1.9 Black–Scholes 式の導出 – Second Attack

いよいよ本章の最終目標である，筆者が思うに最も効率的な Black–Scholes 式の導出，“Second Attack” を行う．これまでの結果をすべて使って，中でも特にニューメレール・ペアの変換と，ギルザノフの定理を上手く使うことにより，“First Attack” のときのように期待値計算を積分で解くのではなく，期待値表現のまま，ほぼ四則演算だけで Black–Scholes 式を導出する[107]．

[107] この効率的な導出方法を含めて，マルチンゲール・アプローチと呼ばれる事があり，本書でも基本的にその立場を取っている．ただし，文脈によっては，一般的なフレームワークとして言及していることもある．

1.9.1 分布関数の期待値表現

さて Second Attack に入る前に，目標である Black–Scholes 式を少し変形しておこう．それは $N(\mathrm{d1})$ と $N(\mathrm{d2})$ に関してである．X を標準正規分布 $X \sim N(0, 1)$ とすると，$N(\mathrm{d1})$ は X に関する指標関数の期待値として，次の様に書くことができる．

$$
\begin{aligned}
N(\mathrm{d1}) &= \mathrm{Pr\,ob}(X \le \mathrm{d1}) \quad \text{（定義）} \\
&= \int_{-\infty}^{\mathrm{d1}} f_X(x)dx \quad \left(f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 1\{x \le \mathrm{d1}\} f_X(x)dx \\
&\quad \text{ただし，} 1\{x \le \mathrm{d1}\} \text{ は } x \text{ が d1 以下ならば 1，} \\
&\quad \text{それ以外は 0 となる指標関数} \\
&= E\left[1\{X \le \mathrm{d1}\}\right]
\end{aligned}
$$

そこで以下の導出では，$N(\mathrm{d1})$，$N(\mathrm{d2})$ を得るために，$E\left[1\{X \le \mathrm{d1}\}\right]$，$E\left[1\{Y \le \mathrm{d2}\}\right]$ の形[108] に式を帰着させることを目指す[109]．

[108] 実は $E\left[1\{X \le \mathrm{d1}\}\right]$ と $E\left[1\{Y \le \mathrm{d2}\}\right]$ では，期待値をとる確率が異なっている．これは以下の導出過程で自然と明らかになるだろう．

[109] 比較として，First Attack では，式を $\int_{-\infty}^{\mathrm{d1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ の形に帰着させた．

1.9.2 Second Attack（マルチンゲール・アプローチ）

ニューメレール・ペアとして (B, Q_B) を採用し，株価のモデルはこれまでと同じとする．マルチンゲール・アプローチによる，価格付けの基本式は (5) 式であり，これにヨーロピアン・コール・オプションのペイオフを代入し，

$$
C(0) = B(0)E^{Q_B}\left[\frac{(S(T) - K)^+}{B(T)}\right]
$$

$$= 1 \times E^{Q_B}\left[\frac{(S(T)-K)\times 1\{S(T)\geq K\}}{B(T)}\right]$$

$$= \underbrace{E^{Q_B}\left[\frac{S(T)\times 1\{S(T)\geq K\}}{B(T)}\right]}_{A} - \underbrace{K\times E^{Q_B}\left[\frac{1\{S(T)\geq K\}}{B(T)}\right]}_{B}$$

以下では A と B を別々に解く．まず，B を先に行う．

Black–Scholes 式の後半部分 B の計算

$$B = K\times E^{Q_B}\left[\frac{1\{S(T)\geq K\}}{B(T)}\right]$$

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\{S(T)\geq K\}\right]$$ (金利定数の仮定より $B(T)=e^{rT}$)

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\left\{\frac{S(T)}{B(T)}\geq \frac{K}{B(T)}\right\}\right]$$

(指標関数の内部の両辺を B で割る[110])

110) ニューメレールで割ったままの形で，株価モデルを使うための工夫である．

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\left\{\frac{S(0)}{B(0)}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_B}(T)}\geq \frac{K}{B(T)}\right\}\right]$$

((20) 式を代入)

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\left\{\frac{S(0)}{B(0)}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T-\sigma\sqrt{T}\ X}\geq \frac{K}{B(T)}\right\}\right]$$

($W^{Q_B}(T) \ \stackrel{d}{=}\ -\sqrt{T}\times X$ ただし確率 Q_B の下で $X\sim N(0,1)$)

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\left\{\ln\left(\frac{S(0)}{B(0)}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2T-\sigma\sqrt{T}\ X\geq \ln\left(\frac{K}{B(T)}\right)\right\}\right]$$

(両辺の ln)

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\left\{X\leq \frac{\ln\left(\frac{S(0)B(T)}{KB(0)}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}\right]$$

(X に関して整理)

$$= Ke^{-rT}\times E^{Q_B}\left[1\left\{X\leq \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}\right]$$

($\ln B(T)=\ln e^{rT}=rT,\ B(0)=1$ より)

$$= Ke^{-rT} \times N(\mathrm{d2}) \quad \text{ただし, } \mathrm{d2} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

いくつか観察を加えよう．まず約束どおり，具体的な積分計算をすることなく期待値表現のままで，基本的にほぼ四則演算のみで計算されている．ポイントは，指標関数の中の条件式をうまく変形して，$S(T)/B(T)$ で表現することによって，わざわざ “Undiscounting” して $S(T)$ を求める必要性をなくした点と，指標関数の中身を，確率 Q_B の下での標準正規分布 X を用いて表現した点である．これらは，以下の A の計算でも用いるが，マルチンゲール・アプローチで解析解を求める際の共通のテクニックであり，第 2 章でもこれを繰り返し使用する．また，計算の過程から明らかなように，$N(\mathrm{d2})$ は $E^{Q_B}[1\{S(T) \geq K\}]$ のことであり，確率 Q_B の下で株価がインザマネーになる確率を与えていることがわかる．

Black–Scholes 式の前半部分 A の計算

$$A = E^{Q_B}\left[\frac{S(T) \times 1\{S(T) \geq K\}}{B(T)}\right]$$

$$= E^{Q_S}\left[\frac{dQ_B}{dQ_S}\frac{S(T) \times 1\{S(T) \geq K\}}{B(T)}\right]$$

（期待値を取る確率を Q_S に変更する代わりに，期待値が不変となるようにラドン・ニコディム微分 dQ_B/dQ_S を掛ける．）

$$= E^{Q_S}\left[\frac{\cancel{B(T)}/B(0)}{\cancel{S(T)}/S(0)}\frac{\cancel{S(T)} \times 1\{S(T) \geq K\}}{\cancel{B(T)}}\right]$$

（dQ_B/dQ_S をニューメレールのグロス・リターン比で表現）

$$= S(0) \times E^{Q_S}[1\{S(T) \geq K\}]$$ [111)]

これで B で割った場合と同じように，指標関数の期待値計算の形に落ち着いた．ただし取る確率が異なっていて，確率 Q_S である．確率 Q_S の下での資産価格の挙動に関しては，我々は (34) 式（以下再掲）

$$\frac{B(T)}{S(T)} = \frac{B(0)}{S(0)}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T - \sigma W^{Q_S}(T)}$$

であることを知っている[112)]．そこでこれを直接用いることができるように，指標関数の中身を変形する．

111) オプションのペイオフを $S(T) \times 1\{S(T) \geq K\} - K \times 1\{S(T) \geq K\}$ と分解し，前半部分に対して，最初からニューメレール・ペア (S, Q_S) を採用することによって，直接この形に持ち込むことも可能であった（(29) 式）．

112) (36) 式で $S(t)$ まで導出してあるのでそれを使ってもよいが，ここで示そうとしていることは，デリバティブのプライシングにおいては，割り引かれた資産価格 $B(t)/S(t)$ さえわかれば十分であり，わざわざ $S(t)$ の形を求める必要はないということである．

$$A = S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{\frac{S(T)}{B(T)} \geq \frac{K}{B(T)}\right\}\right] \quad (\text{両辺を } B(T) \text{ で割る})$$

$$= S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{\frac{B(T)}{S(T)} \leq \frac{B(T)}{K}\right\}\right]$$

（分子分母を反転．不等号の向きに注意）

$$= S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{\frac{B(0)}{S(0)} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T - \sigma W^{Q_S}(T)} \leq \frac{B(T)}{K}\right\}\right] \quad ((34)\text{ 式代入})$$

$$= S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{\frac{B(0)}{S(0)} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}\,Y} \leq \frac{B(T)}{K}\right\}\right]$$

$(W^{Q_S}(T) \overset{d}{=} -\sqrt{T} \times Y$ ただし確率 Q_S の下で $Y \sim N(0,1))$

$$= S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{\ln\left(\frac{B(0)}{S(0)}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}\,Y \leq \ln\left(\frac{B(T)}{K}\right)\right\}\right]$$

（両辺の ln）

$$= S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{Y \leq \frac{\ln\left(\frac{S(0)B(T)}{KB(0)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}\right]$$

（Y について整理）

$$= S(0) \times E^{Q_S}\left[1\left\{Y \leq \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}\right]$$

$(\ln B(T) = \ln e^{rT} = rT,\ B(0) = 1)$

$$= S(0) \times N(\mathrm{d1}) \quad \text{ただし，} \mathrm{d1} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$ [113)]

最後に，既に導出した B と合わせて，Black–Scholes 式を得る．

113) 計算の過程から明らかなように，$N(\mathrm{d1})$ は $E^{Q_S}[1\{S(T) \geq K\}]$ であり，確率 Q_S の下で株価がインザマネーで終わる確率を与えている．

以上がマルチンゲール・アプローチによる，著者が思うに最も効率がよく，汎用性が高い Black–Scholes 式の導出方法である．人によっては，上のようにわざとらしい（？）変形を行うより，さっさと期待値を積分に落として計算した方が，簡単だと思う人がいるかもしれない．しかし，それは Black–Scholes 式自体がシンプルだからであり，少しでもより複雑な問題を取り扱おうとするとすると，マルチンゲール・アプローチの優位性がはっきりしてくるだろう．第 2 章では，そのような例を見ることになる．

1.9.3 まとめ：マルチンゲール・アプローチによる価格式の導出の手順

最後に，マルチンゲール・アプローチによる，デリバティブの価格式の導出手順をまとめておこう．続く第 2 章では，これを繰り返し用いて，色々なより複雑なデリバティブのプライシングに取り組む．

Step1: 資産価格とデリバティブの価格の推移，ペイオフを明確に書き出す[114]．ペイオフの非負をとる操作は，指標関数を用いた表現に変えておく．

Step2: 効率的なニューメレール・ペアを選び，他の資産をすべてそのニューメレールで割る．そしてそれらが，すべてマルチンゲールになる（そんな確率が存在する）という事実を書き下す．割引いたオプション価格がマルチンゲールであることを表している式において，時点ゼロでのニューメレールを右辺に移すことにより，オプション価格を求める期待値表現が出てくる．

Step3: 資産価格が従う確率微分方程式を建てる．割引資産価格はマルチンゲールになるので，重要なのはボラティリティのモデリングだけである．初等的なモデリングでは，特に理由がない場合，Lognormal ボラティリティがデフォルト的に採用される（資産価格は幾何ブラウン運動にしたがう）．その後，伊藤の商の公式を用いて，割引資産価格のしたがう確率微分方程式を導出し，ギルザノフの定理を用いて，それがマルチンゲールになるような確率を求める．そして，その確率の下でのブラウン運動を用いた，割引資産価格の表現を導出する．

Step4:（Step2 で求めた）オプション価格を求める期待値表現において，資産価格が全て割引ベースになるように変形し，Step3 で仮定した割引資産価格のモデルを代入する．(このときにブラウン運動を，標準正規確率変数を用いた表現で置き換えておく．またその際に，ブラウン運動の対称性を利用して，マイナスを付けておく）．

Step5: ギルザノフの定理とニューメレール変換を利用して，オプション価格を求める期待値表現を，Step4 で導入した標準正規確率変数に関する指標関数の期待値，すなわち分布関数を使った形になるまで落とし込む．その結果が，デリバティブ価格式の解析解である[115]．

114) 既に述べたが，このステップは簡単なようで意外に難しくなることがある．例えば，スワップションにおいて，原資産価格の推移，満期でのスワップションのペイオフを数式でちゃんと書き下せるだろうか？ そもそも，この場合の原資産は何であろうか？ 大袈裟ではなく，このステップがちゃんとできれば，仕事の半分は終わったようなものである．

115) 標準正規分布の分布関数自体は，解析的には解けず，数値計算で求めるしかない（ただし，精度の高い解析的な近似式が存在する）．そもそも何をもって解析解とするかは微妙な所があり，おそらくデリバティブ価格に関しては，正確な定義はない．著者は，効率的な計算が可能な，比較的有名な分布で書けている，という程度に考えている．