Mathematical Analysis Vol.1

@Souez3

22.11.2024

1 Билет 1

1.1 Последовательность

$f(n)$ - последовательность задана на множестве N Когда каждому $n \in N$ поставлено в соответствие некоторого закона $a(n) \in R$, тогда говорят, что задана числовая последовательность ${a_n}^{\inf}$

Примеры: n-ный член арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + \alpha(n-1)$ геометрическая прогрессия: $b_n = b_1 * q^(n-1)$

1.2 Предел числовой последовательности

Определение: Число A называют пределом числовой последовательности X_n, если $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon)$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon$

Определение: Сходящаяся последовательность - последовательность, которая имеет конечный предел

Определение: Расходящаяся последовательность - последовательность, которая имеет бесконечный предел либо предела не существует.

Последовательнoть ограничена, если $\exists M > 0 : \forall n \in N$ выполняется $a_n <= M$ (существует такое число M, что для любого номера последовательности все члены последовательности не превосходят это число по модулю.

2 Билет 2

2.1 Теорема о единственности предела последовательности

Теорема: Если у последовательности есть предел, то он единственный

Доказательство: Докажем от противного. Допустим существует 2 предела.

$\sqsupset \lim_{x\to\infty} X_n = A \sqsupset \lim_{x\to\infty} X_n = B$, при этом $B! = A$ (1)

Тогда возьмем $\epsilon = (B - A)/3 > 0$, $(\epsilon_A \bigcap \epsilon_B! = 0)$

Следовательно

n >= N $\exists N_1 : \forall n > N$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon$ (2)

$\exists N_2 \forall_n >= N_2$ и тоже выполняется, что $|X_n - B| < \epsilon$ (3)

Тогда $|a-b| = |a - X_n + X_n - b| <= |X_n - A| + X_n - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \frac{2*|A-B|}{3}$, тогда получим $|A - B| <= \frac{2}{3} * |B - A|$ Получим противорчие

3 Билет 3

Определение: Последовательность ограничена, если $\exists M > 0 : \forall b \in N$ выполняется $|a_n| <= M$

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности: Всякая сходящаяся последовательность ограничена!

Доказательство: $\sqsupset A = \lim_{n\to\infty} X_n \in R$, тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in mathdsN$ такое что $\forall n \in mathdsN : n > N(\epsilon)$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon \forall n > N(\epsilon) X_n \in (A - \epsilon; A + \epsilon)$ содержит конечное число $\mathrm{x}_1, x_2, ...x_k \sqsupset m = minX^-; A - \epsilon M = maxA - \epsilon; x^+$ Тогда на отрезке [m;M] находятся $\mathrm{x}_1, x_2, ...x_k (A - \epsilon; A + \epsilon)[m; M] x_n, \forall n \in mathdsN x_n <= m x_n >= M$

Примеры:

1)

$1 \frac{}{n^2 = 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}...}$ $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ - ограничена сверху 2) $\frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; ...$ $\lim \frac{n^2}{n+1} >= \frac{1}{2}$ - ограничена снизу (4)

4 Билет 4

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

$\sqsupset X_n; Y_n$ - две сходящиеся последовательности. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} X_n = A; \lim_{n\to\infty} Y_n = B$

Свойства 1) $X_n += Y_n; X_n * Y_n; \frac{X_n}{Y_n}$ - тоже сходящиеся последовательности. 2) $\lim_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = A + B$ 3) $\lim_{n\to\infty}(X_n - Y_n) = A - B$ 4) $\lim_{n\to\infty}(X_n * Y_n) = A * B$ 5) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{Y_n} = \frac{A}{B}$

Доказательство: 1) $\forall N > 0_0 : \forall n > N_0$ выполняется $|X_n - A| < \frac{\epsilon}{2}()$ $\exists N_1 : \forall n > N_1$ выполняется $|Y_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$ Пусть N = max($\mathrm{N}_2; N_1), n > N \forall n > N |(X_n + Y_n) - (A + B)| = |X_n - A + Y_n - B| <= |X_n - A| + |Y_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

5 Билет 5

5.1 Понятие функции через последовательность

Если каждому $x \in X$ по некоторому закону поставлен в соответствии единственный y, то говорят что на множестве X задана функция f

$\forall x \in X \exists! y \in R : f(x) = y$ (5)

5.2 Предел функции в точке

Определение по Гейне: $\sqsupset f(x)$ - определена в некоторой проколотой окрестности точки x

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ если $\forall x_n \exists \mathring{U}_{x0} > 0$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) > 0 => f(x) - g(x) > 0$ по теореме если f(x) имеет предел A и в окрестности (a) принимает значения больше нуля, то A $>= 0$ (6)

5.3 Теорема о единственности предела

Если функция имеет предел в точке, то он единственнй.

Доказательство от противного: $\sqsupset \exists X_n = \lim_{n\to\infty} X_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} X_n = B$, $A! = B; A, B \in R$ Возьмем $\epsilon_n \bigcap \epsilon_b! =$, тогда $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}; |f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$ $|A - B| = |A - B + f(x) - f(x)| = |A - f(x) + f(x) - B| <= |A - f(x)| + |B - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ То есть получили $\forall \epsilon > 0 -> |A - B| < \epsilon$

6 Билет 6

6.1 Ограниченная функция

Определение: Функция ограничена, если $\exists M > 0 : \forall x \in X$ выполняется $|f(x)| <= M$

Определение: Функция называется ограниченной сверху на х если $\exists M : \forall x \in X$ выполняется $F(x) < M$

Определение: Функция называется ограниченной снизу на х если $\exists M : \forall x \in X$ выполняется $F(x) > M$

6.1.1 Теорема об ограниченности функции, имеющей предел (конечный)

Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и имеет в точке конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}(\delta),$$
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\forall x \in \dot{U}(\delta)$:

$$|f(x) - A| < 1,$$

раскрыв модуль:

$$-1 < f(x) - A < 1.$$

Отсюда:

$$A - 1 < f(x) < A + 1 \implies f(x) \text{ ограничена.}$$

7 Билет 7

7.1 Арифметические действия с пределами функции

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B.$$

Тогда:

1.
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B.$$

2.
$$\lim_{x\to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot A, \quad \text{где } C = \text{const}.$$

3.
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B.$$

4. Если $B \neq 0$, то:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}.$$

Условие: $\forall x\in\mathrm{Dom}(\varphi)\quad \varphi(x)\neq 0.$

Доказательство: Арифметическое свойство предела (Сумма)

Условие

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B.$$

Доказательство

По определению предела:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall\varepsilon_1>0\,\exists\delta_1>0:\forall x\in\dot U(\delta_1),$$
$$|x-x_0|<\delta_1 \implies |f(x)-A|<\varepsilon_1.$$

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B \iff \forall\varepsilon_2>0\,\exists\delta_2>0:\forall x\in\dot U(\delta_2),$$
$$|x-x_0|<\delta_2 \implies |\varphi(x)-B|<\varepsilon_2.$$

Пусть $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, и $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда:

$$|f(x)+\varphi(x)-(A+B)|=|f(x)-A+\varphi(x)-B|\le|f(x)-A|+|\varphi(x)-B|.$$

Из условий следует:

$$|f(x)-A|<\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\varphi(x)-B|<\varepsilon_2.$$

Таким образом:

$$|f(x)+\varphi(x)-(A+B)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon.$$

Вывод

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=A+B.$$

Теорема о суперпозиции

1) $f(x)$ и $g(x)$: $F(x)=F(f(g(x)))$

2) $\lim_{x\to x_0} g(x)=A$

3) $\lim_{x\to x_0} f(x)=B$

Следовательно:

$$\lim_{x\to x_0}F(f(g(x)))=B$$

Доказательство: $\sqsupset x=Dom(g); y=Dom(f)$ Тогда по определению предела $\lim_{x\to x_0} g(x)=A \iff \forall\varepsilon_1>0\exists\delta_1>0:\forall x\in\dot U(\delta_1)$ $|g(x)-A|<\varepsilon$ $\lim_{y\to A} f(y)=B \iff \forall\varepsilon_2>0\exists\varepsilon_1>0:\forall y\in\dot U(A)$ $|f(y)-B|<\varepsilon_2$ Следовательно: $\forall\varepsilon_2>0\exists\dot U_\delta(x_0)>0:\forall x\in\dot U_\delta(x_0) \implies f(g(x))\in\dot U_\varepsilon 2(B) \implies B=\lim_{x\to_0} f(g(x))$ $|f(g(x))-B|<\varepsilon_2 \implies B=\lim_{x\to x_0} f(g(x))$

8 Билет 8

Теоремы о пределах функции: о предельном переходе в неравенство

Рассмотрим неравенство:

$$a_n \le b_n$$

Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда, если $a_n \le b_n$ для всех n, то по свойству пределов:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

Следовательно:

$$A \le B$$

Доказательство от противного: $\sqsupset$ $A > B$ Тогда $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = A - B > 0$ Из арифметических свойств пределов следует: $f(x) - g(x) > 0 \implies f(x) > g(x)$ Это противоречит условию $f(x) <= g(x)$

Теорема о сжатой функции

Теорема о сжатой функции

Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — функции, определенные на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и выполняется неравенство

$$f(x) \le h(x) \le g(x),$$

и при этом

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b,$$

то

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Доказательство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = C \tag{7}$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \dot{U}_f(x_0) : \forall x \in \dot{U}_f(x_0) \tag{8}$$

$$|f(x) - C| < \varepsilon_1 \implies -\varepsilon_1 < f(x) - C < \varepsilon_1 \implies C - \varepsilon_1 < f(x) < \varepsilon_1 + C \tag{9}$$

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = C \tag{10}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \dot{U}_h(x_0) : \forall x \in \dot{U}_h(x_0) \tag{11}$$

$$|h(x) - C| < \varepsilon_2 \implies -\varepsilon_2 < h(x) - C < \varepsilon_2 \implies C - \varepsilon_2 < h(x) < \varepsilon_2 + C \tag{12}$$

$$f(x) <= g(x) <= h(x) \implies C - \varepsilon_1 < f(x) <= g(x) <= h(x) < \varepsilon_2 + C \tag{13}$$

Отсюда:

$$-\varepsilon_1 < g(x) < \varepsilon_2 + C - \varepsilon_1 < g(x) - C < \varepsilon_2 \tag{14}$$

Пересечём окрестности ε_1 и ε_2 и возьмем $min(-\varepsilon_2; \varepsilon_2)$ Тогда

$$-\varepsilon_2 < g(x) - \ < \varepsilon_2 \implies |g(x) - C| < \varepsilon_2 \implies \lim_{x\to x_0} g(x) = C \tag{15}$$

1 замечательный предел

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

Рассмотрим односторонние пределы и докажем, что они равны 1. Рассмотрим случай $x \to +0$. Отложим этот угол на единичной окружности так, чтобы его вершина совпадала с началом координат, а одна сторона совпадала с осью OX. Пусть A — точка пересечения второй стороны угла с единичной окружностью, а точка B — с касательной к этой окружности в точке A. Точка C — проекция точки A на ось OX. Очевидно, что:

$$S_{\triangle OAC} < S_{\text{сектора } OAC} < S_{\triangle OAB}$$

где S — площадь. Поскольку $|OC| = \cos x$, $|AC| = \sin x$, $|AB| = \tan x$, то:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Так как при $x \to +0$: $\sin x > 0$, $x > 0$, $\tan x > 0$:

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Умножаем на $\sin x$:

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Переходя к пределу:

$$\lim_{x\to +0}\cos x \le \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} \le 1$$

Так как $\lim_{x\to +0}\cos x = 1$, то:

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Аналогично доказывается для $x \to -0$. Следовательно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

9 Билет 9

Предел функции на бесконечности

Определение: Число A называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in Dom(f)$ из $|x| > \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

10 Билет 10

Бесконечно большие функции.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0 \,\text{такое, что}\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Пример: Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

11 Билет 20

Устойчивость знака непрерывной функции

Теорема: Пусть f — непрерывная функция на множестве $D \subset \mathbb{R}$, и пусть $c \in D$ такая точка, что $f(c) \neq 0$. Тогда существует окрестность $U(c)$ точки c, такая что для всех $x \in U(c) \cap D$ выполняется $f(x) \neq 0$ и знак функции f на $U(c) \cap D$ совпадает со знаком $f(c)$.

12 Билет 21

1. Алгебраические функции

Алгебраические функции — это функции, которые могут быть выражены с использованием конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Примеры:

- линейная функция: $f(x) = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$;
- квадратичная функция: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- корневая функция: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. Трансцендентные функции

Трансцендентные функции не могут быть выражены в виде конечных комбинаций алгебраических операций. Они включают:

- экспоненциальные функции, например, $f(x) = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$;
- логарифмические функции, например, $f(x) = \ln(x)$ или $f(x) = \log_a(x)$;
- тригонометрические функции: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ и т.д.;
- обратные тригонометрические функции: $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ и т.д.;
- гиперболические функции: $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ и т.д.

3. Непрерывность элементарных функций

Элементарные функции являются непрерывными на своих областях определения. Это означает, что если функция определена в некоторой точке x_0 и в её окрестности, то:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Примеры:

- Линейные и квадратичные функции непрерывны на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.
- Тригонометрические функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, а $\tan(x)$ — на множестве $\mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

13 Билет 22

Операции над непрерывными функциями и переход к пределу под знаком непрерывной функции

Операции над непрерывными функциями

Пусть f и g — функции, непрерывные в точке $x = a$. Тогда следующие функции также непрерывны в точке a:

- Сумма: $f(x) + g(x)$
- Разность: $f(x) - g(x)$
- Произведение: $f(x) \cdot g(x)$
- Частное: $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(a) \neq 0$

Переход к пределу под знаком непрерывной функции

Пусть f — непрерывная функция в точке a, и пусть $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Тогда:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$$

Доказательство: Так как f непрерывна в точке L, то по определению непрерывности для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех y, удовлетворяющих условию $|y - L| < \delta$, выполняется $|f(y) - f(L)| < \epsilon$. Поскольку $\lim_{x\to a} g(x) = L$, существует такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta'$, выполняется $|g(x) - L| < \delta$. Следовательно, для таких x имеем:

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$$

Таким образом, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L)$.

14 Билет 23

Теорема о непрерывности сложной функции

Теорема: Пусть f непрерывна в точке a, и g непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда сложная функция $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Доказательство: Так как f непрерывна в точке a, то для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что если $|x - a| < \delta_1$, то $|f(x) - f(a)| < \delta_2$, где δ_2 будет определено далее.

Поскольку g непрерывна в точке $b = f(a)$, то для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что если $|y - f(a)| < \delta_2$, то $|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$.

Теперь, выберем $\delta = \delta_1$. Тогда, если $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - f(a)| < \delta_2$, и, следовательно, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$.

Таким образом, $|h(x) - h(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$, что доказывает непрерывность $h(x)$ в точке a.

15 Билет 24

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)\quad \text{для}\quad a>0,\, a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$$

16 Билет 25

Точки разрыва функции и их классификация

Точки разрыва первого и второго рода

Точка разрыва первого рода

Точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы, но они не равны:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)\neq\lim_{x\to a^+}f(x)$$

Пример: Функция $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 2, & x\geq 0\end{cases}$ имеет точку разрыва первого рода в $x=0$.

Точка разрыва второго рода

Точка $x=a$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен $\pm\infty$ или не существует:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$$

Пример: Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет точку разрыва второго рода в $x=0$.

Точки устранимого и неустранимого разрыва

Точка устранимого разрыва

Точка $x = a$ называется точкой устранимого разрыва, если существует конечный предел, но функция не определена в этой точке или её значение не равно пределу:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ существует, но } f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x) \text{ или } f(a) \text{ не определена}$$

Пример: Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет устранимый разрыв в $x = 0$, так как $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Точка неустранимого разрыва

Точка $x = a$ называется точкой неустранимого разрыва, если невозможно сделать функцию непрерывной в этой точке ни одним способом:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ или хотя бы один из этих пределов не существует}$$

Пример: Функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$ имеет неустранимый разрыв в $x = 0$.

17 Билет 26

Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Непрерывность на интервале

Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Непрерывность на отрезке

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точках a и b с учетом односторонних пределов:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Кусочно-непрерывные функции на отрезке

Функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна на каждом подотрезке, на который можно разбить исходный отрезок, за исключением, возможно, конечного числа точек разрыва первого рода.

18 Билет 27

Теоремы Больцано — Коши

Первая теорема Больцано — Коши (о существовании корня)

Теорема: Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = 0$.

Доказательство: Поскольку f непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своих максимума и минимума. Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (случай $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$ рассматривается аналогично).

Рассмотрим множество $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Множество A непусто, так как $a \in A$, и ограничено сверху, так как $b \notin A$. Пусть $c = \sup A$. Тогда $a \leq c \leq b$.

Поскольку f непрерывна, то:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Если $f(c) = 0$, то теорема доказана. Если $f(c) \neq 0$, то возможны два случая: 1. $f(c) > 0$. Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеем $f(c - \epsilon) < 0$, что противоречит определению c как точной верхней грани множества A. 2. $f(c) < 0$. Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеем $f(c + \epsilon) > 0$, что также противоречит определению c.

Следовательно, $f(c) = 0$.

19 Билет 28

Вторая теорема Больцано — Коши (о промежуточном значении непрерывной функции)

Теорема: Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа y между $f(a)$ и $f(b)$ существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = y$.

Доказательство: Без ограничения общности предположим, что $f(a) < y < f(b)$ (случай $f(a) > y > f(b)$ рассматривается аналогично).

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - y$. Функция g непрерывна на $[a, b]$, и $g(a) = f(a) - y < 0$ и $g(b) = f(b) - y > 0$.

По первой теореме Больцано — Коши существует точка $c \in (a, b)$, такая что $g(c) = 0$, то есть $f(c) = y$.

Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)

Теорема: Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке.

Доказательство: Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Предположим противное, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in [a, b]$, такое что $|f(x_n)| > n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому $c \in [a, b]$.

Так как f непрерывна в точке c, то $f(x_{n_k}) \to f(c)$ при $k \to \infty$. Но $|f(x_{n_k})| > n_k$, что стремится к бесконечности при $k \to \infty$. Это противоречие доказывает, что f ограничена на $[a, b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем значении функции на отрезке)

Теорема: Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство: Пусть f непрерывна на $[a, b]$. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a, b]$, то есть существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, b]$.

Рассмотрим множество $A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Множество A ограничено и по теореме Вейерштрасса о супремуме и инфимуме существует $\sup A$ и $\inf A$. Пусть $\sup A = M$ и $\inf A = m$.

Так как M — точная верхняя грань множества A, то существует последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, такая что $f(x_n) \to M$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому $c \in [a, b]$.

Так как f непрерывна в точке c, то $f(x_{n_k}) \to f(c)$ при $k \to \infty$. Следовательно, $f(c) = M$, то есть f достигает своего наибольшего значения M в точке c.

Аналогично доказывается, что f достигает своего наименьшего значения m в некоторой точке $d \in [a, b]$.

20 Билет 29

Монотонные и строго монотонные функции

Монотонная функция

Функция $f(x)$ называется монотонной на промежутке I, если она либо не убывает, либо не возрастает на этом промежутке.

Неубывающая функция

Функция $f(x)$ называется неубывающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Невозрастающая функция

Функция $f(x)$ называется невозрастающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Строго монотонная функция

Функция $f(x)$ называется строго монотонной на промежутке I, если она либо строго возрастает, либо строго убывает на этом промежутке.

Строго возрастающая функция

Функция $f(x)$ называется строго возрастающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Строго убывающая функция

Функция $f(x)$ называется строго убывающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Теорема о непрерывности обратной функции

Теорема: Пусть функция $f(x)$ определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.