資産の一つ B で他の資産を割る(Denominateする)

	時点 0		時点 t		時点 T
株	$\dfrac{S(0)}{B(0)}$	……	$\dfrac{S(t)}{B(t)}$	……	$\dfrac{S(T)}{B(T)}$
預金	1	……	1	……	1
オプション	$\dfrac{C(0)}{B(0)}$	……	$\dfrac{C(t)}{B(t)}$	……	$\dfrac{C(T)}{B(T)}$

図 1.4　割引資産価格の推移

1.3.2　基本定理 I の適用

無裁定を前提とするならば，基本定理 I により，割引資産価格がすべてマルチンゲールになる，そんな確率（Q_B としよう[28]）が存在する事が保証される．これを示したのが図 1.5 である．

下添字の B は，使用しているニューメレールを表している．

するとすべてがマルチンゲールに

	時点 0		時点 t		時点 T
株	$\dfrac{S(0)}{B(0)}$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{S(t)}{B(t)}\right]$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{S(T)}{B(T)}\right]$
預金	1	$=$	1	$=$	1
オプション	$\dfrac{C(0)}{B(0)}$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{C(t)}{B(t)}\right]$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{C(T)}{B(T)}\right]$

図 1.5　割引資産価格への基本定理 I の適用

上の図ではすべて，確率 Q_B による，時点ゼロにおける無条件 ("Unconditional") 期待値を取っているが，より一般には任意の時点における条件付期待値を用いて，

$$\frac{S(t)}{B(t)} = E^{Q_B}\left[\frac{S(T)}{B(T)} \,\middle|\, \Im(t)\right] \quad (0 \le t \le T)$$

$$\frac{C(t)}{B(t)} = E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)} \,\middle|\, \Im(t)\right] \quad (0 \le t \le T)$$

と書かれるべきものである．ここで，$E^{Q_B}[\,\cdot \mid \Im(t)]$ は確率 Q_B による，時

資産の一つ B で他の資産を割る（Denominateする）

	時点 0		時点 t		時点 T
株	$\dfrac{S(0)}{B(0)}$	……	$\dfrac{S(t)}{B(t)}$	……	$\dfrac{S(T)}{B(T)}$
預金	1	……	1	……	1
オプション	$\dfrac{C(0)}{B(0)}$	……	$\dfrac{C(t)}{B(t)}$	……	$\dfrac{C(T)}{B(T)}$

図 1.4　割引資産価格の推移

1.3.2　基本定理 I の適用

無裁定を前提とするならば，基本定理 I により，割引資産価格がすべてマルチンゲールになる，そんな確率（Q_B としよう[28]）が存在する事が保証される．これを示したのが図 1.5 である．

28) 下添字の B は，使用しているニューメレールを表している．

するとすべてがマルチンゲールに

	時点 0		時点 t		時点 T
株	$\dfrac{S(0)}{B(0)}$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{S(t)}{B(t)}\right]$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{S(T)}{B(T)}\right]$
預金	1	$=$	1	$=$	1
オプション	$\dfrac{C(0)}{B(0)}$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{C(t)}{B(t)}\right]$	$=$	$E^{Q_B}\left[\dfrac{C(T)}{B(T)}\right]$

図 1.5　割引資産価格への基本定理 I の適用

上の図ではすべて，確率 Q_B による，時点ゼロにおける無条件（"Unconditional"）期待値を取っているが，より一般には任意の時点における条件付期待値を用いて，

$$\frac{S(t)}{B(t)} = E^{Q_B}\left[\frac{S(T)}{B(T)}\,\middle|\,\Im(t)\right] \qquad (0 \le t \le T)$$

$$\frac{C(t)}{B(t)} = E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}\,\middle|\,\Im(t)\right] \qquad (0 \le t \le T)$$

と書かれるべきものである．ここで，$E^{Q_B}[\,\cdot \mid \Im(t)]$ は確率 Q_B による，時

資産の一つ B で他の資産を割る（Denominateする）

	時点 0		時点 t		時点 T
株	$\frac{S(0)}{B(0)}$	……	$\frac{S(t)}{B(t)}$	……	$\frac{S(T)}{B(T)}$
預金	1	……	1	……	1
オプション	$\frac{C(0)}{B(0)}$	……	$\frac{C(t)}{B(t)}$	……	$\frac{C(T)}{B(T)}$

図 1.4　割引資産価格の推移

1.3.2　基本定理 I の適用

無裁定を前提とするならば，基本定理 I により，割引資産価格がすべてマルチンゲールになる，そんな確率（Q_B としよう[28]）が存在する事が保証される．これを示したのが図 1.5 である．

28) 下添字の B は，使用しているニューメレールを表している．

するとすべてがマルチンゲールに

	時点 0		時点 t		時点 T
株	$\frac{S(0)}{B(0)}$	$=$	$E^{Q_B}\left[\frac{S(t)}{B(t)}\right]$	$=$	$E^{Q_B}\left[\frac{S(T)}{B(T)}\right]$
預金	1	$=$	1	$=$	1
オプション	$\frac{C(0)}{B(0)}$	$=$	$E^{Q_B}\left[\frac{C(t)}{B(t)}\right]$	$=$	$E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}\right]$

図 1.5　割引資産価格への基本定理 I の適用

上の図ではすべて，確率 Q_B による，時点ゼロにおける無条件（“Unconditional”）期待値を取っているが，より一般には任意の時点における条件付期待値を用いて，

$$\frac{S(t)}{B(t)} = E^{Q_B}\left[\left.\frac{S(T)}{B(T)}\,\right|\,\Im(t)\right] \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$\frac{C(t)}{B(t)} = E^{Q_B}\left[\left.\frac{C(T)}{B(T)}\,\right|\,\Im(t)\right] \quad (0 \leq t \leq T)$$

と書かれるべきものである．ここで，$E^{Q_B}[\,\cdot\mid\Im(t)]$ は確率 Q_B による，時

点 t までの情報に基づいた条件付期待値[29] である．ただし，以下ではもっぱら時点ゼロでの価格のみを考えることにする．

29) 条件付期待値に関しては，"巻末付録:確率論入門の入門" の解説を参照.

1.3.3 デリバティブのプライシング

基本定理 I を適用して得られた上の結果を用いて，デリバティブの現在価格 $C(0)$ を求めたい．預金は自分自身で割られるため，常に定数 1（= 自明な[30] マルチンゲール）であり，これからは何も引き出すことができない．"使える" マルチンゲールは残りの 2 つ（以下）である．

30) 英語では trivial.

$$\frac{S(0)}{B(0)} = E^{Q_B}\left[\frac{S(T)}{B(T)}\right] \tag{3}$$

$$\frac{C(0)}{B(0)} = E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}\right] \tag{4}$$

すると (4) 式より，デリバティブ価格 $C(0)$ は即座に，

$$C(0) = B(0)E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{B(T)}\right] \tag{5}$$

と求まる．単に $B(0)$ を右辺に移動させるだけである！ そして，詳細は後で述べるとして，もう 1 つのマルチンゲールである (3) 式が，この期待値を計算するための確率 Q_B を教えてくれる[31]．これがデリバティブ価格を求める基本的なフレームワークとしてのマルチンゲール・アプローチである[32]．マルチンゲール・アプローチは "使い方だけならば驚くほど簡単" と冒頭で述べたが，あながち過剰表現ではないことが，分かっていただけるだろうか．もちろん，この期待値を計算し，何か具体的な結果（以下では Black–Scholes 式）を得ようとすると，資産価格の確率的な挙動を数学的にモデル化する必要があり，それに伴って色々と難しい話が生じてくる．しかし，大きなフレームワークとしては，本当にこれだけである．実際に色々な問題に，マルチンゲール・アプローチを適用する際には，この様に基本的な市場設定と，大きなフレームワークをまず押さえることが，最初の基本動作になる．

31) Black–Scholes 式の場合は，後で解説するギルザノフの定理を使う所が，(3) 式から確率 Q_B を求める所に対応している．しかし最初はこれが非常に "見えにくい"．そこで確率を探しにいく行為が，もっと直接的に見える 2 項モデルを，"章末付録 1：2 項モデルとマルチンゲール・アプローチ" で解説したので，参照されたい．連続モデルではややもすると見えにくくなりがちなものを，わかり易く明快に示してくれるのが，2 項モデルの重要な役割の 1 つである．

32) 繰り返しになるが，本書では基本的に後で解説する効率的な解析解の導出方法を含めてマルチンゲール・アプローチと呼ぶ．ただし文脈によっては，このように一般的なフレームワークとして言及することもある．

1.3.4 リスク中立化法について

ところで (5) 式は，Black–Scholes の世界で仮定したように，金利が定数の場合，

$$C(0) = 1 \times E^{Q_B}\left[\frac{C(T)}{e^{rT}}\right] \quad ((5) \text{ 式に } B(0) = 1,\ B(T) = e^{rT} \text{ を代入})$$

$$= e^{-rT} E^{Q_B} [C(T)]$$ (

と簡素化される．この形のマルチンゲール・アプローチは特別に，リスク中
化法や，リスク・ニュートラル・プライシングと呼ばれている．これは，将
のペイオフの期待値を，金利で現在価値に割り引くといった，実務家にとっ
非常に馴染みやすい直観的な解釈が可能な形をしており，デリバティブの
般的なプライシング原理をこの形で理解している実務家は多い．しかし，
くまで金利が定数で，かつニューメレールとして預金 B を採用した，マル
ンゲール・アプローチのある特定形であることに注意しよう．

1.4 株価のモデリングとブラウン運動

1.4.1 株価に関する仮定

前節でプライシングのフレームワークはわかった．我々は具体的に，Blac
Scholes の世界で，ヨーロピアン・コール・オプションのプライシングを考
ているので，例えば (6) 式にそのペイオフを代入することにより，その価
式は，

$$C(0) = e^{-rT} E^{Q_B} \left[(S(T) - K)^+ \right]$$ (

で与えられることになる．この期待値を具体的に解くには，株価 $S(T)$ の確
的な挙動をモデル化して，なおかつその確率 Q_B の下での立ち振舞いを知
必要がある．確率 Q_B の下での株価の立ち振舞いに関しては，既に (3) 式
ある情報を提供してくれているが，この情報を利用するためにも，まずは
らかの株価モデルを構築する必要がある．株価に限らず一般的にモデル化
当たっては，何らかの合理的でかつ経験則に合う仮定を置くことにより，
実をそこそこ捉えながら，一方でなるべくシンプルなものが求められる．
下では，株価をモデル化するに当たって最低限こうあってほしい，と思う
件からスタートして，いわば“発見的に”Black–Scholes が採用した株価の
デルである，幾何ブラウン運動に辿り着きたい．

株価のモデルはどうあるべきか？ ここでは，譲れないポイントとして以
を挙げる．

以上を勘案して，株価のモデルとして次のようなものを考える

$$\Delta S(t)/S(t) = \mu \times \Delta t + \sigma \times \boxed{\text{連続で正規な独立増分}} \tag{8}$$

μ は期待リターン（または期待ドリフト）と呼ばれ，投資家がリスクを取っていることに対して求めるリターンであり，ここでは定数と仮定する．この μ は当然，金利より大きいはずだが，それ以上のことはわからない．したがって具体的にデリバティブ価格を計算する際に，やっかいなパラメーターになりそうである．がしかし，幸いなことにデリバティブの価格計算において，このパラメーターは必要なくなることが後でわかる．σ はボラティリティと呼ばれ，不確実性を生成する“連続で正規な独立増分”に対する，個別銘柄との，いわば感応度であり，これも定数と仮定する．後は株価の不確実性を唯一司る，“連続で正規な独立増分”であるが，これに関しては次に説明するブラウン運動が“自然な選択”である．

1.4.2　ブラウン運動

ブラウン運動，$W = \{W(t)\}_{0 \le t \le T}$ に関しては，高校で少し学んで，“でたらめに動く，ギザギザの，連続なパスを持った運動”といった程度のイメージを，すでに持っている方が多いのではなかろうか（図 1.6）．

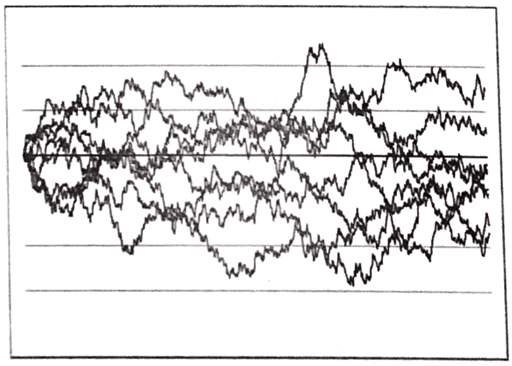

図 1.6　ブラウン運動のサンプルパス

実際このイメージは，ブラウン運動の定義としてかなりいい線を行っている．“でたらめ”＝予想がつかない＝増分が独立，とちょっと親切に解釈すると，厳密な定義では，これに正規性が加わるだけである．正確には，(標準) [37]ブラウン運動を特徴づける（＝定義する）性質は以下の4つで

[37] 以下では断らない限り，ブラウン運動は標準ブラウン運動を意味することにする．ただし，ドリフトがない事を強調するために“標準”を付けることもある．