1.6 Black-Scholes式の導出　ーFirst Attackー

前提条件

前回までの節で挙げられていた前提条件をつらつら書きます。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu t + \sigma W^P(t) \tag{1}$$

$$B(t) = e^{rt} \tag{2}$$

$$C(T) = \max(0, S(T) - K) \tag{3}$$

$$\frac{S(t)}{B(t)} = \mathbb{E}^{Q_B}\left[\frac{S(T)}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right] \tag{4}$$

$$\frac{C(t)}{B(t)} = \mathbb{E}^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right] \tag{5}$$

目標

$C(t)$を導出したい。

とりあえず

この節では説明のない式がこれ

$$d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right) = \sigma\frac{S(t)}{B(t)}dW^{Q_B}(t) \tag{6}$$

。
マルチンゲールから説明できるのか？まあいいか。測度変換にはギルザノフの定理とかラドン・ニコディム微分が必要らしい。

導出

下準備その1

まずは$B(t)=e^{rt}$と$\frac{C(t)}{B(t)}=\mathbb{E}^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right]$から、

$$C(t)=e^{r(t-T)}\mathbb{E}^{Q_B}\left[C(T)|\mathcal{F}_t\right] \tag{7}$$

。さらに$C(T)=\max(0,S(T)-K)$を代入

$$C(t)=e^{r(t-T)}\mathbb{E}^{Q_B}\left[\max(0,S(T)-K)|\mathcal{F}_t\right] \tag{8}$$

。

下準備その2

$d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)=\sigma\frac{S(t)}{B(t)}dW^{Q_B}(t)$を伊藤の公式を使って解く。

確率過程と時間を引数に持つ関数$f(t,x)$において

$$\begin{aligned} df(t,X(t))=&\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt+\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))dX(t)\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\{dX(t)\}^2 \end{aligned} \tag{A}$$

が成り立つ。$f(t,x)=\log x$とすると、

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))=\frac{1}{X(t)} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))=-\frac{1}{X(t)^2} \tag{11}$$

なので、

$$d\log X(t)=\frac{dX(t)}{X(t)}-\frac{1}{2}\frac{1}{X(t)^2}\{dX(t)\}^2 \tag{12}$$

$X(t)=\frac{S(t)}{B(t)}$とすると、$dX(t)=\sigma X(t)dW^{Q_B}(t)$なので、

$$d\log X(t) = \sigma dW^{Q_B}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\{dW^{Q_B}(t)\}^2 \tag{13}$$

伊藤のテーブルより、$dW(t)dW(t) = dt$なので、

$$d\log X(t) = \sigma dW^{Q_B}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{14}$$

tを$[0,t]$で積分すると、

$$\int_0^t d\log X(t') = \sigma\int_0^t dW^{Q_B}(t') - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 dt' \tag{15}$$

$$\log X(t) - \log X(0) = \sigma\left\{W^{Q_B}(t) - W^{Q_B}(0)\right\} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{16}$$

$$\log\frac{X(t)}{X(0)} = \sigma W^{Q_B}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \tag{17}$$

$$X(t) = X(0)\exp\left(\sigma W^{Q_B}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \tag{18}$$

$$\frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S(0)}{B(0)}\exp\left(\sigma W^{Q_B}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \tag{19}$$

$$S(t) = e^{rt}S(0)\exp\left(\sigma W^{Q_B}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) \tag{20}$$

$$= S(0)\exp\left\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W^{Q_B}(t)\right\} \tag{21}$$

本番

下準備の二つより、

$$C(t) = e^{r(t-T)}\mathbb{E}^{Q_B}\left[\max\left(0, S(0)\exp\left\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W^{Q_B}(T)\right\} - K\right)|\mathcal{F}_t\right] \tag{22}$$

。標準ブラウン運動なので、$W^{Q_B}(T)|\mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(0, T-t)$となるので、（多分。）

$$C(t) = e^{r(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty}\max\left(0, S(0)\exp\left\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x\right\} - K\right) f_{\mathcal{N}(0,T-t)}(x)dx \tag{23}$$

$$= e^{r(t-T)}\int_{-\infty}^{\infty}\max\left(0, S(0)\exp\left\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T-t}x\right\} - K\right) f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx \tag{24}$$

$S(0)\exp\left\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T-t}x\right\} - K = 0$となる点$x = x^*$を探すと、

$$x^* = \frac{\log S(0) - \log K + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{25}$$

よって

$$C(t) = e^{r(t-T)} \int_{-\infty}^{x^*} \left(0, S(0)\exp\left\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T-t}x\right\} - K\right) f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx \tag{26}$$