Лекция 1

Множества. Операции с множествами. Отображения множеств. Множество действительных чисел. Числовые множества. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции. Предел функции в точке и на бесконечности. Свойства предела. Односторонние пределы. Предел числовой последовательности

Замечание. Понятие множества, как и другие основополагающие понятия математики, вводится без определения.

Операции с множествами

1. Включение множества A в множество B $(A \subset B)$. При этом каждый элемент множества A является элементом множества B, и множество A называется подмножеством множества B. В частности, $A=B$, если все элементы множества A принадлежат множеству B и наоборот.
2. Объединение множеств A и B $(A \cup B)$ - множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B.
3. Пересечение множеств A и B $(A \cap B)$ - множество всех элементов, принадлежащих одновременно A и B.
4. Разность множеств A и B ($A \backslash B$) – множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством****.*

Пусть заданы непустые множества X и Y.

Соответствие, при котором каждому элементу множества X соответствует некоторый элемент множества Y, называется ***отображением*** *X на Y.*

Множество действительных чисел

Из элементарной математики известно, что совокупность рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел ***R***. На нем определены операции:

1) Сложение: для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число $a+b$, называемое их суммой, причем выполняются следующие условия:
   a) $a+b=b+a$
   b) $a+(b+c)=(a+b)+c$
   c) существует число 0 такое, что $a+0=a$ для любого $a \in$ R
   d) $\forall a \in R \quad \exists$ противоположное число $-a$, для которого $a+(-a)=0$.
2) Умножение: $\forall a, b \in R$ определено единственное число ab, называемое их произведением, такое, что выполняются следующие условия:

a) $ab=ba \quad \forall a, b \in R$

b) $a(bc)=(ab)c \quad \forall a, b, c \in R$

c) существует число 1 такое, что $a \cdot 1=a \quad \forall a \in R$

d) $\forall\, a \neq 0$ существует обратное число $1/a$, для которого $a \cdot 1/a = 1$.

Связь сложения и умножения: $(a + b)c = ac + bc$.

Множество действительных чисел обладает следующими свойствами:

1) Упорядоченность - $\forall a, b \in R$ либо $a < b$, либо $a > b$. При этом
   a) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
   b) если $a < b$, то $\forall c \quad a + c < b + c$.
   c) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.
2) Непрерывность – для любых непустых множеств X и Y таких, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y \;\; x \leq y, \;\; \exists a : x \leq a \leq y$.

Подмножества множества $\boldsymbol{R}$ называют числовыми множествами.

Примеры числовых множеств:

1. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ (1,2,3,…).
2. Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ ($0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).
3. Множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ (числа вида m/n, где m и n – целые).

Функция

Определение. Если каждому элементу x множества X (называемого областью определения функции) по определенному закону ставится в соответствие **единственный** элемент y множества Y, то подобное отображение называется **функцией,** определенной на множестве X со значениями в множестве Y. При этом x называется независимой переменной, или аргументом, а $y = f(x)$ – зависимой переменной, или функцией.

Мы будем рассматривать только ***однозначные функции*** *(в отличие от многозначных функций, для которых одному значению x может соответствовать более одного значения y).*

Способы задания функции:

1) табличный
2) графический
3) аналитический.

Если $y=F(u)$ является функцией от u, а $u=\varphi(x)$ – функцией от x, то

$$y = F[\varphi(x)]$$

называется ***сложной функцией*** *или функцией от функции.*

Основные элементарные функции

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
2. Показательная функция $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, $y = \sec x$, $y = \mathrm{cosec}\, x$.
5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $y = \mathrm{arcsec}\, x$, $y = \mathrm{arccosec}\, x$.

Элементарной функцией *$y = f(x)$ называется функция, заданная с помощью основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций и взятия функции от функции.*

Если для функции $y = f(x)$ можно определить функцию $x = g(y)$, ставящую в соответствие каждому значению функции $y = f(x)$ значение ее аргумента x, то функция $y = g(x)$ называется **обратной функцией** к $y = f(x)$ и обозначается $y = f^{-1}(x)$.

Пределы функций

Определим понятие **окрестности** точки x_0 как множество значений x, являющихся решениями неравенства $0<|x - x_0| < \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое число. Само значение x_0 может включаться в окрестность или не включаться в нее (в этом случае окрестность называется проколотой).

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Число A называется ***пределом*** *функции y = f(x) при x, стремящемся к* x_0*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Замечание. Для существования предела функции в точке x_0 не требуется, чтобы функция была определена в самой этой точке.

Примеры.

1. Докажем, что

$$\lim_{x \to 3}(2x + 1) = 7.$$

Если $|2x+1-7| < \varepsilon$, то $|2x - 6| < \varepsilon$, $|x - 3| < \varepsilon/2$. Таким образом, если принять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, то выполнены все условия определения предела. Утверждение доказано.

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 1) = 2 + 1 = 3.$

Заметим, что в проколотой окрестности x=2 $x - 2$ не равно нулю, поэтому мы имеем право сократить дробь на $(x - 2)$.

Функция y = f(x) имеет ***бесконечный предел*** *при x, стремящемуся к* x_0 *(стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если*

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x)| > M \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Число A называется ***пределом функции y = f(x) на бесконечности****, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists X > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon \quad \textit{при}:$$

$$a) \quad x > X \quad \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\right);$$

$$б) \quad x < -X \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\right);$$

$$в) \quad |x| > X \quad \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\right).$$

Замечание. Бесконечный предел функции на бесконечности можно определить по аналогии с двумя предыдущими определениями.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** в некоторой области значений x, если существует число $M>0$ такое, что $|f(x)|<M$ для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области.

Свойства пределов

1. Если существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

(A – конечное число), то функция $y = f(x)$ является ограниченной в некоторой окрестности (возможно, проколотой) точки x_0.

Доказательство.

✓

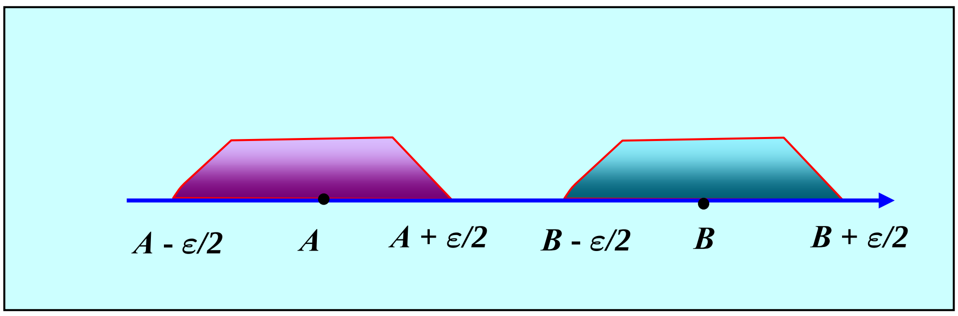
Так как для любого ε существует такое δ, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, то при этом $|f(x)| < |A| + \varepsilon$, то есть функция ограничена в рассматриваемой окрестности.

☑

2. Функция не может иметь двух различных пределов при x, стремящемуся к одному и тому же значению.

Доказательство.

✓



Пусть A и B – пределы $f(x)$ при $x\to x_0$. Выберем $\varepsilon < |A-B|$. Тогда существует такое δ_1, что $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ при $|x - x_0| < \delta_1$, и такое δ_2, что $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ при $|x - x_0| <$

δ_2. Если выбрать в качестве δ меньшее из чисел δ_1 и δ_2, то значения функции $f(x)$ для аргументов, лежащих в δ – окрестности x_0, должны одновременно находиться в двух непересекающихся окрестностях, что невозможно. Утверждение доказано.

☑

3. Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad и \quad A \neq 0,$$

то существует окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак ($f(x)>0$, если $A > 0$, и $f(x)<0$, если $A < 0$).

Доказательство.

✓

Достаточно выбрать $\varepsilon=|A|/2$. Тогда для x из некоторой окрестности x_0 $|f(x)-A| < |A|/2$, то есть $A/2 < f(x) < 3A/2$ при $A > 0$ и $3A/2 < f(x) < A/2$ при $A < 0$. Следовательно, в выбранной окрестности $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

☑

Односторонние пределы

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева (справа), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$при \quad x_0 - x < \delta \quad (x - x_0 < \delta).$$

Обозначения:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Теорема (второе определение предела). Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к x_0, предел, равный A, в том и только в том случае, если оба ее односторонних предела в этой точке существуют и равны A.

Доказательство.

✓

1) Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

то и для $x_0 - x < \delta$, и для $x - x_0 < \delta$ $|f(x) - A|<\varepsilon$, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

2) Если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A,$$

то существует δ_1: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x_0 - x < \delta_1$ и δ_2: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x - x_0 < \delta_2$. Выбрав из чисел δ_1 и δ_2 меньшее и приняв его за δ, получим, что при $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Теорема доказана.

☑

Замечание. Поскольку доказана эквивалентность требований, содержащихся в определении предела и условия существования и равенства односторонних пределов, это условие можно считать вторым определением предела.

Предел числовой последовательности

Числовую последовательность $\{a_n\}$ можно считать функцией дискретного аргумента n и применить к ней определение предела:

Число A называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : |a_n - A| < \varepsilon \quad при \quad n > N.$$