Лекция 3

Сравнение бесконечно малых. Символы «о» и «О». Эквивалентные бесконечно малые, их применение к вычислению пределов. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Рассмотрим функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, для которых

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0,$$

то есть бесконечно малые в окрестности x_0.

1. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad |A|<\infty,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми **одного порядка**. В частности, если A=1, говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – **эквивалентные** бесконечно малые.

2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка** по сравнению с $\beta(x)$.

3. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A,\quad |A|<\infty,$$

то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая порядка n по сравнению с $\beta(x)$.

Обозначения: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ – бесконечно малые одного порядка, $\alpha(x)\sim\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые, $\alpha(x)=o(\beta(x))$ – α есть бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

Замечание 1.
Используя 1-й и 2-й замечательные пределы и их следствия, можно указать бесконечно малые функции при $x\to 0$, эквивалентные x:

$$\sin x,\ \mathrm{tg}\,x,\ \arcsin x,\ \mathrm{arctg}\,x,\ \ln(1+x),\ e^x-1.$$

Замечание 2.
При раскрытии неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, то есть предела отношения двух бесконечно малых, можно каждую из них заменять на эквивалентную – эта операция не влияет на существование и величину предела.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1-arctg(5\sin x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{-arctg(5\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-5\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-5x}=-\frac{3}{5}.$$

Бесконечно большие функции

Функция f(x) называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$$

Для бесконечно больших можно ввести такую же систему классификации, как и для бесконечно малых, а именно:

1. Бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ считаются величинами одного порядка, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A,\quad |A|<\infty.$$

2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty,$$

то $f(x)$ считается бесконечно большой более высокого порядка, чем $g(x)$.

3. Бесконечно большая $f(x)$ называется величиной k-го порядка относительно бесконечно большой $g(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=A,\quad |A|<\infty.$$

Замечание.
Отметим, что a^x – бесконечно большая (при $a>1$ и $x\to\infty$) более высокого порядка, чем x^k для любого k, а $\log_a x$ – бесконечно большая низшего порядка, чем любая степень x^k.

Теорема.

$$\textit{Если}\quad \alpha(x)\quad - \quad \textit{бесконечно малая при } x\to x_0,$$

$$\textit{то}\ \frac{1}{\alpha(x)}\quad - \quad \textit{бесконечно большая при } x\to x_0.$$

<u>Доказательство.</u>
✓
Докажем, что

$$\forall M>0\quad \exists\delta(M):|\frac{1}{\alpha}|>M\quad \textit{при}\quad |x-x_0|<\delta.$$

Для этого достаточно выбрать в качестве ε $1/M$. Тогда

$$\textit{при} \quad |x-x_0|<\delta \quad |\alpha(x)|<\frac{1}{M},$$

следовательно,

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right|>M. \quad \textit{Значит,} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha(x)}=\infty,$$

то есть $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$.

☑