Mathematical Analysis Vol.1

@Souez3

22.11.2024

1 Билет 1

1.1 Последовательность

$f(n)$ - последовательность задана на множестве N Когда каждому $n \in N$ поставлено в соответствие некоторого закона $a(n) \in R$, тогда говорят, что задана числовая последовательность ${a_n}^{\inf}$

Примеры: n-ный член арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + \alpha(n-1)$ геометрическая прогрессия: $b_n = b_1 * q^(n-1)$

1.2 Предел числовой последовательности

Определение: Число A называют пределом числовой последовательности X_n, если $\forall\epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon)$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon$

Определение: Сходящаяся последовательность - последовательность, которая имеет конечный предел

Определение: Расходящаяся последовательность - последовательность, которая имеет бесконечный предел либо предела не существует.

Последовательнoть ограничена, если $\exists M > 0 : \forall n \in N$ выполняется $a_n <= M$ (существует такое число M, что для любого номера последовательности все члены последовательности не превосходят это число по модулю.

2 Билет 2

2.1 Теорема о единственности предела последовательности

Теорема: Если у последовательности есть предел, то он единственный

Доказательство: Докажем от противного. Допустим существует 2 предела.

$\sqsupset \lim_{x\to\infty} X_n = A \sqsupset \lim_{x\to\infty} X_n = B$, при этом $B! = A$ (1)

Тогда возьмем $\epsilon = (B - A)/3 > 0$, $(\epsilon_A \bigcap \epsilon_B! = 0)$

Следовательно

n >= N $\exists N_1 : \forall n > N$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon$ (2)

$\exists N_2 \forall_n >= N_2$ и тоже выполняется, что $|X_n - B| < \epsilon$ (3)

Тогда $|a-b| = |a - X_n + X_n - b| <= |X_n - A| + X_n - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \frac{2*|A-B|}{3}$, тогда получим $|A - B| <= \frac{2}{3} * |B - A|$ Получим противорчие

3 Билет 3

Определение: Последовательность ограничена, если $\exists M > 0 : \forall b \in N$ выполняется $|a_n| <= M$

Теорема об ограниченности сходящейся последовательности: Всякая сходящаяся последовательность ограничена!

Доказательство: $\sqsupset A = \lim_{n\to\infty} X_n \in R$, тогда и только тогда, когда $\forall\epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in mathdsN$ такое что $\forall n \in mathdsN : n > N(\epsilon)$ выполняется $|X_n - A| < \epsilon \forall n > N(\epsilon) X_n \in (A-\epsilon; A+\epsilon)$ содержит конечное число x$_1, x_2, ...x_k \sqsupset m = minX^-; A - \epsilon M = maxA - \epsilon; x^+$ Тогда на отрезке [m;M] находятся x$_1, x_2, ...x_k (A-\epsilon; A+\epsilon)[m; M] x_n, \forall n \in mathdsN x_n <= m x_n >= M$

Примеры:

1)

$1_{\overline{n^2 = 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16} \cdots}}$ $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ - ограничена сверху 2) $\frac{n^2}{n+1} = \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; ...$ $\lim \frac{n^2}{n+1} >= \frac{1}{2}$ - ограничена снизу (4)

4 Билет 4

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

$\sqsupset X_n; Y_n$ - две сходящиеся последовательности. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} X_n = A; \lim_{n\to\infty} Y_n = B$

Свойства 1) $X_n += Y_n; X_n * Y_n; \frac{X_n}{Y_n}$ - тоже сходящиеся последовательности. 2) $\lim_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = A + B$ 3) $\lim_{n\to\infty}(X_n - Y_n) = A - B$ 4) $\lim_{n\to\infty}(X_n * Y_n) = A * B$ 5) $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{Y_n} = \frac{A}{B}$

Доказательство: 1) $\forall N > 0_0 : \forall n > N_0$ выполняется $|X_n - A| < \frac{\epsilon}{2}()$ $\exists N_1 : \forall n > N_1$ выполняется $|Y_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$ Пусть N = max(N$_2; N_1), n > N \forall n > N |(X_n + Y_n) - (A + B)| = |X_n - A + Y_n - B| <= |X_n - A| + |Y_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

5 Билет 5

5.1 Понятие функции через последовательность

Если каждому $x \in X$ по некоторому закону поставлен в соответствии единственный y, то говорят что на множестве X задана функция f

$\forall x \in X \exists! y \in R : f(x) = y$ (5)

5.2 Предел функции в точке

Определение по Гейне: $\sqsupset f(x)$ - определена в некоторой проколотой окрестности точки x

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ если $\forall x_n \exists \mathring{U}_{x0} > 0$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) > 0 => f(x) - g(x) > 0$ по теореме если f(x) имеет предел A и в окрестности (a) принимает значения больше нуля, то A $>= 0$ (6)

5.3 Теорема о единственности предела

Если функция имеет предел в точке, то он единственнй.

Доказательство от противного: $\sqsupset \exists X_n = \lim_{n\to\infty} X_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} X_n = B$, $A! = B; A, B \in R$ Возьмем $\epsilon_n \bigcap \epsilon_b! =$, тогда $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}; |f(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$ $|A - B| = |A - B + f(x) - f(x)| = |A - f(x) + f(x) - B| <= |A - f(x)| + |B - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ То есть получили $\forall \epsilon > 0 -> |A - B| < \epsilon$

6 Билет 6

6.1 Ограниченная функция

Определение: Функция ограничена, если $\exists M > 0 : \forall x \in X$ выполняется $|f(x)| <= M$

Определение: Функция называется ограниченной сверху на х если $\exists M : \forall x \in X$ выполняется $F(x) < M$

Определение: Функция называется ограниченной снизу на х если $\exists M : \forall x \in X$ выполняется $F(x) > M$

6.1.1 Теорема об ограниченности функции, имеющей предел (конечный)

Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и имеет в точке конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{U}(\delta),$$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\forall x \in \dot{U}(\delta)$:

$$|f(x) - A| < 1,$$

раскрыв модуль:

$$-1 < f(x) - A < 1.$$

Отсюда:

$$A - 1 < f(x) < A + 1 \implies f(x) \text{ ограничена.}$$

7 Билет 7

7.1 Арифметические действия с пределами функции

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B.$$

Тогда:

1.
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B.$$

2.
$$\lim_{x\to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot A, \quad \text{где } C = \text{const}.$$

3.
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B.$$

4. Если $B \neq 0$, то:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Условие: $\forall x \in \mathrm{Dom}(\varphi) \quad \varphi(x) \neq 0$.

Доказательство: Арифметическое свойство предела (Сумма)

Условие

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = B.$$

Доказательство

По определению предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon_1 > 0 \, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \dot{U}(\delta_1),$$
$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon_1.$$

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = B \iff \forall \varepsilon_2 > 0 \, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in \dot{U}(\delta_2),$$
$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |\varphi(x) - B| < \varepsilon_2.$$

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда:

$$|f(x) + \varphi(x) - (A + B)| = |f(x) - A + \varphi(x) - B| \leq |f(x) - A| + |\varphi(x) - B|.$$

Из условий следует:

$$|f(x) - A| < \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\varphi(x) - B| < \varepsilon_2.$$

Таким образом:

$$|f(x) + \varphi(x) - (A + B)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Вывод

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B.$$

Теорема о суперпозиции

1) $f(x)$ и $g(x) : F(x) = F(f(g(x)))$
2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$
3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = B$
Следовательно:

$$\lim_{x \to x_0} F(f(g(x))) = B$$

Доказательство: $\sqsupset x = Dom(g); y = Dom(f)$ Тогда по определению предела $\lim_{x \to x_0} g(x) = A \iff \forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \dot{U}(\delta_1)\ |g(x) - A| < \varepsilon$ $\lim_{y \to A} f(y) = B \iff \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \varepsilon_1 > 0 : \forall y \in \dot{U}(A)\ |f(y) - B| < \varepsilon_2$ Следовательно: $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \dot{U}_\delta(x_0) > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \implies f(g(x)) \in \dot{U}_\varepsilon 2(B) \implies B = \lim_{x \to_0} f(g(x))$ $|f(g(x)) - B| < \varepsilon_2 \implies B = \lim_{x \to x_0} f(g(x))$

8 Билет 8

Теоремы о пределах функции: о предельном переходе в неравенство

Рассмотрим неравенство:

$$a_n \leq b_n$$

Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда, если $a_n \leq b_n$ для всех n, то по свойству пределов:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Следовательно:

$$A \leq B$$

Доказательство от противного: $\sqsupset A > B$ Тогда $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = A - B > 0$ Из арифметических свойств пределов следует: $f(x) - g(x) > 0 \implies f(x) > g(x)$ Это противоречит условию $f(x) <= g(x)$

Теорема о сжатой функции

Теорема о сжатой функции

Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — функции, определенные на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и выполняется неравенство

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

и при этом

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b,$$

то

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Доказательство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = C \tag{7}$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \dot{U}_f(x_0) : \forall x \in \dot{U}_f(x_0) \tag{8}$$

$$|f(x) - C| < \varepsilon_1 \implies -\varepsilon_1 < f(x) - C < \varepsilon_1 \implies C - \varepsilon_1 < f(x) < \varepsilon_1 + C \tag{9}$$

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = C \tag{10}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \dot{U}_h(x_0) : \forall x \in \dot{U}_h(x_0) \tag{11}$$

$$|h(x) - C| < \varepsilon_2 \implies -\varepsilon_2 < h(x) - C < \varepsilon_2 \implies C - \varepsilon_2 < h(x) < \varepsilon_2 + C \tag{12}$$

$$f(x) <= g(x) <= h(x) \implies C - \varepsilon_1 < f(x) <= g(x) <= h(x) < \varepsilon_2 + C \tag{13}$$

Отсюда:

$$-\varepsilon_1 < g(x) < \varepsilon_2 + C - \varepsilon_1 < g(x) - C < \varepsilon_2 \tag{14}$$

Пересечём окрестности ε_1 и ε_2 и возьмем $min(-\varepsilon_2; \varepsilon_2)$ Тогда

$$-\varepsilon_2 < g(x) - \ < \varepsilon_2 \implies |g(x) - C| < \varepsilon_2 \implies \lim_{x\to x_0} g(x) = C \tag{15}$$

1 замечательный предел

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство:

Рассмотрим односторонние пределы и докажем, что они равны 1. Рассмотрим случай $x \to +0$. Отложим этот угол на единичной окружности так, чтобы его вершина совпадала с началом координат, а одна сторона совпадала с осью OX. Пусть A — точка пересечения второй стороны угла с единичной окружностью, а точка B — с касательной к этой окружности в точке A. Точка C — проекция точки A на ось OX. Очевидно, что:

$$S_{\triangle OAC} < S_{\text{сектора } OAC} < S_{\triangle OAB}$$

где S — площадь. Поскольку $|OC| = \cos x$, $|AC| = \sin x$, $|AB| = \tan x$, то:

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Так как при $x \to +0$: $\sin x > 0$, $x > 0$, $\tan x > 0$:

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Умножаем на $\sin x$:

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Переходя к пределу:

$$\lim_{x\to+0}\cos x \le \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} \le 1$$

Так как $\lim_{x\to+0}\cos x = 1$, то:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Аналогично доказывается для $x \to -0$. Следовательно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

9 Билет 9

Предел функции на бесконечности

Определение: Число A называется пределом функции f(x) при $x \to \infty$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in Dom(f)$ из $|x| > \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

10 Билет 10

Бесконечно большие функции.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0\, \text{такое, что}\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Пример: Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

11 Билет 20

Устойчивость знака непрерывной функции

Теорема: Пусть f — непрерывная функция на множестве $D \subset \mathbb{R}$, и пусть $c \in D$ такая точка, что $f(c) \neq 0$. Тогда существует окрестность $U(c)$ точки c, такая что для всех $x \in U(c) \cap D$ выполняется $f(x) \neq 0$ и знак функции f на $U(c) \cap D$ совпадает со знаком $f(c)$.

12 Билет 21

1. Алгебраические функции

Алгебраические функции — это функции, которые могут быть выражены с использованием конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Примеры:

- линейная функция: $f(x) = ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$;
- квадратичная функция: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- корневая функция: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. Трансцендентные функции

Трансцендентные функции не могут быть выражены в виде конечных комбинаций алгебраических операций. Они включают:

- экспоненциальные функции, например, $f(x) = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$;
- логарифмические функции, например, $f(x) = \ln(x)$ или $f(x) = \log_a(x)$;
- тригонометрические функции: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ и т.д.;
- обратные тригонометрические функции: $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ и т.д.;
- гиперболические функции: $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ и т.д.

3. Непрерывность элементарных функций

Элементарные функции являются непрерывными на своих областях определения. Это означает, что если функция определена в некоторой точке x_0 и в её окрестности, то:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Примеры:

- Линейные и квадратичные функции непрерывны на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.
- Тригонометрические функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, а $\tan(x)$ — на множестве $\mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

13 Билет 22

Операции над непрерывными функциями и переход к пределу под знаком непрерывной функции

Операции над непрерывными функциями

Пусть f и g — функции, непрерывные в точке $x = a$. Тогда следующие функции также непрерывны в точке a:

- Сумма: $f(x) + g(x)$
- Разность: $f(x) - g(x)$
- Произведение: $f(x) \cdot g(x)$
- Частное: $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(a) \neq 0$

Переход к пределу под знаком непрерывной функции

Пусть f — непрерывная функция в точке a, и пусть $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Тогда:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$$

Доказательство: Так как f непрерывна в точке L, то по определению непрерывности для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех y, удовлетворяющих условию $|y - L| < \delta$, выполняется $|f(y) - f(L)| < \epsilon$. Поскольку $\lim_{x\to a} g(x) = L$, существует такое $\delta' > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta'$, выполняется $|g(x) - L| < \delta$. Следовательно, для таких x имеем:

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$$

Таким образом, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L)$.

14 Билет 23

Теорема о непрерывности сложной функции

Теорема: Пусть f непрерывна в точке a, и g непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда сложная функция $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Доказательство: Так как f непрерывна в точке a, то для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что если $|x - a| < \delta_1$, то $|f(x) - f(a)| < \delta_2$, где δ_2 будет определено далее.

Поскольку g непрерывна в точке $b = f(a)$, то для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что если $|y - f(a)| < \delta_2$, то $|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$.

Теперь, выберем $\delta = \delta_1$. Тогда, если $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - f(a)| < \delta_2$, и, следовательно, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$.

Таким образом, $|h(x) - h(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$, что доказывает непрерывность $h(x)$ в точке a.

15 Билет 24

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)\quad \text{для}\quad a>0,\, a\neq 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$$

16 Билет 25

Точки разрыва функции и их классификация

Точки разрыва первого и второго рода

Точка разрыва первого рода

Точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы, но они не равны:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)\neq\lim_{x\to a^+}f(x)$$

Пример: Функция $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 2, & x\geq 0\end{cases}$ имеет точку разрыва первого рода в $x=0$.

Точка разрыва второго рода

Точка $x=a$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен $\pm\infty$ или не существует:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$$

Пример: Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет точку разрыва второго рода в $x=0$.

Точки устранимого и неустранимого разрыва

Точка устранимого разрыва

Точка $x = a$ называется точкой устранимого разрыва, если существует конечный предел, но функция не определена в этой точке или её значение не равно пределу:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ существует, но } f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x) \text{ или } f(a) \text{ не определена}$$

Пример: Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет устранимый разрыв в $x = 0$, так как $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Точка неустранимого разрыва

Точка $x = a$ называется точкой неустранимого разрыва, если невозможно сделать функцию непрерывной в этой точке ни одним способом:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ или хотя бы один из этих пределов не существует}$$

Пример: Функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$ имеет неустранимый разрыв в $x = 0$.

17 Билет 26

Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Непрерывность на интервале

Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Непрерывность на отрезке

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точках a и b с учетом односторонних пределов:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Кусочно-непрерывные функции на отрезке

Функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна на каждом подотрезке, на который можно разбить исходный отрезок, за исключением, возможно, конечного числа точек разрыва первого рода.

18 Билет 27

Теоремы Больцано — Коши

Первая теорема Больцано — Коши (о существовании корня)

Теорема: Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = 0$.

Доказательство: Поскольку f непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своих максимума и минимума. Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (случай $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$ рассматривается аналогично).

Рассмотрим множество $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Множество A непусто, так как $a \in A$, и ограничено сверху, так как $b \notin A$. Пусть $c = \sup A$. Тогда $a \leq c \leq b$.

Поскольку f непрерывна, то:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Если $f(c) = 0$, то теорема доказана. Если $f(c) \neq 0$, то возможны два случая: 1. $f(c) > 0$. Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеем $f(c - \epsilon) < 0$, что противоречит определению c как точной верхней грани множества A. 2. $f(c) < 0$. Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеем $f(c + \epsilon) > 0$, что также противоречит определению c.

Следовательно, $f(c) = 0$.

19 Билет 28

Вторая теорема Больцано — Коши (о промежуточном значении непрерывной функции)

Теорема: Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа y между $f(a)$ и $f(b)$ существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f(c) = y$.

Доказательство: Без ограничения общности предположим, что $f(a) < y < f(b)$ (случай $f(a) > y > f(b)$ рассматривается аналогично).

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - y$. Функция g непрерывна на $[a, b]$, и $g(a) = f(a) - y < 0$ и $g(b) = f(b) - y > 0$.

По первой теореме Больцано — Коши существует точка $c \in (a, b)$, такая что $g(c) = 0$, то есть $f(c) = y$.

Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)

Теорема: Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке.

Доказательство: Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Предположим противное, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in [a, b]$, такое что $|f(x_n)| > n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому $c \in [a, b]$.

Так как f непрерывна в точке c, то $f(x_{n_k}) \to f(c)$ при $k \to \infty$. Но $|f(x_{n_k})| > n_k$, что стремится к бесконечности при $k \to \infty$. Это противоречие доказывает, что f ограничена на $[a, b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем значении функции на отрезке)

Теорема: Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений.

Доказательство: Пусть f непрерывна на $[a, b]$. По первой теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a, b]$, то есть существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, b]$.

Рассмотрим множество $A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Множество A ограничено и по теореме Вейерштрасса о супремуме и инфимуме существует $\sup A$ и $\inf A$. Пусть $\sup A = M$ и $\inf A = m$.

Так как M — точная верхняя грань множества A, то существует последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$, такая что $f(x_n) \to M$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому $c \in [a,b]$.

Так как f непрерывна в точке c, то $f(x_{n_k}) \to f(c)$ при $k \to \infty$. Следовательно, $f(c) = M$, то есть f достигает своего наибольшего значения M в точке c.

Аналогично доказывается, что f достигает своего наименьшего значения m в некоторой точке $d \in [a,b]$.

20 Билет 29

Монотонные и строго монотонные функции

Монотонная функция

Функция $f(x)$ называется монотонной на промежутке I, если она либо не убывает, либо не возрастает на этом промежутке.

Неубывающая функция

Функция $f(x)$ называется неубывающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Невозрастающая функция

Функция $f(x)$ называется невозрастающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Строго монотонная функция

Функция $f(x)$ называется строго монотонной на промежутке I, если она либо строго возрастает, либо строго убывает на этом промежутке.

Строго возрастающая функция

Функция $f(x)$ называется строго возрастающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Строго убывающая функция

Функция $f(x)$ называется строго убывающей на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Теорема о непрерывности обратной функции

Теорема: Пусть функция $f(x)$ определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

21 Билет 30

Производная функции в точке. Односторонние производные

21.1 Определение 1. Производная функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента.

21.2 Определение 2. Односторонние производные

Если предел существует только при одностороннем стремлении $\Delta x \to 0^+$ или $\Delta x \to 0^-$, то говорят об односторонних производных. Они определяются следующим образом:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

21.3 Теорема 1. Существование производной

Если в точке x_0 существуют обе односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и они равны, то существует производная $f'(x_0)$, и она равна $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

21.4 Пример 1. Вычисление производной в точке

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Найдем производную в точке $x_0 = 1$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Подставим:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}.$$

Раскроем скобки:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Упростим:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Таким образом, $f'(1) = 2$.

21.5 Пример 2. Односторонние производные

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Найдем односторонние производные в точке $x_0 = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta x = 0.$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -\Delta x = 0.$$

Поскольку $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, то $f'(0) = 0$.

22 Билет 31

Функция, дифференцируемая в точке

22.1 Определение. Дифференцируемость функции в точке

Функция $f(x)$, определённая в окрестности точки x_0, называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \text{где } A \text{ — постоянная, а } o(\Delta x) \text{ — бесконечно малая величина.}$$

При этом число A называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается как $f'(x_0)$.

22.2 Теорема. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке

Функция $f(x)$, определённая в окрестности точки x_0, дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда:

1. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то есть:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

2. существует конечная производная:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

   причём выполняется представление:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

22.3 Пример 1. Проверка дифференцируемости функции

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Проверим, является ли она дифференцируемой в точке $x_0 = 1$.

Приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Разделим Δy на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ получаем:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$$

Так как $\Delta y = f'(1)\Delta x + o(\Delta x)$, функция $f(x) = x^2$ дифференцируема в точке $x_0 = 1$.

22.4 Пример 2. Проверка необходимости непрерывности

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Для $x_0 = 0$ найдём производные слева и справа:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(0 + \Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta x = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(0+\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -\Delta x = 0.$$

Производная существует, но:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Функция $f(x)$ непрерывна, а значит, и дифференцируема в $x_0 = 0$. Требование непрерывности выполняется.

23 Билет 32

Теорема о связи дифференцируемости функции в точке с непрерывностью в этой точке

23.1 Формулировка теоремы

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

23.2 Доказательство

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда по определению дифференцируемости её приращение можно записать в виде:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Поделим обе части на Δx (при $\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Так как $o(\Delta x) \to 0$ быстрее, чем Δx, то при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0).$$

Это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

23.3 Пример 1. Проверка теоремы на функции $f(x) = x^2$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Найдём её производную в точке $x_0 = 1$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Производная:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x, \quad f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$$

Так как $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, функция непрерывна в точке $x_0 = 1$.

23.4 Пример 2. Проверка непрерывности при отсутствии дифференцируемости

Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Её производная не существует в точке $x_0 = 0$, так как:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Однако функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Это показывает, что непрерывность не является достаточным условием для дифференцируемости.

24 Билет 33

Понятие дифференциала функции

24.1 Определение

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 — это линейная часть приращения функции. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то дифференциал df определяется как:

$$df = f'(x_0)dx,$$

где dx — произвольное приращение аргумента.

24.2 Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Её производная равна $f'(x) = 2x$. Тогда дифференциал функции равен:

$$df = 2xdx.$$

Если $x = 1$ и $dx = 0.1$, то дифференциал равен:

$$df = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.2.$$

25 Билет 34

Геометрический смысл производной и дифференциала, секущая и касательная к графику функции в данной точке

25.1 Геометрический смысл производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке:

$$\tan \alpha = f'(x_0),$$

где α — угол наклона касательной к оси x.

25.2 Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал df — это приращение ординаты касательной, соответствующее приращению dx:

$$df = f'(x_0)dx.$$

25.3 Уравнение касательной и нормали

25.3.1 Касательная

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

25.3.2 Нормаль

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

25.4 Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. В точке $x_0 = 1$:

$$f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2.$$

Уравнение касательной:

$$y - 1 = 2(x - 1), \quad y = 2x - 1.$$

Уравнение нормали:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1), \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

25.5 Уравнение касательной и нормали

26 Билет 35

Теорема об арифметических действиях с дифференцируемыми функциями

26.1 Формулировка теоремы

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
3. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, где c — константа;
4. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0.$

26.2 Доказательство

Следует из определения производной и арифметических действий с пределами.

26.3 Пример

Рассмотрим функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x + 1$. Тогда:

1. $(f + g)'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$;
2. $(fg)'(x) = (x^2(x + 1))' = 2x(x + 1) + x^2 = 3x^2 + 2x$.

27 Билет 36

Теорема о производной сложной функции

27.1 Формулировка теоремы

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, и её производная равна:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

27.2 Доказательство

Следует из определения производной как предела и замены $\Delta y = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$.

27.3 Пример

Рассмотрим функцию $y = \sin(x^2)$. Тогда $u = x^2$ и $f(u) = \sin u$. Найдём производную:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2).$$

27.4 Свойство инвариантности формы первого дифференциала

28 Билет 37

Теорема о производной обратной функции

28.1 Формулировка теоремы

Пусть функция $y = f(x)$ монотонна и дифференцируема на промежутке, причём $f'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема, и её производная равна:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}.$$

28.2 Пример

Рассмотрим функцию $y = x^3$. Тогда обратная функция $x = \sqrt[3]{y}$. Найдём её производную:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2}.$$

29 Билет 38

Таблица производных основных элементарных функций

Функция	**Производная**
c	0
x^n	nx^{n-1}, $n \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \, (k \in \mathbb{Z})$
$\cot x$	$-\csc^2 x$, $x \neq \pi k \, (k \in \mathbb{Z})$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, $x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

30 Билет 39

Производные и дифференциалы высших порядков

30.1 Формула Лейбница для производной n-го порядка от произведения двух функций

Формула Лейбница

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до порядка n включительно. Тогда производная n-го порядка от их произведения вычисляется по формуле:

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x),$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

31 Билет 40

Параметрический способ задания функции

Функция может быть задана параметрически в виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b],$$

где t — параметр.

Производная функции y по x в таком случае вычисляется по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{где } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

32 Билет 41

Теорема Ролля

Пусть функция $f(x)$:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2. дифференцируема на интервале (a, b),
3. удовлетворяет условию $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$f'(c) = 0.$$

33 Билет 42

Теорема о среднем Лагранжа (формула Лагранжа)

Пусть функция $f(x)$:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2. дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрическая интерпретация

Точка c — это такая точка на интервале (a, b), в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Теорема о среднем Лагранжа (формула Лагранжа)

Пусть функция $f(x)$:

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2. дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрическая интерпретация

Точка c — это такая точка на интервале (a, b), в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

33.1 Геометрическая интерпретация

34 Билет 43

Теорема о среднем Коши

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. непрерывны на отрезке $[a, b]$,

2. дифференцируемы на интервале (a, b),

3. $g'(x) \neq 0$ на (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Формула Коши

Формула Коши позволяет найти соотношение между изменениями функций $f(x)$ и $g(x)$, используя производные в точке c:

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

35 Билет 44

Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1. дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, возможно, самой точки x_0),

2. $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности.

Если выполняется один из предельных случаев:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

то:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел справа существует.

36 Билет 45

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Если функция $f(x)$ n-раз дифференцируема в точке $x = a$, то она может быть представлена в окрестности a в виде:

$$f(x) = P_n(x) + o((x - a)^n),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора степени n, определяемый как:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Остаточный член в форме Лагранжа

Остаточный член может быть записан в форме:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

где $\xi \in (a, x)$.

Формула Маклорена

Формула Маклорена — это частный случай формулы Тейлора, когда $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Примеры разложения элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

36.1 Формула Маклорена, разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

37 Билет 46

Теорема о невозрастающей и неубывающей функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда:

- Если $f'(x) \geq 0$ на (a, b), то $f(x)$ неубывает на $[a, b]$.
- Если $f'(x) \leq 0$ на (a, b), то $f(x)$ невозрастает на $[a, b]$.

Теорема о достаточном условии возрастания или убывания функции в точке

Если производная $f'(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то функция $f(x)$ возрастает в этой окрестности. Аналогично, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает.

38 Билет 47

Понятие локального экстремума функции

Точка x_0 называется точкой локального экстремума функции $f(x)$, если существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такая что:

- $f(x_0)$ — локальный минимум, если $f(x_0) \leq f(x)$ для всех x из этой окрестности.
- $f(x_0)$ — локальный максимум, если $f(x_0) \geq f(x)$ для всех x из этой окрестности.

39 Билет 48

Теорема о необходимом условии экстремума

Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, и при этом $f(x)$ дифференцируема в x_0, то её производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Замечание

Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным для экстремума. Такие точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, называются критическими точками.

40 Билет 49

Теорема 1 (достаточное условие максимума или минимума)

Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0:

- Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
- Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Теорема 2 (общее достаточное условие)

Пусть $f(x)$ n-раз дифференцируема в точке x_0, и пусть:

- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, где $n \geq 2$.

Тогда:

- Если n чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.
- Если n чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.
- Если n нечётное, то в точке x_0 экстремума нет.

Правила нахождения экстремумов

1. Найти производную $f'(x)$ и определить критические точки, решив уравнение $f'(x) = 0$.
2. Проверить знак второй производной $f''(x)$ в критических точках для подтверждения характера экстремума.

41 Билет 50

Понятие направления выпуклости графика функции

Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх на интервале (a, b), если:

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале (a, b), если:

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Определение точки перегиба

Точка x_0 называется точкой перегиба графика функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ меняет направление выпуклости:

$$f''(x) = 0, \quad \text{и знак } f''(x) \text{ меняется в точке } x_0.$$

Теорема о достаточных условиях перегиба графика функции

Если $f(x)$ трижды дифференцируема в точке x_0, и:

- $f''(x_0) = 0$,
- $f'''(x_0) \neq 0$,

то x_0 — точка перегиба графика функции $f(x)$.

42 Билет 51

Определение вертикальной асимптоты

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

существует.

Наклонные и горизонтальные асимптоты

- Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой, если:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b.$$

- Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой, если:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

43 Билет 52

Понятие первообразной

Определение 1

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 1

Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке X, то множество всех первообразных $f(x)$ на X имеет вид:

$$F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Определение 2

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределённым интегралом функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)\, dx.$$

Определение 3

Операция нахождения первообразной функции $f(x)$, или нахождение неопределённого интеграла, называется интегрированием.

Запись неопределённого интеграла

Неопределённый интеграл записывается в виде:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — первообразная, а C — произвольная постоянная интегрирования.

44 Билет 53

Основные свойства неопределённого интеграла

Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $\int g(x)\,dx = G(x) + C$. Тогда:

1. **Линейность:**
$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx,$$
где a, b — постоянные.

2. **Интеграл от нуля:**
$$\int 0\,dx = C.$$

3. **Интеграл от производной:**
$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Метод интегрирования подстановкой

Если $x = \phi(t)$ — дифференцируемая функция, то:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Пример

Вычислить $\int x\cos(x^2)\,dx$.

$$\text{Пусть } u = x^2 \implies du = 2x\,dx.$$

Тогда:

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$$

Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, то:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Пример

Вычислить $\int xe^x \, dx$.

$$\text{Пусть } u = x,\, dv = e^x \, dx \implies du = dx,\, v = e^x.$$

Тогда:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Понятие многочлена

Многочлен (полином) от одной переменной x степени n имеет вид:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — коэффициенты многочлена, $a_n \neq 0$.

Сумма и произведение многочленов

- Сумма многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ есть многочлен:

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

- Произведение многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ есть многочлен:

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Деление многочленов

Каждый многочлен $P(x)$ можно представить в виде:

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x),$$

где $Q(x)$ — частное, $R(x)$ — остаток, причём $\deg R(x) < \deg D(x)$.

Теорема Безу

Если $P(a) = 0$, то $x - a$ является делителем многочлена $P(x)$. Более того:

$$P(x) = (x-a)Q(x),$$

где $Q(x)$ — частное от деления $P(x)$ на $x - a$.

45 Билет 57

Основная теорема высшей алгебры

Теорема. Любой многочлен $P(x)$ степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один корень в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Следствие

Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами представим в виде:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена $P(x)$ (возможно, кратные), а a_n — старший коэффициент.

Свойства корней многочленов с вещественными коэффициентами

Если многочлен $P(x)$ имеет вещественные коэффициенты, то:

1. Корни комплексно-сопряжённые. Если $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ — корень, то $\overline{z} = a - bi$ также корень.
2. Если степень n нечётная, то $P(x)$ имеет хотя бы один вещественный корень.

Разложение на неприводимые множители

Любой многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами представим в виде произведения:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)Q(x),$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — вещественные корни, а $Q(x)$ — произведение неприводимых квадратных множителей:

$$Q(x) = (x^2 + px + q),$$

где $p^2 - 4q < 0$.

Понятие рациональной дроби

Определение. Рациональной дробью называется выражение вида:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причём $Q(x) \neq 0$.

Правильная и неправильная рациональные дроби

- **Правильная рациональная дробь:** $\deg P(x) < \deg Q(x)$.
- **Неправильная рациональная дробь:** $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$. Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы:

  $$R(x) = Q(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

  где $Q(x)$ — частное, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь.

Теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей

Теорема. Любая правильная рациональная дробь $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)$ разложим на неприводимые множители, представима в виде суммы простейших дробей:

$$R(x) = \sum_i \frac{A_i}{(x - a_i)^{m_i}} + \sum_j \frac{B_j x + C_j}{(x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}},$$

где:

- $x - a_i$ — линейные множители $Q(x)$;
- $x^2 + p_j x + q_j$ — неприводимые квадратичные множители $Q(x)$;
- A_i, B_j, C_j — постоянные, определяемые из условий разложения.

Интегрирование дробно-рациональных выражений

Определение. Интеграл от дробно-рационального выражения $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, вычисляется путём разложения на простейшие дроби.

Методы интегрирования

1. **Разложение на простейшие дроби:** Представить $R(x)$ в виде суммы дробей вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}.$$

   Затем интегрировать каждую дробь отдельно.

2. **Замена переменных:** При интегрировании выражений, содержащих квадратичные множители, полезно использовать подстановку:

$$x = a\sin(t), \quad x = a\cosh(t), \quad x = \tan(t), \text{ и др.}$$

3. **Интегрирование по частям:** Применимо, если дробь содержит логарифмические или обратные тригонометрические функции.

Пример

Вычислить $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$.

$$\text{Пусть } x^2+4 = 4(1+\frac{x^2}{4}),\ x = 2\tan(t) \implies dx = 2\sec^2(t)\,dt.$$

Тогда:

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\sec^2(t)} \cdot 2\sec^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C.$$

Возвращая замену, получаем:

$$t = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \implies \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$