最適投資戦略勉強会　担当：木原

3. 前提条件の緩和（その２）:異なる市場見通しの存在（後半）

① ベイズ統計

・計算負荷が高いが，計算コストの削減によって汎用化.
・非科学的とされていた主観的な情報の利用が，情報化社会の進展に伴って問題視されなくなってきた.

ベイズの定理： $P(A|B)=\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$P(A)$：何も情報を持たないもとで事象Aが発生する確率 （事前確率）
$P(A|B)$：事象Bのもとで事象Aが発生する確率 （事後確率）

ベイズ更新：ベイズの定理を繰り返し用いることで事後確率を更新

$$P(A|B,C)=\frac{P(B,C|A)P(A)}{P(B,C)}$$

$$=\frac{P(C|A)P(B|A)P(A)}{P(B)P(C)}$$

複雑な計算

$$=\frac{P(C|A)P(B|A)P(A)}{P(B)P(C)} \quad = P(A|B)$$

$$=\frac{P(C|A)}{P(C)}P(A|B)$$ ：更新された事後確率

② ベイズとしてのBlack-Littermanモデル

Black-Littermanモデル：各投資家が異なる市場見通しを持つと前提

➡ ベイズ統計学の立場からとらえることができる.

事前分布：均衡リターンの確率分布
事後分布：混合推定されたリターンの分布
※ベイズ更新は行わず，一度だけ計算する

$$\begin{pmatrix}\Pi\\ Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I\\ F\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}u\\ \epsilon\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}u\\ \epsilon\end{pmatrix}\sim N(0,\begin{pmatrix}\tau\Sigma & 0\\ 0 & \Omega\end{pmatrix})$$

$$P(\mu^*|\Pi)=\frac{k\exp\left(-\frac{1}{2}(\Pi-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\tau\Sigma)^{-1}(\Pi-\mu^*)-\frac{1}{2}(F\mu^*-Q)^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}(F\mu^*-Q)\right)}{f(z)}$$

$$(\Pi-\mu^*)^{\mathrm{T}}(\tau\Sigma)^{-1}(\Pi-\mu^*)+(F\mu^*-Q)^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}(F\mu^*-Q))$$

$$=(\mu^*-H^{-1}C)^{\mathrm{T}}H(\mu^*-H^{-1}C)+A-C^{\mathrm{T}}H^{-1}C$$

$$C=(\tau\Sigma)^{-1}\Pi+F^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}Q$$

$$H=(\tau\Sigma)^{-1}+F^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}F$$

$$A=Q^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}Q+\Pi^{\mathrm{T}}(\tau\Sigma)^{-1}\Pi$$

$P(\mu^*|\Pi)\propto\exp\left((\mu^*-H^{-1}C)^{\mathrm{T}}H(\mu^*-H^{-1}C)\right)$ ：多変量正規

$$E[\mu^*]=H^{-1}C=\{(\tau\Sigma)^{-1}+F^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}F\}^{-1}\{(\tau\Sigma)^{-1}\Pi+F^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}Q\}$$