Teoria de la Probabilitat

Continguts

1 Espais de Probabilitat

1.1 Definició axiomàtica d'espai de probabilitat

Definició 1.1.1
Un **espai de probabilitat** és un espai de mesura $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, tal que $p(\Omega) = 1$.

- Ω s'anomena **espai mostral**.
- $\mathcal{A}$ se l'anomena **conjunt d'esdeveniments** o **successos**.
- p se l'anomena **funció de probabilitat**.

Observació 1.1.2 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ és una σ-àlgebra:
$\sigma 1)$ $\varnothing \in \mathcal{A}$
$\sigma 2)$ $A \in \mathcal{A} \iff \overline{A} \in \mathcal{A}$
$\sigma 3)$ Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una seqüència de successos en $\mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

Observació 1.1.3 Recordem que p és una mesura i, per tant:
$p1)$ $p(\varnothing) = 0$
$p2)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $p(A) \geq 0$
$p3)$ Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una seqüència de successos en $\mathcal{A}$ disjunts 2 a 2 ($A_i \cap A_j = \varnothing \, si \, i \neq j$), aleshores

$$p\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} p(A_n)$$

Vegem les primeres propietats dels espais de probabilitat:

Proposició 1.1.4
Per un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ es compleix que:
(i) $A \in \mathcal{A} \implies p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
(ii) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \implies p(A) \leq p(B)$
(iii) Si $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, $i \, A_i \cap A_j \neq \varnothing \, (i \neq j)$, aleshores $p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{r} p(A_i)$
(iv) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \implies p(B - A) = p(B) - p(A)$
(v) Successions monòtones:

a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_i \in \mathcal{A} \implies p\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} p(A_n)$

b) Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \supseteq A_i \in \mathcal{A} \implies p\left(\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} p(A_n)$

Si ara tenim un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, i successos $A_1, A_2, \ldots, A_i$ en general <u>no</u> disjunts, aleshores <u>no</u> és cert que $p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_r\right) = \sum\limits_{i=1}^{r} p(A_i)$. En aquest cas, tenim la següent fita:

Lema 1.1.5 (Fita de la unió)
Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_r$ successos en $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, aleshores

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{r} p(A_i)$$

Teorema (Desigualtats de Bonferroni) (1.1.6)
Siguin $A_1, \ldots, A_r$ successos en $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Denotem per $I \subseteq \{1, \ldots, r\} : = [r]$,

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$S_k = \sum_{\substack{I \subseteq [r] \\ |I| = k}} p(A_I)$$

Aleshores, si:
1) t és parell, $p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i\right) \geq \sum\limits_{i=1}^{t} (-1)^{i+1} \cdot S_i$
2) t és senar, $p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{t} (-1)^{i+1} \cdot S_i$

Exemple 1.1.7

1.2 Probabilitat condicionada

Definició 1.2.1
Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat , i $B \in \mathcal{A}$ amb $p(B) > 0$.
Per $A \in \mathcal{A}$, la **probabilitat condicionada** de A amb B és:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Observació 1.2.2 $p(A \mid B)$ mesura la probabilitat de que el succés A ocorri sabent que B ha succeït.

Observació 1.2.3 Si prenem

$$\begin{aligned} P_B \colon \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto P_B(A) = P(A \mid B) \end{aligned}$$

Aleshores P_B és una funció de probabilitat sobre $\Omega, \mathcal{A}$
De fet, si definim $\mathcal{A}_B = \{A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\}$, aleshores $\mathcal{A}_B$ és una σ-àlgebra i P_B també defineix una probabilitat sobre $(\Omega, \mathcal{A}_B)$.

Proposició 1.2.4
Siguin $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$, tals que $p(A_i) > 0$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ i $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega$
($\{A_i\}_{i=1}^{r}$ és una partició de Ω)

(i) Teorema de la probabilitat total: $\forall A \in \mathcal{A}, p(A) = \sum_{i=1}^{r} p(A \mid A_i) \cdot p(A_i)$.
(ii) Fórmula de Bayes: si $A \in \mathcal{A}$, $p(A) > 0$,

$$p(A_j \mid A) = \frac{p(A \mid A_j) \cdot p(A_j)}{\sum_{i=1}^{r} p(A \mid A_i) \cdot p(A_i)}$$

Molts cops serà més senzill calcular probabilitats condicionades. Vegem un exemple:

Exemple 1.2.5 (La ruïna del jugador)
Partim d'un capital de k unitats ($k \geq 0$) i volem aconseguir un capital de N unitats ($N \geq k$) de la següent forma:
Llancem una moneda equilibrada, guanyant (surt cara) o perdent (surt creu) una unitat amb probabilitat $\frac{1}{2}$. El joc acaba si:

1. Ens quedem sense capital.
2. Assolim un capital igual a N

Calcularem la probabilitat de perdre.
No és bona idea intentar codificar tots els casos possibles i sumar les seves probabilitats (n^{o} tirades $\to \infty$).

Anem a resoldre el problema usant el teorema de la probabilitat total.
A_k = "el jugador, amb capital inicial igual a k, s'arruïna" (Volem calcular $p(A_k)$).
Escrivim $p(A_k) = p_k$. Aleshores $p_0 = 1$, $p_N = 0$.
Definim B = "la primera tirada de la moneda és cara". Aleshores B i $\overline{B}$ defineixen una partició de Ω.
Usem el teorema de probabilitat total:

$$\left.\begin{aligned} p(A_k) &= p(A_k \mid B)p(B) + p(A_k \mid \overline{B})p(\overline{B}) \\ &= p(A_k \mid B)\cdot \tfrac{1}{2} + p(A_k \mid \overline{B})\cdot\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\Big(\underbrace{p(A_k \mid B)}_{p(A_{k+1})} + \underbrace{p(A_k \mid \overline{B})}_{p(A_{k-1})}\Big)\end{aligned}\right\} p_k = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1}); \quad p_0 = 1,\, p_N = 0$$

Resolent la recurrència tenim:

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

Si $k \in o(N)$, aleshores assimptòticament el jugador s'acabarà arruïnant.

1.3 Independència

Definició 1.3.1
Dos successos A i B (del mateix espai $(\Omega, \mathcal{A}, p)$) són **independents** si $p(A \cap B) = p(A)\cdot p(B)$.

Observació 1.3.2

- Si $p(B) > 0$, A i B independents $\iff p(A \mid B) = p(A)$
- El successos $\varnothing$ i Ω són independents amb qualsevol altre succés B
- Si A i B són independents, A i $\overline{B}$ també. (De fet tenim que A i B són independents $\iff \overline{A}$ i $\overline{B}$ són independents).

Definició 1.3.3
Donada una família de successos $\{A_i\}_{i\in I}$, es diu que és **independent** si:

$$\forall J \subseteq I \text{ amb } |J| < \infty, \text{ es té: } p\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} p(A_j)$$

Observació 1.3.4 Donats $\{A_i\}_{i=1,\ldots,r}$ successos, poden ser independents dos a dos però no com a conjunt.

1.4 Espai producte

Donats dos espais de probabilitat $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, p_2)$, volem combinar-los en un sol espai amb espai mostral $\Omega_1 \times \Omega_2$.
Això ja ho hem fet en el cas discret, però en general:

- Prenem com a espai mostral $\Omega_1 \times \Omega_2$
- Prenem com a σ-àlgebra $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ (la més petita σ-àlgebra que conté $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$).
- Com definim p a $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$?
  Voldríem que $p(A_1 \times A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) \quad \forall A_i \in \mathcal{A}_i$. Per definir p necessitarem el següent teorema:

Teorema (d'extensió o de Carathéodory) (1.4.1)
Sigui p_0 una funció de probabilitat en una àlgebra $\mathcal{A}_0$. Sigui $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$.
Aleshores p_0 es pot extendre a una funció de probabilitat p sobre $\mathcal{A}$ que coincideix amb p_0 en $\mathcal{A}_0$. A més, p és única.

En el nostre cas, quina àlgebra agafem?

$$\underbrace{(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)^*}_{\mathcal{A}_0} = \text{ totes les unions finites d'elements de } \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

Es comprova que $\sigma((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)^*) = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ i apliquem el teorema.

1.5 Lema de Borel-Cantelli

Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat.

Definició 1.5.1
Donada $\{A_n\}_{n\geq 1}$ un successió de successos,

$$\text{lim sup } A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\text{lim inf } A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Observació 1.5.2 Tant *lim sup* A_n com *lim inf* A_n són successos.

Definició 1.5.3
Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ és una successió de successos amb $lim\, sup\, A_n = lim\, inf\, A_n$, aleshores $\{A_n\}_{n\geq 1}$ té **límit** i l'escriurem $limA_n = lim\, sup\, A_n$.

Propietats 1.5.4
Sigui $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una successió de successos:

(i) $lim\,sup\,A_n = \{\omega \in \Omega \colon \omega$ pertany a un nombre infinit de $A_i's\}$

(ii) $lim\,inf\,A_n = \{\omega \in \Omega : \exists\, m = m(\omega)$ tal que $\omega \in A_r$ si $r \geq m(\omega)\}$

(iii) $lim\,inf\,A_n \subseteq lim\,sup\,A_n$

Si ara $lim\,sup\,A_n = lim\,inf\,A_n = limA_n$, podem intercanviar lim amb p:

Proposició 1.5.5
Sigui $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una successió de successos amb $limA_n = A$. Aleshores, $p(A) = lim\,p(A_n)$.

El següent lema ens dóna condicions suficients molt senzilles per a calcular $p(lim\,sup\,A_n)$.

Lema 1.5.6 (Borel-Cantelli)
Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una successió de successos. Aleshores:

(i) Si $\sum\limits_{n\geq 1} p(A_n) < \infty \implies p(lim\,sup\,A_n) = 0$

(ii) Si els $\{A_n\}_{n\geq 1}$ són successos independents i $\sum\limits_{n\geq 1} p(A_n) = \infty \implies p(lim\,sup\,A_n) = 1$

Observació 1.5.7 No podem treure la condició d'independència de (ii).
Si prenem $A_n = E$ succés amb $0 < p(E) < 1$, aleshores $\sum\limits_{n\geq 1} p(A_n) = \sum\limits_{n\geq 1} p(E)$, els A_n no són independents i $p(lim\,sup\,A_n) = p(E) < 1$.

2 Variables Aleatòries

2.1 Definició de variable aleatòria. Llei d'una v.a.

Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, \beta)$ un espai de probabilitat. Volem estudiar funcions de Ω amb imatge en $\mathbb{R}$.

Definició 2.1.1
Una **variable aleatòria** és una funció $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que per tot borelià B $\in \mathcal{B}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Per tant, una variable aleatòria és una funció mesurable entre els espais de mesura $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.

Exemple 2.1.2
(1) Les funcions constants són variables aleatòries:

$$\begin{aligned} X\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto c \end{aligned} \qquad \text{Si prenem } B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) = \begin{cases} \varnothing & \text{si c} \notin B \\ \Omega & \text{si c} \in B \end{cases}$$

(2) **Variables aleatòries indicadores**:

$$\text{Sigui A} \in \mathcal{A}\text{, definim } \mathbb{1}_A\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ on } \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A \\ 1 & \text{si } \omega \in A \end{cases}$$

$$\text{Aleshores, } B \in \mathcal{B}, \mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \{0,1\} \nsubseteq B \\ A & \text{si } 1 \in B, \quad 0 \notin B \\ \overline{A} & \text{si } 1 \notin B, \quad 0 \in B \\ \Omega & \text{si } \{0,1\} \nsubseteq B \end{cases}$$

(3) Si X i Y són v.a., aleshores $X + Y$, $X \cdot Y$, $|X|$, etc. són v.a.
En general, si $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, aleshores g(X,Y) és una v.a.

Estem dient que $\forall B \in \mathcal{B}$, $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\}$ és un succés i, per tant, podem calcular $P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\}) \equiv P(X \in B)$.

Exemple 2.1.3
$P(X \leq 1) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in (-\infty, 1)\})$

Les v.a. permeten traslladar l'estructura d'espai de probabilitat de $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, donant lloc a mesures que no provenen de la mesura de Lebesgue.

Definició 2.1.4
Siguin $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i X una v.a.
La **mesura de probabilitat induïda** per X és una mesura de probabilitat sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definida per

$$\begin{aligned} p_X \colon \mathcal{B} &\to \mathbb{R} \\ B &\mapsto p_X = P(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\}) \end{aligned}$$

Observació 2.1.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, p_X)$ és un espai de probabilitat.

De teoria de la mesura, és equivalent veure que $[\forall B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B) \textit{ és de } \mathcal{A}]$ a veure que $[\textit{l'antiimatge de qualsevol interval} \in \mathcal{A}]$.

Per tant, per saber si una funció és una v.a. només cal veure si l'antiimatge dels intervals són de $\mathcal{A}$.

La següent definició dóna una funció en $\mathbb{R}$ que codifica molta informació de X:

Definició 2.1.6
Donada X v.a., la **funció de distribució de probabilitat** de X és:

$$\begin{aligned} F_X \colon \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto P(X \le x) \end{aligned}$$

Propietats 2.1.7
(i) Si $x_1 \le x_2 \implies F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(iii) $F_X(x)$ és contínua per la dreta: $\forall x, \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$

Observació 2.1.8

- $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F_X(x)$
- $P(x_1 < X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Observació 2.1.9 Les propietats (i), (ii), (iii) de $F_X(x)$ són de fet suficients.
Si una funció $F(x)$ satisfà (i), (ii), (iii), aleshores és funció de probabilitat d'una variable aleatòria.

2.2 Moments d'una v.a. Desigualtats de Markov i Chebyshev

Siguin $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ uns espai de probabilitat i X una v.a.

Definició 2.2.1
L'**esperança** de X és:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X dp = \int_\mathbb{R} x\, dp_X$$

Més en general, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable,

$$\mathbb{E}[f(x)] = \int_\Omega f(x) dp = \int_\mathbb{R} f(x)\, dp_X$$

Observació 2.2.2 De teoria de la mesura, cal recordar que una funció g és integrable sii $|g|$ ho és (En general, $\mathbb{E}[f(x)]$ està definida sii $\mathbb{E}[|f(x)|] < +\infty$).

Si particularitzem f:

Definició 2.2.3
$f(x) = X^r \implies \mathbb{E}[X^r]$ és el **moment r-èssim**.

Definició 2.2.4
Si $\mathbb{E}[X] = p < +\infty$, $\mathbb{E}[(X-p)^r]$ és el **moment normalitzat r-èssim**.

En particular, si r = 2, $\mathbb{E}[(X-p)^2] = \mathbb{V}ar[X]$ és la **variància** de X.

Definició 2.2.5
Si $f(x) = x(x-1)\dots(x-r+1) \implies \mathbb{E}[f(x)] = \mathbb{E}[(X)_r]$ és el **moment factorial r-èssim**.

Proposició 2.2.6 (Propietats de l'esperança i la variància)

- Si c és la v.a. constant, $\mathbb{E}[c] = c$ i $\mathbb{V}ar[c] = 0$
- Linealitat: si $a, b \in \mathbb{R}$ i X, Y v.a., $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- $A \in \mathcal{A}, X = \mathbb{1}_A$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = P(A)$
- $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$
- $\mathbb{V}ar[c \cdot X] = c^2 \cdot \mathbb{V}ar[X]$
- $\mathbb{V}ar[c + X] = \mathbb{V}ar[X]$
- $\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Observació 2.2.7 Si $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$, aleshores podem utilitzar tots els resultats de teoria dels espais L_p. Així doncs tenim les següents conseqüències:

- Hölder: $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < +\infty$
  $\implies \mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}} \quad (\mathbb{E}[|XY|]^{pq} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^q \cdot \mathbb{E}[|Y|^q]^p)$
- Cauchy-Schwartz: si $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < +\infty$, aleshores $\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2]$
- Minkowski: si $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^p] < +\infty \implies \mathbb{E}[|X+Y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}[|Y|^p]^{\frac{1}{p}}$

Teorema (Desigualtat de Markov) (2.2.8)
Sigui X un v.a. que pren valors positius i $a > 0$. Aleshores:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

El següent resultat dóna estimacions quantitatives de quant es dispersa una v.a. en relació a la seva esperança:

Teorema (Desigualtat de Chebyshev) (2.2.9)
Sigui X una v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ amb $\mathbb{E}[X], \mathbb{V}ar[X] < +\infty$. Aleshores, $\forall k > 0$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k \cdot \mathbb{V}ar[X]^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{k^2}$$

També es pot escriure:

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k) \leq \frac{\mathbb{V}ar[X]}{k^2}$$

2.3 Vectors de variables aleatòries. Independència de v.a.

Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ considerem les v.a. $X_1, \ldots, X_n$. Cadascuna d'elles defineix una distribució de probabilitat sobre $\mathbb{R}$.
Aleshores podem considerar el vector $(X_1, \ldots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Definició 2.3.1
Un vector $(X_1, \ldots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ és un **vector de variables aleatòries** (o una v.a. multidimensional), si per tot $B \in \mathcal{B}_n$ (Borelians en $\mathbb{R}^n$), $(X_1, \ldots, X_n)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Com $\Pi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (projecció en la i-èssima component) és una funció mesurable, aleshores

$$\begin{aligned} \Pi_i(X_1, \ldots, X_n)\colon \Omega &\xrightarrow{(X_1,\ldots,X_n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad\Pi_i\quad} \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto (X_1, \ldots, X_n)(\omega) \longmapsto X_i(\omega) \end{aligned}$$

$\equiv X_i(\omega)$ és una v.a. (en el sentit unidimensional).

De la mateixa manera que vam fer per les v.a. unidimensionals, podem considerar les antiimatges només en intervals.

Definició 2.3.2
Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, i un vector de v.a. $(X_1, \ldots, X_n) = \vec{X}$, aleshores la **funció de distribució de probabilitat** de $\vec{X}$ és $F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ definida per:

$$\begin{aligned} F_{\vec{X}} \colon \mathbb{R}^n &\to [0,1] \subseteq \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto P\Big((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \ldots \cap (X_n \leq x_n)\Big) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leq x_i\right) \end{aligned}$$

Vegem propietats de la funció de distribució pel cas n = 2 (Per $n > 2$, és idèntic):

Lema 2.3.3
(i) Si $x_1' \geq x_1$, $x_2' \geq x_2 \implies F_{\vec{X}}(x_1', x_2') \geq F_{\vec{X}}(x_1, x_2)$

(ii) $\lim_{(x_1,x_2)\to(+\infty,+\infty)} F_{\vec{X}}(x_1, x_2) = 1 \qquad \lim_{(x_1,x_2)\to(-\infty,-\infty)} F_{\vec{X}}(x_1, x_2) = 0$

(iii) $\lim_{(h_1,h_2)\to(0^+,0^+)} F_{\vec{X}}(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = F_{\vec{X}}(x_1, x_2)$ (contínua "per dalt")

Observació 2.3.4 Aquestes 3 condicions són necessàries i suficients per a definir una v.a. multidimensional.

Observació 2.3.5

- Si tenim $F_{\vec{X}}(x_1, x_2)$ associada a $\vec{X} = (X_1, X_2)$, aleshores

  $$\lim_{x_2\to+\infty} F_{\vec{X}}(x_1, x_2) = \lim_{x_2\to+\infty} P\Big((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2)\Big) = P(X_1 \leq x_1) = F_{\vec{X}}(x_1)$$

  A aquesta funció $\Big(\lim_{x_1\to+\infty} F_{\vec{X}}(x_1, x_2)\Big)$ se l'anomena **funció de distribució marginal**.

- Prenem un rectangle en $\mathbb{R}^2$ i $\vec{X} = (X, Y)$ v.a. multidimensional:

  $$P(a < X \leq b,\, c < Y \leq d) = F_{\vec{X}}(b, d) - F_{\vec{X}}(a, d) - F_{\vec{X}}(b, c) + F_{\vec{X}}(a, c)$$

Definició 2.3.6
Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i $\{x_i\}_{i\in I}$ un conjunt de v.a. Direm que $\{x_i\}_{i\in I}$ són **independents** si: $\forall k$, $\forall i_1, \ldots, i_k \subseteq I$, $\forall B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$

$$P(X_{i_1} \in B_1, X_{i_2} \in B_2, \ldots, X_{i_k} \in B_k) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{i_j} \in B_j)$$

Si ara prenem $X_1, \ldots, X_k$ v.a., aleshores si són independents,

$$F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_k \leq x_k) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j \leq x_j) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_j}(x_j)$$

Observació 2.3.7 Si X i Y són v.a. independents i f, g funcions mesurables, aleshores $f(X)$ i $g(Y)$ són també independents.

Observació 2.3.8 Si $F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_j}(x_j)$, aleshores les v.a. $X_1,\ldots,X_k$ són independents.

En quant al càlcul de moments, tenim el següent resultat:

Teorema (2.3.9)
Siguin $X_1,\ldots,x_k$ v.a. independents. Aleshores, si $\mathbb{E}[X_i] < +\infty$, es compleix que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k} X_i\right] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[X_i]$$

Vam veure que l'operador esperança és lineal, però això no és cert en general per la variància. De fet, en el segon cas obtenim un terme connector anomenat covariància.

Definició 2.3.10
Donades dues v.a. X, Y, la **covariància** de X i Y ($Cov(X,Y)$) és:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]$$

Si ara desenvolupem aquesta expressió, obtenim: $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Observem que si X i Y són independents, aleshores $X-\mathbb{E}[X]$ i $Y-\mathbb{E}[Y]$ també ho són i, per tant:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])\Big] = \mathbb{E}\Big[X-\mathbb{E}[X]\Big]\cdot\Big[Y-\mathbb{E}[Y]\Big] = (\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X])\cdot(\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[Y]) = 0$$

Observació 2.3.11 $Cov(X,Y) = 0 \not\Longrightarrow X$ i Y independents.

Si ara calculem la variància d'una suma, obtenim:

$$\mathbb{V}ar[X+Y] = \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y] + 2\cdot Cov(X,Y)$$

Observació 2.3.12 Si X i Y són independents, $Cov(X,Y) = 0$ i per tant, $\mathbb{V}ar[X+Y] = \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y]$.
En general, això és cert per n v.a. independents:

$$\mathbb{V}ar\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar[X_i] \qquad \text{si } \{X_i\}_{i=1}^{n} \text{ són independents.}$$

Vegem ara propietats de la covariància:

Propietats 2.3.13
(i) $Cov(c, X) = 0$ (c és una constant)

(ii) Si c és una constant, $Cov(c + X, Y) = Cov(X, Y)$

(iii) $Cov(X, X) = \mathbb{V}ar[X]$

(iv) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

(v) $Cov(aX + bY, Z) = a \cdot Cov(X, Z) + b \cdot Cov(Y, Z)$

Definició 2.3.14
Anomenem **coeficient de correlació de Pearson** $\big(\rho(X, Y)\big)$ a:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\mathbb{V}ar[X]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{V}ar[Y]^{\frac{1}{2}}} \in [-1, 1]$$

Observació 2.3.15
Sabem que la igualtat en *Cauchy-Schwartz* es dóna quan $\exists\, a$ tal que $a \cdot X = Y$.
A més, $Cov(aX + b, Y) = Cov(aX, Y)$. Per tant,

$$Y = aX + b \iff \rho(X, Y) \in \{\pm 1\}$$

Així doncs, com més proper sigui $\rho(X, Y)$ a ± 1, millor serà una aproximació lineal de Y usant X.

3 Variables Aleatòries Discretes

3.1 Definicions i conceptes relacionats. Funció generadora de probabilitat

Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i X una variable aleatòria.

Definició 3.1.1
X és una **variable aleatòria discreta** si $Im(X)$ és numerable.
Si X és una variable aleatòria discreta, $Im(X) = \{x_i\}_{i \geq 1}$.
X ve completament determinada pels valors $p(X = x_i) = p_i$.

Definició 3.1.2
Anomenem **funció de distribució** de X a:

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Definició 3.1.3
Sigui $A \in \mathcal{B}$, la **mesura de probabilitat induïda sobre** $\mathbb{R}$ és:

$$p_X(A) = \sum_{\substack{x_i \in A \\ x_i \in Im(X)}} p_i$$

En particular, si $Im(X) \cap A = \varnothing$ aleshores $p_X(A) = 0 \implies$ obtenim una probabilitat puntual (hi ha punts de $\mathbb{R}$ amb probabilitat > 0, a diferència de la mesura de Lebesgue).

Definició 3.1.4
Definim l'**esperança matemàtica** com:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X dp \underset{\text{def. de } \int_\Omega}{=\!=\!=} \sum_{i \geq 1} x_i \cdot p(X = x_i) = \sum_{i \geq 1} x_i \cdot p_i$$

Més en general, si $g(x)$ és una funció mesurable,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i \geq 1} g(x_i) \cdot p(X = x_i)$$

En particular,

$$\mathbb{E}[X^k] = \sum_{i \geq 1} x_i^k \cdot p_i$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{i \geq 1} x_i^2 \cdot p_i - \Big(\sum_{i \geq 1} x_i \cdot p_i\Big)^2$$

Definició 3.1.5
Prenem X, Y variables aleatòries discretes amb $Im(X)$, $Im(Y)$ numerables.
El **vector de variables aleatòries** (X, Y) ve completament caracteritzat per:

$$p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = p(X = x_i, Y = y_j) \qquad (x_i \in Im(X); y_i \in Im(Y))$$

Aleshores, tenim les següents propietats:

(i) X i Y són independents $\iff \forall x_i \in Im(X), \forall y_j \in Im(Y), p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)$

(ii) Si X, Y són independents, $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Sigui X una variable aleatòria discreta amb $Im(X) \subseteq \mathbb{N}_{\geq 0}$. En aquesta situació, tenim la següent definició:

Definició 3.1.6
La **funció generadora de probabilitat associada a X** és:

$$G_X(z) = \sum_{i \geq 0} p(X = i) \cdot z^i = \sum_{i \geq 0} p_i \cdot z^i$$

Una funció generadora de probabilitat és un objecte formal. En particular, $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$.

Si ens mirem les funcions generadores de probabilitat com funcions (en $\mathbb{C}$), aleshores compleixen el següent:

Proposició 3.1.7

1. $G_X(0) = p(X = 0)$
2. $G_X(1) = 1$. A més, si $|z| \leq 1$ $(z \in \mathbb{C}) \implies |G_X(z)| \leq 1$
   Per tant, $G_X(z)$ (com a sèrie de potències) té radi de convergència ≥ 1.
3. $\mathbb{E}[X] = \frac{d}{dz} G_X(z)_{\big|z=1}$
4. Més en general, $\mathbb{E}[(X)_k] = \frac{d^k}{dz^k} G_X(z)_{\big|z=1}$
   En particular, $\mathbb{V}ar[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$
5. Si $z \in \mathbb{R}$, $z \in [0, 1]$, aleshores $G_X(z)$ és una funció creixent.

La propietat fonamental de les funcions generadores de probabilitat és que permeten estudiar fàcilment sumes de variables aleatòries independents.

Proposició 3.1.8
Siguin X, Y variables aleatòries discretes independents amb imatge en $\mathbb{N}$, i amb funcions generadores de probabilitat $G_X(z)$, $G_Y(z)$. Aleshores:

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

Corol·lari 3.1.9
Si $X_1, \ldots, X_N$ són variables aleatòries discretes independents amb imatge en $\mathbb{N}$, aleshores:

$$G_{X_1 + \ldots + X_N}(z) = \prod_{i=1}^{N} G_{X_i}(z)$$

3.2 Models de variables aleatòries discretes

Seguidament veurem famílies importants de variables aleatòries discretes:

1) <u>Variable aleatòria Bernoulli</u>: $X \sim B(p)$ (un sol paràmetre)
Modela el llançament d'una moneda amb probabilitat d'èxit igual a p:

$$p(X = 1) = p, \quad p(X = 0) = 1 - p$$

- $G_X(z) = p \cdot z + (1 - p)$ (és una funció entera)
- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{V}ar[X] = p \cdot (1 - p)$

2) <u>Binomial</u>: $X \sim Bin(p, n)$ (o bé $B(p, n)$)
Nombre d'èxits al tirar una moneda n vegades. L'èxit individual té probabilitat p, i cada tirada de la moneda és independent de la resta.

$$\Longrightarrow X = Y_1 + \ldots + Y_n \text{ on } Y_i \sim B(p)$$

$$p(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i} \qquad i = 0, \ldots, n$$

- $G_X(z) = (p \cdot z + (1 - p))^n$ (és una funció entera)
- $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$
- $\mathbb{V}ar[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$

3) <u>Poisson</u>: $X \sim Po(\lambda)$

$$p(X = k) = \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda} \quad (k \in \mathbb{N}_{\geq 0})$$

- $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$ (és una funció entera)
- $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- $\mathbb{V}ar[X] = \lambda$

4) <u>Uniforme</u>: $X \sim U(N)$ (on $Im(X) = \{1, 2, \ldots, N\}$)

$$p(X = k) = \frac{1}{n}$$

- $G_X = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z} \cdot z$ (sing. evitable en z = 1)
- $\mathbb{E}[X] = \frac{N + 1}{2}$
- $\mathbb{V}ar[X] = \frac{N^2 - 1}{12}$

5) Geomètrica: $X \sim Geom(p) \quad \big(p \in (0,1)\big)$
Nombre de tirades d'una moneda (amb probabilitat d'èxit $= p$) fins aconseguir el primer èxit.

$$p(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_X(z) = \dfrac{p \cdot z}{1 - (1-p) \cdot z}$ (té un pol en $z = \dfrac{1}{1-p}$)
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$
- $\mathbb{V}ar[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$

6) Binomial negativa: $X \sim BinN(r, p)$
Variable aleatòria que compta el nombre de tirades necessàries per aconseguir r èxits. $(Im(X) = \{r, r+1, r+2, \ldots\})$

$$p(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$$

Podem interpretar una binomial negativa com una suma de geomètriques independents.

- $G_X(z) = \left(\dfrac{p \cdot z}{1 - (1-p) \cdot z}\right)^r$
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{r}{p}$
- $\mathbb{V}ar[X] = r \cdot \dfrac{1-p}{p^2}$

3.3 Distribucions condicionades i esperança condicionada

Siguin X, Y dues variables aleatòries discretes. Volem definir la noció de condicionar una variable aleatòria a l'altra (" $Y \mid X$ ").

Definició 3.3.1
Donat x amb $p(X = x) > 0$, diem que la **funció de probabilitat condicionada** de Y amb X és, per aquest valor de x:

$$p_{Y|X}(y, x) = p(Y = y \mid X = x)$$

Definició 3.3.2
Amb les mateixes condicions que abans, la **funció de distribució de probabilitat condicionada** és:

$$F_{Y|X}(y, x) = p(Y \leq y \mid X \leq x)$$

Observació 3.3.3 Si X i Y són independents, $X \mid Y = y \sim X$

Definició 3.3.4
L'**esperança condicionada** de Y a $X = x$ és:

$$\psi(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x] = \sum_{y \in Im(Y)} (y \cdot p_{Y|X})(y, x)$$

Amb aquesta definició estem definint una variable aleatòria $E[Y \mid X]$ que pren el valor $\psi(x)$ amb probabilitat $p(X = x)$.

Proposició 3.3.5
$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y \mid X]\big] = \mathbb{E}[Y]$

Observació 3.3.6 $\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in Im(X)} \mathbb{E}[Y \mid X = x] \cdot p(X = x)$

Observació 3.3.7 $\mathbb{E}[Y \mid X]$ és la millor aproximació de Y com a funció de X.

3.4 Suma de variables aleatòries discretes (Aplicació 1)

Ja hem vist que si X i Y són variables aleatòries discretes amb imatge en $\mathbb{N}$, aleshores si són independents, $G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$
Si fem $Z = X + Y$:

$$G_Z(z) = \sum_{n \geq 0} p(Z = n) \cdot z^n = \sum_{r \geq 0} p(X = r) \cdot z^r \cdot \sum_{s \geq 0} p(Y = s) \cdot z^s$$

$$\Longrightarrow p(Z = n) = \sum_{r+s=n} p(X = r) \cdot p(Y = s) = \underbrace{\sum_{m=0}^{n} p(X = m) \cdot p(Y = n - m)}_{Convolució}$$

Aplicant aquest principi de l'ús de funcions generadores, tenim que:

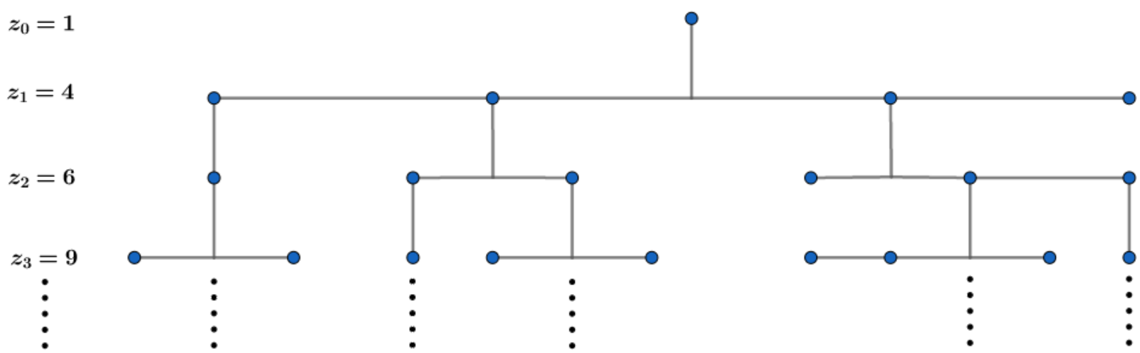
1. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Ber(p)$ independents $\implies X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Bin(n,p)$
2. $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Geom(p)$ independents $\implies X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim BinN(n,p)$
3. $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$, X_1, X_2 independents

$$\left.\begin{array}{l} G_{X_1}(z) = e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot z} \\ G_{X_2}(z) = e^{-\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot z} \end{array}\right\} \implies G_{X_1+X_2}(z) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot z}$$

$$\implies X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

3.5 Arbres de Galton-Watson (Aplicació 2)

Sigui X una variable aleatòria discreta amb $Im(X) \subseteq \mathbb{N}_{\geq 0}$.
Considerem el següent procés estocàstic:



Arbre de Galton-Watson

$Z_0 = 1$

En les següents generacions, el nombre de fills ve donat per la v.a. X.

$Z_1 =$ nº de fills del primer individu (generació 0), seguint X.
$Z_2 =$ nº de fills dels individus de la generació 1.
.
.
.
$Z_n =$ nº de descendents en la generació n-èssima.

Propietat fonamental: el nombre de descendents d'un individu és independent del nombre de descendents de qualsevol altre individu.

Lema 3.5.1 Sigui N una variable aleatòria amb imatge en $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$X_1, X_2, X_3, \ldots$ variables aleatòries independents (i independents amb N), amb $X_i \sim X$.
Prenem $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$
$\implies G_Y(z) = G_N(G_X(z))$

Proposició 3.5.2
$G_{Z_{n+m}}(z) = G_{Z_n}(G_{Z_m}(z))$. En particular $G_{Z_n}(z) = G_X \circ \overset{n)}{\ldots} \circ G_X(z)$

Observació 3.5.3 Podem calcular $\mathbb{E}[Z_n]$ i $\mathbb{V}ar[Z_n]$ a partir de la seva funció generadora de probabilitat:

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[X]^n$$

$$\mathbb{V}ar[Z_n] = \begin{cases} n \cdot \mathbb{V}ar[X] & \text{si } \mathbb{E}[X] = 1 \\ \\ \dfrac{\mathbb{V}ar[X] \cdot (\mathbb{E}[X]^n - 1)}{\mathbb{E}[X] - 1} & \text{si } \mathbb{E}[X] \neq 1 \end{cases}$$

Ara, la pregunta que ens fem és: quan hi haurà extinció?
Si fem $A_n = \{Z_n = 0\} \implies \textit{Extinció} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$
$\implies p(\textit{Extinció}) = p(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Extingit a la primera gen} \implies \text{Extingit a la segona gen.} \implies \ldots \\ \text{Extingit a la segona gen.} \not\Longrightarrow \text{Extingit a la primera} \ldots \end{array}\right\} \implies$$

$\implies$ Tenim una successió creixent de successos.

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ és creixent $\implies p(\textit{Extinció}) = \lim_{n \to \infty} p(A_n) = \lim_{n \to \infty} p(Z_n = 0)$

Teorema (Galton) (3.5.4)
Si $\mathbb{E}[X] = \mu$; $p(X = 0) \geq 0$
I sigui α la solució més petita positiva de l'equació $G_X(z) = z$ (Aleshores $p(\textit{Extinció}) = \alpha$)

1. Si $\mu < 1 \implies \alpha = 1$ (règim subcrític)
2. Si $\mu = 1 \implies \alpha = 1$ (sempre que $\mathbb{V}ar[X] \neq 0$) (règim crític)
3. Si $\mu > 1 \implies 0 < \alpha < 1$ (règim supercrític)

4 Variables Aleatòries Contínues

4.1 Mesures de probabilitat absolutament contínues. Funció de densitat

Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat, amb probabilitat induïda en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, p_X)$ (quan prenem la variable aleatòria X).

Definició 4.1.1
Siguinμ_1, μ_2 mesures sobre un espai de mesura $(X, \mathcal{A})$, diem que μ_1 és **absolutament contínua** respecte μ_2 ($\mu_1 << \mu_2$) si $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_2(A) = 0 \implies \mu_1(A) = 0$$

Definició 4.1.2
Una variable aleatòria X és **absolutament contínua** (o contínua per abreujar), si $p_X << \lambda$ (λ és la mesura de Lebesgue).

Observació 4.1.3 Les variables aleatòries discretes <u>no</u> són absolutament contínues:
Si $p(X = a) = P_a > 0$ i prenem $B = \{a\}$, tenim $\lambda(\{a\}) = 0$, però $p_X(\{a\}) = P_a > 0$

El teorema fonamental que ens permet traduir p_X (si X és absolutament contínua) a càlculs usant la mesura λ, és el següent:

Teorema (Radon-Nikodym) (4.1.4)
Sigui $(X, \mathcal{A})$ un espai mesurable i μ_1, μ_2 mesures sobre $(X, \mathcal{A})$ amb $\mu_1 << \mu_2$. Aleshores, existeix una funció f_{μ_1}, μ_2-mesurable tal que

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu_1(A) = \int_A f_{\mu_1} d\mu_2$$

A més, f_{μ_1} és única μ_2-gairebé arreu

Definició 4.1.5
La funció f_{μ_1} és la **funció de densitat** de la mesura μ_1 respecte a μ_2.
En el nostre context, X és una variable aleatòria absolutament contínua, i

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \underbrace{\lambda}_{\mu_2}) \\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \underbrace{p_X}_{\mu_1})\end{array}\right\} \underset{X abs.cont.}{\Longrightarrow} p_X << \lambda \overset{R-N}{\Longrightarrow} \forall B \in \mathcal{B},\ \boxed{p_X(B) = \int_B f_X d\lambda}$$

Definició 4.1.6
La funció f_X s'anomena **funció de densitat de probabilitat** de X.

Observació 4.1.7 En la literatura, s'escriu $f_{\mu_1} = \dfrac{d\mu_1}{d\mu_2}$ (Derivada de Radon-Nikodym).

Proposició 4.1.8
Si X és una variable aleatòria absolutament contínua, amb funció de densitat de probabilitat $f_X(x)$:

1. $f_X(x) \geq 0$ λ-gairebé arreu
2. $F_X(x) = \int_{(-\infty,x)} f_x d\lambda$; $\qquad \int_{\mathbb{R}} f_X d\lambda = 1$
3. $p(X = x) = \int_{\{x\}} f_X d\lambda = 0\, \forall x \in \mathbb{R}$
4. Si f_X és integrable Riemann, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$ i $\dfrac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$

Observació 4.1.9 Tota funció mesurable $f(x)$ que compleixi:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1, \quad f(x) \geq 0 \qquad \lambda\text{-gairebé arreu.}$$

Aleshores $\exists X$ variable aleatòria absolutament contínua per la qual $f(x) = f_X(x)$.
En aquest context, tenim:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dp = \int_{\mathbb{R}} x dp_X \stackrel{R-N}{=} \int_{\mathbb{R}} x \underbrace{f_X(x)d\lambda}_{dp_X} \underset{si f_X int.R.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

En particular,

$$\mathbb{V}ar[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2$$

4.2 Models de variables aleatòries absolutament contínues

1. Uniforme: $X \sim U([a,b])$ (Tria un nombre uniformement a l'atzar en l'interval $[a,b]$).

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$
$$\mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2}$$
$$\mathbb{V}ar[X] = \frac{(b-a)^3}{12}$$

2. Exponencial: $X \sim Exp(\lambda)$ (S'usa per modelar el tipus de vida d'un aparell. És l'anàleg continu de la Poisson).

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$
$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mathbb{V}ar[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Normal: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (\mu \in \mathbb{R},\, \sigma > 0)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \sigma^2$$

4. Gamma: $X \sim \Gamma(\lambda, \tau)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \cdot \lambda^\tau \cdot x^{\tau-1} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\tau}{\lambda}$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \frac{\tau}{\lambda^2}$$

5. Weibull: $X \sim Weib(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha \cdot x^b} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \alpha^{-\frac{2}{\beta}}(\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta}))$$

6. Beta: $X \sim \beta(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2 \cdot (a+b+1)}$$

7. Cauchy: $X \sim Cauchy$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1+x^2)} \quad (x \geq 0)$$

Cap dels $\mathbb{E}[X^k]$ és finit.

4.3 Distribucions conjuntes i marginals. Independència i distribucions condicionades

Ara farem el mateix que per una variable en el cas de tenir vectors de variables aleatòries. Ho farem per vectors (X_1, X_2), però és fàcilment generalitzable a vectors de dimensió > 2.
Sigui (X, Y) un vector de variables aleatòries. (X, Y) indueix $p_{(X,Y)}$ mesura de probabilitat en $\mathbb{R}^2$.

Definició 4.3.1
(X, Y) és un **vector absolutament continu** si $p_{(X,Y)} << \lambda_{\mathbb{R}^2}$.
Per $Radon - Nikodym$, (X, Y) té una **funció de densitat**:

$$B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\ p_{(X,Y)}(B) = \iint_B f_{(X,Y)} d\lambda_{\mathbb{R}^2}$$

Definició 4.3.2
$f_{X,Y}(x, y)$ és la **funció de densitat conjunta** de X i Y.
Si ara $B = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ i $f_{(X,Y)}(x, y)$ és integrable Riemann,

$$p_{(X,Y)}(B) = \iint_B f_{(X,Y)}\, d\lambda_{\mathbb{R}^2} = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy\, dx$$

A partir de $f_{(X,Y)}(x, y)$ podem extreure la funció de densitat de X i de Y integrant:

Definició 4.3.3
Donat un vector de variables aleatòries (X, Y) amb funció de densitat conjunta $f_{(X,Y)}(x, y)$, les **funcions de densitat marginals** són:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx$$

A partir de la funció de densitat conjunta podem definir la **funció de distribució**:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \underset{int.Riem.}{=} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy\, dx$$

Observació 4.3.4 Si $f_{X,Y}(x, y)$ és integrable Riemann $\implies$ $F_{(X,Y)}(x, y)$ és $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ i

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{(X,Y)}(x, y)$$

Observació 4.3.5 Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, $g(X, Y)$ és una variable aleatòria i es compleix:

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \cdot f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy$$

4.3.1 Independència

Si (X, Y) és un vector aleatori i X, Y són independents, aleshores $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$. Ara si $F_{(X,Y)}$ és $\mathcal{C}^2$ i les F_X, F_Y són derivables (això sempre passa en el cas absolutament continuu), llavors

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_X}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y}{\partial y} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Per tant, X i Y variables aleatòries absolutament contínues són independents sii

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Notació: si (X, Y) és un vector aleatori,

$$\mathbb{E}[(X, Y)] = (\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$$

$$\mathbb{V}ar[(X, Y)] = \begin{pmatrix} \mathbb{V}ar[X] & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & \mathbb{V}ar[Y] \end{pmatrix} \underset{Si X, Y ind}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{V}ar[X] & 0 \\ 0 & \mathbb{V}ar[Y] \end{pmatrix}$$

4.3.2 Distribucions condicionades

Siguin X, Y variables aleatòries absolutament contínues, amb funció de densitat conjunta $f_{(X,Y)}(x, y)$ i marginals $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Sigui x tal que $f_X(x) > 0$.

Definició 4.3.6
La veriable aleatòria $Y \mid X = x$ és una variable aleatòria que té com a funció de distribució:

$$F_{Y|X}(y, x) = \frac{1}{f_X(x)} \cdot \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x, u)\, du$$

Si $f_{(X,Y)}(x, y)$ és integrable respecte a y, aleshores, $F_{Y|X}(y, x)$ és derivable respecte a y, i es compleix:

$$f_{Y|X}(y, x) = \frac{\partial F_{Y|X}(y, x)}{\partial y} = \frac{f_{(X,Y)(x,y)}}{f_X(x)}$$

4.3.3 Esperança condicionada

En les condicions d'abans, definim:

$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f_{Y|X}(u, x)\, du = \psi(x) \implies \mathbb{E}[Y \mid X] = \psi(X)$$

Totes les propietats que vam veure en el cas discret per l'esperança condicionada s'apliquen aquí de la mateixa manera. En particular:

Proposició 4.3.7

$$\mathbb{E}\big[\,\mathbb{E}[Y \mid X]\,\big] = \mathbb{E}[Y] \qquad \text{(si } (X, Y) \text{ és abs. cont.)}$$

4.4 Funcions de v.a. absolutament contínues i aplicacions

Sigui $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatori absolutament continuu i $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funció bijectiva.

Com relacionem $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n)$ amb $f_{(Y_1,\ldots,Y_n)}(y_1, \ldots, y_n)$?

4.4.1 Cas univariat

Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua amb funció de densitat $f_X(x)$. Sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció bijectiva, derivable i estrictament creixent. Considerem ara $g(X) = Y$ (i $g^{-1} = h$). Aleshores,

$$f_Y(u) \text{ i } f_X(h(u)) \cdot h'(u) \text{ són iguals } \lambda - \textit{gairebé per tot}$$

Observació 4.4.1 Si g no és bijectiva o no és estrictament creixent, en general l'anàlisi és més complicat.

4.4.2 Cas multivariat

$G(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{Y}$ on G és bijectiva i $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores, de manera similar al cas anterior, tenim:

$$f_{(Y_1,\ldots,Y_n)}(y_1, \ldots, y_n) = f_{(X_1,\ldots,X_n)}(G^{-1}(y_1, \ldots, y_n)) \cdot \left| Jac\, G^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \right|$$

4.5 Distribució normal, multivariant i distribucions associades

Ja vam veure que la distribució normal ve donada per la seva esperança i la seva variància:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma} \cdot (x-\mu)^2}$$

La suma de normals independents és normal.

Teorema (Moivre-Laplace) (4.5.1)
Sigui $X \sim Bin(n, p)$. Aleshores

$$p\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_b^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

4.5.1 Distribucions associades a la normal

- $X_i \sim N(0,1)$; X_1, $X_2, \ldots$ independents.

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = \chi_n^2 \quad \equiv \textbf{Chi quadrat} \text{ (amb n graus de llibertat)}$$

- Si tenim $\chi_{d_1}^2$ i $\chi_{d_2}^2$, aleshores

$$\frac{\chi_{d_1}^2 / d_1}{\chi_{d_2}^2 / d_2} \equiv \textbf{F-Fisher-Snedecor} \text{ (amb paràmetres } d_1 \text{ i } d_2\text{)}$$

- $X \sim N(0,1)$, χ_k^2 independent de X.

$$\frac{X}{\sqrt{\chi_k^2 / k}} \equiv \textbf{t - de Student} \text{ (amb } k \text{ graus de llibertat)}$$

4.5.2 Normal multivariant

Definició 4.5.2
Sigui $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatori, direm que $\overrightarrow{X}$ és un **vector de variables aleatòries normal multivariant** si la seva funció de densitat conjunta és:

$$f_{\overrightarrow{X}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot |det(\Sigma)|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\mu})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\mu})}$$

on

- $\overrightarrow{\mu}$ és un vector de $\mathbb{R}^n$ (vector d'esperances)
- Σ és una matriu $n \times n$ simètrica i definida positiva (matriu de covariàncies)

$$\overrightarrow{\mu} = \mathbb{E}[\overrightarrow{x}]$$
$$\Sigma = \Big(Cov(x_i, x_j) \Big)_{i,j}$$

<u>Cas particular</u>: Si $\Sigma = Id$, $\overrightarrow{\mu} = \overrightarrow{0}$, aleshores escriurem $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{U}$ i es compleix que

$$f_{\overrightarrow{U}}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\mu})^T \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\mu})} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i)$$

Per tant, les marginals són normals univariades i independents.

Ara veurem que tot vector normal multivariant s'obté de fet com una transformació lineal de $\overrightarrow{U}$.

Teorema (4.5.3)
$\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ segueix una llei normal multivariant $\iff$ $\overrightarrow{X} = A \cdot \overrightarrow{X} + \overrightarrow{b}$ on A és una matriu <u>no</u> singular ($\Sigma = A^T \cdot diag \cdot A$).

Teorema (4.5.4)
Sigui $\overrightarrow{X} \sim N(\overrightarrow{\mu}, \Sigma)$ de dimensió n, i M una matriu $m \times n$ de rang màxim ($m \leq n$). Aleshores $M \cdot \overrightarrow{X}$ és un vector de variables aleatòries normal multivariant $N(M \cdot \overrightarrow{\mu}, M \cdot \Sigma \cdot M^T)$.

En el cas de $m = 1$ tenim el següent corol·lari:

Corol·lari 4.5.5
Si $a_1, \ldots, a_n$ són nombres tals que $\sum a_i^2 > 0$ (la matriu $(a_1, \ldots, a_n)$ té rang 1) i $\overrightarrow{X} \sim N(\overrightarrow{\mu}, \Sigma)$, $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

$$M\overrightarrow{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j \sigma_{ij} \right) \quad \text{on} \begin{cases} \overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu) \\ \sigma_i^2 = \mathbb{V}ar[X_i] \\ \sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) \end{cases}$$

Seguidament veurem els estimadors i el teorema de Fisher:

Definició 4.5.6
Siguin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatòries idènticament distribuïdes. L'**esperança mostral** i la **variància mostral** són:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$$

En particular, $\mathbb{E}[\overline{X}] = \mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{V}ar[\overline{X}] = \frac{\mathbb{V}ar[X_1]}{n}$ i $\mathbb{E}[S^2] = \mathbb{V}ar[X_1]$

Si, a més, $X_1, \ldots, X_n$ són $N(\mu, \sigma^2)$, tenim el següent teorema:

Teorema (Fisher) (4.5.7)
Si $X_1, \ldots, X_n$ són independents i $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores $\overline{X}$ i S^2 són independents.
A més, $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ i $S^2 \sim \chi_{n-1}^2$

5 Funcions característiques i famílies exponencials

5.1 Funció generadora de moments i funció característica

Definició 5.1.1
Sigui $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espai de probabilitat i X una variable aleatòria, la **funció generadora de moments** de X és $M_X(s)$, definida per:

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] \quad \text{on s} \in \mathbb{C} \quad \text{(No té per què estar definida)}$$

Propietats 5.1.2

1. $M_X(0) = 1$
2. Si $\mathbb{E}[X^k] < \infty \ \forall k \geq 1$, aleshores $\mathbb{E}[X^k] = M_X^{(k)}(0)$
3. Si $Y = aX + b$,
$$M_Y(s) = \mathbb{E}[e^{s\cdot(aX+b)}] = e^{sb}\mathbb{E}[e^{saX}] = e^{sb} \cdot M_X(as)$$
4. Si X, Y són indep. $\implies M_{X+Y}(s) = \mathbb{E}[e^{s\cdot(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{sX}] \cdot \mathbb{E}[e^{sY}] = M_X(s) \cdot M_Y(s)$

Aquesta definició particularitza en el cas discret i en el cas continuu de la següent manera:

- Cas discret: $\mathbb{E}[e^{sX}] = \sum\limits_{x \in Im(X)} e^{sx} p(X = x)$
- Cas continuu: $\mathbb{E}[e^{sx}] = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} f_X(x)\, dx$

Exemple 5.1.3

- $X \sim Ber(p) \implies M_X(s) = e^{s\cdot 0} \cdot (1-p) + e^{s\cdot 1} \cdot p = p \cdot e^s + (1-p)$

  $M_X(s)$ és una funció entera $\implies$ podem calcular tots els moments: $\mathbb{E}[X^k] = p$

- Si $Y \sim Bin(N, p) \implies Y = X_1 + \ldots + X_N \quad$ on $X_i \sim Ber(p)$, $\{X_i\}_{i=1}^N$ independents
$$M_Y(s) = (p \cdot e^s + (1-p))^N$$

- $X \sim Exp(\lambda) \quad (\lambda > 0)$
$$M_X(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s-\lambda)x}\, dx = \lambda \cdot \left. \frac{e^{(s-\lambda)x}}{s-\lambda} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$
  (No està definida per alguns valors de s)

- $X \sim Cauchy$. X té funció de densitat $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$
$$\mathbb{E}[e^{sX}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{sx}}{\pi(1+x^2)}\, dx \quad \text{(No té sentit si } Re(s) > 0\text{)}$$

Estem veient que la funció generadora de moments no convergeix en la majoria de casos. Això és degut a que $s \in \mathbb{C}$.
Per a solucionar aquest problema, prenem $s = it$ ($t \in \mathbb{R}$).

Definició 5.1.4
La funció $\mathbb{E}[e^{itX}] = M_X(it) = \Phi_X(t)$ és la **funció característica** de X.

Observació 5.1.5 Totes les propietats de la funció generadora de moments es compleixen per les funcions característiques:

1. $\Phi_X(0) = 1$
2. $\mathbb{E}[X^k] = M_X^{(k)}(0) = \dfrac{d^k}{ds^k} M_X(s)\Big|_{s=0} = \dfrac{1}{(i)^k} \cdot \Phi_X^{(k)}(0)$
3. $Y = aX + b \implies \Phi_Y(t) = e^{ibt} \cdot \Phi_X(at)$
4. X, Y independents $\implies \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$

Exemple 5.1.6

- $X \sim Exp(\lambda)$ (amb $\lambda > 0$). Té funció de densitat $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

  $$\Phi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x}\, dx = \lambda \frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\Bigg|_0^\infty = \frac{-\lambda}{it-\lambda}$$

  (Està definida per tot valor de t)

- $X \sim Cauchy$

  $$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\pi(1+x^2)}\, dx = e^{-|t|}$$

  S'observa que la variable aleatòria $Cauchy$ no té moment, però si que té funció característica (No es pot derivar $\Phi_X(t)$ en $t = 0$)

- $X \sim N(0,1) :\ \Phi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$

  Com a conseqüència, si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, aleshores $X = \sigma Y + \mu$ (on $Y \sim N(0,1)$)

  $$\implies \Phi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

- $X \sim Geom(p)$: $\Phi_X(t) = \dfrac{p}{e^{it} - (1-p)}$

- $X \sim Pois(\lambda)$: $\Phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

- $X \sim U(0,1)$: $\Phi_X(t) = \dfrac{e^{it}-1}{it}$ (Té una singularitat evitable en t=0)

5.1.1 Propietats generals de les funcions característiques

Proposició 5.1.7
Sigui X una variable aleatòria amb funció característica $\Phi_X(t)$. Aleshores:

1. $\Phi_X(0) = 1$ i $|\Phi_X(t)| \leq 1 \, \forall t \in \mathbb{R}$
2. $\Phi_X(t)$ és uniformement contínua en $\mathbb{R}$.
3. $\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \sum\limits_{j,k} \Phi_X(t_j - t_k) z_j \cdot \overline{z}_k \geq 0$

Teorema (d'inversió) (5.1.8)
Sigui X una variable aleatòria que indueix una probabilitat p_X sobre $\mathbb{R}$ i funció característica $\Phi_X(t)$. Aleshores $\forall a, b \in \mathbb{R} \, (a < b)$,

$$\underbrace{p_X\big((a,b)\big)}_{p(a<X<b)} + \frac{1}{2}\big(p_X(\{a\}) + p_X(\{b\})\big) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \cdot \Phi_X(t) \, dt$$

Lema 5.1.9
Donada una variable aleatòria X, el nombre de discontinuïtats de $F_X(x)$ és un conjunt numerable.

Corol·lari 5.1.10
$\Phi_X(t)$ caracteritza completament X.

5.2 Famílies exponencials

Ara veurem que podem tractar de manera molt general famílies de variables aleatòries usant la noció de família exponencial.

Definició 5.2.1
Una família de variables aleatòries és **exponencial** amb paràmetres $\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ si la funció de probabilitat (cas discret) o la funció de densitat (cas continuu) té la forma:

$$p(x \mid \overrightarrow{\theta}) = f(x, \overrightarrow{\theta}) = g(x) \cdot exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \theta_i t_i(x) - C(\overrightarrow{\theta})\Big) \quad \text{(on } \{t_i(x)\}_{i=1}^{n} \text{ són funcions l.i.)}$$

La família es diu **natural** si $\exists k$ tal que $t_k(x) = x$.

Exemple 5.2.2

1. $X \sim Ber(p)$

   $$p(x \mid p) = p^x (1-p)^{1-x} = exp\Big(x \cdot log(p) + (1-x) \cdot log(1-p)\Big), \quad x \in \{0, 1\}$$

   Agafem l'exponent:

   $$x \cdot log(p) + (1-x) \cdot log(1-p) = x\Big(log(p) - log(1-p)\Big) = x\Bigg(\underbrace{log\Big(\frac{p}{1-p}\Big)}_{\theta}\Bigg) + log(1-p)$$

Si fem $\theta = log\Big(\dfrac{p}{1-p}\Big) \implies e^\theta = \dfrac{p}{1-p} \implies e^\theta - pe^\theta = p \implies p = \dfrac{e^\theta}{1+e^\theta}$

$$\implies log(1-p) = log\left(1 - \frac{e^\theta}{1+e^\theta}\right) = -log(1+e^\theta)$$

Per tant,

$$p(x \mid \theta) = exp\Big(\underset{t_1(x)}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \theta - \underbrace{log(1+e^\theta)}_{C(\theta)}\Big) \qquad \left(\theta = log\frac{p}{1-p}\right)$$

és família exponencial natural.

2. $X \sim Bin(N,p)$

$$p(x \mid N,p) = \binom{N}{x} \cdot p^x(1-p)^{N-x} \quad x \in \{0,1,\ldots,N\}$$

N no pot ser un paràmetre! $\implies$ N ha de ser fix.

En aquesta situació:

$$p(x \mid p) = \underbrace{\binom{N}{x}}_{g(x)} p^x(1-p)^{N-x} = g_N(x) \cdot exp\Big(x \cdot log(p) + (N-x) \cdot log(1-p)\Big) =$$

$$= g_N(x) \cdot exp\Big(x \cdot log(\tfrac{p}{1-p}) + N \cdot log(1-p)\Big) \underset{\theta = log\frac{p}{1-p}}{=} g_N(x) \cdot exp\big(x \cdot \theta - N \cdot \underbrace{log(1+e^\theta)}_{C(\theta)}\big)$$

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$p(x \mid \mu, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - log(\sigma)\right)$$

Desenvolupem l'exponencial:

$$\begin{aligned}
\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - log(\sigma) &= \frac{-x^2}{2\sigma^2} + \frac{2x\mu}{2\sigma^2} - \frac{-\mu^2}{2\sigma^2} - log(\sigma) = \\
&= \frac{-x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma^2}x - \Big(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + log(\sigma)\Big) = \\
&= \underbrace{\frac{\mu}{\sigma^2}}_{\theta_1} x - \underbrace{\frac{1}{2\sigma^2}}_{\theta_2} x^2 - \Big(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + log(\sigma)\Big) = \\
&= \theta_1 \cdot \underset{t_1(x)}{\underset{\downarrow}{x}} + \theta_2 \cdot \underset{t_2(x)}{\underset{\downarrow}{x^2}} - \underbrace{\left(\frac{-\theta_1^2}{2\theta_2} + \frac{1}{2} \cdot log\Big(\frac{-1}{2\theta_2}\Big)\right)}_{C(\theta_1,\theta_2)}
\end{aligned}$$

Estudiant la fórmula $p(x \mid \overrightarrow{\theta})$ directament, podem trobar resultats genèrics de manera senzilla.

Proposició 5.2.3
$\mathbb{E}[t_i(Z)] = \dfrac{\partial}{\partial\theta_i} C(\overrightarrow{\theta})$

Proposició 5.2.4
Si X pertany a una família exponencial natural amb $t_1(x) = x$, aleshores:

$$\Phi_X(t) = e^{C(\theta_1 + it, \theta_2, \ldots, \theta_r) - C(\overrightarrow{\theta})}$$

6 Convergència de variables aleatòries

6.1 Modes de convergència i equivalències

Sigui $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una seqüència de variables aleatòries. Volem donar sentit a la noció de convergència de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ cap a una variable aleatòria X donada.
Veurem que això ho podem fer de diverses maneres.

Definició 6.1.1
$\{X_n\}_{n\geq 1}$ **convergeix quasi-segurament** cap a X, i ho escriurem $X_n \xrightarrow{qs} X$ si

$$p\Big(\underbrace{\Big\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} X(\omega)\Big\}}_{A}\Big) = 1$$

La definició té sentit perquè A és un succés. Vegem-ho:

$$A_n(m) = \left\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}\right\} \text{ és un succés.}$$

$$\Longrightarrow \; A(m) = \liminf_n A_n(m) = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n(m) \quad \forall n \geq n_0(\omega)\} \text{ (és un succés)}$$

Finalment,

$$A = \bigcap_{m\geq 1} A(m) = \left\{\omega \in \Omega : \forall m \,\exists n_0(\omega) \text{ tal que } |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m} \text{ si } n \geq n_0(\omega)\right\} \text{ és un succés.}$$

Definició 6.1.2
Direm que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **convergeix en mitjana d'ordre r** cap a X $(r \geq 1)$ i ho escriurem $X_n \xrightarrow{r} X$ si

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^r\right] \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Definició 6.1.3
Direm que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **convergeix en probabilitat** cap a X i ho escriurem $X_n \xrightarrow{p} X$ si $\forall \epsilon > 0$

$$p\left(|X_n - X| > \epsilon\right) \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Definició 6.1.4
Direm que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **convergeix en distribució** cap a X i ho escriurem $X_n \xrightarrow{d} X$ si

$$F_{X_n}(x) \underset{n}{\longrightarrow} F(x) \text{ en els punts de continuïtat de F(x)}$$

Observació 6.1.5 Ens cal que x sigui un punt de continuïtat de F per a que famílies de variables aleatòries convergeixin de manera natural en distribució.

Exemple 6.1.6

Sigui X una variable aleatòria fixada, $X_n = X + \dfrac{1}{n}$. Aleshores volem que $X_n \xrightarrow{d} X$. Si això passa,

$$F_{X_n}(x) = p(X_n \leq x) = p(X \leq x - \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(X < x) = F_X(x^-) \quad \text{(límit per l'esquerra)}$$

$\Longrightarrow$ per tal que $F_X(x)$ sigui $F_X(x^-)$ ens cal suposar que x és un punt de continuïtat de F_X.

El que veurem ara són implicacions entre els diversos modes de convergència.
També veurem que les implicacions contraries mai seran certes.

6.1.1 Diagrama modes de convergència

$$\begin{tikzcd}
X_n \xrightarrow{qs} X \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{IV}"] & & X_n \xrightarrow{p} X \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{I}"] & X_n \xrightarrow{d} X \\
X_n \xrightarrow{r} X \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{III}", "r>s\geq 1"'] & X_n \xrightarrow{s} X \arrow[ur, Rightarrow, "\mathrm{II}"'] & &
\end{tikzcd}$$