

問題4-2

指数加重移動平均法とは

市場の変動を予測するモデルを作成する際には過去データを用いる。その過去データを重みをつけて用いようという考え。

その重み(wieght)を、直近のデータの価値を最大とし、過去さかのぼるにつれ指数的に減衰させる方法が**指数加重移動平均法**。

市場データ（時系列データ）を x_t とする。現在の時刻を T とすると、観測されている市場データは、

$$\cdots, x_{T-4}, x_{T-3}, x_{T-2}, x_{T-1}, x_T$$

となる。対応するweightは

$$\cdots, w_4, w_3, w_2, w_1, w_0$$

と表す。weightは指数的に減衰させるので、減衰係数 κ を用いて

$$w_t = C\kappa^t \quad (0 < \kappa < 1)$$

と表せる。正規化係数 C は、weightの合計が1となるように

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{t=0}^{\infty} w_t \\ &= C \sum_{t=0}^{\infty} \kappa^t \\ &= C \frac{1}{1 - \kappa} \\ C &= 1 - \kappa \\ \therefore w_t &= (1 - \kappa)\kappa^t \end{aligned} \tag{4.5}$$

解答（前半）

問題文より $\kappa = 0.7$ なので、 $w_t = (1 - \kappa)\kappa^t$ に代入する。

t	w_t
0	0.300
1	0.210
2	0.147
3	0.103
4	0.0720
5	0.0504
6	0.0353
7	0.0247
8	0.0173
9	0.0121

修正weightについて

観測期間を T_L とすると、weightは観測期間以前を含めて合計1となるように正規化されているため、観測期間のデータ $\{x_t\}_{t=T-T_L+1}^T$ に対するweight $\{w_t\}_{t=0}^{T_L-1}$ の合計は1にならない。

観測期間以前のweightの合計を Ω_{T_L} とすると、

$$\begin{aligned}
 \Omega_{T_L} &= \sum_{t=T_L}^{\infty} w_t \\
 &= 1 - \sum_{t=0}^{T_L-1} w_t \\
 &= 1 - \sum_{t=0}^{T_L-1} (1 - \kappa)\kappa^t \\
 &= 1 - (1 - \kappa) \frac{1 - \kappa^{T_L}}{1 - \kappa} \\
 &= \kappa^{T_L}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

。したがって、もし観測期間のweightの合計を1にする場合は、観測期間中のweightの合計である $1 - \Omega_{T_L}$ でさらに正規化すればよい。このように有限の観測期間を想定しそのweightの合計が1となるよう修正したweightを**修正weight**という。
修正weightは

$$w'_t = \frac{1}{1 - \Omega_{T_L}} w_t = \frac{1}{1 - \kappa^{T_L}} w_t$$

となる。

解答（後半）

問題文より $\kappa = 0.7, T_L = 10$ なので

$$\Omega_{T_L} = \kappa^{T_L} = 0.0282$$

また修正weightは

t	w'_t	w_t
0	0.309	0.300
1	0.216	0.210
2	0.151	0.147
3	0.106	0.103
4	0.0741	0.0720
5	0.0519	0.0504
6	0.0363	0.0353
7	0.0254	0.0247
8	0.0178	0.0173
9	0.0125	0.0121