

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

Факультет: Информационных технологий и управления

Кафедра: Систем автоматизированного проектирования и управления

Уровень подготовки: Бакалавр

Учебная дисциплина: Математическая логика и теория алгоритмов

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5
тема: РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ АЛГОРИТМА
С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА
Вариант № 28

Преподаватель _____ Плонский В.Ю.

Студент _____ Гусев А.А. 494 группа

Санкт-Петербург
2021

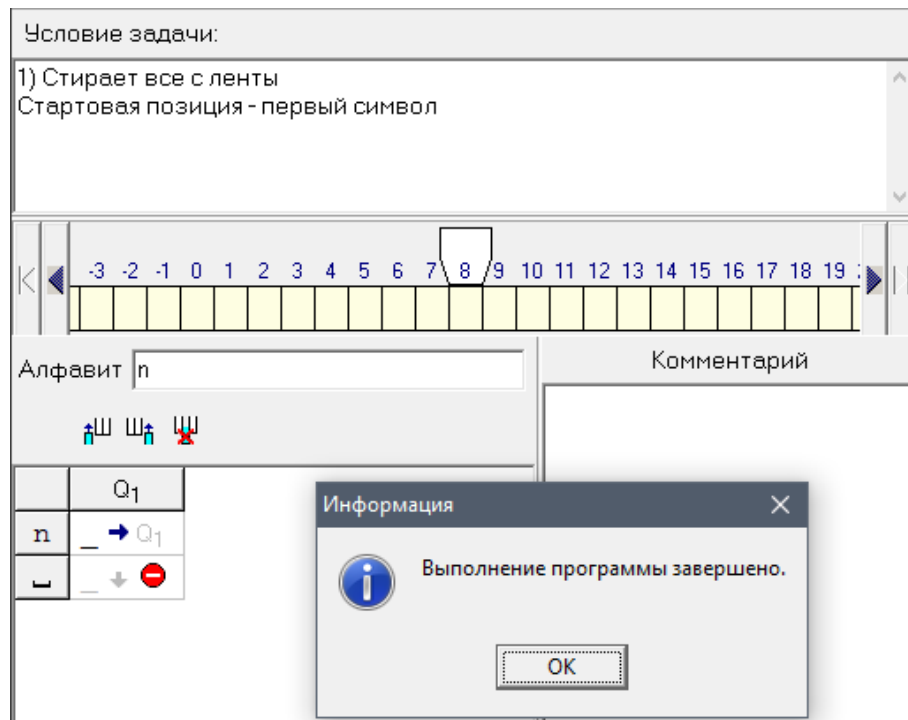


Рисунок 3 - Результат работы программы

Задание 2

Составить машину Тьюринга, результатом работы которой является перемещение первого элемента на позицию после второго, записанного на ленте. Стартовая позиция - первое число первого элемента множества на ленте.

Алгоритм решения

Машина Тьюринга:

$$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1, \#, -\}, -, \delta, q_1, q_3)$$

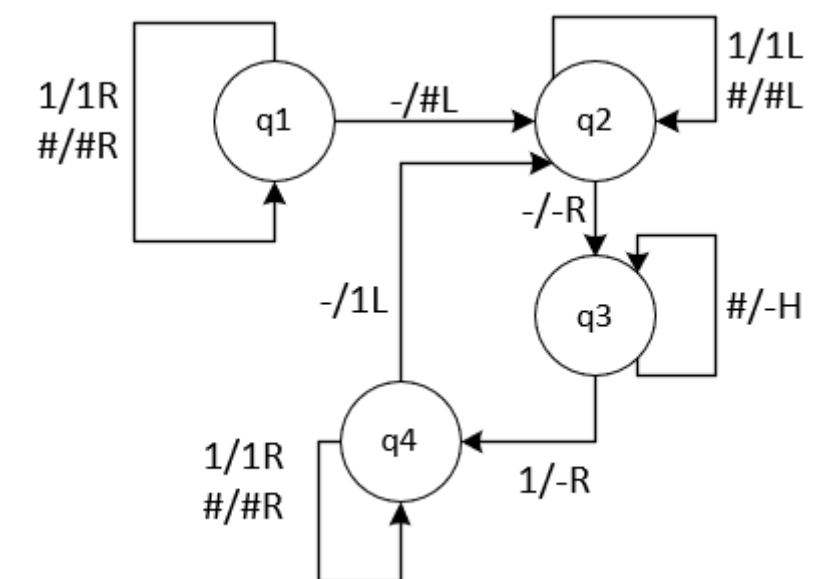


Рисунок 4 - Графическое представление команд алгоритма

Таблица 2 - Табличное представление команд алгоритма

	1	#	-
q1	q1-R	q1#R	q2#L
q2	q21L	q2#L	q3-R
q3	q4-R	q3-H	
q4	q41R	q4#R	q21L

Тестирование

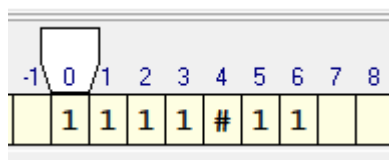


Рисунок 5 - Входные данные

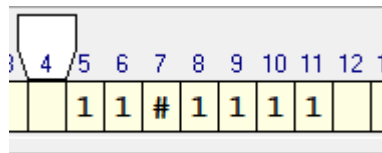


Рисунок 6 - Результат работы программы

Задание 3

Постановка задачи

Составить машину Тьюринга, результатом работы которой является сумма трёх цифр, записанных на ленте последовательно без разделителей. Стартовая позиция - цифра, находящаяся по середине. Диапазон допустимых значений от 000 до 999.

Алгоритм решения

Машина Тьюринга:

$$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}, -, \delta, q_1, q_3)$$

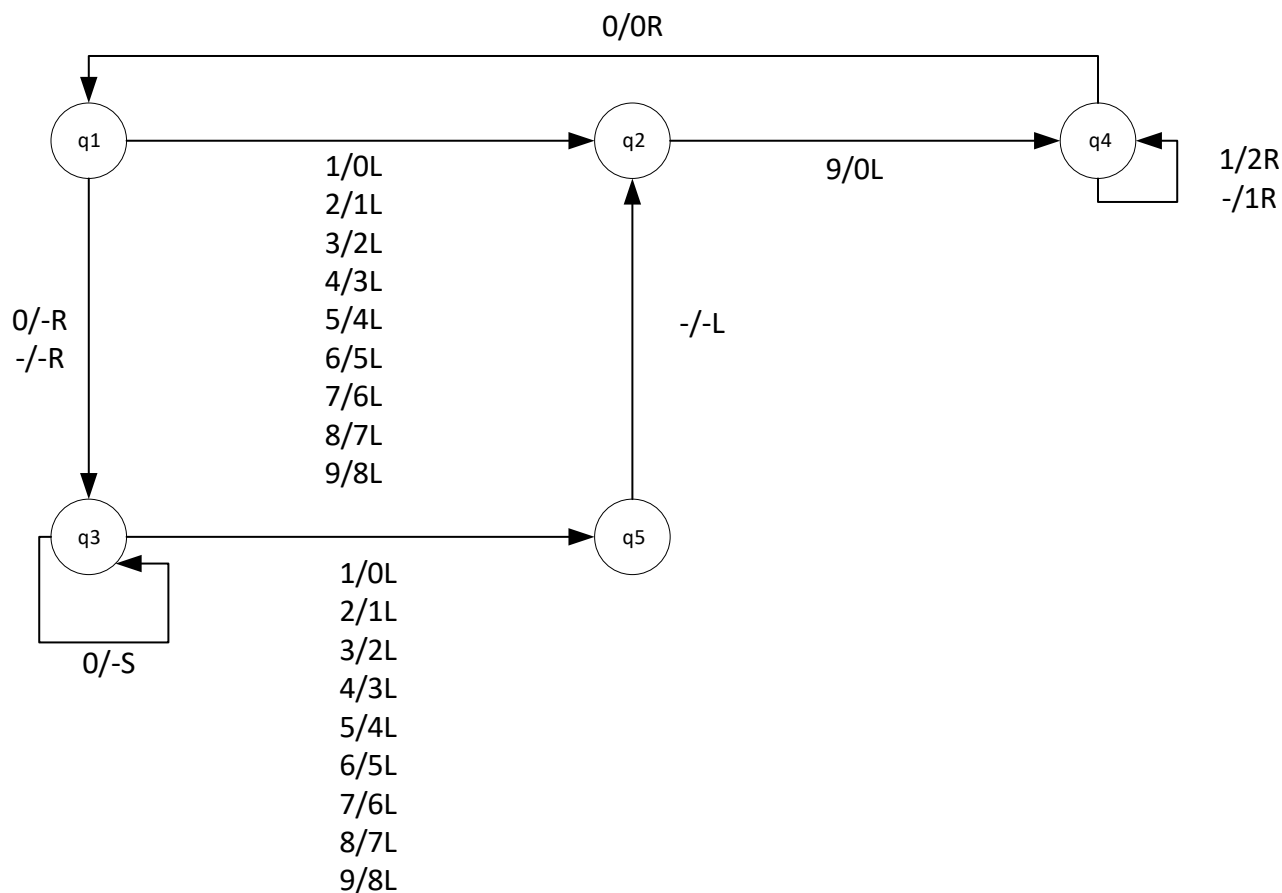


Рисунок 7 - Графическое представление команд алгоритма

Таблица 3 - Табличное представление команд алгоритма

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-
q1	q3-R	q20L	q21L	q22L	q23L	q24L	q25L	q26L	q27L	q28L	q3-R
q2	q11R	q12R	q13R	q14R	q15R	q16R	q17R	q18R	q19R	q40L	
q3	q3-H	q50L	q51L	q52L	q53L	q54L	q55L	q56L	q57L	q58L	
q4	q10R	q42R									q41R
q5											q2-L

Тестирование

Условие задачи:

$f(n1, n2, n3) = n1 + n2 + n3$
 Стартовая позиция - цифра по середине
 диапазон 000 - 999

К < -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 > ||

Алфавит 0123456789

Ш Ш Ш

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
0	_ → Q ₃	1 → Q ₁	_ →	0 → Q ₁	
1	0 ← Q ₂	2 → Q ₁	0 ← Q ₅	2 → Q ₄	
2	1 ← Q ₂	3 → Q ₁	1 ← Q ₅		
3	2 ← Q ₂	4 → Q ₁	2 ← Q ₅		
4	3 ← Q ₂	5 → Q ₁	3 ← Q ₅		
5	4 ← Q ₂	6 → Q ₁	4 ← Q ₅		
6	5 ← Q ₂	7 → Q ₁	5 ← Q ₅		
7	6 ← Q ₂	8 → Q ₁	6 ← Q ₅		
8	7 ← Q ₂	9 → Q ₁	7 ← Q ₅		
9	8 ← Q ₂	0 ← Q ₄	8 ← Q ₅		
_	_ → Q ₃			1 → Q ₄	_ ← Q ₂

Комментарий

Рисунок 8 - Входные данные

Условие задачи:

$f(n1, n2, n3) = n1 + n2 + n3$
 Стартовая позиция - цифра по середине
 диапазон 000 - 999

К < -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 > ||

Алфавит 0123456789

Ш Ш Ш

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
0	_ → Q ₃	1 → Q ₁	_ →	0 → Q ₁	
1	0 ← Q ₂	2 → Q ₁	0 ← Q ₅	2 → Q ₄	
2	1 ← Q ₂	3 → Q ₁	1 ← Q ₅		
3	2 ← Q ₂	4 → Q ₁	2 ← Q ₅		
4	3 ← Q ₂	5 → Q ₁	3 ← Q ₅		
5	4 ← Q ₂	6 → Q ₁	4 ← Q ₅		
6	5 ← Q ₂	7 → Q ₁	5 ← Q ₅		
7	6 ← Q ₂	8 → Q ₁	6 ← Q ₅		
8	7 ← Q ₂	9 → Q ₁	7 ← Q ₅		
9	8 ← Q ₂	0 ← Q ₄	8 ← Q ₅		
_	_ → Q ₃			1 → Q ₄	_ ← Q ₂

Комментарий

Информация

Выполнение программы завершено.

OK

Рисунок 9 - Результат работы программы

Задание 4

Постановка задачи

Составить машину Тьюринга, результатом работы которой является:

- 1, если введённое число от 0 до 99 делится 3;
- \emptyset , если введённое число от 0 до 99 не делится 3;

Стартовая позиция - число единиц.

Алгоритм решения

Машина Тьюринга:

$$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}, -, \delta, q_1, \{q_4, q_5\})$$

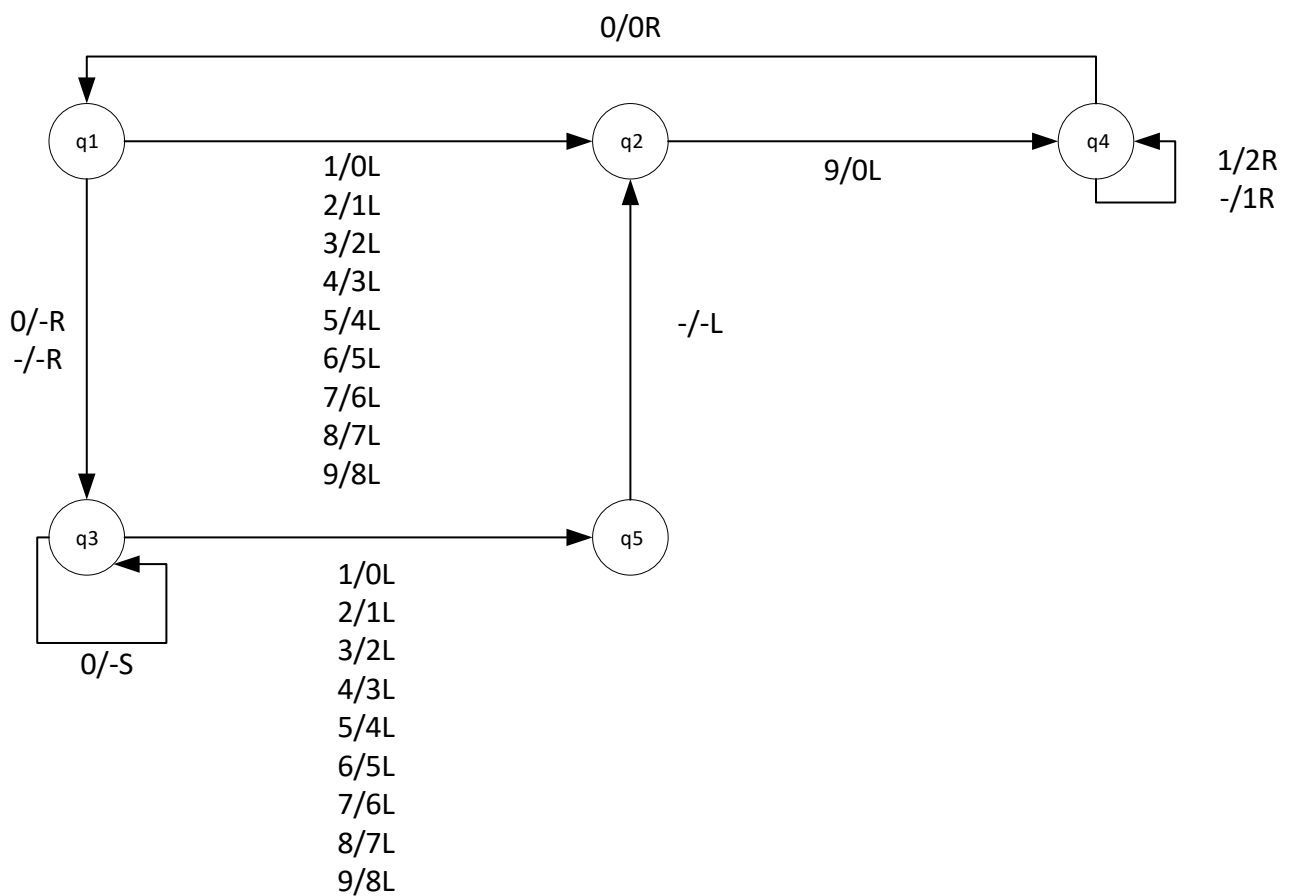


Рисунок 10 - Графическое представление команд алгоритма

Таблица 4 - Табличное представление команд алгоритма

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-
q1	q37R	q28L	q29L	q20L	q31R	q32R	q33R	q34R	q35R	q36R	
q2	q1-R	q1-R	q11R	q12R	q13R	q14R	q15R	q16R	q17R	q18R	q4-R
q3											q1-L
q4	q5-L							q4-H	q4-H	q4-H	
q5											q51H

Тестирование

Условие задачи:

$f(x) = 1$ если делится на 3
 пустому мн-ву если не делится на 3
 Двузначные числа
 Стартовая позиция - число единиц

Алфавит 0123456789

Комментарий

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
0	7 → Q ₃	_ → Q ₁		_ ← Q ₅	
1	8 ← Q ₂	_ → Q ₁			
2	9 ← Q ₂	1 → Q ₁			
3	0 ← Q ₂	2 → Q ₁			
4	1 → Q ₃	3 → Q ₁			
5	2 → Q ₃	4 → Q ₁			
6	3 → Q ₃	5 → Q ₁			
7	4 → Q ₃	6 → Q ₁		_ ↓	⊖
8	5 → Q ₃	7 → Q ₁		_ ↓	⊖
9	6 → Q ₃	8 → Q ₁		_ ↓	⊖
_		_ → Q ₄	_ ← Q ₁		1 ↓ ⊖

Рисунок 11 - Пример числа, некратного трём

Условие задачи:

$f(x) = 1$ если делится на 3
 пустому мн-ву если не делится на 3
 Двузначные числа
 Стартовая позиция - число единиц

Алфавит 0123456789

Комментарий

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
0	7 → Q ₃	_ → Q ₁		_ ← Q ₅	
1	8 ← Q ₂	_ → Q ₁			
2	9 ← Q ₂	1 → Q ₁			
3	0 ← Q ₂	2 → Q ₁			
4	1 → Q ₃	3 → Q ₁			
5	2 → Q ₃	4 → Q ₁			
6	3 → Q ₃	5 → Q ₁			
7	4 → Q ₃	6 → Q ₁		_ ↓	⊖
8	5 → Q ₃	7 → Q ₁		_ ↓	⊖
9	6 → Q ₃	8 → Q ₁		_ ↓	⊖
_		_ → Q ₄	_ ← Q ₁		1 ↓ ⊖

Информация
 Выполнение программы завершено.
 ОК

Рисунок 12 - Результат работы программы

Условие задачи:

$f(x) = 1$ если делится на 3
 пустому мн-ву если не делится на 3
 Двузначные числа
 Стартовая позиция - число единиц

Алфавит 0123456789

Комментарий

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
0	7 → Q ₃	_ → Q ₁		_ ← Q ₅	
1	8 ← Q ₂	_ → Q ₁			
2	9 ← Q ₂	1 → Q ₁			
3	0 ← Q ₂	2 → Q ₁			
4	1 → Q ₃	3 → Q ₁			
5	2 → Q ₃	4 → Q ₁			
6	3 → Q ₃	5 → Q ₁			
7	4 → Q ₃	6 → Q ₁		_ ↓	⊘
8	5 → Q ₃	7 → Q ₁		_ ↓	⊘
9	6 → Q ₃	8 → Q ₁		_ ↓	⊘
_		_ → Q ₄	_ ← Q ₁		1 ↓ ⊘

Рисунок 13 - Пример числа, кратного трём

Условие задачи:

$f(x) = 1$ если делится на 3
 пустому мн-ву если не делится на 3
 Двузначные числа
 Стартовая позиция - число единиц

Алфавит 0123456789

Комментарий

	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₄	Q ₅
0	7 → Q ₃	_ → Q ₁		_ ← Q ₅	
1	8 ← Q ₂	_ → Q ₁			
2	9 ← Q ₂	1 → Q ₁			
3	0 ← Q ₂	2 → Q ₁			
4	1 → Q ₃	3 → Q ₁			
5	2 → Q ₃	4 → Q ₁			
6	3 → Q ₃	5 → Q ₁			
7	4 → Q ₃	6 → Q ₁		_ ↓	⊘
8	5 → Q ₃	7 → Q ₁		_ ↓	⊘
9	6 → Q ₃	8 → Q ₁		_ ↓	⊘
_		_ → Q ₄	_ ← Q ₁		1 ↓ ⊘

Информация

Выполнение программы завершено.

OK

Рисунок 14 - Результат работы программы

Задание 5

Постановка задачи

Составить машину Тьюринга, результатом работы которой является сравнение длин двух слов, записанных на ленте: $q_0 1x \# 1y \# 1z \# 1s \# 1t \rightarrow q_k 1^{(z+s)} \# 1^{(x+y)}$

Таблица 20 – Конфигурации машины Тьюринга для сравнения двух слов

Машина	Заключительная конфигурация	Условие
$T^{(1)} : q_0 1x \# 1y \# 1z \# 1s \# 1t \rightarrow$	$q_{k1} 1^{(z-s)} \# 1^{(x+y)}$	$z \geq s$
$T^{(2)} : q_0 1x \# 1y \# 1z \# 1s \# 1t \rightarrow$	$q_{k2} 1^0 \# 1^{(x+y)}$	$z < s$

Алгоритм решения

Особенность данной задачи состоит в том, что слово Z может быть больше, меньше или равно слову S . При этом машина Тьюринга должна переходить в два различных состояния для организации ветвящегося процесса вычисления.

При запуске машины из начального состояния q_1 в силу того, что слово 1^t не используется, лента доходит до конца, а именно до пустой ячейки после последней единицы всей последовательности и начинает процесс затирания слова 1^t . В данном случае осуществляется процесс движения вправо по ленте до конца всей строки с помощью команд: $q11 \rightarrow q11R$ и $q1\# \rightarrow q1\#R$. Дойдя до пустой ячейки выполнится команда $q1- \rightarrow q2-L$, то есть программа сместится на ячейку влево и начнет процесс затирания аргумента t .

Заменяв последовательно аргумент t на пустые ячейки ($q2- \rightarrow q3-L$ и $q21 \rightarrow q2-L$), программа доходит влево до начала последовательности на ленте, встаёт на первый элемент аргумента X и переходит к следующему набору команд. Далее необходимо сложить два аргумента X и Y , для этого первый элемент слова X заменяется на $\#$, а символ, разделяющий слова X и Y , заменяется на 1 при помощи следующих команд: $q41 \rightarrow q5\#R$, $q5\# \rightarrow q61R$, $q51 \rightarrow q61R$. Таким образом, выполняется сложение любых аргументов X и Y .

Переход на q_6 начинает следующий этап выполнения программы - усеченное вычитание аргументов Z и S . Машина циклически находит крайний слева символ 1 аргумента Z и заменяет его знаком “)”, затем движется вправо до решетки, после этого продолжает движение вправо в поисках единицы, которая заменяется на решетку. Машина возвращается влево в поисках крайнего слева символа 1 . Эта единица идентифицируется после того, как машина выходит на “)”. В этот момент сдвигаемся на одну ячейку вправо. Повторение заканчивается в одной из следующих ситуаций:

- В поисках единицы справа машина встречает пробел. Это означает, что все n единиц заменены на решетки. При этом в левом аргументе заменены $n+1$. В этом случае машина заменяет решетки на пробелы и добавляет единицу. Это случай, когда $m \geq n$.
- Начиная цикл, машина не может найти единицу. Первые m единиц уже заменены на “)”. Это означает, что $n > m$, поэтому машина переходит к следующему действию

Однако по условию задачи результат усеченного деления Z и S должен оказаться перед суммой аргументов X и Y . Поэтому далее машина циклически переносит все единицы после суммы на позиции перед ней, затирая ячейки с “)”. Слева от суммы аргументов X и Y машина записывает результат: либо $1^{(z-s)}$ либо #, в зависимости от значений аргументов Z и S

Машина Тьюринга:

$$M = (\{q_1 \dots q_{21}\}, \{\#, 1,), -, \delta, q_1, \{q_{15}, q_{17}\}\})$$

Таблица 5 - Табличное представление команд алгоритма

	#	1)	-
q1	q1#R	q11R		q2-L
q2	q3-L	q2-L		
q3	q3#L	q31L		q4-R
q4		q5#R		
q5	q61R	q51R		
q6	q7#R	q61R		
q7	q11-R	q8)R		
q8	q9#R	q81R		
q9	q9#R	q10#L		q12-L
q10	q10#L	q101L	q7)R	
q11	q11-R	q11-R		q16-R
q12	q12-L	q121L	q131L	
q13	q14#L	q181R		q18-L
q14		q141L		q15#L
q15	q15-H		q15-L	
q16	q17#L		q15-L	q16-L
q17		q171L		q17#H
q18	q18#R	q181R	q18)R	q19-L
q19		q20-L	q15-L	q21-R
q20	q20#L	q201L	q20-L	q181L
q21				q18-R

Тестирование

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
 1 # 1 1 1 1 # 1 1 # 1 # 1

Рисунок 15 - Входные данные ($x = 1, y = 4, z = 2, s = 1, t = 1$)

4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
		1	#	1	1	1	1	1		

Рисунок 16 - Результат работы программы

4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1	1	#	1	1	1	1	1	#	1	1	#	1	1	#	1	1	1		

Рисунок 17 - Входные данные ($x = 2, y = 5, z = 2, s = 2, t = 3$)

[illegible]

Рисунок 18 - Результат работы программы

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	#	1	1	#	1	#	1	1	1	1	#	1	1			

Рисунок 19 - Входные данные ($x = 3, y = 2, z = 1, s = 4, t = 2$)

5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
		#	1	1	1	1	1			

Рисунок 20 - Результат работы программы

-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	1	#	1	#	1	1	1	1	1	#	1	#	1	

Рисунок 21 - Входные данные ($x = 1, y = 1, z = 5, s = 1, t = 1$)

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
		1	1	1	1	#	1	1			

Рисунок 22 - Результат работы программы