زن زندگی آزادی

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

درس شبکه‌های اجتماعی

تمرین سری دوم

نام و نام خانوادگی	سیاوش رزمی
شماره دانشجویی	۸۱۰۱۰۰۳۵۲
تاریخ ارسال گزارش	۰۱/۱۰/۱۰

فهرست گزارش سوالات (لطفاً پس از تکمیل گزارش، این فهرست را بهروز کنید.)

سوال 1 -

۱- در روش Girvan-newman هر دو گره در گراف با توجه به اینکه در یک Community باشند یا خیر با احتمال P_{in} و یا P_{out} با یکدیگر یال تشکیل می‌دهند، در نتیجه در هر Community داخل گراف با $N \to \infty$ یک گراف erdos-renyi با $P = P_{in}$ تشکیل می‌شود که هر گره در آن با احتمال P_{out} به یک گره در یک Community دیگر متصل شده است.

الف- درجه متوسط گره‌های گراف:

بطور کلی در گراف های تصادفی متوسط درجه به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$<k>= P(N-1)$$

حال در گراف های دارای Community متوسط درجه هر گره از دو قسمت ساخته شده است: ۱- درجه مربوط به یال های متصل به Community که گره در آن قرار دارد، ۲- درجه مربوط به یال های خارج از Community بنابرین فرمول بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$<k>=<k_{in}>+<k_{out}>= P_{in}(Community\,Nodes) + P_{out}(Outer\,Community\,Nodes)$$

با توجه به ساختار Community های ساخته شده تعداد گره‌های داخل هر Community برابر با $\frac{N}{C}-1$

و تعداد گره‌های بیرون از Community گره برابر با $N-\frac{N}{C}$ می‌باشد:

$$<K>= P_{in}(\frac{N}{C}-1) + P_{out}(N-\frac{N}{C})$$

با میل کردن مقدار N به سمت بی‌نهایت مقادیر ثابت از فرمول بالا حذف شده و فرمول به شکل زیر در می‌آید:

$$<K>= P_{in}(\frac{N}{C}) + P_{out}(N-\frac{N}{C})$$

ب – توزیع درجه گره‌های گراف: همانند سؤال قبل درجه هر گره را مجموع درجه درون Community و بیرون Community در نظر می‌گیریم:

$$P(k) = \sum_{i=0}^{k} P(k_{in}=i, k_{out}=k-i)$$

احتمال k_{in} و k_{out} از یکدیگر مستقل هستند، میتوان عبارت بالا را به شکل ضرب دو احتمال در نظر گرفت:

$$P(k_{in}=i, k_{out}=k-i) = P(k_{in}=i) \times P(k_{out}=k-i)$$

حال هرکدام از قسمت‌های بالا یک توزیع احتمالی $binomial$ است که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$P(k_{in}=i, k_{out}=k-i) = \binom{\frac{N}{C}-1}{i} \cdot p_{in}^{i}(1-p_{in})^{(\frac{N}{C}-1)-i} \times \binom{N-\frac{N}{C}}{k-i} \cdot p_{out}^{k-i}(1-p_{in})^{(N-\frac{N}{C})-(k-i)}$$

با میل کردن N به سمت بی‌نهایت مقادیر بالا مشابه گراف تصادفی توزیع احتمال فوق الذکر معادل توزیع پوآسن می‌شود بنابرین میتوان عبارت بالا را به شکل زیر نوشت:

$$P(k)=\sum_{i}^{k} e^{-<k_{in}>}\frac{<k_{in}>^i}{i!}.e^{-<k_{out}>}\frac{<k_{out}>^{k-i}}{(k-i)!}=$$

$$e^{-<k>}\sum_{i}^{k}\frac{<k_{in}>^i}{i!}.\frac{<k_{out}>^{k-i}}{(k-i)!}=$$

با ضرب عبارت در $\frac{k!}{k!}$ به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{e^{-<k>}}{k!}\sum_{i=1}^{k}<k_{in}>^i<k_{out}>^{k-i}\ \frac{k!}{i!(k-i)!}=$$

$$\frac{e^{-<k>}}{k!}(<k_{in}>+<k_{out}>)^k=\frac{e^{-<k>}}{k!}<k>^k=P(k)$$

بنابرین میتوان نتیجه گرفت که توزیع احتمال درجات گره‌ها در $N\to\infty$ با گراف تصادفی یکسان است.

ج – ضریب خوشه بندی گره‌های گراف:

فرمول کلی ضریب خوشه بندی در هر گره به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C_i=\frac{<L_i>}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}$$

حال در این مسأله هر گره در گراف، تعدادی گره همسایه در همان Community و مابقی آن‌ها در Community دیگر قرار دارد، یعنی به ازای هر دو گره در گره‌های همسایه گره مورد نظر (k_i) دو حالت وجود دارد:

۱- دو گره در یک Community باشند: با توجه به اینکه تعداد Community ها ثابت و برابر C است بنابرین احتمال اینکه یک گره در یک Community باشد برابر با $\frac{1}{C}$ است و احتمال اینکه هر دو گره در یک Community باشند برابر با $\frac{1}{C}\times\frac{1}{C}=\frac{1}{C^2}$ است و دو گره ایی که در یک Community باشند با احتمال P_{in} با یکدیگر یال تشکیل می‌دهند.

۲- دو گره در یک Community نباشند: مکمل احتمال بودن در یک Community و برابر با $1-\frac{1}{C^2}$ است و دو گره ایی که در یک Community نباشند با احتمال P_{out} با یکدیگر یال تشکیل می‌دهند.

حال با بدست آوردن احتمال ها میتوان مقدار یال های گره‌های همسایه را به شکل زیر نوشت:

$$L_i=((\frac{1}{C^2})P_{in}+(1-\frac{1}{C^2})P_{out})\times(\frac{k_i(k_i-1)}{2})$$

بنابرین مقدار ضریب خوشه بندی برابر با مقدار زیر می‌باشد:

$$C_i=((\frac{1}{C^2})P_{in}+(1-\frac{1}{C^2})P_{out})$$

که با میل کردن N به سمت بی نهایت مقدار فوق همواره ثابت می‌ماند.

د – متوسط فاصله گره‌های گراف:

با توجه به ساختار گراف برای هر دو گره در گراف میتوان دو حالت را در نظر گرفت:

۱- هر دو گره در یک Community باشند: با توجه به اینکه Community ها هرکدام یک گراف تصادفی erdos-reneyi هستند بنابرین در N به سمت بی‌نهایت مقدار متوسط فاصله بین دو گره به سمت $\ln \frac{N}{C}$ میل می‌کند.

۲- دو گره در یک Community نباشند: با توجه به اینکه تعداد گره‌ها به سمت بی نهایت میل میکند در نتیجه حتماً بین هر دو Community حداقل دو گره وجود دارد که بین آن‌ها یک یال وجود داشته باشد در این صورت، فاصله‌ی بین گره‌های اصلی برابر است با فاصله آن‌ها از گره واسط در Community خود بعلاوه فاصله این دو گره واسط از یکدیگر (فاصله بین دو گره واسط برابر با یک است که در مقابل مقدار فاصله درون گراف ناچیز است و در نتیجه از آن چشم‌پوشی می‌کنیم) که حدوداً همان مقدار $\ln \frac{N}{C}$ می‌شود.
