Maxwellの方程式

S. Tajima

Ver 1.2 2021年1月

目 次

Foreword

1993 年頃に、人体を伝送路としてビデオ信号を送るという研究をした事があります。片手にカメラ、もう一方に液晶ＴＶを持って、画像を送る訳です。この時は、ビデオ信号を周波数変調し、それをそのまま電極を通して手に伝え、それほど綺麗ではありませんでしたが、とに角一応見られる画像が送れました。

エンジニアリング的には、これでもいいのですが、サイエンス的にはその原理がはっきりしませんでした。自分自身、電磁気学もちゃんとは理解しておらず、どういう事なのだろうと悩んだのです。

そこで、エンジニアリング的な開発とは別に、電磁気学を再勉強しました。電磁気学の中心話題は何と言っても Maxwell の方程式で、ファインマンの本 [1] などを丁寧に読むうちにそれなりの理解が進みました。しかし、どうしてもよく分から無い点があり、それは Maxwell の式そのものをどう捉えるかでした。個々の式についてはそれぞれファラデーの法則なり、アンペールの法則なりに対応するという点は分かるのですが「Maxwell の方程式が電磁気のすべてを記述している」というような議論については、「すべて」とは何か、またどうしてそんな事が言えるのかという本質的な疑問が残りました。

この疑問はファインマンの本や、いくつかの教科書でも解決できず、何年間もそのままでした。しかしある時（どういうきっかけかは忘れました）「外積代数」という数学の中に、本質的なヒントを見つけ、それがこの文書をまとめるきっけけとなりました。具体的な話は本文を読んでいただくとして、ファインマンの本（電磁気学の教科書として非常にいい本です）を読んでいるだけでは、Maxwell の方程式は恐らく分かりません。

本文書はそういう点を補うつもりでまとめました。

Jul 2017　　S. Tajima

[1] ファインマン物理学 (3)、電磁気学　岩波書店。

第I部

Maxwellの方程式

第1章　Maxwellの方程式の本質

1.1　Maxwellの方程式を理解するには

電磁気学はクーロンの法則に起源があると言っていいでしょう。クーロンは 1785 年に荷電粒子間に働く力について、質量の間に働く万有引力のような形式で表現しました。二つの荷電粒子を考えたときに、この力は突然（ゼロ時間で）働くと考えるもので、いわゆる遠隔作用論といいます。1820 年にはアンペールにより、コイルに電流を流すと磁界が発生するという法則が発見され、電気と磁気がお互いに関係を持っている事が明らかにされました。しかし、この時点では、定常電流により静磁界が発生するという説明でした。一方ファラデーは 1831 年に電磁誘導を発見しましたが、これは磁界が（時間的に）変化すると電流を発生するという内容でここで始めて、動的な作用が明らかにされました。また、ファラデーはこの電磁現象を近接作用論の立場から説明しました。これら、断片的に発見されてきた法則は、1873 年に Maxwell により整理され場の理論として発表されました。この時 Maxwell は、アンペールの法則に変位電流の項を導入して動的法則に変身させ、20 の変数による 20 の方程式として体系的に纏めました。

この様な電磁気学の歴史的発展を考慮すると、電磁気学の記述がどうしても、法則の発見順に、また静電磁界から動電磁界へと理論的発展に沿った記述になり勝ちです。しかし、電磁気の主体である Maxwell の方程式は、始めに完成形を示し、その本質を明らかにしてから細部の解説に移るという方が遥かに分かりやすいと考えます。そこで本文書では、Maxwell の方程式から始めますが、20 の方程式ではなく、Heaviside によって纏められたベクトル微分方程式表現を用います。これは現在の恐らくすべての教科書がこの記述を用いているという理由以外に、この Heaviside 表現こそ Maxwell の方程式の本質を表現しているからです。Heaviside よる表現は 1880 年後半から 1890 年にかけて纏められたと言われており Maxwell はこの表現を見ることが無かった（1879 年没）訳ですが、これをもし見ることができたなら、手をたたいて喜んだろうと想像されます。

1.2　電磁気学を支える他分野

ニュートンの法則が真理であるか否かについては、ニュートン力学の中では証明されません。ニュートンの法則が正しいという事は数々の実験がニュートン力学を否定しないという観点から信じられて来たのです。相対性理論もニュートン力学を否定するものでは無く、ニュートン力学では説明しきれない現象を説明するために作られました。電磁気学は Maxwell の方程式がその主要部分ですが、この式の中には、自分自身が正しいという証明を含んでいる訳ではありません。この点はニュートン力学と同様で、多くの実験結果に支えられて、正しいと信じられて来ています。ところが、電磁気学は他の理論分野からの強力なサポートがあります。この点はニュートン力学と大きな違いです [1]。電磁気学をサポートする第一の分野は、ニュートン力学、特に連続体中の振動を記述する部分です。具体的には波動方程式で、Maxwell の方程式が波動方程式を満たす事から、電波が存在することを導きますが、波動方程式はニュートン力学で完成されたものです。第二の分野は、外積代数およびベクトル解析という数学で、これらにより Maxwell の 4 方程式の本質が極めて明快に理解されます。第三

[1] ニュートン力学は物理を批評に耐える形で記述した最初のものですから、他の理論からのサポートは無くて当然ですね。

の分野は相対性理論で、これによる補正を入れないと電磁気学としては完全ではありません [2]。この様な他の分野からの支えを明確に意識する事が電磁気学の理解を助け、またその凄さを再認識するきっかけになると思います。従って、本文書では、いわゆる電磁気学の枠にとらわれず、必要に応じて他分野の解説も盛り込みました。

1.3 Maxwell の方程式

この節では「Maxwell の方程式の左辺は何か?」が主題です。都合上右辺を含めた概念も記しますが、まずは左辺から理解しましょう。

次の 4 式を Maxwell の方程式といい、電磁気学の基本をなす微分方程式です。

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

ここではまずこれらの方程式の由来からはじめましょう。

1.3.1 クーロンの法則

以下の方程式は荷電粒子から電気力線が放射上に発生する様子を表現すると考えられ、クーロンの法則がその起源です。クーロンは遠隔作用論的に法則を記述しましたが、これを近接作用論的に記述し直したものとも考えられ、ガウスの法則とも呼ばれています。

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1.3.2 ファラデーの法則

次はファラデーの法則といわれるもので、自転車に使われる発電機 [3] はこの原理に基づいて動作します。

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

1.3.3 アンペールの法則

もともとのアンペールの法則には、$\epsilon_0\mu_0(\partial\boldsymbol{E}/\partial t)$ の項がありません。この項は Maxwell によって付け加えられたもので、変位電流と呼ばれます。電界が変化したり、電流があると磁界が発生するというものです。

$$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

[2] この文書では、相対性理論による補正には立ち入りません。電磁現象の相対性が相対論が生まるきっかけになりましたが、電磁気学の基本の理解には相対論を含める必要が無いと考えたからです。

[3] ダイナモとも呼ばれ、永久磁石がタイアにより回転し、周辺に置かれたコイルで発電します。

1.3.4　磁荷の非存在

最後に残った以下の式は「磁荷が無い」、「磁石は常に N 極と S 極が対になって現れ、これをいくら細かく分割しても単一極とはならない」などど説明されます。また特に「何々の法則」とは呼ばれていません。

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

また、この式は見かけ上は 4 式の中でも一番簡単で、もし Maxwell の式を覚えねばならない状況 [4] では最初に覚える式でしょう。しかし、$div\boldsymbol{B} = 0$ という式は、「放射状に発生する磁力線はない」と言っているだけです。これがどうして「磁荷がない」となるのでしょうか? つまり、この式は「何々 = 0」という、いわば否定形の法則です。物理法則なのに、「何々が無い」というのはどういう事なのでしょうか? 「では、いったい何が存在するのだ?」と聞きたくなるのは当然でしょう。「何かを発見していない」という物理法則など、とんでもないと思えるものです。

1.3.5　Maxwell の 4 式が電磁界を記述し尽くすのか?

$div\boldsymbol{B} = 0$ の本質的理解が非常に難しそうとなった処で、他の 3 式についても、その意味を考えて見ましょう。

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

確かに、これらの式は「何々がある」という内容で、「こういうものが発見されてきて電磁気の法則が整備されたのだ」と納得する事も可能ですが、一方「未発見の式はもう無いのだろうか? 」という疑問が湧いてきます。つまり、Maxwell の式は通常 4 式セットとなっているがこれで必要十分なのでしょうか? このような問いかけを始めると、結局「Maxwell の方程式とは何を表現しているのか?」「Maxwell の方程式はそもそも何なのか?」という疑問に行き着いてしまうと思います。

1.4　Maxwell の方程式の本質理解のために

この節では、一旦電磁気学から離れて、極く基本的な数学的準備をします。やや哲学的な話も有りますが、数学的厳密さや数学の体系的な話ではなく、このあとの内容理解のための下準備です。

1.4.1　足し算と掛け算

そうです。足し算と掛け算の話です。しかし小学校の授業の復習ではなく、これらの演算のフィロソフィーを語るつもりです [5]。

まず足し算については同質のものの間の演算であるといえます。例えば

$$1m + 8m = 9m$$

は意味をもちますが、

$$10kg + 5m = ???$$

は無意味です。それでは

[4] 電磁気学の試験というと、「Maxwell の式を書きなさい」という愚問が容易に想像されますよね。

[5] この節は、次の節の話の効果を高めるものですので、読み飛ばしてもかまいません。

みかん 5ヶ　＋　りんご 8ヶ

はどうでしょうか? これはみかん、りんごといった個別の種類のレイヤーでは無意味で、果物というより抽象的なレイヤーで 13ヶと計算されます。

つまり、小学校で習う数字による足し算は、一番抽象化された「数」[6] というレイヤーでの演算なのです。

足し算のもう一つの特徴として、「足されるもの、足すもの個々の間のインターラクションが無い」点があります。みかんにしてみればりんごが足されようが、バナナが足されようが関係ありません。もちろん逆も同様。

次は掛け算です。

$$10kg \times 5m = 50kgm$$

は、重さ $\times$ 長さで、仕事となりますね。つまり、掛け算はもともと異質のもの同士の演算で、その結果はもとのどちらでも無いものを発生させるのです。ここでも数字を一番抽象化したレイヤーでは、単なる数値どうしの掛け算が定義できる訳です [7]。

掛け算のもう一つの特徴として「演算が施される各項の間でインターラクションが発生する」があります。例えば図 1.1 で、赤、緑、青という色と黄、マゼンタという色を掛けると、色の種類が 6 種類になるだけでなく、赤/黄、赤/マゼンタ、緑/黄、緑/マゼンタ、青/黄、青/マゼンタという個別の混合が発生します。

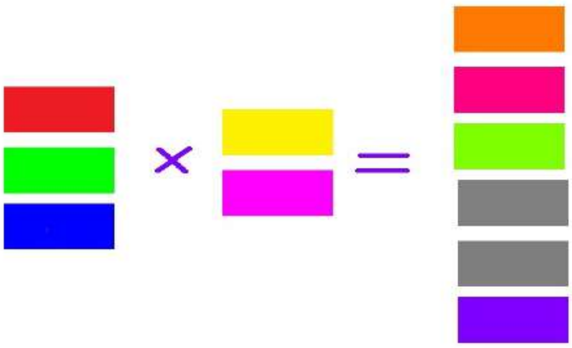

図 1.1: 掛け算と各項のインターラクション

1.4.2　ベクトルの掛け算

ベクトルの掛け算というと、「内積」と「外積」を思い出すでしょう。これらの掛け算は高校や大学初年度あたりで導入されますが、どちらも極めて唐突に「定義」されてきたと思います。二つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ があるとき、内積は

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$$

一方外積については、その絶対値は

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta$$

となり、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ に直交する方向を持つ 3 次元ベクトルです。内積は結果がスカラーとなり [8]、外積は結果がもとと同じ 3 次元ベクトルとなります。

[6] 小学校ならば分数や少数止まりでしょうか。
[7] それでは $3m \times 5m = 15m^2$ はいかがでしょうか？どちらも長さという同質のものを掛けているけれど... ？
[8] スカラーと書きますが、原語は scalar で「スケールを与えるもの (scaler)」という意味をすぐに連想するでしょう。

内積については二つのベクトルがどの程度近いか、外積については二つのベクトルがどの程度離れているかという意味を持つとも説明されますが、本当は何なのかについては、通常解説されません。

1.4.3　ほんの少しの外積代数

そこで、この節ではベクトルの掛け算を、前節のフィロソフィーに基づいて定義して見ましょう。まず二つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を考えます（何故 3 次元かはすぐに分かります）。それぞれの基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ として $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の掛け算 (そのため、基底には記号 $\otimes$ を使い、係数については通常通り、掛け算記号を省略します）をそのまま書き下してみます。

$$\boldsymbol{A} = (a_1\boldsymbol{e}_1 \;\; a_2\boldsymbol{e}_2 \;\; a_3\boldsymbol{e}_3)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1\boldsymbol{e}_1 \\ b_2\boldsymbol{e}_2 \\ b_3\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = a_1b_1(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) + a_1b_3(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3)$$

$$+a_2b_1(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3)$$

$$+a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2) + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3)$$

ここで $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 = 1$ とし、$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3$ 、$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ 、$\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$ とすると [9]

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$+(a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2)$$

$$+(a_1b_3 - a_3b_1)(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3)$$

$$+(a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3)$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$+(a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3$$

$$= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

となります。

この様な計算をしてみると、内積、外積がそれぞれ何であったかが明確になりますね。つまり、内積、外積はベクトルの本来的な掛け算の構成要素であった訳です。内積はスカラーで、外積はベクトルですから、これ以上まとめる事はできず、+記号は複素数 $a + bi$ 表示に使用するような、いわばペアを作るという意味です。

上記の様なベクトルの掛け算は数学で言うと「外積代数」という分野で出現します。そして、この中で、単位ベクトルに関して

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$$

という、一種サイクリックな関係は、1、3、7 次元ベクトル空間でしか成立しないという事が分かっています。1 次元ベクトルというのはトリビアルですから無視し、また 7 次元ベクトル空間というの

[9] 数学的にこの様な制限を加えてもいい事が分かっています。

はあまり一般的に使用されないので忘れてしまう事にすると、ベクトルの外積というのは、実質上3次元ベクトル空間でのみ成立します[10]。外積が何次元ベクトルに応用できるかという点については、教科書は普通、口をつぐんでいるようで、これも外積を分かりにくくする理由でしょう。

また、3次元ベクトルどうしの掛け算[11]の結果得られる空間は、1次元のスカラーと、3次元ベクトルの合計4次元空間に拡大されます。しかしこれを4次元ベクトル空間という訳にはいきません。スカラーの基底は数字の1で、単位ベクトルと考える訳にはいかないからです。

1.4.4 ベクトルの微分

前節で3次元ベクトルの掛け算を定義し、内積と外積のペアが出現する事がわかりました。そこで、前節の3次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ を微分演算子ベクトル

$$(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z})$$

で置き換えてみます。この演算子ベクトルと3次元ベクトル $\boldsymbol{B}$ との本来的な掛け算を考えてみると[12]

$$(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}) \otimes \boldsymbol{B}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \boldsymbol{B} + (\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}) \times \boldsymbol{B}$$

となります。演算子ベクトルと3次元ベクトルの本来的掛け算とは、ターゲットの3次元ベクトルを微分するという事です。そしてこれは演算子ベクトルとターゲットベクトルの内積および外積をつくり、これらをペアとすることです。それを数学では

$$(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = div\boldsymbol{B}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{B}$$

と呼んでいます。

つまり、$div\boldsymbol{B}$、$rot\boldsymbol{B}$ というのは3次元ベクトル $\boldsymbol{B}$ を空間的に微分したという事を言っているだけです。従って、Maxwell の方程式というのは3次元ベクトルである電界 $\boldsymbol{E}$、磁界 $\boldsymbol{B}$ をそれぞれ「微分しました」という事に過ぎません。従って、$div\boldsymbol{B} = 0$ はゼロであるから不思議なのではなくそもそも $div\boldsymbol{B}$ がどんな値をとろうとも、この存在自体が要求されるのです。

1.4.5 なぜ微分なのか

Maxwell の方程式は3次元ベクトルである電界、磁界を微分したものである事が明らかになりました。それではそもそも、なぜ微分表現なのかについて、念のため述べておきます。ここにのべた理由がすべてではありませんが、一応納得のできるものと思います。

ニュートンの法則について考えます。ニュートンの法則は力、質量、加速度の間に

$$f = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

[10] 内積についてはn次元空間で定義できます。

[11] ベクトルを扱うもう一つの数学分野に線形代数がありますが、この中では、変数ベクトルの掛け算は出現しません。つまり、一次変数としてのベクトルを扱います。一方内積や外積は初等物理の中で、有向線分にからめて出現し、ここで使ったベクトルという名称が、線形代数の方に何となく越境してしまいますが、「線形代数の中のベクトルはn次元であるが、ベクトルどうしの掛け算はしない」、「ベクトル解析では、内積と外積を定義できるベクトル空間は3次元固定で、その代わり掛け算が定義できる」という点を意識しておくといいでしょう。

[12] このために掛け算とは何かというやや哲学的な準備をした訳です。

が成立すると言っています。これを解いていくと、速度、位置に対する初期値を適宜設定していく必要があります。ここで、ニュートンの法則を最初から積分した形で表そうとすると、これらの初期値をどうするかという問題にぶつかります。速度もそうですが、たとえば位置に関して考えると、この基準点をどうとりましょうか? イギリスの $Woolsthorpe-by-Colsterworth$ を基準にしますか[13]? しかし、ニュートンの法則は地球規模で成立する（筈）なので、地球の中心が基準の方がいいかも? いやいや太陽系でも成立するだろうから太陽を基準にしよう? とんでもない、宇宙全体で成立する（と期待したい）から、宇宙の中心にすべきだ。しかし、だれも宇宙の中心がどこか知らず、結局、基準を決める事ができないのです。

そこでニュートンは言いました。「僕にまかせてよ。基準を決めなくてもいい方法を考えたのだから。」そしてこれが微分表現に他なりません。つまり、あらゆる空間で成立すると考える物理では、微分して空間の基準点を内蔵させない表現が必要なのです。この事は時間にも当てはまります。結局、時空を超えた物理表現は空間、時間の基準を微分する事で消滅させているのです。このパラダイムの変化にニュートンの大天才ぶりが現れていると思います。

1.4.6 Maxwell 方程式の進化

Maxwell が 1873 年に発表した時には、20 の変数による 20 の方程式、かつ、現在では不要とされる方程式を含んでいたそうです。この 20 の方程式を現在のベクトル微分方程式に纏めたのは Heaviside で 1890 年頃です。この Heaviside 表現により、Maxwell の式がベクトル微分方程式である事が明解になったのですが、Maxwell の式のベクトル微分方程式表現と電界、磁界が 3 次元ベクトルであるとの認識はどちらが先かよく分かりません。ちょうど鶏と卵の様な関係で、電界、磁界が 3 次元ベクトルだから（その微分としての）Maxwell 方程式があのように簡潔、明快に表現され、逆にベクトル微分方程式で表せるから、電界、磁界は 3 次元ベクトルだと認識されるという状況です。こんな事も、ちょっと考えておくと、Maxwell の式の理解に役立ちます。

いままで、Maxwell の 4 式という表現を度々使いましたが、上記内容が理解できると、本来は電界、磁界に関する 2 式というべきかもしれません。

$$div\boldsymbol{E} + rot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$div\boldsymbol{B} + rot\boldsymbol{B} = 0 + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

左辺と右辺でスカラー、3 次元ベクトルがそれぞれ対応するので、全く問題ありません。ただし、見通しはあまりよくなく、特に磁界の右辺の 0 を省略してしまうと宜しくないですね。

また、Maxwell の式の表現形式として、電界として、$\boldsymbol{E}$、と $\boldsymbol{D}(=\epsilon_0\boldsymbol{E})$、磁界として $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}(=\boldsymbol{B}/\mu_0)$ のように $\boldsymbol{D}$ や $\boldsymbol{H}$ も使用した、次の様な記法もありますが、3 次元ベクトルの微分という本質を表現せず、不適当だと考えます[14]。

$$div\boldsymbol{D} = \rho$$
$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$div\boldsymbol{B} = 0$$
$$rot\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

[13] ニュートンの生誕地です。
[14] $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ を使用しての表現では、前者が電界であるのに、後者は磁束密度であるという不満はあります。

第2章　ベクトル解析

2.1　ベクトル解析の守備範囲

ベクトル解析と言うと、対象となるベクトルは一般的なn次元のような印象を与えます。しかし、既に述べた様に rot を使用する以上、実質3次元ベクトル空間専用の微積分です。さらに3次元ベクトルを微分すると、もとの基底をもつ3次元ベクトルの他に、スカラー1次元が出現します。つまり、単純に次元だけを数えれば、微分することで4次元空間となる訳です[1]。しかし、これを4次元ベクトル空間とは考えず、相変わらす3次元ベクトル空間とスカラー空間と考えます。このようにしておかないと、更なる微分が出来なくなってしまい、3次元ベクトルの2階微分が定義できないのです。Maxwellの方程式では、時間変化の様子を記述しますから、さらに時間（これもスカラー）という次元が必要で、合計5次元空間で表現されていると言えます。しかし、この場合も3次元ベクトルとスカラー2ヶという表現をせざるを得ません。

また、スカラーの空間微分が、ベクトル（$grad$）になる事から、これも守備範囲に入ります。たとえば、風呂の湯を沸かしたとき、よくかき混ぜてないと、場所による湯の温度がことなりますが、この時、温度という物理量は3次元空間中にスカラーとして定義され、温度に対する空間微分が定義でき、これは3次元ベクトルになります。さらに、この湯の温度はたとえ、同じ場所であっても、時間と供に変化していくはずで、これは空間中に定義された量に対して、時間微分も定義できることを意味します。

一方、微分の階数は以下の様な状況で決まると考えられます。物理学の基本的命題は、ある物理量が、いつ、どこに存在するかです。つまり、物理量は、基本的に時間と空間の関数となります。そして我々が空間を決めるには（ニュートンの式より）加速度を2階積分すればよく、時間に関して原則2階の積分しか必要としません。同様に、空間に関しても「傾き」とさらに「傾きの変化の割合」という2階分微分まで考えれば、実用に十分で、これが物理では、時間空間とも2階微分止まりの理由でしょう。

ベクトル解析では、これらが入り混じっているためかなり混沌としたイメージがあり、初等数学の提供する（3次元）ベクトルの微分と多変数の微分（偏微分）を不器用に使いつつ何とかしのいでいるという状況です。このため、中々ハードルの高い数学ですが、これだけを数学的に理解しようとせず、場の理論（そして、この最高の例は電磁気学）と同時に考えるのが薦められます。他方で、div、rot は微分の必然の結果である点に留意し、物理的イメージはあまり深追いしない方がいいでしょう。

2.2　偏微分：多変数関数の微分

微分という演算の変数は、最初は一つでした。ニュートンの運動方程式が微分の誕生であると考えてもいいと思いますが、この時の変数は時間 t 一つです。これは、ニュートンの法則が遠隔作用論に基づいていて、時間以外の変数 (=空間変数）方向への微分は必要としなかった事に由来します。

一方、数学としての微分の発展を見ると、多変数に関しては二方向に進化しました。一つは、いわ

[1] 一般相対性理論では、空間と時間を同等に扱い4次元ベクトルと考えます。従って、ベクトル解析は使えず、アインシュタインはこのためテンソル解析を勉強したそうです。

ゆる合成関数の微分と言われ、

$$y = f(x), x = \phi(t)$$

ならば

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

となるもので、これは変数の数は一度の微分当たり、相変わらず一つで $x \to t$ の様に変数が関数を通して数珠つなぎになります。つまり多変数ではあるものの、それらの変数は独立ではありません。

もう一方は、一つの関数がお互い独立の多変数で表現される場合の微分で、これが偏微分です [2]。多変数関数の微分を一般的に考えようとすると、1 階の微分に関して、ある特定の変数の方向のみを考えるのが簡単です [3]。例えば変数 x, y の関数 $f(x, y)$ について

$$f(x,y) \text{ を } x \text{ 方向に微分} \quad = f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f(x,y) \text{ を } y \text{ 方向に微分} \quad = f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

を考えるのが適当です。2 階以降の微分に対しては、複雑化して、$f_{x_x}, f_{x_y}, f_{y_x}, f_{y_y}$ の方向の微分を計算せねばなりません。いずれにしても、1 階当たりの微分はある一つの特定変数の変化のみを計算するのです。

偏微分のフィロソフィーは、これら独立多変数関数の微分とし各変数毎に微分し、その結果を加えるというものです。これは各変数は多変数関数を構成する並立要素なので [4]、微分も各変数独立に行い、微分する事で変数間のインターラクションは発生しない（筈）と考えます。

ニュートンの法則に基づく物体の位置を考えるとき、これは $x(t), y(t), z(t)$ で表現され、時間 t によってその位置が決まることを表します。一方、場の理論では、場自体は動きませんが、その中のある場所と時間を指定すると、一つの値（時にはスカラーであり、時にはベクトル）が決まります。従って、この場合その値は $f(x, y, z, t)$ として定義されます。

2.3 Maxwell 方程式の微分

Maxwell 方程式は多変数関数（3 次元ベクトル、2ヶのスカラー）ですから、この微分を計算するには、偏微分しか使える道具がありません。また、その微分の一つが 3 次元ベクトルの偏微分となりますので、話がややこしくなりますが、まとめると、

- 3 次元ベクトルに対する空間偏微分 $\to$ rot（3 次元ベクトル）、div（スカラー）
- 3 次元ベクトルに対する時間偏微分 $\to$ 3 次元ベクトル
- スカラーに対する空間偏微分 $\to$ $grad$（3 次元ベクトル）
- スカラーに対する時間微分 $\to$ スカラー

となります。従って、Maxwell の式の解析では、どんな変数に対してどんな微分をしているかを意識すると分かり易いです。

[2] 高木貞治：解析概論には「偏微分商の定義は全く機械的で、計算上の手段であるにすぎないが、それらを適当に利用すれば応用上有効である」とあります。

[3] 2 変数 x、y の関数に関して、x、y の中間方向の傾きというのも考えることは出来そうですが、この方向（$0 - 360$ 度が可能の筈）を決めねばならない事だけを考えてもどうなってしまうのでしょうか？

[4] 第 1 章 1.4 節の足し算のフィロソフィーです。

2.4 スカラー関数の空間微分

微分の対象となる変数は空間変数すなわち x, y, z です。この 3 次元空間中にある量 T が存在すると仮定します。T の空間中での値の変化について考えます。ある点 p から p' の間での T の値変化 ΔT はその x, y, z 座標がどのような順序で変化するかには関係なく、単に x, y, z が $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ だけ変化する時の、それぞれの方向での T の微小変化量として表されます。このため微分として、それぞれの変数について別々に微分し、位置変化 Δ を掛けて、それらを加え合わせるという比較的単純な方式が使えます。

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \Delta z$$

ここで、ベクトルの内積を思いだし、その逆をたどると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \Delta z \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります。するとやや形式的ですが、$(\partial T/\partial x \ \partial T/\partial y \ \partial T/\partial z)$ は T の傾き（gradient）であり、変数 $(\Delta x \ \Delta y \ \Delta z)^\dagger$ に対する比例係数となります [5]。これは傾きを示すベクトルであり、これを $\boldsymbol{\nabla} T$ あるいは $grad\, T$ と書きます。

$$\boldsymbol{\nabla} T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

結局 T の微小変化は

$$\begin{aligned} \Delta T &= \boldsymbol{\nabla} T \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\ &= grad\, T \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、３次元空間中のスカラー関数 T の空間微分が定義できました。この計算で、スカラー関数 T が分かっている時、ある方向を示す微小量のベクトル $(\Delta x \ \Delta y \ \Delta z)^\dagger$ 方向での変化量（スカラー）が求められるというのです [6]。

2.5 オペレータ $\boldsymbol{\nabla}$

$y = ax$ という関数に対して、$dy/dx = a$ ですが、これから y についての微分操作 d/dx を抜き出し、便利に使える道具としてしまいました。これを微分演算子とかオペレータとかいいますが、これと同じことをここでも実行します。$(\partial T/\partial x \ \partial T/\partial y \ \partial T/\partial z)^\dagger$ は、ある点における傾きベクトルで、極めて具体的な意味を持ちますが、これから同様にオペレータ

$$\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z})$$

を抽象化します。これは、空間微分演算子とも言うべきものですが、これ自身ベクトルの形をしているので、作用する対象として、単なる数値とベクトル（ただし 3 次元）があり得ます。しかも作用する対象がベクトルの時には、内積と外積があります。この点が、d/dx というオペレータとの大きな違いです。

[5] † を縦ベクトル表記に使いました。
[6] スカラーの（偏）微分が 3 次元ベクトルになる！という点が重要でしょう。

2.6　オペレータの応用

オペレータが定義できたところで、これの応用です。3 次元ベクトル変数に作用させる場合を考えると内積と外積があります。まず内積ですが、ベクトル関数 $\mathrm{h} = (h_x \ h_y \ h_z)$ と $\boldsymbol{\nabla}$ との内積をつくると

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot h = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

が得られ、これはスカラーです。これが発散あるいは divergence と呼ばれる量で、その実態は以前、簡単に触れた、空間のある点からの湧き出し（吸い込み）です。

次はベクトル変数 $\mathrm{h} = (h_x \ h_y \ h_z)^{\dagger}$ との外積です。$\boldsymbol{\nabla} \times h$ となりますが、この結果はベクトルとなり、ちょっと面倒になります。成分を書くと

x 成分

$$(\boldsymbol{\nabla} \times h)_x = \boldsymbol{\nabla}_y h_{\mathrm{z}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{z}} \mathrm{h}_{\mathrm{y}} = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}$$

y 成分

$$(\boldsymbol{\nabla} \times h)_y = \boldsymbol{\nabla}_z \mathrm{h}_x - \boldsymbol{\nabla}_x \mathrm{h}_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}$$

z 成分

$$(\boldsymbol{\nabla} \times h)_z = \boldsymbol{\nabla}_x \mathrm{h}_y - \boldsymbol{\nabla}_y \mathrm{h}_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}$$

のようになります。これを回転あるいは *rotation*（あるいは *curl*）とよび、これが同心円状の回転の正体です。

2.7　ベクトルの二階微分

ベクトルの二階微分で意味をもつものについてのみ、その結果を記しておきます。次の関係はつねに成立します。（純数学的に導かれます。）

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} T) = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times h) = 0$$

また、次の二つの定理が成立します。

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$　ならば、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ となる ϕ が存在する。

（$rot\boldsymbol{A} = 0$　ならば、$\boldsymbol{A} = grad\ \phi$ となる ϕ が存在する [7]。）

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ならば、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}$ となる $\boldsymbol{C}$ が存在する

（$div\boldsymbol{B} = 0$　ならば、$\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{C}$ となる $\boldsymbol{C}$ が存在する。）

この ϕ をスカラーポテンシャル、$\boldsymbol{C}$ をベクトルポテンシャルといいます。

最後に $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} T) = \partial^2 T/\partial x^2 + \ \partial^2 T/\partial y^2 + \ \partial^2 T/\partial z^2$ よりこれはスカラーとなり、これから

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

が抽象化できます。これをラプラシアンと呼んでいます。このラプラシアンは次の波動方程式の形で頻繁に出現し、後にこの方程式が Maxwell の式から波動（振動）を導くときの証拠を提示してくれます。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2}$$

[7] この議論は実は正確さを欠いているようですが、我々の考える範囲ではこれでいいでしょう。黒川　兼行　「教科書の不完全な議論」　電子情報通信学会誌　Vol.83 No1 pp.38-41 2000 年 1 月

以上で、ベクトル解析の解説は終了ですが、div, rot の持つ物理的意味にはあまり踏み込みませんでした。これは第1章で示した数学的な意味との対応で考えた方が分かりやすいからです。

ところで $div, rot, grad$ の記法ですが、このように書くと、どれが内積なのか、外積なのか分かりにくく、一方 $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ 、$\boldsymbol{\nabla}\times$ と書くと、今度はどちらが発散でどちらが回転なのかという物理的意味との対応が分かりにくくなります。そこで、この文書では、その時、分かりやすいと思われる表記を適宜使います[8]。

また、内積、外積をいつも意識しておくと、それに等号で結ばれるのがスカラーか（3次元）ベクトルかが容易に判定でき、Maxwell の式を覚えるというより、いつでも再構築できるようになるでしょう。

[8]ベクトル解析を仕事として使っているような人には、どちらでも不都合は無いのでしょうが、この文書はこういう人を対象としていません。

第 3 章　電磁気学の発展

第 1 章で、Maxwell の方程式が 3 次元ベクトルである電界、磁界に対するベクトル微分方程式である事を示しました。本章では、電磁気学の理論の発展、特に「遠隔作用論」から「近接作用論」への進化について解説します。

3.1　質量間の力と電気力

電磁気学は電気および磁気の力を扱う物理学です [1]。物理学の主要な話題は力についての定式化、解釈ですが、現在この力には、引力、電気力、弱い力、強い力 の 4 つの力があることが分かっています。もちろんその内一番早く研究され、物理学として確立したのは、質量間に働く引力で、これはニュートンにより完成されました。引力の次にその内容が確立したのが、電気および磁気による力です。引力は地球上が物体に作用する重力として認識され、私たち人間にとっても、感覚的にわかりやすいものです。一方、電気力は力として認識されることは殆どなく、現在の生活の中でも、プラスチックの下敷きをこすって、髪の毛を吸い寄せる程度で、日常的に体験する力ではありません。

磁気力の方は、昔から磁石として自然界にもまれに存在し、一応生活空間のなかにもありましたが、やはり最近までなじみのないものでした。このように、生活になじみのない力を明確に認識し、それを理解、応用していくというために、力学に比べても、多くの時間と先人の知恵を要求しました。さらに、この先人の知恵が明確にした、電磁気学に対する考え方はニュートンの力学とは全く異なったものでした。ニュートン力学に比べより抽象度が高く、従って高度な数学が要求され、異なった考え方が必要である点も、電磁気学の敷居を高めてしまっています。

3.2　電気力の発見ー始めは万有引力風の定式化

ニュートン力学では、二つの質量 m_1, m_2 をもった物体間には力が働きその大きさ f は

$$f = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

で与えられます。ここに G, r はそれぞれ重力加速度、質量間の距離です。

さて、電気力についてはクーロンが発見した、次の法則があります。

$$f = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ここで、 k, q_1, q_2 はそれぞれ比例係数、二つの電荷の電気量です。この方程式は、ニュートンの引力の法則と全く同じ形式をしており、クーロンが電気力に働く力を引力と同じ方式で説明しようとしていたことが分かります。しかし、万有引力と大きく異なる点として、反発力がありました [2] 。

一方、磁気による力と電荷の関連性がファラデーにより明らかにされるようになると、その力の働く向きを考えただけでも、万有引力のような単純なアプローチではうまく行かないことがわかりま

[1] と言いいつつも、Maxwell の方程式は力を含んでいません。力を発生する電界および磁界がどう決まるかという議論が中心です。力に関しては第 3.5 節で解説します。

[2] 現在から見ると、この他に力が 10^{36} も強いという事あると思います。しかし、これは 2 ケの陽子の電気的反発力と、質量による引力が比較できるようになってからの話です。

す。実際、電磁気学が確立する歴史というのは、クーロンによるこの引力と同じような考え方では説明しきれず、全く別の考え方を構築してきた歴史なのです。

3.3 遠隔作用論と近接作用論

現在の私たちは、電波や光が同じもので、有限のスピードを持ち、これよりも早く伝達する物理現象はないことを知っています。引力と同じような考え方をするクーロンの方式では、電荷が存在すれば、力はその間に突然発生し、電荷と電荷の間が 1 光年離れていても、時間ゼロで働くことになります。ニュートン引力はこの様に考えられていて、この理論の枠内では、もし 1 光年先に星が突然出現したとすると、時間ゼロで地球上から引力として観測されることになります。これは光より早く情報を伝達することが出来ることを意味し現在の物理学からみるとおかしなことになります。ここでは、引力の持つこの問題に関しては立ち入りませんが、この引力やクーロン力の様に、距離に関係なく、力がゼロ時間で発生するという考え方を「遠隔作用論」といいます。

結局、クーロン流では、電気力の働き方を説明できず、別の考え方が採用されました。この考えでは、電気力は空間をじわじわと（といっても光の速度で）伝わっていくもので、空間自体にそのような機能が備わっていると考えるものです。突如として、遠方に力が伝わるのではなく、発生源の隣に伝わり、それがさらにその隣に伝わるという考えに従うため、この考えを「近接作用論」といいます。

クーロンの式を近接作用論的に書き直すとつぎのようになります [3]。

$$\boldsymbol{f} = q_1\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}\frac{q_2}{r^2}$$

最初の式は電荷 q_1 に作用する力は電界 $\boldsymbol{E}$ から受けるものであると表明しています。一方、その電界 $\boldsymbol{E}$ はもうひとつの電荷 q_2 により発生したものです。形式的には、クーロンの式を

(1) 電界が電荷に及ぼす力

(2) 電界を発生するもとからの距離と、電界の強さ

という二つに式に分割しただけですが、間に電界という空間の性質を導入したことにより、「突然力が発生する」という考えから、電荷が場を作り出し、その場により別の電荷に力が働くという考えに変化しました。

この時点では、電荷が二つで、一方が場を生成し、他方はその場から力を受けるという解釈で、電界が電荷から独立して存在するまでには至っていません。またこの電界の形も電荷 q_2 からの距離できまる、ある特定の形をしています。しかし、電荷が空間中に多数、適当にある状況を考えると、電界の形が一つの形に決まってしまう筈はありません。

そこで、とにかく電荷 q には電界 $\boldsymbol{E}$ から力が働いて、

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E}$$

となると考えましょう。力の働き方は電界 $\boldsymbol{E}$ の形によるわけですし、また q は単に比例係数と考えられますので、今後は電界 $\boldsymbol{E}$ を調べるのが主たる話題となるわけです。

数式変化としては、ベクトル $\boldsymbol{E}$ が導入されただけに見えますが、$\boldsymbol{E}$ があるという事は、物理を空間ベースで記述するという意味ですから、フィロソフィーとしては（そしてそれを扱う数学としても）非常におおきな飛躍がここに見られます。

電界 $\boldsymbol{E}$ が存在する空間とは私たちが住む 3 次元空間です。空間のもつ機能を定式化することの困難さは、この空間の位置の表現に 3ヶの変数（通常は x, y, z）が必要であること、時間的な変化を取り入れねばならないこと、それらを含んだ関数を想像しなければならないことを考えただけでも十

[3] $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{k}$ をベクトル表示にしました。

分理解できます[4]。しかし、空間をどう表現するかについては、ニュートン力学の発展で十分下地ができているのです。

例えば、ボールを水平に投げるときの軌跡を考えましょう。ボールが地球に対して、引力方向と直角方向運動する時、引力がどう軌道に影響するかを計算しようという訳です。この時、地球の大きさも重さも、ボールに対して極端に大きく、重いので地球は平らで静止していて、動くのはボールであると見なせます。つまり地球が作る引力空間（つまり重力場）の中をボールが運動するという考えができます。そしてボールには、その位置による力が働き、あたかも空間が力をボールに与えるように見えるのです。

このようにして、ニュートン力学でも「場」の概念が出現するのです。

3.4 電磁気学での空間表現

電磁気学では、観測対象がどこにいるかにより、どう力が働き、どう運動するかが決まるという考えです。つまり自分の動きや振るまいは環境によって決定されるという態度です。そして、この「自分」とは荷電粒子そのものなので、自分の性質は単なる数値として抽象化し、環境がどうなっているか、どう理解するかを調べるのが主関心事です。ニュートン力学でも、「場」というものが考えられましたが、電磁気学では空間を最初から「場」と捉え、それを問題のターゲットとするのです。

そのため、空間を常に意識する必要があります。また、空間の様子が時間とともにダイナミックに変化しても取り扱えるようにするため、x, y, z, t の 4 つの次元をもった環境変数が必要です。（実用的に扱いやすくするため、これらの変数の一部を定数にしてしまうことは、もちろん頻繁に行われます。）

この環境を表現するのにどんな要件を持たせたらいいでしょうか? この要件探索が、電磁気の発達過程そのものです。

空間を考えるヒントの一つはクーロンの法則およびそれに関わる実験にあります。検電器というのをご存知でしょうか? アルミ箔を折りたたみ、折りたたんだ部分を針金にはさみ、ガラスびんのなかに入れたもので、針金の先は電極としてびん外に出ています（図 3.1 ）。この電極にこすったプラスチックの下敷き等を近づけると、箔がひらき、静電気の存在を検知します。このアルミ箔を、細い、何本ものビニールの荷紐に置き換え、同じ実験を行うと、ひもの結び目を中心として、放射状に広がることが観測されます（図 3.2 ）。ひもの結び目部分の針金には、電極部分と逆極性の電荷が集中し、そこを中心として、透明な線が発生しているように見えます。このような実験から、電荷のまわりには何物かが存在し、そしてそれらか放射状の線が発生しているように見えます。

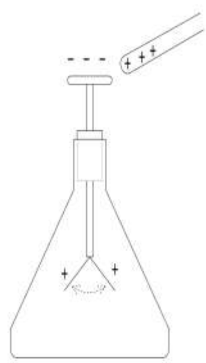

図 3.1: 検電器

[4] 実はさらに、ベクトル空間の微分とその結果など、難しさは第 2 章で示した通りです。

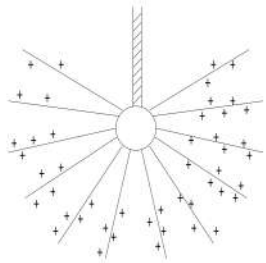

図 3.2: ビニール紐の広がり

つまり、電荷から放射状に発生する量 (湧き出し) で、電気力を表現するに至りました。これを電気力線といいますが、あくまでモデルで、イメージを喚起するものと考えておきましょう。湧き出しに対し、符号が逆の時には、吸い込みと定義します。正と負の電荷がある距離離れている時の電界の状況は図 3.3 のようになります。この電気力線には正電荷から負電荷に向かう矢印をつけておいて、正電荷はこの向きに沿った力を受けると約束します。電気力線の密度が電界の強さを表現し、同じ電荷なら密度が高いところほど強い力が働きます。電気力線は正電荷から負電荷に向かうとしましたが、単一電荷のときの電気力線は無限遠に向かっていくと考えます。電荷については正または負のものが単独で存在しますから、この単一電荷に対する約束は単極電荷に対する規約ともなり、必要なものです。電界がこのようにイメージできると、電界を発生させている元となっている電荷を気にする必要がなくなり、電界だけを考えればいいことが分かります。このようにして、電界がその発生源からも独立し、近接作用論として扱うためのプラットフォームができました。つまり、電界の発生源のことは忘れて、電界の形だけを議論していくのです。

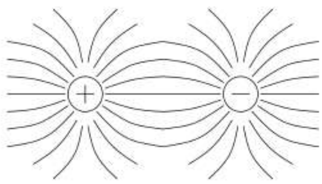

図 3.3: 荷電粒子の間の電界

紙の上に砂鉄をまいて、この下から磁石を当てると、砂鉄が模様を描きます。例えば棒磁石ならば、N,S 極間を結びつける、つぶれた円状の閉曲線が見えます。これからも磁界を表現するのに、何か線状のものが分かり易いと考えられ、電気力線と同じように磁力線が考案されています。

一方、ファラデーによる、導線に流れる電流によって、磁力が発生し、磁針の向きが変化するという実験があります。磁針と導線の位置関係で針の振れる向き得が変化します（図 3.4 ）が、これをたどっていくと同心円状の線が推定されます。電流を切ってしまえば、この力も消滅し、電流を流すことがこの同心円を発生させると考えられます。このような事実が、放射状に湧き出すに量に対する、もう一つの空間の状況表現として、同心円状の表現を生みだしました。この同心円には、回転する向きの違いが存在します。

これらの事実が磁気と電気との関係を結びつける端緒となりました。そして電気力線と磁力線はお互いに直交し、一種補完関係にあることが分かってきました。また磁石はいくら分割しても N,S 極が現れ、電荷の場合のように単極の磁石は存在しないことも分かりました。

このような湧き出し（吸い込み）と、同心円という概念が、数学的には 3 次元ベクトル空間の微分により得られる div、rot に対応している事は既にお話しました。湧き出しと同心円という対（つい）になるような考えで、電磁気が記述できそうな気分はしますが、これで電磁気が完全に記述でき

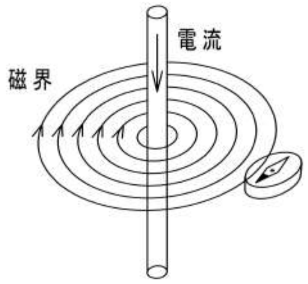

図 3.4: 電流と発生する磁界

る点については div、rot の物理的意味を考えている限り理解できません。この完全な理解には第 1 章で述べたように、3 次元ベクトルの微分から考えるべきで、物理的意味の追求は程ほどにしておくのが良いでしょう。

3.5 荷電粒子に働く電磁界の力

Maxwell の方程式を理解するには、直接は関係しないのですが、電磁界中を荷電粒子が運動した時に受ける力 $\boldsymbol{f}$ は、電荷 q、電界 $\boldsymbol{E}$、速度 $\boldsymbol{v}$、磁界 $\boldsymbol{B}$ とすると

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

で与えられます。これは電荷は電界だけでなく、磁界からも力を受けることを表現しています。ただし、磁界から力を受けるのは荷電粒子が運動している時だけです。この式により表された力をローレンツ力（1867 発表）といいます [5]。ローレンツ力は実際の荷電粒子に働く力ですが、これの定式化が Maxwell の式の完成後ということから見ても、Maxwell の方程式では電磁界の状況研究が主であることを示しています。歴史的な順序からも、もちろんローレンツ力の式は Maxwell の式の外にありますが、「場」から発生する具体的な力を明らかにする式です。ニュートンは力をその法則の中心にすえ、位置の二階微分をとることで、位置を法則の中から追放したのに対し、Maxwell は「場所の様子」を法則の中心とし、力を法則に含めなかったのです。

[5] $Lorentz, Hendrik Antoon$ (1853-1928) ；後に出現するローレンツゲージを与えた人とは別人。

第4章　Maxwellの方程式

4.1　電磁界の表現

電界と磁界の間の関係を記述する Maxwell の方程式は Maxwell により完成され Herz や Heaviside によって今のベクトル記法でまとめられました。ここに至る、沢山の学者の名前を冠した方程式や法則がありますが、それらはすべて Maxwell の方程式の一側面を示すものです。ここでは、まず Maxwell の式とそれに対応する物理現象のに解釈ついて解説します。

そのため Maxwell 方程式をスタート点として、その空間表現を理解していきます。また、ここでは Maxwell の方程式中に相対論効果を入れていません。相対論効果を入れないということは、古典電磁気学としても不備なのですが本質理解のために、幾分でも易しくしておいた方がいいと考えたからです。

また、相対論的補正を省くという事は単位系に関しても不備となりますが、単位系に関しては歴史上大きな混乱が見られ、正しく記述したとしてもその意味がたどりにくく、Maxwell の方程式の本質的理解の助けにはならないと考えました。

4.2　Maxwellの方程式

Maxwell の方程式の一般形は次の形です。電界 $\boldsymbol{E}$, 磁界 $\boldsymbol{B}$ を使用して記述します。

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

第 1 章で、Maxwell 方程式のベクトル形式表示の本質を示しましたので、数学的な意味は明瞭だと思います。ここでは、各式の物理的意味を定性的に説明してみます。

4.2.1　$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x\ \partial/\partial y\ \partial/\partial z)$、$E(x\ y\ z\ t)$ ですから、$div\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ はベクトルの内積相当（内積的な微分）です。ここで注意すべきは、$\boldsymbol{\nabla}$ は空間にだけ作用する 3 次元ベクトル演算子で（だから偏微分演算子)、ベクトル $\boldsymbol{E}$ の各要素に対して、t については何も手を加えないように作用します。従って、$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ は、いわば空間座標を消滅させて数値に変換するのですが、この数値というのは定数または時間 t の関数となります。つまり $\rho = \rho(t)$ の場合があります。

4.2.2　$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$rot\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$ はベクトルとなり、成分は

x 成分 $(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = \nabla_y \boldsymbol{E}_z - \nabla_z \boldsymbol{E}_y$
y 成分 $(\nabla \times \boldsymbol{E})_y = \nabla_z \boldsymbol{E}_x - \nabla_x \boldsymbol{E}_z$
z 成分 $(\nabla \times \boldsymbol{E})_z = \nabla_y \boldsymbol{E}_y - \nabla_y \boldsymbol{E}_x$

これは div よりも面倒です。$\nabla \times \boldsymbol{E}$ の成分は上の通りベクトルの x, y, z 成分ですが（つまり $\boldsymbol{B}$ は３次元空間のベクトル）、これが $\boldsymbol{B}$ の時間（偏）微分と等合で結ばれている訳で

x 成分 $(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = -\partial \boldsymbol{B}_x / \partial t$
y 成分 $(\nabla \times \boldsymbol{E})_y = -\partial \boldsymbol{B}_y / \partial t$
z 成分 $(\nabla \times \boldsymbol{E})_z = -\partial \boldsymbol{B}_z / \partial t$

です。つまり $\boldsymbol{B}$ の x, y, z 成分がそれぞれ（同時刻の）時間 t の関数に等しいという内容で、磁界 $\boldsymbol{B}$ の各成分の時間変化が電界の空間的変化（起電力）に対応しているという事です。磁界の 3 次元的分布の時間変化となると、そろそろ、磁力線や電気力線によるイメージが通用しなくなってきます。物理的には、一般的に「磁界が時間変化すると電界が発生する」と説明され交流発電機の原理はこの法則に基づきます。図 4.1 に示す交流発電機のような工学的応用では、磁界はある一定方向に限定、コイルを外部から回転して、起電力は導線の電圧として取り出すなどの種々の限定を実施して、理解し易く（設計し易く）しています。

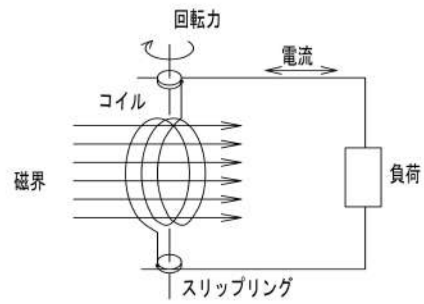

図 4.1: 交流発電機の原理

4.2.3　$div\boldsymbol{B} = 0$

物理的には磁荷がないことを表します。つまり磁石はいくら小さく分割していっても必ず NS 極のペアとなるということです。この部分の記述は「何々が無い」という不思議な記述ですが、この式は右辺=0 が重要なのでは無く、$div =$ が存在する事が重要です。なぜならば、これが無いと、磁界 $\boldsymbol{B}$ の微分記述が不完全となってしまうのです。また、微分記述の片割れであるアンペールの法則 $rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{J}$ と対（つい）になるのですが、この法則（磁石が NS のペアになる事）を誰が発見したのかはっきりしません。

4.2.4　$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{J}$

$\partial \boldsymbol{E} / \partial t$ を変位電流といい、マックスウエルにより導入された項ですが、時間変化する電界が磁界の空間分布に影響を及ぼすことを述べています。図 4.2 は直流電源による磁界の発生（$\mu_0 \boldsymbol{J}$ の項）、および、コンデンサを介して直流電源を加えた時（切断した時）も瞬間的に磁界が発生する様子（変位電流による項）を示します。永久磁石はその内部に永久的な直流電流が環状に流れていると考えられ、$\mu_0 \boldsymbol{J}$ はこれを表すものでもあります。もちろん直流電磁石も、$\mu_0 \boldsymbol{J}$ が磁力発生源です。

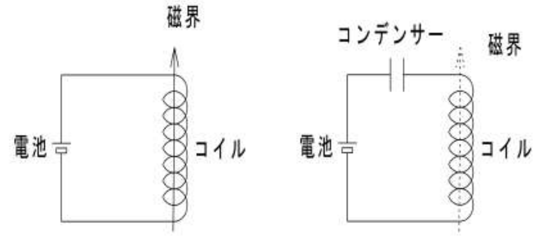

図 4.2: 電流による磁界の発生

4.3 Maxwell の方程式：静電磁界の場合

静電磁界の場合には、時間変化する項を 0 とおくと、

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$rot\boldsymbol{E} = 0$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$rot\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

が得られますが、この場合電界と磁界のインターラクション [1] は消滅し、それぞれ完全に単独事象に見えます。この状況を考えると、歴史的に電気と磁気ば別々に発見され、その関連が分かるまでに長い年月を必要とした事がよく納得されます。特に、電流を起こす手段を発見する前は $rot\boldsymbol{B} = 0$ ですから、静電気と磁石しか気がつかない訳です。磁石自体は古代ギリシャの時代に、発見されているそうですが、これから「磁荷がない」までは歴史的にも、思考的にも途方も無い距離を感じます。

静電界や静磁界というのは、現象的には把握できても、その物理を理解するのは数式の単純さとは裏腹に（あるいは数式が単純で、何を言っているのか分かり難い故）難しく、動電磁界から理解し始めるべきと考える理由はここにあります。

[1] 磁界の時間変化と電界の空間変化、電界の時間変化と磁界の空間変化が対応していた事に注意。

第II部

電波の存在証明の道筋

第5章　サイン波振動と波動方程式

前章までで、Maxwell の方程式の本質やその意味については説明完了です。ここからは、Maxwell の方程式からどのようにして電波が導かれたのか、電波と電界磁界の関係、電波がどのようにエネルギーを伝えるのかという話題に移ります。この部分、いわゆる電磁気学の範囲外の事実を基に説明されます。そのため、最も基本的な振動である単振子の話題から始めます。

5.1　振動

一口に振動と言っても、地震、車や電車の振動のような規則性が少ないものから、ブランコの振動のように規則性がある程度感じられるもの、時計の振り子のように規則性が非常に明らかなものまで様様です。ところが、どのような振動であっても、サイン波の足し合わせで表現できることが分かっています。もちろん周波数や振幅、そして位相関係をきちんと決めて足しあわせる必要はあります。このようにサイン波というのはすべての振動波形の基本になるものです。これを工学的には、「すべての波形は、（サイン波の）周波数成分に分解可能である」、「すべての波形はサイン波により合成可能である」とか言い、数学的には「サイン波はすべての波形の基底ベクトルである」とか言います。

このような事実から、振動に関してもサイン波振動が基本中の基本となります。そこで、以下サイン波振動がどのように発生するかについていくつかの例を見ながら議論を進め、最終的には波動方程式を導きます。これは、Maxwell の方程式より電波の存在を証明するには、波動方程式を用いるからです。また出自がニュートンの運動方程式にあるという事の強調でもあり、波動方程式の復習でもあります。

5.2　単振子

物理の教科書で真っ先に説明される一番基本的な振動です。これはおもりに糸を結び付けて、揺らせるもので、時計の進み具合を一定に保つメカニズムとして古い歴史をもっています。おもりがある規定の点から動いてまたもとの点にもどってくるまでの時間を周期といいます。

振動の大きさを振幅といいますが、周期というのは振幅には無関係で [1] 振り子の議論の中では気にしなくてかまいません。糸におもりをつけただけの振り子では、振幅がだんだん小さくなっていって、最後には停止してしまいます。機械式の振り子時計ではこのため、ゼンマイを使って、非常に小さな力を、振り子に同期して与えていました。もちろん、ゼンマイがほどけてしまえば停止します。停止してしまう理由は空気の摩擦や、振り子の摩擦等ですが、ここで、これら摩擦のない理想振り子を考えます。この場合、最初に揺らしてやれば、永久に振動が続きます。

紐の長さを l おもりの質量を m 重力加速度を g とするときに小振幅での運動方程式はつぎのようになります。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin\theta$$

[1] これを振り子の等時性といいます。　ただし、振幅が小さいという条件付で。

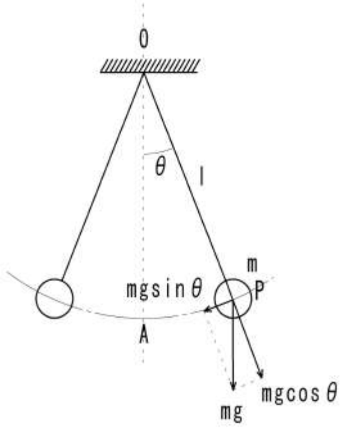

図 5.1: 単振子

θ が小さいときには、$sin\theta \approx \theta$ となるので、この条件で解くと周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

で与えられます。また、おもりの運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

で与えられ、位置エネルギーは

$$-mglcos\theta$$

となります。

振り子が振動を続けるメカニズムはエネルギーを考えることで明快に説明されます。即ち、振り子には運動エネルギーと位置エネルギーがあり、

運動エネルギー $\longleftrightarrow$ 位置エネルギー

という具合にエネルギーのやりとりを行い、これが永久に続くのです。つまり、おもりが一番高い位置のとき（振りきれたとき）には位置エネルギーは最大で、運動エネルギーはゼロです。逆におもりが一番低い位置にいるときは運動エネルギーは最大で、位置エネルギーはゼロという具合です。おもりの最下点で止まってしまわないのは、運動エネルギーが最大で、必ずおもりを行き過ぎさせるからで、最高点で止まってしまはないのは、運動エネルギーがゼロで、重力により下方に引っ張られるからです。

この時のエネルギーの移動に関して、少し考えておきたいことがあります。ひとつは、運動エネルギーと位置エネルギーは全く別のもの、つまりお互いに独立の物 - 物理量であることです。運動エネルギーをもち、そのエネルギーの担い手となるものは質量です。一方、位置エネルギーは地球の重力場がもたらすエネルギーであり、これは二つの質量間に働くニュートンの引力の法則がその元となっています。運動エネルギーは単一の質点でも存在しますが、それ自身に内在されるもので、一方位置エネルギーは質量が発生する場から得られるものです。重要な点はこの二つのエネルギー保持機能は、本来全く独立に存在していて、これらのエネルギー保持機構間を関係づけるものが振り子などの特定の構造物です。

二つ目は、この二種類のエネルギー保持機構がエネルギー交換をする際に、お互いに相補的に動作することです。もし、二種類のエネルギー保持機能を二種類のバケツにたとえるなら、振動とは、このバケツ間の水のやりとりと考えられますが、ひとつのバケツが他方に水を入れるとき、他方は必

ず受け取るように動作し、両方同時に水を空ける（あるいは入れる）ことは決してないという意味です。

5.3　単振子（その２）

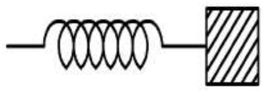

図 5.2: 単振子 2

バネの一端を壁に固定し、もう一端と質量を結び付け、水平においたものを考えます（つまり、重力は考えないということです)。質量に水平方向の力を加えてから離すと、質量は振動します。この解析は単振子より容易で、近似なしに解けます。運動方程式は、バネ定数を k、おもりの質量を m とすると、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

となります。これを、解くには一種直感が必要で、「求める関数を 2 回微分したら、もとの関数となる。微分しても変化しない（細かいことはあとで考えるとして）関数が解になるのだろう。」と想定する訳です。このようなもので、すぐに思いつくのはサイン波（コサイン波と言っても同じ事）です。そこで

$$f(t) = Asin(\omega t + \phi)$$

と仮定して、これを微分してみます。ここで A とか ϕ という変数を付けておいたのは、「細かいこと」を先取りしたものです。つまり、この程度の自由度を持ったサイン波にしておけば、解が速く得られるだろうと考えたのです。すると

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -A\omega^2 sin(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 f(t)$$

より

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

が得られます。

この時もバネの持つエネルギー $\frac{1}{2}kx^2$ と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ がエネルギーをやり取りして振動が持続します。

5.4　単振子から連続体の振動へ

このバネー質量ペアを沢山用意しそれぞれを繋いだものを考えます。壁は不用なので、無くしてしまい、十分に長いバネー質量ペアを考えます（長くする代わりに、バネ、質量を細かくしても同じ)。このようなシステムに対して、どこかの質量に変位を加えた後、自由にすると何が発生するでしょうか?

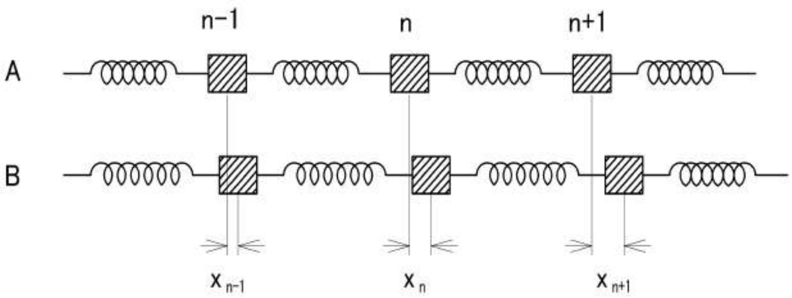

図 5.3: 単振子の連続体

図 5.3 で、A はバネと質量が連結されたものが、静かにしている状態です。一方、B は、質量が x_n-1、x_n、x_n+1 のような変移を持っている場合で、何らかの運動中です。運動方程式は

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} \quad = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n)$$

ここで $x_n - x_{n-1}$ と $x_{n+1} - x_n$ はそれぞれ、x_n から見て、左右の質量までの距離です。

これから連続体の場合を、図 5.3 より導きますが、数学的な厳密さは追求せず、この式が何を表現しているかという面から考えます。つまり n と $n-1$、 $n+1$ と n の距離が小さくなった極限が連続体になるだろうと考えます。このような見方で、式を眺めると $kx_{n+1} - kx_n$ が　$n+1$ と n の距離を小さくした時の極限である値に収束し、同時に、$kx_n - kx_{n-1}$　が $n-1$ と n の距離を小さくしたときの極限になるならば、点 x_n における一般的な運動方程式が得られます。

これは x_n の両側の距離の差を取って、されにそれら両者の究極的な差を取ることですから、二階微分になる筈です。

$\triangle\alpha = -k(x_n - x_{n-1})$、 $\triangle x_\alpha = x_{n-1} - x_n$ とすると、

$$\lim_{\triangle x_\alpha \to 0}\Big(-\frac{\triangle\alpha}{\triangle x_\alpha}\Big) = -\frac{d\alpha}{dx_\alpha}$$

となります。

同様に $\triangle\beta = k(x_{n+1} - x_n)$ に関しては $\triangle x_\beta = x_{n+1} - x_n$ とすると、

$$\lim_{\triangle x_\beta \to 0}\frac{\triangle\beta}{\triangle x_\beta} = \frac{d\beta}{dx_\beta}$$

となります。

さらに、$\triangle\gamma = \triangle\beta - \triangle\alpha$ 、$\triangle x_\gamma = x_\beta - x_\alpha (= x_{n+1} - x_{n-1})$、とすると、結局、式の極限は

$$\lim_{\triangle x_\gamma \to 0}\Big(\lim_{\triangle x_\beta \to 0}\frac{\triangle\beta}{\triangle x_\beta} - \lim_{\triangle x_\alpha \to 0}\frac{\triangle\alpha}{\triangle x_\alpha}\Big)/\triangle x_\gamma$$

$$= \frac{d}{dx_\gamma}\Big(\lim_{\triangle x_\beta \to 0}\frac{\triangle\beta}{\triangle x_\beta} - \lim_{\triangle x_\alpha \to 0}\frac{\triangle\alpha}{\triangle x_\alpha}\Big)$$

$$= \frac{d}{dx_\gamma}\frac{d\beta}{dx_\beta}$$

$$= \frac{d^2kx_n}{dx_n{}^2}$$

です。

つまり、このようなシステムでは、その運動方程式は次のようになります。

$$\frac{d^2f(x)}{dt^2} = B\frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

ここで、$f(x)$ について、ちょっと考えておきます。$f(x)$ は位置の関数ですが、これは時間によっても変動するもので、実際は二つの変数の関数 $f(x\ t)$ です。上式を導く過程で、2 階微分を使いましたが、それぞれ x, t について微分する時には、二つの変数のうち、もう一方は気にせず定数扱いとしました。これは空間変数（上例では x ですが一般には x, y, z）と時間変数 t はお互いに干渉しない（独立である）ことに起因しています。

そこで、微分の方式を偏微分に直しておく必要があります。従って

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} = B\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$$

となります。

この方程式の解がどうなるかについて考えますが、具体的に解かずに様子を調べましょう。まず、時間と空間に関して、対称な二階微分で表現されています。時間の二階微分は加速度ですから、空間の二階微分は、空間の加速度的変化率と考えられます。そして、空間、時間ともは線形ですから、この方程式は、実は

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} = something$$

$$B\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = something$$

を重ね合わせたものを解にもつのではと想像されます。この形の方程式の解については第 5.3 節で示したとおり、サイン波となります。従って、時間、空間にまたがるサイン波が解になると想像するのは、あまり無理がないと思います。そこで、これらの方程式の解としては、第 5.3 節で考えた方式同様に

$$f(t) = Asin(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$f(x) = Bsin(\omega_2 x + \psi_1)$$

という解が存在するとして、これが本当かどうか試して見る訳です。この時 $\partial^2 f(x)/\partial t^2$ という操作をしても ω_1 は変化しません。サイン波は何回微分してもその周波数は変化しませんから。同様に $B\partial^2 f(x)/\partial x^2$ の操作でも ω_2 は変化しません。そして $\partial^2 f(x)/\partial t^2 = B\partial^2 f(x)/\partial x^2$ が成立するので、結局

$$Csin(\omega_1 t + \phi_2) = Dsin(\omega_2 x + \psi_2)$$

が成立することになり、角周波数 ω に関しては

$$\omega_1 = \omega_2$$

となります。周波数が同一に出来そうならば、位相に関しては、ϕ と ψ を一まとめにするのは容易です。また、係数 A、B についてはもとの波動方程式のどちらかの係数を調整することで、例えば B=1 とできます。結局、解の候補は

$$Asin(\omega t + \omega x + \phi)$$

となる訳です [2]。方程式を解くとは、最終的には A、ω、ϕ を決定していく作業となりますが、ここでは解としてサイン波が得られるという事がわかれば十分です。このため波動方程式と言われ、この微分方程式が成立するシステムでは、波が存在すると言えます。

[2] 空間と時間という独立した空間に、周期を媒介として二つのサイン波が存在することを考えたのです。

この節で示したことは、経験的には非常に当然の内容です。例えば鉄の棒を考えましょう。この内部は鉄の原子で構成されていますが、空間的に完全に固定されているのではなく、若干の動きが可能です。ただし、外部からの力で動いても、もとの位置に戻ろうとする性質があり、まさにバネ－質量モデルです。この鉄棒の端をハンマーで叩くと音が発生[3]（棒に直角に叩けば横波、棒の切り口を叩けば縦波です）、この音が鉄の中を伝わっていきますよね。波動方程式とは、この鉄の内部に存在する運動方程式であり、それは波が存在し得て、それが伝わるということを表しているのです。（叩かなければ、なにも発生しないので、波動方程式の解にはこれも含まれます。）

ここでは、鉄の棒の長さが有限であると、その端で波動が反射して戻ってくるのですが、反射については省略します。

波動方程式の解を求めていく過程では、「天下り式に $Asin(\omega t + \omega x + \phi)$ を解だと仮定してみよう」という解説が多いのですが、この裏にある思考の過程はここに記したようなものではないでしょうか。

5.5　単振子の波動方程式

単振子の場合、運動方程式は波動方程式の形をしていません。しかし、ここにもサイン波の振動が発生するので波動方程式を満たすはずです。

運動エネルギーと位置エネルギーの関係は

$$\frac{1}{2}I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mglcos\theta$$

です。$-cos\theta = \frac{d^2(sin\theta)}{d\theta^2}$ ですから、

$$\frac{1}{2}I\frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl\frac{d^2(sin\theta)}{d\theta^2}$$

第 5.2 節では、θ が小さいところでは $\theta = sin\theta$ と近似したことを思い出し、この近似をやめると、

$$\frac{1}{2}I\frac{d^2(sin\theta)}{dt^2} = mgl\frac{d^2(sin\theta)}{d\theta^2}$$

が成立します。これは波動方程式そのものです。

この節で、運動エネルギーと位置エネルギーの関係から波動方程式を導きました。そこで、若干飛躍しますが、波動方程式の二つの項はそれぞれエネルギーを表現するもの、あるいはエネルギーを蓄積するバケツと考える事にします。この考え方は第 7.3 節で用います。

5.6　振動の根本的仕組み

これまでに示した例から、振動の根本的な仕組みとして、次のようなことが想定できます。

（１）振動を持続するためには、エネルギーを保持する機能が少なくとも二つは必要。

（２）そのエネルギー保持機能が、お互いにエネルギーをやりとりすることで、振動が持続するが、このときこの二つの機能は同時にエネルギーを出さないような、相補的動作をする必要がある。

ただし、このようなエネルギー保持機能を二組もった物理システムが存在、あるいは用意をしたからといって、かならず振動が発生するわけではなく、振動の元は人為的あるいは、何らかの自然要因です。

[3] ただし、鉄の内部のどの程度の部分が質量、ばねに相当するのかは別途議論が必要です。原子レベルの構造では、音が発生したとしても聞こえるような周波数にはならないでしょう。

振り子の場合にはこのエネルギー保持機能は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーであり、おもりを糸につけるというのがこれら二つのあいだを相補的に結びつけます。LC 共振回路の場合は電荷によるエネルギーと磁束によるエネルギーであり、コイルとコンデンサを電線でクローズループとしてつなぐことが相補動作を強制します。

振り子の周期や LC 回路の周波数は、あるいは振幅は振動の概念からすると、副次的なもので本質ではありませんが、モデルとの関係を考えておきましょう。振り子の場合、糸を短くする、おもりを軽くすることで周期が短くなり、LC 回路の場合、L や C を小さくすると周波数が高くなります。これはバケツによる単位時間あたりのエネルギー交換回数を増やすことです。一方、振幅の増加はバケツの水を増やすことに対応します。つまり一度にやり取りするエネルギー量を増やすことです。

第6章　電磁波の予言

電磁波が振動の一種で、空間を伝播する波であることが Maxwell により 1864 年に予言され、1888 年に Herz により証明されました。

電磁波が何かについては電磁気学で説明されますが、電磁気学の枠内で基本的な解説を完結させる傾向があります。つまり、あたかも電磁気学が力学やら解析力学から独立であるかの印象を与えます。これは実は非常に不幸なことで、電磁気波の存在（Herz が証明するまでは予言ですが）については古典力学の知識を使って証明されます。従って、ここではいわゆる電磁気学の枠にとらわれずに、電磁波の本質を追求したいと思います。こうする事で、電波の存在がどのように予言されていったかが分かりやすくなり、ひいては Maxwell の方程式の本質もより明瞭に見えると考えるからです。

電磁波を予言し、電磁気学を構築したのは Maxwell ですが、現在のベクトルによる本質そのものを表した形式にしたのは Heaviside や Herz です。従って、ただ一人の天才によって完成された訳ではないのですが、ここでは、James Clark Maxwell に代わる、架空の James Standard Maxwell を想定し、彼がどう電磁波の本質を理解していったかをたどり、「こう考えれば電磁波をに至るのは自然だ」という論理を展開するつもりです [1]。

6.1　始めに

Maxwell は先人の研究結果を理解し、それぞれが求めているものは電磁界の一部であると考え、ついには 20 変数をもつ 20 の方程式に纏め上げたものと思います。この過程の中で、電磁界が存在する空間はエーテルで満たされていると信じていました。古典力学中の連続体中での波の存在と進行から連想すれば [2]、エーテルという媒体中に波が存在するのではないか? と考えるのはそれ程不自然ではありません。従って、自分が構築した 20 の方程式の中に、進行波を示す式が隠れていると考えた筈です。進行波を証明する式とはもちろん、波動方程式です。

つまり、「20 の式のから波動方程式が導出できるのではないか?」という問いから始まって、いつの頃か、「波動方程式を導き出してみせる」という確信に至ったのだと思います [3]。およそ、人が何かを成し遂げる時には、強い信念と確信が必要です。Maxwell も自分の考えが、直感的に絶対正しいと信じ、残っているのは単に証明する事だけだと考えたのでしょう。いわば、始めから結果は分かっていて、あとはそこにどういう道筋で至るかを考えるだけなのです。もちろん、この道筋をつけるのも大変な事なのですが、自分の考えに疑問符を持っていたならば、あのような結論には絶対到達出来ません。

我々の電磁波の存在証明には Maxwell の式のベクトル表現をベースにします。これが James Standard Maxwell の方法です。

[1] もちろん本当にどう考えたかは分かりませんのでこういう考えもできるという例です。
[2] Maxwell のバックグラウンドは古典力学です。電磁気学は自分が構築したものですから。
[3] 第 7 章では、もう少し具体的な考えについて記します。

6.2　ポテンシャル

本章では、電磁波の存在を証明するためにポテンシャルを使用します。ポテンシャルに関して波動方程式の成立を示し、ポテンシャルの微分である [4] 電界、磁界も同様に波動方程式を満たす事を示します。しかし、Maxwell の方程式そのものを使用し、ポテンシャルを導入せずに電界や磁界が波動方程式を満たす事は容易に計算できます。つまり、電磁界が波動方程式を満たす事だけを言うなら、ポテンシャル導入は不要です。

ポテンシャル導入の利点は、物理現象を抽象化した共通原理として考えられる点でしょう。単振子の錘の位置や速度と、電界、磁界のサイン波振動に着目していたのでは、それらを引き起こす共通原理にはたどり着けません。ところが、ポテンシャルを考えると単振子も電磁界も、空間的ポテンシャル（空間へのエネルギー蓄積）と、時間的ポテンシャル（運動エネルギー）という共通の認識の元に扱えます。ニュートン力学と電磁気学も物理量を抽象化したレイヤーでは、共通の考えを適用でき、特に未知の電磁気学理解のために既知のニュートン力学の考えが使えるというのは大きな利点です。具体例として第 8 章で、電磁気の問題を簡単な単振子の振る舞いからアプローチする例を示します。

6.3　論理の道筋概要

たとえ、結果が分かっているとはいえ、たどり着くのはなかなか大変です。そこで Maxwell の式から電磁波を導き出すための道筋を明らかにしておきます。まず、波動が存在する事を示すには、波動方程式を導けばよく、波動方程式の要素は二つの相補的なエネルギー蓄積メカニズムでした。つまり、時間軸でのエネルギー蓄積メカニズムと、空間軸でのエネルギー蓄積メカニズムが電磁界に存在するだろうと予想した上で、次のような道筋をたどります [5]。

(1) 静電界の時には、電界、磁界ともエネルギー蓄積メカニズムとしてのポテンシャル ϕ、$\boldsymbol{A}$ を持つことを、議論のスタートとする。

(2) ポテンシャル ϕ、$\boldsymbol{A}$ が動電磁界でも存在することを証明する。

(3) 動磁界、動電界のポテンシャル計算。

(4) 動磁界のポテンシャル表現を見てひらめく。

(5) Maxwell の式が振動を内包することを示す（波動方程式が成立する場合を示す)。

(6) 波動方程式が電界、磁界でも成立することを示す。

以下上記道筋に沿って計算していきます。

6.3.1　(1) 静電磁界のポテンシャル

時間変化がない電界および磁界ということですから、Maxwell の方程式の時間変化する項をゼロとすると

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$rot\boldsymbol{E} = 0$$
$$div\boldsymbol{B} = 0$$
$$rot\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

[4] ポテンシャルが波動方程式を満たすなら、その微分が波動方程式を満たすのは、実は自明です。波動方程式の解はサイン波で、サイン波はいくら微分、積分してもその形は変わりません。従って、微積分で関係付けられるどこかの空間にサイン波がある事が分かれば、他の空間にも当然存在します。

[5] ここではエネルギー発生の源となるポテンシャルも、エネルギーもどちらもエネルギー蓄積メカニズムという様に、厳密さを欠いた議論をしますが、これでも論理をたどるには不都合はないでしょう。

を得ます。上の式より、静電界と静磁界はお互いに影響することがなく、独立の現象となっていることがわかります。

静電界では、$div\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$, $rot\boldsymbol{E} = 0$ ですが、数学的には $rot\boldsymbol{E} = 0$ だけあれば、ポテンシャル ϕ が存在することが言えて、

$$\boldsymbol{E} = -grad\ \phi$$

$$(\equiv -\boldsymbol{\nabla}\phi)$$

と書けます。電界（の強度）$\boldsymbol{E}$ は、ポテンシャル ϕ から発生すると考えることができます。

一方、静磁界では、$div\boldsymbol{B} = 0$ より数学的に、あるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在して

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

となります。

このように、静電磁界については、全く問題無くポテンシャルが存在する事がわかります。

6.3.2 (2) 動電磁界でのポテンシャルの存在証明

動電界に関しては、$rot\boldsymbol{E} \neq 0$ ですから、ベクトル解析からはポテンシャル ϕ がそのまま出現しません。したがって、静電磁界のときにせっかく発見した二つのエネルギー蓄積機能（つまりポテンシャル）のうち、一方の存在が怪しくなってしまいました。しかし、次のような想像をしましょう。静電界をつくる電荷があると、この時は確かにポテンシャル ϕ をもちます。この状態で電荷が非常にゆっくりとゆれたと考えます。このとたんに、ベクトル解析からは ϕ が存在するか否か判らなくなってしまいます。しかし、ポテンシャルはいわばバケツです。今までもっていたバケツが、電荷がちょっとでもゆれたとたんに消滅してしまうのでしょうか? バケツはまだ存在すると考えることは、それなりに説得力があると思います。あるいは、電荷が 1m の距離を 1000 年かかって移動したとしましょう。我々の感覚からは、これは静止しています。しかし、宇宙的時間から見れば、これは超高速で移動しているわけです。理論はこの状況に対応できねばなりません。

そこで、「動電磁界においても磁界の基となるポテンシャル（これは心配なく存在)、と電界の基となるポテンシャルが存在する」と仮定してしまい、ここから何がでてくるかを調べるわけです。

動電磁界で、電界と磁界は

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

のように関係付けられます。したがって、存在すると仮定しているポテンシャルに関して、何らかの条件がつくのは当然でしょう [6]。

磁界について $div\boldsymbol{B} = 0$ が常に成立しますから、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ よりベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が常に存在します。電界については

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})}{\partial t}\end{aligned}$$

上式から次式に至る間で、これから無造作に積分順序を入れ替えます ($\boldsymbol{\nabla}$ と $\partial/\partial t$) が、実はここでとんでもない飛躍をします。前節で「静磁界では、$div\boldsymbol{B} = 0$ より数学的に、あるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在して」として導入したベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が実は、時間の関数であるとするのです。確かに $div\boldsymbol{B} = 0$ は空間的な性質を規定しているだけで、それ以外のことは言っていません。偏微分

[6] 実は、条件というより、スタティックなポテンシャルからダイナミックなポテンシャルへと、ごく自然な拡張となることが分かります

としては問題の無い、微分順序の入れ替えが、物理的にはこのような新たな条件をつけている事に注意しましょう。等式を続けて書くと、

$$=- \ \boldsymbol{\nabla} \times (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t})$$

従って

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla} \times (\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0$$

となりますが、これは純数学的にあるスカラーポテンシャル χ が存在する事を意味し、$grad\ \chi = \boldsymbol{\nabla}\chi$ に関し、

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad = -\boldsymbol{\nabla}\chi$$

となります。これは

時間変化する電界＋（時間変化するベクトルポテンシャル）の時間微分

＝時間変化するスカラーポテンシャル

であり、動電界は磁界の影響があるポテンシャルを持つという事が証明されました。具体的にこのポテンシャル χ を計算するにはさらに工夫が必要です。

6.3.3 (3) 動電磁界のポテンシャル計算

動電界がポテンシャルを持つことが判ったので、この計算に入ります。この時のキーとして、ベクトルポテンシャルの rot に関する数学的性質を使います。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ について、適当なスカラーポテンシャル ψ の $gradient$ を付け加えた

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$$

を考えると

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi)$$

$$= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\psi$$

$$= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

となり、$\boldsymbol{A}$ に関しては $\boldsymbol{\nabla}\psi$ 適当に付け加えてもいいことがわかります。ここは純数学的な性質で、電磁界がどうあろうと関係ありません。一方、この置き替えは $\boldsymbol{B}$ には全く影響を与えません。つまり $\boldsymbol{B}$ からみれば $div\boldsymbol{B} = 0$ となる $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}'$ の形であっても全く区別つかず、どうでもいいことです。

動電界では、

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\chi$$

ですが、$-\partial\boldsymbol{A}/\partial t = 0$ ならば静電界で、この時 $\boldsymbol{\nabla}\chi = \boldsymbol{\nabla}\phi$ です。つまり $\boldsymbol{\nabla}\chi$ は、静電界の時の $\boldsymbol{\nabla}\phi$ に、何か時間変化する項（時間変化し、3 次元ベクトルとなるようなもの、例えばスカラーポテンシャルの $gradient$ が候補）を付け加えたものになると考えられます。

この時間変化項を $\boldsymbol{A}$ の中から取り出そうというのが、ミソで、このため $\boldsymbol{A}$ の持ちうる自由度、即ち $\boldsymbol{A}$ に適当な $gradient$ を加えていいという事を使います。そこで $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$ と置き換え、どのような条件で、$\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{A}/\partial t - \boldsymbol{\nabla}\phi$ となるかを調べます。そのために $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{\nabla}\psi$ を代入すると

$$-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\chi = -\frac{\partial(\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{\nabla}\psi)}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\chi$$

$$= -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\chi$$

ここで、また飛躍をします。つまり、$\boldsymbol{\nabla}\psi$ は 3 次元ベクトルで、空間的な量である事は確かですが、それ以上は決まっていなかったことを幸いと、これを時間変化するものと決めてしまうのです。これが、時間変化項を $\boldsymbol{A}$ の中から取り出すというトリックで [7]、$\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi/\partial t) \to \boldsymbol{\nabla}(\partial\psi/\partial t)$ という微分順序の入れ替えの意味するところです。そして最終的には、

$$= -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \chi)$$

結局 $\phi = \partial\psi/\partial$ｔ$+\chi$、即ち $\chi = \phi - \partial\psi/\partial$ｔ という置き換えをすればいいことが判ります。この補正項がダイナミックなもの $(\partial\psi/\partial t)$ というのが明らかになりましたが、元をただせば、時間変化するものと決めてしまったためです。

ここまでで明らかになったのは、動電界では静電界を発生するポテンシャル ϕ に、ダイナミックな部分を与える、任意のスカラーポテンシャル ψ の時間微分を加えたものだということです。

結局、静電界の時のポテンシャル ϕ がバイアスとなったような、動電界のポテンシャルを考えればいいのです。これは、ポテンシャル ϕ をスタティックなもの (x, y, z の関数) ではなく、ダイナミックなもの (x, y, z, t の関数) と拡張するだけの事です。

まとめると、$\boldsymbol{E}$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$（$div\boldsymbol{B} = 0$ より得られる)、スカラーポテンシャル $\phi(t)$（静電界の時得られたものを「時間変化もある」と、ちょっと拡張しただけ）により

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi(t)$$

のように書けることとなりました。以上の議論はこの式にまったくローカルなものであり、他の部分に全く影響をあたえるません。

大山鳴動してねずみ一匹という感じですが、このことは、物理を冷静に考えるともっと判りやすいと思います。つまり、静電界であるポテンシャルが発生し、その電界がゆっくりと動きはじめるとき、もととなった静電界に加算されるのは容易に考えられるでしょう。空間は線形で重ね合わせが成立するのですから。また、スカラーポテンシャルのダイナミック化は第 6.3.6 節でその重要性が明らかになります。「大山鳴動して波動誕生」につながります。

この節の議論で特徴的なものは、偏微分の順序の入れ替えにより、実はそれまでは（少なくとも意識はして）無かった「時間変化」を導入することです。

6.3.4　(4) 動磁界をポテンシャル ϕ、$\boldsymbol{A}$ で表現、そしてひらめき

動電磁界にもポテンシャル $\phi(t)$ が存在し、しかも、静電界の時のポテンシャルと同じ書き方（今度はダイナミックですが）をしても全く問題ないということが分かったところで、実際に計算を進めます。$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ を消去してポテンシャル $\phi(t)$、$\boldsymbol{A}$ で表し、それぞれのポテンシャルを求めようという方針です。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} &= \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0} \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0} \\
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi(t)\Big) &= \frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

[7] あるいはスカラーポテンシャル ψ を仮定したとき、これを最初から x, y, z, t の関数としておいても同様で、この時は単純に独立な変数に対する偏微分の順序が入れ替えられると考えることになります。

ベクトル解析の公式より $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ ですから、

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot A)+\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi(t))}{\partial t}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0}$$

となります。簡単では有りませんが、とにかく $\phi(t)$ と $\boldsymbol{A}$ の関数に書けました。ここで、$\boldsymbol{\nabla}$ を元の定義式に戻して再度書き直して見ます。$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルで、x,y,z,t の関数です。ここで、３次元空間座標を x で代表させてしまうと

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial x^2}+\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi(t))}{\partial t}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0}$$

となります。やっと、動磁界を、ポテンシャル $\phi(t)$ と $\boldsymbol{A}$ で表現できましたが、まだ複雑な式です。

この式を見て、どう感じますでしょうか？ 方程式は一つなのに、変数（$\boldsymbol{A}$ と $\phi(t)$）は減っていないし、前よりも難しそう $\cdots$ と普通は思いますよね。

ところが、Maxwell は見たとたん「しめた」と思ったのです。我々とどこが違ったのでしょうか？ Maxwell は数式の中に波動方程式を探し続けていました。ところが、この式を見ると

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial x^2}$$

と

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$

とが、もう出現しているではありませんか。そして彼の頭の中では

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0}$$

が成立するに決まっているのです。つまり、

$$\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})+\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi(t))}{\partial t}=0$$

が成立するに決まっているのです。

言い換えると、問題はこの式を証明する事に変化してしまったのです。もともと、波動方程式の出現を示したいので、微分方程式を解こうと思ったりしたならば、単に道に迷っただけです。

6.3.5 エネルギー損失または補給がある波動方程式

ここで、エネルギー損失または補給のある場合の波動方程式をちょっと考えておいた方がいいでしょう。損失が無ければ、波動方程式は「2 階空間微分項 =2 階時間微分項」という形体を取りますが、例えばスカラーポテンシャル

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(t)-\frac{\partial^2\phi(t)}{\partial^2 t}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

のように、第 3 項目が存在する場合、この項は空間による損失またはエネルギー補給を示します。上式の場合自由空間では $\rho=0$ となり、無損失ですが、$\rho\neq 0$ ではこれが損失[8] となり、振動は減衰してしまいます。同様にベクトルポテンシャルについて $\boldsymbol{J}/\epsilon_0\neq 0$ の場合 $\boldsymbol{J}/\epsilon_0$ が損失項となります。

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\boldsymbol{J}}{\epsilon_0}$$

[8] 条件次第で補給源ともなりますが、このためには時間の関数で、振動周期に完全に同期してタイミングをとるという人為的動作が必要です。従って普通は損失。

損失があるため、空間には一時的な波動しか発生しませんが、これでも波動は存在します。逆に、損失のある場合に振動を持続させるためには、この損失をキャンセルするエネルギーを動的に加え続ける必要があります。つまり、$\rho = \rho(t)$ あるいは、$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(t)$ として、振動のタイミングに合わせてエネルギーを補給します。Maxwell の方程式では、エネルギー補給、損失にかかわる項は、$\rho(t)$ と、$\boldsymbol{J}(t)$ だけですから、振動にブレーキを掛けるのも、振動を持続させるのも、これらの項を操作するしかありません [9]。

この損失と補給が常に完全に等しく無いと、振幅の変化が発生します。実際の電気回路で発振を持続させるためには、振幅をモニターして負帰還をかける（$Wien$ ブリッジ）、振幅精度がもともと安定な事を利用して、ある適当な動作点に勝手に落ち着く（LC 発振器 ; 但しエネルギーは加え続けねばなりません）などの手段を使います。損失のある空間での、波動の持続は結構面倒なのです。

6.3.6 (5) 波動方程式を成立させる

ここから先は、自由空間での波動存在の議論となり、スタート時の ρ や $\boldsymbol{J}$ が存在する空間での議論では無いことにご注意ください。波動の発生源や損失の無い空間の議論です。

前節までで、

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right) + \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi(t))}{\partial t} = 0$$

が成立すれば、波動方程式が成立することが分かりました。しかし、上式はどんな条件でも成立する訳なのではありません。つまり普遍的に証明する変わりに、ある条件をつければ、成立させる事が可能であることを示します。言い換えれば、これこれの条件下では波動方程式が成立すると言う訳です。波動方程式が無条件に成立する必要はありませんから [10]。

ここで、第 6.3.3 節で、散々議論したスカラーポテンシャルのダイナミック化 $\phi(t)$ が意味を持ちます。

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi(t))}{\partial t}$$

に着目すると、$\phi(t)$ が ϕ であったならば時間微分と空間微分の順序を入れ替えるとゼロになってしまう処でしたが、

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right) + \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi(t))}{\partial t} = 0$$

は

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right) + \frac{\boldsymbol{\nabla}(\partial\phi(t))}{\partial t} = 0$$

となり、従って、

$$\boldsymbol{\nabla}\big(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\big) = 0$$

結局、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}$$

が示されればいいのです。

ここで、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{\nabla}\psi$ を適当に付け加えてもいいという自由度があり、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial\boldsymbol{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\boldsymbol{A}_z}{\partial z}$$

であることを思い出すと、何のことはない、単にベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の空間的な分布が時間的には $\partial\phi(t)/\partial t$ になっていればいいのです [11]。（第 6.3.2 節で、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が時間変化

[9] 反射、散乱、空間への拡散はエネルギーの損失ではありません。

[10] 本当にサイン波振動が存在するにはもう一つハードルがあります。波動方程式の解が 0 になる場合があるからで、0 以外になる時にのみ、サイン波が存在します。しかし、この部分はニュートン力学で解決済みです。

[11] この $\boldsymbol{A}$ を決めることをゲージ変換（ゲージ選択の方が実情に近いと思うのですが）、そしてこのゲージをローレンツゲージといいます。また、$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ の時は容易に想像されるように波が存在しない時で、こちらはクーロンゲージと言います

するものとしてしまいましたよね。）という訳で、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\partial\phi(t)/\partial t$ になっている時に波が存在し、もとの式は

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0$$

となって、波動方程式が $\boldsymbol{A}$ について成立します。

波動方程式は $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ について成立するのではと考えて、計算してきたのですが、まずベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ について成立するということになりました。

ポテンシャル $\phi(t)$ についても

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=div\boldsymbol{A}=-\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}$$

を

$$\nabla^2\phi(t)-\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})}{\partial t}=0$$

に代入すれば

$$\nabla^2\phi(t)-\frac{\partial^2\phi(t)}{\partial^2 t}=0$$

となり、ここでも波動方程式が出現しました。空間変数を x で代表させてしまうと、

$$\frac{\partial^2\phi(t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi(t)}{\partial^2 t}=0$$

です。

6.3.7 (6) 波動方程式が電界、磁界でも成立することを示す

電界や磁界についてはきわめてあっさりと計算できます。磁界については $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ ですから、

$$\nabla\times(\nabla^2\boldsymbol{A})=\nabla^2(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla^2\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

より

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

同様に、$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi(t)-\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ ですから

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

が成立します。

6.4 まとめ

多くの電磁気学の教科書では、Maxwell の式から電磁波が出現するプロセスの裏側に潜んでいる考え方が明確ではありません。この理由のひとつには、Maxwell の方程式を「解く」という言い方をしてしまう事があり、この場合「解く」という作業があいまいです。「解く」からには電界や磁界が空間や時間の関数となった、具体的なイメージを想像してしまうのですが、実際には波動方程式を満たすことを示す訳です。つまり、Maxwell の方程式は「解きません」。

もう一つの理由は、波動方程式の成立証明という文脈になってしまい、「ゲージ[12] 変換」の意味が不明確になってしまっている点にあると思います。波動方程式が成立するように「ゲージが選択でき

[12] そもそもこのゲージという言葉自体、意味が取りにくいと思います。

る/条件が設定できる」というのが実際の作業となっているのです。どんな状況においても波動方程式が成立する事が言いたい訳では全く無く「波動方程式が成立する事もありますよ」と言うわけです。そして波の存在を示すのはこれで十分なのです。

さらに[13]、始めから

$$
\begin{aligned}
div\boldsymbol{E} &= 0 \\
rot\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
div\boldsymbol{B} &= 0 \\
rot\boldsymbol{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

とした自由空間 ($\rho = 0$、$\boldsymbol{J} = 0$) の場合で計算する方がすっきりするのですが、こうすると波動を生成する部分の議論が抜け落ちてしまいます。つまり、エネルギー補給項なしで波動方程式の成立を示すと、そもそも生成できないかもしれないものの存在証明のようになってしまいます。そこで、$\rho = \rho(t)$、$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(t)$ という空間で波動方程式を示し（=波動の発生）、$\rho = 0$、$\boldsymbol{J} = 0$ となる自由空間で存在するというのが、電磁界の生成、伝播に対応する訳です。これは元をたどれば第 6.3.3 節で $\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi/\partial t) \to \boldsymbol{\nabla}(\partial\psi/\partial t)$ という微分順序の入れ替えに行き着き、実はここが、電波を発生させる作業です。

Maxwell の方程式を最終的に解けば電界、磁界は求められる筈ですが、これは実際のところアンテナ理論の領域にちかく、電磁気学では、通常はここまでやらないのです。

Maxwell の方程式を解くというのは現在でも大変なことで、境界条件を明確にした特定の場合の、電磁界の様子というのをコンピュータで計算するというのが普通です[14]。

[13] この議論はやや煩雑すぎる様に感じますが。

[14] コンピュータが自由に使えない時代はこの電界、磁界を簡単に求める様々な工夫がありました。複素関数論における調和関数の利用はこの一例です。

第7章　電磁波の実態

ポテンシャル ϕ や $\boldsymbol{A}$ が波動方程式を満たし、そこから得られる $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ が空中を伝播する波であると言う事が理論的に示されました [1]。波動方程式を満たせば、波が存在するのは確かですが、これで Maxwell の式が完全に理解できたかというと、実はまだまだ疑問があります。この疑問を提示し、どう Maxwell の式をどう解釈したならば、より真実に近いかを論じます。

まず、静電磁界の再考から始めます。

7.1　静電磁界

$\partial^2\phi/\partial t^2 = 0$ の場合は波動方程式から、時間に関する項が消滅したの特殊な場合であり、

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = q/\epsilon_0$$

となります。$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = something$ の形の方程式も物理では頻繁に登場し、ポアソンの方程式と呼ばれます。

ポアソンの方程式では、時間変化する項がありませんから、スタティックな状況を表現します。通常、物理の教科書では、静的な場合の方が動的な場合より表現が簡単なため、こちらを先に解説します。その中でポアソンの方程式も出現するのですが、この方法では、式ののもつ物理的意味が明解とは言えません。それも当然で、振動のない、面白みの無くなった状態の表現であるためです。「何もない」という状況の表現が難解なのは物理に限ったことではありませんよね。

7.2　空間の項が消滅した場合

波動方程式から空間に関する項、$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 0$ が消滅した場合を考えます。

$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)$ より、$\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$ が得られます。すなわち、場の傾きがゼロの場合で、これの場からは力が全く発生しません。この時の波動方程式は

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = something$$

となりますが、ϕ が座標方向に対しての傾きが無いので、偏微分にする必要もなく、また something の符号をマイナスにしてしまえば

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = something$$

となります。一次元で考えると、これは $d^2\phi/dt^2$ =const となり、加速度が一定、つまり慣性運動となります。

このように見ると、波動方程式は、位置の変化による作用と、時間変化による作用の関係を結びつけるもので、逆に振動の発生要件として、加速度と慣性を要求しているとも考えられます [2]。

[1] 通常の電磁気学の教科書はここで一応完了としているようです。

[2] これは単振子の振動と同じメカニズムです。

7.3 電磁界の波動方程式

ここでは、第 5.5 節で述べたように、波動方程式の各項はエネルギーを表現すると解釈して話を進めます。

電界、磁界はそれぞれ、次の波動方程式を満たすことが分かりました。

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} = \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B} = \frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

これを観察すると、電界、磁界おのおのが時間的、空間的エネルギーバケツを持ち、電界あるいは磁界単独で波が伝わるかのような印象を持ちます[3]。つまり、電界には $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}$、$\partial^2\boldsymbol{E}/\partial t^2$ の 2ヶ、磁界には $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}$、$\partial^2\boldsymbol{B}/\partial t^2$ の 2ヶで、合計 4ヶです。

エネルギーとしての波動伝送には一対の相補的なエネルギー蓄積メカニズムが存在することは、5 章で示した通りです。古典物理での連続体では一対しかなかったエネルギーバケツが、電磁波を伝える空間については 2 対（4ヶ）存在するのでしょうか???

一方で、Maxwell の方程式を見れば、電界と磁界は関係付けられており、単独ではありません。もし関連付けられたバケツが 4ヶ存在すると考えると、「自然に redundancy が存在する」ように見えるばかりか、理論として深刻な事態が発生します。図 7.1 に示すようにバケツの使い方が何通りもあり得るのです。

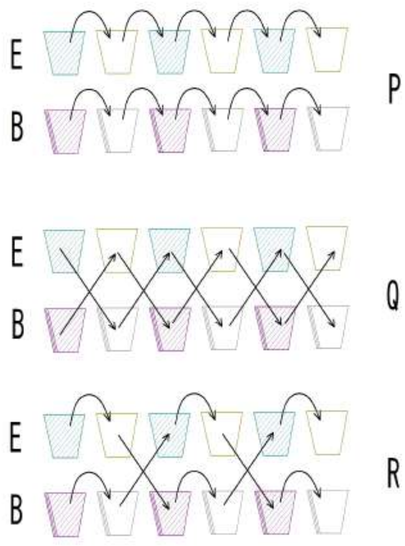

図 7.1: 電界バケツと磁界バケツ

P のモデルでは電界、磁界とも自分単独で波を伝えます。つまり $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E}$、$\partial^2\boldsymbol{E}/\partial t^2$、$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{B}$、$\partial^2\boldsymbol{B}/\partial t^2$ が、それぞれ波を伝えるのです。そして、電界と磁界の位相関係は Maxwell の式によって関連付けられ、(どうするかはともかく) 何らかの情報交換が発生して同期が取られると考えます。Q のモデルでは電界、磁界のもつ二つのバケツがクロスする様にエネルギーを交換するものです。この場合同期は自動的に取れるので都合がよく

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} \quad \longleftrightarrow \quad \partial^2\boldsymbol{B}/\partial t^2$$

[3] ここのバケツモデルは相当ラフなもので、精査には耐えられませんが、最終的な結論を得る途中段階としては分かりやすいのでは。

$$\partial \boldsymbol{E}^2/\partial t^2 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}^2 B$$

というようにエネルギー交換が発生すると考えます。しかし「自然に冗長性がある」という部分は解決しません。

R のモデルでは、何回か P のモードを用い、つぎに Q のモードに移動し $\cdots$ という場合です。ところが、R の例を考え始めると、電界、磁界バケツで受け渡しをするタイミングを 1 回毎とするような制限を加える理由がなくなります。電界、磁界が自分の間で 2 回連続受け渡しを行い、その次に 1 回、電界と磁界の間で受け渡すというような場合でも、電界と磁界の同期関係は保持され、結局、バケツの使い方が無限通り存在することになってしまいます。これでは理論になりません。結局、バケツが 2ヶ以上あると困るのです。2ヶが必要にして十分なバケツの数です。

バケツは 2ヶで、しかも電界、磁界についての二組の波動方程式を満足するような説明（解釈）が必要です。

7.4 電磁界の本性

この点に関しては次のように考えるのがより真相に近いと思います。「電磁現象は、ある何か 1 つの現象で、それの電界平面と磁界平面（電界と磁界はお互いに直交しています）に対する射影で、我々は理解しているのだ」と。つまり、Maxwell は電界空間と磁界空間に写った影の組み合わせでこの「ある何か 1 つの現象」を表現したのです。進行波である「このある一つのもの」はたった一組のバケツを使ってエネルギーを無限に伝えているのですが、我々はこれを電界と磁界という二つの空間 (それぞれが 3 次元ベクトル空間）への影として見ているので、バケツが二組あるように見えるのです。

この「何か」が静止している時を考えましょう。電界平面に影が 1 つ、磁界平面にも影が 1 つ見えます。しかし、時間的に静止しているので、電界平面の影と磁界平面の影が同じ「何か」の影の対であるか否かは、絶対に確認できません。これを確認（あるい想像）するには、自分が動いてみて、もう一方の影の動きを見ることです。どのように動かそうが、それぞれの影の間に対応関係があるならば、自分たちが 1 つのペアを作っていると考えていいでしょう。動電界を造り、それに対応する動磁界を観測することで、この対応関係が普遍的なものであると確信するにいたったので、これこそ Maxwell の方程式の本性です。電界または磁界を動かすというのは「何か」が時間的に動くことで、その二つの影が完全に同期して動くのは当然のことです。

電磁波というのは、文字通り不可分の得体の知れない空間を伝わる波で、それの射影である電気と磁気しか我々には認識できず、まさにこの電気平面と磁気平面の成分を書き表したのが Maxwell の方程式です。

7.5 Poynting vector

ポインティング[4] ベクトルは次のように表現され

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

エネルギーを表すと説明されます。自由空間では電界と磁界は完全に同相であることを示しました。また電界と磁界は直交しています。従ってもし電界が $sin\omega t$ で表されるならば磁界も当然 $sin\omega t$ で表されます。従ってポインティングベクトルの絶対値を計算してみると

$$|\boldsymbol{S}| = (sin\omega t)(sin\omega t)$$

[4] 人名です。$1852 - 1914$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(cos2\omega t)$$

となります。$\frac{1}{2}$ が出現し、一瞬、空間に直流が伝わるのかと思ってしまいそうですが、この式全体は絶対に負にならず、ポインティングベクトルがエネルギーである事の一つの裏づけとなっています。もし仮に自由空間で電界と磁界の間に位相差があると、エネルギーに負の成分が見えるようになり、理解に苦しみます。特に、位相差が 90 度の場合には、エネルギーは平均ゼロとなってしまい、電磁波として空間に存在し得ません。また、エネルギーの周波数が倍になりますが、これは+/-両方向の動きにエネルギーが必要だからです。

7.6 再び Maxwell の方程式

ここまで考えてくると、見方も相当に深まってくる筈です。ここで Maxwell の式を再掲すると

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$div\boldsymbol{B} = 0$$
$$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{J}$$

でした。

電磁波の実態でのべたように、$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ は、われわれには直接知ることのできない進行波の、電界、磁界空間への射影です。$rot\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ も、$rot\boldsymbol{B} = \epsilon_0\mu_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t + \mu_0\boldsymbol{J}$ も磁界 $\boldsymbol{B}$ と電界 $\boldsymbol{E}$ の間の、因果関係を表すものではありません。

ややもすると、Maxwell の方程式の等号は、一方が原因で他方が結果であるかのように解釈したくなるのですが、これは誤りです。Maxwell の方程式は時間軸上の動きと空間軸上の動きを結び付けているので、時間的意味を表す因果律を示すものではありません。図 7.2 は電磁波の進行を示す、良く見かける図ですが、電界と磁界は全く同タイミングで進行しています。従って進行する電磁波の説明として、「電界 $\rightarrow$ 磁界 $\cdots$ というように電波が進んでいく」というのは正しくありません [5]。全く同一の位相関係にあるので、一方が原因で他方が結果と言えないのは明白ですね。従って、実際は図 7.3 の様なイメージで理解する方がより真実に近いと思います。なおこの図には電磁波の本体は書いてありません。

電磁波が一対のバケツによるエネルギーのやり取りをしながら伝わるという考え自体は有効です。ただし、この場合のバケツは（電界と磁界の対では無く）、一つは空間（ポテンシャルエネルギー）であり他方は時間（運動エネルギー）です。従って、図 7.2、図 7.3 において、奥行き方向の軸は時間と見ても、電波の進行方向と見ても構わず、時間とみれば、電界、磁界に写っているのは運動エネルギーで、進行方向とみれば、ポテンシャルエネルギーとなります。

7.7 Maxwell は何を考えたのか?

これまで、Maxwell の方程式の持つ意味や表現する内容を考えてきました。ここでは最後に、Maxwell はどんな考え方をしたのかについて想像してみましょう。

Maxwell の仕事の大きな部分は、もちろん電磁気学の体系化ですが、この時、変位電流を導入しました。この変位電流については、コイルに電池を接続した時、定常的に磁界が得られるだけではなく、コンデンサを通して接続した時も磁界が得られる事から考え付いたのでしょう。

[5] 実は、この表現は頻繁に見かけます。ついつい、コイルに加わる交流電圧と電流の関係などを連想してしまうからかも知れません。

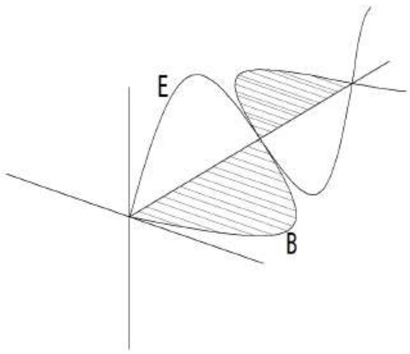

図 7.2: よく見かける電界と磁界表現

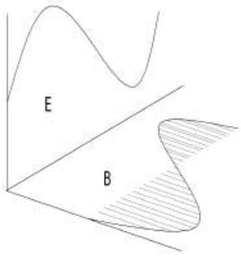

図 7.3: 射影された電界と磁界

さらに大きな部分は電磁波の予測です。20 の変数、20 の方程式から構成される物理の中に、どうして電磁波を予測できたのでしょうか? こちらの方は、方程式のマニピュレーションから出現したとは到底考えられず、もっと大局的な考えがあったのだと想像します。例えば、自分が纏めつつあるのが新しい物理であると自覚したとすると、その物理学の中で振動が存在するのではと考えるのは物理学者としてはほぼ当然ではないでしょうか? もし、研究対象の物理が、どう考えても振動を持ち得ない（物理なので、原則的に時間とともに変化する事象を扱いますが、ここに振動が無いとは、時間とともに単調増加か減少、また原則から外れた静的事象となる）のであれば、このような物は面白くなく、さっさと別の研究へと方向を変えた方がいいでしょう。

電磁波の予測はどのような計算の結果なのでしょうか? Heaviside の表現であれば、波動方程式が成立する事を導き出すのは何とかなりそうです。しかし 20 の方程式の中からどうやって振動の予測を行ったのか? 一つの想像ですが、ある特定の 1 次元のみに着目して、この空間で波動方程式の成立を証明した [6] のではないでしょうか。この特定の 1 次元は、3 次元空間の写像ですから、写像先にサイン波が写ったならば、写像元（3 次元空間）にもサイン波が存在するのは当然です。何も 3 次元空間すべてに、同時にサイン波が写る事を言わなくてもいいのです。

Maxwell が大天才である事は確かですが、現在の我々の知識をもとに考えると、とんでもない飛躍の結果というよりも、考え方の自然な発展の結果、電磁気学が纏められて行ったと感じます。

[6] 証明といってもある特定の条件で成立すれば十分です。

第8章　いくつかの面白い問題

ここでは、今までに考えてきた事柄に関連して発生した新たな問題や疑問点をいくつか挙げ、その回答を得るためのヒントとなりそうな事を記します。すべて基本的には *Open question* で、証明された回答を提示しているのではありません。またヒントさえも、間違っているかも知れず、鵜呑みにする事の無い様、ご注意ください。

8.1　なぜ我々は電波が発生できるのか？

第 7 章で、電波の実態は我々の観測にはかからず、その写像である電界と磁界のみが観測可能なのだと言いました。我々が工学的に電波を発射するには、電波の源となる交流発振器にアンテナを組み合わせます。この時アンテナにはドライブの仕方に 2 種類あると考えられます、一つは電圧源交流発振器にダイポールアンテナを接続したもので、これは空中に電界を作り出すものと考えられます。もう一つは、電流源交流発振器にループアンテナを接続したもので、これは空中に磁界を発生させると考えられます [1]。

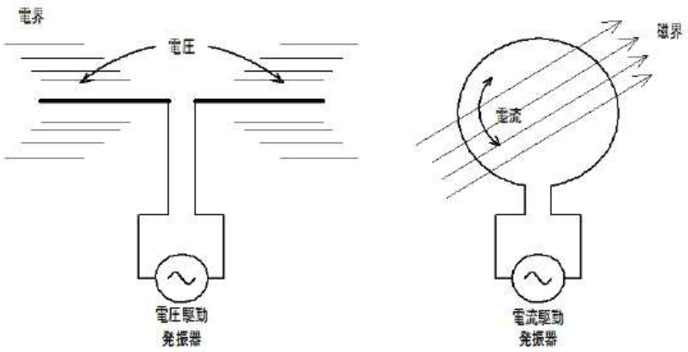

図 8.1: ダイポールアンテナとループアンテナ

そこで問題。電波の本性は観測できず、写像である電界、磁界のペアのみが観測できると言うのは、逆に電界と磁界が電波の必須構成要素だと言っているとも思われます。それなのに、なぜ電界アンテナあるいは磁界アンテナ一つだけで電波が発生できるのでしょうか? 電界アンテナと磁界アンテナを組み合わせ、信号の位相や、アンテナの物理的位置など細かに合わせなくても、電波が発射できるとはどういう事でしょうか [2]?

ヒント : いつも簡単な問題に立ち返って考えると分かりやすいと思います。例えば、単振子をずっと振動させ続けるにはエネルギーを補給しなければなりません。この時エネルギーの補給方法として、

- 振り子の振動周期に同期して、指先でちょっと押す（運動エネルギ補給）。

[1] アンテナ工学的にはダイポールアンテナとループアンテナは双対で、遠方から見ると同一の放射パターンを持ちます。

[2] 世の中にＢＨアンテナと言われるものがあります。これは、同一入力電力での電波出力効率を上げるため、まさにここで書いたような事を実施しています。しかし、この方式の実用性には疑問があり、この問題がヒントになるのでは。また Balanis の大著、Antenna Theory でも完全に無視されています。

- 振り子の振動周期に同期して、振り子を上下させる (ポテンシャルエネルギー補給)。

が有り得ます。（もちろんこの組み合わせでもかまいません。）これらの方法は、運動エネルギーを補給する場合とポテンシャルエネルギーを補給する場合に相当します。そして、振り子はどちらか一方のエネルギー補給だけでも動作し続けます。

8.2 アンテナ端での電界、磁界の位相と自由空間中の電界、磁界

自由空間では、電界と磁界は完全に同相で、どちらかがどちらの原因、結果となり得ないことを示しました。一方、自由空間のインピーダンスは電界と磁界の比で表され

$$Z_0 = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega$$

となります。ところが、アンテナは複素インピーダンスを持つ [3] ため、アンテナに流れる電流と電圧には位相差が発生します。自由空間中ではインピーダンスは純抵抗で、電界と磁界に位相差は発生しない筈ですが、アンテナ中の位相差はどのような効果となって現れるのでしょうか?

ヒント：複素項インピーダンスでは電力は消費されません。つまり、アンテナ端まで送られた波は、ここでもとに戻らざるを得ず反射波となりますが、駆動波との重ね合わせが発生します。

8.3 なぜ Maxwell の方程式は対称ではないのか?

Maxwell の方程式は、電界、磁界に関して、もう少しで完全に対称な表現となり、より美しくなるのに惜しい。自然はもっと美しい表現を与えるのでは? また、ある教科書には対称形で書いてあるけれど、これはどういう事?

ヒント：ファインマンの教科書によると、光のスピードの座標系では、電界と磁界が反転するとのこと。つまり、Maxwell の方程式は原理的に相対論の対象となり、その表現形体は座標系の速度による。それならば、電界、磁界が対称に記述される座標系があるのではないか？

8.4 電線とコア

電源トランスは、薄い珪素鋼板を重ねたコアに絶縁された銅線 [4] を多数回巻いて作られます。電流は銅線の中を流れ、磁束はコアの中に作られるのですが、どうも電流と磁束では、その通りやすさに大分差があるようです。例えば、銅線には直径 0.1mm のものもありますが、トランスのコアで、断面積がこれに比べられるようなものはありません。なぜでしょうか?

ヒント：電荷は銅線中を自由に動けますが、それに対応するマグネティックなものが存在するのか? もし磁力を電流のように通すものがあったとすると、電力会社ではなく磁力会社が存在したかもしれません。

8.5 永久磁石

永久磁石については古代ギリシャから知られていました。これは、磁力が簡単に無くならないからこそ見つけられた訳です。磁石に鉄を引き付けると仕事をしますが、磁力は減りません。一方、電池

[3] 半波長ダイポールアンテナでは、$73.1 + j42.5\Omega$。
[4] 業界ではマグネットワイアといいます。

はモータを回したり、電球を点ければだんだん減っていき、ついには無くなります。永久磁石はあるのに、なぜ永久電池は無いのでしょうか?

ヒント:電池が減るのは、+と-の間に負荷を接続、閉じた回路をつくり電流を流すからです。双対のデバイスである永久磁石については、電池に対しの閉回路は、閉じた磁力線の切断です。磁力線の切断ができるのでしょうか? $div\boldsymbol{B} = 0$ とは何を意味していたのでしょうか?

関連図書

[1] 振動と波動　寺沢徳雄　　岩波書店　2003 年

[2] 振動・波動　　小形　正男　　裳華房

[3] ファインマン物理学　III　電磁気学　　宮島龍興訳　　岩波書店

[4] ファインマン物理学　IV　電磁波と物性　戸田守和訳　岩波書店 1971 年

[5] 電磁気学の考え方　砂川　重信　　岩波書店　1993 年

[6] 線型代数　森　毅　日本評論者　1980 年

[7] 解析力学　小出昭一郎　岩波書店　1983 年

[8] 解析概論　改訂第三版　高木貞治　岩波書店　1961 年

[9] 力学の考え方　砂川　重信　　岩波書店　1993 年

[10] 数学と物理学の交流　倉田 令二朗　森北出版　1972 年

[11] 現代の古典解析　森　毅　日本評論社　1985 年