فصل اول

مجموعه‌ها

۱.۱ معرفی مجموعه

مجموعه: هر دسته‌ی کاملاً مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) از اشیاء را یک مجموعه می‌گویند. هر یک از این اشیاء را یک عضو مجموعه می‌گویند.

مثال: مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه را تشکیل می‌دهند: $A = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$

مثال: چهار عدد زوج متوالی تشکیل یک مجموعه را نمی‌دهند. زیرا جواب‌ها می‌توانند سلیقه‌ای انتخاب شوند.

$\{۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴\}$

$\{۲۲, ۲۴, ۲۶, ۲۸\}$

$\{۱۰۰۰, ۱۰۰۲, ۱۰۰۴, ۱۰۰۸\}$

نکته: مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنند. عضوهای یک مجموعه را در داخل $\{\ \}$ آکولاد قرار می‌دهند.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی به صورت اعضا به صورت زیر است:

$B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

نکته: در مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم نیست، یعنی با جابجایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. برای نمونه، مجموعه‌ی $C = \{۳,۵,۷\}$ را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد:

$C = \{۳,۵,۷\}$ و $C = \{۵,۳,۷\}$ و $C = \{۷,۵,۳\}$

نکته: علامت عضو بودن در یک مجموعه را با نماد $\in$ و علامت عضو نبودن در یک مجموعه را با نماد $\notin$ نشان می‌دهیم.

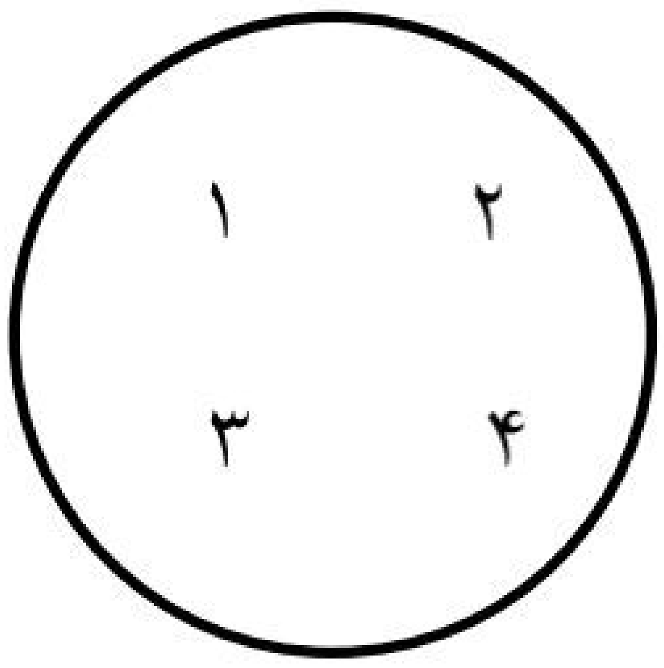
برای مثال در مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A است که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $۲ \in A$. اما عدد ۱۰ عضو مجموعه‌ی A نیست که به صورت ریاضی می‌نویسیم: $۱۰ \notin A$.

نکته: همان‌طور که در تعریف یک مجموعه بیان کردیم، عضوهای یک مجموعه باید غیرتکراری باشند. پس در مجموعه عضوهای تکراری یک بار حساب می‌شوند (فقط یک بار نوشته می‌شوند).

برای مثال مجموعه‌ی $A = \{۲,۵,۳,۵,۷,۲\}$ دارای ۴ عضو است.

$A = \left\{۲,۵,۳,\cancel{۵},۷,\cancel{۲}\right\} = \{۲,۵,۳,۷\}$

نمودار وِن: مجموعه‌ها را می‌توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد. برای مثال نمایش مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ با استفاده از نمودار وِن به صورت زیر می‌باشد:



مجموعه‌ی تهی: اگر در یک مجموعه عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه‌ی تهی می‌نامیم و با نماد $\{\ \}$ یا $\emptyset$ نشان می‌دهیم.

تذکر: هیچ‌گاه مجموعه‌ی تهی را با مجموعه‌ی $\{\emptyset\}$ یا $\{۰\}$ نشان نمی‌دهیم.

مثال: در هر یک از موارد زیر، مجموعه‌ی تهی را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره‌ی ماه زندگی می‌کنند. ✓

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از یک ×

ج) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ✓

۲.۱ مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه‌ی برابر: دو مجموعه‌ی A و B را برابر می‌گوییم، در صورتی که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از مجموعه‌ی A باشد و می‌نویسیم $A = B$.

مثال: مجموعه‌های زیر با هم برابر هستند:

$A = \{۳, ۵, ۷\} \qquad B = \left\{۷, ۵, \sqrt{۹}\right\}$

مثال: x و y را طوری تعیین کنید تا دو مجموعه‌ی $A = \{۷, x+۱, ۲\}$ و $B = \{y-۱, ۷, ۵\}$ با هم برابر باشند.

$x+۱ = ۵ \longrightarrow x = ۵-۱ \longrightarrow \boxed{x = ۴}$

$y-۱ = ۲ \longrightarrow y = ۲+۱ \longrightarrow \boxed{y = ۳}$

نکته: اگر عضوی در A باشد که در B وجود نداشته باشد و یا این‌که عضوی در B باشد که در A وجود نداشته باشد، در این صورت A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

زیرمجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند، به طوری که هر عضو A عضوی از B باشد، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$.

نکته: نماد $\subseteq$ برای نشان دادن زیرمجموعه بودن و نماد $\nsubseteq$ برای نشان دادن زیرمجموعه نبودن به کار می‌رود.

نکته: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است یعنی $A \subseteq A$.

نکته: مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌ها است، یعنی $\emptyset \subseteq A$.

نکته: اگر دو مجموعه‌ی A و B برابر باشند $(A = B)$، در این صورت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ (برعکس این مطلب

هم درست است).

مثال: مجموعه‌ی $A=\{۱,\{۲\},\{\{۳\}\}\}$ سه عضو دارد که برای نشان دادن عضویت هر کدام، خود آن‌ها را با نماد عضویت استفاده می‌کنیم:

$۱\in A$ و $\{۲\}\in A$ و $\{\{۳\}\}\in A$

اما برای نشان دادن زیرمجموعه‌های یک عضوی A، یک علامت آکولاد دور عضوها می‌گذاریم (علاوه بر آکولادی که بعضی عضوها دارند).

$\{۱\}\subseteq A$ و $\{\{۲\}\}A$ و $\{\{\{۳\}\}\}\subseteq A$

نمایش مجموعه‌های اعداد:

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}$

ب) مجموعه‌ی اعداد حسابی $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

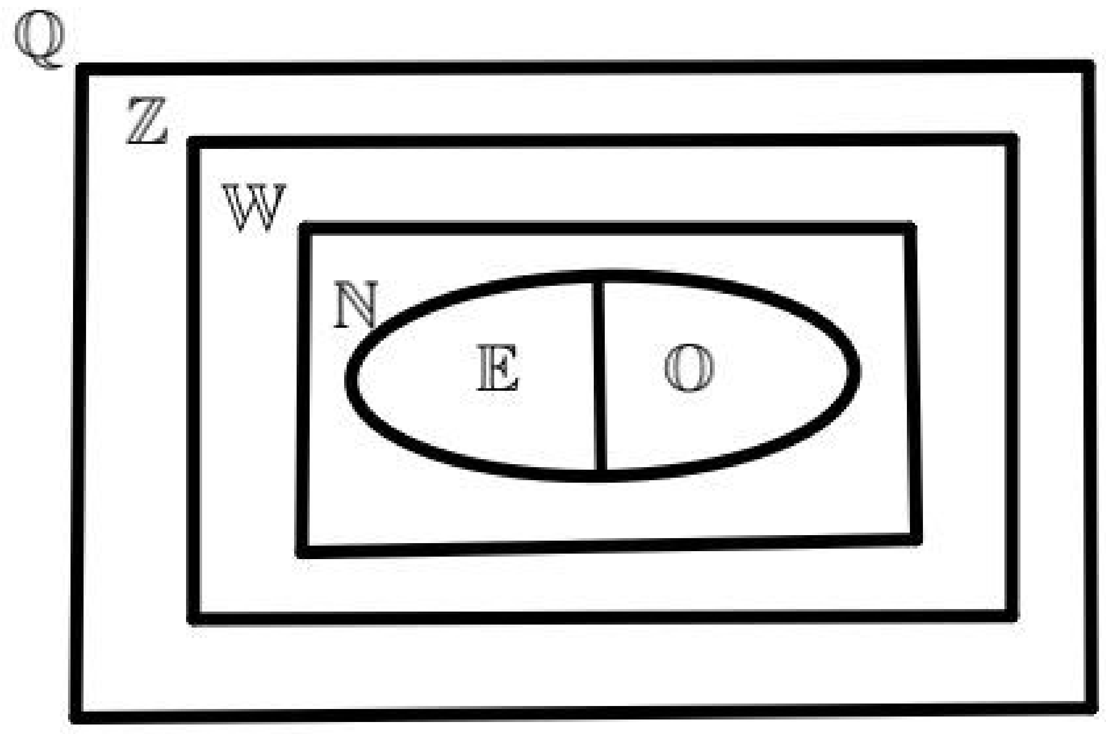
ج) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $\mathbb{O}=\{۱,۳,۵,\dots\}$

د) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج $\mathbb{E}=\{۲,۴,۶,\dots\}$

هـ) مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$

و) مجموعه‌ی اعداد گویا $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$

نکته: نمودار وِن مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است:



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

مثال: مجموعه‌های زیر را با استفاده از نماد ریاضی بنویسید.

الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد $\mathbb{O} = \{۱,۳,۵,\dots\} = \{۲k-۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{۷,۸,۹,۱۰\}$ $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\ ,\ ۷ \leqslant x \leqslant ۱۰\}$

ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

$B = \{۳,۶,۹,۱۲,\dots\} = \{۳k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه‌های زیر را با استفاده از عضوهایشان مشخص کنید.

الف) $A = \{۵n+۳ \mid n \in \mathbb{N}\} = \{۵(۱)+۳,\ ۵(۲)+۳, ۵(۳)+۳, ۵(۴)+۳,\dots\}$

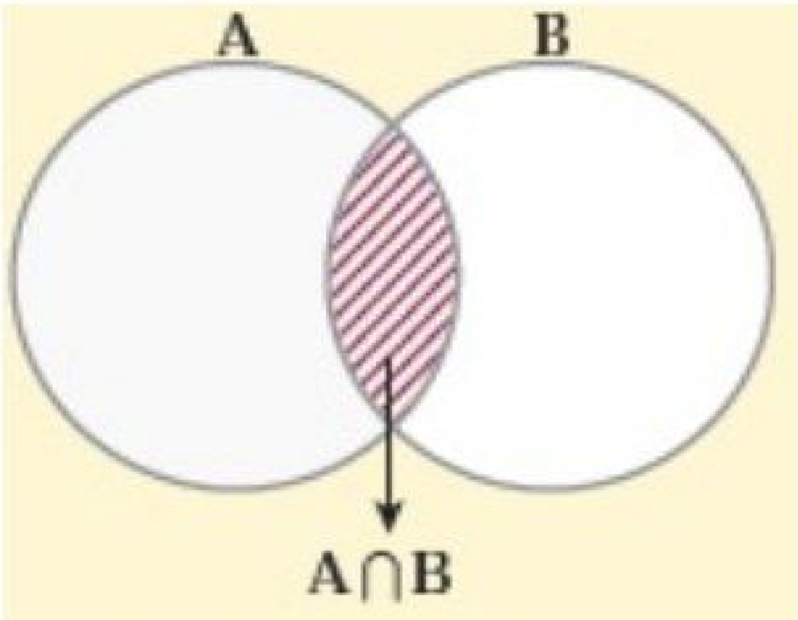
$\longrightarrow A = \{۸,۱۳,۱۸,۲۳,\dots\}$

ب) $B = \{۲x-۱ \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant ۳\} = \{۲(۱)-۱, ۲(۲)-۱, ۲(۳)-۱\}$

$\longrightarrow B = \{۱,۳,۵\}$

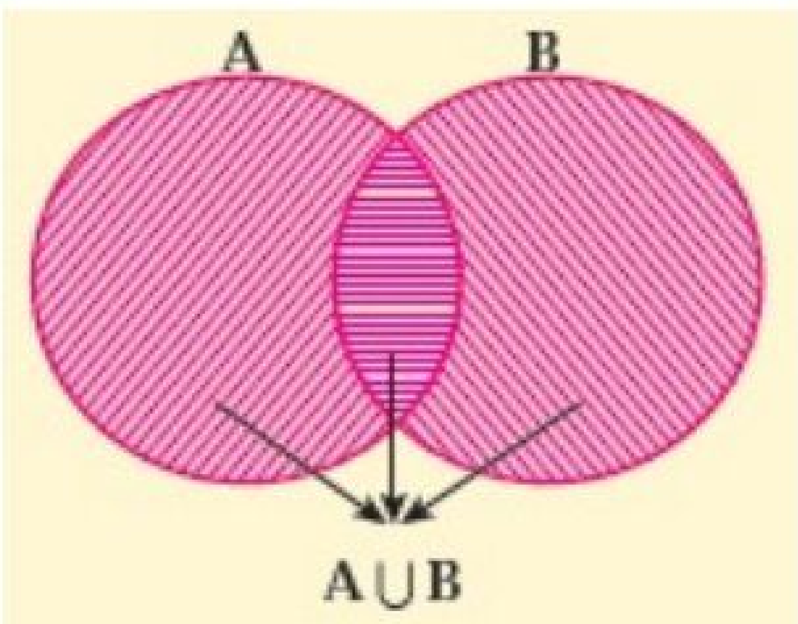
۳.۱ اشتراک، اجتماع و تفاضل مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B، مجموعه‌ای شامل همه‌ی عضوهایی است که هم عضو مجموعه‌ی A و هم عضو مجموعه‌ی B است. این مجموعه را با نماد $A\bigcap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار زیر قسمت هاشورخورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$$A\bigcap B = A\{x \mid x\in A \text{ و } x\in B\}$$

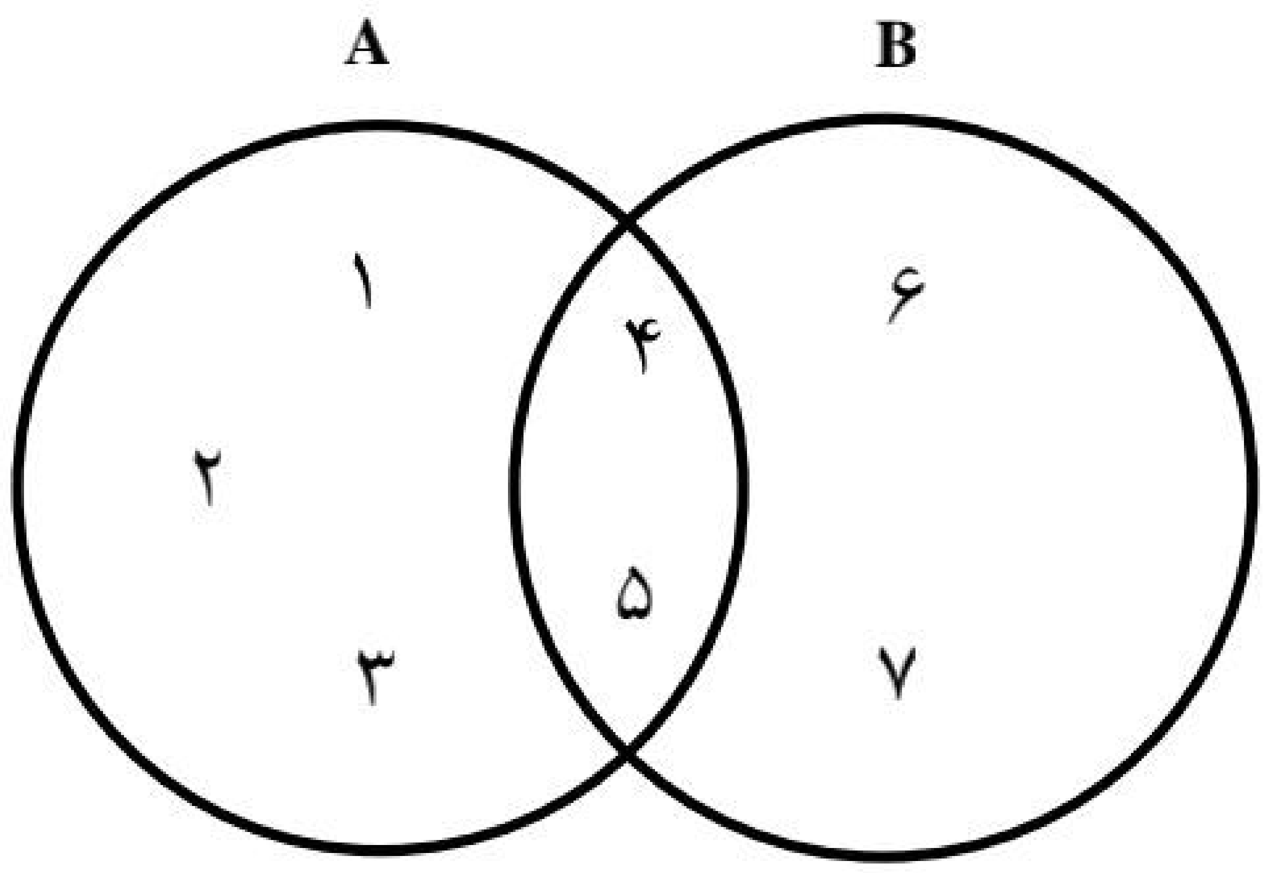
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B باشد. این مجموعه را با نماد $A\bigcup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار زیر، قسمت هاشورخورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$$A\bigcup B = \{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

نکته: عضوهای تکراری در اجتماع دو مجموعه را فقط یک بار می‌نویسیم.

مثال: با توجه به نمودار زیر، ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید و سپس $A\cap B$ و $A\cup B$ را به دست آورید.



$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$B=\{۴,۵,۶,۷\}$

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

$A\cap B=\{۴,۵\}$

تفاضل دو مجموعه: مجموعه‌ی $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه‌ی عضوهایی که عضو مجموعه‌ی A هستند؛ ولی عضو مجموعه‌ی B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هاشور خورده است:

$A-B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\notin B\}$ $\qquad$ $B-A=\{x \mid x\in B\ ,\ x\notin A\}$

نکته: برای به‌دست آوردن $A-B$، کافی است عضوهای مشترک را از مجموعه‌ی A حذف کنیم.

مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$ باشد، آن‌گاه $A-B$ و $B-A$ را مشخص کنید.

$A-B=\{۱,۲\}$ و $B-A=\{۵,۶\}$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A)=k$.

مثال: اگر $A=\{۱,۵,۷,۱۰\}$ آنگاه داریم $n(A)=۴$.

مجموعه‌ها و احتمال:

یادآوری: در سال گذشته، احتمال رخ دادن یک پیشامد را با توجه به دستور زیر محاسبه می‌کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌های ممکن}}$$

حال چون با مجموعه‌ها و نمادگذاری آن‌ها آشنا شده‌ایم، مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های مطلوب باشد را S، مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید.

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

ب) عدد رو شده اول باشد.

ج) عدد رو شده بزرگ‌تر از ۶ باشد.

د) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد.

$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \;\Rightarrow\; n(S) = ۶$

الف) A : پیشامد رو شدن مضرب ۳ ; $A = \{۳,۶\} \Rightarrow n(A) = ۲$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اول ; $B = \{۲,۳,۵\} \Rightarrow n(B) = ۳$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ج)

$C:$ پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ $; C=\{\ \} \Rightarrow n(C)=۰$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

د)

$D:$ پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ $; D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(D)=۶$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

مثال: اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو بار عدد اول بیاید.

ب) دو عدد رو شده مثل هم باشند.

ج) دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند.

د) مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد.

$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۱),$

$(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),$

$(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(S)=۳۶$

الف)

$A:$ پیشامد رو شدن هر دو بار عدد اوّل ;

$A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow n(A)=۹$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

B : پیشامد رو شدن دو عدد مثل هم ;

$$B = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶)\} \Rightarrow n(B) = ۶$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

ج)

C : ۳ پیشامد رو شدن دو عدد مضرب ;

$$C = \{(۳,۳), (۳,۶), (۶,۳), (۶,۶)\} \Rightarrow n(C) = ۴$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

د)

D : ۷ پیشامد رو شدن مجموع دو عدد ;

$$D = \{(۱,۶), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲), (۶,۱)\} \Rightarrow n(D) = ۶$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$