

عددهای صحیح و گویا:

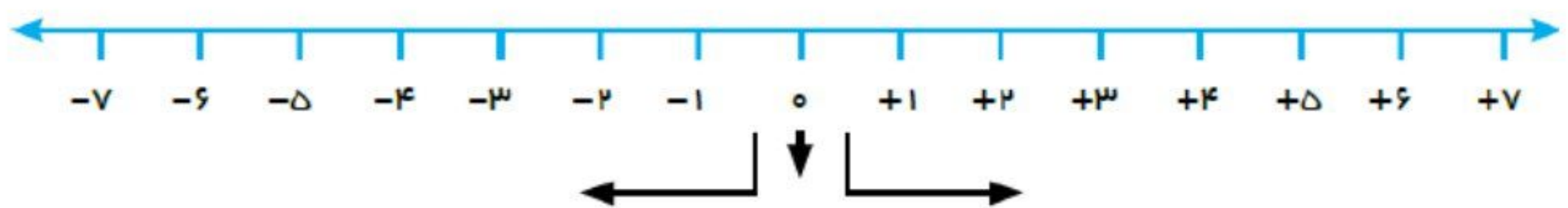
یادآوری اعداد صحیح : اعداد صحیح شامل سه دسته اعداد است : اعداد مثبت (طبیعی ها) ، عدد صفر و اعداد منفی .

عددهای صحیح عبارتند از : ... و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و -۱ و -۲ و -۳ و ...

مثال : از بین عددهای زیر ، عددهای صحیح را مشخص کنید .

$$\sqrt{۱۶} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۴} - ۷ \quad \text{و} \quad -\frac{۱۲}{۴} \quad \text{و} \quad ۰/۳ \quad \text{و} \quad \frac{۱۵}{۵} \quad \text{و} \quad \sqrt{۲۳}$$

تذکر : عددهای مثبت را سمت راست صفر و عددهای منفی را در سمت چپ صفر ، بر روی محور نمایش داده می شود .



ویژگی اعداد ، روی محور اعداد صحیح عبارتند از :

- ۱ - روی محور با حرکت از سمت چپ به سمت راست ، عددها بزرگتر می شوند .
- ۲ - هر عدد صحیح مثبت از صفر بزرگ تر است و هر عدد صحیح منفی از صفر کوچک تر می باشد .
- ۳ - اعداد صحیح مثبت از اعداد منفی بزرگ ترند .

جمع اعداد صحیح :

در جمع عددهای صحیح ، اگر عددها هم علامت باشند عدد ها را با هم جمع می کنیم و همان علامت را می گذاریم و اگر دو عدد مختلف علامت باشند ، عدد ها را از هم کم می کنیم و علامت عدد بزرگتر (عددی که بدون علامت بزرگتر است) را می گذاریم .
مثال ها :

$$\begin{aligned} (-۱۳) + (-۴) &= -(۱۳ + ۴) = -۱۷ \\ (-۴) + (+۱) &= -(۴ - ۱) = -۳ \end{aligned}$$

قرینه اعداد صحیح:

هر دو عدد قرینه روی محور از مبدأ به یک فاصله هستند، با این تفاوت که یکی سمت راست و دیگری سمت چپ صفر قرار دارند . نماد قرینه ، علامت منفی در پشت پرانتز می باشد .
 $-(-۷) = +۷$

نکته : برای قرینه کردن اعداد صحیح باید علامت آنها را عوض کنید ، البته قرینه صفر خود صفر است .

تفریق اعداد صحیح :

برای بدست آوردن حاصل تفریق عدد های صحیح ، باید تفریق را به جمع تبدیل کرده و سپس حاصل تفریق را بدست آوریم .

(برای اینکار عدد اولی را نوشته ، تفریق به جمع تبدیل شده و عدد دومی را قرینه می کنیم) $a - b = a + (-b)$

$$(-13) - (-4) = -13 + 4 = 7$$

$$(+3) - (-4) = 3 + 4 = 7$$

مثال :

ضرب و تقسیم اعداد صحیح :

ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس اعداد را با توجه به عمل بین آن ها ضرب یا تقسیم می کنیم.

نکته : در ضرب و تقسیم اگر عدد ها هم علامت باشند حاصل مثبت است و اگر خلاف علامت هم باشند جواب منفی می شود .

حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$[(-6) \times (+4)] \div (-3) = (-24) \div (-3) = 8 \qquad (-8) \times [12 \div (+4)] = (-8) \times (+3) = (-24)$$

اولویت ها در انجام محاسبات ریاضی :

۱- داخل کروشه یا پرانتز

۲- توان و جذر

۳- ضرب و تقسیم (از چپ به راست)

۴- جمع و تفریق

یعنی :

۱- ابتدا حاصل داخل کروشه یا پرانتز را به دست می آوریم . در صورت تداخل پرانتزها، از داخلی ترین پرانتز

شروع می کنیم .

۲- توان و جذر را محاسبه می کنیم

۳- سپس ضرب و تقسیم را انجام می دهیم . اگر چندین ضرب و تقسیم داشتیم از چپ به راست محاسبه می کنیم .

۴- سرانجام جمع و تفریق ها محاسبه می شوند.

اگر چندین جمع و تفریق داشتیم از چپ به راست شروع به انجام عملیات می کنیم .

نکته : اگر عددی پشت یک پرانتز قرار گرفت و بین عدد و پرانتز علامتی نبود، عدد در همه جملات پرانتز ضرب می شود .

مثال : حاصل عبارت زیر با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید؟

$$4 - 4 \times 3^2 \div 6 - (9 \div 2^3) = 4 - 4 \times 9 \div 6 - 1 = 4 - 36 \div 6 - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$$

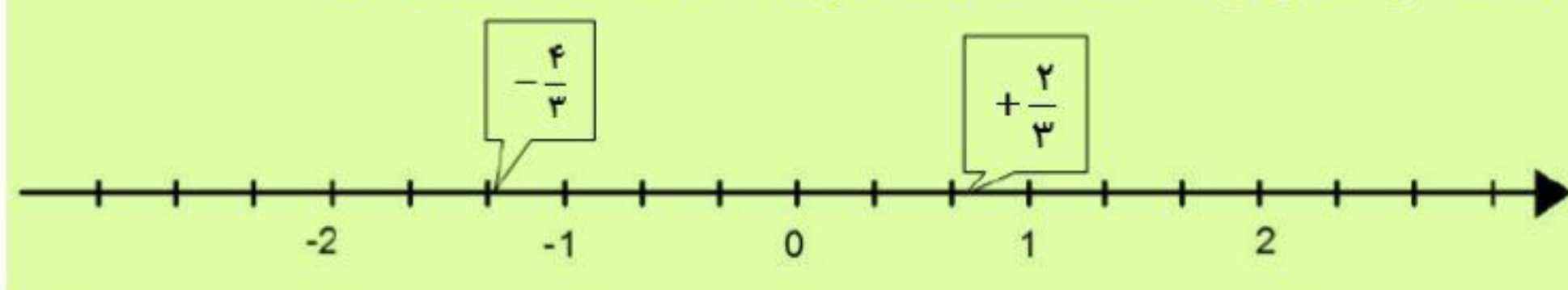
اعداد گویا : هر عددی که بتوان آنرا به صورت یک کسر نوشت عدد گویا نام دارد به شرطی که صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد .

کسرهایی به شکل $\frac{2}{5}, \frac{-7}{3}, \frac{11}{-13}$ همگی اعدادی گویا هستند.

نقطه نمایش یک عدد گویا بر روی محور اعداد :

برای نشان دادن مکان اعداد گویا روی محور باید به مخرج آنها برای تقسیم بندی واحدهای محور دقت کرد . مخرج اعداد گویا نشان دهنده آن است که هر واحد به چند قسمت تقسیم می شود و صورت اعداد گویا نشان می دهد که چند قسمت (بخش) باید در جهت مثبت یا منفی با توجه به علامت عدد گویا از صفر دور شود.

هر عدد گویا را می توان با نقطه های روی محور و یا با یک بردار مشخص کرد.



نکته : تمامی اعداد طبیعی ، صحیح و عددهای اعشاری که بتوانیم کسر معادل آن ها را بنویسیم نیز گویا هستند .

$$-0.25 = -\frac{25}{100}$$

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$-8/345 = \frac{-8345}{1000}$$

نکته : در کسرها فرق نمی کند که علامت منفی در صورت باشد یا در مخرج و یا اینکه پشت کسر باشد .

$$\frac{-4}{5} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

نکته : هر عدد طبیعی، صحیح، کسری، مخلوط (که به کسر بزرگ تر از واحد تبدیل شود) یک عدد گویا است ، زیرا می توان آنها را به صورت یک کسر علامت دار نوشت.

قرینه اعداد گویا: مانند اعداد صحیح، هر عدد گویا نسبت به قرینه اش علامت متفاوتی دارد و فاصله هر عدد گویا و قرینه اش تا صفر (مبدأ) یکسان و برابر است. پس برای قرینه علامت عدد گویا را عوض می کنیم .

عدد	$+0/9$	$-\sqrt{\frac{75}{3}}$
عدد گویا	✓	$= -\sqrt{25} = -5$ ✓
قرینه عدد گویا	$-0/9$	$+\sqrt{\frac{75}{3}} = +5$

جمع و تفریق اعداد گویا :

ابتدا عبارت را مختصر کرده و سپس مخرج مشترک می گیریم ، که بهترین مخرج همان ک.م.م مخرج ها می باشد .

نکته: اگر هر دو اعشاری بودند برای جمع و تفریق می توان آن ها را زیر هم نوشت و محاسبات را انجام داد .

نکته: اگر اعشاری و مخلوط و کسر معمولی داشتیم بهتر است همه به **کسر معمولی** و یا همه به اعشار تبدیل شوند و پس از آن محاسبات انجام شود .

به این صورت ها :

حالت اول: مخرج کسر ها برابر باشد. در این حالت بعد از برداشتن پرانتزها و مختصرنویسی، مانند اعداد صحیح و طبیعی جمع و تفریق انجام می دهیم.

$$\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال:

حالت دوم: مخرج کسر ها برابر نباشد. در این حالت با مخرج مشترک گرفتن، مخرج کسر ها را مساوی می کنیم و سپس اقدام به جمع و تفریق می کنیم.

$$\frac{5}{3} + \frac{6}{7} = \frac{35}{21} + \frac{18}{21} = \frac{53}{21}$$

مثال:

$$-0.5 + 0.8 = -\frac{5}{10} + \frac{8}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$-2/3 - 1/2 = -\frac{22}{10} - \frac{12}{10} = -\frac{35}{10} = -3.5$$

$$24 - 10/4 = 13/6$$

$$-17/35 + 5 = -12/35$$

مثال :

تبدیل کسر بزرگتر از واحد به عدد مخلوط :

برای تبدیل کسرهای بزرگتر از واحد (اعداد گویایی که صورت از مخرج بزرگ تر است) به عدد مخلوط ،

بدون در نظر گرفتن علامت، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، **خارج قسمت به عنوان جزء صحیح** و باقی مانده تقسیم را به عنوان صورت قسمت کسری می نویسیم و سپس علامت را به کل عدد مخلوط می دهیم . مثال ها :

$$\text{الف) } -\frac{19}{5} = -3\frac{4}{5} \quad \text{ب) } \frac{87}{10} = +8\frac{7}{10}$$

تبدیل عدد مخلوط به کسر معمولی :

برای تبدیل عدد مخلوط به کسر ابتدا بدون در نظر گرفتن علامت ، جزء صحیح که پشت کسر نوشته شده را **در مخرج ضرب کرده**

و با صورت جمع می کنیم و خود مخرج را در مخرج جدید نوشته و سپس علامت عدد مخلوط را به کل کسر می دهیم.

$$\text{الف) } -7\frac{1}{9} = -\frac{64}{9} \quad \text{ب) } +19\frac{2}{5} = +\frac{97}{5}$$

نکته: هرگاه صورت و مخرج عدد گویا را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، اعداد گویای مساوی با آن به دست می آیند.

نکته: هر عدد گویا را می توان به شکل های بسیار زیادی مثل کسره های مساوی و یا عدد اعشاری نمایش داد.

مثال: با توجه به تساوی $\frac{-2}{5} = \frac{-4}{10}$ سه کسر دیگر را ادامه دهید.

حل: $\frac{-2}{5} = \frac{-4}{10} = \frac{-6}{15} = \frac{-8}{20} = \frac{-10}{25}$

ضرب اعداد گویا:

ابتدا در ضرب اعداد را ساده کرده و سپس صورت در صورت ضرب می شود و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

$$\left(+\frac{1}{5}\right) \times \left(+\frac{2}{7}\right) = \frac{2}{35}$$

حاصل ضرب های زیر را به دست آورید؟

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)$$

یافتن مقدار مجهول یا مقدار نامشخص در یک تساوی:

با توجه به تساوی کسرها می توان مقدار مجهول را در یک تساوی به روش زیر محاسبه کرد:

می دانیم در یک عبارت کسری که تساوی داریم، همواره حاصل ضرب طرفین عامل های تساوی در هم برابر حاصل ضرب وسطین عامل های تساوی در هم می باشد، پس برای پیدا کردن مقدار نامشخص مانند سال های پیش در قسمت کسرها اقدام می کنیم.

$$-\frac{4}{14} = \frac{x}{35} \Rightarrow -4 \times 35 = x \times 14$$

سپس معادله را حل می کنیم.

تقسیم اعداد گویا:

تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم یعنی خود کسر اولی را در معکوس کسر دوم ضرب کرده

و حاصل را به دست می آوریم (صورت ها در هم و مخرج ها در هم ضرب می شود).

تذکر: هرگاه یکی از آنها عدد معمولی بود به آن مخرج یک می دهیم تا به کسر تبدیل شود.

✓ نکته: معکوس کسر $\frac{a}{b}$ برابر است با کسر $\frac{b}{a}$. معکوس عدد a برابر است با $\frac{1}{a}$. به زبان ساده معکوس کردن یک عدد یعنی، جای صورت را با مخرج عوض کنیم.

مثال:

$$-\frac{5}{3} \div \frac{6}{7} = -\frac{5}{3} \times \frac{7}{6} = -\frac{35}{18}$$

نکته: صفر تنها عددی است که معکوس ندارد، چون کسری که مخرج آن صفر باشد تعریف نشده است.

نکته: حاصلضرب هر عدد گویای غیر صفر در معکوسش برابر یک می شود.

نکته مهم: در اعداد گویا عمل ضرب دور در دور، نزدیک در نزدیک برای ساده کردن عبارت ها بسیار مؤثر است،

حاصل ضرب دور در دور در صورت کسر جدید و حاصل ضرب نزدیک در نزدیک در مخرج کسر جدید (حاصل) قرار می گیرد و علامت ها نیز در هم ضرب شده و به کل کسر تعلق می گیرد.

مثال: حاصل تقسیم کسری زیر را بدست آورید.

$$\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{4}{9}} = +\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{9}} = +\frac{27}{40}$$

تذکر: قبل از عمل دور در دور، نزدیک در نزدیک، می توان صورت را با صورت ساده کرد و مخرج را با مخرج و سپس کار را ادامه داد.

حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\left(-\frac{7}{8}\right) \div \left(-\frac{14}{15}\right) = \left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(-\frac{15}{14}\right) = \frac{15}{16}$$

$$\frac{\frac{3}{7}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{15}{28}$$

نکته: اگر تعداد منفی ها در یک کسر فرد باشد، علامت کسر منفی است و

اگر تعداد منفی ها در کسر زوج باشد، علامت کسر مثبت است.

(توجه کنید که در عبارت صورت و مخرج جمع یا تفریق نباشد)

$$-\frac{-(-17)}{-(-(-21))} = +\frac{17}{21}$$

اعداد گویای بین دو عدد گویا:

بین دو عدد طبیعی متوالی (پشت سر هم) یا دو عدد صحیح متوالی، عدد طبیعی یا صحیح وجود ندارد، اما در مورد اعداد گویا این مطلب درست نیست. بین هر دو عدد گویای متمایز، بیشمار عدد گویا وجود دارد.

نکته: نوشتن عددی گویا بین هر دو عدد گویا به چند روش است که ۳ روش کاربردی آن عبارتند از:

۱ - صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم.

$$\text{برای هر دو کسر } \frac{a}{b} \text{ و } \frac{c}{d} \text{ می توان نوشت } \frac{c}{d} < \frac{c+a}{d+b} < \frac{a}{b}$$

۲ - ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس در صورت لزوم صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

۳ - روش میانگین گرفتن (دو عدد را با هم جمع کرده و تقسیم بر دو می کنیم عدد وسط بدست می آید و به این ترتیب ادامه می دهیم و هر دو عدد جدید را با هم بگیریم و وسط آن ها را بدست آوریم) مانند مثال پایین :

مثال: سه عدد بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3} \rightarrow (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \div 2 = \frac{5}{12} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$

$$(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}) \div 2 = \frac{9}{24}$$

$$(\frac{5}{12} + \frac{1}{2}) \div 2 = \frac{11}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{9}{24}, \frac{5}{12}, \frac{11}{24}, \frac{1}{2}$$

بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{11}{14} < \frac{4}{5}$$

روش اول

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{20} \text{ و } \frac{16}{20} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{48}{60} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{46}{60} < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

روش دوم