最適投資戦略勉強会　　担当：木原

3. 前提条件の緩和（その２）:異なる市場見通しの存在（前半）

① 平均分散最適の脆弱性

CAPM：全ての投資家が**同一の市場見通しを持っている**と前提

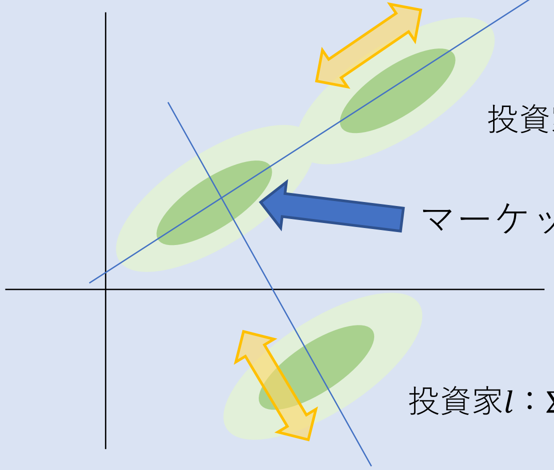
➡ 各投資家kが，例えば以下のような見通しを持つ場合，脆弱性を露呈する．

$$\boldsymbol{r}^k(t) - r_f(t)\mathbf{1} = \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\epsilon}^k(t), \quad \boldsymbol{\epsilon}^k(t) \sim N(0, \Sigma) \quad \Sigma：共通$$

Ex) 2資産で，共通の分散共分散行列を$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$とすると，

最適ポートフォリオ$x^* = (\lambda\Sigma)^{-1}\boldsymbol{\mu}^k$の不安定さが$\boldsymbol{\mu}^k$に依存してしまう．

※ 特に，ρが大きいときはΣが非正則なものに近づき，Σ^{-1}の各要素が大きくなってしまうため，より影響が大きくなる．



投資家k：Σとの整合性あり（ぶれにくい）

マーケットポートフォリオ

投資家l：Σとの整合性なし（ぶれやすい）

➡ Black-Littermanモデルにより解決

② Black-Littermanモデル

$$y^m = (\lambda\Sigma)^{-1}\Pi(t)$$

y^m：市場ポートフォリオ

$\Pi(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t))^{\mathrm{T}}$：均衡期待リターン

Black-Littermanモデル

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ F \end{pmatrix}\mu + \begin{pmatrix} u \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ \epsilon \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{pmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}\right)$$

１式目：各資産のリターンベクトルが均衡期待リターンを中心に分布することを表すモデル（**市場において共通な部分**）

２式目：投資家個人の市場見通しを表すモデル（**個別の部分**）

F：見通し（絶対・相対を含む）の種類を表現する行列

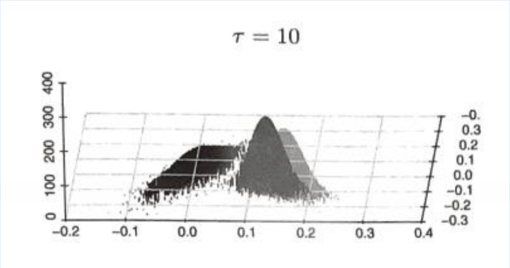
μ：投資家個人が見込む各資産の期待リターン

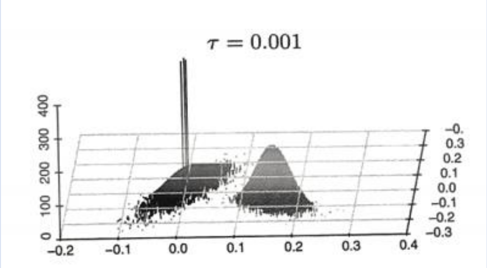
Q：市場見通しに対応する期待リターン

※ 残差の共分散行列の非対角成分が0ではないので，最適化には一般化最小二乗法を用いる．（変数変換で残差を無相関に！）

$$\mu^* = \{F^T\Omega^{-1}F + (\tau\Sigma)^{-1}\}^{-1}\{F^T\Omega^{-1}Q + (\tau\Sigma)^{-1}\Pi\}$$

τの解釈：Πに対する信頼度の大きさ（Qに対する自信の少なさ）





まとめ

Black-Littermanでは，通常の平均分散モデルで行う計算に加え，reverse optimization（市場ポートフォリオを使用して均衡期待リターンを得る）を行って混合推定を行うことによって，個人の見通しを反映させる．