー

質量 m の物体と、質量 M の物体が r の距離にある場合の力は

$$F = -G \frac{mM}{r^2}.$$

負号は力の向きが引力であることを示します。ポテンシャルエネルギーは 2 個の物体の位置関係のみで決められるので、初期距離 r_0 を r に移動させるためのエネルギーは、

$$E_p(r-r_0) = - \int_{r_0}^r F \cdot dr = - \int_{r_0}^r \left(-G \frac{mM}{r^2} \right) dr = - \left[\frac{GMm}{r} \right]_{r_0}^r = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) = GMm \left(\frac{r-r_0}{r_0 r} \right).$$

¹⁴直線の長さとなる場合以外に、ゼンマイ (mainspring) のように回転角となる場合もあります。

物体の距離が無限大ならば、力も働かず、従ってこの場合のポテンシャルエネルギーはゼロと考え、しかも力は引力のみなので負、基準 $r_0 \rightarrow \infty$ とすると、

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r}$$

が得られます。

【地球の重力ポテンシャルの計算】

地球の重力ポテンシャルについては、地球の半径 r_0 に対して h だけ離すので、

$$\begin{aligned} E_p(h) &= -\int_{r_0}^{r_0+h} \left(-G\frac{mM}{r^2} \right) dr = -GmM \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r_0+h} = GmM \left(-\frac{1}{r_0+h} + \frac{1}{r_0} \right) \\ &= GmM \frac{h}{r_0(r_0+h)} \simeq GmM \frac{h}{r_0^2} = \frac{GM}{r_0^2} mh = mgh, \quad \because g = \frac{GM}{r_0^2}. \end{aligned}$$

地上から物体を離すのは常に $h > 0$ となり、ポテンシャルエネルギーは増加します。また、 $r_0 \gg h$ の近似により、ポテンシャルの増加は高さに単純に比例となります。

6.6 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの応用例

今後、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの間のエネルギー交換を使用した解析例が沢山出現しますが、ここで一例を示します。

【2 粒子系のエネルギー】

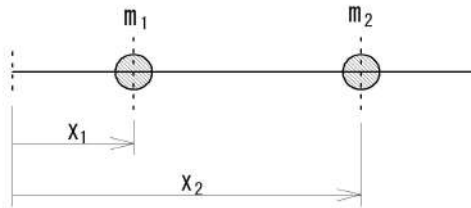


図 6.6: 2 粒子系のエネルギー

質量が m_1 および m_2 で表される 2 粒子が直線上に存在する時のエネルギーについて考えます。まず運動エネルギーについては、それぞれの運動速度により、

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2.$$

一方ポテンシャルエネルギーは 2 粒子間の力の働き方により、

$$E_p = E_p(x_2 - x_1),$$

と定義されます。この時、ポテンシャルエネルギーは 2 粒子の距離のみの関数であり、2 乗に比例する引力、反発力等何でも構いません。

この例からも、2 つ以上の物体が有れば、特にポテンシャル場が無くともポテンシャルエネルギーが存在することが分かります。

【振り子】

振り子の振動周期を、運動およびポテンシャルエネルギーから計算してみましょう。

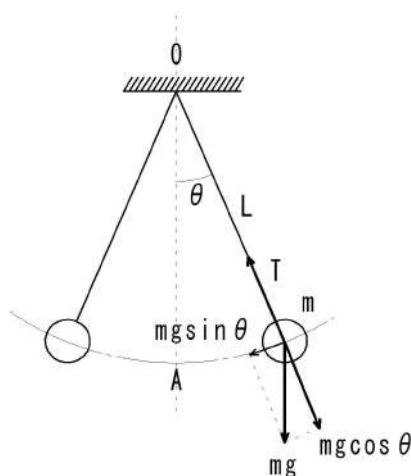


図 6.7: 振り子

振り子は糸で原点 O から吊り下げられ、振動の最大角度を θ_{max} とします。振り子 m には重力 mg が作用し、これは糸の方向の力 $mg \cos \theta$ と、糸と直角方向の力 $mg \sin \theta$ に分解されます。糸には張力 T がかかり、これが $mg \cos \theta$ と釣り合います。一方 $mg \sin \theta$ に釣り合う力はありませんので、これは使いません。角度 θ_{max} を基準として考えると、この時振り子の速度（糸に直角方向）はゼロです。縦軸を z 軸にとり最大角度時に z_0 となると、位置 z の時のポテンシャルエネルギーは

$$E_p = mg(z_0 - z).$$

振り子の最下点を通過する時、運動エネルギーは最大になり、これがポテンシャルエネルギーと等しくなるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mg(z_0 - z) \\ v^2 &= 2g(z_0 - z) \\ &= 2g(-L \cos \theta_{max} + L \cos \theta) \end{aligned}$$

一方、速度 v 、半径 L の回転運動による加速度 a は

$$a = \frac{v^2}{L}.$$

ニュートンの法則 $F = ma$ より

$$m \frac{v^2}{L} = T - mg \cos \theta.$$

従って、

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{L} &= \frac{m}{L} 2g(-L \cos \theta_{max} + L \cos \theta) = T - mg \cos \theta, \\ T &= 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_{max}. \end{aligned}$$

振り子の周期は以下のように計算されます。

振り子の速度 $v(\theta$ の関数) は微小時間 dt の間に角度が $d\theta$ 変化すると、振り子の位置は $Ld\theta$ 変化し、

$$v = \frac{Ld\theta}{dt}$$

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{Ld\theta}{v} = \frac{Ld\theta}{\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})}} \\
&= \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}
\end{aligned}$$

$\theta = 0$ から θ_{max} までの周期は、振り子の周期 τ の $1/4$ ですから、

$$\frac{\tau}{4} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}.$$

これは楕円積分で難しいので、 $\cos\theta$ を級数展開して簡単化します。

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
&\simeq 1 - \frac{\theta^2}{2!}. \\
\cos\theta - \cos\theta_{max} &= \frac{1}{2}(\theta_{max}^2 - \theta^2).
\end{aligned}$$

従って、

$$\frac{\tau}{4} = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_{max}^2 - \theta^2}}.$$

ここでさらに、

$$x = \frac{\theta}{\theta_{max}}, \quad \frac{d\theta}{\theta_{max}} = dx$$

と変数の置き換えを行い、

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{4} &= \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} \\
&= \sqrt{\frac{L}{g}} \left[\arcsin x \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}
\end{aligned}$$

が得られます。

これで、糸の張力および振り子の周期が求められたのですが、ここで示した解析方法では、振り子が振動はするものの、その振動がサイン波かどうかはわかりません。つまり、周期 τ の $1/4$ を移動する時間を計算しただけで、その間をどのように振れるかについては、この計算の中には入っていません。これがサイン波であることは、計算の対象

$$T = 3mg \cos\theta - 2mg \cos\theta_{max},$$

そのものが示しています。つまり、サイン波は何回微分しても、波形を変えませんから、どこかにサイン波が現れれば、それは維持されるからです。

6.7 注記

6.7.1 参考資料

- (1) Carolyn Iltis
Leibniz and the Vis Viva Controversy
University of San Francisco, 1966
- (2) Arbor Scientific
Ballistic Pendulum
www.arborsci.com/Data_Sheets/P4-1975_DS.pdf
衝撃振り子のメーカーカタログです。
- (3) Energy and momentum conservation
The ballistic pendulum
University of Notre Dame
https://www3.nd.edu/~apaul2/The_Jungle/PHYS31210L_files/E%20-Ballistic%20Pendulum.pdf
- (4) 牧原 義一、杉本 佳隆
ガウス加速器における仕事とエネルギーの測定
三重大学教育学部研究紀要 第 63 巻 自然科学 (2012)
www.crc.mie-u.ac.jp/seeds/pdf/20100108-133115_kenkyu1.pdf
- (5) Ballistic pendulum
https://en.wikipedia.org/wiki/Ballistic_pendulum
- (6) David Morin
Introductory classical mechanics
[http://math-wiki.com/images/a/a9/Morin,_DavidIntroductory_Classical_Mechanics,_With_Problems_and_Solutions_\(2003\)\(519s\).pdf](http://math-wiki.com/images/a/a9/Morin,_DavidIntroductory_Classical_Mechanics,_With_Problems_and_Solutions_(2003)(519s).pdf)

第7章 静力学

静力学とは、シーソーがバランスしている様な平衡状態にある力学システムを表現するものです。平衡状態ではシステム中に加速度が存在しません。これは直線的加速度運動も、回転もしていない状態です。 $F = ma$ において $a = 0$ の場合なので、ニュートンの運動方程式を駆使する動力学¹に比べ極めて単純化された力学に見えます。

ところが、この中の主要な概念として、「仮想仕事の原理」があり、通常説明の仕方が不適切なため無意味なハードルが存在します。本章では、仮想仕事の原理の本質について議論しましょう。

7.1 仕事

7.1.1 仕事の定義

仮想仕事を議論する前に、「仕事」についてはっきりさせて置きましょう。

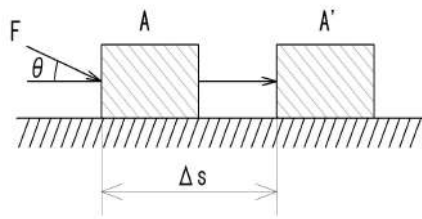


図 7.1: 仕事

図 7.1 に示すように、力 F を質量 m の物体 A に加え、これが A' まで距離 Δs 動くとき、仕事 W は

$$W = F \cos \theta \cdot \Delta s$$

で定義されます。ただし θ は力と動いた方向との間の角度です。これは、物体の動く向きの力成分しか有効にならないという意味で、 $\cos \theta$ が掛けられる点には問題は無いでしょう。むしろ、上式には質量 m が直接現われない点がやや不思議に見えます。私たちの日常の経験から、重い程、押すのに労力が要るのを知っていますから。

この質量に比例する力は、物体を押す時の反力として現れ、この反力の大きさは、重さ mg に比例します。この力 F' は、マクロ的にはニュートンの法則の直接的結果ではなく、摩擦係数 μ と mg を用い、

$$F' = \mu mg.$$

として表されるものです。

例えば、鉄のレールの上を鉄の車輪を回転させる機関車が車両を牽引出来るのは、鉄の間に摩擦があるからです。この摩擦力を決めるものとして、停止中から動き出す時の静止摩擦係数と動いてから

¹この時は、座標が慣性座標か非慣性座標かも注意深く考えねばなりません。

の動摩擦係数があり、機関車発車時の動輪のスリップはこの係数の違いを具体的に目撃できるいい例です。また重い機関車程、牽引力 (tractive effort) が大きくなるので、通常、機関車は車輪一軸当たりの重量 (ただし、線路による許容最大値はあります) を可能な限り重くしています。

7.1.2 力の無い状態とつり合い状態

物体を押した時、物体 A が発生する反対向きの力 F' が、同じ大きさの場合、物体は動きません。 F' は $F \cos \theta$ による反作用として見えてくるので、 $F' > F \cos \theta$ となる事はありません。さもないと物体が勝手に動きだす事になります。 $F' < F \cos \theta$ の場合のみ、物体を押して動かせる訳です。

物体に力が働いても動かない別の例として、物体が机や床に支えられている場合があります。この時は重力に比例する重さ mg が垂直下方に働きますが、これの反対向きの力が机や床から働きます。もし物体が無重力状態にあり、力が働かなければ、この時も物体は動きません²。

つまり、ある向きの力 F と、逆向きの力 F' のつり合い状態と、そもそも力 F が存在しない場合とは区別できません。

この点が静力学を考える上で重要な考えで、物体を押しても動かせない場合と、ただ置いてある状態というのは、人間には区別できるのに、力学では区別できないのです。これは言わば力学を定式化する場合に漏れてしまうのですが、力学では「欠点があるため漏れてしまう」とは言わず、「力が働く場合と、働かない場合が同一の考えで記述できる」という言い方をします³。

人間の社会生活の中で、この様な言い方をすると、何かともめごとの種になりますが⁴、力学 (や数学) では、「論理的に整合が取れていれば正しい」ので、こういう言い方をする事が多々あります。

7.1.3 つり合い状態の表現

ここで、つり合い状態の定式化を考えましょう。図 7.1 に示す物体には平行移動の基となる力が働かず (しつこく繰り返しますが、力が働いていても、それとちょうど逆向きの力がある場合も含みます)、ある点についての回転力も無いとします。従ってモーメントもゼロです。これが平衡状態です。

力 \mathbf{F} も移動距離 s も方向を持つベクトルですが、仕事はこれらの内積となりスカラーです。一方モーメントはモーメントの中心から回転させる力が働く点を結ぶベクトル \mathbf{r} と、回転力ベクトル \mathbf{F} により外積

$$M = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \sin \theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$$

として定義されます。モーメントベクトル \mathbf{M} は、モーメントの中心から、 \mathbf{r} 、 \mathbf{F} の作る平面に対して直角に取ります。向きは通常右手系とします。

仕事はスカラー積であり、物理的次元は

$$\text{力} \times \text{距離} = \text{Joule}[J] = [N \cdot m],$$

です。一方モーメントはベクトル積であり、同じく次元は $[N \cdot m]$ となることに注意して下さい⁵。

これを基に「仕事」の一般的な定義に進みましょう。図 7.3 に示すように質点 A の位置をベクトル \mathbf{r} で表します。この先端が A' に移動すると、移動後の位置はベクトル $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ で表されます。移動距離は $d\mathbf{r}$ です。この時、質点に力 \mathbf{F} が角度 θ で作用したとすると、微小仕事は

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \theta ds.$$

²正確には、宇宙にとった座標に対して慣性運動をします。

³人間は単純な論理機械ではないので、論理以外の情報も用いて判断し、これらの違いが区別できるというのが、力学からの言い分でしょう。

⁴「朝ごはん食べましたか?」「いいえ (パンを食べました)。」

⁵モーメントの単位に Joule は使いません。

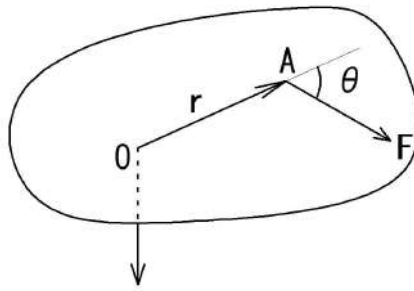


図 7.2: モーメント

力も変位も 3 次元ベクトルなので、成分表示では

$$\begin{aligned} du &= (F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y + F_z \mathbf{u}_z) \cdot (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z) \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz. \end{aligned}$$

従って、積分型で表示すると、

$$U = \int F \cos \theta ds.$$

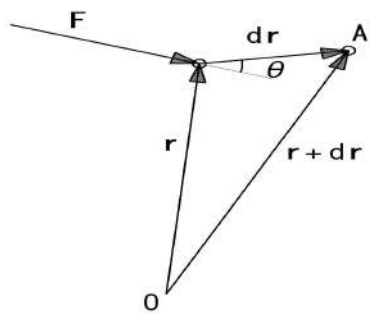


図 7.3: 仕事の一般的定義

7.1.4 仕事をしない力

「仕事」の意味をさらに明瞭にするため、「仕事をしない力」の例を示しましょう。対象となる物体は、基本的に、質点というよりも、体積や面積があり、また複数の部品を組み合わせた構造物となります。

- (1) 可動アームの固定ピン部分にかかる力。例えば踏切の遮断機の回転中心に力を加えても、仕事にはなりません。
- (2) 運動に対して直角に働く力。滑らかな床の上を物をスライドさせると、床は物体に力を作用させますが、これも仕事はしません。
- (3) バランス状態にある装置の少量の変形。これは例えば水平にバランスしているシーソーをわずかに傾ける場合。この場合、傾いた状態でもバランスは崩れず、従って仕事はゼロです。

図 7.4 に具体的な例を示します。図中の無効な仕事の個々の説明は不要でしょう。

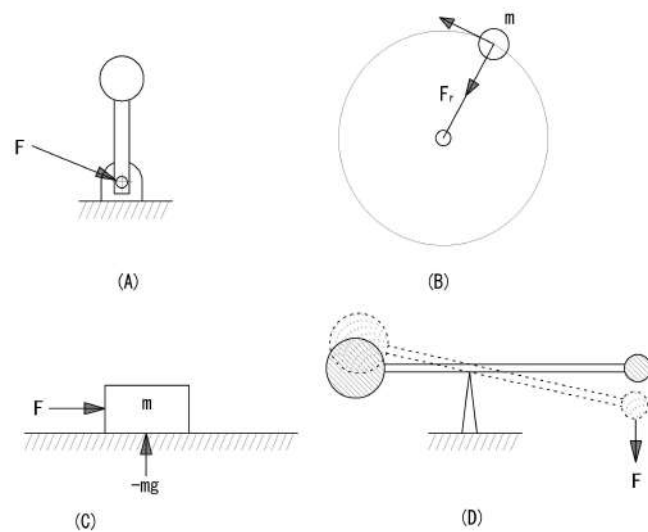


図 7.4: 無効な仕事

7.2 仮想仕事の原理

ここでは仮想仕事の原理を、最も教科書的と思われる方法で説明してみます。

物体に、 n 個の力 \mathbf{F}_i が作用して平衡状態にある時、これに変位

$$\delta \mathbf{r}_i = (\delta x_i \delta y_i \delta z_i)$$

を加えた時の仕事 δW は

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \delta \mathbf{r}_2 + \dots \mathbf{F}_n \delta \mathbf{r}_n = 0$$

である。

7.3 仮想仕事の原理の本質

第 7.2 節での解説では、普通は何となく霧に包まれたような気分になるでしょう。そして、およそ次のような疑問を持つのではと思います。

- (1) 十分小さい仮想変位 $\delta \mathbf{r}$ と言うが、ゼロでは無く、しかも微分の定義のように、 $\lim \delta \rightarrow 0$ という操作をいれるわけでもない。しかしこの与える影響がゼロとはどういうことか？
- (2) 仮想力が働き、釣り合い状態が A から B に移ったのに、この間外力が仕事をしないとはどういう意味か？
- (3) 仮想仕事の合計=0 とは、何をいっているのか？

さらに、具体的な説明として、例えば図 7.5 に示すような複数の構造物から構成されるものについて、「一々各エレメントに分解せずとも、仮想仕事の原理を応用すればいい」とか、「各自由度に対して、仮想仕事の原理を応用する」とか、本質をついていない説明に終始しています。これは、「力学系をある方程式で記述する」あるいは「記述できる」として説明するため、本質が見失われるのです。

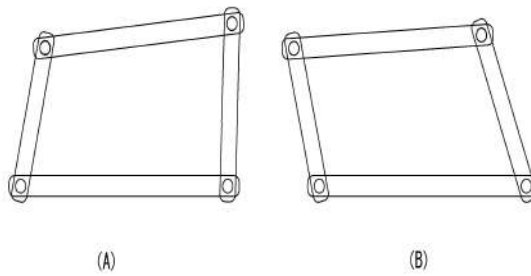


図 7.5: 平衡状態にある構造物

仮想仕事の原理の本質は、図 7.5 に示す (A) と (B) の違いが、見た目にはっきりしているのに、「力学ではこの違いは表現できない」という表明なのです。

違いが表現できないことを「すべての異なった形態に対して、一つの仮想仕事の原理で記述できる」と、持って回った言い方をしているのです。

この点さえ、はっきりと認識してしまえば、疑問は氷解すると思います。

ここで、疑問がどう解説されるか考えてみましょう。

- (1) 十分小さい仮想変位 $\delta \mathbf{r}$ と言うが、ゼロでは無く、しかも微分の定義のように、 $\lim \delta \rightarrow 0$ という操作をいれるわけでもない。しかしこの与える影響がゼロとはどういうことか？

→

仮想変位と言うのは、ある状態から別の（平衡）状態に変位させるという動的なものに対して述べているのではなく、二つの静的状態について「力学では違いが表現できない」という事実の表明。従って、仮想変位は十分小さい必要はなく、単にシステムが平衡状態を崩さない量の変位でありさえすれば構いません。（「十分小さい」と言いながら、極限を取らないのはこれが理由です。）

- (2) 仮想力が働き、釣り合い状態が A から B に移ったのに、この間外力が仕事をしないとはどういう意味か？

→

動的な状態の記述では無く、静的な二つの状態が区別できないという意味。

- (3) 仮想仕事の合計=0 とは、何をいっているのか？

→

力が働かない場合と、力が釣り合っている場合の違いが表現できないという事。

7.4 工学からみた仮想仕事の原理

工学的には図 7.5 に示すような構造物を製作、その形態を自由に変化させたいという要求はいくらでもあります。この観点から「仮想仕事の原理」を解釈すると、構造物の力学変数からは、形態の違いが分からないとなります。つまり、形態を検知するには、例えば角度センサーを付け、それによりアーム間の角度を計測しなさいという意味です。図 7.5 の場合、自由度=1 ですから、角度センサーはどこかに一つ付ければ足ります。

7.5 ダランベールの原理

ダランベールの原理とは、フランスの物理学者ダランベール⁶が1743年に発表したものです。動力学を静力学に帰着してしまおうというのがその考えです。ニュートンの運動方程式

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

より、

$$\mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0.$$

i 番目の質点の運動量 \mathbf{p}_i は、

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i,$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

従って仮想仕事の原理は

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0$$

と記述できます。この記述方法より、多数の力が働く、多変数運動方程式の記述に向いているのが分かります。

7.6 静力学の応用

静力学の応用として、トラスの構造計算をしてみます。

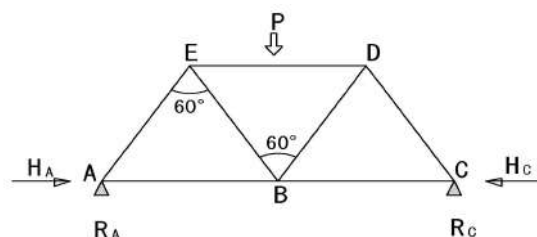


図 7.6: トラス構造

図 7.8(A) に示すような、橋の建設に用いられる、最も基本的なトラスを考えます。トラスは鉄骨などによる柱材を組み合わせて製作しますが、ここでは材料の重量は無視、接合部はピンで結合されているとします。このトラスは全体として、言わば剛体で、変形はせず、 R_A 、 R_C という二点で支えられ、かつ重量 P が橋の中央にが加わるとします。特にこの例では、柱材の長さはすべて L 、結合部の角度は 60° とします。

求めたいのは各柱材にかかる張力あるいは圧縮力です。柱材 AE にかかる張力を N_{AE} と記すことにして、図 7.7(A) に示すように、 AE 、 AB 間で切り離し、その時の張力 N_{AE} 、 N_{AB} を計算します。

まず、トラスを支える力 R_A 、 R_C について、

$$R_A = R_C = -\frac{P}{2}.$$

柱 AB による点 B の周りのモーメントの合計はゼロですから、

$$\sum M_B = R_A L + N_{AE} \cos 30^\circ L = 0.$$

⁶Jean le Ron d'Alembert's 1717 年 11 月- 1783 年 10 月。

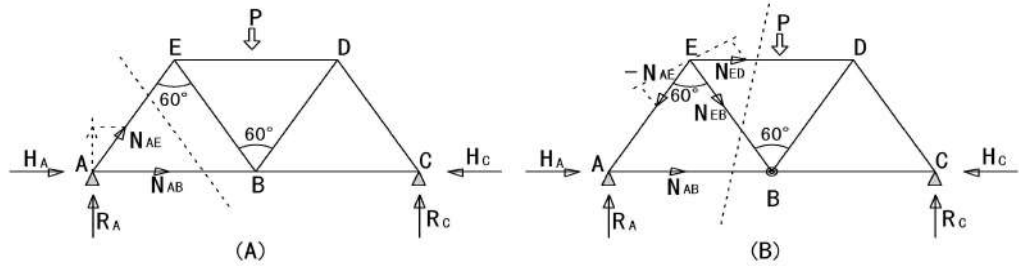


図 7.7: トラス構造計算 (その 1)

$$N_{AE} = -\frac{2}{\sqrt{3}}R_A = \frac{1}{\sqrt{3}}P.$$

A 点にかかる水平方向の力の総和はゼロなので、

$$H_A + N_{AB} + N_{AE} \cos 60^\circ = 0.$$

$N_{AE} = P/\sqrt{3}$ 、 $H_A = 0$ より、

$$N_{AB} = -\frac{N_{AE}}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}P.$$

負となりましたので、 N_{AB} は圧縮力です。

次に図 7.7(B) の点線の位置で切断 N_{ED} 、 N_{EB} を計算します。そのため B 点の周りのモーメントを考えると、

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -N_{AE} \cos 30^\circ L + N_{ED} \cos 30^\circ L = 0 \\ \therefore N_{AE} &= N_{ED} = \frac{P}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

点 E の水平方向のつり合いは、

$$\begin{aligned} \sum H_E &= N_{ED} + N_{EB} \cos 60^\circ - N_{AE} \cos 60^\circ = 0. \\ \therefore N_{EB} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}P \end{aligned}$$

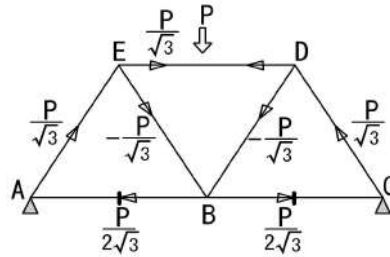


図 7.8: トラス構造の負荷

今回は垂直方向の力の総和 = 0 は使用しませんでした。このような例題を見ると、ここには「仮想変位」も「仮想仕事」も出現せず、各種結節点においての、垂直、水平力の総和、およびモーメントの総和がゼロになるという性質だけが使用されています。

7.7 注記

7.7.1 参考資料

(1) S.Krenk, J Hogsberg

Statics and Mechanics of Structures

https://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9789400761124-c2.pdf?SGWID=0-0-45-1380106-p174786618

第8章 微分方程式

ニュートンにせよ、ライプニッツにせよ、彼らは、問題を微分形式で表現し解いた訳ですから、微分方程式の始まりは微積分の創造と同じタイミングです。

一方、私たちが通常学ぶ数学や物理の過程では、まず「微分法」を学び、続いて求積法としての積分や不定積分があり、やがて微分方程式、特に常微分方程式が出現します。常微分方程式は1変数の微分方程式であり、当然、多変数微分方程式が存在するのですが、数学ではこれを「偏微分方程式」と言います。偏微分方程式は常微分方程式よりも解くのが困難で、解けるものはいくつかの型に限られているだけでなく、出現タイミングも、電磁気学に必要な「ベクトル解析」あたりとなり、かなりなおざりにされています。

「ベクトル解析」はベクトルの微（積）分ですが、結果がスカラーとなるスカラー的微分 (div) と、ベクトルとなるベクトルの微分 (rot) が対になって出現します。ところがベクトルの微分は対象が（実質的に）3次元ベクトルに限られるため、その対となるスカラー的微分についてもそれ以上追及されません。一方「偏微分」が1変数である「常微分」の多変数化であるという議論がほぼ無いため、「偏微分」が実は div（これは n 次元で定義可能）なのだと言う構造的あるいは体系的に見通しの良い議論がなされません。

この状況は、力学を含む物理を理解する上で大変残念な状況で、微分方程式の多変数化について俯瞰的な解説が必要と考えます。

特に、ラグランジュの解析力学はニュートン力学の多変数表現なのですから、解析力学に入る前に、1変数微分方程式の多変数化を議論しておく必要があります。

8.1 17世紀の微積分の概況

ニュートンはプリンキピアこそ幾何学的に記述しましたが、Method of fluxions という本を著して、微分および積分の考えを明確に示しました。ライプニッツには Acta Eruditorum¹ に 1684 年に発表した論文がありますので、彼も微積分が物理問題の本質的な表現手段であると考えていたと思われます。またベルヌーイ一家も微分方程式の発展に大きく寄与し、最速降下曲線問題も微分の応用として出題されました。

微分方程式の研究は、いわゆる微積分の研究の中核をなしており、17世紀末までには、現在知られている一階微分方程式の解法は大方得られています。

一方、偏微分については、ニュートンも、ライプニッツも実例を述べていますが、まだ「偏微分」の概念が成立しておらず微分の中の一つの方法という扱いです。例えば、ニュートンは Method of fluxions の中で、微分方程式を

$$\text{Class1:} \quad \frac{dy}{dx} = f(y),$$

$$\text{Class2:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$\text{Class3:} \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u,$$

¹ライプツィヒで発行された学術誌で、後にベルヌーイが Brachistochrone 問題を提示しました。

のように 3 分類しています。現代の言葉では最初の 2 つが常微分方程式、最後が偏微分方程式です。

このような状況で始まった微分や微分方程式の研究は下記のような錚々たる学者により進展していきます。

Newton	Method of fluxions	1671 年頃、1736 年出版
Leibniz	Acta Eruditorum (論文誌)	1684 年頃
Johann Bernoulli	偏微分の研究	1680 年頃-1720 年頃
Euler	Mechanica	1736 年出版
Clairaut	Théorie de la figure de la terre	1743 年出版
D'Alembert	Traité de dynamique	1758 年出版
Lagrange	Mécanique analytique	1788 – 1789 年出版
Monge	Application de L'Analyse à la Géométrie	1807 年出版

微分方程式は、明確に意識されていませんでしたが、最初から 1 変数と多変数微分方程式が考えられ、主としてそれらをどう解くかという研究がされ（いわばユークリッド幾何学の様に、問題とそれをどう解くかのテクニックの発展）、その後、数学者による微分の厳密化（Cauchy, Riemann, Gauss 等々）、そして解を求めるテクニックではなく、解の存在や振る舞いを考える微分方程式論という経過で発展してきました。

この章の目的は、微分方程式の解法の収集でも、解の存在についての考察でもなく、微分方程式と力学の関係、そして多変数微分方程式とは何かです。

まず、1 変数微分方程式の多変数化を入口としましょう。

8.2 多変数の微分

偏微分方程式は微積分の創生時には既に存在していましたが、歴史的な発展から多変数微分（偏微分）を導き出すのは分かり難く、ここでは線形代数の観点から議論します。線形代数は多変数の代数ですが、この中では 1 変数がどう多変数に発展するかが明確ですから、この方向から多変数微分を見る訳です。

8.2.1 1 変数の微分

関数 $y = f(x)$ に関して考えます。図 8.1 において、点 x_0 の微分係数は

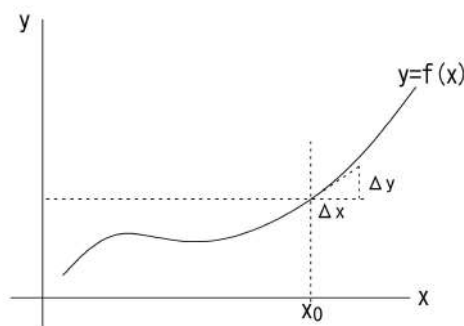


図 8.1: 微分係数

$$a = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

と定義されますが、これは点 x_0 の近傍で、 y は x に比例すると考えた、その極限という訳です。言い換えると、微分の対象となる関数はすべて、局所的には比例関係にあり、

$$dy = a dx ; \quad a \text{ は比例定数}$$

と書かれます。

8.2.2 多変数の微分

線形代数における多変数 y と x の比例関係は（3 変数で示すと）

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

あるいは、

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

と示されます。

この用法を適用して、多変数（3 変数）の微分を書き下すと、

$$dy_1 = a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3$$

$$dy_2 = a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{23}dx_3$$

$$dy_3 = a_{31}dx_1 + a_{32}dx_2 + a_{33}dx_3$$

が得られます。

ところが、微分係数を比例定数として比例関係を表す場合には、 a_{11} 、 a_{21} 、 a_{31} はすべて、 x_1 方向の変化率（傾き）なので、

$$a_{11} = a_{21} = a_{31}$$

です。これは当然 x_2 、 x_3 方向についても言えて、結局

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_1$$

$$a_{12} = a_{22} = a_{32} = a_2$$

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_3$$

となります。

従って、線形代数では行列であった係数が、多変数微分では、ベクトルに縮退してしまい、 y の微分も 1 ヶに縮退して、

$$dy = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

と表されます。係数行列がベクトルになり、係数と微分演算子の関係がスカラー積になり、その結果 dy がスカラーになりました。

この比例係数は微分係数ですが、 x_2, x_3 を定数 ($dx_2 = dx_3 = 0$) としたときの係数なので、

$$a_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}$$

の様に区別して書くことにしました。

まとめると、多変数の微分係数により構成される関数 dy は、結果は 1 変数となり、

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} dx_3$$

と表現されます。これが偏微分² すなわち多変数微分です。

偏微分が一番分かり易い例は空間に対する微分で、上記 x_1, x_2, x_3 を x, y, z と読み替えるとより明瞭かもしれません。

「多変数微分」としての「偏微分」の位置づけは次の「ベクトルの微分」でさらに明確になります。

8.3 ベクトルの微分

これは普通は「ベクトル解析 (Vector calculus)」と呼ばれますが、第 8.2 節で述べた、多変数の微分とはやや別の方向から定義できます。

8.3.1 足し算と掛け算

ここでは足し算と掛け算の話から始めようとおもいます。しかし小学校の授業の復習ではなく、これらの演算のフィロソフィーを語るつもりです

まず足し算については同質のものの間の演算であるといえます。例えば

$$1m + 8m = 9m$$

は意味をもちますが、

$$10kg + 5m = ???$$

は無意味です。

それでは

$$\text{みかん } 5\text{ヶ} + \text{りんご } 8\text{ヶ}$$

はどうでしょうか？

これはみかん、りんごといった個別の種類のレイヤーでは無意味で、果物というより抽象的なレイヤーで 13ヶと計算されます。

つまり、小学校で習う数字による足し算は、一番抽象化された「数」³ というレイヤーでの演算なのです。

足し算のもう一つの特徴として、「足されるもの、足すもの個々の間のインターアクションが無い」点があります。みかんにしてみればりんごが足されようが、バナナが足されようが関係ありません。もちろん逆も同様。

次は掛け算です。

$$10kg \times 5m = 50kgm$$

²高木貞二；解析概論、改定第 3 版、54 ページの偏微分の扱いはもの足りません。

³小学校ならば分数や少数止まりでしょうか。

は、重さ × 長さで、仕事となります。つまり、掛け算はもともと異質のもの同士の演算で、その結果はもとのどちらでも無いものを発生させるのです。ここでも数字を一番抽象化したレイヤーでは、単なる数値どうしの掛け算が定義できる訳です⁴。

掛け算のもう一つの特徴として「演算が施される各項の間でインターアクションが発生する」があります。例えば図 8.2 で、赤、緑、青という色と黄、マゼンタという色を掛けると、色の種類が6種類になるだけでなく、赤/黄、赤/マゼンタ、緑/黄、緑/マゼンタ、青/黄、青/マゼンタという個別の混合が発生します。

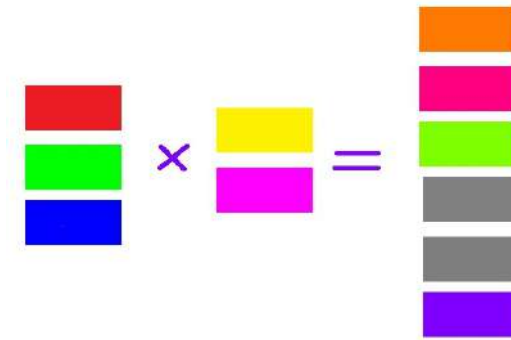


図 8.2: 掛け算と各項のインターアクション

8.3.2 ベクトルの掛け算

ベクトルの掛け算というと、「内積」と「外積」を思い出すでしょう。これらの掛け算は高校や大学初年度あたりで導入されますが、どちらも極めて唐突に「定義」されてきたと思います。

二つのベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} があるとき、内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

一方外積については、3次元ベクトルとすると、その絶対値は

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$$

となり、 \mathbf{A}, \mathbf{B} に直交する方向を持つ3次元ベクトルです。内積は結果がスカラーとなり⁵、外積は結果がもと同じ3次元ベクトルとなります。

内積については二つのベクトルがどの程度近いのか、外積については二つのベクトルがどの程度離れているかという意味を持つとも説明されますが、本当は何なのかについては、通常解説されません。

8.3.3 ほんの少しの外積代数

そこで、この節ではベクトルの掛け算を、掛け算のフィロソフィーに基づいて定義して見ましょう。まず二つの3次元ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} を考えます（何故3次元かはすぐに分かります）。それぞれの基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ として \mathbf{A} と \mathbf{B} の掛け算（そのため、基底には記号 \otimes を使い、係数については通常通り、掛け算記号を省略します）をそのまま書き下してみます。

$$\mathbf{A} = (a_1 \mathbf{e}_1 \ a_2 \mathbf{e}_2 \ a_3 \mathbf{e}_3)$$

⁴それでは $3m \times 5m = 15m^2$ はいかがでしょうか？どちらも長さという同質のものを掛けているけれど...？

⁵スカラーと書きますが、原語は scalar で「スケールを与えるもの」という意味です。これは「有理数」と同じく不幸な日本語化の例です。

$$B = \begin{pmatrix} b_1 e_1 \\ b_2 e_2 \\ b_3 e_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= a_1 b_1 (e_1 \otimes e_1) + a_1 b_2 (e_1 \otimes e_2) + a_1 b_3 (e_1 \otimes e_3) \\ &\quad + a_2 b_1 (e_2 \otimes e_1) + a_2 b_2 (e_2 \otimes e_2) + a_2 b_3 (e_2 \otimes e_3) \\ &\quad + a_3 b_1 (e_3 \otimes e_1) + a_3 b_2 (e_3 \otimes e_2) + a_3 b_3 (e_3 \otimes e_3) \end{aligned}$$

ここで $e_1 \otimes e_1 = e_2 \otimes e_2 = e_3 \otimes e_3 = 1$ とし、 $e_1 \otimes e_2 = -e_2 \otimes e_1 = e_3$ 、 $e_1 \otimes e_3 = -e_3 \otimes e_1 = e_2$ 、 $e_2 \otimes e_3 = -e_3 \otimes e_2 = e_1$ とすると⁶

$$\begin{aligned} A \otimes B &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &\quad + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(e_1 \otimes e_2) \\ &\quad + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(e_1 \otimes e_3) \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(e_2 \otimes e_3) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)e_1 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)e_3 \\ &= A \cdot B + A \times B \end{aligned}$$

となります。

このような計算をしてみると、内積、外積がそれぞれ何であったかが明確になります。つまり、内積、外積はベクトルの本来的な掛け算の構成要素であった訳です。内積はスカラーで、外積はベクトルですから、これ以上まとめる事はできず、+記号は複素数 $a + bi$ 表示に使用するような、いわばベアを作るという意味です。

上記の様なベクトルの掛け算は数学で言う「外積代数」という分野で出現します。そして、この中で、単位ベクトルに関して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes e_2 &= -e_2 \otimes e_1 = e_3 \\ e_1 \otimes e_3 &= -e_3 \otimes e_1 = e_2 \\ e_2 \otimes e_3 &= -e_3 \otimes e_2 = e_1 \end{aligned}$$

という、一種サイクリックな関係は、1、3、7次元ベクトル空間でしか成立しないという事が分かっています。1次元ベクトルというのはトリビアルですから無視し、また7次元ベクトル空間というのはあまり一般的に使用されないのを忘れてしまう事になると、ベクトルの外積というのは、実質上3次元ベクトル空間でのみ成立します⁷。外積が何次元ベクトルに応用できるかという点については、教科書は普通、口をつぐんでいるようで、これも外積を分かりにくくする理由でしょう。

また、3次元ベクトルどうしの掛け算⁸の結果得られる空間は、1次元のスカラーと、3次元ベクトルの合計4次元空間に拡大されます。しかしこれを4次元ベクトル空間という訳にはいきません。スカラーの基底は数字の1で、単位ベクトルと考える訳にはいかないからです。このため、何回微分しても⁹、スカラーと3次元ベクトル空間内の議論になります。

⁶数学的にこの様にできる事が分かっています。

⁷内積についてはn次元空間で定義できます。

⁸ベクトルを扱うもう一つの数学分野に線形代数がありますが、この中では、変数ベクトルの掛け算は出現しません。変数ベクトルの掛け算は「線形」ではなくなるからです。つまり、ベクトルの掛け算は「外積代数」の分野だと思われますが、これが通常のカリキュラムから外れていて、この議論なしに「ベクトル解析」が出現してしまうのです。

⁹対象となる、関数が何回も微分できると言っている訳ではありません。

8.3.4 ベクトルの微分

前節で 3 次元ベクトルの掛け算を定義し、内積と外積のペアが出現する事がわかりました。そこで、前節の 3 次元ベクトル \mathbf{A} を微分演算子ベクトル

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

で置き換えてみます。この演算子ベクトルと 3 次元ベクトル \mathbf{B} との本来的な掛け算を考えると¹⁰

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes \mathbf{B} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{B} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

となります。演算子ベクトルと 3 次元ベクトルの本来的な掛け算とは、ターゲットの 3 次元ベクトルを微分するという事です。そしてこれは演算子ベクトルとターゲットベクトルの内積および外積をつくり、これらをペアとすることです。それを数学では

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div} \mathbf{B} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{B} \end{aligned}$$

と呼んでいます。

つまり、 $\text{div} \mathbf{B}$ 、 $\text{rot} \mathbf{B}$ というのは 3 次元ベクトル \mathbf{B} を空間的に微分したという事を言っているだけです。もし総合的微分（スカラー的微分とベクトルの微分の両方）を $\mathcal{D}()$ で表現すると、

$$\mathcal{D}(\mathbf{X}) = \text{div} \mathbf{X} + \text{rot} \mathbf{X}$$

となります。この応用の代表例は、Maxwell の方程式ですが、第 8.4.2 で簡単に述べます。

また第 8.2 節でのべた「多変数微分」あるいは「偏微分」はベクトルの微分の一部である、スカラー的微分だった事がわかります。ただし、「偏微分」では、スカラー的微分が幸いして、次元の制限がありません。従って、 n 変数に関する「多変数」微分として使える訳です¹¹。

8.3.5 高階微分方程式の 1 階化

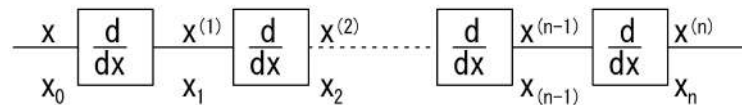


図 8.3: n 階微分方程式

図 8.3 を参照し、変数を $x_0, x_1 \dots x_{n-1}, x_n$ の様にとると、 n 階の微分方程式は n 階の 1 階連立微分方程式に書き換えられます。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = a_{11}x_0 \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{nn}x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

¹⁰ このために掛け算とは何かというやや哲学的な準備をした訳です。

¹¹ 一般相対性理論では、3 次元座標と時間を全く等価な変数として考えますから、いわば 4 次元のベクトルです。ここでは「偏微分」は実力不足、「ベクトル解析」は適用不能となり、テンソルにその方法を見出しました。

ここで

$$\dot{x}_n = x_{n-1}.$$

なので,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

上式で \dot{x}_n は x_{n-1} のみの関数ですが、一般的には \dot{x}_n はすべての他の変数の線形結合と考えて、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{(1)(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{(2)(n-1)} & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{(n)(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

従って行列 \mathbf{A} およびベクトル \mathbf{x} を使って

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

の様に書かれます。この方式の利点は解 $e^{\mathbf{A}t}$ が、時数部 (σ) と虚数部 ($j\omega$) で書かれ、

- 解の振幅は時間とともに増加または減少 (σ 部分),
- 解の振動数 ($j\omega$ 部分).

が明確に示されることです。従って、この微分方程式で表されるシステムの特性は \mathbf{A} で表現されますが、これは高階微分方程式表現ではすぐには分かりません。

8.4 力学（物理学）と微分

8.4.1 絶対基準を不要とする微分表現

力学や電磁気、相対論を含む物理学の根源的な考えは「物体」が空間上のどこにあって、その位置が時間とともにどう変わっていくかを研究し、定式化することです。ここでいう空間とは3次元空間ですが、物理法則は宇宙で不変であると信じたいので、考える空間の領域は全宇宙です。一方、いつの時間においても不変と考えるので、時間の範囲は Big Bang に始まり、未来不確定な時までです。

つまり、空間、時間ともどこが始まりでどこが終わりなのか知るすべが無いのです。しかし私たちが位置や時間を規定する時には何らかの基準が必要です。緯度、経度により位置の基準を、地球の自転を 24 時間に分けて時間の基準としていますが、それらの宇宙における絶対位置、絶対時間を知る事はできません。私たちは、基準を都合のいい様にローカルに決めているだけです。

このような中で、全宇宙、全時間に共通な法則を記述するには、絶対基準が不要な方法を考えねばなりません。これが空間および時間の「変化率」に基づく記法で、「微分」による記述です。この方法ならば、変化率を積分して、位置を決めていく毎に、適当なローカル基準を用意すれば良く、私たちの今までの方法がそのまま使えます。

従ってどんな物理学であれ、位置や時間を云々するならば、その物理学は微分方程式で書かれる筈です。

ここで述べた内容を数学的に簡潔かつ正確に記したものが Arnold の本 (第 8.5.1 節 (7))、第 1 章にある「ガリレオ時空間」の定義です。

8.4.2 力学と微分方程式

力学は微分方程式で記述されますが、微分方程式は解けないものが多く、解けるものしか教科書などに書かれていません。解ける微分方程式は、その解法にあるパターンやテクニックがあり、「変数分離型」などの様に型名で呼ばれています。

従って、力学の問題は統一的に解説されるのではなく、ユークリッド幾何学のように問題とその解答集となっているのが現状です。しかし、微分方程式の「型」は一方で、自然現象のふるまいの特徴を示し、個々の力学問題がどの特徴を持つかを示します。そしてこれらの特徴は私たちの直感に合致、理解に結びつきます¹²。

ここでは微分方程式の解の型による分類を示し、物理現象の典型例と微分方程式を対比させ、「なるほど」と思われる例を示します。

【自己増殖、同位元素崩壊】

生物など、個体数が現在の個体数に比例して増えるものがあります。バクテリアの増殖や、ネズミ算式の増加と例えられるものです。この場合、微分方程式は、個体数を $n(t)$ 、比例係数を μ として

$$\frac{dn}{dt} = \mu n(t).$$

で表せます。これを解くと、良く知られた指数曲線 (exponential curve) が得られ、その数は無限大に増加、しかも増加速度も時間とともに増えます。N は個体数の初期値です。

$$n(t) = Ne^{\mu t}.$$

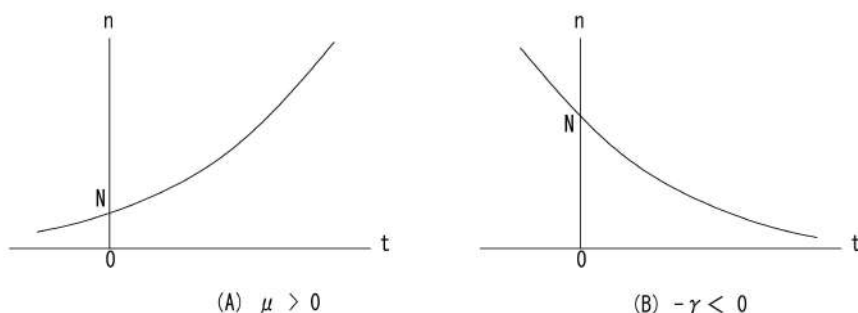


図 8.4: 自己増殖 (A) および崩壊 (B)

一方、同位元素の崩壊は、比例係数 μ が負である時に相当し、 $-\gamma = \mu$ と置き換えると

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n(t), \quad N(t) = Ne^{-\gamma t}.$$

が得られ、個数がゼロに向かって（永遠に）減少していく様子を示します。

これらの事例は、無限大に向かって増え続ける、あるいはゼロになるには無限の時間がかかるという数学的表現を、「気の遠くなるくらいに増加」、「適当な時間でゼロになる」と近似してしまうと、私たちの普通の理解になります。またこれらの場合、増加、減少ともいわゆる「単調増加」「単調減少」です。

¹²あるいは、力学や物理学で扱えるのは、結果が理解し易い現象となる微分方程式で表されものに限られる。

【極限付きの増殖、減少】

増加、減少に極限がある場合（特定の値以上にならない）は、日常的に発生する現象です。例えば、電子回路素子の基本であるコンデンサを電池により充電する場合は、電池の内部抵抗を R 、電圧を V_b とすると、コンデンサに蓄えられる電荷 $Q(t)$ は

$$V_b = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}, \quad I(t) = \frac{dQ(t)}{dt},$$

という 1 階微分方程式を満たします。これを初期値 $Q(t_0) = 0$ として解くと、

$$Q(t) = CV_b \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right),$$

が得られます。この時は最終値は電池の電圧で制限され、この値に近づく訳です。近づく速さ（充電の速度）は積 CR で決まるため、これを時定数などと呼びます。

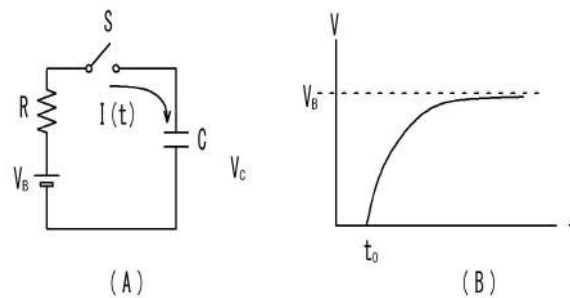


図 8.5: 電池によるコンデンサの充電

【ロジスティック方程式】

人口の増加の数理モデルとして、ロジスティック方程式¹³が考案されました。Malthus¹⁴は人口の増加は指数関数的であると述べましたが、Verhulst¹⁵は人口が増えれば、食料が得られなくなり、フィードバックが働き、人口が抑制されると思ったのです。つまり個体数を n 、ある定数を K として増殖率を

$$\text{増殖率} = \mu \left(1 - \frac{n}{K}\right),$$

と考えると、増殖率は個体数の関数となり、

$$\begin{aligned} n < K; & \quad \text{増殖率は正} \\ n = K; & \quad \text{増殖率はゼロ} \\ n > K; & \quad \text{増殖率は負} \end{aligned}$$

となります。個体数は、

$$\frac{dn}{dt} = \mu \left(1 - \frac{n}{K}\right)n,$$

という方程式で表現されるので、これを解くと図 8.6(A) の様な、いわゆるシグモイド (sigmoid) 曲線が得られます。これは 1 階ですが、2 次（非線形）の微分方程式です。

¹³logistic differential equation; なぜこう呼んだかは分からない様です。

¹⁴Thomas Robert Malthus, 1766 年 2 月 - 1834 年 12 月

¹⁵Pierre François Verhulst, 1804 年 10 月 - 1849 年 2 月

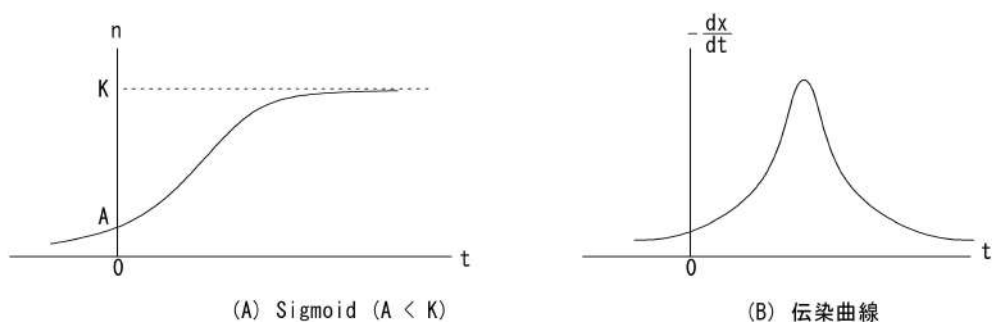


図 8.6: Sigmoid と伝染曲線

【伝染病理論】

伝染病の伝搬は患者間の接触によるものと考え、伝染病がどのように拡大し、そして収束するかの論理モデルが作れます。人口 N 人のうち、非感染者を x 人とする、感染者は $N - x$ 人となります。単位時間当たりの非感染者の減少（感染者の増加）は、感染者、非感染者に比例すると考えて

$$-\frac{dx}{dt} = \beta x(N - x),$$

が得られます。ロジスティック方程式と比べると、

$$\frac{n}{K} = \frac{x}{N}, \quad \mu = -N\beta,$$

となるので、

$$x(t) = AN \frac{e^{-N\beta t}}{K + A(e^{-N\beta t} - 1)}.$$

最初に感染者が 1 人となると、 $t = 0$ で $x = N - 1$ であり、

$$\frac{A}{K} = \frac{N - 1}{N},$$

が得られるので、結局

$$x(t) = \frac{N(N - 1)}{N - 1 + e^{N\beta t}}.$$

感染者の増加は

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{N^2(N - 1)\beta e^{N\beta t}}{(N - 1 + e^{N\beta t})^2},$$

となり、図 8.6(B) を得ます。単純なモデルですが、これも私たちの感覚と一致するものでしょう。実際には、他の要素も入り、実データとは必ずしも一致しないかも知れませんが、考えるスタートにはなります。

【単振動】

バネの一端を壁に固定し、もう一端と質量を結び付け、水平においたものを考えます（つまり、重力は考えないということです）。質量に水平方向の力を加えてから離すと、質量は振動します。運動方程式は、バネ定数を k 、おもりの質量を m とすると、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

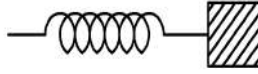


図 8.7: 単振子

となります。これを、解くには一種直感が必要で、「求める関数を 2 回微分したら、もとの関数となる、微分しても変化しない関数が解になるのだろう。」と想定する訳です。このようなもので、すぐに思いつくのはサイン波（コサイン波と言っても同じ事）です。そこで

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi),$$

と仮定して、これを微分してみます。ここで A とか ϕ という変数を付けておいたのは、サイン波の表現で最大の自由度を持たせるためです。すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \\ &= -\omega^2 f(t), \end{aligned}$$

より

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

が得られます。

さらに、サイン波振動を一般的に表現する微分方程式として

$$\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2},$$

があります。 $\Phi(x)$ は振動の変位を表す関数で、この例では 1 次元の振動を表します。この方程式は 2 階線形偏微分方程式で、「波動方程式」と呼ばれます¹⁶。

【Maxwell の方程式】

これは「力学」の範疇外で、電磁気学の主要テーマなのですが、微分方程式が表現できる物理の非常に重要な例ですので、簡単に記しておきます。Maxwell の方程式は、通常電界、磁界をそれぞれ \mathbf{E} 、 \mathbf{B} として次の様に、4 つの方程式として記述されます。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned}$$

しかし、3 次元ベクトルの総合的微分と見るべきですので、電界ベクトル、磁界ベクトルそれぞれにつき、

$$\mathcal{D}(\mathbf{E}) = \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

¹⁶波動方程式ではない式から得られる波動もあり、「波」はすべて波動方程式で記述できる訳ではありません。一方、波動方程式が存在すれば波動が有り得ますが、静止状態も解となるので注意。

$$\mathcal{D}(\mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}.$$

の様に「2つの方程式」として記述するべきと考えます。

この様に考えると、3次元ベクトルで表現される量も、(3次元ベクトル) 微分方程式で表現され、微分方程式の威力が分かります。

8.4.3 微分方程式の形式と物理世界

これまで、微分方程式のいくつかの形式をその解が表す曲線を見てきました。これは私たちが持つ、物事の量についての非常に大雑把な

ある物が単調かつ無限に増加、減少。

ある物が単調に限界まで増加、あるいは減少。

ある物が単調に増加し、その後減少（あるいはこの逆）。

ある物がに増加したり減少したりを繰り返す（振動する）。

という感覚を物理世界で表現しています。もちろん、単調ではなく振動しながら増加、減少も考えられ、これも微分方程式で表現可能でしょう（線形ならば重ね合わせが可能）。

逆に、このような単純なものに帰着できない現象は、微分方程式に表現できなかったり、微分方程式が解を持たない場合と考えられ、力学や微分方程式がどういう範囲の事象を扱えるかの指針を与えます。第8.5.1節、参考文献(2)や(5)で、微分方程式を教える嘆きが書かれていますが、これはここで議論した事情を表現したものと考えられます。

微分方程式は力学の基本ですが、それらは実は、問題集/解答集を提供しているので、考える物理現象や自然現象が解決可能か否かは、問題集を探すと目安が得られるでしょう。

微分方程式の問題集/解答集からの脱却という意味で、一つの方向はコンピュータによる近似解の計算ですが、数学としての「微分方程式論」では（正確な解を得ることをあきらめ）解のふるまいや解が存在する領域を研究し、対象とする問題の性格を把握するという方向に進んでいます。

8.5 注記

8.5.1 参考資料

(1) Florian Cajori

The early history of partial differential equations and of partial differentiation and integration

The American Mathematical Monthly Vol. 35, No. 9 (Nov., 1928), pp. 459-467

http://www.math.harvard.edu/archive/21a_fall.14/exhibits/cajori/cajori.pdf

(2) Gian-Carlo Rota

Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations

April 24, 1997 (delivered at the meeting of the MAA at Simmons College).

<https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf>

(3) History of differential equations

<http://www.eoht.info/page/History+of+differential+equations>

(4) 矢嶋信男

常微分方程式

理工系の数学入門コース、岩波書店、1989

(5) 畑村洋太郎

- 直感でわかる数学
岩波書店、2004
- (6) 森 毅
現代の古典解析、微積分基礎課程
日本評論社、1985
- (7) Arnold
Mathematical Methods of Classical Mechanics
Springer, 1989
- (8) ポントリヤーギン
常微分方程式
千葉 克裕 訳 共立出版 1963

第9章 解析力学への助走

ニュートンは、天体と地上の物体の運動を統一的に記述し、プリンキピアの出現時点で、力学としては完成してしまいました。

その後、プリンキピアの幾何学的記述方法は、解析的（微分や積分）な方法で書き換えられ、私たちが高校で学習する様になりました。理論自体に新しい内容が付け加えられた訳ではありませんが、解析的記法が導入されたことにより、次の様な、考え方の大きな進化がもたらされました。

- (1) 放物線や円、楕円等の軌道は幾何学的に表現できますが、これは静的表現です。この静的な表現と物体の運動という動的なものの対応が分かり易くなりました。
- (2) 速度、加速度の概念が明確になり、日常的感覚と力学が結びつきます。
- (3) 微分法の応用の一つとして、微分係数＝ゼロの時の解析が最大、最小問題へと自然に拡張されます¹。これにより物体を投げた時の最高点の計算など、最大値や最小値を取る問題が議論できる様になりました。

ここまでの解析的記述は1変数微分方程式によるものですが、この多変数化、即ち偏微分方程式表現により、

- (4) 微分の対象が時間だけでは無く、空間方向も含まれるように発展、「力が一様に分布する場」が考えられるようになり、「場の理論」の萌芽が見られます（第9.4.4節参照）。
- (5) 物体の運動にともなうエネルギーを最大、最小とする問題（多変数関数の極値問題）から、物体の軌道となる「関数」を求める方法が出現しました。
- (6) 多変数力学であるラグランジュ力学へと発展、幾何学的座標から脱却する事になります。
- (7) ハミルトンによる「物理」の一般化へと進化します。

特に、上記(5)は、関数の集合である汎関数(functional)を定義、汎関数の極値問題として発展、ニュートン力学が解析力学へと進化する基礎となります。本章では主にこの点にフォーカスし、変分法の創生と完成が話題となります。(6)、(7)は章を改めて述べます。

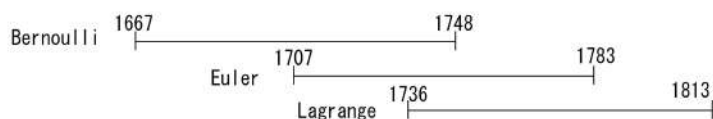


図 9.1: 年譜

中心となるのはヨハン・ベルヌーイ、オイラー²、ラグランジュ³ですので、彼らの時代関係を記しておきました。

¹幾何学では、最大最小をシステムティックに扱う事は困難です。これに対して微積分では、その「変化率」を扱うので、構造上、極値問題への応用が容易です。

²Leonhard Euler, 1707 年 4 月 - 1783 年 9 月。

³Joseph-Louis Lagrange, 1736 年 1 月-1813 年 4 月。

9.1 最速降下曲線

「関数」はライブニッツにより、1673 年に導入され、1734 頃に現在の記法である $f(x)$ がオイラーやクレイロー⁴により使われています。

一方、ある区間内の関数の値が、最大値あるいは最小値を取るような「関数自体」を求める方法が出現、「変分法 (calculus of variation)」と呼ばれるようになります。ここでは、これがどのような状況で考えられ、発展してきたかについて述べます。

特に、最速降下曲線 (brachistochrone curve) から始めましょう。

9.1.1 ベルヌーイによる出題

1696 年にベルヌーイ⁵は当時の学術誌 Acta Eruditorum に「質点が 2 点 A、B 間を重力のみを受けて滑り落ちる時、最短時間となる軌跡は何か？」と出題しました⁶。

この解答が最速降下曲線と呼ばれる曲線で、サイクロイドです。

ベルヌーイ自身の解法は、「光は 2 点間を最小速度で進む」というフェルマー⁷の原理を基にしたものです。

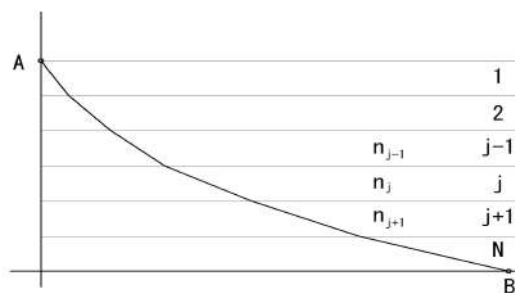


図 9.2: ベルヌーイの解法

図 9.2 に示す様に、上から屈折率が順次小さくなるガラスを積み重ねます。A 点で光束が入射すると⁸、各レイヤー毎に通過する速度が増加、かつそのレイヤーでは最短時間となります。ガラスの屈折率が重力で加速される速度と同じになる様に変化するとし、この様な構成でガラスを薄く、分割を細かくして行き $N \rightarrow \infty$ とすれば、問題の軌跡が得られる筈です。ベルヌーイはこの極限である連続的に屈折率が小さくなる媒体を想定し、問題を解きました。

この考えでは、未知関数を区間毎に区切り、その区間内での最小値となる関数を選び、その加え合わせを計算しています。そして最終的に、この区間を無限小にして、区間全体の最小値を得るという構造で、これが現在の変分法に対応します。このため 1696 年は変分法が考案された年とも言われます。

図 9.3 は、ベルヌーイ自身の解答に付けられた図を基にしたものです。AMB が解答となる軌跡、AH は重力加速度により、進む距離 (y 軸) と速度 (x 軸) を表す放物線です。

光学的アナロジーを用いるため、屈折の法則 (スネルの法則) を用います。屈折率が n_1 から n_2 の媒体を通過する時の、入射角 θ_1 と出射角 θ_2 の関係は、

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

⁴Alexis Claude Clairaut, 1713 年 5 月-1765 年 5 月。

⁵Johann Bernoulli, 1667 年 7 月-1748 年 1 月。

⁶これにはベルヌーイ自身を入れて 5 人から答えがありました。Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, Marquis de l'Hospital, Ehrenfried Walther, Issac Newton です。

⁷Pierre de Fermat, 1607 年 10 月 (?) - 1665 年 1 月。

⁸入射角は法線に対して 0 度以上で、この角度によりサイクロイドを作る円の直径が決まります。

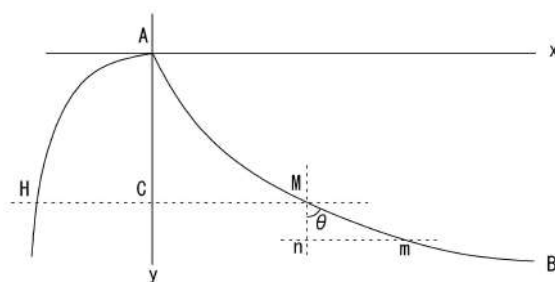


図 9.3: ベルヌーイによる図

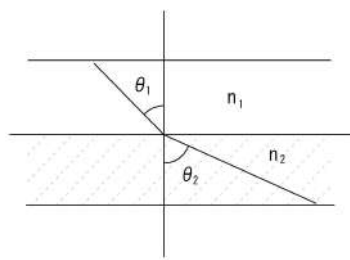


図 9.4: 光の屈折

図 9.4 では $n_1 > n_2$ で、光速は n_2 の方が速くなります。

屈折率 n は真空中の光速 c と媒体中の光速 v の比で定義され、

$$n = \frac{c}{v}.$$

従って、スネルの法則を媒質中の光速 v と屈折角 θ で表すと、

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

薄いガラスを重ね合わせた各層でこれが一定値となりますが、この極限として屈折率が連続的に変化をしても成立するので、

$$\frac{\sin \theta}{v} = k,$$

$$\sin \theta = kv.$$

光速が y 軸方向に、質点の速度と同じ変化 ($v = \sin \theta / k$) をする媒質中の光の軌跡と、問題の解答は一致する筈です。

軌道上の微小三角形 $\triangle Mnm$ に関して、

$$\sin \theta = \frac{dx}{dz},$$

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

従って

$$dx = \sin \theta dz = kv dz = kv \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

これより dx を求めると、

$$dx = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{1 - k^2 v^2}} dy.$$

ここで、速度の2乗が位置に比例するので、比例定数を k' と選ぶと

$$v^2 = k'y.$$

従って、

$$dx = \sqrt{\frac{k^2 k' y}{1 - k^2 k' y}} dy = \sqrt{\frac{y}{(1/k^2 k') - y}} dy,$$

が得られますが、整理するため、さらに $1/k^2 k' = a$ と置き換えると、

$$dx = \sqrt{\frac{y}{a - y}} dy.$$

この式を変形すると（これについての考察は第9.4.2節参照。）、

$$dx = \sqrt{\frac{y}{a - y}} dy = \left[\frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{ay - y^2}} \right] dy - \left[\frac{1}{2} \frac{a - 2y}{\sqrt{ay - y^2}} \right] dy.$$

変数分離型となっているので、積分して、

$$x = a \sin^{-1} \sqrt{\frac{y}{a}} - \sqrt{ay - y^2}.$$

これがサイクロイドであることを示すには、

$$y = \frac{1}{2}a(1 - \cos \theta),$$

と置き換えて、

$$\begin{aligned} x &= a \sin^{-1} \left(\sin \frac{1}{2} \theta \right) - a \sin \frac{1}{2} \theta \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{2}a\theta - \frac{1}{2}a \sin \theta. \end{aligned}$$

さらに $r = 1/2a$ とすると、

$$x = r\theta - r \sin \theta,$$

$$y = r(1 - \cos \theta).$$

これは半径 r の円によるサイクロイドとなります。

（この項は第9.4.5節、参考資料(1)(2)に基づきました。）

9.1.2 変分法による解

最速降下曲線は、現在では変分法の標準的応用問題になっていますので、その方法を示します。

質点 m が重力 g のみを受けて、原点 O から降下する時、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの総量は保存されるので、

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2.$$

速度は

$$v = \sqrt{2gy}.$$

曲線上の微小距離 ds を移動するのに必要な時間を dt とすると、

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{dx}{dt}.$$

A から B までの時間は、

$$F = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = \int_0^x \frac{1}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

v を代入、 $dy/dx = y'$ と書くと、時間は、

$$F = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dt.$$

ここで、通常この方程式を解くにはオイラー・ラグランジュ方程式、

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

を用います。オイラー・ラグランジュ方程式は第 9.3 節で導きますので、ここではこれを解説なしで使います。

問題となっている関数 F は x を陽に含まず都合が良く、オイラー・ラグランジュ方程式と組み合わせると

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

という性質があります（第 9.4.1 節参照）。

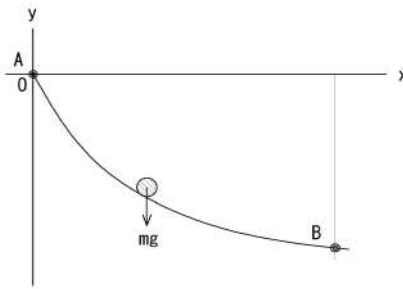


図 9.5: 最速降下曲線

$\partial F / \partial y'$ を計算すると、

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = (1 + y')^{-1/2} 2gy^{-1/2},$$

が得られ、

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy} \sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

これより $y' = dy/dx$ は

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] y = \frac{1}{2gC} = k^2.$$

本来ならば、この微分方程式を解くべきなのですが⁹、これはサイクロイドと分かっている⁹、

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{1}{2} k^2 (1 - \cos \theta).$$

となります。

⁹最速降下曲線問題は、サイクロイドを表現する微分方程式を得るのと、これを解くという2段階に分けられますが、大体最初の段階で話を終了してしまいます。ここでもそれに習います。

9.2 変分法の導入

9.2.1 オイラー

ベルヌーイの方法はオイラーによって力学の問題として研究され、1744年にまとめられ¹⁰、発表されました。この時のオイラーの方法は幾何学的、直感的な方法で、一般性を欠いていましたが、現在オイラー・ラグランジュの式と言われる

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right),$$

を得ています。これはニュートンの運動方程式の別の表現ですが、まだこの時点では、この方程式の重大な意味は理解されていなかったと思われます。

オイラーの研究に触発されたラグランジュはオイラーの方法を完全に解析的に記述し、この結果をオイラーに送ります。1755年、彼がまだ19歳の時です。オイラーは、ラグランジュからの手紙により、彼の方法を知るとすぐにその優位性を認め、1756年にはベルリンアカデミーでラグランジュの名前を上げ、講義をしています。この講義の内容は、1762年にラグランジュが「Essay on a new method」として発表するのを待って印刷され、ラグランジュの方法を「変分法 (calculus of variations)」と名付け¹¹、現在私たちが教科書で知るような形で確立しました。

オイラーも完全にラグランジュの方法に移行したため、ラグランジュの解析的方法が標準的な変分法の導出であり、「解析力学」および物理の各分野への応用には、この考えを理解する必要があります。

しかし、ラグランジュの方法は（図を使わないこともあり）最初から理解するには難しく、オイラーの考えを現代的に解釈した、幾何学的な導入法を最初に述べます。

9.2.2 オイラーの方法の現代的解釈

【オイラーの幾何学的考え】

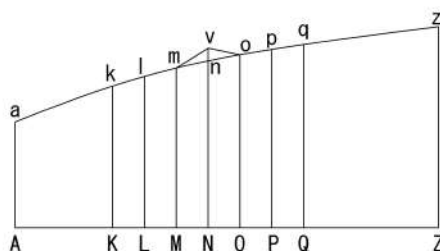


図 9.6: オイラーの変分法

第 9.6 はオイラーの元図をやや簡略化して書き直したものです。ある関数 $y = y(x)$ が a, z の間で、与えられた問題に対しての最適解とします。

この関数の区間 a, z を微小区間 Δx で区切り、積分値をこの区間の面積の総和とします。

$$\int_a^z F(x, y, y') dx = \sum F(x, y, y') \Delta x.$$

つまり、 $KLlk$ の面積は $x = K$ の点の値 $y = k$ と傾き y' を使う訳です。

¹⁰Methodus inveniendi, (The method of finding plane curves that show some property of maximum and minimum)

¹¹Elementa Calculi Variationum, 1756

この状態である点 n の値を v に変化させます。すると、 mn 、 no の傾きが変化し、全体の積分値は変化しますが、これに影響するのは、単に両隣の区間の変化のみです。つまり微小区間のみを操作して極値となるようにし、これの総和として関数の極値を計算するわけです。この方法は第 9.4.5 節、参考資料 (9) に解説があります。

【現代的導入】

ここでは、オイラーの元論文のアイデアを、ラグランジュ力学として完成した用語を使い、現代風に分かり易くアレンジした幾何学的導入を述べましょう。

図 9.7 は対象となる関数 F の微小部分を切り取ったもので、時間 t_1 、 t_3 の時にそれぞれ x_1 、 x_3 となる固定値です。これに対して x_2 は x_1 、 x_3 の間を自由に動ける値で、これを区間 x_1 、 x_3 の中で動かし、関数のこの区間での極値を求めてみます。

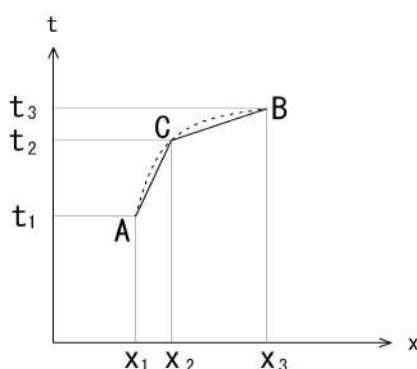


図 9.7: オイラー・ラグランジュ方程式の導出

図 9.7 に点線で示した、ターゲットとなる関数を直線 AC 、 CB で近似します。 x_2 を変数と考え、 x で書き直し、 $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$ とすると、

$$x_A = \frac{x_1 + x}{2}, \quad v_A = \frac{x - x_1}{\Delta t},$$

$$x_B = \frac{x + x_3}{2}, \quad v_B = \frac{x_3 - x}{\Delta t}.$$

これらの関数はすべて一つの変数 x を持ちます。これらの x についての微分は

$$\frac{dx_A}{dx} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dv_A}{dx} = \frac{1}{\Delta t}.$$

$$\frac{dx_B}{dx} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dv_B}{dx} = -\frac{1}{\Delta t}.$$

セグメント A 、 B のラグランジアンを L_A 、 L_B とすると、作用 (action) S_{AB} は

$$S_{AB} = L_A \Delta t + L_B \Delta t.$$

ここで最小作用の原理を適用すると、

$$0 = \frac{dS_{AB}}{dx} = \frac{\partial L_A}{\partial x_A} \frac{dx_A}{dx} \Delta t + \frac{\partial L_A}{\partial v_A} \frac{dv_A}{dx} \Delta t + \frac{\partial L_B}{\partial x_B} \frac{dx_B}{dx} \Delta t + \frac{\partial L_B}{\partial v_B} \frac{dv_B}{dx} \Delta t,$$

$$\frac{\left(\frac{\partial L_A}{\partial x_A} + \frac{\partial L_B}{\partial x_B} \right)}{2} - \frac{\left(\frac{\partial L_B}{\partial v_B} + \frac{\partial L_A}{\partial v_A} \right)}{\Delta t} = 0.$$

ここで、

$$\frac{\left(\frac{\partial L_A}{\partial x_A} + \frac{\partial L_B}{\partial x_B}\right)}{2},$$

は、二つのセグメント A 、 B に渡る $\partial L/\partial x$ の平均値なので、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では $\partial L/\partial x$ になります。一方、

$$\frac{\left(\frac{\partial L_B}{\partial v_B} + \frac{\partial L_A}{\partial v_A}\right)}{\Delta t},$$

は、ラグランジアン L の偏微分を速度 $d(\partial L/\partial v)/dt$ に関して時間微分したものとなります。従って、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right),$$

が得られます。

この項は第 9.4.5 節、参考資料 (6)、(7)、(8) によりました。

9.3 ラグランジュの変分法

この節は第 9.4.5 節、参考資料 (5)、(9) によりました。

9.3.1 ラグランジュの考え方

18 世紀の「代数」は 1 変数の多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ について

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = 0,$$

の解の研究が主流でした。これに対して、ラグランジュは、

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

や、 x^n 、 a^x 、 $\sin x$ 、 $\cos x$ の逆関数、 $\sqrt[n]{x}$ 、 $\log_a x$ 、 $\arcsin x$ 、 $\arccos x$ 、そして、これらを組み合わせたものを「解析関数」としてまとめ、解析関数の微分法を研究しました¹²。つまり、現在私たちが、微積分や微分方程式の解などを扱うのとほぼ（今は、極限に関して厳密な議論の結果を使っていますが）同じ内容です。

導関数を求める方法論としては、幾何学的方法を元とする極限の取り方が一般的でしたが、ラグランジュは厳密でない点に不満をもっており代数的な代替案を模索していました¹³。

そこで、ラグランジュが用いた導関数を得る方法は当時すでに、無限小解析を使わずに証明された級数展開を使うものでした。彼はすべての関数 $f(x+i)$ が i について（無限）級数に展開可能と考えており、級数展開にを用いて導関数を、すでに分かっている関数で表現するのです。

18 世紀の微分は単一解析関数に関するものですが、全ての関数について、

$$f(x+m) = f(x) + pm + qm^2 + rm^3 + sm^4 + \dots,$$

と表現できる事の証明を試みています。

¹²Leçons sur le calcul des fonctions.(1806)

¹³極限の定義が定まったのは $\epsilon - \delta$ 論法が出現する 1860 年頃です。

しかし、例えば $f(x) = \frac{1}{x}$ の $x = 0$ における展開の様に、関数の特定の点ではうまく行かない事を知っていましたが、一般的な表現が可能ならばいいと考えていました。

例えば、

$$\sqrt{x+m} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{m^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{m^3}{16x^2\sqrt{x}} - \dots \quad x \neq 0 \text{ の時},$$

$$\sqrt{x+m} = m^{(1/2)}, \quad x = 0 \text{ の時},$$

や

$$\frac{1}{x+m} = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} + \frac{m^2}{x^3} - \frac{m^3}{x^4} - \dots \quad x \neq 0 \text{ の時},$$

$$\frac{1}{x+m} = m^{-1}, \quad x = 0 \text{ の時},$$

の様な表現で、展開が全ての関数について可能であろうという訳です。つまり、厳密な証明はできてはいません。

この様に、現在から見れば漏れはあるのですが、

$$f(x+m) = f(x) + mf'(x) + \frac{m^2}{2}f''(x) + \frac{m^3}{2 \cdot 3}f'''(x) + \frac{m^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}f^{(4)}(x) + \dots,$$

により（これはテイラー展開です）、導関数を無限小解析を使用せず代数的に計算する関係式としたのです。

これが、ラグランジュの、当時の幾何学的無限小解析に対する彼の回答で、「この本には、図形は一切ない」という記述の真意であり、彼のフィロソフィーでした。

9.3.2 ラグランジュの変分法

必要なだけ微分可能な連続関数 $L(x, \dot{x}, t)$ について、定積分

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

を考えます。「変分法 (calculus of variation)」とは、定積分 I が停留値（その近くで値の変化がなし）を取るような「関数」を求める問題です。

ここでは、現在の標準的な方法で解説します。

まず、候補関数 $x_a(t)$ を a をパラメータとして、

$$x_a(t) \equiv x_0(t) + a\beta(t),$$

とします。ただし $\beta(t)$ は、区間 $[t_1, t_2]$ で連続な 2 階微分係数を持ち、

$$\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0,$$

となる任意な関数です。これは、停留値をとる関数 $x_0(t)$ に対して、点 t_1, t_2 を固定して、適当に振幅を与えたすべての関数という意味ですから、理にかなったものでしょう。

以下の様に積分値がゼロとなる定積分を考えます。

$$0 = \frac{\partial}{\partial a} I = \frac{\partial}{\partial a} \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} \right) dt.$$

$x_a(t) \equiv x_0(t) + a\beta(t)$ より、

$$\frac{\partial x_0}{\partial a} = \beta, \quad \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial a} = \dot{\beta}.$$

従って、

$$\frac{\partial}{\partial a} I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} \beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} \right) dt.$$

ここで、定積分の後半を部分積分¹⁴して

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} dt &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt, \end{aligned}$$

を得ます。

結局、

$$0 = \frac{\partial}{\partial a} I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt.$$

ここで $\beta(t)$ は任意の関数なのだから、点 a での計算だけでなく $[t_1, t_2]$ 全てでゼロになる筈で

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

が得られます。

これがオイラー・ラグランジュ方程式で、同等のものはオイラーが導きましたが、ここに述べたように、一般的かつ解析的に非常に明確に導いたのがラグランジュです。オイラーの驚きが伝わってくる気がします。

高階の微分を含むオイラー・ラグランジュ方程式も導出可能ですが、これは第 9.4.3 節に注記します。

9.3.3 多変数微分方程式としてのオイラー・ラグランジュ方程式

第 8 章で、偏微分方程式は多変数微分方程式であると強調しました。ここではオイラー・ラグランジュ方程式がどの様に多変数化されていくか、簡単に議論しておきます。

まず、

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

において、変数は x と \dot{x} ですが、これらは微分-積分の関係にあるので、独立変数とは言えません。

変数 x_1 と x_2 が独立という場合は、通常同じ微分空間に属し、 x_1 が x_2 で表現不能（逆も含む）という意味です。別の微分空間に属する変数については、独立なものも、従属なものも有り得ますが、 x と \dot{x} は独立とは言えません。

しかし、上の式では関数 $L = f(x, \dot{x})$ のような表現をし、（非独立な）2 変数 x と \dot{x} の関数と考えられます。ここで、関数 $f()$ を、例えば 3 次元空間の変数 x, y, z の関数とし、

$$L = f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

とすると、独立な変数（非独立な変数もありますが）による多変数化が完成します。このような 3 次元空間でのオイラー・ラグランジュ方程式は力学で大活躍することになります。

¹⁴数学的技法ですが、解析力学では数多くの大事な点で、これを使います。

次章以降でオイラー・ラグランジュ方程式によるラグランジュ力学がニュートン力学をどう書き換えるかについて議論する準備が整いました。

9.4 注記

9.4.1 ベルトラミの公式

関数 $F(x, y, y') = F(y, y')$ の場合、つぎのような性質が導かれます (時間微分とは限らないので、 y' と表示します)。

$F(y, y')$ を x について微分すると、

$$\frac{dF(y, y')}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

が得られます。

一方、オイラーの方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

の両辺に y' を掛けると

$$y' \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

これらの式から

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

整理すると、

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

即ち、

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

が得られます。

9.4.2 ベルヌーイの考えたこと

【ホイヘンスの等時曲線】

等時曲線 (tautochrone) はホイヘンスにより研究されました。図 9.8 で示す様に錘が等時曲線を描く振り子では、振り子の最下点を s_0 とすると、弧 $s_0 \frown s_1$ と弧 $s_0 \frown s_2$ を描く時間が等しく、

$$t_{(s_0 \frown s_1)} = t_{(s_0 \frown s_2)} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r}$$

となります。 r はサイクロイドを生成する円の半径です。錘の速度 v は s を弦の長さとする

$$v = \frac{s}{t},$$

ですが、 t は s の長さに限らず一定です。

ポテンシャルエネルギーと、運動エネルギーの総量は保存されるので、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{s^2}{t^2}$$

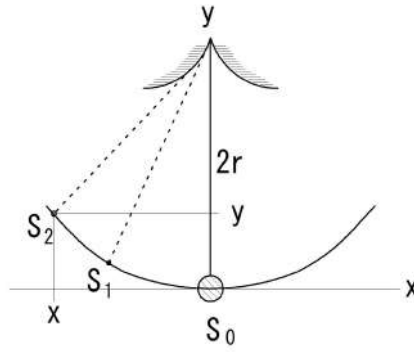


図 9.8: 等時曲線

$$y = h = \frac{1}{2gt^2} s^2$$

ここで、簡単のために $1/(2gt^2) = 1$ としましょう（こうなる様に r を設定）。
すると、

$$y = s^2$$

$$dy = 2s ds$$

$$dy^2 = 4s^2 ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2)$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{1 - 4y}{4y}}$$

これを解くと $u = \sqrt{y}$ として、

$$x = \frac{1}{2}u\sqrt{1 - 4u^2} + \frac{1}{4}\sin^{-1} 2u,$$

$$y = u^2.$$

【ベルヌーイの予備知識】

$$dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}} dy = \left[\frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{ay-y^2}} \right] dy - \left[\frac{1}{2} \frac{a-2y}{\sqrt{ay-y^2}} \right] dy$$

この式の変形は予備知識なしでは簡単に思いつけそうにありません。そこで、この式の変形から、逆にベルヌーイが何を考えていたかが想像できそうです。まず、ベルヌーイはホイヘンスの振り子の研究によりサイクロイド振り子が完全な等時性 (isochronism) を持つ事を知っていました。

つまり、 $\sqrt{y/(a-y)}$ が上に示す様に解けるのも知っていたはずで、さらに想像をたくましくするならば、ホイヘンスの研究によるサイクロイドの等時性から、逆に最速カーブとなると考えたのかも知れません。ホイヘンスの研究からは等時性は証明されても、最速性は自明では無く、証明は必要でした。この証明のためにフェルマーの法則を用いたのは非常に卓見だと思われませんが、これを使用しての解析は、 $\sqrt{y/(a-y)}$ を出現させるのが目的となった筈です。

9.4.3 高階のオイラー・ラグランジュ方程式

2 階以上の微分に対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right) + \dots (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \right) = 0,$$

のように定義できます。

しかし、高階の微分方程式は第 8.3.5 節に示した様に、まず 1 階の連立微分方程式に直してから、オイラー・ラグランジュ方程式を応用するのが普通です。またオイラー・ラグランジュ方程式は「多変数」微分方程式ですので、 n 階の多変数方程式とするよりも、1 階の多変数方程式と考える方が素直な扱いでしょう。

9.4.4 力学と場の理論の関係

第 6.5 節で考えた様に、ポテンシャルエネルギーの元を辿ると、万有引力の法則に行きつきます。例えば、引き合う 2 個の物体が有る場合、距離により決まるポテンシャルエネルギーが定義されます。この物体の内、片方の質量が他方に比べて強大な場合、近似としてのポテンシャルエネルギーから「場」の考えが生まれました。しかし、未だその力の伝達速度は無限大、重力波の考えはありません。

運動エネルギーは「座標」を定義した時に、その中での速度から決まります。座標は遠隔作用論でも使われ、運動エネルギーについては、近接作用、遠隔作用の違いはありません。

ラグランジュ力学やハミルトン力学は、ポテンシャルエネルギーを使用するため、場の考えが導入されますが、力はまだ遠隔作用と考えています。そのため未だ「場の理論」とは呼べません。

一方、電磁気学は、近接作用としての力による場の理論ですので、力学と電磁気学は「物理学」として整合性が有りませんでした。これはアインシュタインによる一般相対性理論で解決され、「近接作用」として「力学」に重力波が導入されました。

従って力学は「一般相対性理論」の基で「場の理論」であり「近接作用論」となります。

9.4.5 参考資料

(1) Herman Erlichson

Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time
The city university of New York
European Journal of Physics, Vol 20 (1999) pp. 299-304
www.mecheng.iisc.ernet.in/~suresh/me256/GalileoBP.pdf

(2) Henk W. Broer

Bernoulli's light ray solution of the brachistochrone problem through Hamilton's eyes
International Journal of Bifurcation and Chaos
www.math.rug.nl/~broer/pdf/bernoullihamilton.pdf

(3) Yutaka Nakajima

The Brachistochrone Curve: The Problem of Quickest Descent
Osaka University of Economics
www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/math2010/cycloid.pdf

(4) Ruediger Thiele

Euler and the Calculus of Variations
http://cachescan.bcub.ro/e-book/Adriana%20C_3_e-book_6000-7000/580512/580512_255-321.pdf

(5) Craig G. Fraser

The Origins of Euler's Variational Calculus
Victoria College, University of Toronto
<http://homes.chass.utoronto.ca/~cfraser/Lagrangeorigins.pdf>

- (6) Jozef Hanc
The original Euler's calculus-of-variations method; Key to Lagrangian mechanics
Technical university, Slovakia
www.eftaylor.com/pub/HancEulerMethod.pdf
オイラーの変分法について非常に分かりやすく解説、好論文です。
- (7) Jozef Hanc, Edwin F. Taylor, Slavomir Tuleja
Deriving Lagrange's Equations Using Elementary Calculus
Technical university, Slovakia
www.eftaylor.com/pub/LagrangeEqnsPreprint.pdf
オイラーの原論文によるオイラー・ラグランジュの方程式の幾何学的導入。
- (8) Jozef Hanc, Slavomir Tuleja, Martina Hancova
Simple derivation of Newtonian mechanics from the principle of least action
Technical university, Slovakia
www.eftaylor.com/pub/NewtonFromAction.pdf
- (9) Craig G. Fraser
J.L.Lagrange's Changing Approach to the Foundations of the Calculus of Variations
Institute for History & Philosophy, University of Toronto
<http://homes.chass.utoronto.ca/~cfraser/LagrangeCalvar.pdf>
オイラーによるオイラー・ラグランジュの方程式の最初の導入方法が書かれています。
- (10) Walter Gautschi
Leonhard Euler: His Life, the Man, and His Works
Department of computer science, Purdue University, 2008
<http://www.siam.org/journals/sirev/50-1/70271.html>

第10章 ラグランジュ力学

「ニュートン力学」を表す微分方程式は3次元すべてを書くと、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(y), \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = f(z),$$

となります。これは、時間 t に関する（2 階）1 変数の微分方程式です。

これに対して、「ラグランジュ力学」はニュートン力学の多変数化です。

ラグランジュ力学ではエネルギーを基にして微分方程式を考えます。エネルギーには「力学」の中だけでも¹「運動エネルギー」と「ポテンシャルエネルギー」があり、 x 軸を代表させて書くと、

$$x, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

の2変数が必要となり、多変数微分方程式（偏微分方程式）で表現します。この時、時間 t は x, \dot{x} に対する媒介変数となっていて、運動方程式中に陽に現れていない点にご注意下さい。

ラグランジュ力学では、独立変数 x_n の他に、独立とは言えない変数 \dot{x}_n を含みますが、これを独立変数だけにした力学が「ハミルトン力学」です。

ハミルトン力学は、力学系の中に、エネルギー源（あるいはエネルギー消費源）を含まない場合を記述します。エネルギー源をも含む力学は「ハミルトン・ヤコビ力学」とも言われ、ハミルトン力学のさらなる発展形です。

これらの「ラグランジュ力学」「ハミルトン力学」「ハミルトン・ヤコビ力学」の総称が「解析力学」です。本章以降、これら「力学」の進化について議論をしていきます。

10.1 オイラー・ラグランジュの方程式と運動の法則

オイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

はスカラーを与える多変数関数 $L = L(x_1, x_2, \dots)$ が停留値をとるための（必要）条件を示す方程式です。従って $L()$ は、2 階微分可能な複数の変数を持ち、その全微分 \mathcal{D} が、

$$\mathcal{D}(L) = \frac{\partial L}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} d\dot{x}_2 + \dots,$$

で表せ（結果がスカラーとなる）、さらに x_n は時間微分可能なものであれば良く、特に力学を記述する式に限る訳ではありません。しかし力学を表現する微分方程式はこのようなものの代表例で、オイラー・ラグランジュの方程式を力学の中で議論する理由です。

¹電磁気学の中では、電界、磁界、電流、磁束に關係するエネルギーなど、運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーと同等の性質をもつものの、物理表現としては異なるエネルギーがあります。従って、電気で動くような機械を考えると、このオイラー・ラグランジュ方程式中には、さらに沢山の変数が存在するようになります。

10.1.1 最小化ターゲット関数

オイラー・ラグランジュ方程式は、慣性座標で成立するニュートンの運動の法則 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ を多変数化した方程式です。 $m\mathbf{a} - \mathbf{F} = 0$ を多変数化したエネルギー関係に読み替えると、 $\mathcal{T} - \mathcal{V} = 0$ となります。これから示そうとするのは、オイラー・ラグランジュ方程式を使用して、多変数系のエネルギー間の関係「 $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ 」を最小化することで、そのターゲットとなるエネルギー関数 L （ここではまだ \mathcal{L} と書いてない点に注意）は、

$$L = \mathcal{T} - \mathcal{V},$$

でなければなりません²。

10.1.2 最小作用の原理

自然は最も経済的に運動すると考えて、次の積分 S を最小にする方法を考えましょう。

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt.$$

この方法はファインマンの教科書 (第 10.6.3 節、参考資料 (1)) に丁寧に記述されていますので、ここはその説明の繰り返しです。

まず、ニュートンの法則による物体の位置は変数 x で表され、運動方程式を解くと解が $x = x(t)$ として得られました。ところが、ここで論じるのは最適となる関数を仮定し、これに適当な変位を与え、最適解を計算するという方法です。そこで $x(t)$ を最適解と仮定し、 $x(t)$ からの微小変位 $\eta(t)$ を加えた、 $x(t) + \eta(t)$ で置き換えると、

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - \mathcal{V}(x + \eta) \right\} dt.$$

$\eta(t)$ は微小なので次の近似ができて、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \\ &\simeq \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギー \mathcal{V} に関して、テイラー展開を行うと、

$$\mathcal{V}(x + \eta) = \mathcal{V}(x) + \eta \mathcal{V}'(x) + \frac{\eta^2}{2} \mathcal{V}''(x) + \dots$$

η の 2 次以上の項を省略して、近似すると、

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \mathcal{V}(x) + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta \mathcal{V}'(x) \right\} dt.$$

ここで、最初の 2 項

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \mathcal{V}(x)$$

はもともとのエネルギーの関係であり、必要なのはこれからの違いです。という訳でこれらの項は完全に無視し、

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta \mathcal{V}'(x) \right\} dt,$$

について議論します。

² $\mathcal{V} - \mathcal{T}$ とするならば $-L$ の最大化となります。

自然が最高効率で動作するとしていますので、すべての η について $\delta S = 0$ となる筈ですが、 $\eta(t)$ は具体的軌道であり $d\eta(t)/dt$ は η に依存します。従って、 dx/dt と $\mathcal{V}'(x)$ が同時にゼロとなるとは結論できません³。

ここで、部分積分、

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = f\eta - \int \frac{df}{dt} \eta dt,$$

を思い出し、

$$f = m \frac{dx}{dt},$$

として計算すると、

$$\begin{aligned} \delta S &= m \left[\frac{dx}{dt} \eta(t) \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{V}'(x) \eta(t) dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathcal{V}'(x) \right\} \eta(t) dt. \end{aligned}$$

$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ であり、 $\eta(t) \neq 0$ ですから、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - \mathcal{V}'(x) = 0.$$

これでニュートンの運動方程式が得られました。ここで、 $\mathcal{V}'(x)$ ポテンシャルエネルギーの x についての微分で、3次元では \mathcal{V} の gradient です。

この様な計算の結果、エネルギーの最適化からニュートンの運動方程式が得られたのですが、

- (1) 仮定した最適解の始点、 t_0 、終点 t_1 を決めての議論であるが、これが途中で消えて、一般的解になった。
- (2) 運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーとも途中で近似を実施、一次の $\eta(t)$ が両方に共通になるため $m(d^2x/dt^2) - \mathcal{V}'(x) = 0$ が結論できる。

という巧妙な内容になっており、この解を得るためには、恐らく試行錯誤があったと思わせます。

結局 L がニュートンの式を与える、一番経済的な関数なの分かり、これを \mathcal{L} で表しラグランジアン (Lagrangian) と言います。

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}.$$

ここで述べた方法を「最小作用の原理」といいます⁴。

10.1.3 変分法の使われ方

この節では、 $\mathcal{T} - \mathcal{V}$ を、始点 t_0 、終点 t_1 を固定して積分しました。そして $\delta S = 0$ とすると、オイラー・ラグランジュの運動方程式が出現するという論理構成です。

逆に被積分関数として、一般的なエネルギー関数（その値が正でスカラーとなり、2階微分可能）を与え、積分の両端を解放して、 $\delta S = 0$ とすると、運動方程式の解が得られます。

つまり、変分法は、運動方程式を求める場合だけでなく、解を求める場合にも使えます。この考えは第14章で出現します。

³ $ax + by = 0$ の時、 $a = b = 0$ を言うには x と y が独立で無ければなりません。

⁴ 「最小作用の原理」が他のものを指す事もあり、これについては第10.6.2節を参照ください。

10.2 オイラー・ラグランジュの方程式の意味

オイラー・ラグランジュの方程式は1変数、2階の微分方程式で表されるニュートンの法則の多変数化ですが、3次元空間中の運動方程式については、ニュートン力学表現

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - \mathcal{V}'(x) = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} - \mathcal{V}'(y) = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} - \mathcal{V}'(z) = 0,$$

が、ラグランジュ力学表現

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0,$$

になっただけで、この時点では数学的表現方法のいわば形式的変換で、力学上の意味は未だ明らかではありません。

以下、ラグランジュ力学表現の多変数化の意味、そして「座標依存」からの解放について議論を進めます。

10.2.1 座標の多変数化と発展

ニュートン力学の運動方程式は、その座標についての運動方程式です。直角座標ならば x 、 y 、 z 、極座標ならば r 、 ϕ 、 θ を用いて空間上の位置を表し、それが時間 t でどう変化するかを記述します。このため、問題となる微分方程式を立てる時、この座標を注意深く選ぶ必要があり、これが面倒なのです。同じ問題でも座標の取り方で、解の複雑さが極端に変わり、ちょうどユークリッド幾何学の解法で、補助線が重要となるのに似ています。

ラグランジュの、それまでの力学に対する批判は、幾何学的な無限解析の粗雑さにあったと思われるが、この座標を「うまく」選ぶという、理論の本質とは関係ないテクニックにもあったと想像されます。

非常に一般的な言い方ですが、システムの物理を考えると、運動およびポテンシャルエネルギーは「座標」「速度」で表現されるので、システムのエネルギーを表現する（微分）方程式を書くと、座標、速度、加速度を内包する筈です。一方、座標、速度、加速度はベクトルですが、エネルギーはスカラーなので、方程式として簡単になる筈ですが、その代償として「方向」が分からなくなる筈です。

この点について、オイラー・ラグランジュの方程式の答えは、「座標に関しては、必要な数だけ分解し、その数の方程式をつくる（多変数化で対応）」であり、さらに「方程式中の変数の種類は x_n 、および \dot{x}_n 」として、1階微分方程式とし⁵、分かり易くしたとなります。

多変数⁶として扱う事により、複数の座標が取り込め、座標の数の拡大あるいは座標の束縛から解放された（第10.3節参照）ともいわれますが、「力学」の範囲で考えた場合には、実はニュートン力学より複雑、抽象的になっただけと思われるかも知れません。実際「力学」システムを考えていただけでは、利点は少ない様に見え、「電気回路」や他の力学系を含むシステムを考えねばならない時本当の威力が現れます。特に、制御工学の「多変数制御理論」では解析力学（ラグランジュ力学）が必須です。

10.3 座標の一般化

オイラー・ラグランジュの方程式の最大のメリットは、ある物理システムを「別の座標系で表現しても、同じ方程式となる」点かも知れません。このことを、座標が「一般化」されるとも言い、「解析

⁵ラグランジュの時代には、2階以上のオイラー・ラグランジュの方程式も考えていたようですので、1階表現は後世による進化でしょう。

⁶多変数の特別な場合として、3変数がありこの時にはベクトル解析を使う事も可能ではあります。この点については第10.6.1節で、本書の立場を記します。

力学」は時には「一般力学 (Generalized mechanics)」とも言われま。以下「一般化座標 (generalized coordinates)」について議論を進めたいと思います。

今までのロジック展開では、

方程式の変数として座標 (\mathbf{x})、速度 ($\dot{\mathbf{x}}$)、加速度 ($\ddot{\mathbf{x}}$) の代わりに 運動エネルギー $(1/2)m\dot{\mathbf{x}}^2$ 、およびポテンシャルエネルギー $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ を使う。

(エネルギーに関する座標を選ぶ。)

↓

エネルギー表現によるアプローチで、広範囲の物理 (電磁気等) も含められ、「位置」とは異なる座標も使える。

(座標が n 次元に拡張される。)

↓

オイラー・ラグランジュの方程式により、物理システムが、変数 q_i 、 \dot{q}_i で表される。

(当初の座標系に縛られている。)

ですから、「別の座標系で表現しても、同じ方程式となる」というのは、ここで始めて出現する考えなのです。

これからの議論はやや面倒な展開になりますが、できるだけ論理の筋道が見えるよう心がけます。

10.3.1 座標の一般化のプロセス

オイラー・ラグランジュの方程式を明示的に n 次元変数表現することから始めます。まず、ニュートン力学では

$$x, y, z \quad \text{or} \quad x_1, x_2, x_3,$$

と表された座標を q_i と書き換えます。さらに i としての次元の制限も無くします。 \dot{x}_i についても同様です。

このようにして、ラグランジアンは n 次元空間の関数で $2n$ の変数を持ちます (q_i と \dot{q}_i の間には依存関係があります)。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n).$$

従って、各独立変数について以下のオイラー・ラグランジュの方程式が成立します。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0,$$

.....,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0.$$

10.3.2 座標の一般化証明

これから、証明しようとする点は、「オイラー・ラグランジュの方程式は座標 q_n で表しても座標 Q_n で表しても同じになる。」です。

ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n),$$

によるオイラー・ラグランジュの方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0.$$

ですが、 q_i を別の座標 Q で著したオイラー・ラグランジュの方程式が

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_n} = 0,$$

となる事が証明できれば、「別座標系から見た Q もオイラー・ラグランジュの方程式を満たす、－ラグランジュ力学は座標の選び方に依らない」と言えます。

【 q を Q で表現】

座標 Q で書かれたオイラー・ラグランジュの方程式を q で書き換えます。これは座標変換で、例えばデカルト座標で書かれた方程式を極座標で表現する様なものですが、極めて一般的表現とします。

q と Q の関係は一般的に、

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \\ q_2 &= q_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \\ &\dots, \\ q_n &= q_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \end{aligned}$$

と書かれます。この表現では、 q と Q との関係は線形でも、非線形でもいい事に注意して下さい。

【 \dot{q} を Q で表現】

q_i の時間微分は、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial Q_n} \dot{Q}_n.$$

これを、 \sum を使ってまとめると、

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k.$$

ここに示した様に \dot{q} は $\partial q_i / \partial Q_k$ を経由して Q 、 \dot{Q} の関数となります (図 10.1 参照)。つまり、ラグランジアン $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ は Q_1, \dots, Q_n 、 $\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_n$ の関数となります。

ここで、 \dot{q}_i を \dot{Q}_k について偏微分すると、

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}.$$

$\partial \dot{q}_i / \partial \dot{Q}_k$ 、 $\partial q_i / \partial Q_k$ は t の関数なので、これを $f_i(t)$ と書くと、

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = f_i(t).$$

そして、

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right).$$

Q は q と \dot{q} の関数なので (図 10.1 参照)、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_k} = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\}.$$

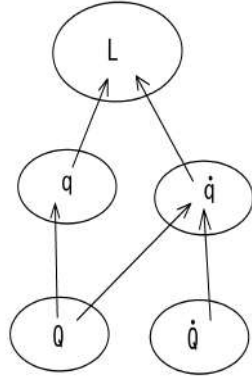


図 10.1: ラグランジアン中の変数の関係

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} f_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) \right\} \\
 &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} f_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} f_i(t) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

\dot{Q}_k は \dot{q} のみに依存するので、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}.$$

$\partial \mathcal{L} / \partial \dot{Q}_k$ の時間微分は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) \right\} \\
 &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\}. \\
 &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} f_i(t) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Q で表現されたオイラー・ラグランジュの方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_k} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} f_i(t) \right) \right\} - \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} f_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} f_i(t) \right) \right\} \\
 &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i(t) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} f_i(t) \right\} \\
 &= \sum_i f_i(t) \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

が導かれます。そして $f_i(t) \neq 0$ なので、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

が得られ、証明完了です。

以上の証明の基本的考えは

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k},$$

が、時間を固定すると定数になる点です。時間を固定してみると q, \dot{q} と Q, \dot{Q} の比が定数となると、オイラー・ラグランジュの方程式の左辺

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i},$$

の比が定数となる筈です。そして右辺=0 なので、この比例係数は関係なくなります。別の見方をすると、二つの異なった座標系により記述された、「オイラー・ラグランジュの方程式」が結局同一となるためには、右辺=0 が必要、即ち最小作用の原理が成立している時のみです。

10.3.3 座標の一般化証明の分かり難さ

ニュートン力学から、解析力学、特に一般化座標の証明に出会う時に、分かり難さを感じるかも知れません。特に、これまでの数学とは大きな違いがあり、数式の変化に、いわば想像力を要求されます。ニュートンの運動方程式までは、積分計算にせよ、ステップ毎に進んできたのに、

$$q_n = q_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),$$

に出会ったとたん、あまりの一般化に、呆気にとられる感じがあります。

このギャップを埋めるため、例えば

$$q_1 = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \dots + a_n Q_n,$$

$$q_1 = a_1 Q_1 Q_2 \dots Q_n,$$

$$q_1 = a_1 \sin Q_1 + a_2 \sin Q_2 + \dots + a_n \sin q_n,$$

$$q_1 = Q_1^{a_1} + Q_2^{a_2} + \dots + Q_n^{a_n},$$

等の、多少具体的な例を思い浮かべてみますが、本当に「何でもあり」で、この先 q, \dot{q} の扱いを考えると(第12章)、「座標」と考えるよりも、多変数関数中の「変数」と考えた方が理解し易いでしょう。つまり、座標変換では無く、変数変換です。また、ラグランジュは、すべての関数につき

$$f(x+m) = f(x) + pm + qm^2 + rm^3 + sm^4 + \dots, \quad ,$$

と展開可能と考えていた(第9.3.1節)事などから、議論の対象となる関数が想定できます。例えば、もちろん Dirac の δ 関数などは対象外です。

また、偏微分が主要ツールですから、微分対象以外は定数と見做すというのが、理解のキーポイントで、例えば

$$q_1 = a_1 \sin Q_1 + a_2 \sin Q_2 + \dots + a_n \sin q_n,$$

に対しては、

$$\frac{\partial q_1}{\partial Q_2} = a_2 \cos Q_2,$$

と単純化される点も、議論を考える上での具体的な参考になります。

10.3.4 一般化運動量

デカルト座標では、運動エネルギー \mathcal{T} は

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i,$$

となるので、一般化座標に対する「一般化運動量」を $m\dot{q}$ と定義するのは自然な考えです。ただし \dot{q} はベクトルなので、それぞれの要素 \dot{q}_i に関して $m_i \dot{q}_i$ が定義されるのに注意。

この様に考えるとラグランジアンの変数 \dot{q} を $m\dot{q}$ に置き換える可能性を示しますが、現時点ではこれがどのように「大変な事態を招く」かは未だ不明です。この点は「ハミルトン力学」で明らかになります。

10.4 オイラー・ラグランジュの方程式の例

オイラー・ラグ・ランジュの方程式を最小化する関数として、運動するシステムのラグランジアンを与えるとニュートンの運動方程式が得られることを示しました。ここでは具体例を考えます。

10.4.1 自由落下

運動エネルギーポテンシャルエネルギーは z 成分だけで、

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v_z^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2, \quad \mathcal{V} = mgz.$$

ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz.$$

各項目毎の微分をすると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

従って、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\ddot{z} - mg = 0$$

ニュートンの運動方程式は、

$$m\ddot{z} = -mg = f_z.$$

10.4.2 スプリング振り子

オイラー・ラグ・ランジュの方程式を用いて、運動方程式を作る際に、座標を考慮しなくていい例として、スプリング振り子を考えましょう。スプリング振り子は、振り子を吊り下げる糸をスプリングとしてもので、スプリング自体の重さは無視、またスプリングの伸縮は、スプリングの長手方向だけとします。

ラグランジアンに必要なのは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーだけです。座標は都合のいい様に 0 を中心とする極座標を選ぶと、スプリングの長さは $l = L + x$ 、回転方向の角速度は $ml\omega^2$ 、($\omega = \dot{\theta}$) となります。一方スプリングの長手方向の運動エネルギーは伸びが x なので、結局運動エネルギーは、

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (L + x)^2 \dot{\theta}^2,$$

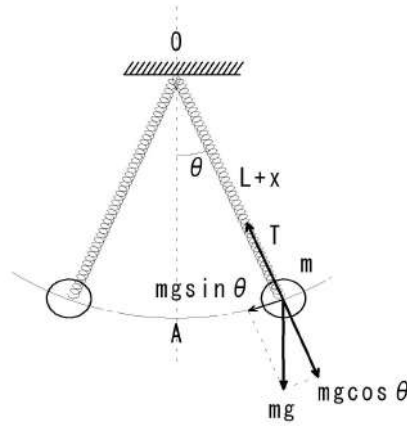


図 10.2: スプリング振り子

となります。

一方ポテンシャルエネルギーは重力によるものと、スプリングの伸びによるものの合計で、

$$\mathcal{V}(x, \theta) = -mg(L+x)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2.$$

従ってラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(L+x)^2\dot{\theta}^2 + mg(L+x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2,$$

となります。

今回の問題では、変数は2ヶで、 x 、 θ についてオイラー・ラグランジュの方程式を書き下ろせば完了です。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0,$$

より、

$$m\ddot{x} = m(L+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

より、

$$m(L+x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta.$$

10.4.3 倒立振り子

倒立振り子とは、カート上に回転できるように固定されたロッドを、カートに加える力を制御して倒立させるものです。移動方向を1次元とした装置を図10.3に示します。ロッドの代わりに人が乗り、重心を前に持ってくるようにして移動する2輪の装置がSegwayです。

ここでは、この倒立振り子の運動方程式を求めてみます。

M, m をそれぞれ、カートとロッドの質量、ロッドの重心を G , 重心までの長さを L とします。カートに働く力は f はDCモータにより発生され、モータの係数 K_m に対して $f = K_m u$ と仮定します。 u はモータの入力で電圧と考えて差し支えありません。

この装置では、ロッドの傾斜角度 θ をカートの位置 x を制御しながらゼロとするのが目的です。

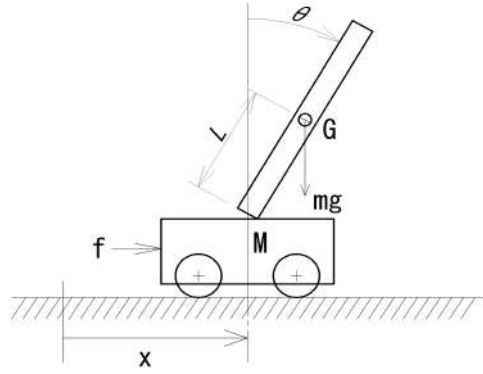


図 10.3: 倒立振り子

デカルト座標と極座標を使用しますが、カートの変数は x のみ、ロッドの変数は x, y と r, θ となりますが、 r は不要です。

倒立振り子のラグランジアンは、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}(x + L\sin\theta)\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}(L\cos\theta)\right)^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - mgL\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\cos\theta \cdot \dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2) - mgL\cos\theta,\end{aligned}$$

ここで J は重心 G の周りの慣性モーメントです。

オイラー・ラグランジュの方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} &= f. \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}(J\dot{\theta} + m\dot{x}L\cos\theta + mL^2\dot{\theta}) \\ &= J\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}L\cos\theta - m\dot{x}\sin\theta \cdot \dot{\theta}. \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= -m\dot{x}\sin\theta \cdot \dot{\theta} + mgL\sin\theta,\end{aligned}$$

従って、以下の式が得られます。

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} + m\ddot{x}L\cos\theta - mgL\sin\theta = 0.$$

同様に、

$$(M + m)\ddot{x} + mL\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - mL\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = K_m u.$$

$\theta \ll 1$ ($\cos\theta = 1, \sin\theta = \theta, \dot{\theta}^2 = 0$) を仮定し、摩擦項 $K_r\dot{\theta}$ 、 $K_c\dot{x}$ を挿入して、

$$mL\ddot{x} + (J + mL^2)\ddot{\theta} + K_r\dot{\theta} - mgL\theta = 0,$$

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + K_c\dot{x} = K_m u.$$

2 番目の式より、 $\ddot{\theta}$ は、

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL}\left(K_m u - K_c\dot{x} - (M + m)\ddot{x}\right).$$

最初の式の $\ddot{\theta}$ に代入して、

$$\ddot{x} = \frac{1}{W} \left((J + mL^2)K_m u - (J + mL^2)K_c \dot{x} + mLK_r \dot{\theta} - m^2 L^2 g \theta \right),$$

が得られます。ここで $W = (M + m)J + mML^2$ です。

同様に、

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{W} \left(-mLK_m u + mLK_c \dot{x} - (M + m)K_r \dot{\theta} + (M + m)mLg\theta \right).$$

行列で表現すると、以下の様になります。

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \left\{ \begin{pmatrix} -m^2 L^2 g & -(J + mL^2)K_c & mLK_r \\ (M + m)mgL & mLK_c & -(M + m)K_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (J + mL^2)K_m \\ -mLK_m \end{pmatrix} u \right\}.$$

この例でもわかる通り、力学系に都合のいい様に座標（慣性座標、非慣性座標入り混じって）取り、それぞれに関する運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーを書きだすだけで、運動方程式が得られます。この例で特徴的なのは、対象とする力学系を「制御」するため、制御入力 u が用意されている点、および摩擦係数が導入されている点です。摩擦係数は、もちろん現実のシステムに摩擦があるという理由もありますが、摩擦が無いとは振動を押さえる要素も無いという意味で、力学系は2階なので⁷、左右に振動し続けるなど、極めて動作が不安定になります。この摩擦が振動要素のダンパーなので、システムに存在しているだけで不足ならばダンパー要素（動きを熱に変えるもの；ブレーキあるいは制御システム中の電気抵抗）を追加する必要があります。

10.5 ラグランジアンとは何か？

10.5.1 ラグランジアンの変数 q 、 \dot{q}

第 10.3.2 節で、オイラー・ラグランジュの方程式を n 個の座標、 $2n$ 変数 (q_n, \dot{q}_n) の方程式として記しました⁸。 q と \dot{q} の依存性/独立性は議論には不必要でしたがラグランジアンの次元数については、明示的に考えていませんでした。

第 10.3.2 節で得られた、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial Q_n} \dot{Q}_n,$$

をちょっと書き直すと、

$$\dot{q}_i = \dot{Q}_1 \frac{\partial q_i}{\partial Q_1} + \dot{Q}_2 \frac{\partial q_i}{\partial Q_2} + \dots + \dot{Q}_n \frac{\partial q_i}{\partial Q_n},$$

となりますが、これは \dot{q}_i が Q 経由で q_i に依存している点を明示します。 Q は（有効な）どんな座標でもいいので、この依存関係は常に成立しラグランジアンは $2n$ 変数を持つ n 次元ベクトルとなります。これは妙な状況で、ラグランジアンは未だ発展途上にある事を示唆します。

⁷自動制御で使われる伝達関数表示をすると2次系になり、この場合振動が存在し得ます。

⁸ラグランジアンとは何かという答えは既に、この中にあるのですが、その理屈を議論します。

10.5.2 解析力学の発展途中概念としてのラグランジアン

オイラー・ラグランジュの方程式やラグランジアンはニュートン力学から前進する、大きなステップです。しかし、さらなる発展形態となる「ハミルトン力学」を考えると、未だ発展途上の考えです。

ラグランジアン \mathcal{L} は q_i と \dot{q}_i の関数ですが、変換できる変数は q_i と Q_i の間に制限されています。これは、例えば、

$$q = q(Q, \dot{Q}),$$

と仮定すると、

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial \dot{Q}} \ddot{Q}.$$

となり、変換後のラグランジアンは \ddot{Q} を含み、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0,$$

で表現できません。

つまり、 q と \dot{Q} 間の変換（微分変数間の変換）はさらに高階の変数を発生させてしまうからです。

オイラー・ラグランジュの方程式は座標間の変換（デカルト座標－極座標）には不変ですが、変換は q 微分空間内に限定されます⁹。この変数変換に対する制限もラグランジアンのデメリットです。

ラグランジアンの変数は位置、速度、電圧、電流など現実世界の物理量を反映した座標選択が容易な点がメリットとなります。これは特に工学（多変数制御）で威力を発揮します。

10.6 注記

10.6.1 解析力学のベクトル表現

微分方程式の変数を 3 次元空間座標 x, y, z に限れば、まとめて 1 組の微分方程式で表現可能で、これを実施したのがいわゆるベクトル解析で「3 次元ベクトル場」の微積分表現です。この最適な例は電磁気学で、この中では 3 次元ベクトル場である、電場、磁場を Maxwell の方程式（3 次元ベクトル微分方程式）で表現します。ニュートン力学をベクトル表現し

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$$

の様に記す場合もありますが、これは

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2},$$

をまとめて書いていただけでと考えましょう。（第 9.4.4 節参照）

解析力学は場の理論ではありませんので、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = -\nabla \mathcal{V}(\mathbf{x}) = -\text{grad } \mathcal{V}(\mathbf{x}),$$

の様にベクトル解析を用いた書き方は避けます。ただし、ポテンシャルエネルギーに対する傾きの簡潔表現として、 $\text{grad } \mathcal{V}$ は使います。

⁹ Q と \dot{Q} は非対象に作用。図 10.1 参照。

10.6.2 最小作用の原理

「最小作用の原理」はモーペルテュイ¹⁰による「質点のが経路 l に沿って運動する時、その経路はそのエネルギーが最小になる」

$$\delta \int \frac{1}{2}mv^2 dt = \frac{1}{2}m \int \frac{dl}{dt} dt = \frac{1}{2}m \int dl = 0,$$

を指す事があります。(こちらの方は「モーペルテュイの原理」とも呼ばれます。)

一方、ラグランジアン of 停留値を考察するものも「最小原理」と呼ばれます。こちらは「ハミルトンの原理」と呼ばれますが、第 10.6.2 では (ハミルトンは未登場なので)、「最小作用の原理」と呼びました。

10.6.3 参考資料

- (1) Richard P. Feynman
ファインマン物理学 III 電磁気学
岩波書店 1969
- (2) 高橋 康
量子力学を学ぶための解析力学入門
増補第 2 版、講談社 2000
- (3) 小出 昭一郎
解析力学
岩波書店 1989
- (4) David Morin
Introductory classical mechanics
[http://math-wiki.com/images/a/a9/Morin,_DavidIntroductory_Classical_Mechanics,_With_Problems_and_Solutions_\(2003\)\(519s\).pdf](http://math-wiki.com/images/a/a9/Morin,_DavidIntroductory_Classical_Mechanics,_With_Problems_and_Solutions_(2003)(519s).pdf)
- (5) T. Helliwell, V. Sahakian
Harvey Mudd College
Chapter 4, Lagrangian mechanics
<http://www.physics.hmc.edu/~saeta/courses/p111/uploads/Y2011/HSCChapter4.pdf>
非常に分かり易い資料です。
- (6) Andrew K. Stimac
Stand up and Stabilization of the Inverted Pendulum
Massachusetts Institute of Technology, 1999.
<https://pdfs.semanticscholar.org/6de6/2b128a4eaa0a89c4fa8f79d3ff527f790312.pdf>
- (7) 宮部 道夫、阿知波 重春
倒立振子の研究-システム制御教育実験として
中部自動車短期大学論叢 1996
https://www.nakanihon.ac.jp/nacinfo/common/doc/college/ronso/nac_ronso_026-01.pdf

¹⁰Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698 年 9 月-1759 年 7 月。

第11章 ハミルトン力学

ハミルトン力学では、ラグランジュ力学で一般化された「座標」と「速度」という変数が、完全に独立な2種類の変数となり、ニュートン力学として完成すると共に、さらなる発展の基礎を作ります。その分、内容が抽象化され、記述は簡単になるものの、やや形式的な議論になります。

そのため、この章では、力学の構造を議論、力学が物理学へ進化する過程を述べます。言い換えると「物理学とは何か?」という疑問について議論することになり、ラグランジュ力学がそのスタート点です。

なお、保存系を扱う力学の問題解法には、普通ラグランジュ力学で十分ですが¹、量子力学や多変数制御に進むにはハミルトン力学は避けられません。

11.1 ウィリアム ハミルトン

ハミルトン (William Rowan Hamilton²) はアイルランドのダブリン生まれの早熟な天才です。物理学に決定的な功績を残すのですが、彼自身は自分を数学者と考えていました。ラグランジュは1813年没ですから、彼の次の世代の学者でしょう。

ハミルトンは16歳ころまでには、ニュートンのプリンキピアや解析幾何、微積分を習得していたと言われます。その後ダブリン大学のトリニティーカレッジ入学、あらゆる科目で天才ぶりを発揮し、22歳の時にはダブリン大学の天文学教授に就いてしまいました。彼自身は天文学を極めようというつもりでは無かったものの、Dusink 天体観測所に所属、終生止まることになります。

ハミルトンの解析力学における考えは1823年頃に始まり (論文 Caustics 著述)、先生である Dr. Brinkley が Royal Irish Academy で1824年に発表しています。この論文は大幅に加筆、洗練され On a general method in dynamics として1834年に、Second essay on a general method in dynamics として1835年に発表されます。ラグランジュ力学からハミルトン力学への発展は、現在はルジャンドル変換を使用した記述をされる事が多いのですが、先にハミルトンの考え方について述べ、彼が何をどの様に考えたかについて述べます。またハミルトニアンは議論の最初に意外な形で出現、決してラグランジアン³を書き換えたものではありません。

11.2 ハミルトンによるハミルトン力学

ここではハミルトンの元論文⁴を参照しながら、彼の考え方を示します。

¹ハミルトン自身、ラグランジュ力学からの書き換えについて、現実的な意味は少ないと感じていた様で「知的喜びはありますよ」と言っています。

²1805年8月 - 1865年9月。

³ラグランジアンにせよ、ハミルトニアンにせよ、当時この様に呼ばれたわけではありません。

⁴第11.6.2節(2)、(3)。

11.2.1 概要

ハミルトンは、太陽系の力学から、剛体の運動まで、最終的にはすべて多数の質点間の力学で説明できると考えていました。そこで、質点の間の引力もしくは反発力を基に、多体問題として理論を展開しています。しかし、全体を、ある特定の2点 m_i 、 m_j の運動の総和ととらえており、すべての点の間の相互作用を考えている訳ではありません。そこで、一般化された座標 q_i を持つ質点 m_i の力学として、ハミルトンの考え方を述べます。つまり多変数力学系を記述する訳です。

ハミルトンの考え方のポイントは、

(1) 変分法の拡張：

ラグランジュ力学による解析的記述を基に、オイラー・ラグランジュ方程式が変分による最小値（停留値）問題に留まっているのを批判、この手法の拡張を議論する。

(2) 力学の多変数化の完成：

オイラー・ラグランジュ方程式およびニュートンの運動方程式から得られる結果である1変数2階微分方程式を、複数の1階多変数微分方程式（偏微分方程式）で表現する。

(3) 特性関数の定義：

多変数微分方程式で表現される力学系を満足する共通の関数（特性関数）を議論する。

また、ハミルトン・ヤコビ方程式に発展する内容として、

(4) 主関数の導入：

時間変化するハミルトニアンに対する「主関数 (principal function)」の導入。

があります。これについては、第13章でのべます。

運動方程式を、1個の2階微分方程式ではなく、2個の1階微分方程式として記述するのはポアソンが言い始め、ラグランジュもこの考えが気に入り、重要性を強調しました。しかし、この記述方法以上には進展しませんでした。ハミルトンも、もちろんこの点を知っており、多変数微分方程式表示はハミルトンが始めた訳ではありませんが、将来の物理の各分野に適用できると言っています。

And besides the idea itself, the manner of calculation also, which has been thus exemplified in the sciences of optics and dynamics, seems not confined to those two sciences, but capable of other applications; and the peculiar combination which it involves, of the principles of variations with those of partial differentials for the determination and use of an important class of integrals, may constitute, when it shall be matured by the future labours of mathematicians, a separate branch of analysis. (On a General Method in Dynamics, 1834)

11.2.2 ハミルトンの議論

ハミルトンは、すべての物体は質点の集合から構成され、剛体の運動などは、質点の運動の数学的記述に至る途中段階と考えていました。

そこで、剛体の運動をラグランジュの *Mécanique Analitique* の中で述べられる仮想仕事の原理を用い、多数の物体の運動の和

$$\sum m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \delta V,$$

と表現しています。

現在では質点をマクロ的に見て剛体としてしまいますので、 \sum を省き、単純化して質量 m と一般化座標 q で表します⁵。また元論文では δ を偏微分、 d を全微分として使用していますが、ここでは

⁵一般化座標 q は n 個あると仮定しますが、見易くするため、サフィックスは省きます。

前者については ∂ と書き換えます。すると上式は、

$$m\ddot{q}\partial q = \partial V,$$

と書け、 V をハミルトンは *forcefunction* と呼んでいます。そして、この関数は時間には依存せず、 $V = m_i m_j f(r)$ と書けるものとしています。ここに m_i 、 m_j は2個の質点の質量で、 $f(r)$ に関しては $\partial f(r)/\partial r$ が引力あるいは斥力を表す関数となるもの、例えば $V = -G(m_i m_j / r^2)$ を想定しています。

つまり、1834年の論文では、

$$m\ddot{q}\partial q = m(d^2 q / dt^2) \partial q (\text{運動エネルギーの変位}) = \partial V (\text{ポテンシャルエネルギーの変位})$$

と述べ、さらにややトリッキーな議論を展開します。

上式を時間についての変化と考えて、

$$dT = dV.$$

従って、時間について積分して、

$$T = V + C.$$

ここで出現した C は積分定数で時間に依らない、適当なポテンシャルのバイアスです。

ここで、空間的な微小変位をさせると、 T はすでに時間による微小変位の結果なので、 T の総体的微小変位となり、これを ∂H と書き直します。さらに「ポテンシャルエネルギーの変位＝運動エネルギーの変位」を利用して $\partial V \rightarrow \partial T$ とし⁶、さらに $\partial C \rightarrow \partial V$ と書き直してて

$$\partial H = \partial T + \partial V,$$

を得ます。

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \text{ より}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}, \quad \partial T = m \dot{q} \partial \dot{q},$$

となり、 $\partial V = m \ddot{q} \partial q$ より、

$$\int \partial V dt = m \int \ddot{q} dt \partial q = m \dot{q} \partial q$$

が得られます。

時間 t_0 から t までのエネルギーの微小変化の時間積分 ∂S (作用; action) は、

$$\begin{aligned} \partial S &= \int_{t_0}^t \partial H dt = \int_{t_0}^t \partial T dt + \int_{t_0}^t \partial V dt \\ &= \int_{t_0}^t m \dot{q} \partial \dot{q} dt + \int_{t_0}^t \partial V dt \\ &= \left[m \dot{q} \partial q \right]_{t_0}^t + \left[t \partial V \right]_{t_0}^t \\ &= m \dot{q} \partial q - m \dot{a} \partial a + t \partial V \end{aligned}$$

となります⁷。ただし $t = t_0$ の時 $\partial V = 0$ 、 $q = a$ とします。

従って、

$$\frac{\partial S}{\partial q} = m \dot{q}, \quad \frac{\partial S}{\partial a} = -m \dot{a}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = t.$$

これで、共通関数 S に対する1階の微分方程式のセットで力学システムが表現されました。

⁶ここで、もとはポテンシャルエネルギーだった項を運動エネルギー項に置き換え。

⁷作用=0と考えずに、作用とその計算結果を結び付けました。ここがラグランジュに対する批評です。

つまり、関数 S が分かっているならば、

$$\frac{\partial S}{\partial q} = m\dot{q}, \quad \frac{\partial S}{\partial H} = t,$$

または

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -m\dot{a}, \quad \frac{\partial S}{\partial H} = t,$$

から H を消去すると、方程式の数が $n+1$ が n に減少、変数の数が n なので解が得られます。

ハミルトンは、 S を特性関数 (characteristic function) と呼び (現在の用語では作用積分)、この方式を Law of varying action と呼びました。

ここまで見ると、ハミルトンは、作用=0 とする停留点の議論の代わりに、多変数の特性関数を仮定し、それらの 1 階偏微分方程式で力学系を表わすのに成功しました。

また、 $\partial H = \partial T + \partial V$ なので、

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V},$$

となる (後に) ハミルトニアンと呼ばれる項が出現しています。

11.3 ハミルトン方程式の導出

現在の標準的な方法によりオイラー・ラグランジュ方程式よりハミルトンの方程式を導きます。力学史的発展とは異なる導入ですが、力学の進化という観点からは、こちらの方が連続性があり、分かり易いと思います。

11.3.1 オイラー・ラグランジュ方程式の不備

第 10.5.2 節で、オイラー・ラグランジュ方程式は未だ発展途上の方程式だと述べました。その理由の 1 つは、確かに座標の一般化はできたものの、 q_i および \dot{q}_i による $2n$ 個の変数による n 個の 2 階の方程式となっている点です。 q_i と \dot{q}_i の間是非独立なので、多変数の扱いから考えるとこれは如何にも発展途上で、独立な $2n$ 個の変数を持つ $2n$ 個の 1 階微分方程式に変形し整理したいところです。

11.3.2 ハミルトニアンの定義

教科書によっては、ハミルトン力学をハミルトニアンの「定義」から始めるものがあります。そこで、この様にハミルトニアン \mathcal{H} を定義してみると、 q_i 、 p_i を一般化座標、一般化運動量として、

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i),$$

となります。一方、

$$\sum \dot{q}_i p_i = \sum m \dot{q}_i \dot{q}_i = \sum \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2,$$

であり、これは $2\mathcal{T}$ に等しいですから、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2\mathcal{T} - (\mathcal{T} - \mathcal{V}) \\ &= \mathcal{T} + \mathcal{V}. \end{aligned}$$

が得られます。

この定義よりハミルトン力学を議論すると、普通、「ハミルトンはなぜラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ をちょっと変形したハミルトニアンを導入したのか?」という疑問が生じますが、この点については、第 11.2 節で述べた様に、ラグランジアンから導かれたものではありません。

言い換えると、ハミルトニアンの定義から始めると、ハミルトン力学の中心はハミルトニアンにあるように感じてしまうのですが、本質は「力学を k 変数を持つ k 個の 1 階多変数微分方程式で表す」あるいは「多変数力学を完成させる」点にあり、ハミルトニアンはその過程で導入した、いわば副産物なのです。ただ、この副産物が、対象とする力学系の「全エネルギー」であるため、考え方、実用性から主役と見えてしまうのです。

11.3.3 新しい変数の導入；ハミルトン力学のスタート

ラグランジアンがなぜ以下の様に表されるかについてはすでに述べました。

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i) - \mathcal{V}(q_i).$$

するとオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}(q_i)}{\partial q_i} = 0.$$

を得ます。

この式が n 個の微分方程式ならば、その変数はそれぞれ n 個の q_i 、 \dot{q}_i となり、結果は \ddot{q}_i を含む 2 階の微分方程式になります。そこで、階数を下げる事を考えると、 \dot{q}_i を別の変数に置き換えるというのは自然な方法です。そのため、例えば $p_i = \dot{q}_i$ とするのも一つの方法と思われますが、実際には $p_i = m\dot{q}_i$ と置き換えます。

この変数置き換えの具体的な方法がルジャンドル変換（第 11.6.1 節参照）を応用するものでした。

11.3.4 ルジャンドル変換の応用

オイラー・ラグランジュ方程式は q_i について 2 階の微分方程式になります。これを 1 階の微分方程式に直すため、ルジャンドル変換を使いますが、これは滑らかな凸（又は凹）関数にしか使えません。そこで、この点をまず議論しておきます。

ラグランジアンは運動エネルギーの関数なので、 \mathcal{T} は凸関数ですが、ポテンシャルエネルギー \mathcal{V} は普通は凸とも凹とも言えません。従って、

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i) - \mathcal{V}(q_i)$$

は全体として凸とはならないかも知れません。しかし、注意してみると $\mathcal{V}(q_i)$ は、変数 \dot{q}_i を含まないため、 \mathcal{L} に対するルジャンドル変換が効力を発揮するのは $\mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)$ のみという事がわかります。

これで、ルジャンドル変換を安心してオイラー・ラグランジュ方程式に適用できるようになりましたので、方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}(q_i)}{\partial q_i} = 0,$$

を観察し変数 \dot{q}_i の階数を下げることを考えます。上の式中の凸関数は $\mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)$ ですが、2 階微分項は、 d/dt により発生するので、変数 p_i で置き換えるべきなのは $\partial \mathcal{T} / \partial \dot{q}_i$ です。

ここで、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \right) = m \dot{q}_i,$$

となるので、 $\partial\mathcal{T}/\partial\dot{q}_i$ を p_i で置き換えるというのは $m\dot{q}_i$ を p_i で置き換える事になります。つまり、 p_i として第 10.3.4 節で定義した「一般化運動量」を採用する訳で、 $p_i = m\dot{q}_i$ より \dot{q}_i から独立となり、座標および運動量の一般化が自然に完了します。

ルジャンドル変換では、関数 $F(x)$ は傾き $s(x) = F'(x)$ とその点での接線による切片 $G(s)$ を用いて、

$$F(x) = s(x) \cdot x - G(s),$$

と表され、変換の後には

$$G(s) = s(x) \cdot x - F(x),$$

を得ます。

従って、変数の対応関係は以下の様になります。

$$x_i \rightarrow \dot{q}_i,$$

$$\begin{aligned} F(x_i) &\rightarrow \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i) - \mathcal{V}(q_i), \\ s_i = F'(x_i) &\rightarrow p_i = \frac{\partial\mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial\dot{q}_i}. \end{aligned}$$

ここで $s_i = F'(x_i)$ は $p_i = \partial\mathcal{T}/\partial\dot{q}_i$ に対応するので偏微分表現が使われます。

ルジャンドル変換後の関数を $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ と書くと、

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i),$$

を得ます。これを書き換えると、

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(q_i, p_i),$$

となり、 q_i と \dot{q}_i の関数であるラグランジアン \mathcal{L} が、変数 q_i, p_i の関数として定義されました。

ここで実行されたものをまとめると、以下の様です。

- (1) $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ が新しい変数 p_i に置き換えられ、
- (2) オイラー・ラグランジュ方程式により生成された 2 階微分項 \ddot{q}_i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \right) \rightarrow \ddot{q}_i$$

は $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ と置き換える事で、1 階微分 \dot{p}_i に変換され、

- (3) 変数を $q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i$ とするオイラー・ラグランジュ方程式が生成されました。

(しかし、変数の数については未だ明確になっていません。)

11.3.5 変数 q_i, p_i をもつラグランジアン

第 11.3.4 でルジャンドル変換を応用して、次の方程式を得ました。

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \mathcal{L}(q_i, p_i) = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(q_i, p_i).$$

左辺は変数 q_i, \dot{q}_i および p_i, \dot{p}_i で表現されたラグランジアンと言えるものです。

第 10.1 節では、ラグランジアンに変分法を適用してニュートンの運動方程式を得ました。同様に、このラグランジアンに変分法を適用すれば変数 q_i と p_i によるニュートンの運動方程式が得られる筈です。

11.3.6 変分法を $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ に適用

これから、変分法を \mathcal{L} に適用して、停留値（局所的最小値）を計算しますが、 $\mathcal{V}(q_i)$ は $\mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)$ に対するバイアス、あるいは適当な基準を与えるだけです。そこで $\mathcal{V}(q_i)$ は計算からは、省いてしましましょう。

ここで、 \mathcal{L} の変分を計算し、これをゼロとします。

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \sum (\dot{q}_i p_i) - \delta \mathcal{H}(q_i, p_i) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta(\dot{q}_i p_i) dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{H}(q_i, p_i) dt. \end{aligned}$$

この後の計算のために、多少の準備をします。

$$\begin{aligned} \delta(\dot{q}_i p_i) &= (\dot{q}_i + \delta_q \dot{q}_i)(p_i + \delta_p p_i) - \dot{q}_i p_i = \dot{q}_i \delta_p p_i + \delta_q \dot{q}_i p_i + \delta_q \dot{q}_i \delta_p p_i \\ &\doteq \dot{q}_i \delta_p p_i + \delta_q \dot{q}_i p_i. \end{aligned}$$

$\delta(\xi)$ は ξ の微小な値という意味ですが、 δ が多変数に適應された時、それらは独立な微小値とできる点に注意しましょう。この点を強調するためサフィックスをつけて δ_p, δ_q と書きます。この独立性が以下の議論で重要な役割を果たします。

変分の最初の項は、

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta(\dot{q}_i p_i) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sum (\dot{q}_i \delta_p p_i + \delta_q \dot{q}_i p_i) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum \dot{q}_i \delta_p p_i dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta_q \dot{q}_i p_i dt. \end{aligned}$$

$\delta_q \dot{q}_i p_i$ に部分積分を使って、

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^{t_1} \sum \dot{q}_i \delta_p p_i dt + \sum \left([\delta_q q_i p_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta_q q_i \dot{p}_i dt \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum \dot{q}_i \delta_p p_i dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum \delta_q q_i \dot{p}_i dt, \end{aligned}$$

理由は t_0, t_1 で $\delta_q q_i = 0$ となるからです。さらに、

$$\delta \mathcal{H}(q_i, p_i) = \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} \delta_q q_i + \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} \delta_p p_i.$$

上式は自明ではありません。その意味は、もし関数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が次の方程式を満たすなら、

$$\delta F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i.$$

その様な関数に関して、最終的にハミルトンの方程式が導けるとなります。

ここで、計算を再開しましょう。

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_p \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum (\dot{q}_i \delta_p p_i) - \delta \mathcal{H}(q_i, p_i) \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum (\dot{q}_i \delta_p p_i + \delta_q \dot{q}_i p_i) - \delta \mathcal{H}(q_i, p_i) \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum (\dot{q}_i \delta_p p_i - \delta_q q_i \dot{p}_i) - \delta \mathcal{H}(q_i, p_i) \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\dot{q}_i \delta_p p_i - \delta_q q_i \dot{p}_i - \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} \delta_q q_i - \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} \delta_p p_i \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\left(-\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) \delta_q q_i + \left(-\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} + \dot{q}_i \right) \delta_p p_i \right) dt.
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta_q q_i$ と $\delta_p p_i$ は任意に選ばれたもので、それらは独立変数となります。

従って、上記積分が常にゼロとなるためには、以下の方程式が成立する筈です。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, \\
\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} &= \dot{q}_i.
\end{aligned}$$

これは驚くべき結果で、一つの方程式が単純かつ対称な2つの方程式に変換されました。これらの方程式はハミルトンの正準方程式 (canonical equations)⁸ と呼ばれます。

上記議論の要件は変数 δp と δq の独立性でしたが、 p_i と q_i もお互いに独立です。つまり、質量 m_i は座標 q_i から独立、従って $m\dot{q}_i$ は q_i から独立となります。

よって、ハミルトンの方程式は独立した多変数 p_i, q_i を持つ微分方程式となります。そしてハミルトンの方程式では方程式の数が $2n$ 、変数の数も $2n$ となりオイラー・ラグランジュ方程式の特殊性が解決され、多変数微分方程式による力学が完成しました。

変数の独立性はハミルトンの方程式に直接反映されていて、これを解く時には、私たちがまず運動量を決めねばなりません。このため、力学の議論から始まったのに、力学を超えた物理学の構造が出現しました。この直接的原因は、 p_i と q_i の独立性ですが、ラグランジュが力学を多変数化および座標を一般化したとすれば、ハミルトンはニュートン力学を一般物理学へと発展させたのです。

11.4 ハミルトン方程式の意味

ハミルトンの方程式は、

- * 新規変数 p_i 導入、
- * 最小作用の原理の適用、

により導かれた、「エネルギーと運動量」、「エネルギーと座標」の関係を表す2方程式です。

例えば、ポテンシャルエネルギー \mathcal{V} の中で、質量 m の質点の運動は次の様に計算されます。ニュートン力学の運動量 $p_i = m\dot{q}_i$ を使うと、ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 + \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z).$$

⁸ これは1837年にヤコビ (Jacobi) により名付けられました。

すると、ハミルトン方程式の片方からニュートンの運動方程式が得られます。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \rightarrow \text{grad } \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z) = -f.$$

もう一つのハミルトン方程式から、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \rightarrow \frac{1}{m}p_x + \frac{1}{m}p_y + \frac{1}{m}p_z = m\dot{q}_i,$$

が得られますが、これはハミルトニアンを導く時に最初に仮定した事柄です。これはトートロジーであり、2番目のハミルトンの方程式は余分 (!?) であるように見えます。

ハミルトン方程式の構造 (図 11.1) を見ると、ハミルトンの方程式はハミルトニアンに対するフィルターの様に働き、フィルターを通過したものが \dot{q}_i および \dot{p}_i と思えます。フィルターとしてのハミルトン方程式は、お互いのエレメントを抜き出し、相補性の働きを持ちます⁹。つまり、2つのハミルトン方程式はお互いを参照し合っており、鶏と卵の関係なのです。従ってハミルトン力学による計算には、このクロスレファレンスを断ち切らねばなりません。

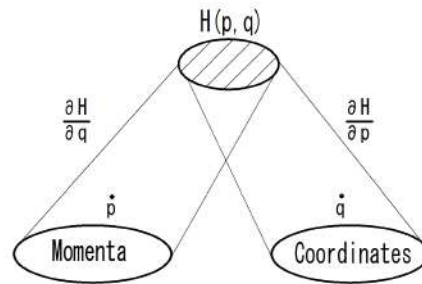


図 11.1: ハミルトンの方程式とその変数の関係

そこで、実際の力学問題の計算には、私たちが p_i と q_i の関係を決める必要があるのです。ニュートン力学でデカルト座標を使用するなら、

$$p_i = m\dot{q}_i.$$

極座標なら、

$$p_r = m\dot{q}_r, \quad p_\phi = m q_r \dot{q}_\phi,$$

という具合です。

他の見方をすると、関係式

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

は、私たちに、

- * どのような物理を議論するのか決めなさい、
- * そして、座標と運動量の関係を規定しなさい、

と問いかけているのです。この基本的な構造を理解しないと、トートロジーという罠に引っかかってしまう訳です。

この議論により、ハミルトン力学はラグランジュ力学を一般化し、「座標」と「運動量」の選択範囲が力学から解放され、「力学」が「物理学」に拡張されたのが分かります。

⁹もし、フィルターが自分自身の像を結ぶとしたなら、運動量と座標の間に何の関係もなくなり、力学も存在しないでしょう。

ハミルトンの時代には電磁気学も量子力学も有りませんでした。ハミルトンは、「広範囲の力学に
応用可能」と述べましたが、彼自身、一般物理学まで拡張してしまった点を明確に意識していたかは
不明です。しかし、ニュートン力学から始まった「力学」がラグランジュ、ハミルトンを経て、「物
理学」の構造を明らかにしてきたのは、驚嘆するばかりです。

ハミルトンの方程式は、見かけよりもはるかに豊かな内容を含んでいます。

11.5 ハミルトン方程式の例

11.5.1 ハミルトニアンによるニュートンの法則

以下の方程式、

$$\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

はエネルギーと一般化運動量の関係を示します。最初にせねばならないのは物理を選ぶことで、この
場合はニュートン力学とします。

デカルト座標を選ぶと（これは「一般化」から現実問題にシフトするという意味でもあります）、

$$p_i = mv_i = m\dot{q}_i \quad (i = x, y, z).$$

即ち、運動量を以下の式で定義します。

$$\dot{q}_x = \frac{1}{m}p_x, \quad \dot{q}_y = \frac{1}{m}p_y, \quad \dot{q}_z = \frac{1}{m}p_z.$$

ここで、ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}(p_i, q_i) = \mathcal{T}(p_i, q_i) + \mathcal{V}(q_i) = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 + \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z).$$

となります。ただし、 $\mathcal{V}(q_x, q_y, q_z)$ はポテンシャルエネルギーです。

すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}(p_i, q_i)}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z)}{\partial q_x} + \frac{\partial \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z)}{\partial q_y} + \frac{\partial \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z)}{\partial q_z} \\ &= \text{grad } \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z) \\ &= -f. \end{aligned}$$

上式の意味は

$$-\dot{p}_i = -m\ddot{q}_i = \text{grad } \mathcal{V}(q_x, q_y, q_z) = -f,$$

あるいは

$$f = m\ddot{q}_i,$$

であり、これはニュートンの法則です。

この例の様に、ハミルトン方程式中での力、すなわち $\text{grad } \mathcal{V}$ はハミルトニアン中ではポテンシ
ャルエネルギー \mathcal{V} となります。

$f = -\text{grad } \mathcal{V}$ なので、ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V},$$

との符号の違いは グラジエントの負号により整合性がとれ、ハミルトニアンでは

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V},$$

となります。

11.5.2 極座標によるニュートンの法則

ここでは、極座標を使用した場合のニュートン力学を議論します。極座標 q_r, q_ϕ (簡単のために 2 次元とします) とその時間微分は、

$$\dot{q}_r = \frac{dq_r}{dt}, \quad \dot{q}_\phi = q_r \frac{dq_\phi}{dt}.$$

運動量は

$$p_r = m\dot{q}_r, \quad p_\phi = m q_r \dot{q}_\phi.$$

ポテンシャルエネルギーを $\mathcal{V}(q_r, q_\phi)$ とすると、ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m(\dot{q}_r^2 + q_r^2 \dot{q}_\phi^2) + \mathcal{V}(q_r, q_\phi).$$

ハミルトンの方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} &= -\dot{p}_r = m q_r \dot{q}_\phi^2 + \frac{\partial \mathcal{V}(q_r, q_\phi)}{\partial q_r}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\phi} &= -\dot{p}_\phi = \frac{\partial \mathcal{V}(q_r, q_\phi)}{\partial q_\phi}. \end{aligned}$$

11.5.3 自由落下

デカルト座標を使ったニュートン力学では、 $p = m\dot{q}$ なので、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q} = \frac{p}{m}.$$

これで「ニュートン力学の議論」と宣言した訳です。

物体が重力 g だけを受けて落下する場合、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2, \quad \mathcal{V} = -mgz.$$

$p = m\dot{z}$ としたので、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 - mgz.$$

ハミルトンの方程式は、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -\dot{p} = -mg.$$

初期値を p_0 とすると、

$$p = mgt + p_0.$$

$\dot{z} = p/m$ であり、 z_0 を初期値とすると、

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{m} \int p dt = \frac{1}{m} \int (mgt + p_0) dt \\ &= \frac{1}{m} (mg \frac{1}{2} t^2 + p_0 t + z_0) \\ &= \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2, \end{aligned}$$

ここで $c_1 = p_0/m, c_2 = z_0/m$ です。

11.5.4 電磁界中の粒子

ここで述べるのは、力学では無く電磁気学での例です。電磁気学は「場の理論」ですので、ベクトル解析が使えます。ベクトル解析を使用した時の記述例と考えましょう。

電磁界中の、帯電した粒子について考えます。質量 m 、電荷 q の粒子が電磁界 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 中にある時、

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r},$$
$$\mathcal{V} = q\phi.$$

ここで ϕ 、 \mathbf{A} はそれぞれ \mathbf{E} および \mathbf{B} により作られたポテンシャルです。

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi,$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

一般化運動量は (これで、対象物理が電磁気学であると宣言され)、

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\mathbf{A},$$

従って、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi,$$

となります。

11.6 注記

11.6.1 ルジャンドル変換

ルジャンドル¹⁰により考え出された、やや不思議な変換で、スムーズな凸あるいは凹曲面関数に応用されます。以下、この変換、および幾何学的意味の概略説明です。

凸関数の1階の微分係数は、単調に増加し、2階の微分係数は常に正となります。この様な凸関数 $F(x)$ は、1階微分係数 $F'(x)$ と、その接線が y 軸と交わる点の値 $F'(0)$ で表現できます。

図 11.2 に示す様に、関数 $F(x)$ を滑らかな凸曲線とすると、1階微分係数は下側の図の様に単調増加します。 $F(x)$ の値は x により決まり、 $F(x)$ の各点で傾きが決まりますから、 $F(x)$ は x 点でのタンジェントと切片 (intercept) G で決まります。

タンジェント $s(x)$ は

$$s(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = F'(x),$$

で定義されるので、図 11.2 を参照すると、

$$s(x) \cdot x + G(s) = F(x),$$
$$G(s) = s(x) \cdot x - F(x),$$

が得られます。

これをルジャンドル変換と言います。 $F'(x)$ の方が x よりも容易に知れる関数 $F(x)$ がある時など、この方法で容易に関数が表現できます。あるいは、関数の変数を、微分形式から非微分形式に直したい時に有効で、このいい例がオイラー・ラグランジュ方程式からハミルトン方程式を導き出す時に見られます。

¹⁰Adrien-Marie Legendre, 1752 年 9 月-1833 年 1 月。ハミルトンより 50 歳程年上です。

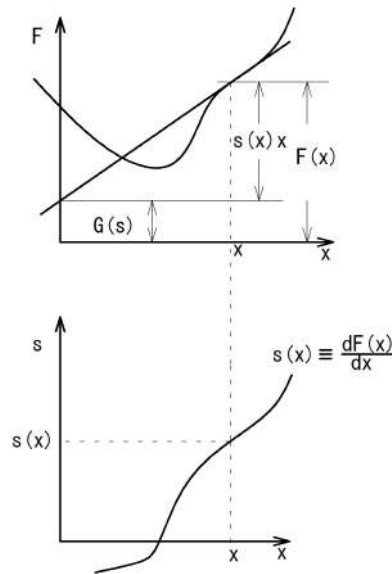


図 11.2: ルジャンドル変換

ルジャンドル変換の面白い性質として、ルジャンドル変換は、逆変換もまたルジャンドル変換になると言うものがあります。つまり、ルジャンドル変換を続けて 2 度実行するともとの関数に戻ります。この対称的な性質は、

$$G(s) + F(x) = sx$$

で表されます。

ルジャンドル変換の応用はやや限られていて、フーリエ変換やラプラス変換程頻繁には用いられません、原理はずっと簡単です。

11.6.2 参考資料

- (1) David R. Wilkins

Sir William Rowan Hamilton

School of Mathematics, Trinity College, Dublin

<https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/>

ハミルトンの母校にある丁寧な解説で、参考になります。

- (2) William Rowan Hamilton

Edited by David R. Wilkins, 2000

ON A GENERAL METHOD IN DYNAMICS

Philosophical Transactions of the Royal Society ,part II for 1834, pp. 247308.

ハミルトンの元論文です。

- (3) William Rowan Hamilton

Edited by David R. Wilkins, 2000

SECOND ESSAY ON A GENERAL METHOD IN DYNAMICS

Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95144.)

ハミルトンの元論文です。

- (4) 中根 美知代

- 物理学から数学へ : Hamilton-Jacobi 理論の誕生
数理解析研究所講究録 1130 巻 2000 年 pp. 58-71
- (5) Michiyo Nakane, Craig G. Fraser
The Early History of Hamilton-Jacobi Dynamics 1834-1837
Centaurus 2002: Vol.44; pp. 161-227
- (6) Charles Torre
Utah State University
Hamiltonian Formalism: Hamilton's equations. Conservation laws. Reduction. Poisson Brackets.
http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall_2010/Lectures/10.pdf

第12章 ハミルトン方程式の正準変換

12.1 ハミルトン力学での変換の意味

高校の頃に出会うニュートン力学では、質量、速度や加速度など、力学変数は私たちの生活感覚に密接に結びついています。ここでは、微分方程式とその解の軌跡を幾何的に表現するのが基本で、方程式が解きやすい様に座標をうまく選びます。使用される座標は、デカルト座標、極座標そして円筒座標に限られると言っても大きな誤りはないでしょう。

これらの座標間の変換は極く普通に行われますが、座標変数のさらなる変換は考える余地がありません。また微分方程式は時間 t について微分した 2 階微分方程式であり、解としては t^2 の項などが出現しますが、 t^2 の物理的意味を考えたり、時間を変換したらどうなるかと言うのは、全く思考の外にあります。

これに対して、ラグランジュ力学では、変数が一般化された多変数微分方程式表示に発展、ハミルトン力学でこれが完成しました。ハミルトン方程式は、ハミルトニアン \mathcal{H} に対する偏微分方程式で、その変数は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i),$$

と表現される通り一般化座標 q_i 、一般化運動量 p_i となります。この過程で力学変数である「座標」と「運動量」が抽象化された訳です。さらに非保存系の力学を扱うため、時間 t が方程式中に陽に出現、単なる変数 q_i 、 p_i 、 t と見做される様になりました。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t).$$

この状況に至ると、これらの変数に対しての「変換」を考え始めたのです。変換で思い出すのは、デカルト座標から極座標への変換に代表される「座標変換」です。この場合、それぞれの座標で記述される力学システムは同一、表現や計算の利便性を求めて「視点」を変える操作です。

これから議論する「変換」とはこれら変数に対する「変数変換」で、「一般化座標」という言葉から「座標変換」と誤解してはいけません¹。

この変数変換の対象には時間 t も含まれ、変換対象になるという意味で「一般化時間」とでも呼び、 q_i, p_i, t をまとめて呼ぶときには「一般化変数」とでも呼ぶべきかも知れません。ラグランジュの言う通り、幾何学的座標は忘れ、「多変数」だけを考えましょう。

12.2 ハミルトン方程式の変換の論点

変換により、ハミルトンの方程式の形が変わってしまうであろうと予測されますが、ハミルトニアン自体も変化²し得ます。そこで変換の議論では次の内容が議論の対象となります。

(1) 変換によりハミルトンの方程式がどう変化するか？

特に、形式の変化が無い場合を「正準変換」と言います。

(2) 正準変換によりハミルトニアンがどう変化し、それをどう解釈するか？

¹座標変換も含まれますが、それよりもずっと広範囲です。

²ハミルトニアンの変化と物理系の全エネルギーの関係については 12.7.2 参照。

(3) 正準変換によるハミルトニアンの変化をどう利用するか？

(4) 変換関数の性質および作り方。

一方、「なぜ変換を考えるのか？」というそもそも論については、主に2つ理由があります。

(1) 力学から他の物理学（例えば、量子力学）への発展の橋渡しのため。

(2) ハミルトン方程式の解法として。

上記(1)に関して、ハイゼンベルグの行列力学はポアソン括弧³から始まり、シュレーディンガーの波動力学はハミルトン・ヤコビの方程式から始まることだけを記しておきます。(2)の具体的内容は第14章で議論、この章はその準備となります。

また非正準変換では、対象力学システムの運動方程式がニュートンの法則を満たさなくなるため、これは議論しません。

12.3 関数中に陽に出現する時間

これまでにも、関数中に時間 t を「陽に」含むという言い方はしてきました。しかし、この言い方もニュートン力学から解析力学に進む時の障害の一つでしょう。

例えばラグランジアン \mathcal{L} に時間 t が陽に含まれるとは、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t),$$

という事で、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq + at,$$

などと表現される場合です。この場合

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = mg,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

となり、オイラー・ラグランジュの方程式（運動方程式）

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

には影響を与えません。つまり力学システムの記述自体には影響を与えません。しかし、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = a,$$

となりますから、ラグランジアン自体が時間変化し、エネルギー保存系ではない（エネルギーが増加、減少）事を示します。

言い換えると、ラグランジアン中の変数 $q_i(t)$ 、 $\dot{q}_i(t)$ は、通常時間と共に変化しますが、それらの関係はエネルギー保存系を表現するのみです。一方、その力学系に外部から力を加えて、加速や減速するためには時間 t をラグランジアン中に陽に含ませる必要があります。そして、この時間 t を介して、 $q_i(t)$ 、 $\dot{q}_i(t)$ が変化、新しいラグランジアンについて、エネルギー保存系として動作、オイラー・ラグランジュの方程式を満たす運動となる訳です。

あるいは、自然の力学系は、エネルギーが供給/消費されるかは、気が付かず、常に現在の変数 $q_i(t)$ 、 $\dot{q}_i(t)$ を基にして、最も経済的な運動をし続けるとも考えられます。この場合 t は媒介変数で、この形がどのようになろうとも、 $q_i(t)$ 、 $\dot{q}_i(t)$ により表現されるエネルギーを最小にし続ける訳です。この点については、第14.9.1節で簡単に触れます。

³ポアソン括弧について Dirac が、”...looked up Poisson brackets in Whitackers Analytical Dynamics, and I found that they were just what I needed.”と言っています。

12.4 位相空間と循環座標

12.4.1 位相空間

ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i), \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}(Q_i, P_i),$$

は、一般化座標、一般化運動量による $2n$ 次元直交座標空間をつくります。この変数 q_i 、 p_i や Q_i 、 P_i がつくる空間を位相空間あるいは相空間といいます。 q 、 p がそれぞれ 1 項しかない場合は、直交する q 、 p 軸による 2 次元実数空間となりますが、一般には $2n$ 次元の実数空間で、時間を決めると、ハミルトンの方程式の解はこの相空間の 1 点を示します。従って、初期条件 q_0 、 p_0 を決め、時間をパラメータとすると、対象となる力学系は相空間内の曲線で表現されます⁴。一方、初期条件 q_0 、 p_0 や時間がある範囲内の値を取ると、解は相空間内の曲面（多様体；manifold）となります。そのため、ハミルトンの方程式の研究は、相空間内の幾何学と考えられ、いわゆる微分幾何学となります。

変数 q_i 、 Q_i の様に、その起源を座標に持つ空間を配位空間 (configuration space)、 \dot{q}_i 、 \dot{Q}_i の様に速度を起源とするものを速度配位空間 (velocity configuration space) と言います。これらはどちらも n 次元空間です。

12.4.2 循環座標

力学系によっては、特定の一般化座標 q_k が不要 ($=0$) な場合があります。ハミルトン方程式

$$\frac{\partial \mathcal{H}(p_k, q_k)}{\partial p_k} = \dot{q}_k = 0,$$

は p_k に対するハミルトニアンの変化率ですから、これがゼロ、つまり $p_k = \text{constant}$ ⁵ を示します。

これは、ある一般化座標 q_k が運動方程式に不要な時、対応する一般化運動量 p_k は定数となるという意味です。

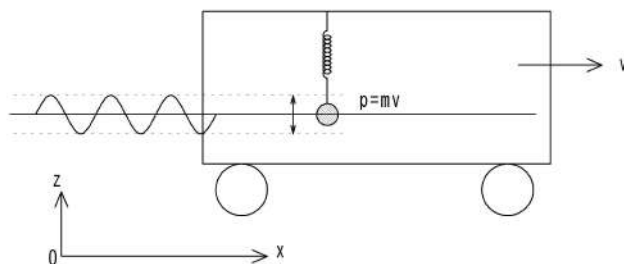


図 12.1: ばねと錘の振動

例えば、図 12.1 に示す、車両内に設置したばねと錘による単振動を考えます。車両は定速 v で移動すると仮定すると、車両内の座標では z 軸のみの運動を考えればよく、 x 、 y 軸は不要となり $p_x = m\dot{x} = 0$ 、 $p_y = m\dot{y} = 0$ 、となります。この時、錘の x 、 y 軸の運動量は定数で車両座標ではゼロになります。しかし、車両外の座標から見ると、 x 軸の運動量は定数 mv となり、ある一般化座標 $p_k = 0$ は必ずしも $q_k = 0$ を意味しません。

⁴この詳細な議論は、無限小変換を参照。

⁵これを積分して位置を得る時、慣性座標か否かに注意が必要です。第 12.9.1 節参照。

運動方程式の記述に不要となる座標を循環座標⁶と言います。ある一般化座標が循環座標となり、不要であっても、それに対応する一般化運動量も不要になる訳ではありません。特に、一般化座標、一般化運動量では、これらを「座標」「運動量」と区別して呼ぶ意味がなくなりますから、「共役量の片方がゼロならば、対応する共役量は定数になる」と考えねばなりません⁷。

$$q = 0 \rightarrow p = \text{constant}(\text{ゼロを含む}), \text{ 又は } p = 0 \rightarrow q = \text{constant}(\text{ゼロを含む})$$

循環座標に関しては運動方程式が不要で、なるべく多くの座標が循環座標となるように、方程式を立てて来ている筈です。例えば、3次元空間中の振り子でも、運動が平面内に収まるなら、2次元でよく、残りの1次元については（重力および、振り子の初期値による）拘束があると考えられます。同様に、曲がった針金中をナットを滑らせる時など、（ナットのガタは無いとして）、1次元運動となり、この時は針金による拘束がある訳です。

この様に、循環座標を発生させる拘束をホロノーミック (holonomic) な拘束と言います。

12.5 正準変換

12.5.1 変数変換の対象

エネルギー保存系のハミルトンの方程式は、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i.$$

と書かれ、変換する対象は $2n$ 個の変数 q_i, p_i となります。さらにエネルギー非保存系のハミルトニアンでは時間 t が陽に含まれ、変換の対称がこれをも含みます。

ハミルトンの方程式は、元々力学から発生した方程式で自然を記述するものですから、変換と言っても、この「物理」が保存されるもの⁸が重要で、これが正準変換の本質ですが、順を追って行きます。

変数変換を議論していくと、ニュートン力学やラグランジュ力学での変数は、単なる一表現に過ぎないことが理解され、力学の基本的変数は「共役な座標および運動量である」事が明確になります。（共役については第 13.2.3 節で述べます。）

12.5.2 正準変換の形式的定義

ハミルトンの正準方程式は次の様に書かれます。

$$\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

ここで変数を $q_i \rightarrow Q_i, p_i \rightarrow P_i$ と置き換えた時に、ハミルトンの方程式が、

$$\frac{\partial \mathcal{H}(Q_i, P_i)}{\partial P_i} = \dot{Q}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{H}(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i,$$

となる場合が正準変換の定義で、形式的にハミルトンの正準方程式の形が維持されるものです。

しかし、これでは意味がわかりませんので、具体的な変換式を導いてみましょう。

⁶なぜ循環というか、説がありますが、これを気にしてもあまり助けになりません。

⁷ハミルトンの方程式からの当然の帰結なのですが、多少強調する価値はありそうです。

⁸この時点では、これが何か定義できていませんが、第 12.8 ではっきりします。

12.5.3 正準変換の導出

$\mathcal{H}(q, p)$ をベースとするハミルトン方程式を $\mathcal{K}(Q, P)$ に変換する、その変換式を求めてみましょう。まだ、生成関数やハミルトン・ヤコビ方程式についての議論をしていませんので、ラグランジアンからハミルトニアンを計算した時の議論を発展させます。

第 11.3.5 節ではラグランジアン \mathcal{L} 、

$$\mathcal{L} = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(q_i, p_i),$$

に対して作用積分、

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0,$$

の極値を計算、ハミルトンの運動方程式を得ました。

ここで

$$\mathcal{L}' = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(q_i, p_i) + \frac{dW(q_i, p_i)}{dt},$$

を考えると、これはオイラー・ラグランジュの方程式を満たし、ラグランジアン \mathcal{L} の代わりに使えます。 dW/dt は q_i, p_i の関数⁹ ですが、変数 t は含んではいけません。つまり、オイラー・ラグランジュの方程式は、時間変数 t を含まない、変数 q, p の任意関数の時間微分を付け加える自由度があるのです¹⁰。

そこで、 Q, P によるラグランジアンに変数 $dW(Q_i, P_i)/dt$ を追加し、

$$\mathcal{K}' = \sum \dot{Q}_i P_i - \mathcal{K}(Q_i, P_i) + \frac{dW(Q_i, P_i)}{dt},$$

これがラグランジアン \mathcal{L} と等しくできないかを調べるのです。つまり、

$$\mathcal{K}' = \sum \dot{Q}_i P_i - \mathcal{K}(Q_i, P_i) + \frac{dW(Q_i, P_i)}{dt} = \mathcal{L} = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(q_i, p_i),$$

について調べます。

ここで、ハミルトニアン $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ 、 $\mathcal{K}(Q_i, P_i)$ の変数はそれぞれのハミルトン方程式で依存関係が成立しているので、 q_i, p_i が自由に Q_i, P_i に対応する訳では有りません（第 14.4 節参照）。そこで、 q_i と Q_i の対応関係で考えるとします。

$$\frac{dW}{dt} = \sum \left(\frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right),$$

より、

$$\sum \dot{Q}_i P_i - \mathcal{K}(Q_i, P_i) + \sum \left(\frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(q_i, p_i),$$

$$\sum \left(P_i + \frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i - \mathcal{K}(Q_i, P_i) = \sum \left(p_i - \frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \mathcal{H}(q_i, p_i).$$

ここで、 \mathcal{H}, \mathcal{K} も時間 t を変数として含まないので、ハミルトニアンは変化せず $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ となり、また q_i と Q_i は独立なので、 \dot{q}_i と \dot{Q}_i も独立で、上式が成立するには、

$$P_i = -\frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial Q_i}, \quad p_i = \frac{\partial W(Q_i, P_i)}{\partial q_i},$$

となる必要があります。 $f()$ を適当な関数とすると、第 2 式を Q_i について解いて、 $Q_i = f(P_i, q_i, p_i)$ が得られます。また Q_i について 1 階なので、第 1 式 $\partial W/\partial Q_i$ により P_i は消滅、適当な関数 $g()$ により $P_i = g(Q_i)$ と表せます。従って、 Q_i, P_i を q_i, p_i で表現でき、正準変換の関係式が求められました。

⁹ \dot{q}_i, \dot{p}_i も含みます。

¹⁰ オイラー・ラグランジュの方程式を満たすラグランジアンは自由度は以外に大きく、運動方程式以外にも満たすものがあります。これについては第 12.9.2 節、参考資料 (1) 第 7 章参照。

12.6 正準変換の例

12.6.1 ハミルトニアンが保存される変換

以下、正準変換の具体例を示します。

【座標と運動量の交換】

変換後の変数 Q_i, P_i が

$$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i,$$

と表現されるとします。つまり、変換後では一般化座標と一般化運動量が交換された訳です。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) \rightarrow \mathcal{K}(-P_i, Q_i),$$

となりますから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \rightarrow \frac{\partial \mathcal{K}(-P_i, Q_i)}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i. \\ \frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \rightarrow \frac{\partial \mathcal{K}(-P_i, Q_i)}{\partial P_i} = \dot{Q}_i \end{aligned}$$

と表現されます。後述するポアソン括弧

$$\{Q_i, P_i\} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = -1 \cdot (-1) = 1,$$

を計算すると 1 となり、これは正準変換です。ここでわかる様にハミルトン力学では、正準変換により座標も運動量も元々の物理的意味を失います。さらに正準変換が運動方程式を変化させない事を考えると、一般化座標、一般化運動量の抽象化が進み「座標」「運動量」という言葉と対応付ける意味が無くなります¹¹。

【ルジャンドル変換】

ラグランジアンにルジャンドル変換を作用させるとハミルトニアンが得られる事を示しました。

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i).$$

ここで変数 q_i を任意の単調関数 $f()$ により Q_i に変換する場合を考えます。

$$Q_i = f(q_i).$$

Q_i の微分は、

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial f(q_i)}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial f(q_i)}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

$\partial f(q_i)/\partial q_i$ は \dot{q}_i の係数で定数となり、

$$\partial \dot{Q}_i = \frac{\partial f(q_i)}{\partial q_i} \partial \dot{q}_i.$$

新しい変数 Q_i の基で考えていますから、この変数に対応する運動量は、あらかじめ与えられません。(ここが、いわばこれから議論する「物理」を選択する作業で、私たちの仕事です。ここではニュートン力学とします。)

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i) - \mathcal{V}(q_i),$$

¹¹ところが、人間はこういう抽象化がなかなかできず、折に触れて「座標」「運動量」と言わないと行けません。

より、運動量 P_i を、

$$\begin{aligned} P_i &= m_i \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{Q}_i} \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial f(q_i)} \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{\partial q_i}{\partial f(q_i)} p_i. \quad \because \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} = p_i \end{aligned}$$

と定義します。すると、変換後のハミルトニアン \mathcal{H}' は、

$$\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \sum P_i \dot{Q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i).$$

即ち、変換後のハミルトニアン \mathcal{H}' は、元のハミルトニアン \mathcal{H} と同一の形になり、ルジャンドル変換が正準変換である事を示します。

確認のためポアソン括弧を計算すると、

$$\begin{aligned} Q_i &= f(q_i), \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial f(q_i)}{\partial q_i} \\ P_i &= \frac{\partial q_i}{\partial f(q_i)} p_i, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial f(q_i)} \quad \because \frac{\partial q_i}{\partial f(q_i)} \text{は定数。} \\ \{Q_i, P_i\} &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

上記 Q_i 、 P_i の変換式から、ルジャンドル変換は座標と運動量を混ぜこぜにしないという特徴があります。このため、「ラグランジアンからルジャンドル変換で変更したばかりのハミルトニアン」は、工学系の応用に適していて、さらに正準変換を施さない限り、同等に扱えます。(ルジャンドル変換が正準変換である事が分かれば、ラグランジアンとハミルトニアンが同一なのは、ルジャンドル変換の逆変換がルジャンドル変換となる点からも明らかです。)

さらに、ラグランジアンとハミルトニアンは理念として同一の物であり、単に考えている力学系を、異なる視点から考えていると言えますが、ハミルトニアンを議論する時には、「正準変換後もハミルトニアン」を意識した方がいいでしょう。

12.6.2 ハミルトニアンが保存されない変換

第 12.5.3 節で、ハミルトニアンが保存される場合から正準変換の関係式を求めました。この時間数 dW/dt は時間 t を含まない場合を考えていましたが、これが時間 t を含むと、正準変換であっても、ハミルトニアンが変化する（あるいは変化させる）場合が出現します。ここでは、まず例を用いて、どのような事態が発生するかを見ましょう。

【単振動】

ここで、1 次元の単振動を考えましょう。単振動について、運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーはそれぞれ、

$$\mathcal{T} = \frac{p^2}{2m}, \quad \mathcal{V} = \frac{kq^2}{2},$$

となります。

ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

一方、第 8.4.2 節で示した様に、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

なので、

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \\ &= \frac{m\omega^2}{2}\left(q^2 + \left(\frac{1}{m\omega}\right)^2 p^2\right).\end{aligned}$$

ここで、変数 Q, P を次の様に変換します（何故かは取りあえず、おいておきましょう）。

$$Q = q^2 + \left(\frac{1}{m\omega}\right)^2 p^2,$$

$$P = \tan^{-1}\left(m\omega\frac{q}{p}\right) - \omega t.$$

変換後のハミルトニアン \mathcal{H}' は、

$$\mathcal{H}' = \frac{m\omega^2}{2}Q.$$

従って、

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P} = 0, \\ -\dot{P} &= \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q} = \frac{m\omega^2}{2}.\end{aligned}$$

$\dot{Q} = 0$ なので Q は定数 C となり、 $P = -(\omega^2/2)t$ より、 P は定速度となります。つまり、この力学系は相空間のある点を一定速度で動いていると解釈されます。

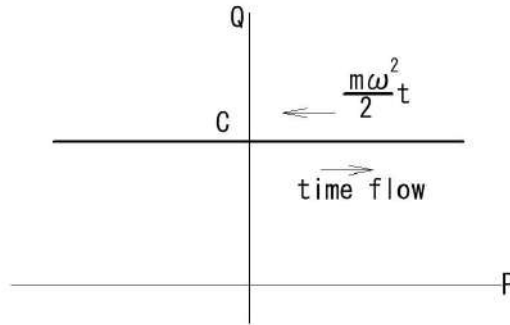


図 12.2: 定速度運動への変換

ここで $\{P, Q\}$ (第 12.8 節参照) を計算するために、

$$m\omega qp^{-1} = \eta,$$

と置き換えると、

$$\begin{aligned}P &= \tan^{-1}\left(m\omega\frac{q}{p}\right) - \omega t = \tan^{-1}(\eta) - \omega t, \\ \frac{\partial \eta}{\partial q} &= m\omega p^{-1}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial p} = -m\omega qp^{-2}.\end{aligned}$$

を得ます。

すると、

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial p} = \frac{1}{1 + \eta^2}(-m\omega qp^{-2}) = \frac{p^2}{m^2\omega^2 q^2 + p^2}(-m\omega qp^{-2}) = -\frac{m\omega q}{m^2\omega^2 q^2 + p^2}.$$

同様に、

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q} = \frac{m\omega p}{m^2\omega^2 q^2 + p^2}.$$

従って、

$$\begin{aligned}\{P, Q\} &= \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ &= -\frac{m\omega q}{m^2\omega^2 q^2 + p^2} 2q - \frac{m\omega p}{m^2\omega^2 q^2 + p^2} \frac{2p}{m^2\omega^2} \\ &= -\frac{2}{m\omega}.\end{aligned}$$

この結果より、変換は正準変換ではありません。しかし、ポアソン括弧の値 $-2/m\omega$ は定数ですから、スケーリングを実施し、正準変換に変更するのは可能です。そのため、

$$P = -\frac{m\omega}{2} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q}{p}\right) + \frac{m\omega^2}{2} t,$$

および

$$Q = q^2 + \left(\frac{1}{m\omega}\right)^2 p^2,$$

とすると、

$$-\dot{P} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q} = 0.$$

この結果は、変換後の座標ではハミルトニアンがゼロとなり、動きが全くないと解釈されます。同様に変数 Q, P についても同様です。この座標系では何も動きません。

このような事が発生した理由は、変換された後の座標が陽に時間依存を持つからです。つまり、座標系の方が運動しているという状況です。

12.7 ハミルトニアンの保存、非保存

12.7.1 正準変換の占める位置

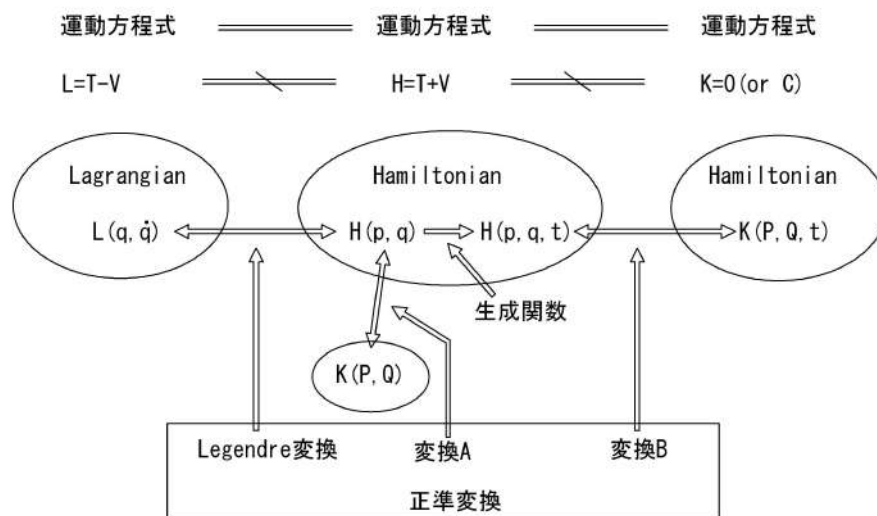


図 12.3: 正準変換と保存されるもの

ここまでで正準変換を適用したいいくつかの場合を見てきました。正準変換が何を変化、あるいは保存するかが紛らわしいですから、解析力学における正準変換の占める位置についてまとめておきましょう。

解析力学の進化の過程では、オイラー・ラグランジュ方程式 → ハミルトン方程式 → ハミルトン・ヤコビ方程式という流れがあります。

まず、オイラー・ラグランジュ方程式にルジャンドル変換を適用するとハミルトン方程式を得ますが、ルジャンドル変換も正準変換の一種です。この変換では、対象となる力学系の運動方程式は変化しませんが、ラグランジアンとハミルトニアンはその値が、通常は異なります。一方力学系の全エネルギーは保存されます。

ハミルトニアンに正準変換を適用すると、ハミルトニアンに時間 t を含まない限り、総エネルギー（つまりハミルトニアン）は保存されます。

ハミルトン方程式は、生成関数を加える（時間 t を陽に含ませる）事で、ハミルトン・ヤコビの方程式に発展し、これに対して正準変換を適用すると、運動方程式は変化しませんが、ハミルトニアンは、通常変化します。ハミルトニアンを変化させる場合というのは、実は解析力学と言うよりも数学、特に微分方程式論への発展として興味があります。

この場合、ハミルトニアンを変化させる と言うのは、ハミルトニアンをゼロ（あるいは定数）とし、ハミルトン方程式を解きたいためです。そしてこの為には（力学を対象として考えて来た目からは）手段を選ばないという趣のある、時間の流れを変化させてしまう方法を使います。例えばサイン波的に振動する振り子でも、その視点を同期したサイン波振動として、力学対象を停止、つまりハミルトニアンをゼロとしてしまいます。

一方、ハミルトニアンが変化する のは、もちろんエネルギー保存系ではなく、時間とともに、力学系にエネルギーが供給されたり、損失が発生する場合です。この場合もハミルトニアンは陽に時間を含み

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p_i, q_i, t),$$

と表現されますが、時間 t は一様に変化するもので、 t 自体の変換はしません。この、エネルギー非保存系に対する議論は、ハミルトン方程式の解法ではなく「ハミルトン・ヤコビ力学」として、実際にエネルギー供給が存在する物理学を表現します。この最適な例は自動制御への応用で、制御対象には運動により消耗するエネルギーを補給、かつ制御対象の変数 (p_i, q_i) ¹² を変更しながら、動作させる物理システムを扱います。また、こちらではハミルトン・ヤコビ方程式を解かないという方向に理論が進みます ¹³。

「ハミルトニアンを変化させる」のか「ハミルトニアンが変化してしまう」のかによって、ハミルトニアンを数学的に応用したいのか、工学的に応用したいのかの違いがでてきます。ただ、どちらもハミルトン・ヤコビ方程式が基本となります。

12.7.2 ハミルトニアンと全エネルギー

ハミルトニアンは考えている物理系の全エネルギーと解釈されます。

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V}.$$

しかし、エネルギー保存系に対して座標変換を行うと $\mathcal{H} = 0$ と出来ます。この時、変換後の力学系の全エネルギーをどう考えるべきでしょうか？つまり、ハミルトニアンとシステムの全エネルギーを分離して考えるべきなののでしょうか？

¹²制御対象の変数は、力学システムの変数とは別に用意します。

¹³第 15 章参照。

さらに、座標変換で変化してしまうのはエネルギーだけではなく、運動量も変化します。あるいは時間 t を含む場合には、これも変化させる事ができます。

つまり、「座標変換」を導入した為、対象とする力学系の物理変数がどう変化するか、あるいはしないか等、ニュートン力学で定義され、今まで当然のように使って来たエネルギーの保存性を見直す必要が発生したのです。

この議論は力学の深い意味の追求であり、ここをすぐに理解せずとも、当面はしのげますので、「力学系の総エネルギーはハミルトニアンに等しい」とだけ宣言しておき、詳細は第 16.2 節で議論します。

12.8 ポアソン括弧

ハミルトニアンに変数変換が応用できることを見てきましたが、新旧ハミルトニアンの間の変換を表現する「係数」を議論するのは当然の成り行きでしょう。ポワソン括弧がこの係数となりますが、これについて以下で議論します。

12.8.1 ポアソン括弧の出現

ポアソン¹⁴ が 1809 年に摂動関数の運動方程式を解こうとした際に、摂動関数 Ω に関し、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}; \quad v = \dot{x},$$

というオイラー・ラグランジュ方程式の 1 階微分方程式表現を得ています。この時にポアソン括弧も発表していますが、ポアソンが何を意図してこの計算をしたのかははっきりしません。(第 12.9.2 節、参考資料 (7),(8))

そこで、次節では、ポワソン括弧の力学的意味のはっきりした、現代的解釈により説明します。

12.8.2 ポアソン括弧の導出

(サフィックス i は省きます。)

関数 $\mathcal{H}(q, p)$ を $\mathcal{K}(Q, P)$ へと変数変換した場合について考えます。

$$\mathcal{H}(q, p) \rightarrow \mathcal{K}(Q, P).$$

関数 \mathcal{H}, \mathcal{K} は連続で滑らかな関数と仮定しますから、 \mathcal{K} の変数の微小変化は \mathcal{H} の変数の微小変化に対応します。従って、

$$\begin{aligned} \delta Q &= \frac{\partial Q}{\partial q} \delta q + \frac{\partial Q}{\partial p} \delta p, \\ \delta P &= \frac{\partial P}{\partial q} \delta q + \frac{\partial P}{\partial p} \delta p. \end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} \delta Q \\ \delta P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}.$$

Q, P から q, p への変換でも、同様の考えが適用できて

$$\begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q}, \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q}, \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta Q \\ \delta P \end{pmatrix}.$$

¹⁴Siméon Denis Poisson, 1781 年 6 月 - 1840 年 4 月

この関係は任意の微小変位で成立するので、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q}, \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q}, \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}^{-1}.$$

逆行列を計算すると、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p}, -\frac{\partial Q}{\partial p} \\ -\frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

これを次のように書くことにして、

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \{Q, P\},$$

すると、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q}, \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q}, \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \{Q, P\}^{-1} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p}, -\frac{\partial Q}{\partial p} \\ -\frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

上式より、

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\{Q, P\} \frac{\partial q}{\partial P}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \{Q, P\} \frac{\partial p}{\partial P}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\{Q, P\} \frac{\partial p}{\partial Q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \{Q, P\} \frac{\partial q}{\partial Q},$$

が得られます。

$Q(q, p)$ の時間微分は、

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ &= \{Q, P\} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} \right) \\ &= \{Q, P\} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right). \end{aligned}$$

$P(q, p)$ の時間微分は、

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{p} \frac{\partial P}{\partial p} + \dot{q} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\{Q, P\} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} \right) \\ &= -\{Q, P\} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} \right). \end{aligned}$$

ここまでで、 $\{Q, P\}$ は p, q と P, Q の間の変換係数である事がはっきりします。もちろん、この値が1でない時は、変換は増幅/減衰や座標間に歪みを発生させます。この $\{Q, P\}$ はポアソン括弧と呼ばれます。

正準変換ではポアソン括弧=1 なので、正準変換の意味がより分かり易くなりました。つまり、正準変換とは変換の前後で、システムの p, q と P, Q の構造が保たれる；増幅、減衰も無ければ歪みも発生させないものです。

従って、非正準変換は次のような形式となります。

$$\frac{\partial \mathcal{H}(Q_i, P_i)}{\partial P_i} = f(q_i, p_i) \dot{Q}_i,$$

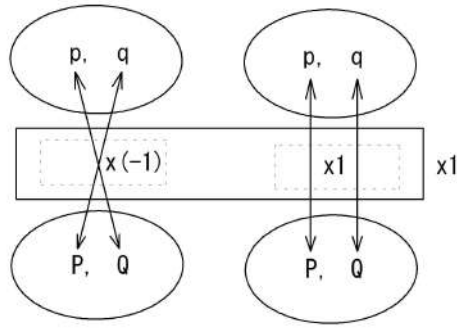


図 12.4: 正準変換

$$\frac{\partial \mathcal{H}(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} = -g(q_i, p_i) \dot{P}_i.$$

もし $f(q_i, p_i)$ あるいは $g(q_i, p_i)$ が 1 以外の定数になるならば、変換は非正準変換ですが、係数の調整で容易に正準変換にできます (第 12.6.2 節参照)。

第 11.4 節で述べたように、ハミルトンの正準方程式は対象としているシステムの運動方程式を表現しますから、 $f(p_i, q_i) \neq \text{constant}$ または、 $g(p_i, q_i) \neq \text{constant}$ は変換後、運動方程式を回復できない形に破壊してしまいます。この様な変換を用いてさらなる研究をする意味は無いと考えられます。

12.9 注記

12.9.1 運動量と座標の関係

慣性座標では、 q_k が循環座標なら p_k は定数となり、これから位置を計算した時、以下の様に、位置は時間に比例します。

$$p_k = m\dot{x} = C, \quad \therefore x = \frac{C}{m}t.$$

非慣性座標、例えば、中心に向かうポテンシャル内での質点の運動を極座標表示すると、ラグランジアンは、

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} = \text{const} = C,$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{C dx}{r^2(x)},$$

となり、これは時間に関してリニアではありません。

12.9.2 参考資料

(1) 高橋 康

量子力学を学ぶための解析力学入門
増補第 2 版、講談社 2000

(2) Charles Torre

Utah State University
Infinitesimal Canonical Transformations. Symmetries and Conservation Laws

- http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall.2016/Lectures/12a.pdf
- (3) Goldstein
Classical Mechanics, third edition
Addison Wesley, 2000
1950 年初版ですが、数多の資料の原点となる本です。
- (4) Gerhard Müller
“16. Canonical Transformations” (2015)
Classical Dynamics. Paper 6.
http://digitalcommons.uri.edu/classical_dynamics/6
- (5) Charles Torre
Utah State University
Hamiltonian Formalism: Hamilton’s equations. Conservation laws .Reduction.
Poisson Brackets.
http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall.2016/Lectures/10.pdf
- (6) 中根 美知代
物理学から数学へ : Hamilton-Jacobi 理論の誕生
数理解析研究所講究録 1130 巻 2000 年 pp. 58-71
- (7) R. Dugas
A History of Mechanics,
Chapter five; Poisson’s theorem
pp384-387
First edition 1955, Dover
- (8) 国広 悌二
量子力学を学ぶための解析力学の基礎
量子力学、東京図書
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~teiji.kunihiro/QM_suppl/Cl-Mech-wo-wave.pdf

第13章 ハミルトン力学の発展

13.1 ハミルトン方程式の限界

これまでに、エネルギー保存系のハミルトン正準方程式を導き出しました。正準方程式

$$\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(q_i, p_i)}{\partial p_i} = \dot{q}_i,$$

は殆ど力学の完成状態、に見えますが、例え「物理学」に発展したとは言え、内容としてはニュートン力学と同一です。

ハミルトン方程式の計算過程を見ると (第 11.3.6 節参照), 主要な部分は変分計算

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0,$$

です。

さらに、次の積分

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i dt &= [p_i \delta q_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q_i dt, \end{aligned}$$

に関しては t_0 および t_1 で $\delta q_i = 0$ を仮定したものです。つまり、計算の始点と終点は固定しています。

現実世界の運動を考えるなら、終点を固定していると言うのは、例え始点を固定するのを承認したとしても、大きな制約になってしまいます。つまり、始点や終点を固定した状態を取り除く作業は当然の様に必要になります。

13.2 終点の制約の取り除き

13.2.1 時間変化する力のもとでの運動方程式

ニュートン力学を見ると、応用の主たるものは一定の力が働くエネルギー保存系です。例えば、重力下での自由落下では、

$$m\ddot{z} = -mgz,$$

により定式化され、次の結果が得られます。

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$$

しかし、実際の力学系では、物体は時間変化する力により運動する場合が大半です。例えば運動する物体がエンジンにより駆動されるのは普通です。航空機などエンジンだけでなく、飛行高度により

重力加速度が変化し、ニュートン力学の原点となった天体物理の様な訳には行かなくなっています。これは当然ハミルトニアンが時間変化する場合であり、時間変化するハミルトニアンに対応した力学構築が必要になります。

13.2.2 ハミルトン方程式の拡張；概要

(サフィックス i を省きます。)

ここでは、終点による拘束を時間、空間とも取り除き、ハミルトン方程式を時間変化系に拡張します。

計算過程はやや面倒¹なので、ここでは、ハミルトンヤコビの方程式が導かれる論理的プロセスが理解できれば充分でしょう。

そこで、まずどんな考えで計算していくかの考えを示します。

第 11.3.6 節では、ラグランジアン停留値を以下の積分により計算しました。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt.$$

これはエネルギー保存系に対する時間 t_0 から t_1 までの変分です。終点 t_1 の拘束を無くするため、時間 t を、ラグランジアンの中に陽に導入します。これは力学系にエネルギーを供給あるいは消費する事を意味します。この時、第 12.3 節で示した様に、系の力学的構造は変化しません。つまり、運動エネルギーやポテンシャルエネルギーの構造 ($\frac{1}{2}m\dot{q}^2$, mgq など) には影響しません²。

関数 $S(q, \dot{q}, t)$ を t を含む作用積分 (action integral) として定義します。

$$S(q, \dot{q}, t) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt.$$

次に、以下の積分

$$\delta S(q, \dot{q}, t) = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt,$$

について考えます。この積分は変分計算ですが、「変分」を q の中でのみ仮定します。すると、 q の変化分は \dot{q} に伝播する筈です。一方時間 t に関しては制御不能なパラメータと考えます³。

こういう考えをすれば、 δS はゼロにはならず、何らかの時間関数 $S(t)$ が得られると期待する訳です。

図 13.1 に示す様に始点 t_0 を固定、時間 δt_1 の間に、運動の軌跡 C が $A+B$ に移動したとします。ここで、軌跡 C から変化した軌跡 $A+B$ の変分を計算します。この軌跡の違いは $\delta t_1, \delta q$ ですが、これを t_1 の値を基に正規化します。

図 13.1 を参照すると、 $C \rightarrow A+B$ 間の全変分 δS は、

$$\delta S = \int (A+B) - \int C = \int B + \int (A-C).$$

この過程で、 B の部分の計算は、 t_1 までの計算 (これは容易) とは分割されます。そして t_1 から $t_1 + \delta t_1$ (部分 B) までの q_2 の積分は、 t_1 から微小時間 δt_1 までのラグランジアンで、次の様に近似します。

$$\int B \simeq \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} \delta t_1.$$

最後に (お決まりの様に) δt_1 を小さくしていき、 t_1 を単なる時間 t と見做すのです。

軌跡 $A+B$ は通常、ニュートンの法則を満たす軌跡 C とは異なりますから δS は一般的にゼロではありません。この様にして、時間変化する力が働く時の運動方程式を計算します。

¹第 13.2.3 節で詳細な計算過程を示します。

²運動エネルギーやポテンシャルエネルギーの値は変化します。これはある意味当然で、例えロケットエンジンが加速したからと言って、エンジンの構造を変えてしまう事はありません。

³正準変換のように、時間まで操作する様な事は考えません。

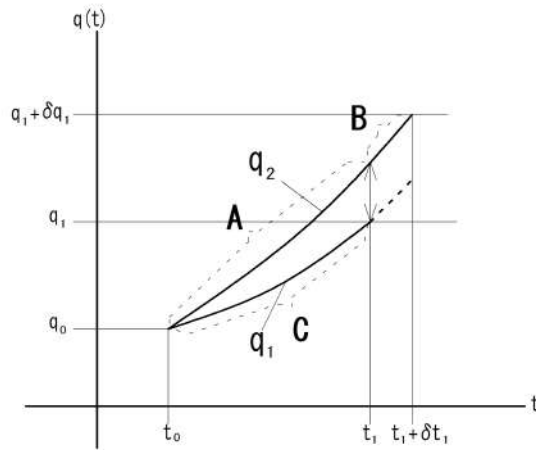


図 13.1: 計算のための軌跡の分割

13.2.3 ハミルトン方程式の拡張；詳細

q から $q + h$ までの変分 δS は、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int (A + B) - \int C = \int_{t_0}^{t_1 + \delta t_1} \mathcal{L}(q + h, \dot{q} + \dot{h}, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int B + \int (A - C) \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \mathcal{L}(q + h, \dot{q} + \dot{h}, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{L}(q + h, \dot{q} + \dot{h}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \right) dt.\end{aligned}$$

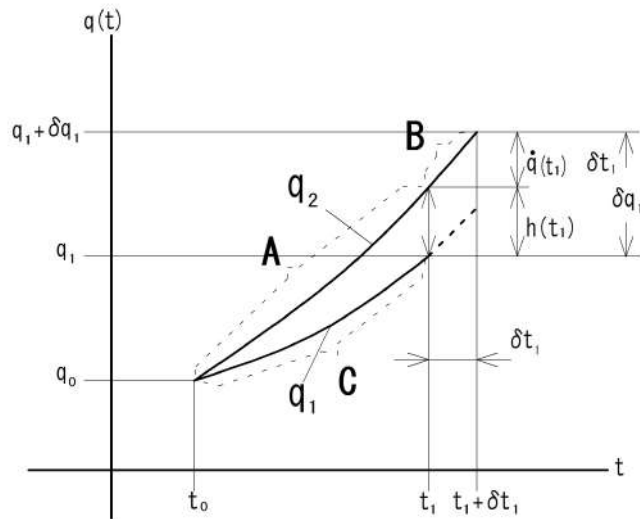


図 13.2: 終点の移動

【時間 t_1 から $t_1 + \delta t_1$ まで】

δt_1 以降の q_1 からの増分 q_2 を、時間 t_1 の傾き q を用いて外挿すると、

$$\delta q_1 = \dot{q}(t_1)\delta t_1 + h(t_1).$$

ただし $h(t_1)$ は時間 t_1 においての q_2 の q_1 からの違いで、これはバイアスとして働きます。一方で、積分の平均値定理により

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi), \quad a < \xi < b.$$

ここで、時間 t_1 のラグランジアンを使い、

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \mathcal{L}(q+h, \dot{q}+\dot{h}, t)dt \simeq \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} \delta t_1.$$

すると、次の結果が有られます。

$$\begin{aligned} \int B &= \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \mathcal{L}(q+h, \dot{q}+\dot{h}, t)dt \\ &\simeq \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} \delta t_1 \\ &= \dot{q}(t_1)\delta t_1 + h(t_1). \end{aligned}$$

【 t_0 から t_1 まで】

軌跡 A は軌跡 C から変化してしまったので、この変化分を修正しましょう。変数 $\delta q, \delta \dot{q}$ の微小変化がラグランジアンに与える影響は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q.$$

すると、時間 t_0 から t_1 までの変分は、

$$\int (A - C) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) dt.$$

第2項に部分積分を使って、

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right) h dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} h \right]_{t_0}^{t_1}.$$

ニュートンの法則が成立するので、以下の項のみ残ります。

$$\begin{aligned} \int (A - C) &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} h \right]_{t_0}^{t_1}, \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} h(t_1). \end{aligned}$$

なぜなら、 $h(t_0) = 0$.

【時間 t_0 から $t_1 + \delta t_1$ 】

全 δS は、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int B + \int (A - C) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} \delta t_1 + \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} h(t_1) \\ &= \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} \delta t_1 + \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} (\delta q_1 - \dot{q}(t_1) \delta t_1) \\ &= \left\{ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t_1) \right\} \delta t_1 + \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q_1.\end{aligned}$$

δt と δq は互いに独立ですので、 δq を固定して δt_1 を限りなく小さくします。すると、 δS の変分は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q_1 = 0,$$

すると、 $\delta t_1 \rightarrow \partial t$, $\delta S \rightarrow \partial S$,

$$\partial S = \left\{ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right\} \partial t,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \dot{q}.$$

以下の事を思い出して、

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{T}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = p(t).$$

すると、

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - p(t) \dot{q} = -\mathcal{H}(p, q, t).$$

あるいは、

$$\mathcal{H}(p, q, t) + \frac{\partial S(p, q, t)}{\partial t} = 0.$$

ここで S は p, q, t の関数になっているのに注意しましょう。

上式を書き換えると

$$\mathcal{H}(p, q, t) = -\frac{\partial S(p, q, t)}{\partial t},$$

となりますから、ハミルトニアン の時間変化、即ちエネルギーの増減は、 $\partial S(p, q, t)/\partial t$ によってもたらされ、 $\partial p(t)/\partial t$, $\partial q(t)/\partial t$ が運動およびポテンシャルエネルギーの発生/消費源に対応しているのです。

13.2.4 S の値

既に述べた様に、 $\delta S \neq 0$ となりますが、これがどういう事が調べましょう。次の関係を再度使用します。

$$\delta S = \left\{ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t_1) \right\} \delta t_1 + \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta q_1$$

ここで $\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}$ を $p(t)$ で置き換えると、

$$= \left\{ \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)|_{t_1} - p(t) \dot{q}(t_1) \right\} \delta t_1 + p(t) \delta q_1.$$

今度は、時間を固定して δq_1 を限りなく小さくします。つまり、 $\delta t_1 \rightarrow 0$, $\delta q_1 \rightarrow \partial q$, $\delta S \rightarrow \partial S$ とします。その結果、次式が得られます。

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p(t).$$

ハミルトニアンについて、変数 p と q が対等である点を考えれば、

$$\frac{\partial S}{\partial p} = q(t).$$

13.3 ハミルトン力学の拡張

終点が時間変化する方程式

$$\mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} = 0,$$

は、時間変化をする力学系を表現しているので、ハミルトン力学（＝ニュートン力学）からの明確な拡張となっています。

ここで、 $\partial S / \partial q = p(t)$ ですからハミルトニアン中の変数 p を $\partial S / \partial q$ で置き換えると、

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} = 0,$$

が得られ、これをハミルトン・ヤコビの方程式と呼びます。

一方、 q と p はハミルトンの方程式に影響得を与えずに交換可能であり

$$\frac{\partial S}{\partial p} = q(t),$$

より、次の様な書き方もできます。

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial p}, p, t\right) + \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} = 0.$$

p と q 両方を置き変えると、

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial p}, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} = 0,$$

とも書けますが、これは以下の記法と同等、つまり出発点に戻ってしまいます。

$$\mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t} = 0.$$

ここまでで、ハミルトン・ヤコビの方程式は変数 t を陽に含む、外部からのエネルギーを系内部に取り込んだ、時間変化する力学系を表現することを示しました。時間を陽に含ませる方程式の、最初の目標はエネルギー非保存系の表現にあったと思われますが、変数 t を陽に含ませると、 t を変換してハミルトンの方程式を解くというパラダイムを変える解法が生まれます。これについては第 13.4 節で述べます。

13.4 ハミルトン・ヤコビの方程式の変数

ハミルトン・ヤコビの方程式の出発点は

$$\mathcal{H}(q, p, t) = -\frac{\partial S(q, p, t)}{\partial t},$$

でした。

一方ハミルトニアン中の変数は、

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p(t), \quad \frac{\partial S}{\partial p} = q(t), \quad t,$$

ですから、システムに供給されたエネルギーはハミルトニアン中の一般化座標 $p(t)$ と一般化運動量 $q(t)$ に影響し、結果的にハミルトニアンが変化します。エネルギーが加わるならばハミルトニアン増加、エネルギーのロスならばハミルトニアン減少であり、これは納得のいく話です。

さて、ここで変数 t に着目すると、私たちは、時間 t の経過の仕方には、関与できません⁴が、

$$f(p, q, t) = \frac{\partial S(p, q, t)}{\partial t},$$

はエネルギー関数ですから、時間経過に伴うエネルギー変化については、 $f(t) = at^2 + bt$ 等、あらゆる可能性があります。つまり、エネルギー供給/消費は形式的には時間 t を変換しているのと同等で、例えば $\sin \omega t$ の様な変換でさえ、エネルギー供給と消費が周期的に発生すると考えればいいでしょう。

また p, q は考えているシステムの運動、位置エネルギーですが、系のエネルギーの増減があっても、基本エネルギー構造は不変 (例えば $p = mv, q = mgh$ とか) と考えるので、時間 t を変換し、その結果が $p(t), q(t)$ に反映され ハミルトニアンが変化すると考えられます。

これは運動している力学系に「適切な⁵」形でブレーキを掛け、運動を停止させてしまい (=運動方程式が非常に簡単になる) この状態で解を求めると、力学系の構造は変化していないので、運動方程式が解けるという巧妙な方法です。

$p(t), q(t)$ そのものが変化してもハミルトニアンは変化しますが、これは力学系の構造自体が変わるので、議論としては別のものとすべきでしょう。

13.5 注記

13.5.1 ハミルトンの主関数

この章では、 S をハミルトン関数の拡張というコンテキストから導きましたが、 S 自体はハミルトンにより「主関数」として導入されました。

1834 年の論文 (第 13.5.2 節、参考資料 (4)) の最後で、

$$S = \int_0^t (T + V) dt,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left[T + V \right]_0^t = (T_0 + V_0) - (T + V) = -\mathcal{H}; \quad \because T_0 = V_0 = 0.$$

を示しています。

1835 年の論文 (第 13.5.2 節、参考資料 (5)) では、 S を主関数 (principal function) と呼ぶことにして、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = -\mathcal{H} \end{aligned}$$

を示し、ハミルトニアン \mathcal{H} は時不変だと記しています。

論文の中では、明示的に

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = 0,$$

を示していないのですが、

$$S = \int_0^t (T + V) dt = \int_0^t \mathcal{H} dt = -\mathcal{H}t,$$

従って、

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = 0$$

より導かれます。

⁴経過の仕方を t^2 時間などにはできません。

⁵後にはっきりしますが、ポワソン括弧=1 です。

多変数制御理論では、制御によりシステム変数 η を外部から操作⁶ しますから $\partial S/\partial \eta \neq 0$ であり、 dS/dt を考える必要があります（第 15 章、第 15.2 節参照）。

ここで示した点は「多変数制御」の観点から見ないと見過ごされてしまい、また多変数制御の議論では、ハミルトンの元論文まで遡って考えないでしょうから、 dS/dt の議論の主旨も伝わり難いでしょう。専門性の深化による、不完全な議論の継承が存在します。

13.5.2 参考資料

- (1) 高橋 康
量子力学を学ぶための解析力学入門
増補第 2 版、講談社 2000
- (2) Charles Torre
Utah State University
Hamiltonian Formalism: Hamilton's equations. Conservation laws. Reduction. Poisson Brackets.
http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall.2010/Lectures/10.pdf
- (3) 中根 美知代
ハミルトンとヤコビの研究における変分法と 1 階偏微分方程式
<https://www2.tsuda.ac.jp/suukeiken/math/suugakushi/sympo05/05nakane.pdf>
- (4) William Rowan Hamilton
Edited by David R. Wilkins, 2000
ON A GENERAL METHOD IN DYNAMICS
Philosophical Transactions of the Royal Society ,part II for 1834, pp. 247308.
ハミルトンの 1834 年の論文です。
- (5) William Rowan Hamilton
Edited by David R. Wilkins, 2000
SECOND ESSAY ON A GENERAL METHOD IN DYNAMICS
Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95144.)
ハミルトンの 1835 年の論文です。

⁶全てではなく、一部ですが。

第14章 ハミルトン・ヤコビの方程式

14.1 歴史

ラグランジュ力学は1788年頃に確立、ポアソンは1809年にポワソン括弧とオイラー・ラグランジュ方程式の1階微分方程式表現を発表しました。これらは1834年頃にハミルトン力学として完成されます。

ヤコビはハミルトニアンに時間 t が明示的に含まれる力学の最初の研究者と思われます¹。彼は、太陽と惑星両方からの力を受ける彗星の軌道計算を実行しました。つまり、彗星は太陽の重力場と、太陽を中心として回転する惑星からの引力を受け運動するという、3体問題の計算です。1836年でした。そして、ハミルトン・ヤコビの方程式に到達したのです。

しかし、ハミルトン・ヤコビの方程式の広範な意味や応用などは、ポアンカレ²、ヒルベルト³、カラテオドリー⁴など、後の学者に負う所が多く、論理的進展を辿るのが困難です。また、ハミルトン・ヤコビの方程式の真価が理解されるまでには、20世紀の量子力学や多変数制御理論まで待たねばなりませんでした。

本章では、現在のハミルトン・ヤコビ方程式の標準的な扱いを記します。

14.2 ハミルトン方程式の解法

これからハミルトン・ヤコビ方程式の応用の一つとして、ハミルトン方程式の解を求める方法を考えます。これからの議論では、記法を変更し、ハミルトン・ヤコビの方程式中の S を W で置き換えます。理由は、数学的な「作用積分（ハミルトンの言葉をを用いると「主関数」）」から「生成関数 (generating function)」へと意味が具体化し、さらにハミルトン方程式を解く事は、生成関数を求める事と同じになるからです。また生成関数を求める方法は現在の所、偏微分方程式の最も強力な解法となっています。

14.3 ハミルトニアンを変える変数変換

(サフィックス i を省きます。)

この章の主題は、ハミルトニアン $\mathcal{H}(q, p, t)$ を持つ力学系のハミルトン方程式の解法です。そのため、 $\mathcal{H}(q, p, t)$ を

$$\frac{\partial \mathcal{K}(Q, P, t)}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{K}(Q, P, t)}{\partial P} = 0,$$

となる、別のハミルトニアン $\mathcal{K}(Q, P, t)$ に正準変換します。これは、 $\mathcal{K}(Q, P, t) = \text{constant}$ という意味ですが、さらに簡単に $\mathcal{K}(Q, P, t) = 0$ としましょう。

¹時間 t を含む方程式についてはハミルトンが既に述べています。

²Jules-Henri Poincaré, 1854年4月-1912年7月

³David Hilbert, 1862年1月-1943年2月。

⁴Constantin Carathéodory, 1873年月9-1950年2月。

こうすると、ハミルトニアン \mathcal{K} に関する運動方程式が直ちに解けます。そして、第 13.4 節で議論したように、正準変換は運動方程式には影響しないので、 \mathcal{K} の運動方程式の解は \mathcal{H} の運動方程式の解となります。

従って、問題はいかに \mathcal{K} に至る変換式を求めるかとなり、これは生成関数の計算となります。そこで、まず生成関数について調べておきます。

14.4 生成関数

14.4.1 生成関数の性質

生成関数 W によりハミルトニアン \mathcal{H} が \mathcal{K} に変換されたとすると、

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = p(t), \quad \frac{\partial W}{\partial p} = q(t),$$

生成関数については

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{K}(Q, P, t) - \mathcal{H}(q, p, t),$$

より

$$W = \int \left(\mathcal{K}(Q, P, t) - \mathcal{H}(q, p, t) \right) dt,$$

となります。この Q についての微分は、

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \right) dt = P(t),$$

となり、変数 P については、

$$\frac{\partial W}{\partial P} = Q(t),$$

となります。この $\partial W / \partial Q$ 、 $\partial W / \partial P$ の結果は、ここで初めて明らかになったもので、単一の生成関数が、変換前後のハミルトニアンの変数に対して有効で、 \mathcal{H} を \mathcal{K} に変換する関係式を「生成」します。

なお、 W は時間を含む多変数関数ですが、なぜ dW/dt では無く $\partial W / \partial t$ を計算するかについては第 15 章で簡単に述べます。

14.4.2 生成関数の計算

図 14.1 は、生成関数の変数として \mathcal{H} の変数 p と \mathcal{K} の変数 P を使用した場合の \mathcal{H} 、 \mathcal{K} 、 W の関係を表したものです。X が変数の変換を実行する関係式で、この計算が最終目標です。一方、 p, q と P, Q の関係はそれぞれ \mathcal{H}, \mathcal{K} が表現するシステム中で、ハミルトン方程式で決まります。

従って、ハミルトン・ヤコビの方程式はこれらの知見より解くことができ⁵、標準的プロセスは以下ようになります。

- (1) W を p, P, t の関数とする (変数の 4 通りの選び方から一つを選択)。
- (2) W は未だ不明 (これが求めたいもの)。
- (3) X については不明だが、これは W の解になることは知っている。
- (4) 関係 $\partial W / \partial p = q(t)$ および $\partial W / \partial P = Q(t)$ は知っている。
- (5) $\partial W / \partial t$ がエネルギーを生成し、これが \mathcal{K} 中の変数 t を生ずる。

⁵解けない場合が多く、解ける場合にはという条件付きです。

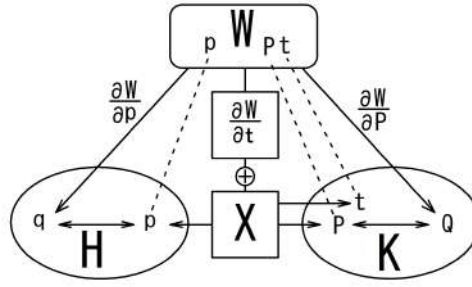


図 14.1: 生成関数の働き

14.4.3 生成関数の変数の選択

ハミルトニアン \mathcal{K} については、

$$\frac{\partial \mathcal{K}(Q, P)}{\partial Q} = -\dot{P} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{K}(Q, P)}{\partial P} = \dot{Q} = 0,$$

としますので、 P, Q は定数です。

ハミルトニアン \mathcal{H} については、ハミルトン方程式

$$\frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p} = \dot{q},$$

により、 $p \leftrightarrow q$ 間には関係づけられていますから、生成関数 W の変数は、 \mathcal{H}, \mathcal{K} からそれぞれ一つずつピックアップし⁶、それに t を加えたものとなります。

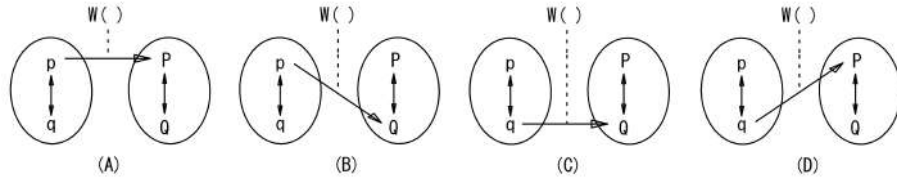


図 14.2: 変数の選択方法

従って、2つのハミルトニアン \mathcal{H} と \mathcal{K} の間の関係を表す方法として次の4個があります。(ハミルトン力学では一般化座標と一般化運動量の違いは無くなっていますが、利便性のために、 p, P を運動量、 q, Q を座標と呼ぶことにします。)

(A) $W = W(p, P, t)$: \mathcal{H} 中の運動量 $p \rightarrow \mathcal{K}$ 中の運動量 P ,

$$q = -\frac{\partial W}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P}.$$

(B) $W = W(p, Q, t)$: \mathcal{H} 中の運動量 $p \rightarrow \mathcal{K}$ 中の座標 Q ,

$$q = -\frac{\partial W}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial W}{\partial Q}.$$

(C) $W = W(q, Q, t)$: \mathcal{H} 中の座標 $q \rightarrow \mathcal{K}$ 中の座標 Q ,

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial W}{\partial Q}.$$

⁶ \mathcal{K} から選ぶのは、実は定数です。

(D) $W = W(q, P, t) : \mathcal{H}$ 中の座標 $q \rightarrow \mathcal{K}$ 中の運動量 P ,

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P}.$$

14.4.4 ハミルトン・ヤコビの方程式による正準変換

今までの議論で得られた生成関数 W はハミルトニアン \mathcal{H} 、 \mathcal{K} に関し、ポアソン括弧 $\{Q, P\}$

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1,$$

を満たす q, p, Q, P の関係を与えます。

これは、一つのエネルギー保存系 \mathcal{H} を別のエネルギー保存系 \mathcal{K} へ変換する時の変換式です。 W は別のエネルギー保存系 \mathcal{K} に対するエネルギー発生/消費源で、 \mathcal{H} も \mathcal{K} もエネルギー保存系と言うのはパラドックスの様に见えますが、考え方のポイントは、 $\partial W / \partial t$ (エネルギー供給/消費源) を含めたエネルギー保存系と考える事です。つまり、 $\partial W / \partial t$ は直ちに、 $q(t), p(t)$ の値に反映され、その新しい値のもとで $(q(t), p(t))$ の構造は変化していませんので) エネルギー保存則が保たれるのです。

しかし、このような考えが出来るのは、変換が正準変換となる時のみです。正準変換は力学系の物理を変化させません。

14.5 ハミルトニアン保存系の生成関数の計算

今まで、 t を陽に含む、ハミルトニアン非保存系を基本に考えてきました。しかし、ハミルトニアン保存系でも同様に扱え、かつ解が得られるので、まず保存系の議論をしましょう。保存系のハミルトニアンは時間 t を明示的に含みません。そのため、ハミルトン・ヤコビの方程式は変数分離法で解かれます。

これから、標準的なプロセスを示しましょう。

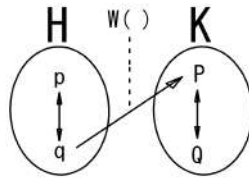


図 14.3: 変数の選択

【変数の選択】

ハミルトン・ヤコビの方程式

$$\mathcal{K}(Q, P) = \mathcal{H}(q, p) + \frac{\partial W(\cdot)}{\partial t} = 0,$$

で、 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ と変換する W について、一対の変数を選びます。変換後のハミルトニアン \mathcal{K} に関して、

$$W = W(q, P, t).$$

とすると、以下が得られます。

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P}.$$

【新しいハミルトニアンの設定】

新ハミルトニアン K を、

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} = 0.$$

となる様に設定すると、運動量 P および座標 Q は結局定数となりませんが、計算途中では変数として扱います。

【ハミルトン・ヤコビの方程式の作成】

ハミルトン・ヤコビの方程式は、

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q}, q\right) + \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial t} = 0.$$

エネルギー保存系では \mathcal{H} は定数、また $\partial W / \partial t$ も定数となるので、これを Q とします。

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q}, q\right) = -\frac{\partial W(q, P, t)}{\partial t} = -Q.$$

【 W に対して変数分離を適用】

ここでは W の解法についてのみフォーカスします。

以下の関係を見ると、

$$\frac{\partial W(q, P, t)}{\partial t} = Q,$$

W のなかで座標が時間から分離されています。理由は、

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = C \rightarrow F(x, t) = F(x) + Ct.$$

ここで、時間から分離された部分を $W(q, P)$ と書くと、 W は、

$$W(q, P, t) = W(q, P) - Qt.$$

すると、

$$\frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q} = \frac{\partial W(q, P)}{\partial q},$$

が得られ、変数分離完了です。

W を時間変数 t の無いもので置き換えると、

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial W(q, P)}{\partial q}, q\right) = Q.$$

が得られ、これもハミルトン・ヤコビの方程式と言われますが、ここではこれは使いません。

【 p と q の計算】

以下の関係

$$Q = \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial P} = \frac{\partial W(q, P)}{\partial P} - \frac{\partial Q}{\partial P} t,$$

により、

$$\frac{\partial W(q, P)}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial P} t + Q.$$

これを積分して W を得ます。従って q は定数 P, Q により、

$$q = q(P, Q, t).$$

そして p は、

$$p = \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q} = \frac{\partial W(q, P)}{\partial q}.$$

上式により、 q を置き換えて、

$$p = p(Q, P, t).$$

変数分離と、最初に変数として Q, P を扱い、最後に定数としてしまうのがポイントです。

14.6 ハミルトニアン非保存系

ハミルトニアンに時間 t を陽に含む、全エネルギーが時間とともに変化する情况进行を考えましょう。ハミルトニアン $\mathcal{H}(q, p, t)$ の全エネルギーは t が変化、それが $q(t), p(t)$ に反映されます。

新しいハミルトニアンを \mathcal{K} とすると、

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial t} = 0,$$

となり、生成関数 W を q, p について解けば \mathcal{H} の解が得られます。

\mathcal{K} についてのハミルトン方程式は、

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} = -\dot{P} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = \dot{Q} = 0.$$

すると P, Q は定数になるのですが、これはプロセスの最後まで待ちましょう。

$q \rightarrow P$ のように対応させると (図 14.3 参照)、

$$W = W(q, P, t).$$

すると、

$$p = \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial P}.$$

ハミルトン・ヤコビの方程式は、

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(Q, P, t) &= \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial t} \\ &= \mathcal{H}\left(\frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

上式は変数 q, P についての W の偏微分方程式となるので、解くと、

$$W = W(q, P, t) + C.$$

C は定数で $\partial W/\partial t$ の積分の結果発生したもので、重要ではありません。関数 $W(q, P, t)$ はハミルトンの主関数 (Hamilton's principal function) と呼ばれ⁷、この関数の解が求めるものです。

ハミルトニアン保存系では、 W の変数は q と t (P は最終的に定数になり、気にする必要はありません) に分離されますが、非保存系では、これは予想されにくいものです。

W は以下の関係

$$Q = \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial P},$$

を満たしますが、解は次の方程式が解ければ得られます。

$$Q = \frac{\partial}{\partial P}(W(q, P, t) + C).$$

解けた時には、 q は定数 P, Q と t の関数として表されます。

$$q = q(P, Q, t).$$

上記 q を次の式に代入して、

$$p = \frac{\partial W(q, P, t)}{\partial q},$$

p の解は

$$p = p(P, Q, t).$$

ハミルトニアンが変化する力学系の解法プロセスは、上のようになりますが、現実にはハミルトン・ヤコビの方程式は殆ど解けません。

14.7 ハミルトン・ヤコビの方程式の例

ここでは 1 次元の調和単振動を考えます。

【ハミルトニアン】

ニュートンの運動方程式は、

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 = kq$$

ここで、 m は質量、 k は原点からの距離に比例する力です。ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2.$$

各周波数 ω を用いての表現では (こうすると計算が単純になるので)、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

するとハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

【ハミルトン・ヤコビの方程式】

$q \rightarrow Q$ を選択すると、ハミルトン・ヤコビの方程式は、

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p) + \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t} = 0.$$

⁷従って、ハミルトン・ヤコビの方程式の原型はハミルトンが導いています。

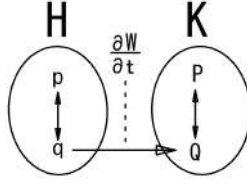


図 14.4: Parameter mapping

上式で P, Q は定数ですが、これは最後に置き換えます。具体的な形に書き直すと、

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t} = 0.$$

【生成関数 W と変数の関係】

$q \rightarrow Q$ とマッピングしたので、

$$\frac{\partial W}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial Q} = -P.$$

この関係を用いて、 W より p と q の関係を計算します。

【 W の解】

さて、ここでハミルトン・ヤコビの方程式を注意深く観察し、常套手段を使います。つまり、

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2,$$

は q だけの関数で、

$$\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t},$$

は t だけの関数です。結局、変数 q, t は都合よく分離されていて、 W の解が次の形になると考えます。

$$W(q, Q, t) = W(q, Q) - f(Q)t = W(q, Q) - Qt.$$

すると、

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{\partial W(q, Q)}{\partial Q} - t = -P - t, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -Q.$$

市 t がって、問題となっている方程式は、

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - Q = 0,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = 2mQ - m^2 \omega^2 q^2,$$

$$W = \pm \int (2mQ - m^2 \omega^2 q^2)^{\frac{1}{2}} dq = \pm m\omega \int \left(\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} dq,$$

q についてこの式を解くために、 $\partial W / \partial Q = -P - t$ を使い、

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \pm m\omega \frac{\partial}{\partial Q} \int \left(\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} dq,$$

$$\begin{aligned}
&= \pm m\omega \int \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} dq \\
&= \pm \frac{1}{\omega} \int \left(\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dq.
\end{aligned}$$

ここで、次の積分の計算が必要です。

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

次のように置くと

$$\begin{aligned}
x &= a \cos z \quad (a > 0), \quad z = \cos^{-1} \frac{x}{a}. \\
y &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{-a \sin z}{\sqrt{a^2(1 - \cos^2 z)}} dz = -z = -\cos^{-1} \frac{x}{a}.
\end{aligned}$$

本節で扱っているような単純な場合でさえ、複雑な積分計算が必要な点にご注意。つまり、単純な問題にハミルトン・ヤコビの方程式を応用するのは、意味がありません。

$$= \mp \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2Q}} q \right) = -P - t.$$

従って、

$$q = \sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2}} \cos \omega(t + P) = \sqrt{\frac{2Q}{k}} \cos(\omega t + \phi), \quad \phi = \omega P,$$

ここに、

$$\mp \cos^{-1} x = -y \rightarrow x = \cos y.$$

そして、

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2mQ - m^2\omega^2 q^2} \\
&= \pm \sqrt{2mQ - m^2\omega^2 \left(\frac{2Q}{m\omega^2} \right) \cos^2(\omega t + \phi)} \\
&= \pm \sqrt{2mQ} \sin(\omega t + \phi).
\end{aligned}$$

P と Q は定数ですから、最終回は初期条件を入れれば決定されます。

14.8 ハミルトン・ヤコビ力学（まとめ）

ハミルトン力学から、ハミルトン・ヤコビ力学への発展には大きな跳躍が必要です。これは、ハミルトニアンが時間変化する非保存系と、保存系を統一的に扱う点で、これはハミルトン・ヤコビの方程式の直接的な結果です。

多少、哲学的な観点から考えるとハミルトニアン、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q(t), p(t), t),$$

を得れば、全ての力学変数とパラメーターを含み、力学システムの表現は完成です。つまり、これから、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t},$$

が計算され、これらの項はお互いに独立、これらを使って \mathcal{H} で表現される系を見るわけです。この一つの共通関数 \mathcal{H} をもとに、力学系の運動方程式を表現するというのはハミルトンの元々の考えで、ハミルトン・ヤコビ力学の完成で実現されました。

また、実世界の力学システムを考えると $\partial\mathcal{H}/\partial t$ は普通ゼロにはなりません。しかし、エネルギー源 $\partial W/\partial t$ が得られると、これが $\partial W/\partial q$ や $\partial W/\partial p$ としてハミルトニアンエネルギー増減に反映され、全体としてエネルギー保存系として扱えるのです。

さらに、実用的観点からは、ハミルトン・ヤコビの方程式は時間変化する物理を扱うために t を陽に含むのですが、これから解析力学応用の二つの大きな流れが生まれました。

(1) ハミルトンの方程式の解法 (=正準変換の応用)。

(2) 時間変化する力学系の記述。

これの直接的応用は多変数制御系です。この中では、多変数記述が本質的に必要であり制御信号は時間変化する力学系の出力より生成されます (フィードバック)。

また、制御のためには内部変数のエネルギーだけではなく変数そのものを変化させます。

(第 13.5.1 節参照。)

しかし、ハミルトン・ヤコビの方程式は殆ど解けないという事が知られており、この理由は生成関数の構造にあります。もし生成関数中の変数が分離されていれば、積分は解析的に計算されますが、それ以外の場合解けません。

すると、コンピュータによる近似数値計算が唯一の解法となりますが、コンピュータの速度の進歩、小型化により、この方法が現実的となるでしょう。また多変数制御理論では、システムのラグランジアンを導き、これを使った評価関数を最大/最小化する方法があり、この場合ハミルトン・ヤコビの方程式は解かず、評価関数の計算が主問題となります。

14.9 注記

14.9.1 ハミルトニアン中の時間 t

生成関数 W は以下の式を基にして計算されます。

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial W(q, p, t)}{\partial t} = 0.$$

この時、時間 t を変換するのですが、 \mathcal{K} は $Q(t), P(t)$ を含み、これらは時間 t の関数です。この状況で t を変換すると、 $Q(t), P(t)$ に予期せぬ変化を与えないのでしょうか？

しかし、大変都合がいい事に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{K}(Q, P, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} \\ &= \dot{P}\dot{Q} - \dot{Q}\dot{P} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t}. \end{aligned}$$

つまり、 t の変換による $P(t)$ の変化は $Q(t)$ の変化によりキャンセルされ、結局ハミルトニアン \mathcal{K} の変化は時間変数 t だけに依存するのです。このため $P(t), Q(t)$ を気にする必要はなくなりました。

正準変換は、システム構造を変えません。

14.9.2 参考資料

- (1) Donald G. Schultz, James L. Melsa
State Functions and Linear Control Systems
McGraw-Hill Book Company, 1967
多変数制御理論の本ですが、解析力学を含めた解説があります。
- (2) シュルツ、メルサ. 久村 富持 訳
状態関数と線形制御系
学献社、1970
(1) の日本語訳です。
- (3) Iain W. Stewart
AdvancedClassicalMechanics
<https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-09-classical-mechanics-iii-fall-2014/lecture-notes/>
MIT Open Course Ware の中の資料です。

第15章 付録1； 多変数制御への応用

多変数制御理論¹は解析力学の直接的応用の一つです。制御工学では、具体的物理システムを、自動的に目標値となる様に制御します。ターゲットシステムは力学的、電気工学的、流体工学的な物理関係等を含みますから、システムの物理状態を多変数のエネルギー関数で表現するには解析力学が主要ツールとなります。

一方、「力学」と大きく異なる点は、「自動」制御のため、システムには制御可能な変数を持たせ、さらにその値はシステムの現在の状態から生成することです。従って、システムの変数は、物理動作を表現するための変数に制御変数が加わります。

また、力学システムと、制御変数の間の関係式はハミルトン・ヤコビの方程式を生成しますが、自動制御の目的は、この運動方程式を正確に解くことではありません。むしろ、システムが安定に動作、制御入力に対して適正な速度で追従する事が目標になります。

従って、ハミルトン・ヤコビ方程式は解かず、多変数2次形式評価関数の最小問題に転換します。

本章ではどこまでが解析力学の直接的応用か、またどこで実問題を解くために進路変更をしているか等にフォーカスして議論します。

また、議論を簡単にするため、 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$ で表現される線形システムを想定します。

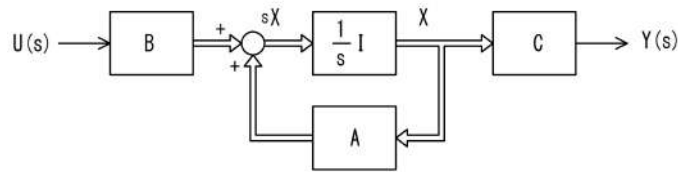


図 15.1: 状態変数によるフィードバック制御

15.1 評価関数の定義

システム状態変数を $\mathbf{x}(t)$ 、制御入力 $u(\mathbf{x}, t)$ をとすると、制御対象のラグランジアンは、

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), u(\mathbf{x}, t), t\},$$

と定義されます。ここで、第 15.5.1 節に示す様に、制御システムのシステム表現 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ によりラグランジアン中の $\dot{\mathbf{x}}(t)$ を $\mathbf{x}(t)$ で置き換えると、

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), u(\mathbf{x}, t), t\} \rightarrow \mathcal{H}\{\mathbf{x}(t), u(\mathbf{x}, t), t\},$$

となり、ハミルトニアンに変換されます（この時、ラグランジアン中の n 個の $\dot{\mathbf{x}}(t)$ はハミルトニアン中の $2n$ 個の $\mathbf{x}(t)$ にいわば統合されます）。

¹制御理論の範囲は広いのですが、ここでは最適レギュレータと言われるものを扱います。

そこで評価関数 $W(\mathbf{x}, t)$ を、

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}, t) &= \int_{t_0}^t \mathcal{H}\{\mathbf{x}(\tau), u(\mathbf{x}, \tau), \tau\} d\tau \\ &= \mathcal{H}\{\mathbf{x}(\tau), u(\mathbf{x}, \tau), \tau\} \Big|_{\tau=t_f} - \mathcal{H}\{\mathbf{x}(\tau), u(\mathbf{x}, \tau), \tau\} \Big|_{\tau=t}, \end{aligned}$$

で定義すると、 $W(\mathbf{x}, t)$ の時間微分は、

$$\frac{dW(\mathbf{x}, t)}{dt} = -\mathcal{H}\{\mathbf{x}(t), u(\mathbf{x}, t), t\}.$$

ここで、制御を想定すると、ある適当な時間 t_0 に開始、不定の時間 t に終了しますから、評価関数もこれを反映した積分値となります。ハミルトニアンは正定値関数ですから、 $W(\mathbf{x}, t)/dt$ は負になり、従って $W(\mathbf{x}, t)$ の絶対値は時間とともに減少します。

ラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ は負にもなり得ますので、制御対象の構造 $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$ を最初に適用して、ハミルトニアンとした意味が有効に働きます。

このように状態変数 \mathbf{x} を含み、時間とともに減少する関数 W を評価関数と定義した事が正当化され、これを基に閉ループ制御システムを構築する訳です。

15.2 評価関数をもとにしたシステム関数

$W(\mathbf{x}, t)$ に微分のチェインルールを適応して、

$$\begin{aligned} \frac{dW(\mathbf{x}, t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i},$$

は $W(\mathbf{x}, t)$ のグラジエント（ベクトル）となっているので、 $\nabla W^T(\mathbf{x}, t)$ として列ベクトル表現します。

ここで特筆すべきは、解析力学でハミルトン・ヤコビ方程式を導いた時、生成関数は $\partial W(q, p, t)/\partial t$ としたのに対し、ここでは多変数関数 $W(\mathbf{x}, t)$ に対する全微分 $dW(\mathbf{x}, t)/dt$ とした点です。これは本来、 $dW(\mathbf{x}, t)/dt$ であるべきで、解析力学の場合、変数 \mathbf{x} は外部から操作する事は考えていないのに対し、制御工学では変数 \mathbf{x} を外部から変化させるためです。

第 14 章、第 14.4 節参照。

制御入力を考慮したターゲット制御システムは、 \mathbf{A} をシステム係数行列、 \mathbf{B} を制御ベクトルの係数行列、 \mathbf{u} を制御ベクトルとして、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

という関係で表されます。従って、

$$\frac{dW(\mathbf{x}, t)}{dt} = \nabla W^T(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t},$$

が得られます。第 15.1 節の結果と上記結果より、

$$\nabla W^T(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + \frac{\partial W^T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mathcal{H}\{\mathbf{x}(t), u(\mathbf{x}, t), t\}.$$

あるいは、

$$\nabla W^T(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + \mathcal{H}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t\} + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

この式の意味について考えると、

- (1) $\nabla W(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$ 項は、制御対象システムの変数を操作する必要性から生じました。
- (2) $\mathcal{H}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t\} + \partial W(\mathbf{x}, t)/\partial t$ はハミルトン・ヤコビ方程式で変数操作の必要が無ければ、そのままターゲット物理システムの運動方程式です。

15.3 制御系設計プロセス

制御系設計が目的ではありませんので、以下、分かり易くするため、最適解の計算プロセスを単一変数（ベクトルも行列も無し）とした場合を記述します。行列計算による議論については第 15.5.2 節に付記します。

- (1) 入力 u の最適化 (u の消去)。
- (2) x についてハミルトン・ヤコビ方程式を立てる。
- (3) ハミルトン・ヤコビ方程式に 2 次形式の評価関数を適用。
- (4) 結果は Ricatti² 方程式となるので、これを解く。

【入力の最適化】

制御システムのハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$J() = \frac{\partial W}{\partial x}(Ax + Bu) + Qx^2 + Ru^2 + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

最適入力 u_o を仮定し、これを計算。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u} &= B \frac{\partial W}{\partial x} + 2Ru = 0, \\ u_o &= -\frac{1}{2R} B \frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned}$$

【ハミルトン・ヤコビ方程式】

すると、最適化されたシステム方程式は、

$$J_o() = \frac{\partial W}{\partial x} Ax - \frac{1}{4R} \left(B \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + Qx^2 + \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

【評価関数の定義】

W を 2 次形式と仮定して、

$$W = P(t)x^2.$$

すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= 2P(t)x, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \dot{P}(t)x^2. \end{aligned}$$

²Jacopo Ricatti, 1676 年 3 月-1754 年 4 月。

【Ricatti 方程式の出現】

システム方程式中の $\partial W/\partial x, \partial W/\partial t$ を置き換えると、

$$J_o() = 2AP(t)x^2 - \frac{1}{4R} \left(B^2 P(t)x \right)^2 + Qx^2 + \dot{P}(t)x^2 = 0,$$

$$2AP(t) - \frac{1}{R} B^2 P(t)^2 + Q + \dot{P}(t) = 0.$$

上記方程式は Ricatti 方程式と呼ばれ³、システムの状態変数 x と入力変数 u が消滅し、結局 $P(t)$ の計算に帰着します。

つまり「ハミルトン・ヤコビ方程式」は解きません。

15.4 多変数自動制御系の特徴

多変数自動制御システムは、そのシステム（運動）方程式をラグランジアンを用いて記述します。この時一階微分方程式で表現されるシステムの構造

$$\dot{x}_i = Ax_i; \quad \text{線形と仮定}$$

を適用すると、ラグランジアンがハミルトニアンに変わってしまいます⁴（ルジャンドル変換を適用したのと同様）。従って、ラグランジアンで記述したまま論理展開がなされていても（これが通常）、実態はハミルトニアンベースの議論です。

また、ハミルトン・ヤコビ方程式は導出されますが、これを解かずに済むのが「最適レギュレータ」理論です。Ricatti 方程式も簡単に解ける訳ではありませんが、コンピュータが使用できるので、この解を使い自動制御を実施すること自体は困難ではありません。

それよりも、多変数制御では、システムの物理構成を如何に正確に表現できるかが大きな問題で、「 H_∞ 」制御理論はこの反省の基に構築されたものです。

15.5 注記

15.5.1 $\dot{x} = Ax$ とルジャンドル変換

ハミルトニアンの導出にはラグランジアンにルジャンドル変換を応用しました（第 11.3 節参照）。ルジャンドル変換の基本的機能は関数 $F(x)$ をタンジェント $F'(x)$ と切片 u で表現する事です。

すると、関数 $f(x, y) = 0$ にルジャンドル変換を適用すると、

$$f(x, \dot{x}) = 0.$$

上記で x は切片に相当することに注意しましょう。タンジェントについて解くと、

$$\dot{x} = g(x).$$

これは、制御システム関数そのものです。

ルジャンドル変換の場合、関数 $F(x)$ は凸または凹関数に制限されていましたが、これは関数 $F'(x)$ と切片 x の一対一対応を保証する為です。しかし、制御系の関数の場合第 15.2 図 (C) に示す様に、一対一の対応は失われますが、制御関数の値が、別の時間に全く同一となっても全く問題ありません（同じ時間に制御関数が別々の値となるのは困りますが）。

³ハミルトン・ヤコビ方程式から Ricatti 方程式が予想できるでしょうか？

⁴多変数制御の教科書では、この点はあまり触れられていない様です。

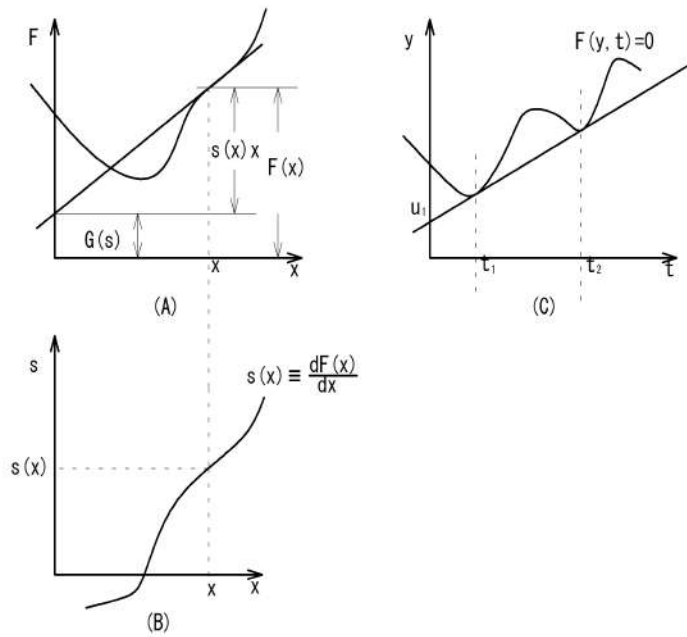


図 15.2: システム表現とルジャンドル変換

この観点から、制御関数 $\dot{x} = Ax$ の関係を用いて、ラグランジアンを階数を下げるのは、ルジャンドル変換を適用をしたのと同事です。さらに \dot{x} は係数 A の存在で x とは独立になり、ラグランジアンはハミルトニアンに変わります。

15.5.2 制御系方程式の解法

【システムを表現するハミルトン・ヤコビ方程式】

第 15.2 節で得られたシステムの（拘束付き）運動方程式を J と置くと、

$$J = \nabla W^T(x, t) \cdot (Ax + Bu) + \mathcal{H}\{x(t), u(x, t), t\} + \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = 0.$$

この方程式の解が見つかれば、制御を含めた物理システムが最も経済的な動作となると考えられます。ここで、ハミルトニアンを 2 次形式の関数

$$\mathcal{H} = x^T Q x + u^T R u,$$

とを考えます。 Q および R はそれぞれ $n \times n$ 、 $m \times m$ の正方行列です。（物理系を表す一般的なエネルギー関数を考えると、2 次形式以外に重力ポテンシャル mgh や、ばねのポテンシャル $-kx$ がありますが、この後 \mathcal{H} の最小問題に転換しますので、 mgh^2 や kx^2 と置き換えても、その最小点は同一となります。）

【入力についての最適化】

ここでは最適入力 u_o を仮定し、それに対する $u_o^T R u_o$ を計算しておきます。

R は対称行列なので u_o の転置行列は、

$$(u_o)^T = -\frac{1}{2} \nabla W^T (R^{-1} B^T)^T = -\frac{1}{2} \nabla W^T B (R^{-1})^T = -\frac{1}{2} \nabla W^T B R^{-1}.$$

従って、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o^T \mathbf{R} \mathbf{u}_o &= -\frac{1}{2} \nabla W^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla W \right) \\ &= \frac{1}{4} \nabla W^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla W \\ &= \frac{1}{4} \nabla W^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla W. \end{aligned}$$

【最適入力時のハミルトン・ヤコビ方程式】

最適入力に関するハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$\begin{aligned} J_o() &= \nabla W^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}_o) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}_o^T \mathbf{R} \mathbf{u}_o + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \nabla W^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \nabla W^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla W + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{4} \nabla W^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla W + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \nabla W^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{1}{4} \nabla W^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla W + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

【エネルギー供給関数】

$W()$ は $\mathbf{P}(t)$ を係数行列とする \mathbf{x} の 2 次形式と考えて、

$$W(t) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}.$$

すると、

$$\begin{aligned} \nabla W &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{P}(t) \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{P}(t)^T \mathbf{x} = 2\mathbf{P}(t) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

$\partial W()/\partial t$ も 2 次形式になるので、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}.$$

ハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} &= 0, \\ \mathbf{x}^T \{2\mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{P}}(t)\} \mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

この等式がすべての \mathbf{x} について成立するので、

$$2\mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{P}}(t) = 0.$$

【Ricatti 方程式の出現】

ここで、行列の 2 次形式の性質を使います。2 次形式では、対称部分のみが意味を持つので、上の等式を見ると、最初の項は非対称です。これを変形すると、

$$\text{sym}\{2\mathbf{P}(t) \mathbf{A}\} = 2 \frac{\mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t)}{2} = \mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t).$$

すると、

$$\mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{P}}(t) = 0.$$

これは $\mathbf{P}(t)$ の 2 次形式を含む 1 階の微分方程式で、Ricatti 方程式と言われます。

【実システムの性質応用】

実際の自動制御系の設計では、評価関数は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P}(t) = 0,$$

となります（この条件は安定条件）。評価関数が振動的になるにしても、それが減衰振動とならないとシステムは安定とは言えません。そのため、 $\dot{P}(t) = 0$ となり、Ricatti 微分方程式は代数的 Ricatti 方程式となります。

$$P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = 0.$$

【最終設計】

この様に Ricatti 方程式が得られると、最適入力 \mathbf{x} は、

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = -R^{-1}B^T P(t)\mathbf{x}.$$

閉ループ系の係数行列 $\mathbf{K}(t)$ は、

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{K}^T(t)\mathbf{x},$$

$$\mathbf{K}(t) = P(t)BR^{-1}.$$

これで、計算上はフィードバックの係数行列 $\mathbf{K}(t)$ が得られましたが、設計者には最後に設計パラメータである \mathbf{B} と \mathbf{R} を決めるという仕事があります。つまり、今までの議論では、多変数フィードバックシステムが成立する条件を議論してきており、実際の性能は設計者にゆだねられるのです。

15.5.3 参考資料

- (1) Donald G. Schultz, James L. Melsa
State Functions and Linear Control Systems
McGraw-Hill Book Company, 1967
多変数制御理論の本ですが、解析力学を含めた解説があります。
- (2) シュルツ、メルサ. 久村 富持 訳
状態関数と線形制御系
学献社、1970
(1) の日本語訳です。

第16章 付録2； 物理変数の保存

第5.3.2節で議論したコリオリの力の様に、回転座標（極座標）上を運動する物体を、慣性座標から観測すると、回転座標の持つ加速度による力が発生します。慣性座標から回転座標を観測するとは、回転座標の座標変換ですから、座標変換により物理変数が変化する、あるいは「保存されない」例は、ニュートン力学の初歩の段階で発生しています。

しかし、この時点では、座標変換のための変換式が明瞭（簡単という意味ではありません）で、単に数学的手続きで答えは得られました。

一方、ラグランジュやハミルトンの方法では、座標変換（変数変換）は本当に「何でもあり」の状態となり、どの座標が正しいかとかの基準はありません。もちろんニュートン力学での座標で定義された位置、速度、加速度等が私たちの日常に直結しているので、これを基準としたいところですが、解析力学では、座標（変数）の数の制限が既に無くなっており、日常を超えています。

つまり、第12.7.2節で触れた様に、この多変数座標系表現や座標変換に耐える様な「物理変数」は何かを考えざるを得ない状況に至っているのです。実用上は本章で議論した結果のみを使用し、いつも議論の内容までに立ち入る必要は無いのですが、力学が定義される土台ですので、ここで議論しておきます。

16.1 無限小変換

第12.5節でハミルトニアン $\mathcal{H}(q, p)$ の変数を変換して、 $\mathcal{K}(Q, P)$ を生成する事を述べましたが、この時は変数 Q_i, P_i と q_i, p_i はそれぞれ異なった位相空間にありました。ここでは、同じ位相空間にあり、 $P = P(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i)$ となる場合、即ち、変数が微小変位した時を考えます。これを通常、無限小変換 (infinitesimal transformation) と言いますが、 $\delta \rightarrow 0$ という操作は行いませんので、力学系に対して、全体に影響を与えない程度の大きさの変位¹、あるいは微小変位の2乗は無視できる変位という意味です。

なぜこのような変換を考えるのかについては、微小変換がすべての変換のいわば要素と見え、これを基に、併進、回転、時間の変換の意味が見えてくる点、及び、生成関数の予想外の意味が出現する点にあります。

16.1.1 無限小変換の導出

次の様な変数変換を考えます。

$$q_i \rightarrow Q_i = q_i + \epsilon F_i(q, p), \quad p_i \rightarrow P_i = p_i + \epsilon E_i(q, p).$$

これが正準変換となる条件を計算しますが、それにはポアソン括弧=1となる事を使うため、あらかじめ下記の計算をしておきます。

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = 1 + \epsilon \frac{\partial F_i}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = \epsilon \frac{\partial F_i}{\partial p_i},$$

¹例えば電子回路の設計で言えば、定数を5%変化させる程度です。もちろん状況によりますが、「無限小」とは程遠い大きさです。

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_i} = 1 + \epsilon \frac{\partial E_i}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_i} = \epsilon \frac{\partial E_i}{\partial q_i}.$$

ポアソン括弧は、

$$\begin{aligned} \{P_i, Q_i\} &= \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} - \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \\ &= 1 + \epsilon \left(\frac{\partial E_i}{\partial p_i} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial E_i}{\partial p_i} \frac{\partial F_i}{\partial q_i} - \frac{\partial E_i}{\partial q_i} \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \right) = 1 \end{aligned}$$

ϵ^2 項を無視、また ϵ が任意の微小値 ($\neq 0$) なので、

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_i} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} = 0,$$

あるいは、

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i},$$

が得られます。

$F_i(q, p)$ と $E_i(q, p)$ は異なるのですが、これを生成する共通の関数を想定し $G(q, p)$ 、とすると、

$$Q_i = q_i + \epsilon F_i(q, p) = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i},$$

$$P_i = p_i + \epsilon E_i(q, p) = p_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

より

$$F_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad E_i = \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

となります。 G は生成関数です。

16.1.2 無限小変換の意味

【空間併進】

座標 q_i が ϵ の微小変位、運動量 p_i は変化しない場合を考えます。

$$q_i \rightarrow q_i + \epsilon, \quad p_i \rightarrow p_i.$$

$$q_i + \epsilon = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad p_i = p_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

より、

$$G = p_i, \quad q_i = \text{constant},$$

が得られます。これは、空間併進では運動量が生成関数となり、慣性座標を与えると解釈されます。

【無限小回転】

図 16.1 を参照しながら、

$$Q_1 = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, \quad Q_2 = -q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta.$$

$$q_1^2 + q_2^2 = Q_1^2 + Q_2^2.$$

回転角 θ が小さいとし、これを ϵ で表すと、

$$\sin \theta = \epsilon, \quad \cos \theta = 1,$$

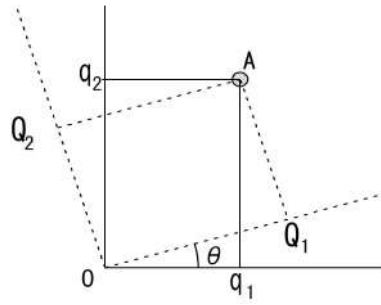


図 16.1: 無限小回転

となり

$$Q_1 = q_1 + \epsilon q_2, \quad Q_2 = q_2 - \epsilon q_1,$$

$$\dot{Q}_1 = \dot{q}_1 + \epsilon \dot{q}_2, \quad \dot{Q}_2 = \dot{q}_2 - \epsilon \dot{q}_1,$$

を得ます。回転では質量 m は変化しないので、運動量については、

$$m(\dot{Q}_1 - \dot{q}_1) = \epsilon m \dot{q}_2 = \epsilon p_2,$$

$$m(\dot{Q}_2 - \dot{q}_2) = -\epsilon m \dot{q}_1 = -\epsilon p_1.$$

ここで $G(q_i, p_i) = G(q_1, q_2, p_1, p_2)$ であり、

$$\frac{\partial G}{\partial q_1} = q_2, \quad \frac{\partial G}{\partial q_2} = -q_1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_1} = p_2, \quad \frac{\partial G}{\partial p_2} = -p_1,$$

となる関数なので、

$$G = q_2 p_1 - q_1 p_2,$$

が得られます。このままでは分かり難いのですが図 16.2 を参照すると、無限小回転の生成関数は角運動量となっています。

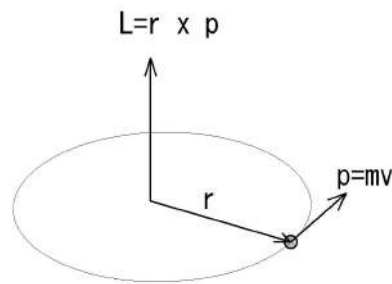


図 16.2: 角運動量

質量 m の質点が速度 \mathbf{v} で定速回転している時、角運動量 \mathbf{L} は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(q_2 p_3 - q_3 p_2) + \mathbf{j}(q_3 p_1 - q_1 p_3) + \mathbf{k}(q_1 p_2 - q_2 p_1)$$

【無限小時間】

時間 t の時のハミルトニアン $\mathcal{H}(q_1(t), p_1(t))$ が微小時間 t' 後に $\mathcal{K}(Q_i(t'), P_i(t'))$ となる場合、比較する時間が異なる点に注意して、

$$Q_i(t') = q_i(t),$$

$$P_i(t') = p_i(t),$$

となります。 $t' = t + \epsilon$ とすると、2 次以上の項を無視して

$$Q_i(t') = Q_i(t + \epsilon) = Q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t),$$

が得られます。同様に $P_i(t')$ についても、

$$P_i(t') = P_i(t + \epsilon) = P_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t).$$

従って、変換関数は、

$$Q_i(t) - q_i(t) = \epsilon \dot{q}_i(t) = -\epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i(t)},$$

$$P_i(t) - p_i(t) = \epsilon \dot{q}_i(t) = \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i(t)}.$$

つまり、微小時間の推移となる変換は、ハミルトニアンを生成関数とする事が分かります。

16.2 物理量の保存と変換

16.2.1 代表的物理量の保存

今までの議論で

- (1) 無限小併進； 運動量が生成関数。
- (2) 無限小回転； 角運動量が生成関数。
- (3) 無限小時間； ハミルトニアンが生成関数。

である事が分かりました。従って、これらの 1 階の積分である、定速併進、定速回転、定速時間推移ではそれぞれ、運動量、角運動量、ハミルトニアンが保存されます。

最初の 2 つの事柄は、ニュートン力学以来、馴染みがあり理にかなったものと言えます。またハミルトニアンが定速時間推移で保存されるとは、エネルギーが慣性座標で保存される事に相当します。運動方程式は慣性座標でのみ成立するので、この中で保存される全エネルギーはハミルトニアンであると考えerべきです。この様に考えると、正準変換でも、時間 t を操作する変換で、ハミルトニアン=0 となるのは、変換後の座標系ではエネルギーが保存されていないと理解されます。

16.2.2 エネルギーの保存

ここでは、エネルギーについて補足しておきます。ラグランジアン¹の時間微分は、

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

オイラー・ラグランジュ 方程式は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

ですから、

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

従って、

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - L \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

ここで、 $\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$ はハミルトニアン \mathcal{H} なので、

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

ラグランジアン \mathcal{L} が時間 t を陽に含まなければ、ハミルトニアンは時間に依存せず、時間 t に対して保存されます。

16.2.3 ネーターの定理

ある座標変換に対して、物理量が保存される時、その座標は対称 (symmetry) と呼ばれます。物理量の保存性と対称性については、Noether² の定理があり、

「系に対称性がある場合には、それに対応する保存量がある」

と記されます。解析力学の範囲では、この定理についてあまり考える必要はありません。しかし量子力学の様に、新しい物理学を構築していく時など、そもそも何が保存される物理量なのかの検討が必要でネーターの定理がこの根拠となります。

16.3 注記

16.3.1 参考資料

- (1) T. Helliwell, V. Sahakian
Harvey Mudd College
Symmetries and Conservation Laws
<http://www.physics.hmc.edu/~saeta/courses/p111/uploads/Y2011/HSCChapter5.pdf>
- (2) 高橋 康
量子力学を学ぶための解析力学入門
増補第2版、講談社 2000
- (3) Goldstein
Classical Mechanics, third edition
Addison Wesley, 2000
- (4) Charles Torre
Utah State University
Infinitesimal Canonical Transformations. Symmetries and Conservation Laws
http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall.2016/Lectures/10.pdf

²A. E. Noether, 1882 年 3 月 - 1935 年 4 月。

第17章 付録3； 幾何光学(屈折)

カメラ、望遠鏡、顕微鏡などの光学機器は今や、私たちの生活の中に欠かせないものとなっています。これらの機器の中で一番重要な部品はレンズです。レンズをうまく組み合わせる事で、私たちの眼と同等な機能を実現したり、遠くのものを見る、小さいものを拡大するなどが可能なのです。

そこで、なぜレンズがこの様な機能を持つのか気になるところですが、その状態を調べるために、光を光線の束として扱う方法が考えられました。つまり、光は直進するという基本的な性質を使う訳で、数学的には三角法を基本とする幾何学を使います。

一つのレンズの性質から始め、簡単な組み合わせレンズの性質を調べますが、レンズ設計は扱いません。

17.1 凸レンズ

中心が端よりも厚いのが凸レンズです。実用的には、断面形状の違いで平凸、両凸、メニスカスに分けられ、それぞれ特徴があります。どんな凸レンズでも、焦点は主平面（レンズの主軸に直交する平面）の両側、等距離にあり、レンズの解析にはこの主平面に薄いレンズがあると見做します。

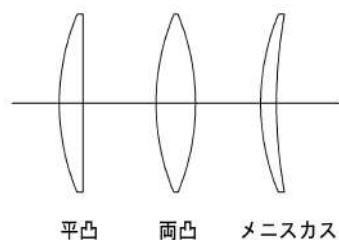


図 17.1: 凸レンズの種類

なお用語上の問題ですが、「主平面」および、主平面と主軸が交わる「主点」は専門用語として確立していますが、主平面を横から見た「線」に対して一般的呼び名がありません。そこで、今後、この「線」に対しても主平面と呼ぶことにします。

図 17.2 に両凸レンズと、その光路特性を示します。まずレンズを表現する図では、左側から光が入射する様を書くのが標準となっています。

物体の A 点から進んだ光軸に平行な光線 1 は、レンズで屈折、右側（像側）の、焦点 (focal point) F_2 を通過します。一方 A からレンズの中心 O に向かった光線 2 はそのまま直進し、 B' で光線 1 と交差、この位置に像を結びます。光は逆進性がありますから、右側に物体をおくと、左側に像が表れますが、この時左側の焦点 F_1 が表れます。どんな凸レンズでも、主平面から二つの焦点までの焦点距離は等しくなります。

レンズの光路を決めるには二本の光路について書けば十分で、 APB' と AOB' のように辿っても、 APB' と $AP'B'$ のように辿ってもおなじ結果となります。

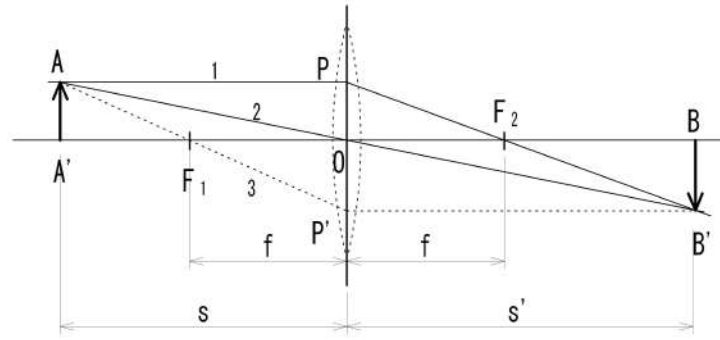


図 17.2: 凸レンズ

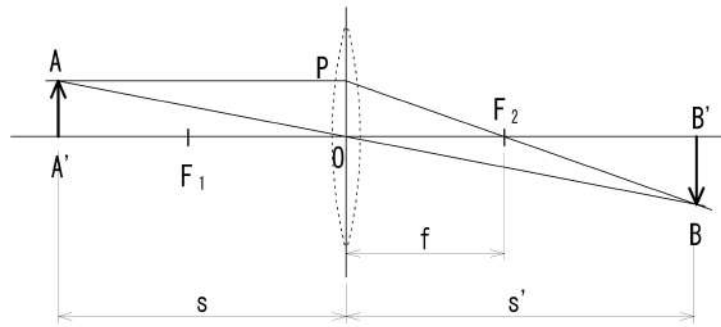


図 17.3: 凸レンズの解析

17.1.1 凸レンズの性質

17.1.2 レンズの基本式

図 17.3 において、

$$\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$$

ですから、

$$\frac{B'B}{A'A} = \frac{B'O}{A'O} = \frac{s'}{s}$$

となり、

$$OF_1 = OF_2 = f$$

とすると、 $\triangle POF_2 \sim \triangle BB'F_2$ なので、

$$\frac{B'B}{A'A} = \frac{B'F_2}{OF_2} = \frac{s' - f}{f} = \frac{s'}{s}$$

従って、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

が得られ、これがレンズの基本式です。

物体の大きさとその像の比をレンズの倍率と定義しますが、ここで一工夫して、像の反転、非反転も判るようにしましょう¹。つまり、

$$\frac{B'B}{A'A} = \frac{-BB'}{A'A} = m = \frac{-s'}{s}$$

¹ m の符号の定義は本質的ではありません。ここで記したのと反対の定義をしても、反転、非反転を逆に読み替えるだけです。ただ、負号を「反転」とするのは一般的です。

とすると、この負号により、像が元の物体に対して反転していると定義できます。

さらに、像および焦点の位置に正負を付けて考えることにします²。値 s' 、 f に関して、

(1) 像の位置 s' が主平面に対し像側にある時は正、物体側にある時は負。

(2) 焦点の距離 f について凸レンズは正、凹レンズは負。

とします。このようにすると、レンズ公式が統一され、倍率 m の符号と値について、

(1) m が正ならば非反転像、負ならば反転像である。

(2) $|m| > 1$ ならば拡大、 $|m| < 1$ ならば縮小される。

となります。

これらを正しく管理していかないと、特に、組み合わせレンズの光路計算の誤りの元となります。

17.1.3 レンズによる倒立像

凸レンズの一番簡単な応用に虫眼鏡あるいは拡大鏡がありますが、日常目にする「2 倍の拡大鏡」とかの影響から、レンズ倍率 m を固定値であるとか、常に 1 以上であるとか誤解してはいけません。拡大鏡では像は正立ですが、ここで考えている像は倒立しているという違いもあります。拡大鏡については第 17.1.4 で議論する事とし、ここでは物体の位置と像の大きさについて考えます。

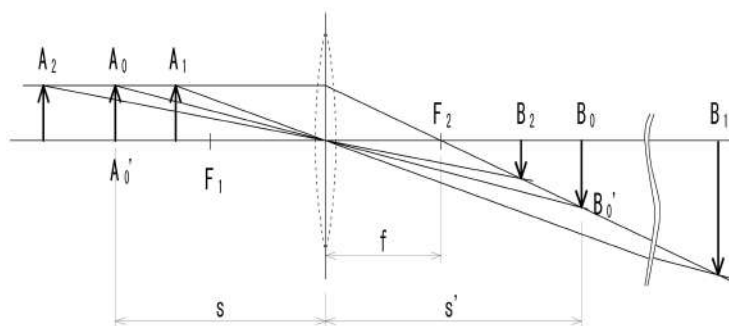


図 17.4: 物体の位置と像の関係

図 17.4 に示すように、物体が像側焦点 F_1 よりも遠方にある時のみ、反転した像を結び、 s が F_1 に近づくほど s' は大きく、かつ像 BB' も大きくなります。これは、

$$s' = \frac{fs}{s-f}$$

において $s \rightarrow f$ すれば、 $s' \rightarrow \infty$ となることから分かります。

物体が焦点位置にある時は、像は結ばず、物体までの距離が離れて行くほど、像は焦点 F_2 に近づき、大きさも小さくなります。無限遠では、 $s \rightarrow \infty$ とすると倍率 $m = s'/s \rightarrow 0$ 、つまり物体の大きさもゼロになってしまいます。

ガリレオが言う通り、物理は数学の言葉で表されているのですが、数学で言う「無限大」「無限遠」を物理解釈する時は注意が必要です。物理の「無限大」は十分大きいであり、「ゼロに近づいても」数学のゼロにはならないのです。

従って、遠方の物体は焦点 F_2 の近傍に非常に小さく投影されると考えます。しかし、遠くの物体が「非常に小さくなった」のでは「レンズとしての有用性をどう考えるのだろうか?」という疑問が沸きます。

これについては、望遠鏡や顕微鏡の項で議論します。

²符号の付け方は、本により異なるので注意。符号の理論的な意味は第 17.6.2 節を参照。

17.1.4 拡大鏡

図 17.3 において、物体 AA' が焦点 F_1 の内側に位置する時の様子を描くと図 17.5 が得られます。

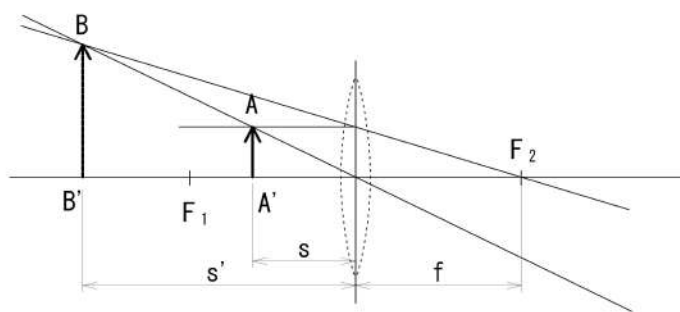


図 17.5: 物体の位置と像の関係

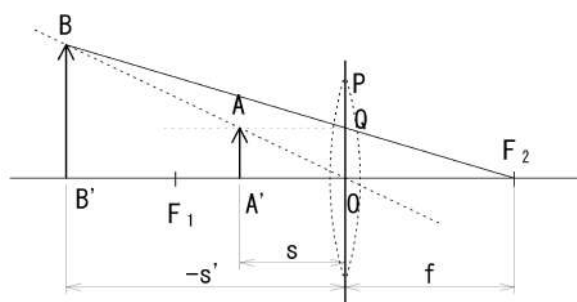


図 17.6: 拡大鏡の光路解析

図 17.6 は図 17.5 を光路解析用書き直したもので、 $AA' = QO$ ですから、 $\triangle F_2BB' \sim \triangle F_2QO$ となり、 BB' 位置（物体側）に存在する虚像³の位置を $-s'$ と表すと、

$$\frac{B'B}{A'A} = \frac{-s'}{s} = \frac{B'B}{OQ} = \frac{f + (-s')}{f}.$$

従って、これに関してもレンズ公式

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

が得られます。凸レンズなので焦点は正ですから、

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} > 0.$$

$s' < 0$ に注意して、 s' を掛けると

$$\frac{s'}{s} + 1 < 0$$

これより倍率 m は

$$m = \frac{-s'}{s} > 1$$

となり、像は常に拡大、正なので非反転像となります。

この性質を使うものが拡大鏡、虫眼鏡とかルーペ (loupe) なのです。これらの倍率を n 倍とかいう事もありますが、倍率は物体あるいは像の位置によります。そこで、通常の間人が焦点を合わせやすい距離 $s' = 250\text{mm}$ の時の拡大率を倍率と定義しています。

³実像はその位置にスクリーンを置けば観測できるのに対し、虚像はそこにスクリーンを置いても観測されません。

17.2 凹レンズ

中心が端よりも薄いのが凹レンズです。凸レンズ同様、両凹、片凹、メニスカス等ありますが、ここでは両凹レンズで代表させます。物体 AA' が焦点 F_1 の外側にある場合を考えます。

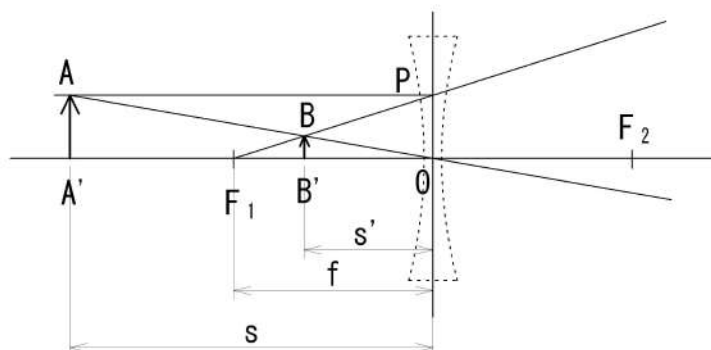


図 17.7: 凹レンズ

図 17.7 において、 $\triangle AA'O \sim \triangle BB'O$ ですが、像の位置 $B'O$ は物体側にあるので負とします。つまり、 $-s'$ と置いて、

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{B'O}{A'O} = \frac{-s'}{s}.$$

一方、 $\triangle POF_1 \sim \triangle BB'F_1$ ですが、凹レンズなので、焦点距離も負とし、

$$\frac{(-s')}{s} = \frac{(-f) - (-s')}{(-f)}$$

が得られ、結局

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

となります。倍率 m に関して、焦点距離を負と考えると、

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} < 0$$

$$1 + \frac{s'}{s} > 0, \quad \therefore s' < 0$$

$$m = \frac{-s'}{s} < 1$$

が得られます。従って、凹レンズでは、非反転像となり、像は縮小されます。また、縮小率ですが、 s を小さくすれば縮小されにくくなりますが、 $m < 1$ は変わらず、常に縮小です。

17.3 具体例

レンズの光路計算は、理論的計算だけで終わったのでは、中々実感がつかめません。特に、凸レンズと凹レンズの計算式を統一した場合、正負の違いを正確に辿らないと誤った結論に至ります。そこで、本節では具体例を示します。

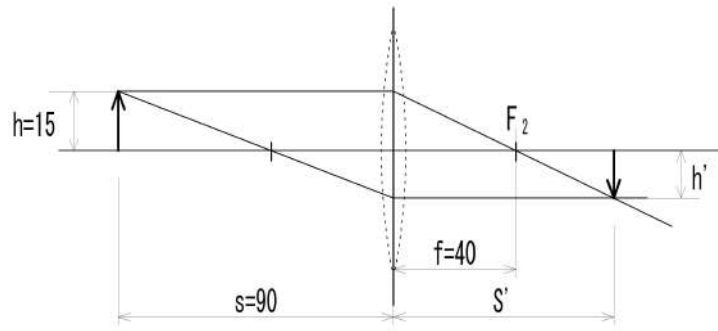


図 17.8: 凸レンズの作る像の計算-物体が焦点外の場合

17.3.1 凸レンズの具体例-物体が焦点外

焦点距離 $f = 40\text{mm}$ の凸レンズを使用し $s = 90\text{mm}$ の所に、高さ 15mm の物体がある時、その像の位置、高さ（倍率）を計算してみます。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$$

より、

$$s' = \frac{fs}{s-f} = \frac{90 \times 40}{90-40} = 50[\text{mm}]$$

倍率は、

$$m = \frac{-s'}{s} = -0.56, \quad h' = 8.4[\text{mm}]$$

$s' > 0$ より像はレンズの右側、 $|m| < 1$ より縮小、 $m < 0$ より像が反転像であることが分かります。

17.3.2 凸レンズの具体例-物体が焦点内

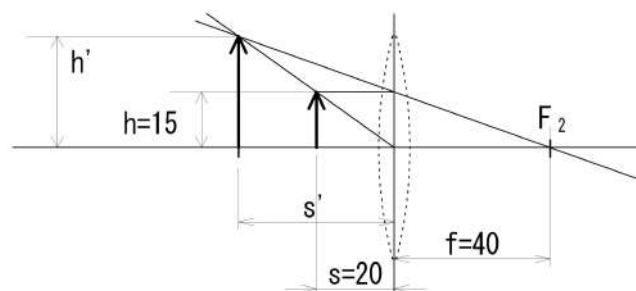


図 17.9: 凸レンズの作る像の具体例-物体が焦点内の場合

焦点距離 $f = 40\text{mm}$ の凸レンズを使用し $s = 20\text{mm}$ の所に、高さ 15mm の物体がある場合です。

$$s' = \frac{fs}{s-f} = \frac{40 \times 20}{20-40} = -40[\text{mm}]$$

倍率は、

$$m = \frac{-s'}{s} = 2, \quad h' = 30[\text{mm}]$$

$s' < 0$ より像はレンズの左側、 $|m| > 1$ より拡大、 $m > 0$ より像が非反転像であることが分かります。

17.3.3 凹レンズの具体例-物体が焦点外

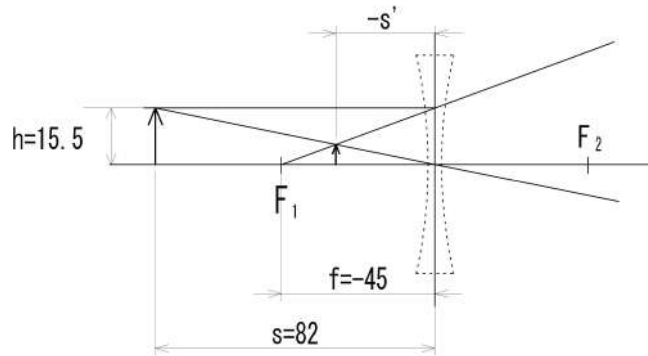


図 17.10: 凹レンズの作る像の具体例-物体が焦点外の場合

焦点距離 $f = -45\text{mm}$ の凹レンズを使用し $s = 82\text{mm}$ の所に、高さ 15.5mm の物体がある場合です。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

より

$$s' = \frac{fs}{f-s} = \frac{(-45) \times 82}{-45-82} = -29.0[\text{mm}]$$

倍率は、

$$m = \frac{-s'}{s} = 0.64, \quad h' = 9.99[\text{mm}]$$

$s' < 0$ より像はレンズの左側、 $|m| < 1$ より縮小、 $m > 0$ より非反転像であることが分かります。

17.3.4 凹レンズの具体例-物体が焦点内

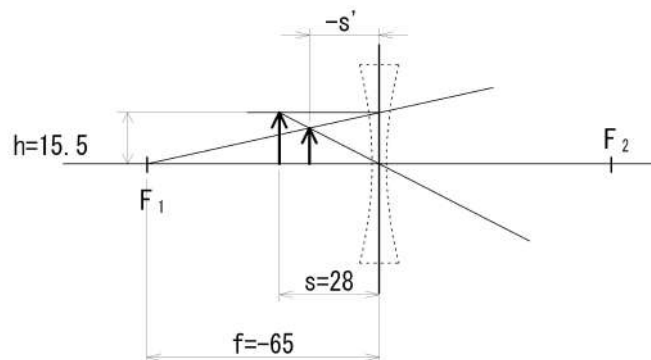


図 17.11: 凹レンズの作る像の具体例-物体が焦点内の場合

焦点距離 $f = 65\text{mm}$ の凹レンズを使用し $s = 28\text{mm}$ の所に、高さ 15.5mm の物体がある場合です。

$$s' = \frac{fs}{f-s} = \frac{(-65) \times 28}{-65-28} = -19.6[\text{mm}]$$

倍率は、

$$m = \frac{-s'}{s} = 0.70, \quad h' = 10.85[\text{mm}]$$

$s' < 0$ より像はレンズの左側、 $|m| < 1$ より縮小、 $m > 0$ より像が非反転像であり、凹レンズの場合、物体が焦点の内側に入っても縮小虚像になります。

17.3.5 組み合わせレンズの具体例

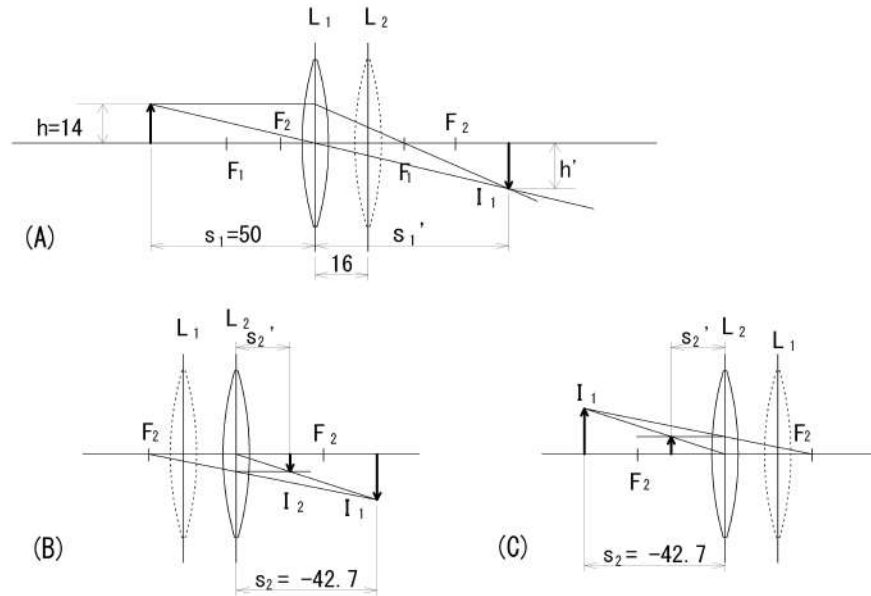


図 17.12: 組み合わせレンズの作る像

2枚の凸レンズ L_1 、 L_2 が 16mm 離れて配置される場合を考えましょう。それぞれのレンズの焦点距離は $f_1 = 27[mm]$ 、 $f_2 = 26.5[mm]$ とします。物体はレンズ群の物体側 $s_1 = 50[mm]$ にあるとします。

この組み合わせレンズが結ぶ像の位置、大きさを計算するのが目的です。

それには、最初はレンズ L_2 が無いと仮定して、物体の像を計算します。図 17.12(A) を参照しながら、

$$s_1' = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} = 58.7[mm]$$

$$m_1 = \frac{-s_1'}{s_1} = -1.17.$$

s_1' が正なので、 I_1 はレンズ L_1 の像側で主平面より 58.7[mm] 離れた所に結び、 m_1 の値より拡大反転像となります。

第1のレンズの像 I_1 は、第2のレンズ L_2 の入力像となり、今度は L_1 が無いとして考えます。

L_2 の主平面から見て、像 I_1 は $58.7 - 16 = 42.7[mm]$ の所にありますが、こちら側はレンズ L_2 の物体側ではなく像側で、 $s_2 = -42.7[mm]$ と考えねばなりません。これは I_1 を虚像とするような実像を求めることに相当します。(B) はこの状況を示したものですが、やや分かり難いので、(C) に実像が凸レンズの焦点より物体側にある場合書き直して示します。

この図より、

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = 16.35[mm]$$

が分かります。これは実像で L_2 の像側に位置し、

$$m_2 = \frac{-s'_2}{s_2} = 0.38$$

より、縮小倍率ですが入力像を反転させません。従って、総合倍率は

$$M_{total} = m_1 \times m_2 = -0.45$$

となり、 I_2 は入力像に対して、縮小かつ反転像です。

この例に示すように、組み合わせレンズもそれぞれの出力像/入力像の関係を掛け合わせて行けば計算できますが、実際にこれを幾何学的に計算するのは困難で、コンピュータを用いた光路計算を使用するのが普通です。ここでは原理的な事を示しました。

17.4 望遠鏡

最初に面白い問題を提起しておきましょう⁴。(天体)望遠鏡にガリレオ型とケプラー型があります。これらの決定的な違いはガリレオ型は正立像を、ケプラー型は倒立像が観測できる事にあります。一方、レンズの構成を見ると

ガリレオ型 凸レンズ(対物) — 凹レンズ(接眼)

ケプラー型 凸レンズ(対物) — 凸レンズ(接眼)

となっています。どちらも対物レンズに対して、観測対象は十分離れていて、凸レンズの焦点外にありますから、対物レンズの作る像は倒立です。ガリレオ型では、接眼レンズに凹レンズを使用するので、反転機能はありません。つまりガリレオ型では反転した画像が見えると思われます。一方ケプラー型では接眼(凸)レンズでもう一度反転するので、正立像が期待されます。

しかし、事実は全く逆です。どうしてこんな事が起こってしまったのでしょうか？

17.4.1 ガリレオ式望遠鏡

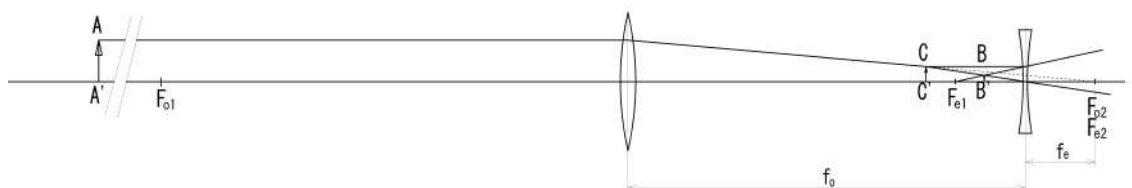


図 17.13: ガリレオ式望遠鏡のレンズ配置

ガリレオ式望遠鏡のレンズ配置を多少とも、本物に近く書いたものが図 17.13 です。「本物に近い」という意味は、

- (1) 対物レンズの焦点距離が接眼レンズの焦点距離よりも、はっきり大きい。
 - (2) 被観測物は対物レンズの焦点の外側で、十分遠方にある⁵。
 - (3) 対物レンズの像側焦点と接眼レンズの物体側焦点をほぼ一致させてある。
- の3項を満たしているからです。

⁴これにすぐに答えられる人には、本節の説明は不要でしょう。

⁵これは図でも途中を省略せざるを得ません。

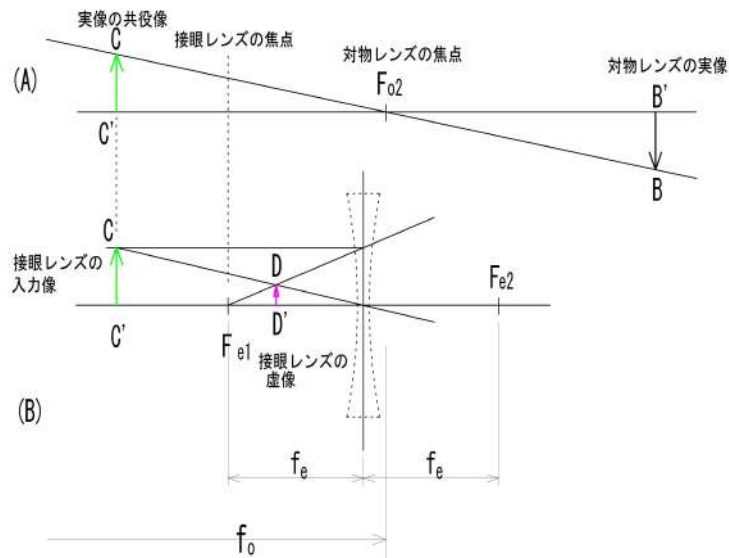


図 17.14: ガリレオ式望遠鏡の接眼レンズ付近

ガリレオ式望遠鏡の原理を理解するためには、接眼レンズ付近の光路を詳しく見る必要があります、図 17.13 の接眼レンズ付近を図 17.14 に拡大しました。

まず凹レンズの無い場合、無限遠の有限の大きさを持った物体 AA' は凸レンズの像側焦点 F_{o2} の極くわずかに右側 BB' に非常に小さな像として結ばれます (図 17.14(A)。これは倒立像です。この倒立像の焦点 F_{o2} に対して点対称の像 CC' は正立像で、対物レンズが結ぶ対象物と同じ大きさ、解像度を持ちます。

一方、図 17.14(B) は接眼レンズの光路ですが、対物レンズの共役像の位置に接眼レンズの入力像 (CC') を合わせると、虚像として (DD') が見えます。つまり、実像を結ぶ前の共役像を途中で待ち伏せて、凹レンズの実入力像として使うのです。これがガリレオ式望遠鏡が正立像を結ぶ理由です。

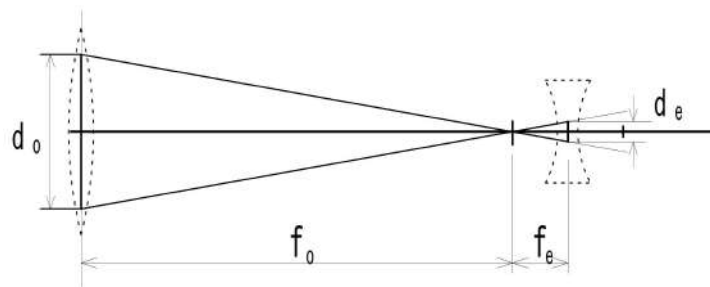


図 17.15: ガリレオ式望遠鏡の倍率

ガリレオは望遠鏡の倍率を「対物レンズと接眼レンズの焦点距離の比であろう」と考えたと言われています。対物レンズが長い焦点距離を持ち、対物レンズの（天体の）像は殆ど焦点上にあります。短い焦点距離を持つ接眼レンズの焦点をこれに合わせるように設計する⁶と図 17.15 が得られ、直径 d_o の物体は d_e と観測され、 $d_o/d_e = f_o/f_e$ となります。

この f_o/f_e を倍率とするのは現在の天体望遠鏡で普通に使われています。

一方、「非常に小さな共役像を縮小して観測して、いったい望遠鏡になるのだろうか?」という疑問

⁶接眼レンズの焦点をどこに置くかは自由度があります。

が沸きますが、これは第 17.6.5 で議論します。

17.4.2 ケプラー式望遠鏡

ケプラー式望遠鏡は、対物レンズ、接眼レンズとも凸レンズを使用、倒立像を観測する事になります。従って、像の上下は問題にならない天体観測専門です。もちろん途中にプリズムを入れて光学的に上下反転、あるいは画像を電子データに変換（カメラや画像処理）して、最終的に正立像とすれば通常の望遠鏡になり、現実はこちらが多用されています⁷。しかし、ここでは原理的なケプラー式を考えます。

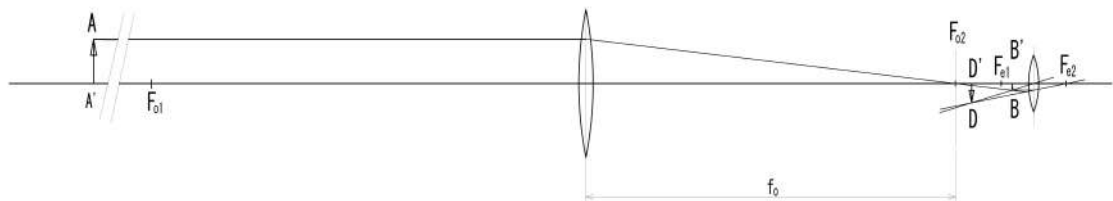


図 17.16: ケプラー式望遠鏡のレンズ配置

図 17.16 は、ケプラー式望遠鏡のレンズ配置で対物レンズの焦点距離が、接眼レンズの焦点距離よりも、はっきりと長く、かつ観測対象が十分遠くにある場合です。

これを、対物レンズ近辺を中心に拡大すると、図 17.17 のようになります。この図をもとに、接眼

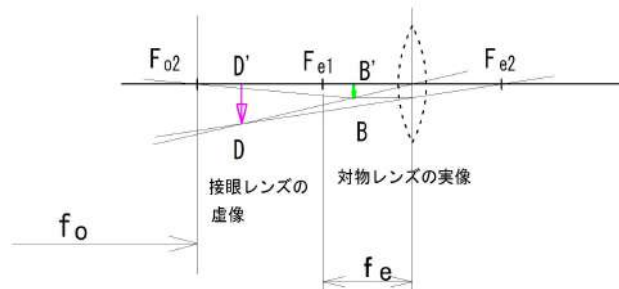


図 17.17: ケプラー式望遠鏡の接眼レンズ付近

レンズの位置を見ると次の特徴があります。

- (1) 対物レンズの実像の位置は、接眼レンズの像側焦点よりもレンズ側にある。
即ち、接眼レンズは拡大レンズとして機能。従って、最終的に倒立像が観測される。
- (2) 接眼レンズにより観測される像は対物レンズにより結ばれた実像を拡大した虚像。

これにより、ケプラー式の方が、ガリレオ式よりも拡大率を上げやすい事が直観的にわかります。また、対物レンズは遠方の物体の像を手許に引き寄せ、接眼レンズでこれを拡大すると考えると、望遠鏡としての機能も理解しやすいでしょう。対物レンズの焦点が接眼レンズの焦点の外になるように配置すれば、像が反転、正立像となる筈ですが、この場合接眼レンズは拡大鏡として動作しません。

⁷現在、ガリレオ式は殆ど使われていません。双眼鏡でもケプラー式で、対物、接眼レンズの途中にプリズムを入れて像の上下反転をします。

しかし、望遠鏡の拡大率については、ガリレオ式同様、光路追跡では理解しにくく、角度倍率で定義した方が理論的にも明確になります。(第 17.6.5 節参照)

17.5 顕微鏡

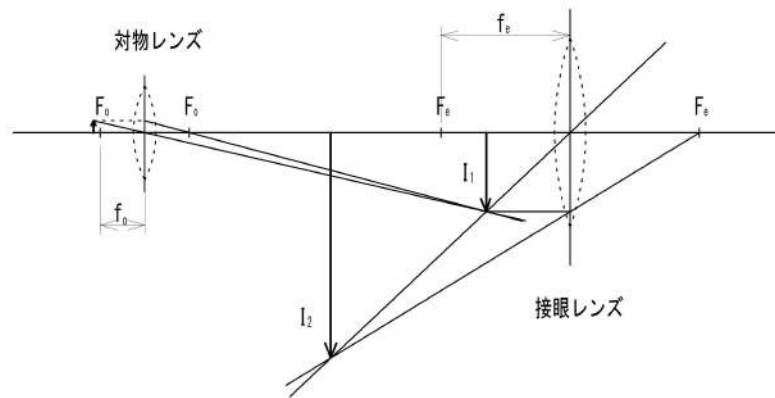


図 17.18: 顕微鏡の構造

顕微鏡の構造はケプラー式望遠鏡と同じですが、対物レンズの焦点距離 f_o が短くなっており、出来るだけ大きな拡大像 I_1 を作ります。ちょうど望遠鏡と反対で、対物レンズと物体の距離を大きくし、拡大した像を結ぶのです。この像を接眼レンズでさらに拡大するため、接眼レンズの焦点 F_e 内に I_1 が配置されるようレンズ間隔を設定します。これにより作られた虚像 I_2 を観察する訳です。図では眼の下側のみに画像が有る様に見えますが、もちろん光軸に対称となります。

顕微鏡の対物レンズは焦点を短くするため、おおよともと小さいものを観察するため、小さな直径のレンズとなります。これも望遠鏡と反対の性質です。また対物レンズの焦点距離が短いに加え、できるだけ焦点に近い方が大きな像を作りますから、対物レンズと被観察物との距離は非常に小さくなります。

17.6 近軸光線追跡

第 17.3.5 節で、簡単な組み合わせレンズの幾何的解析を記しましたが、2 個のレンズの組み合わせだけでも複雑で、間違い易くなり、それ以上の数を図面を使用して解析するのは非常に困難です。

一方、レンズの組み合わせはそれぞれのレンズの掛け算処理となりますから、一つのレンズと、光の経路を何らかの方法で数学的に表現すれば、多数の組み合わせレンズも扱える筈です。

図 17.19 は一本の光路を描いたものです。二つのレンズ 1、2 を通る場合ですが、レンズは主平面で表示しています。この両側で入射角と出射角が変化、レンズ間ではこの角度のまま直進します。レンズ 1 を出た光はレンズ 2 に達しますが、レンズ間距離は千差万別なので、決められません。ところが、レンズには固有の焦点距離 f があるので、これを使えば、レンズ 2 に到着する光の光軸に対する高さが決められます。

つまり、全体の光路は、レンズ間での光の光軸に対する高さの変化と、レンズによる角度変化とで記述できる訳です。

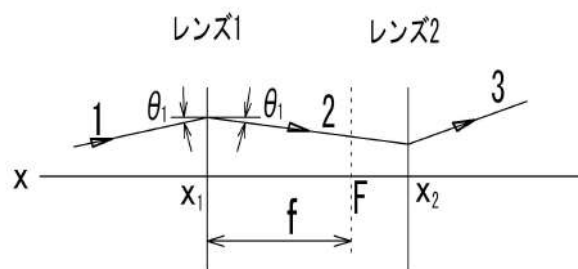


図 17.19: 近軸光線追跡

17.6.1 近軸光線経路の数式化

レンズ間の光路を数学的に表現する方法を考えます。どのようなレンズであれ、光路は主平面中にあるレンズの中を通過、主軸に対して点対称になります。そこで主軸を x 軸、主平面を $y z$ 軸に取りましょう。

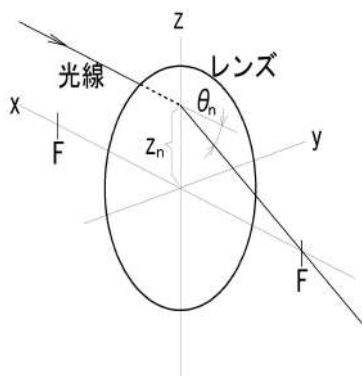


図 17.20: レンズの光路

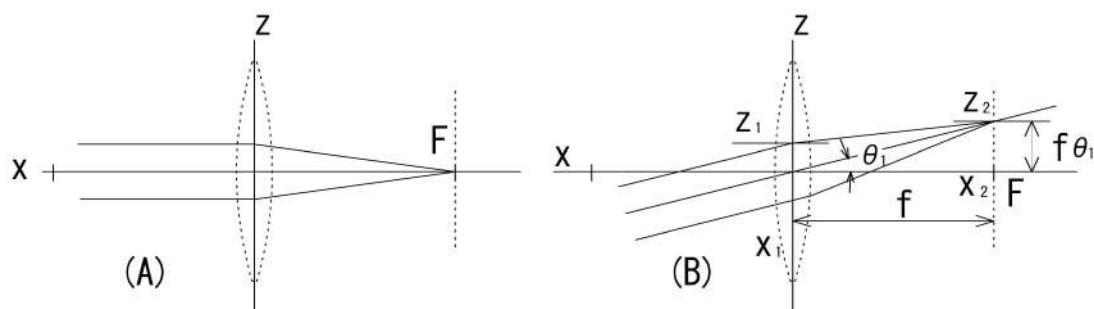


図 17.21: レンズ光路の数式化

凸レンズの光路を考えると、図 17.21(A) に示すように、光軸の中心を通るものはそのまま直進、光軸に平行なものは屈折し、焦点 F に集まります。一方、光軸に対して角度 θ_1 を持ち、光軸の中心を通る光線が焦点面の z_2 に集まるとすると、これに平行な入射光線も同様に z_2 に集まります。(図 17.21(B))

つまり、一般化された光線の経路は焦点距離 f (定数) と、レンズの主平面を通過する時の角度 θ および、通過高さ z という二つの変数により表現できます。言い換えると、光路は光軸からの距離 (高さ) と角度という 2 次元ベクトルで表せるということです。

レンズの位置 x_1 での光の進行方向が、高さ z_1 、傾き θ_1 であるとする、点 x_2 では、

$$z_2 = z_1 + z_1 \tan \theta_1 = z_1 + z_1 \theta_1 \quad \because \tan \theta = \theta.$$

これで 2 変数の内の一つ、 z の関係が得られました。もう一つの変数 θ については、さらに簡単で、一本の光線に関し、 x_1 と x_2 で変わりません。 $(\theta$ は z の関数ですが、レンズの曲率を決めれば一意的に決まります。)

レンズはこのベクトルに対する変換係数で、 2×2 行列で表せますから、一般的には、

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

となります。

ところが、 θ が x_1 、 x_2 で同じために、大幅に簡略化され、

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

で表せます。

そこで、変換係数を移行行列 (translation matrix) として定義しましょう。

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.6.2 凹レンズの場合

前 17.6 節では凸レンズの場合を例にとり、線形行列方程式が得られました。この時は凸レンズが焦点に光を集中させる点が使われており、非常に都合が良かったのですが凹レンズの場合はどうでしょうか？

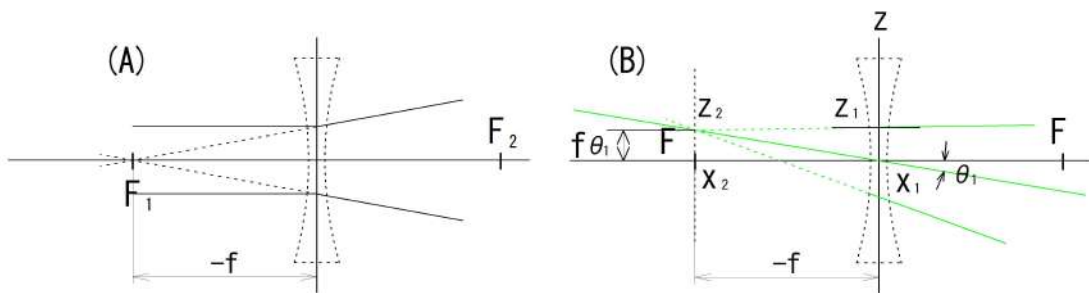


図 17.22: 凹レンズ光路の数式化

図 17.22 より、凹レンズの場合は、凸レンズの焦点位置を反転したものとなることが分かります。つまり焦点距離 f を $-f$ と読み替えれば凹レンズになります。角度についてはそのままです。また、像の位置をこの中に明示する時、やはり凸レンズの場合と反転しています。そこで物体側距離を正とするならば像の位置は負となり、これは凸レンズで、焦点内に物体が有る時の虚像との関係と同じです。

このようにして、物体、像、焦点距離に符号が定義できます。

17.6.3 レンズによる角度変化

入射光と出射高の高さは変化しないので、レンズによる角度変化は単純に

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

と表せます。

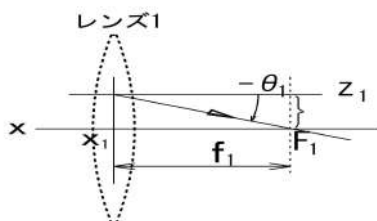


図 17.23: 光の角度変化と焦点距離

ここに、 $-P = 1/f$ ですが、凸レンズの屈折角 θ は光軸に対して時計回りに定義した方が簡便なので負号に、そして、

$$z_2 = z_1 + z_1 \tan \theta_1 = z_1 + z_1 \left(\frac{z_1}{f_1} \right),$$

より、

$$P = \tan(-\theta_1) = -\frac{z_1}{f} = -\frac{1}{f},$$

となる訳です。レンズの屈折を表す行列

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{pmatrix},$$

を屈折行列 (refraction matrix) と呼びます。

17.6.4 ガウス光学

ここまでで準備が完了しましたので、レンズと、光路による総合的光線追跡が定義できます。例えば2レンズシステムの場合、それぞれのレンズの屈折行列を

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix},$$

で書くと、間に移行行列を挟み、

$$\begin{aligned} M = R_1 T_1 R_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - d_1 P_1 & d_1 \\ -P_1 + d_1 P_1 P_2 - P_2 & 1 - d_1 P_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

が光路の変化を表現する行列となり、光路の変化は

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

で表現されます。

なお、屈折行列、移行行列ともそれぞれの行列式が 1 なので、M の行列式も 1 となります。

ここに示した近軸光線追跡により解析する光学を、ガウス光学 (Gaussian optics) とも言います。もちろん、この解析は手計算のためではなくコンピュータによる計算のための基本式を提供します。

焦点を通る光線と光軸に平行な直線だけならば、CAD を使用して、レンズの焦点距離、レンズ間距離を適当な縮尺の基で描けば、像の位置や高さなど、CAD 図面の寸法を計測する方法でも求められます⁸。しかし、多数の光線追跡は出来ず、コンピュータシミュレーションにはガウス光学に頼るしかありません。光学設計ソフトウェアである Zemax や Code V も近軸光線追跡によるソフトウェアです。

17.6.5 レンズ倍率

光路変化を表現する式、

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

において、行列の要素 a_{11} 、 a_{22} はそれぞれ、 z 、 θ に対する係数で、これは倍率を意味します。つまり、レンズ光学システムの倍率には二種類あり、横倍率 (transverse magnification)、角倍率 (angular magnification) と呼びます。

M の行列式が 1 となることより、

$$P_1 P_2 d_1 d_2 = 1,$$

が得られ、 $P_1 P_2$ は合成された角倍率、 $d_1 d_2$ は合成された横倍率ですから、横倍率と角倍率は逆数関係にあることが分かります。

天体望遠鏡の倍率という時は、通常角倍率のことです。例えば月を観測している時、月の実際の直径と観測される直径の比較が困難なのは明らかでしょう。月の直径を実際に測定する訳にはいかなからです。一方、角倍率ならば実際の月および観測される月を見込む角度の比較ですから、観測者の位置から直接可能なわけです。そしてこれは例えば月を観測すれば、視界がずっと狭まる事でも、拡大されているのが分かります。

17.7 注記

17.7.1 レンズ設計

今まで、単体や組み合わせレンズの光学的性質を解析してきました。しかし出来合いのレンズ解析に意味があるのは、非常に限られた場合で、レンズや組み合わせレンズをどういう風に作るかが本当の問題です。

このためにはレンズの材質 (屈折率)、形状 (レンズ形状とレンズ枠の形状)、異なったレンズの組み合わせ方、レンズの性能 (明るさ、解像度、収差等) およびコストなど、さまざまな要素の最適化を図らねばなりません。また同じ仕様でも、実現の仕方は無限にあり、その中からどういう物を選び出すかという統一的ルールはありません。

つまり、連立方程式を解き、解が一つに決まるというわけには行かず、設計者の経験やノウハウ、レンズ設計の常識等から設計者が「決めていく」のです。そして、ある形 (レンズの枚数と、その組み合わせ) が良さそうとなったら、コンピュータで光路解析を繰り返し、仕様を満たすまでレンズ形状や材質を変えていくのです。

⁸フリーの光学設計ソフトウェアもあり、これを使用するのが適当でしょう。

既製レンズの組み合わせで、かなりの仕様を満たすものが作れるようですが、プロフェッショナルなレンズではレンズを設計仕様に基づいて実際に製作していきます。これもレンズ設計に踏み入れない理由です。

つまり、物理的なレンズや光学装置の構造理解と、これらの設計とは次元が異なり、ここでは設計に関しては扱いません。

17.7.2 参考資料

- (1) わかりやすい高校物理の部屋
<http://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/wave/kika/totu.html>
- (2) 黒田 和男
光学 講義ノート
<http://qopt.iis.u-tokyo.ac.jp/optics/>
- (3) 山田 盛夫
望遠鏡の倍率に関する実験と考察
物理教育 第45巻 第2号 (1997)
<https://ci.nii.ac.jp/naid/110007490308>
- (4) Leno S. Pedrotti
Basic Geometrical Optics
<https://spie.org/Documents/Publications/00%20STEP%20Module%2003.pdf>
- (5) 東芝テリー
撮影レンズの基礎 2016
http://www.toshiba-teli.co.jp/products/industrial/info/t/files/t0004_Lens_Terminology-j.pdf
- (6) 望遠鏡の倍率
スカイ & テレスコープ - 1991 年 5 月号掲載
http://www.tvj.co.jp/10shop_teleview/20Navigator/cho-magn.html