Równania Różniczkowe i Różnicowe
Zadanie komputerowe

1 Zadanie

Zadanie będzie polegało na przybliżeniu metodą elementów skończonych następujące równanie różniczkowe

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ dla } x \in [a, b] \tag{1}$$

Dokładne równanie wraz z warunkami brzegowymi jest zdefiniowane poniżej. Galerkina rozważ w przestrzeni V_n^1 która stanowi zbiór funkcji ciągłych z przedziału $[a, b]$ do $\mathbb{R}$ takich że przedziałach $[a + \frac{i}{n}(b-a), a + \frac{i+1}{n}(b-a)]$ jest funkcje te są liniowe dla $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dodatkowo można zażądać by funkcje te zerowały się w punktach a lub b. Preferowany język to Python. Można wykorzystać biblioteki do całkowania numerycznego i do algebry liniowej. Proszę także narysować wykres przybliżonego rozwiązania. Rozwiązanie proszę przygotować w parach.

2 Problemy obliczeniowe

2.1 Równanie transportu ciepła

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$
$$u(2) = 0$$
$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$
$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

2.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u = \sin x$$

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du(2)}{dx} - u(2) = 0$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

2.3 Odkształcenie sprężyste

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

2.4 Potencjał grawitacyjny

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

$$\Phi(0) = 5$$

$$\Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

Gdzie Φ to poszukiwana funkcja

$$[0, 3] \ni x \rightarrow \Phi(x) \in \mathbb{R}$$

2.5 Potencjał elekromagnetyczny

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r}$$

$$\phi'(0) + \phi(0) = 5$$

$$\phi(3) = 2$$

$$\rho = 1$$

$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$