

- نکات و توضیحات کتاب ریامی
 - مهن میاپ 🐞
 - دوره اوّل متوسطه
- 🥌 کروہ آموزشی ریاضی متوسطہ اول استان خوزستان

فصل اول: مجموعه ها

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

درس اول: معرفی مجموعه

توضیح مجموعه: برای بیان و نمایش دسته یا گروهی از اشیا، حروف، اعداد و ... که متمایز (غیر تکراری) و کاملا مشخص هستند، از مجموعه استفاده میکنیم.



فهمیدیم متمایز بودن یعنی مثلا عدد تکراری توی مجموعه نباشه ، ولی اینکه میگیم کاملا مشخص باشه یعنی چی؟

یک عبارت زمانی مشخص کننده ی مجموعه است که کاملا گویا و شفاف باشد یعنی به طور دقیق مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیز هایی در آن مجموعه قرار ندارند. حالا علی جان به مثال های زیر دقت کنید:

مثال 1: عبارت «شمارنده های عدد 16 همک مجموعه را مشخص میکند چون کاملا مشخص که اعداد 1 و 2 و 4و8 و 16 در مجموعه قرار میگیرند و عددی مثل 3 در مجموعه نخواهد بود.

مثال 2: عبارت « اعداد بسیار کوچک » مجموعه نیست، چون این عبارت کاملا مشخص نمیکند چه عددهایی در مجموعه قرار دارند. ممکن است یک نفر عدد 1 را کوچک بداند و شخص دیگری عدد 00001 / 0



نمایش های مختلف مجموعه: مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری میکنیم و به صورت های زیر نمایش می دهیم.

1 . استفاده از یک جفت آکولاد: به این نوع نمایش ، نمایش تفصیلی مجموعه میگویند.

بطور مثال اگر A مجموعه ی شمارنده های عدد 10 باشد، نمایش تفضیلی A به صورت زیر است:

 $A = \{1, 2, 5, 10\}$

2. نمایش هندسی (نمودار وِن): اعضای مجموعه را داخل یک دایره یا اشکال هندسی قرار می دهیم. دقت شود بین اعضا در این روش « و » قرار نمی دهیم. به طور مثال اگر B مجموعه ی مضرب های طبیعی و یک رقمی عدد 3 باشد نمایش هندسی آن بصورت زیر است:

3 . نمایش ریاضی: با استفاده از علائم ریاضی رابطه ی جبری برای مجموعه تعریف میشود. این نوع نمایش را در ایستگاه های مطالعه بعدی بررسی خواهیم کرد.



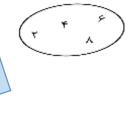
از کجا بفهمیم از کدوم نمایش برای جواب باید استفاده کنیم؟

این سه روش معادل هستند و هیچ تفاوتی نداره که شما از چه روشی استفاده کنی ، مگر اینکه در صورت سوال روش خاصی عنوان گردد. به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه ی اعدادی که نه اول هستند و نه مرکب را به صورت مجموعه نمایش دهیم از دو روش تفصیلی و هندسی(نمودار وِن) استفاده می کنیم.





ما در نمودار ون بین اعضا " و " قرار نمیدیم بلکه اعضا را با فاصله از هم مینویسیم



ايستگاه مطالعه

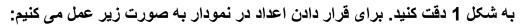
نماد عضو بودن: ∋ و نماد عضو نبودن: ∌

به نحوه ی استفاده از نماد عضویت دقت کنید. اگر بنویسیم $E \in A$ با توجه به این که این عبارت را "عضو $E \in A$ است" می خوانیم ، بی معنی و عبارتی نادرست است و عبارت درست به صورت $E \in B$ است. توجه: با بیان چند مثال می خواهیم با نحوه ی کشیدن نمودار ون برای تعدادی مجموعه آشنا شویم.

پاسخ:

مثال 2) مجموعه های $\{ 2$ و $\{ 1 \} = A = \{ 2$ و $\{ 1 \} = B$ را با نمودار ون نمایش دهید.

اگر خوب دقت کنید اعداد 1 و 2 هم عضو A هستند و هم عضو B پس مجبوریم قسمتی از دو نمودار را درون هم ترسیم کنیم.



پاسخ:



شكل٢

با توجه به شکل 2 برای کامل کردن نمودار ون برای سه مجموعه به ترتیب شماره ناحیه ها عمل میکنیم.

نکته: در یک مجموعه با جابه جا کردن اعضا، مجموعه ی جدیدی ایجاد نمیشود.

ايستكاه مطالعه به طور مثال مجموعه های $\{5$ و $\{6$ و $\{6\}$ با $\{5$ و $\{6\}$ و $\{2\}$ همگی یکسان هستند و یک مجموعه را مشخص ميكنند

نکته: اگر در یک مجموعه عضو تکراری وجود داشته باشد ،اعضای تکراری را حذف میکنیم و آن عضو را فقط یکبار مينويسيم.

میکنیم و مجموعه را به حالت استاندارد $\{\mathbf{5}_{e}\mathbf{5}_{e}\}$ مینویسیم. تعداد اعضای یک مجموعه (عدد اصلی مجموعه)

به تعداد عضوهای یک مجموعه، عدد اصلی آن مجموعه میگویند. عدد اصلی یک مجموعه مثل B را با نماد (n(B) نمایش می دهیم.

n(A) = 4 بنابراین $A = \{1, 3, 5, 5, 7\}$ مثال 1



اگر مجموعه عضوهای تکراری داشت و عدد اصلی مجموعه رو پرسیده بود اقا باید بشماریمشون یا طبق نکته اول مجموعه رو استاندارد کنیم بعد تعداد اعضای مجموعه رو مشخص كنيم؟

ابتدا اعضای تکراری رو حذف میکنیم بعد عدد اصلی مجموعه رو تعیین میکنیم.

$$A = \{2 \ 06 \ 05 \ 02 \ 06 \ 06\}$$

A \pm 2 \cdot 5 \cdot 6\right\rangle

n(A) = 3 :به این مثال دقت کن

مجموعه تهي:

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه ی تهی می گوییم.

مجموعه تهی را با $\{\}$ یا \emptyset نمایش می دهیم دقت کنید مجموعه های $\{0\}$ یا $\{\emptyset\}$ مجموعه ی تهی نیستند توجه: با توجه به تعریف مجموعه تهی $\mathbf{n}(\emptyset) = \mathbf{0}$ یعنی عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

مثال: الف) مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر از یک، تهی است.

ب) مجموعه ی مضارب اول عدد 4 ، چون 4 عددی مرکب است پس مضرب اولی ندارد این مجموعه تهی است. ج) مجموعه ی اعداد صحیح بین 0 و 1- ، تهی است. گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آنکه بین این عضو ها نظم وجود داشته باشد، میتوانیم ابتدا تعدادی از آنها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم (...) و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم.

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$$

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان برسد(حتی اگر خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه متناهی می گوییم. مجموعه A یک مجموعه ی متناهی با 1000 عضو می باشد.

در صورتی که مجموعه دارای بی شمار عضو باشد یعنی عضوهای آن تمام نشود آن را مجموعه نامتناهی می گوییم



ايستكاه مطالعه

درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

تعریف دو مجموعه برابر: دو مجموعه را برابر گوییم درصورتی که عضوهایشان کاملا یکسان باشد. (دقت کنید جابه جایی عضو ها ایرادی ندارد.)درصورتی که مجموعه های Aو B مساوی باشند با نماد A=B این موضوع را بیان میکنیم.

مثال: دو مجموعه ی 0_0 و 2 $1 \} = A$ و $\{2$ او $0\} = B$ با هم برابرند.

مثال: نمودار ون مجموعه های $\{8$ و $\{2, 1\} = A$ و $\{2, 1\} = B$ را رسم کنید.

پاسخ:

زیر مجموعه: اگر همه ی اعضای مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشند، میگوییم B زیرمجموعه ی A است.

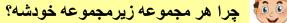
زير مجموعه بودن را با علامت ⊇و زير مجموعه نبودن را با علامت پنشان ميدهيم.

مثال: مجموعه های $\{5_04_0 \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \}$ و $\{5_04_0 \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R} \}$ را در نظر بگیرید روابط زیر بین این سه مجموعه برقرار است:

پاسخ:

دقت کنید که اگر حتی یک عضو در مجموعه B باشد که در مجموعه ی A نباشد B زیرمجموعه A نخواهد بود. نکته 1: با توجه به تعریف زیرمجموعه واضح است، هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. که بصورت جبری

 $A \subseteq A \subseteq A$





چون اگر یک مجموعه دلخواه مثل $\{20,1\}=A$ داشته باشیم همه ی عضوهای A در خودش قرار دارند.

آیا مجموعه تهی عضوی وجود دارد که در مجموعه دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد؟ پاسخ: خیر، چون تهی عضوی ندارد.

با توجه به سوال میتوان نکته زیر را بیان کرد:

نکته 2: مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است. که به صورت جبری مینویسیم:

 $\emptyset \subseteq A$

نکته 3: با توجه به دو نکته بالا میتوان نتیجه گرفت که مجموعه تهی زیر مجموعه خودش نیز است. که بصورت جبری مینویسیم: ص ⊃ %

نکته 4: مانند نمودار داده شده اگر مجموعه $C \subseteq B \subseteq B$ زیر مجموعه $C \subseteq B \subseteq A$ نیز زیرمجموعه $C \subseteq B \subseteq A$ باشد؛ آنگاه مجموعه $C \subseteq B \subseteq A$ نیز زیرمجموعه، مجموعه $C \subseteq B \subseteq A$ است. و بطور کلی میتوان نوشت $C \subseteq B \subseteq A$

مثال: $C = \{3\}$ و $B = \{1, 2\}$ باشد آنگاه: مثال: $A = \{1, 2\}$ باشد آنگاه:

$$(C \subseteq B \quad \circ \quad B \subseteq A) \quad \longrightarrow \quad C \subseteq A$$

نوشتن زیرمجموعه های یک مجموعه:

با توجه به عضوهای یک مجموعه میتوان زیرمجموعه های آن را تعیین کرد؛ با استفاده از راهبرد الگوسازی که در پایه هفتم آموختید به شیوه زیر عمل میکنیم:

- 1. نوشتن زيرمجموعه صفر عضوى (يعنى تهي)
- 2 . نوشتن زیر مجموعه های یک عضوی (هر عضو مجموعه را اگر داخل یک آکولاد قرار دهیم یک زیرمجموعه یک عضوی ساخته میشود)
- 3. نوشتن زیر مجموعه های دو عضوی (هر دو عضو را داخل آکولاد قرار می دهیم تا زیر مجموعه دو عضوی بوجود آید)
 - 4 . این مراحل را آنقدر ادامه میدهیم تا آخرین زیر مجموعه که خود مجموعه میباشد برسیم.

مثال 1: زیر مجموعه های مجموعه ی $A = \{1, 2\}$ را بنویسید.

پاسخ:



تعداد عضو های مجموعه B یدونه بیشتر از A هست و تعداد زیرمجموعه هاش 2 برابر تعداد زیر مجموعه های A پس میشه نتیجه گرفت اگر به مجموعه ای یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه هاش 2 برابر میشه?

بله على جان دقیقا به همین صورت . و اگر بخواهیم این نتیجه رو دقیق تر بیان کنیم، الگویی بین تعداد عضوهای مجموعه و تعداد زیرمجموعه هاش هست به جدول زیر دقت کن و الگو رو حدس بزن:

تعداد عضو های مجموعه	0 عضو	1عضو	2 عضو	3 عضو	 n عضو
تعداد زیر مجموعه ها	1	2	4	8	 ć



اگر الگو یابی کنیم مفهمیم که هر مرحله دوبرابر مرحله قبلشه (البته بجز مرحله اول) که گفتیم علتش یک عضو بیشتر داشتن نسبت به مرحله قبلشه پس میشه گفت

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه که n عضو دارد 2^n است.

یک جمع بندی: ارتباط تساوی دو مجموعه و مفهوم زیرمجموعه:

اگر مجموعه «: با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه میتوان گفت A زیرمجموعه B و همچنین مجموعه B نیز زیر نیز زیر A باشد، مجموعه A و B مساوی اند.

 $(B \subseteq A \mathfrak{I} \ A \subseteq B) \rightarrow A = B$

برعكس: اكر دومجموعه A=B اشند آنگاه Aزيرمجموعه B و همچنين Bزيرمجموعه A ميباشد.

 $A = B \rightarrow (A \subseteq B \ \mathcal{I} \ B \subseteq A)$

مجموعه های عددی مهم:

در بحث مجموعه ها بیشمار مجموعه عددی میتوان نوشت. اما برخی از مجموعه ها پرکاربرد تر هستند، بنابراین این مجموعه ها را با اسامی و حروف خاصی نامگذاری میکنند برخی از این مجموعه ها عبارت اند از:

 $\mathbb{N} = \{1 \ 2 \ 2 \ ...\}$

مجموعه اعداد طبیعی با حرف ۸ نامگذاری میشود:

 $w = \{0 \ 2 \ 2 \ \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی که با حرف W نامگذاری میشود:

مجموعه اعداد صحیح که با حرف Z نامگذاری میشود:

مجموعه اعداد طبیعی دو زیر مجموعه مهم دارد که عبارت اند از:

 $\mathbb{O} = \{1 \ \mathbf{3} \ \mathbf{5} \dots \}$

 $\mathbb{E} = \{2, 94, 96, ...\}$

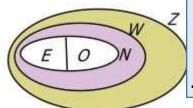
مجموعه اعداد فرد طبیعی که با حرف 0 نامگذاری میشود:

مجموعه اعداد زوج طبیعی که با حرف ع نامگذاری میشود:



ما در پایه هشتم خوندیم که مثلا هر عدد طبیعی عددی صحیح است با توجه به این میشه گفت مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند؟

بله و اگر بخوایم کلی تر بیان کنیم میشه گفت:



که اگر به اعضای این مجموعه ها و نمودار ون دقت کنید این رابطه قابل درک خواهد بود.

محدوده های عددی:

دانش آموزان عزیز شما با نمادهای $> e \ge$ آشنا شده اید. با ترکیب کردن این نماد ها و یک متغیر محدوده ای عددی برای آن متغیر ساخته میشود. برای درک بهتر این موضوع به مثال های زیر دقت کنید:

مثال 1: $x \le -3$ اعداد مورد نظر از 3- بزرگتر و از 4 کوچکتر هستند.

مثال x < 4: 1 عداد مورد نظر از 3- بزرگتر و از 4 کوچکتر هستند.

مثال 3 : $x \leq 4$ اعداد مورد نظر از 3- بزرگتر و کوچکتر یا مساوی 4 هستند.

مثال 4 : 4 $\chi < 3$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی 3- و کوچکتراز 4 هستند.

مثال $x \leq x \leq 1$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی 3- و کوچکتر یا مساوی 4 هستند.

نمایش مجموعه ها به زبان ریاضی:

ابتدای فصل عبارت های کلامی را آموختیم که یک مجموعه را مشخص میکردند حال میخواهیم عبارت های ریاضی (جبری) را بیاموزیم که یک مجموعه را با استفاده از علائم و نماد ها توضیح میدهند. هر عبارت ریاضی که یک مجموعه را بصورت جبری نمایش میدهد معمولا به صورت زیر نوشته میشود:

{ قسمت دوم ا قسمت اول}

قسمت اول: یک الگو یا رابطه ی کلی است که با استفاده از آن اعضا مجموعه را تعیین میکنیم خط عمودی « ایک دو قسمت را از هم جدا میکند « بطوری که یا به شرطی که » زیر نوشته میشود:

قسمت دوم: یک محدوده عددی برای ما مشخص میکند که اعداد این محدوده را در رابطه ای که در قسمت اول آمده قرار میدهیم تا اعضا مشخص شوند.

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:

در این حالت اعضای مجموعه مشخص است و از ما میخواهند که زبان ریاضی مجموعه را بیان کنیم. برای این کار ابتدا رابطه ی بین اعضا را با استفاده از الگویابی مشخص میکنیم، سپس با توجه به رابطه محدوده عددها را مشخص میکنیم.

مثال 1: مجموعه $\{2_{0}$ و 3 – و 5 – و 5 – و 1 به زبان ریاضی بنویسید.

مجموعه اعداد گویا و نمایش جبری آن

تعریف اعداد گویا: هر عدد که بتوان بصورت کسری نوشت بطوریکه صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد و مخرج عددی غیر صفر باشد را عدد گویا می نامیم.

مجموعه اعداد گویا: مجموعه ایست شامل همه ی اعداد گویا که با حرف $\mathbb Q$ نامگذاری میشود.

 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a \circ b \in \mathbb{Z} \circ b \neq \mathbf{0} \right\}$

نمایش جبری مجموعه اعداد گویا:

نکته: در پایه هشتم خواندید که هر عدد صحیح، عدد گویاست (چون میتوانیم برای آن مخرج یک قرار دهیم)پس میتوان گفت مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه، مجموعه اعداد گویا هستند.

به نمودار ون و رابطه زیر دقت کنید:

 $\mathbb{E} \circ \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه ها

تعریف اشتراک دو مجموعه A و B: مجموعه ای است که شامل همه عضوهایی که هم عضو A هستند و هم عضو $A \cap B$ مجموعه B و آن را با نماد $A \cap B$ (خوانیم $A \cap A$ اشتراک B) نمایش میدهیم.

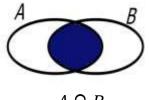
 $A \cap B = \{x | x \in A \ni x \in B\}$

نمایش به زبان ریاضی:

نمایش با استفاده از نمودار ون:

مثال 3: با توجه به مجموعه های A و B و C تساوی های زیر را تکمیل کنید.

پاسخ:



 $A \cap B$

$A \cap A = A$ است. اشتراک مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است.

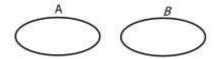
نکته 2: اشتراک هر مجموعه با مجموعه تهی، تهی میباشد چون تهی با هیچ مجموعه ای عضو مشترک ندارد.

 $A \cap \emptyset = \emptyset$

نکته 3: برای هر دو مجموعه دلخواه A و Bداریم، اشتراک این دو مجموعه زیر مجموعه هر کدام از آنهاست. $(A \cap B) \subseteq A$

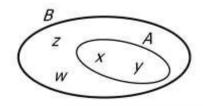
چون هر عضو اشتراک دو مجموعه B B A و B در هر کدام از مجموعه های B B B قرار دارد.

تعریف دو مجموعه مجزا(جدا از هم): اگر دو مجموعه B و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ آنگاه مجموعه های $A \cap B = \emptyset$



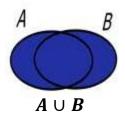
مثال: مجموعه های E (اعداد زوج طبیعی) و O (اعداد فرد طبیعی) مجزا هستند.

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.



اجتماع مجموعه ها:

اجتماع دو مجموعه A وB: اجتماع در لغت به معنای در یک جا جمع شدن است، در مجموعه ها نیز اگر اعضای مجموعه های A و B را درون یک مجموعه بنویسیم(اعضای تکراری یک بار نوشته شوند) به آن مجموعه اجتماع B و B میگوییم. به بیان دیگر مجموعه ای شامل همه عضو هایی که حداقل در یکی از مجموعه های B یا B باشند، را اجتماع دو مجموعه A و B می نامیم و آن را با نماد A \cup B نشان میدهیم.



نمایش به زبان ریاضی: $x \in B$ یا $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا ستفاده از نمودار ون:

 $A \cup A = A$ است. اجتماع مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است.

نکته 2: اجتماع مجموعه دلخواه A با مجموعه تهی، مجموعه A میباشد چون تهی هیچ عضوی ندارد که به اجتماع اضافه کند، و اعضای اجتماع همان اعضای مجموعه A هستند.

 $A\subseteq (A\cup B)$ و $B\subseteq (A\cup B)$: ورای هر دو مجموعه دلخواه $A\subseteq (A\cup B)$ و $B\subseteq (A\cup B)$

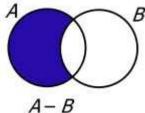
چون هر عضو مجموعه A و B در اجتماعشان قرار دارد.

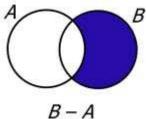
مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

تفاضل مجموعه ها:

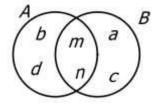
تعریف تفاضل دو مجموعه: A - A = A منهای B) مجموعه ای است شامل همه ی عضوهایی است که عضو مجموعه B هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. بصورت مشابه. B - A = B منهای B شامل همه ی عضوایی است که عضو مجموعه B هستند ولی عضو مجموعه A نیستند.

 $A - B = \{x \mid x \in A \ \exists \ x \notin B\}$ $\exists B - A = \{x \mid x \in B \ \exists \ x \notin A\}$ به زبان ریاضی:





مثال 2: با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.



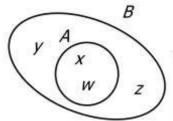
پاسخ:

 $A-A=\emptyset$ و گهی $A-\emptyset=A$ د دلخواه A و تهی A روابط مقابل را میتوان بیان کرد: $A-\emptyset=A$ و نکته انکته این مجموعه دلخواه

نکته 2: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$$(A - B) \subseteq A$$
 \mathfrak{g} $(B - A) \subseteq B$

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.



ایستگاه مطالعه

درس چهارم: مجموعه ها و احتمال

پاسخ:

احتمال: برای نشان دادن احتمال روی دادن یک اتفاق(پیشامد) ، از یک نسبت (کسر) استفاده میکنیم. این نسبت به صورت مقابل است: $\frac{1}{2}$ تعداد حالت های مورد نظر $\frac{1}{2}$ = احتمال روی دادن اتفاق (رابطه 1) تعداد تمام حالت های ممکن

نکته: به هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک پیشامد می گوییم. به طور مثال در پرتاب یک سکه فضای نمونه ای برابر است با $\{y$ شت yروy = yاین مجموعه دو عضو و بنابراین y = y زیرمجموعه دارد پس تعداد پیشامدهایی که برای پرتاب یک سکه می توان تعریف کرد چهار پیشامد است.

نتیجه: اگر $\emptyset=A$ در این حالت پیشامد P(A)=0 پس P(A)=0 اصطلاحاً به مجموعه A در این حالت پیشامد غیرممکن گوئیم. و اگر A=S باشد در نتیجه A=S باشد در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ به مجموعه A در این حالت پیشامد حتمی گوئیم.

 $0 \le P(A) \le 1$: