Teoria de la Probabilitat

Continguts

2 Variables Aleatòries

2.1 Definició de variable aleatòria. Llei d'una v.a.

Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, \beta)$ un espai de probabilitat. Volem estudiar funcions de Ω amb imatge en $\mathbb{R}$.

Definició 2.1.1
Una **variable aleatòria** és una funció $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que per tot borelià B $\in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Per tant, una variable aleatòria és una funció mesurable entre els espais de mesura $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.

Exemple 2.1.2
(1) Les funcions constants són variables aleatòries:

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto c \end{aligned} \qquad \text{Si prenem } B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si c} \notin B \\ \Omega & \text{si c} \in B \end{cases}$$

(2) **Variables aleatòries indicadores**:

$$\text{Sigui A} \in \mathcal{A}\text{, definim } \mathbb{1}_A\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ on } \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$$

$$\text{Aleshores, } B \in \mathcal{B}, \mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \{0,1\} \not\subseteq B \\ A & \text{si } 1 \in B, \quad 0 \notin B \\ \overline{A} & \text{si } 1 \notin B, \quad 0 \in B \\ \Omega & \text{si } \{0,1\} \not\subseteq B \end{cases}$$

(3) Si X i Y són v.a., aleshores $X + Y$, $X \cdot Y$, $|X|$, etc. són v.a.
En general, si $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, aleshores g(X,Y) és una v.a.

Estem dient que $\forall B \in \mathcal{B}$, $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\}$ és un succés i, per tant, podem calcular $P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\}) \equiv P(X \in B)$.

Exemple 2.1.3
$P(X \leq 1) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in (-\infty, 1)\})$

Les v.a. permeten traslladar l'estructura d'espai de probabilitat de $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, donant lloc a mesures que no provenen de la mesura de Lebesgue.

Definició 2.1.4
Siguin $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i X una v.a.
La **mesura de probabilitat induïda** per X és una mesura de probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definida per

$$\begin{aligned} p_X \colon \mathcal{B} &\to \mathbb{R} \\ B &\mapsto p_X = P(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\}) \end{aligned}$$

Observació 2.1.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, p_X)$ és un espai de probabilitat.

De teoria de la mesura, és equivalent veure que $[\forall B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B)$ *és de* $\mathcal{A}]$ a veure que [*l'antiimatge de qualsevol interval* $\in \mathcal{A}$].

Per tant, per saber si una funció és una v.a. només cal veure si l'antiimatge dels intervals són de $\mathcal{A}$.

La següent definició dóna una funció en $\mathbb{R}$ que codifica molta informació de X:

Definició 2.1.6
Donada X v.a., la **funció de distribució de probabilitat** de X és:

$$\begin{aligned} F_X \colon \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto P(X \leq x) \end{aligned}$$

Propietats 2.1.7
(i) Si $x_1 \leq x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(iii) $F_X(x)$ és contínua per la dreta: $\forall x, \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$

Observació 2.1.8

- $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$
- $P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Observació 2.1.9 Les propietats (i), (ii), (iii) de $F_X(x)$ són de fet suficients.
Si una funció $F(x)$ satisfà (i), (ii), (iii), aleshores és funció de probabilitat d'una variable aleatòria.

2.2 Moments d'una v.a. Desigualtats de Markov i Chebyshev

Siguin $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uns espai de probabilitat i X una v.a.

Definició 2.2.1
L'**esperança** de X és:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dp = \int_{\mathbb{R}} x \, dp_X$$

Més en general, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable,

$$\mathbb{E}[f(x)] = \int_{\Omega} f(x) dp = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dp_X$$

Observació 2.2.2 De teoria de la mesura, cal recordar que una funció g és integrable sii $|g|$ ho és (En general, $\mathbb{E}[f(x)]$ està definida sii $\mathbb{E}[|f(x)|] < +\infty$).

Si particularitzem f:

Definició 2.2.3
$f(x) = X^r \implies \mathbb{E}[X^r]$ és el **moment r-èssim**.

Definició 2.2.4
Si $\mathbb{E}[X] = p < +\infty$, $\mathbb{E}[(X-p)^r]$ és el **moment normalitzat r-èssim**.

En particular, si r = 2, $\mathbb{E}[(X-p)^2] = \mathbb{V}ar[X]$ és la **variància** de X.

Definició 2.2.5
Si $f(x) = x(x-1)\dots(x-r+1) \implies \mathbb{E}[f(x)] = \mathbb{E}[(X)_r]$ és el **moment factorial r-èssim**.