6/29(火) 住谷

3章（3.1節~3.3節）

3.1 VaR算出モデルのバリエーション

3.1.1 VaRモデルの分類方法

- VaRの計算目的=「保有資産のリスクを計測しより上位の意思決定にフィードバックさせること」
- そのためには、VaRの計算方法が合理的なものでなければならない
- VaRの計算方法には多くのバリエーションが存在

3.1.2 代表的な方法

- **BIS標準法**（今回説明）
  - 統計的手続きなしに、BISの会計方法でリスクを算出
- **デルタ法**（今回説明）
  - 分散共分散行列でリスクの合成を行う
  - 正規性の制約が特別に強い
    - オプションなどには向かない
  - 計算負荷が小さいなど、使い勝手◎
- **ヒストリカル法**
  - 過去起こったことが同じ確率で起こりうる、と仮定した方法
- **モンテカルロ法**
  - 計算過程に時系列モデルの同定がある
  - オプションのプライシングモデルなども外挿することが容易
  - 計算負荷が大きい

3.2 BIS標準法

- VaRを計算しているのではなく、VaRの代わりを計算
  - そのため、信頼水準などの確率の概念はない
- BIS規制(バーゼル規制)において、通常、銀行は内部モデルを作成しリスク量(VaR)を計算
- 内部モデルを持たない銀行は、以下の方法でリスク量を計算
  - リスク資産の資産額と各資産に対するリスクかけ目によって計算
  - n：ポートの資産種類数、s_i：各資産の資産額、η_i：各資産に対するリスクかけ目
  - $\mathrm{VaR_{BIS}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i s_i$
- BIS標準法ではリスクの相関関係による相殺が認められない...
  - 相関関係=1の最悪の状況
  - 会計原則の「保守性の原則」に基づいている

3.3 デルタ法（分散共分散法）

3.3.1 デルタ法の基本

- デルタ法（≒分散共分散法）
  - リスクファクターの収益率分布が正規分布に従うと仮定したとき、VaRが分布の標準偏差の一定倍で表現できることを利用した方法
  - 分散共分散行列によるリスク合成が統計的に可能
  - ただし、系列相関がないこと、正規分布の仮定が必要

3.3.2 エクスポージャー（感応度）

- ケース：株式取引に関するリスク
  - 1億円分の株式Sをもつ
  - 10日間の変動が、平均0%, 標準偏差2%の正規分布で表現できるとする
  - VaRについて、
    $\mathrm{VaR}_{99}[N(0, 0.02^2)] = \mathrm{VaR}_{99}[N(0, 0.01^2)] \times 2 = -4.66\%$
  - このとき、株式の下方99%の最大リスクは、
    $100,000,000 \times 0.0466 = -4,660,000$円
- 以上の計算は、VaR = (**エクスポージャー**) × (最大損失率) となっている
  （エクスポージャー：その資産がどれだけリスクに晒されているかという「感応度」）
- 以上の関係は、資産の変動額をΔV, 変動率をΔXとすると、$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta X$ （感応度は$\frac{\partial V}{\partial x}$）
- 以上の計算は、「単位当たりの収益率分布を先に求め、それに感応度を掛け合わせている」もの

3.3.3 リスクファクターが1つのときのVaR

1. リスクファクターを1つ決定
   - 前提：リスクファクターxの変動とポートフォリオ価値V_pの変動が線形関係
2. リスクファクターが1単位変動したときのポートフォリオ価値の変動である「感応度E」を求める
   - $\Delta V_p = E\Delta x$ ・・・(※) （∵線形関係）
   - 回帰分析のパラメータで代用。つまり、$\Delta V_{p,t} = E\Delta x_t + \alpha + \epsilon_t$ からE を求める
     （$\Delta V_{p,t}$：t期のポートフォリオ変動額、Δx_t：t期のリスクファクター変動、α：定数項）
3. 「Δxは期待値0, 標準偏差σ_rの正規分布に従う」と仮定し、「ΔV_pは正規分布に従う」こととする。
   - (※)より成立
   - これより、「ΔV_pのVaRを計測するためには、ΔV_pの標準偏差を計算すれば良い」
4. 過去のマーケットのデータより、リスクファクターの標準偏差を計算：
   - $\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{T_L - 1}\sum_{t=1}^{T_L}(x_t - \bar{x})^2}$
5. (※)よりΔV_pの標準偏差σ_p は、$\sigma_p = E \cdot \sigma_r$
   - $\because \sigma_p = \sqrt{\sigma^2_{\Delta V_p}} = \sqrt{\sigma^2_{E\cdot\Delta x}} = E\sqrt{\sigma^2_{\Delta x}} = E \cdot \sigma_r$
   - （自明じゃないような気がするが...？）
6. 保有期間τと信頼水準θ を用いて、$\mathrm{VaR}[N(0, \sigma_p)] = \theta \cdot \sqrt{\tau} \cdot E \cdot \sigma_r$

3.3.4 複数リスクファクターの場合

- ポートフォリオ理論との違い
  - ポートフォリオ理論では資産比率を変数

  - リスク解析では感応度を変数
    - リスクファクター間の相関関係を考慮して、ポートフォリオのリスクを計量化
    - 株式と債券からなるポートフォリオでは、株価と金利のリスクファクターを持つ
    - 米国株式1つのみでも、米国株価と為替レートの2つのリスクファクターを持つ
- まずは資産比率を用いたリスクの合成の考え方について：
  - 各資産の保有高 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$
  - 各資産の収益率平均 $\mathbf{u} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$
  - 資産i と資産j の収益率の共分散 $\mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{1}{T_L - 1} \sum_{t=1}^{T_L} (\xi_{i,t} - \mu_i)(\xi_{j,t} - \mu_j)$
  - 共分散行列 $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_n) & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$
  - このとき、ポートフォリオ全体の収益率の平均μ_pと分散σ_p^2は、
    - $\mu_p = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}^t$
    - $\sigma_p^2 = \mathbf{s}\mathbf{Z}\mathbf{s}^t$

      （右肩のtは転置だと思います…）
- リスクファクターによる考え方：
  - ポートフォリオがm個のリスクファクターに晒されているとする
  - 各リスクに対する感応度 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$
  - V_p：ポートフォリオの価値、x_i：i番目のリスクファクター とすると、$E_i = \frac{\partial V_p}{\partial x_i}$
  - よってポートフォリオの変化ΔV_pについて以下が成立：
    $\Delta V_p = E_1 \Delta x_1 + E_2 \Delta x_2 + \cdots + E_m \Delta x_m$ （∵全微分）
  - 以下によってポートフォリオの価値の標準偏差σ_pを求める：
    - 各リスクファクターの平均, 標準偏差：μ_i, σ_i
    - 各リスクファクターの平均変動率のベクトル$\mathbf{u} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$
    - 共分散行列 $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \mathrm{Cov}(x_1, x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(x_1, x_m) & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$
    - ポートフォリオ全体の収益率の平均μ_pと分散σ_p^2は、
      - $\mu_p = \mathbf{u}\mathbf{E}^t$
      - $\sigma_p^2 = \mathbf{E}\mathbf{Z}\mathbf{E}^t$
  - よって、ポートフォリオのVaR= $\theta \cdot \sqrt{\tau} \cdot \sigma_p$

3.3.5 デルタ法の計算ステップ

- 実際は次のステップでVaRを求める：

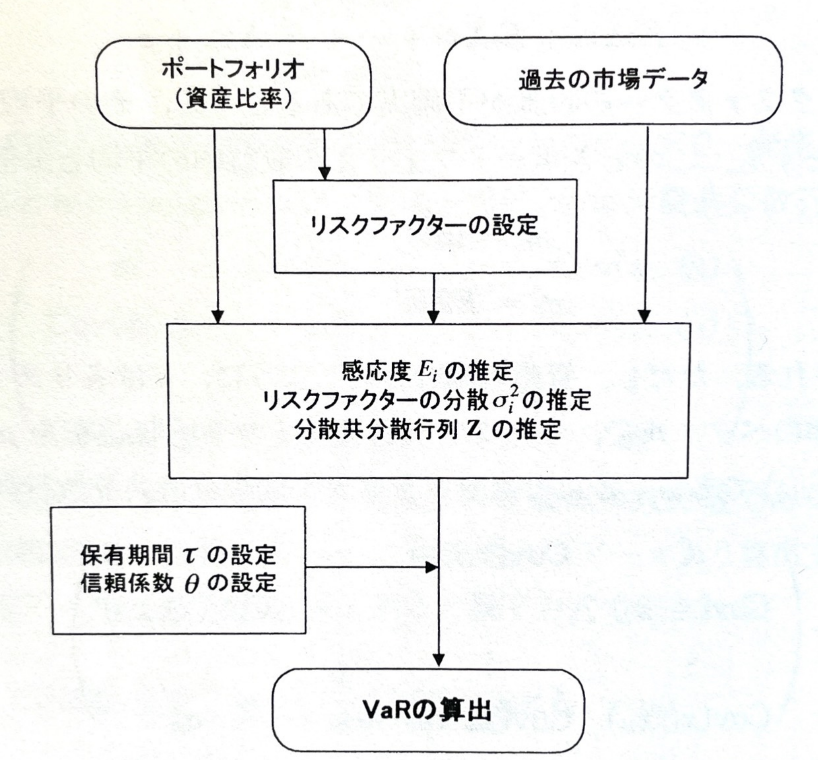

図3.2 デルタ法の計算プロセス

1. ポートフォリオに影響を与えるリスクファクターを決定
2. 各リスクファクターの変動に対するポートフォリオの感応度$(E_1, ..., E_m)$を計算
3. リスクファクターの分散$(\sigma_1^2, ..., \sigma_m^2)$および共分散$\mathrm{Cov}(x_i, x_j)$を求め、分散共分散行列$\mathbf{Z}$ を得る
4. 以上を用いてポートフォリオの変動の分散σ_p^2を計算
5. 信頼水準と保有期間の条件を与え、正規分布を仮定し、VaRを計算

3.3.6 デルタガンマ法

- リスクファクターの変化に対して感応度が一定でない場合、「感応度の変化もリスク」として捉える
- **デルタガンマ法**：感応度の変化率をファクターの変化に対して線形で定義する方法
- ポートフォリオの変化ΔV_pについて以下で定義：
  - $\Delta V_p = E\Delta x + \frac{1}{2}\Gamma \cdot (\Delta x)^2$ ・・・(※※)
  - ただし、$\Gamma = \frac{\partial^2 V_p}{\partial x^2}$
  - (※※)の第2項が感応度の変化のリスク
- (※※)の第1項,第2項の相関の定義のしかたにいくつかの方法がある
  - **デルタガンマ・ノーマルアプローチ**
    - 無双間とみなす（簡単だが多くの問題がある）
    - 5.2節でさらに解説