

ノイズ - ($1/f$ ノイズ測定の実例)

S. Tajima

第 0.8 版 2019 年 4 月 ©s.tajima 2019

目次

前書き	2
第 1 章 ノイズの基礎	4
1.1 ノイズの定義	4
1.2 ショットノイズ	4
1.3 熱雑音、サーマルノイズ	5
1.3.1 ボルツマン定数	6
1.4 フリッカーノイズ、 $1/f$ ノイズ	6
第 2 章 電子部品のノイズ	8
2.1 抵抗のノイズ	8
2.2 半導体のノイズ	10
2.2.1 サーマルノイズ	11
2.2.2 ショットノイズ	11
2.2.3 キャリア生成/再結合ノイズ	11
2.2.4 $1/f$ ノイズ	11
2.2.5 $1/f^2$ ノイズ	11
2.2.6 RTS ノイズ	11
2.2.7 アバランチノイズ	12
2.3 トランジスタ増幅回路のノイズ特性	12
2.3.1 トランジスタのノイズ	12
2.3.2 トランジスタのノイズモデル	13
2.3.3 NF 値	14
2.3.4 トランジスタデータシートの NF 値	14
2.4 IC のノイズ特性	16
第 3 章 実用設計でのノイズ	19
3.1 オーディオアンプのノイズの考え方	19
3.1.1 MC カートリッジ	19
3.1.2 MC カートリッジ用ヘッドアンプ	19
3.1.3 低雑音 IC によるヘッドアンプ	20
3.2 低雑音アンプの回路例	21
3.3 無線通信機器用 LNA	22
第 4 章 $1/f$ ノイズの解析	23
4.1 $1/f$ ノイズの観測方法	23
4.2 $1/f$ ノイズの悪影響の例	24
4.3 $1/f$ ノイズの発生メカニズムの考察	25
4.3.1 LC 発振回路	25

4.3.2	振り子によるアナロジー	25
4.4	位相差とフーリエ変換値	25
4.5	位相ノイズの原因	26
4.6	ソリッド抵抗のノイズの原因	27
4.7	フーリエ変換	27
4.7.1	三角関数の掛け算	27
4.7.2	フーリエ変換のプログラム	30
第 5 章	1/f ノイズの測定	31
5.1	1/f ノイズ測定装置	31
5.2	ノイズアンプおよびフィルタ	32
5.3	データ測定	32
5.4	全体構成	34
5.5	CMOS トランジスタのノイズ測定	34
参考資料		36

前書き

筆者はもう 50 年以上、電子回路（アナログ回路、デジタル回路）の設計や製作をして来ましたが、本当にノイズを気にして設計した事はありません。今までに、オーディオ用 MC カートリッジヘッドアンプも何回かは製作、それなりに音が出た筈ですが、ノイズの原理的な内容を考えませんでした。

2019 年になって、あるきっかけから、 $1/f$ ノイズの測定に協力することになり、機器の設計の前にノイズそのものを調べました。その中で一番参考になったのはイリノイ大学の学生の修士論文です (参考文献 [8])。測定原理は簡単なのですが、この論文を見ると、測定方法や測定環境、統計的処理のための測定回数など、とても気楽にトライできそうもありません。

そのため、この修士論文程の SN 比は無理なのですが、簡単な回路や測定でどこまで $1/f$ が観測可能かという観点から製作しました。

この文書は簡易測定回路と、その実験結果が主内容なのですが、結果だけ見たのでは印象が薄く、人の興味を引くのはとても無理そうです。

そこで、ノイズについて調査した内容をまとめ、印象の薄い実験結果の裏には、これだけの物理や、先人の知恵があるという事を強調しようと思いました。うまく行きましたでしょうか？

なお、本文書は兵庫県立大学、中村知道教授と共同で実験を行ったものが元となっています。

2019 年 2 月 S. Tajima

第1章 ノイズの基礎

この章ではノイズとは何かという基本的な事柄について述べます。

ノイズと言われて、私たちがまず思うのは、耳から入る「雑音」でしょう。これには家の中の掃除をする音から冷蔵庫のかすかなうなり声のように本来無くてもいいものがあります。また、人の見ているテレビ番組の音声や、話し声など、自分に関係ない、あるいは興味のないものをノイズとして感じる場合があります。

一方、もう少し専門的な分野では、電子回路や電波のように電氣的なものがあります。こちらの場合にノイズと言うと、もともと使用したり伝送したりしたい「信号」や「情報」があって、それに対して不要であり邪魔な電磁氣的成分の事を指します。従って、自分が不要だからと言って、普通は、情報成分をノイズとは言いません。

この文書で議論するのは、基本的に電氣的ノイズに制約します。電氣的ノイズと規定したとたんに、これを利用する場合がありますので、不要とか邪魔とかでノイズを定義できなくなります。

そこで、ノイズとは何かを定義することから始めざるを得ません。

1.1 ノイズの定義

ノイズの反義語として情報と考えてあまり不自然ではありませんので、これを念頭において、物理的に見てノイズを定義して見ましょう。情報というのは自然界や人がある意味を持たせて発生させる、規則的な信号と考えられます。

例えば、自然界が発生させる情報としては、ある場所の一日、一月、一年に渡る温度や湿度変化があります。これはある規則性を持っていて、逆に予想ができます。あるいは、潮の満ち引き、山の高さによる酸素の濃度なども情報です。

一方、人や動物が発生するものは、見方によってはすべて情報です。言葉に始まり、しぐさや顔つきなどは皆、これに意味を見出します。あるいは体温のように、意識して発生していないものでも、風邪を引いた時など、一番分かり易い情報です。

この様に考えると、世の中情報だらけですが、逆に情報を集めようとする、邪魔になる信号があります（ここでは物理的に考えていますので、聞きたくない人の話などはもう除外します）。これらは予測不可能で、どうしても存在してしまいそれを（人為的に）無くすることができない、物理的（電氣的）信号で、これを当面ノイズと定義しましょう。

この後で、幾つの特徴あるノイズについて述べますが、ノイズの平均レベルは常にゼロとなり、直流成分を持ちません¹。

1.2 ショットノイズ

コインを投げ、その裏表の出る様子を調べて見ましょう。ある特定の回数を投げ、その裏表の出る確率を記録します。これを1ラウンドとして、投げる回数を決めて、沢山行うのです。投げる回数が少ない時の、各々のラウンドで得られる裏、表の出現する確率は大きくばらつきます。

¹もし、直流成分を持つと、ノイズが直流電源になってしまいます。

ここで、(大変になりますが、どうせ思考実験です) コインを投げる回数を増やした時の各ラウンドの裏表の確率の記録を見ると、0.5 を中心にバラツキが小さくなります。このバラツキ (fluctuation) の値 $F(n)$ は、コインを投げる回数を n とすると、

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

となる事が証明されます。

この性質は、実験 (事象) が離散的であることが本質的な理由ですから、電子回路や、光についても、電荷や光子の離散性により同様に発生します。この性質に基づくノイズをショットノイズ (shot noise) といいます²、これは Schottky² により真空管のノイズ研究の際に導入されました (1918 年³)。

独立した離散事象はポアソン分布するのが分かっていますが⁴、このショットノイズは、事象 (電子数) の数が少ない時に支配的になります。またショットノイズの大きさは $1/\sqrt{n}$ に比例 (例えば電流) しますが、 n が増えるとそれが表す情報はさらに増加するので、いわゆる SN 比は

$$SNR = n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

となります。

ショットノイズは後述するサーマルノイズとは異なり、環境依存性がありません。また電流が流れる事に起因しますから、サーマルノイズとの分離は、ノイズを調査するターゲットを低温 (絶対零度付近まで下げる) にすれば可能です。ショットノイズはホワイトノイズでもあり、常温ではショットノイズとサーマルノイズは区別がつきません。

1.3 熱雑音、サーマルノイズ

Johnson-Nyquist noise とも言われるノイズで、主として電子的なノイズです。これは抵抗などが熱平衡状態にある時発生するノイズで、印加電圧に関わりません。サーマルノイズは環境温度とともに増加、従って、電波望遠鏡に使用する受信装置などは冷却してこのノイズを減らす対策を立てます。

ノイズのスペクトラムはガウス分布、つまりホワイトノイズで、これについてはショットノイズと同一です。しかし、ショットノイズは電流が増えると増加するのに対し、サーマルノイズ V_n は、電子が熱によってランダムに動くために発生し、その時間的平均はゼロとなります。従って、このノイズもパワースペクトルとして表現する必要があり、 V_n^2 とします。また、サーマルノイズはすべての周波数帯に存在しますので、単純にこれを積分すると、無限大になってしまいます。そこで、ある周波数までの積分とします。

結局、サーマルノイズは周波数帯域の関数 $V_n(f)^2$ として定義し、ボルツマン定数 k 、帯域幅 B 、物体の絶対温度 T 、抵抗 R とすると

$$dV_n(f)^2 = 4kTRdf,$$

$$V_n(f)^2 = \int_0^B 4kTRdf = 4kTRB,$$

$$V_n(f) = \sqrt{4kTRB}.$$

²Walter Schottky, 1886 年 7 月-1976 年 3 月。金属と半導体の接合によるショットキーダイオードが最もよく知られているものでしょう。

³De Forest による三極管の発明が 1906 年ですから、非常に速い時期にすでに真空管ノイズの研究がされた訳です。

⁴事象の数が増えると、ガウス分布 (正規分布) になります。

と表現されます。ここで周波数帯域の始点の周波数はゼロ、つまり DC となっている点に注意しましょう。尤も、ある特定の周波数間 $f_b - f_a = B$ としてもノイズの総計が有限となるのは明らかです。

V_n^2 の単位に関して、ボルツマン定数は $[J/K](joules/kelvin)$ 、帯域幅 $B[Hz = s^{-1}]$ 、絶対温度は $[K]$ 、抵抗は $\Omega = [V/A]$ より、

$$[JK^{-1}] \cdot [s^{-1}] \cdot [K] \cdot [VA^{-1}] = [JVA^{-1}s^{-1}] = [V^2] \quad \therefore [W] = [VA] = [Js^{-1}], \quad [J] = [VAs]$$

このため、サーマルノイズを減らすには、必要な帯域のみに制限するのが有効です。

$V_n(f)^2$ は周波数帯域 B を含んでいますので、 V_n の単位は普通、帯域（のルート）で正規化し、 V/\sqrt{Hz} で表します。

1.3.1 ボルツマン定数

ボルツマンの原理によりエントロピー S は、定まったエネルギーのもとで取り得る状態 W の数の対数と定義されます。

$$S = k \ln W.$$

この時の比例定数 k がボルツマン定数です。

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \quad [JK^{-1}].$$

ボルツマン定数は、気体の熱力学的温度 T とエネルギー E のを関係付け、

$$E = kT$$

となります。

$$V_n(f)^2 = 4kTR,$$

より、

$$\frac{V_n}{R} V_n = I_n V_n = 4kT.$$

$I_n V_n$ は電力なので、ノイズとエネルギーが関係付けられました。

1.4 フリッカーノイズ、 $1/f$ ノイズ

ショットノイズ及びサーマルノイズは、そのスペクトラムが周波数軸上に平坦に分布するため、ホワイトノイズともいわれます。

一方、周波数軸上で、そのパワースペクトル密度が周波数の逆数 ($1/f$) に比例するノイズが知られており、フリッカーノイズ、 $1/f$ ノイズとか呼ばれ、またホワイトノイズに対してピンクノイズとかとも呼ばれます。

フリッカーノイズは周波数が高くなると振幅が減少し、サーマルノイズやショットノイズに埋もれてしまい観測できなくなります。この点を測定上の実際的な要求からコーナー周波数と言いますが、これはフリッカーノイズが折れ線特性を持つのではなく、単にサーマルノイズに埋もれてしまうためです。従って、サーマルノイズ等を小さく抑えるように SN 比を改善した実験では、コーナー周波数が高くなります (参考資料 [8])。

半導体の場合はコーナ周波数が非常に高くなります (MOSFET ; GHz 、JFET、Bipolar ; $2kHz$ 程度)。CMOS トランジスタのゲート換算ノイズ電圧は (参考資料 [6])、

$$V_n = \frac{8kT}{3g_m} + \left(\frac{K_a}{C_{ox}^2 WL} \right) \left(\frac{1}{f} \right) \quad \left[\frac{V}{\sqrt{Hz}} \right],$$

K_a ; プロセスによる係数 C_{ox} ; 単位面積当たりのゲート容量 W ; ゲート幅 L ; ゲート長
となり、第二項目が $1/f$ ノイズによるものです。微細化が進む程、 W 、 L が小さくなり、コーナー
周波数が上昇します。

$1/f$ ノイズは様々な現象で観測されますが、電子的なノイズとして現れるものが比較的観測し
やすく、例えば抵抗に電流を流した時の電圧ノイズとして観測されます。

フリッカーノイズの性質については第 4 章で別途議論します。

第2章 電子部品のノイズ

電子的ノイズについて議論するには、電子回路を構成する受動、能動部品のノイズについて知っておく必要があります。

2.1 抵抗のノイズ

抵抗は電子回路を構成する最も基本的な部品の一つです。

抵抗はその抵抗体に使用する材質で、幾つかに分類され、それぞれ異なった目的に最適化されています。抵抗は単体として市販される部品の代表で、どこでも目にする機会がありますが、ノイズの観点からは IC 中に組み込まれる抵抗も忘れる訳には行きません。

抵抗のノイズとして問題になるのは電圧および電流ノイズで、それぞれサーマルノイズおよび $1/f$ ノイズに起因するものです。電圧ノイズは抵抗値と絶対温度で決まり、抵抗体の種類による違いはありません。

電圧ノイズについて、

$$V_n(f) = \sqrt{4kTRB}.$$

ですが、周波数 B を単位周波数とすると、パワースペクトル密度は

$$V_n(f)^2 = 4kTR.$$

と表せます。

一方、電流ノイズは抵抗体の種類に依存します。実験式ですが、電流ノイズ $I_n(f)$ は、

$$I_n(f) = \frac{C \cdot V^2}{f},$$

となります。

電流ノイズレベルについてはノイズ係数 NI として、

$$NI = 20 \log \left(\frac{v}{V} \cdot 10^6 \right)$$

で表されます。 v は 1 デケード当たりの実行ノイズ電圧、 V は電圧降下です。

図 2.1 に抵抗全体のノイズの傾向を示します。

図 2.2 に各種抵抗のノイズ係数の違いを示します。

以下、代表的な抵抗について、特徴と、ノイズに関する違いを記述しましょう。

炭素皮膜抵抗

ディスクリート部品としては、現在もっとも標準的なもので、あらゆる電子機器に使用されています。抵抗値もシリーズ化され (E6,E12,E24 シリーズが代表)、電力も 1/8、1/4、1/2、1、2W と行ったものが入手容易です。

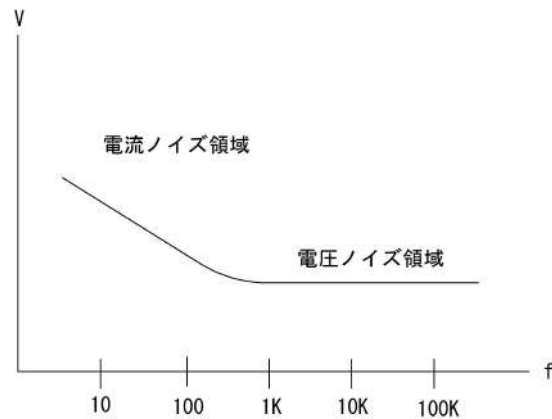


図 2.1: 抵抗のノイズ

[NI] dB	-40	-30	-20	-10	0	+10
<i>Discrete resistors</i>						
Carbon composition						
Deposited carbon						
Metal foil						
Wirewound						
<i>Integrated resistors</i>						
Thin-film						
Thick-film						

図 2.2: 抵抗の種類によるノイズの違い (出典 [9])

構造はセラミック製筒型部材の表面に抵抗体を塗布、これにらせん状に溝をいれて抵抗値を決め、両端にキャップ電極をかしめてあります。表面は塗装され、通常抵抗値や誤差等級などをカラーコードで印刷してあります。

ノイズ特性については、後述するソリッド抵抗よりは良く、金属皮膜抵抗よりは劣るものです。

ソリッド抵抗

炭素系素材をセラミックと混ぜて、焼き固めたもので、表面は普通ベークライトでおおわれています。この抵抗はかつて（1960年代から1980年代頃）良く使われましたが、雑音特性が、抵抗の中では一番劣ります。しかし、この抵抗はパルス性電流に強いという特徴があり、現在でも入手は可能です。

金属皮膜抵抗

ニッケル・クロム（NiCr）などを抵抗体材料とし、炭素皮膜抵抗よりもノイズが少なく、温度的にも安定で、一般民需製品よりも工業用製品（測定器などがその代表）によく使用されます。細かい抵抗値や誤差の少ない製品（0.5%、1%等）などがシリーズ化され、電力も炭素皮膜同等のバリエーションがあります。コストは炭素皮膜よりは高く、抵抗の中では高級品扱いです。

酸化金属皮膜抵抗

抵抗体に金属酸化物の混合皮膜を使用した電力用の抵抗で、1/2、1、2、5W 等の許容電力のものが市販されています。比較的高温動作を許容していますので、プリント基板に直接当たらない様、リード線を長くしたまま実装されているのを見かけるでしょう。温度特性は金属皮膜抵抗より劣ります。

巻き線抵抗

電力用の抵抗でセラミック製の筒に抵抗線（電力の大きい物では、抵抗板）を巻き付け、珐瑯仕上げをしたもので、電力は 5W 程度から 100W を超えるものが入手できます。しかし大電力のものは受注生産であったり、特殊な用途と考えていいでしょう。

巻き線のため、インダクタンスがあり、高周波には向かず、この対策として無誘導巻のものもあります。これも特殊用途です。しかし、ノイズレベルとしては最も低く、特に抵抗体と引き出し端子を同一の物で構成した場合、最良の結果が得られます。

セメント抵抗

電力用抵抗で、セラミックパッケージに巻き線抵抗や酸化金属皮膜抵抗を入れて特殊セメントで封じたものです。ケースはセラミックで材料としては良好な絶縁物ですが、普通は UL 認定を取得していません。そのため、商品設計の観点からは、一次回路への使用等で絶縁物扱いできません¹。

薄膜抵抗

窒化タンタル (Ta₂N₅)、シリコン・クロム (SiCr) , ニッケル・クロム (NiCr) などの温度係数の低い物質を真空蒸着やスパッタリングによりセラミック基板上に生成する構造で、抵抗体がいわば連続的に構成され、ノイズ（特に 1/f ノイズ）の小さいものが製造できます。

厚膜抵抗

抵抗体をセラミック基板上にスクリーン印刷し焼成したもので、表面実装用抵抗（チップ抵抗）はこの技術により製造されます。ノイズ特性はその構造上（沢山の抵抗体粒子が接触しつつ全体を構成）良くありませんが、小型のものが製造可能なため現在最も大量に使用されています。また小型なため、周波数特性は最良です。

2.2 半導体のノイズ

半導体の発生するノイズに関しても、サーマルノイズ、ショットノイズ、1/f ノイズがあり、さらに半導体特有のノイズがあります。

半導体特有のノイズとしてはキャリア生成/再結合ノイズ (carrier generation -recombination)、バーストあるいは RTS(random telegraph signal) ノイズ、アバランチノイズ、1/f² ノイズがあります。

半導体についても、ノイズは基本的に悪役で少ない程いいのですが、逆にノイズを測定して半導体のプロセスの評価をする事があります。

¹筐体との絶縁距離を保つ等の注意が必要です。

2.2.1 サーマルノイズ

これは抵抗と同等の内容のものです。バイポーラトランジスタのベース拡散抵抗によるパワースペクトル密度は、

$$V_G^2 = 4kTG.$$

G はベース拡散抵抗です。

2.2.2 ショットノイズ

PN 接合のショットノイズは電子の確率的運動に起因するので、ノイズ電流は q を電荷として、

$$I_n^2 = 2qI\Delta f.$$

ノイズスペクトル密度は I を順方向電流とすると、

$$N = 2qI.$$

これから分かる様に、ショットノイズは電流に比例します。これは、フォトダイオード、ゼナーダイオード（アバランチダイオード含む）やショットキーダイオードの特性診断にも使われます。

2.2.3 キャリア生成/再結合ノイズ

これは半導体特有のノイズで、キャリアの生成/再結合による電流変動に起因するものです。温度およびバイアス電圧依存ですが、半導体の物性を議論するにはともかく、部品として見た場合に小さくする手段が少なく、詳細は省略します。

2.2.4 $1/f$ ノイズ

半導体においても、 $1/f$ ノイズは低周波域では、主要なノイズ源となります。半導体の場合、プロセスルールが小さくなるほど、 $1/f$ ノイズが大きくなり、ナノスケールでの設計の問題点の一つです。

2.2.5 $1/f^2$ ノイズ

$1/f^2$ ノイズは $1/f$ ノイズの微分として出現し、特に IC 中のメタル接続（アルミニウムなどによるボンディング）に関して観察され、これも設計スケールが小さくなる時の問題点です。このノイズからボンディングの品質見積もりも行われます。

2.2.6 RTS ノイズ

RTS ノイズあるいはバーストノイズは、低周波帯域のランダムノイズで、矩形波状のノイズを指します。ノイズのパルス幅はランダムで、時には、波高値を複数もつ場合もあります。フェルミ準位近隣のキャリアトラップにより発生します。シリコン材料の重金属汚染や格子欠陥が原因です。

バイポーラトランジスタや微小ルールで製作された MOS トランジスタ等で発生し、ポップコーンノイズとも言われます。2019 年現在では、半導体材料の品質向上で、あまり考える必要がありません。

2.2.7 アバランチノイズ

アバランチノイズは逆バイアスされた半導体で発生し、その代表格は 6 V 以上の定電圧ダイオードです²。

アバランチダイオードは、逆バイアスされた接合部分に流れるリーク電流によるキャリアが（逆バイアスのポテンシャルによりエネルギーを受け）他のキャリアの運動を誘発し、雪崩のように流れる特性を利用しています。このアバランチ崩壊はランダム現象なので、そもそもランダムなノイズ源を利用しているとも言えます。しかも低インピーダンスノイズを発生し、そのためノイズ源としても使われます。

定電圧ダイオードは、レファレンスとなる電圧を得る場合や、回路の電圧保護のため使われます。電圧のレファレンスとして使う場合ノイズは悪役です。そのため、並列に電解コンデンサを接続するのは常識的に行われます。一方、電圧保護は、通常は定電圧ダイオードには電流が流れない使い方なので、ノイズは気にしません。

2.3 トランジスタ増幅回路のノイズ特性

ディスクリートトランジスタで増幅回路を設計製作する事はどんどん減りつつありますが、半導体増幅器のいわば基礎なので、ここで考えておきましょう。

2.3.1 トランジスタのノイズ

トランジスタの NF の周波数特性を図 2.3 に示します (参考資料 [17])。ノイズの性質により、およそ 3 区分され、低周波域での $1/f$ ノイズ領域 (3dB/oct で周波数が低くなるほど増加³)、サーマルノイズ領域そして、トランジスタのカットオフ周波数 f_c 以上での f^2 ノイズ領域です。

図では $\sqrt{f_{ac}f_{bc}}$ と書いてありますが、 f_{ac} と f_{bc} の違いはトランジスタの等価回路のモデルの違い (T 型か II 型か) です。これはカットオフ周波数 f_c と考えていいでしょう。 f^2 ノイズ領域でノイズが 6dB/oct 上昇するのは、トランジスタの増幅率が、カットオフ周波数以上で、 6dB/oct で減少するのに、ノイズレベルはそのままだからです。通常、トランジスタのカットオフ周波数まで使用した増幅器は使用しませんので、ノイズとしては $1/f$ およびサーマルノイズを考えれば十分です。

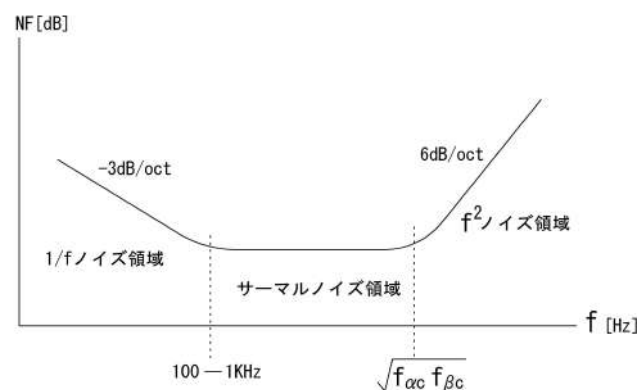


図 2.3: トランジスタのノイズ

²定電圧ダイオードの内 5 V 以下のものはゼナーダイオード、6 V 以上のものがアバランチダイオードです。定電圧ダイオードを総称してゼナーダイオード、ツェナーダイオードと呼ぶ事が多い様です。

³なぜ 3dB/oct なのかについては第 4 章参照。

2.3.2 トランジスタのノイズモデル

実際に低ノイズ増幅器を設計、製作するとなると、使用する部品のノイズ特性や回路方式、部品配置、組み立て方等、非常に広範囲な要素を考えねばなりません。まず能動素子であるトランジスタのノイズモデルについて議論します。

トランジスタを使用したエミッタ接地増幅器は図 2.4 の様な構成となります。ここで V_s は信号源、 R_s は信号源の内部抵抗です。一方、単純な AC 結合型とするとカップリングコンデンサ C_c が必要で、また信号源には並列に C_s （浮遊容量の場合が多いでしょう）が付加されます。単純な構成でも、この程度の素子が、必要、不必要に関わらず存在します。

これを、トランジスタのノイズモデルを考える様に変形しましょう。まず C_c は交流結合とするためなので、ノイズに対して十分大きい値として、ショートと考え、 R_{b1} 、 R_{b2} はトランジスタにバイアスを加えるためなので、無視します。信号源に存在している R_s 、 C_s は C_s をリアクタンス X として R_s に直列に変換、その代わり (A) では見えていないトランジスタのベース拡散抵抗 R_{bb} を可視化しました。また信号源 V_s も、削除します。

ノイズ成分については R_s によるサーマルノイズ（電流が無くても存在するノイズ） V_n 、トランジスタの入力電流（ベース電流でバイアス電流も含みます）を I_n とします。

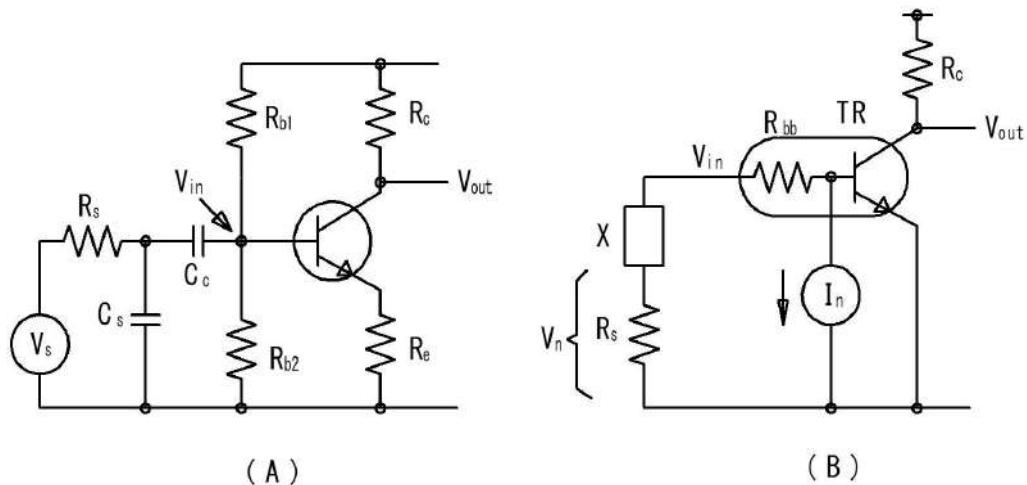


図 2.4: 増幅器のノイズモデル

図 2.4(B) ではトランジスタは理想的なモデルとし、増幅回路の内部にあるノイズ源、そして入力インピーダンスに換算した電圧、電流ノイズ源を基に解析します。

V_n は R_s によるサーマルノイズとなり

$$V_n^2 = 4kTR, \quad V_n = \sqrt{4kTR},$$

室温 $T = 300K$ 、 $R = 1M\Omega = 10^6\Omega$ 、 $B = 1MHz = 10^6Hz$ の時ノイズは $130\mu V$ です。

I_n はショットノイズ

$$I_n^2 = 2qI, \quad I_n = \sqrt{2qI},$$

と表されます。

また、 V_b をベース拡散抵抗によりトランジスタが発生するノイズとします。

これらのノイズに相関が無いとして（普通はこの様に仮定できます）、総合ノイズを計算すると、

$$V_{all} = \sqrt{V_n^2 + \{I_n \cdot (X + R_s)\}^2 + V_b^2},$$

となります。

ここでは、入力に存在するノイズがインピーダンスにより電圧に換算されますから、リアクタンス成分も考慮する必要があります。

2.3.3 NF 値

トランジスタのノイズ特性を表現するものとして NF 値があります。 NF 値の定義は

$$NF = 20 \log \left(\frac{N_{out}}{S_{out}} / \frac{N_{in}}{S_{in}} \right),$$

つまり、入力の SN 比がどの程度悪化したかを示します。

簡単のため、増幅器のゲイン=1 として、 $S_{in} = S_{out} = 1[V]$ とします。また、このトランジスタ（増幅器）のみの SN 比の変化を考えるので、入力インピーダンスにより発生するノイズは入れずに計算します。そこで、 $I_s \cdot (X + R) = 0$ として、

$$\begin{aligned} V_{out} &= \sqrt{V_n^2 + \{I_n \cdot (X + R_s)\}^2 + V_b^2} \\ &= \sqrt{V_n^2 + V_b^2}. \end{aligned}$$

一方、入力のノイズレベルは、

$$V_n = \sqrt{4kTR_s}.$$

従って、 NF 値は

$$\begin{aligned} NF &= 20 \log \left(N_{out}/N_{in} \right) \\ &= 20 \log \left(\frac{\sqrt{V_n^2 + V_b^2}}{V_n} \right) \\ &= 20 \log \sqrt{1 + \frac{V_b^2}{4kTR_s}}. \end{aligned}$$

ここではトランジスタ単体の NF 値を計算しましたが、温度 T や入力抵抗 R_s 、 V_b によって変化する訳です。これはトランジスタの種類やバラツキ、使用条件（環境温度だけでは無く、トランジスタの動作点も含む）による変化がすべて入ってきて、設計者はこの式を有効に使うことはできません。また、実際の増幅回路の NF 値は、 $I_s \cdot (X + R)$ も影響し、さらに複雑です。

この状況を考慮して、トランジスタメーカーは低雑音用トランジスタについては、 NF 値に関するデータシートを用意している訳です。

ここでの要点は、トランジスタの NF が、トランジスタだけでは決まらず、入力抵抗 R_s に依存する事です。

2.3.4 トランジスタデータシートの NF 値

オーディオ回路の初段の増幅に使われる様な、低ノイズトランジスタには、その規格表に NF を表すグラフが記載されます。ここでは、東芝 2SC2240 を例にとって、どのような記載がされているか、そしてそれらをどう解釈すべきかについて述べましょう。

図 2.6 は 2SC2240 のデータシートから、 NF 特性を抜き出したものです。周波数が $1kHz$ の時のデータと、 $10Hz$ のデータが掲載されています。

このグラフには $NF = 1dB$ から $12dB$ となるグラフが信号源抵抗と、コレクタ電流をパラメータとして書かれています。もちろんこの図を参考にして、ノイズの少ない増幅器を設計したい訳ですが

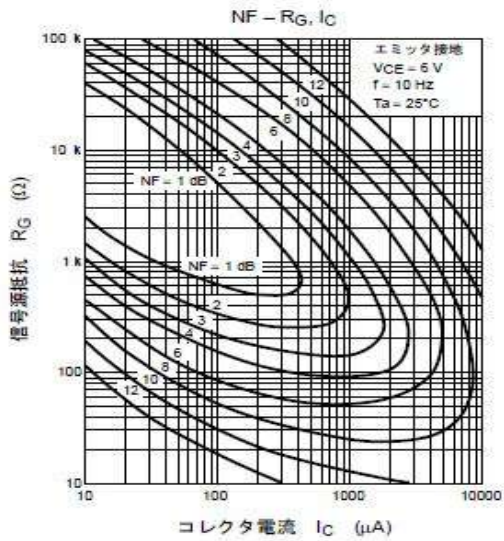


図 2.5: $NF; f=10\text{Hz}$

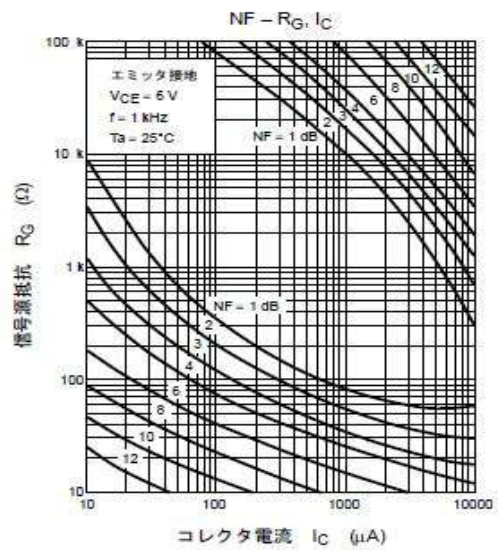


図 2.6: $NF; f=1\text{kHz}$

ら、 $NF = 1\text{dB}$ のグラフ内となる、コレクタ電流や、信号源抵抗を選択します。コレクタ電流は設計者の設計事項ですが、信号源抵抗は、決められていなかったり、不明であったりと厄介です。

一方、設計するアンプの周波数特性は、オーディオアンプとしても、高域は $20\text{kHz} - 30\text{kHz}$ となると想定されますが、これらの周波数の NF は示されていません。

そこで、これらがどうなっている筈かを考えておきましょう。

アンプあるいはトランジスタのノイズは、ショットノイズ、サーマルノイズそして $1/f$ ノイズが主要なもので、低域では $1/f$ ノイズが支配的です。そして高域では $1/f$ ノイズはショットノイズ、サーマルノイズの合計に隠れて見えなくなり、この境目は 1kHz から 2kHz です。つまり $f = 1\text{kHz}$ 以上の NF 値のグラフは、図 2.6 から大きく変化しない筈です。逆に、 $f = 10\text{Hz}$ 、 $f = 1\text{kHz}$ のみ図が示されているというのは、アンプのノイズ特性を設計者も理解していると仮定しているのです。

さらに、コレクタ電流が大きい程電圧ノイズが減る傾向があり、実設計ではこれも考慮しながら NF 特性も考える事になります。

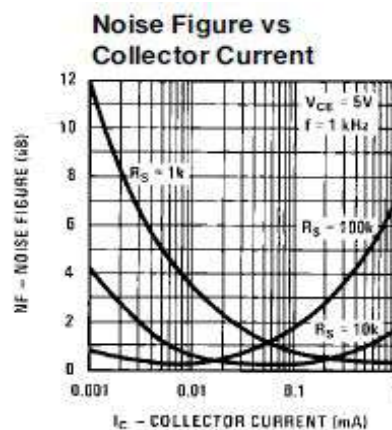


図 2.7: LM394 の NF 特性 ($f=1\text{kHz}$)

トランジスタによっては、図 2.6 の代わりに、入力抵抗をパラメータとして、コレクタ電流と NF 値を示しているものがあります。

この図では、例えば、入力抵抗が $1k\Omega$ の場合、コレクタ電流は $1mA$ 以上で NF 値が良くなり、これは 2SC2240 の場合と傾向が一致しますが、入力抵抗と NF の関係ははっきりしません（これはどのトランジスタでも同様です）。この様なデータをどの様に使い低雑音アンプを設計するかについては第 3 章で述べます。

2.4 IC のノイズ特性

図 2.8 はリニアテクノロジー製、ローノイズ OP アンプ LT1115 のデータブックから抜き出したものです。

入力ノイズ電圧密度 e_n 、入力電流ノイズ密度 i_n が、周波数 $10Hz$ 及び $1kHz$ について記載されています。トランジスタと異なり、コレクタ電流を設定する訳には行かないので、ノイズの基本的データの記載となっています。これらは周波数帯域当たり (\sqrt{Hz}) です。広帯域データとして、 $DC - 20kHz$ のノイズも記載されています ($120\mu V$)。

$$WidebandNoise = InputNoiseVoltageDensity \cdot \sqrt{bandwidth} = 0.9 \cdot \sqrt{20000} = 127\mu V$$

と計算されますので、入力ノイズ電圧密度も rms 表記でしょう。

さらにノイズに関する特性図が非常に丁寧に記載されています。

e_n	Input Noise Voltage Density	$f_0 = 10Hz$ $f_0 = 1000Hz, 100\% \text{ tested}$	1.0 0.9 1.2	nV/\sqrt{Hz} nV/\sqrt{Hz}
	Wideband Noise	DC to 20kHz	120	nV_{RMS}
	Corresponding Voltage Level re 0.775V		-136	dB
i_n	Input Noise Current Density (Note 3)	$f_0 = 10Hz$ $f_0 = 1000Hz, 100\% \text{ tested}$	4.7 1.2 2.2	pA/\sqrt{Hz} pA/\sqrt{Hz}

図 2.8: LT1115 のノイズ関係特性

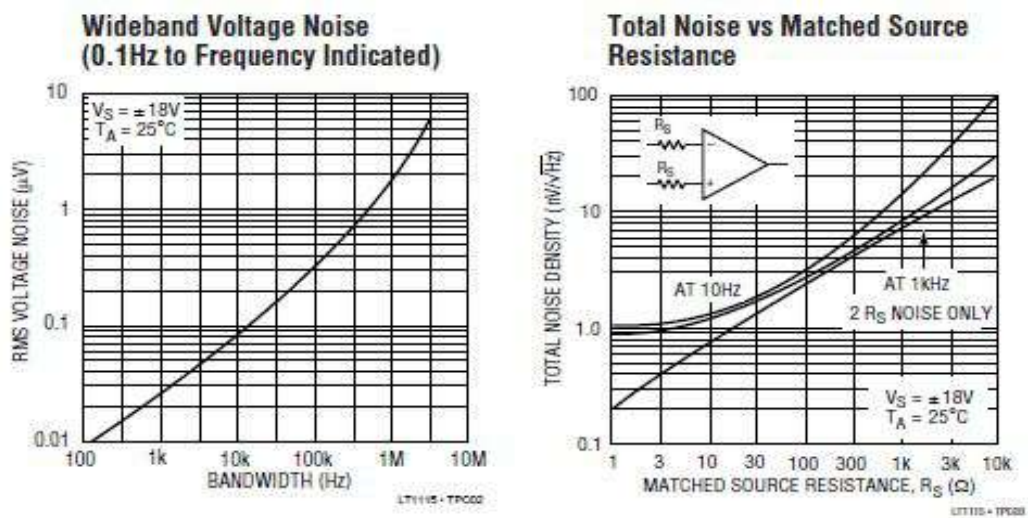


図 2.9: (左) 広帯域ノイズ特性 (右) 信号源抵抗ノイズ特性

図 2.9 の左側は、広帯域の電圧ノイズで、 \sqrt{Hz} に比例する筈なので、単調増加ですが、これを、周波数が増加すると、どんどん SN が悪化と誤解してはいけません。右側は、信号源抵抗（相当）と電圧ノイズ密度で、 $f = 10Hz$ では $1/f$ ノイズの影響が見えます。また、OP アンプの +、- 入力端子には同じ値の抵抗を使用することを前提としています。これは、OP アンプの入力が差動増幅器で構成され、片方だけの入力抵抗を規定したのでは意味が無くなるからです。

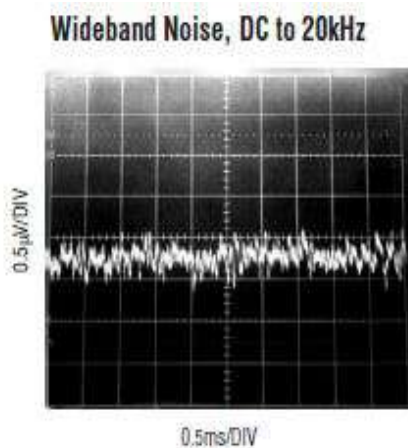


図 2.10: 広帯域ノイズ波形

図 2.10 はノイズ波形が示されていますが、ランダムノイズの筈で、参考ですね。

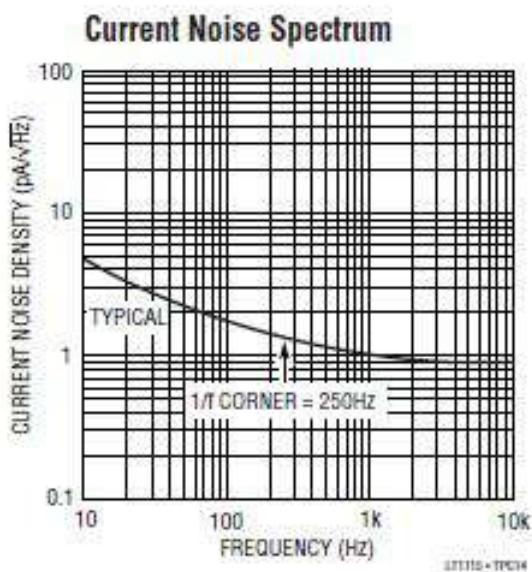


図 2.11: 広帯域ノイズ波形

図 2.11 は電流ノイズスペクトルが示され $1/f$ ノイズとのコーナ周波数が $250Hz$ と記載されています。

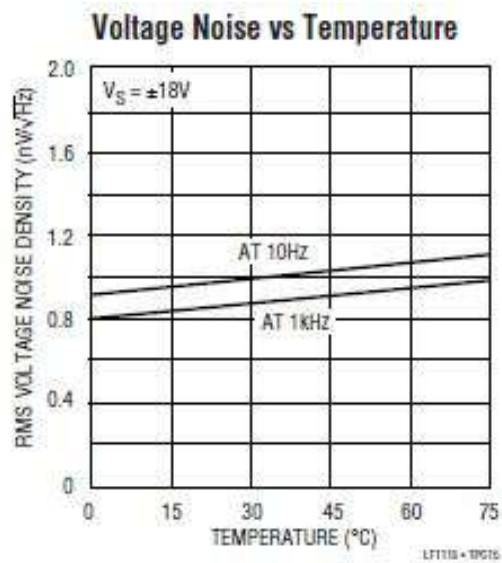


図 2.12: 電圧ノイズ温度特性

図 2.12 は電圧ノイズの温度特性で大変優れた特性を持っていることが読み取れます。

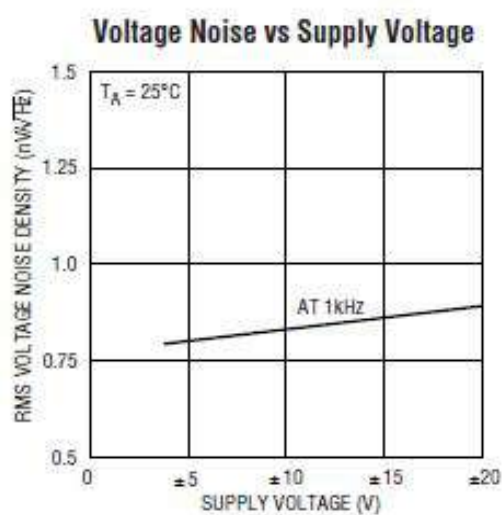


図 2.13: 電源電圧とノイズ

図 2.13 は電圧ノイズの IC の電源電圧特性で、電源電圧が低い程特性が良く、これは、電源電圧の増加で IC 内の電流が増え、これによるノイズの増加を反映していると考えられます。

第3章 実用設計でのノイズ

3.1 オーディオアンプのノイズの考え方

最近のオーディオ（特にデジタルオーディオ）では、低レベル（ μV から mV ）の信号はおろか、アナログ信号そのものが減りつつあります。そこで、低レベルのアナログ信号を扱う例として、現在ではやや例外的になってしまいましたが、アナログオーディオ用プリアンプの場合を議論します。

3.1.1 MC カートリッジ

レコードの溝による物理的変位を電気信号に変換するために、MC(moving coil)、または MM(moving magnet) カートリッジを使用します。

Denon 製カートリッジ DL-103 の電気的特性は（参考資料 [12]）

* 出力電圧； $0.3mV(1kHz, 50mm/sec$ 水平方向)

* 電気インピーダンス； $40\Omega \pm 20\%(1KHz)$

* 負荷抵抗； 100Ω 以上（トランス仕様の場合は別）

とあります。

このような信号源に対する増幅回路は、上例でも分かるように、信号源出力インピーダンスの数倍が適当と言われています。これは、信号源電圧をあまりロスさせず、かつ（トランジスタアンプの場合）トランジスタの NF が良く、さらにカートリッジからプリアンプ入力まで、 $1.5m$ 位のシールド線で接続するのを想定しているからでしょう。（カートリッジはトーンアームに取り付けられますが、この出力端で、すぐに電圧増幅をした方がいい結果が期待できますが、通常の使用前提で設計されています。）

3.1.2 MC カートリッジ用ヘッドアンプ

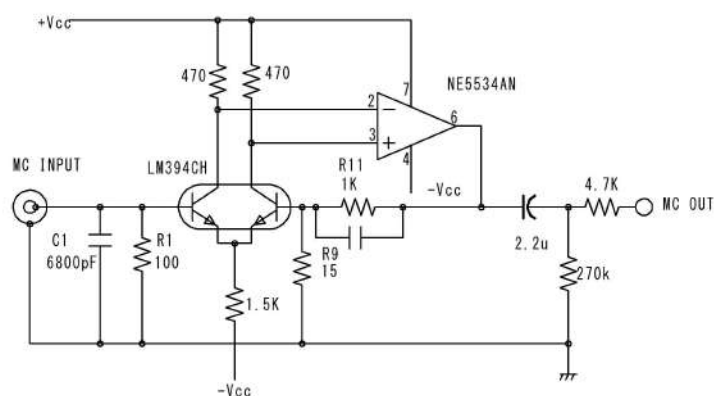


図 3.1: MC ヘッドアンプの回路例

図 3.1 は 1980 年頃に Mission System により発表された Cyrus 2 アンプのヘッドアンプ部分です。図の $R1$ が入力抵抗で 100Ω を使用、ゲインは $R11/R9$ で決まり $36dB$ 程度です。

使用されているトランジスタは、モノリシック構造のペアトランジスタで、2つのトランジスタの h_{FE} のマッチングは 2% 以下となっています。また低雑音で、

$$I_c = 100\mu A, \quad f = 100Hz - 100kHz \text{ の時、 } 1.8nV/\sqrt{Hz}$$

と言う特性です。またこの値はコレクタ電流が $1mA$ 程度の時の方が小さくなります¹ (図 3.2)。

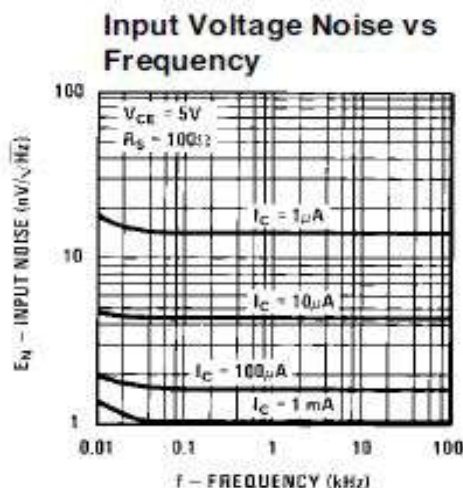


図 3.2: LM394 入力ノイズ電圧-周波数特性

また、図 2.7 より、 NF 値も入力抵抗が $1K\Omega$ 、コレクタ電流が $1mA$ 程度が最小になります。図 3.1 の回路例では、 $-V_{CC}$ は不明ですが、仮に $-12V$ とすると、トランジスタの片側に

$$I_c = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{be} - 12}{1.5} \right) = 3.8 \text{ [mA]},$$

が流れる設計となっています。

トランジスタによる差動増幅回路では、2つのトランジスタの動作点のバランスを取るため、エミッタに抵抗を入れる事が多いのですが、この抵抗は(ゲインの低下を招くと共に)熱雑音を発生させます。そこで低雑音用途では、エミッタ抵抗を入れず、その代わりにペアトランジスタを使用している訳です。

それでは、そもそもペアトランジスタを初段に持ってきた理由ですが、OP アンプ単体では、2006 年ころでも $1nV/\sqrt{Hz}$ を下回る電圧ノイズが得られず、このアンプが設計された時代では OP アンプだけでは低ノイズアンプとならなかったのです。また、参考資料 [15] によれば 2018 年でも、低雑音、低消費電力という点では、良く設計されたトランジスタアンプの方が勝っている様です。

3.1.3 低雑音 IC によるヘッドアンプ

リニアテクノロジー製オーディオ用 IC、LT1115 を用いた、MC カートリッジ用 RIAA ヘッドアンプの回路例を図 3.3 に示します (参考資料 [13])。LT1115 の電圧ノイズは $0.9nV/\sqrt{Hz}$ とありますから、大変優れた値です。

¹一般論として、トランジスタの動作電流が増えた方が電圧ノイズは低下します。

この例でも、MC カートリッジに対する入力抵抗は 100Ω が使われています。なおこの例では、入力はコンデンサカップルでは無く直結で、出力に DC が出現しない様、出力を積分し ($1M\Omega, 1\mu F$)、LT1115 の 2 番端子に負帰還をかけています (DC サーボと言われます)。

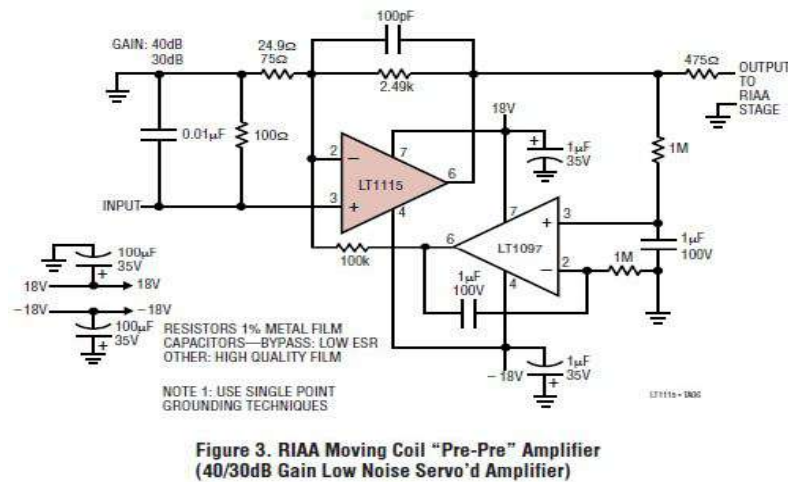


図 3.3: LT1115 によるプリアンプの回路例

3.2 低雑音アンプの回路例

参考資料 [15] による低雑音アンプの回路例です。

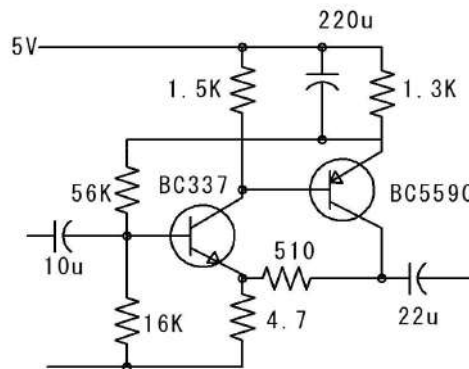


図 3.4: 低雑音増幅器

入力換算ノイズで、 $0.7nV/\sqrt{Hz}$ 、帯域は $1[MHz]$ 以上、ゲインは $40dB$ です。

この参考資料には、低雑音トランジスタの型名も記載されていて、2N3904、2N2222、BC337、BC817、BCP68、2SC3324、2SA1312、ZTX851、ZTX951、ZTX618、ZTX718 等が使えます。

トランジスタアンプの欠点は、入力インピーダンスが低く、従って、入力電流によるノイズが大きくなります。そのため信号源インピーダンスが概ね $1K\Omega$ の場合に向いています。一方、FET を初段とする場合には電流ノイズは考えなくてよくなりますが、 $1/f$ コーナ周波数が高い ($1kHz$ 程度) のと電圧ノイズが大きい事です。ただし FET の特徴として並列動作が可能な点があり、2ヶ並列で、消費電流は増えますが、 SN 比が $3dB$ 改善されます。

この様な FET の一般的傾向の中で 2SK170、2SK369 は良好な特性を持っていましたが、現在は廃品種です（代替品として Linier Systems による LSK170 が有ります）。

3.3 無線通信機器用 LNA

SN 比やノイズを非常に気にする回路設計分野として無線通信用、特に受信用増幅器 LNA (Low Noise Amplifier) があります。

受信機の品質を決めるものとして感度と選択度があり、受信感度は、どのくらい弱い電波まで受信できるかを示すもので、最小の入力レベルです。単位は、 dBm を使い、受信電力が $1mW(50\Omega)$ のときを $0dBm$ として相対的な電力で表します。

一方、選択度は、受信機の妨害波（不要波）の分離能力を言います。妨害波レベルと希望波レベルとの比で表し、単位は dB です。

LNA の扱わねばならない入力電圧は $-100dBm$ にも達し、これは 50Ω 系では、 $2.2\mu V$ となります。LNA の性能を決めるパラメータは NF 、ゲイン、直線性ですが、ここでは特にノイズに関するものを示します。

受信機の感度 P_s は

$$P_s = -174dBm + 10 \log BW + SNR + 10 \log F_{tot}$$

と表す事ができます（参考文献 [14]）。ここで、 BW はシステムのバンド幅、 SNR はビット誤り率より決まる値、 F_{tot} はシステムの総合ノイズ係数で、

$$F_{tot} = F_{LNA} + \frac{F_{afterLNA} - 1}{G_{LNA}}.$$

$F_{afterLNA}$ は LNA に続くステージでのノイズ係数で、これは LNA のゲイン G_{LNA} で圧縮されますが、LNA のノイズ係数 F_{LNA} は全体に対しての寄与が大きい事が分かります。

ビット誤り率については、シミュレーションによると、

Bluetooth; 10^{-3} 以下のビットエラー率、 $SNR = 12.3dB$ 以上要

802.11b 受信機; 10^{-5} 以下のビットエラー率、 $SNR = 11.4dB$ 以上要

という結果が得られています。

ビット誤り率については、 E_b をビット当たりのエネルギー、 N_o をサーマルノイズ密度、 R をデータレート (bits/sec)、 B をバンド幅とすると、

$$SNR = \frac{R E_b}{B N_o},$$

と表せます。 SNR を高めるためには、ビットレートを落とす、あるいはバンド幅を増やす（あるいは両方）必要があり、これは当然の事です。

第4章 $1/f$ ノイズの解析

$1/f$ ノイズの発生原理はまだはっきりしていません。この章では、 $1/f$ ノイズの物理的意味についての仮説について議論します。

4.1 $1/f$ ノイズの観測方法

$1/f$ ノイズが電氣的に観測される例として、抵抗に電流を流した時に発生するノイズがあります。これは例えば第 4.1 図に示すような構成で測定されます。

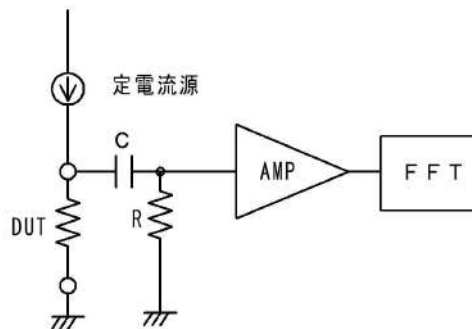


図 4.1: $1/f$ ノイズ測定の構成

図 4.1 で、DUT が被測定抵抗で、抵抗の品質には反しますが、ノイズの多い物ほど測定が容易になります。最近ではほぼ使われなくなったソリッド抵抗 (carbon composite resistor) や厚膜抵抗が適しており、カーボン抵抗は測定し難くなります。また金属皮膜抵抗はさらに測定し難く、DUT としては不適當です。逆に測定用増幅器には、金属皮膜抵抗を使用します。

DUT には定電流電源により一定の電流を抵抗に流し、 $1/f$ ノイズを発生させます。サーマルノイズは（絶対）温度による電子のランダム振動が原因なので電流がゼロでも発生、電流を流すと温度が上昇して増加しますが、これは必要悪です。

理想的定電流電源の内部抵抗は ∞ なので、DUT の端子に出現する電圧は（DUT の抵抗値に関係なく）減衰しません。実際には定電流源の内部抵抗と DUT の分圧比で減衰してしまうので、定電流源の内部抵抗は出来るだけ高くします。抵抗 (DUT) に定電流を流すという意味では、定電圧源を用いても、全く同等ですが、定電圧電源の内部抵抗はゼロで、ノイズはすべてこれにマスクされ観測できません。

AMP は高ゲインの増幅器で、ゲインは 100dB 程度以上必要です。また $1/f$ ノイズは周波数が低い程大きくなりますから（周波数、パワースペクトル電圧とも対数軸で表現した時、左上がりの直線）低域のカットオフ周波数がノイズ測定の下限周波数を決めてしまいます。 0.01Hz で 100 秒周期、 0.001Hz では 17 分の周期となるので、測定対象 $1/f$ ノイズにもよりますが、 0.01Hz 程度以下が実用的でしょう。

特に図 4.1 では、高ゲインアンプの出力断の DC オフセット調整を容易にするため CR 結合として

あり、この時定数がカットオフを決めます。この場合、入力インピーダンスを決める抵抗 R は通常 $4.7\text{M}\Omega$ 程度が最大値、入手可能な漏れ電流の少ない（従って、耐圧も高い）フィルムコンデンサの最大値は $10\mu\text{F}$ 程度ですから、 0.02Hz (47 秒) 程度のカットオフ周波数です。

4.2 $1/f$ ノイズの悪影響の例

$1/f$ ノイズが悪影響を与える実例として、発振器の出力に対する位相ノイズがあります ([18])。この位相ノイズは発振出力の信号の純度を悪化させ、理想的なスペクトラムでは δ 関数となるべきものが、実際には周波数帯域を持ったスペクトラムになります。

これは無線通信の SN 比を悪化させる要因で、特に周波数が高い程位相ノイズの影響が大きくなりますので、最近特に研究が盛んになっています。（これは位相ノイズの発生源が同じエネルギーだとすると、周波数が高い程位相変化に効く訳です。）

この位相ノイズを表現する式として、Leeson の式が知られています。

$$L(f_m) = \frac{\gamma}{f_m^3} \left(\frac{f_0}{2Q} \right)^2 + \left[\frac{1}{f_m^2} \left(\frac{f_0}{2Q} \right)^2 + 1 \right] \left(\frac{FkT}{P_o} \right)$$

発振器の発振周波数： f_0

発振周波数からのずれ： f_m

$1/f$ ノイズによる比例係数： γ

能動素子によるノイズの係数： F

ボルツマン定数： k

発振電力： P_o

絶対温度： T

発振器のクオリティー係数： Q

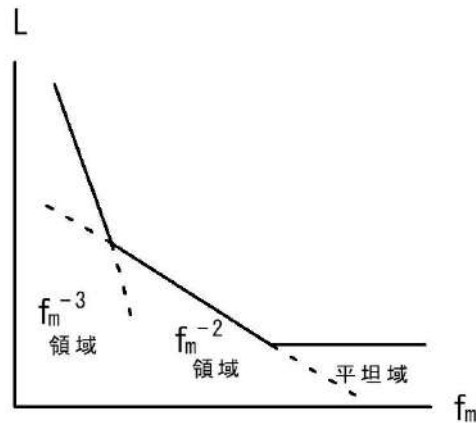


図 4.2: 発振器の位相ノイズスペクトラム

位相ノイズスペクトラムは図に示す様に発振周波数からのずれ f_m の 3 乗に反比例する部分、2 乗に反比例する部分および平坦な部分で近似されます。これは実験により求めた式ですが、3 乗および 2 乗に反比例する位相ノイズの原因は $1/f$ ノイズと言われています。

4.3 $1/f$ ノイズの発生メカニズムの考察

4.3.1 LC 発振回路

水晶発振回路も、 LC 発振回路も、その等価回路の共振部分は単純な LC 共振回路です。

そこで、発振器に関する $1/f$ ノイズの発生原理を考える上で、発振回路の基本要素である共振回路についてのアナロジーを用いて議論して見ます。

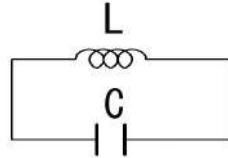


図 4.3: LC 共振回路

図 4.3 は理想素子による LC 共振回路です。この回路に何らかの理由で共振電流が流れると、これは永久に続き、その共振周波数は

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad [Hz]$$

となります。 L 、 C とも理想素子ですので、値は常に一定、従って f も一定です。一方、この共振回路が電磁界中や一般の環境中で動作する場合を考えると、 C や L に電界や磁界が影響し、電荷や電流を加えたり、奪ったりします。また宇宙線などの影響でも同様の現象が発生する筈です。すると、それが発生した時点で C や L の値が変化し、共振周波数をずらしします。しかし、これらの電磁界や環境要因は平均的にはゼロで、共振回路の周波数を恒常的にずらす事はなく、瞬間的にずれる事があっても、本来の共振周波数に戻ります。

これらの共振周波数からの一次的周波数偏移が位相ノイズとなります。

4.3.2 振り子によるアナロジー

ひもの先に錘をつけた単純な振り子を考えます。これも理想状態で振動させるとして、その周期（周波数）は一定、運動の減衰ありません。

この振り子に対して、横から、砂粒をランダムに衝突させる事を考えましょう。砂粒はランダムに飛んでくるので、衝突確率もランダム、また振り子に対して振幅を増加あるいは減少させる確率も、そのエネルギー量もランダムです。

振り子に砂粒が衝突した時、砂粒の持つ運動エネルギーが錘に移動（すべて移動する必要はありません）、振り子の動きに影響を与え、これは振り子の位相ノイズを発生させます。砂粒から錘へのエネルギー移動は、エネルギーを加える場合と奪う場合が確率的に等しくその総合的エネルギーはゼロです。（さもないと、振り子が停止したり、振幅過大となる。この様な砂粒の当て方はしないします。）

これも LC 発振回路の位相ノイズの発生と同様なメカニズムなのが分かります。

4.4 位相差とフーリエ変換値

$1/f$ ノイズは各種周波数を含みますが、私たちがこの周波数スペクトラムを測定する時にはフーリエ変換を使うのが普通でしょう。PC 上で動作するフーリエ変換にせよ、専用測定器による FFT(Fast

Fourier Transform) にせよ、アルゴリズムは同一で第 4.7 節に述べる通りです。

つまり、測定開始周波数から、測定終了帯域まで、適当なレゾリューションで発生したサイン波、コサイン波による掛け算を実施、それぞれの 2 乗値を足し合わせます。

そこで、ある特定の周波数のフーリエ変換値がどうなるか考えます。変換対象の信号（ノイズの特定の周波数成分）はサイン波で、周波数は固定です。位相ノイズの存在は、ターゲット信号の位相変動を意味します。ただし、この位相変動は、フーリエ変換アルゴリズム中のサイン波を基準にします。

フーリエ変換ではターゲットに対して、サイン波とコサイン波両方の掛け算を実行しそれぞれを計算しますから、ターゲット信号に位相変動があったとしても、計算アルゴリズムによるスペクトラムの値の変動はありません。

一方、微分演算に関しては

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t,$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt} \sin(2\pi f t) = 2\pi f \cos(2\pi f t).$$

積分については、

$$\int \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t,$$
$$\int \sin(2\pi f) t dt = -\frac{1}{(2\pi f)} \cos(2\pi f) t.$$

ここで、サイン波を考えているので、微分については位相が $\frac{1}{2}\pi$ 遅れ、積分については $\frac{1}{2}\pi$ 進みます。

ここで、分数回の微積分について考えると、

位相の $\frac{1}{2}\pi$ 遅れ → 1 回微分

位相の $\frac{1}{2}\pi$ 進み → 1 回積分

に対応していますから、位相の $\frac{1}{2}\pi$ 以下の遅れは、分数回の微分、位相の $\frac{1}{2}\pi$ 以下の進みは分数回の積分に相当します。特に遅れあるいは進みが $\frac{1}{4}\pi$ ならば、1/2 回の微積分です

これが、数学的な議論ですが、現実の物理では、インターアクションの結果が微分特性になることは起こりません（微分はいわば未来予測）。従って、ターゲットは位相ノイズにより、位相の進みのみが発生し、この時の振幅に掛かる係数は $\frac{1}{2\pi f}$ となります。

このような状況で、位相ノイズを持った信号をフーリエ変換すると、その出力レベルは位相ノイズの無い場合に比較し、周波数に反比例して増加します。

ここで、位相ノイズによる積分効果の振幅は、ゼロから $\frac{1}{2\pi f}$ のどこかの値ですが、これはランダムなので、平均はこの半分、つまり 1/2 回積分相当の値となります。

4.5 位相ノイズの原因

位相ノイズは $1/f$ に比例して振幅が増加する事が分かりましたが、この原因は次の様に考えられます。外部よりランダムに加えられるノイズは、ターゲットシステムやデバイスに対して積分位相ノイズのみを発生させます。つまり、微分位相ノイズは数学的にのみ発生可能です。また計測ではノイズの最小値ホールドが出来ないので、積分位相ノイズで、システムのノイズ振幅が一時的に減少しても検出できず、最大値による $1/f$ 特性のみが検出されます。

これから $1/f$ ノイズは、外部からのランダムなエネルギー供給による平均値がゼロとなる摂動と考えられます。抵抗による $1/f$ ノイズの原因は外部の電磁界の影響も、電流による熱雑音の影響も考えられます。

4.6 ソリッド抵抗のノイズの原因

ここでソリッド抵抗の構造を考えると、炭素系抵抗体とセラミックなどを練って焼結したものが使われており、内部構造としては、小さな少しずつ異なる抵抗を直並列し、さらに、それらの結合点に浮遊容量やインダクタンスが接続されたものと考えられます。

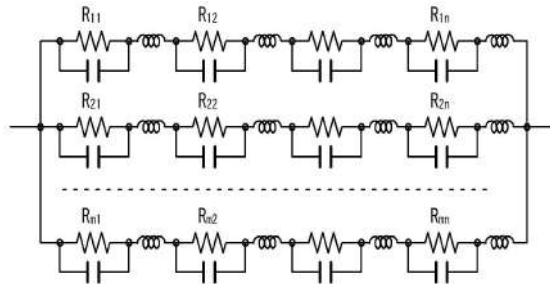


図 4.4: ソリッド抵抗の等価回路

従って、このような抵抗に電流を流すと、各抵抗素子間にできる電位差が非連続、非線形になります。さらに電流の流れる経路は一義的に決定できず、内部に寄生する LC との間でエネルギー授受が発生、ノイズが発生すると想像されます。

一方、炭素皮膜や金属皮膜抵抗では、抵抗体が連続（いわば粒度が小さい）なため、電位勾配が線形で連続となり、内部寄生 LC との間でのエネルギーやり取りが少ないものと思われます。またそもそも LC の値も小さい筈です。

4.7 フーリエ変換

4.7.1 三角関数の掛け算

角周波数 ω をもつサイン波は

$$\sin \omega t$$

と表せますが、このサイン波同士の掛け算をしてみます。

$$\sin \omega t \times \sin \omega t$$

これを図形により表現すると、図 4.5 のようになります。

大変興味深いことに、 $\sin \omega t$ 同士を掛けると $2\omega t$ の周波数をもった波形が得られ、しかも、この位相関係を見ると $-\cos 2\omega t$ になっていて、振幅は $1/2$ となっています。またこのコサイン波の中心は、 $1/2$ となっていますから、結局

$$\sin \omega t \times \sin \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$$

となります。

あるいは

$$\cos 2\omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t$$

のように書き表すと、いわゆる三角関数の倍角公式で、これは高校の数学で習うはずですが。

ここで、この掛け算した関数を図 4.6 のように単なる数値部分¹と $\cos 2\omega t$ 二つの成分に分解し積分して見ます。積分の開始点は取りあえず原点としましょう。すると、DC 成分の積分値は、面積で

¹電子工学ではこの数値部分を DC（直流）成分、コサイン成分を交流成分といいます。

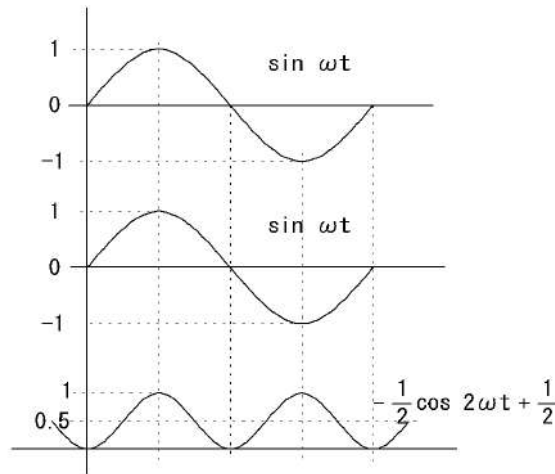


図 4.5: サイン波の掛け算

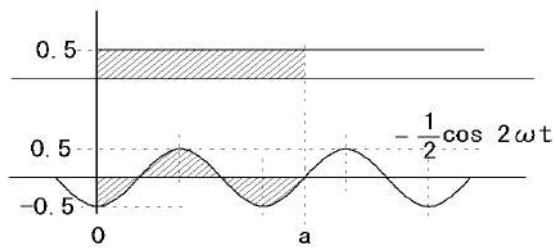


図 4.6: $\sin \omega t \times \sin \omega t$ の積分

すので積分の終了点 a を適当に選べば、その値はどんどん大きくなります。一方交流成分の積分値は積分開始点と、終了点に依存しますが、最大でもコサイン波のプラス部分の面積、最小はこの値に負号をつけたもので、平均値はゼロです。つまり、積分領域を適当に広く取ることによって、DC 成分の積分値に対して、AC 成分の積分値を無視することができます。この DC 成分の積分値を角周波数 ω に対応するスペクトラムと呼ぶ事にしましょう。

ここまでは、同じ角周波数のサイン波の掛け算でしたが、一方の周波数が ω' の場合を考えます。この場合には三角関数の関の公式

$$\sin \omega' t \times \sin \omega t = -\frac{1}{2} \{ \cos (\omega' t + \omega t) - \cos (\omega' t - \omega t) \}$$

より、DC 成分がありませんので、積分してもどんどん増加する項はなく、ある値の範囲内に収まります。言いかえると $\sin \omega t$ で掛け算し、さらに適当な区間に渡って積分した時、スペクトラムが得られるのは、角周波数が ωt の時のみです。

ところが $\sin \omega t$ による掛け算ではちょっと困った事が起こります。それはスペクトラムを求めるターゲットとなる関数の位相がずれると（つまり $\sin(\omega t + \phi)$ のような関数をターゲットとすると）DC 成分が $1/2$ より小さくなり、同じ区間を積分してもスペクトラムの値が変化してしまうのです。特に位相差が $\frac{1}{2}\pi$ つまり $\cos \omega t$ のターゲット関数に関しては DC がゼロとなってしまうスペクトラムが得られません。これは

$$\sin \omega t \times \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

という公式からも明らかです²。しかし、

$$\cos \omega t \times \cos \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t$$

であることを思い出すと、位相が $\frac{1}{2}\pi$ ずれた波形に関しては、 \cos を掛けて積分すれば同様にスペクトラムが得られる事がわかります。

結局、適当に与えられた信号について、いつも $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の両方を使って計算すればよさそうです。しかしまだ、ターゲット関数のスペクトラムがその位相により一定とならないような感じを持つかもしれませんが、スペクトラムを両方で得られた値の 2 乗和と定義しなおします。つまり

$$\begin{aligned} & \{f(t) \sin \omega t\}^2 + \{f(t) \cos \omega t\}^2 \\ &= f(t)^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \\ &= f(t)^2 \end{aligned}$$

のように考えると、 $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ がうまく補正し合って、ターゲット関数の位相がどうであれ、一定のスペクトラムが得られます。

このように $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ をいつもペアとして計算すればいいのですが、これを一つの式に纏められないか、考えましょう。まず

$$f(t)(\sin \omega t + \cos \omega t)$$

のような掛け算をし、そのあと適当な始点から終点まで積分するという方法が考えられます。ところが、 $\sin \omega t + \cos \omega t$ は、二つの位相の異なるサイン波の足し算であり、結局サイン波となってしまいます。つまり $f(t) \sin \omega t$ という掛け算だけを実行しているのと同じになってしまい、これは失格です。

実は、実数関数の領域で考えている限り、これ以上に進むことができません。若干の飛躍はありますが、ここで複素関数まで思考領域を広げ、その値が

$$\{f(t) \sin \omega t\}^2 + \{f(t) \cos \omega t\}^2$$

となるように考えながら、 $f(t)(\sin \omega t + \cos \omega t)$ の表記順序をちょっと変更し、複素化を図るとともに積分を書き加えると

$$\begin{aligned} & \int f(t)(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= \int f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

となります。これは係数や積分領域は明示していないものの、フーリエ変換の定義式そのものです。

以上で、フーリエ変換が実際、何を行っているか明確になったと思います。特に、フーリエ変換では、その係数は全く問題ではなく、全体の結果 $F(\omega)$ を適当に調整するものであり、またその積分域も自分の要求を満たすように適当に決めていいものであることが分かります³。フーリエ変換の本質は、 $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ という三角関数のペアを使って、ターゲット関数との掛け算を行い、その角周波数で発生する成分を、角周波数をいちいち変化させて見つけ出すというものです。

²単なる数値項、つまり DC 項がありません。

³数学的には $-\infty$ から ∞ ですが、工学的には「気の向いたところ」から「気の済むところ」までです。

4.7.2 フーリエ変換のプログラム

以下にフーリエ変換を実行する C ソースコードの主要部の例を示します。これをみると、sin と cos による掛け算を、角周波数を変化させながら実行しているのが明確に分かります。逆になぜ、このような処理となるのかは上記に述べた理由があるからです。以下のプログラムで積分の開始値はゼロ、最終値は N です。pi は円周率 (3.1415...) です。f[k] はターゲットとなる信号 (データ) を記述した配列です。

```
for(n=0;n<N;n++) {  
    ReF=ImF=0.0;  
    for(k=0;k<N;k++) {  
        ReF+=f[k]*cos(2*pi*k*n/N);  
        ImF+=-f[k]*sin(2*pi*k*n/N);  
    }  
    F[n] = ReF*ReF+ImF*ImF;  
}
```

最終結果は配列 F[n] として得られますが、実部と虚部をそれぞれ 2 乗して加えていますから、複素計算などは全く現れていません。

第5章 $1/f$ ノイズの測定

ここでは、 $1/f$ ノイズ測定の2つの例について記します。第5.1節の例は、筆者が実際に設計、製作したもので、第5.5節は、文献 [6] に報告されているシミュレーション例です。

5.1 $1/f$ ノイズ測定装置

ソリッド抵抗は $1/f$ ノイズを測定のために適している材料で、これを使用した測定回路について述べます。 $1/f$ ノイズ測定のプリアンプ部分の回路図を第5.1図に示します。電源は乾電池 006P による

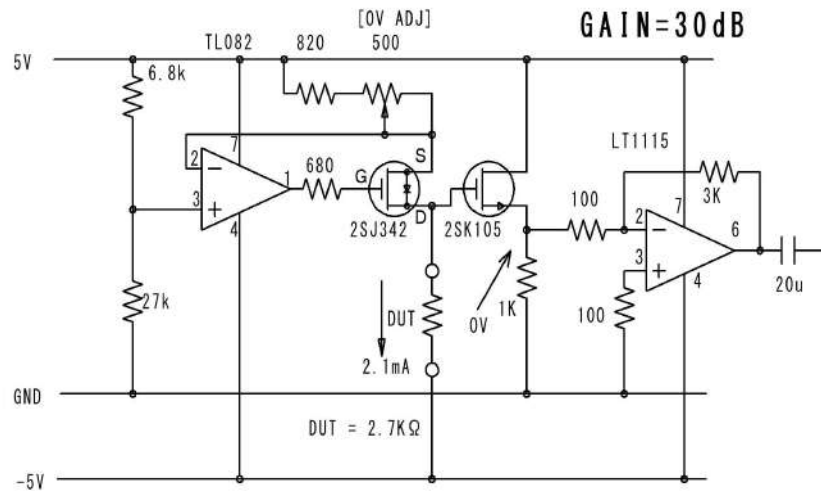


図 5.1: $1/f$ ノイズ測定の構成

る正負 9V の電源を $\pm 5V$ に安定化して使用、OP アンプをすべて両電源駆動しています。TL082 と 2SJ342 により定電流回路を構成、DUT に約 $2.1mA$ を供給、これがノイズ源です。ノイズ源は 2SK105 によるソースフォロワでインピーダンスを下げると共に、ソースの DC レベルが 0V となるように、定電流源の電流値を微調します。使用した抵抗はソリッド抵抗 (Carbon composite resistor) 2.7KΩ、1/2W のもので、メーカーは Arcol です。

プリアンプの、ノイズ出力は 0.5Vp-p 程度に設定 (ノイズレベルを実測しながら設定)、その結果 OP アンプのゲインは 30dB となりました。出力は 20μF のフィルムコンデンサで、次段に結合、全体としては AC 増幅器としました¹。

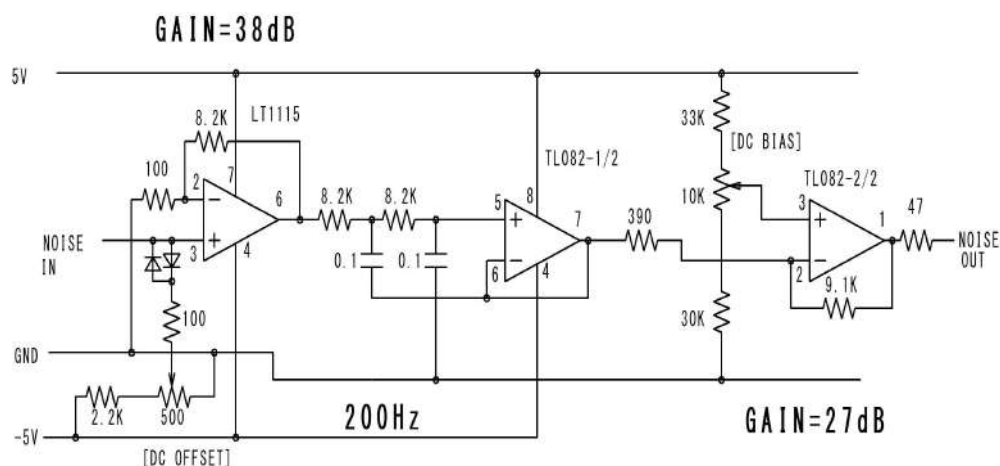


図 5.2: 2 段目以降の処理

5.2 ノイズアンプおよびフィルタ

図 5.2 に、2 段目以降の回路を示します。2 段目は、ゲイン 38dB のアンプにより、増幅、これをカットオフが 200Hz の 2 次バターワース LPF により、高域を落とし、再度 27dB 増幅、最終的に約 1V_{pp} 程度のノイズ信号を得ています。

2 段目のアンプの特徴は、DC オフセットを小さくし、入力抵抗によるノイズを小さくするため \pm 入力に 100Ω の抵抗を使用、しかし、これでは入力信号（増幅対象のノイズ信号）が減衰してしまうので、向かい合わせにしたダイオードを入れた点です。このダイオードペアは 0.7V_{pp} 程度までの信号に対しては、インピーダンスが非常に高くなります。これが、初段プリアンプの出力を 0.5V_{pp} 程度に設定した理由です。

[DC OFFSET] 調整により LPF の出力をゼロ V に調整、[DC BIAS] で最終的出力の DC レベルをゼロ V 付近に調整しますが、ドリフトが安定するのに 1 時間ほどかかります。またこの調整をしても、15 分程度で飽和領域 ($\pm 4\text{V}$ 弱) に達してしまい、測定はこの時間内に実施、飽和したならば再度 [DC BIAS] を調整します。ここには多回転ポテンシオメータを使用しています。

最終的に AD 変換をして、時系列デジタルデータとしますが、このサンプリング周波数を 500Hz と想定しました。

5.3 データ測定

実際のデータ測定には、National Instruments 製 USB-6001 を使い、AD 変換しました。 500Hz サンプリングで、サンプル数 262144 としまし。

図 5.3 は本測定装置による測定データ例、図 5.4 は全測定データを使用した、パワースペクトラムで、数 Hz 付近にある折れ点の影響が表れている様です。一方図 5.5 は、赤の部分のデータを使用した結果で、傾き -1 の直線の良く一致しているのがわかります。

¹ここを直結にした DC 増幅も実験してみましたが、全体のゲインが 95dB にも達するため、出力はすぐに飽和、使用できませんでした。

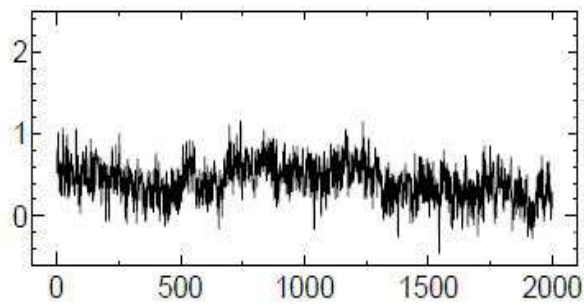


図 5.3: ノイズ波形例; 兵庫県立大学、中村教授による加工データ

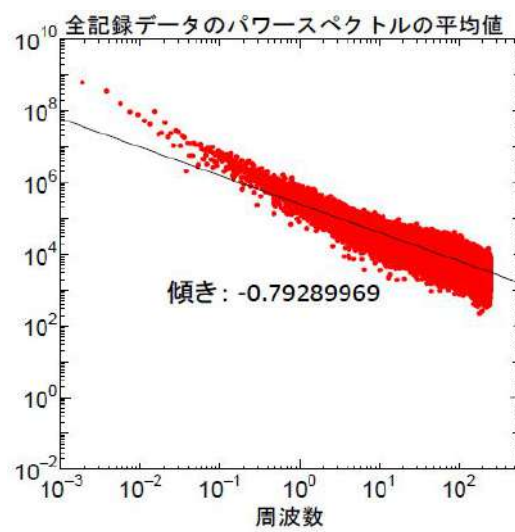


図 5.4: パワースペクトラム; 兵庫県立大学、中村教授による解析データ

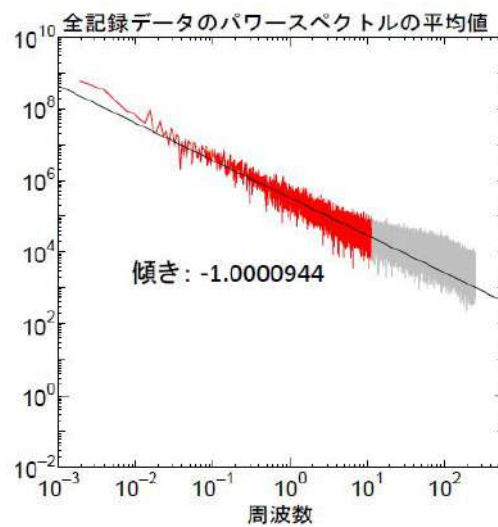


図 5.5: パワースペクトラム; 兵庫県立大学、中村教授による解析データ

5.4 全体構成

図 5.6 に装置の構造を示します。

全体の回路はシールドケースに入れ、 \pm 電源および GND は幅 3mm 程度の銅板を使用しました。抵抗類は全て、金属皮膜抵抗を使用、初段の DUT 接続部はテフロン端子を使用して、空中配線としてあります。回路図では省略しましたが、OP アンプの電源端にはデカップリングコンデンサが接続されています。

また、装置そのものが正しく動作しているか否かを知るのが困難で、結局ソリッド抵抗の代わりに、通常のカーボン抵抗を使用した場合との比較（ノイズレベルは約 10 倍異なる様です）およびソリッド抵抗で $1/f$ 特性が観測できたという点で判断しました。

結果としては、約 10Hz 程度で熱雑音にマスクされ始めますが、それ以下では理論的に予想される 3db/oct カーブが得られ、簡易回路の割には、特性がよく見られたと思われます。

一方、この程度の簡易回路では、これ以上の特性改善は困難でしょう。カップリングコンデンサが $20\mu\text{F}$ ですので、ダイオードの逆方向インピーダンスを $5M\Omega^2$ と仮定すると、時定数は 100 秒程度です。またドリフトが抑えきれず、飽和に達したらば、再度 DC バイアスの調整をすると割り切った設計です。一方、屈曲点周波数は、熱雑音（と回路による雑音）で決まり、熱雑音を減らすには冷却するしかなく、一挙にシステムが大規模になります。



図 5.6: 内部構造

5.5 CMOS トランジスタのノイズ測定

参考資料 [6] による MOS トランジスタのノイズ測定回路です。これはシミュレーションなので、実際の測定はこのままでは使えないでしょう。例えばオリジナル資料のコンデンサの値がどちらも 10F となっており、これが $10\mu\text{F}$ の誤りでなければ、通常 10F のコンデンサは入手不能です³。

MOS トランジスタのベースは抵抗 (50Ω) により接地、ソースに定電流源を入れてドレイン電流を一定値にしています。定電流源に並列に入れたコンデンサはトランジスタの交流ゲインを大きくするためです。 $R_d = 1\text{k}\Omega$ 、 $R_r = 10\text{k}\Omega$ の時に最良の結果が得られたとあります。この場合 OP アンプ

²簡易測定では $5M\Omega$ 以上はありそうです。

³メモリーバックアップ等に使用される、電気二重層コンデンサはありますが、これがこの回路で使用可能化どうか分かりません。

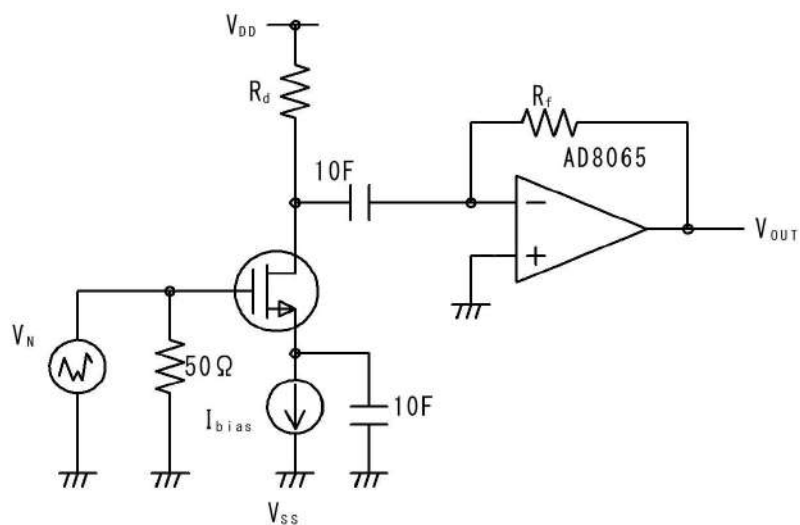


図 5.7: MOSFET のノイズ測定回路

のゲインは 10 倍と考えられ、OP アンプ端のノイズ測定には小さすぎる筈で⁴、いくら小さな値でも扱えるシミュレーションだから可能な回路と思われます。しかし、基本的考え方は、抵抗の $1/f$ ノイズ測定回路と同じなのが分かります。

この報告は、IC に使用される、非常に小さなスケールで設計されたトランジスタの $1/f$ ノイズ測定が目的で、OP アンプの帯域も 10MHz と広く取ってあります。また、ノイズ計算のための計算式が示されており参考になります。

⁴実際のノイズ測定には、80dB から 100dB を超える増幅が必要です。

参考資料

- [1] Wikipedia Shot noise
https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_noise
- [2] Wikipedia Flicker noise
https://en.wikipedia.org/wiki/Flicker_noise
- [3] Wikipedia Johnson-Nyquist noise
https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson%E2%80%93Nyquist_noise
- [4] 橋口 住久
低周波ノイズ
朝倉書店 (1991) ISBN 4254208057
- [5] <https://www.physics.utoronto.ca/~phy225h/experiments/thermal-noise/Thermal-Noise.pdf>
- [6] Jesse Aaron Richmond
Design of a Noise Measurement System for CMOS Transistors
http://trace.tennessee.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1911&context=utk_chanhonoproj
- [7] Vishay precision group
Selecting Resistors for Pre-Amp, Amplifier, and Other High-End Audio Applications
<http://www.vishaypg.com/doc?49997>
- [8] Patrick Barry and Steven Errede
Measurement of 1/f Noise in Carbon Composition and Thick Film Resistors
<https://pdfs.semanticscholar.org/3b42/66ac74bfc96b3e1460e1d550ebeec0c9b8aa.pdf>
- [9] Vasilescu Gabriel
Electronic Noise and Interfering Signals: Principles and Applications.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [10] Noise in Semiconductor Devices
Alicja Konczakowska
<http://www.eng.auburn.edu/~wilambm/pap/2011/K10147.C011.pdf>
- [11] 吉田 裕道、三上 和正
電子部品欠陥検査への 1/f ノイズの応用
東京都立産業技術研究所研究報告 第 3 号 (2000)

- [12] Denon DL-103 stereo cartridge 取扱説明書
https://www.denon.jp/jp/product/accessories/cartridges/dl103?docname=DL-103JP_IM.pdf
- [13] Linear technology
LT1115 Ultralow Noise, Low Distortion, Audio Op Amp データシート
- [14] Chunyu Xin
Radio Frequency Circuits for Wireless Receiver Front-Ends
<https://core.ac.uk/download/pdf/4269875.pdf>
- [15] Vojtech Janásek,
Design of ultra low noise amplifiers
<http://www.janascard.cz/PDF/Design%20of%20ultra%20low%20noise%20amplifiers.pdf>
- [16] Jeffrey Keyzer, Anthony Long
A Dual-Stage Low-Noise Amplifier for 24 GHz Using Packaged p-HEMTs
http://mightyohm.com/files/24ghzLNA/final_paper.pdf
- [17] Bipolar transistors
Toshiba
<https://toshiba.semicon-storage.com/info/docget.jsp?did=63511>
- [18] Prof. Ali M. Niknejad
Oscillator Phase Noise
University of California, Berkeley 2009
- [19] 伊東健治、森正朝也、大平孝
マイクロ波発振器設計の基礎
金沢工業大学、豊橋技術科学大学
- [20] 島津製作所 データロガー ssrDlog1
技術解説（電気信号の様々な測定方法）
<https://www.shimadzu.co.jp/ssr/etc/ssrDlog/document.html>
- [21] MIL-STA-202B, March, 1960
Method 308, Current-Noise test for fixed resistors.
- [22] Quan-Tech Model 315
Instruction manual.