فصل دوم

عددهای حقیقی

۱.۲ عددهای گویا

عددهای گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود، عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج باید عدد صحیح باشند و مخرج باید مخالف صفر باشد.)

نکته: اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد گویا: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک، کوچکترین مضرب مشترک (ک. م. م) می‌باشد.

مثال : $\left(-\frac{۵}{۱۲}\right) - \left(-\frac{۷}{۱۸}\right) = \left(-\frac{۵}{۱۲}\right) + \left(+\frac{۷}{۱۸}\right) = \frac{-۱۵+۱۴}{۳۶} = \frac{-۱}{۳۶}$

مضرب‌های ۱۲ : ۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ...

$\longrightarrow$ ۱۲,۱۸ ک. م. م = ۳۶

مضرب‌های ۱۸ : ۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ...

ضرب اعداد گویا: فقط در ضرب می‌توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم.

مثال : $\left(-\frac{\cancel{۵}}{\cancel{۳}}\right) \times \left(-\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۱۰}_{۲}}\right) = +\frac{۱}{۲}$

تقسیم اعداد گویا: کسر اول را نوشته، تقسیم را تبدیل به ضرب و کسر دوم را معکوس می‌کنیم.

مثال : $\left(+\frac{۴}{۷}\right) \div \left(-\frac{۵}{۲۱}\right) = \left(+\frac{۴}{\cancel{۷}_{۱}}\right) \times \left(-\frac{\cancel{۲۱}^{۳}}{۵}\right) = -\frac{۱۲}{۵}$

مثال: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(-\frac{۲}{۳}\right) \div \left[\left(-\frac{۱}{۱۵}\right) + \left(+\frac{۳}{۵}\right)\right] = \left(-\frac{۲}{۳}\right) \div \left(\frac{-۱+۹}{۱۵}\right) = \left(-\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۳}_{۱}}\right) \times \left(\frac{\cancel{۱۵}^{۵}}{\cancel{۸}_{۴}}\right) = -\frac{۵}{۴}$$

مقایسه اعداد گویا: از دو روش می‌توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده و سپس کسرها را مقایسه می‌کنیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۱۰}$

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۸}{۲۰} \text{ و } \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۲۰} \text{ و } \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰}{۲۰} \text{ و } \frac{۷}{۱۰} = \frac{۱۴}{۲۰} \longrightarrow \frac{۸}{۲۰} < \frac{۱۰}{۲۰} < \frac{۱۴}{۲۰} < \frac{۱۵}{۲۰} \longrightarrow \boxed{\frac{۲}{۵} < \frac{۱}{۲} < \frac{۷}{۱۰} < \frac{۳}{۴}}$$

ب) تبدیل به اعشار: صورت را بر مخرج تقسیم و خارج قسمت را تا دو رقم اعشار ادامه می‌دهیم.

مثال: اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۱۰}$

$$\frac{۲}{۵} = ۰/۴۰ \text{ و } \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \text{ و } \frac{۱}{۲} = ۰/۵۰ \text{ و } \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷۰ \longrightarrow ۰/۴۰ < ۰/۵۰ < ۰/۷۰ < ۰/۷۵ \longrightarrow \boxed{\frac{۲}{۵} < \frac{۱}{۲} < \frac{۷}{۱۰} < \frac{۳}{۴}}$$

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.

پیدا کردن کسرهایی بین دو عدد گویا (کسری): چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی به صورت زیر است:

روش اول: صورت‌ها را با هم مخرج و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵ \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۵} = ۰/۸۰$$

$$\frac{۳}{۴} < \frac{۳+۴}{۴+۵} < \frac{۴}{۵} \longrightarrow \frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۷+۴}{۹+۵} < \frac{۴}{۵} \longrightarrow \boxed{\frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۱۱}{۱۴} < \frac{۴}{۵}}$$

روش دوم: ابتدا مخرج مشترک گرفته، سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب می‌کنیم.

مثال: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید.

$$\frac{۳_{\times ۵}}{۴_{\times ۵}} = \frac{۱۵}{۲۰} \quad \text{و} \quad \frac{۴_{\times ۴}}{۵_{\times ۴}} = \frac{۱۶}{۲۰} \longrightarrow \frac{۱۵_{\times ۳}}{۲۰_{\times ۳}} = \frac{۴۵}{۶۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱۶_{\times ۳}}{۲۰_{\times ۳}} = \frac{۴۸}{۶۰} \longrightarrow \boxed{\frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۶}{۶۰} < \frac{۴۷}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰}}$$

انواع عددهای اعشاری:

الف) عدد اعشاری متناهی یا مختوم: اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود، آن عدد کسری مختوم نام دارد.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۳/۰ & ۴ \\ \underline{-۲۸} & \overline{۰/۷۵} \\ ۲۰ & \\ \underline{-۲۰} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر یکی از عامل‌های ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، آن کسر مختوم است.

مثال: $\frac{۳}{۲۰} \longrightarrow ۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ و $\frac{۵}{۸} \longrightarrow ۸ = ۲^۳$

ب) عدد اعشاری متناوب ساده: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج‌قسمت عددی مرتب تکرار شود، آن عدد را متناوب ساده می‌گویند.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۱/۰ & ۳ \\ \underline{-۹} & \overline{۰/۳۳۳\ldots} \\ ۱/۰ & \\ \underline{-۹} & \\ ۱/۰ & \\ \underline{-۹} & \\ ۱ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳\ldots = ۰/\overline{۳}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، عامل ۲ و ۵ نباشند، آن کسر متناوب ساده است.

مثال: $\frac{۳}{۷۷} \longrightarrow ۷۷ = ۷ \times ۱۱$ و $\frac{۵}{۳۹} \longrightarrow ۳۹ = ۳ \times ۱۳$

عدد اعشاری متناوب مرکب: اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر، در خارج‌قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم‌های تکراری برسیم،به آن کسر متناوب مرکب می‌گویند.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۵/۰ & ۶ \\ \cline{2-2} -۴۸ & ۰/۸۳۳\ldots \\ \hline ۲/۰ & \\ -۱۸ & \\ \hline ۲/۰ & \\ -۱۸ & \\ \hline ۲ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۵}{۶} = ۰/۸۳۳۳۳\ldots = ۰/۸\overline{۳}$$

$$\begin{array}{r|l} ۷/۰ & ۲۲ \\ \cline{2-2} -۶۶ & ۳/۱۸\ldots \\ \hline ۴/۰ & \\ -۲۲ & \\ \hline ۱۸/۰ & \\ -۱۷۶ & \\ \hline ۴/۰ & \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{۷}{۲۲} = ۰/۳۱۸۱۸۱۸\ldots = ۰/۳\overline{۱۸}$$

نکته: اگر در تجزیه مخرج کسر، به جز ۲ و ۵ عامل‌های دیگری نیز وجود داشته باشد، آن کسر متناوب مرکب است.

مثال: $\frac{۳}{۷۵} \longrightarrow ۷۵ = ۳ \times ۵^{۲}$ و $\frac{۵}{۱۴} \longrightarrow ۱۴ = ۲ \times ۷$

۲.۲ عددهای حقیقی

اعداد گنگ (اصم): اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره‌ی تناوب نیستند، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ نمایش می‌دهیم. مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۱۰}$، π و $۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد، آن‌گاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند، گنگ هستند).

نکته: عدد π چون دارای دوره‌ی تناوب نیست، عددی گنگ است.

$$\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۲۶۵۳\ldots$$

مثال: در جاهای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$\sqrt{۴۷}\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}'$ $\qquad$ $\sqrt{۰/۳۶}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$ $\qquad$ $-\frac{۲}{۵}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$

$۱-\sqrt{۲}\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}$ $\qquad$ $۳/۱۴\ \boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$ $\qquad$ $\pi\ \boxed{\in}\ \mathbb{Q}'$

مثال: بین دو عدد داده شده سه عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

$$\sqrt{۲} < \boxed{\sqrt{۲/۱}} < \boxed{\sqrt{۲/۲}} < \boxed{\sqrt{۲/۳}} < \sqrt{۳}$$

ب) ۲ و ۳

$$۲ = \sqrt{۴} < \boxed{\sqrt{۵}} < \boxed{\sqrt{۶}} < \boxed{\sqrt{۷}} < \sqrt{۹} = ۳$$

نکته: بین دو عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

نکته: بین دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال: عدد $\sqrt{۱۰}+۳$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد.

$$\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۶} \longrightarrow ۳<\sqrt{۱۰}<۴ \longrightarrow ۳+۳<۳+\sqrt{۱۰}<۴+۳ \longrightarrow \boxed{۶<۳+\sqrt{۱۰}<۷}$$

بنابراین $\sqrt{۱۰}+۳$ بین ۶ و ۷ قرار دارد.

اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و عددهای گنگ را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و

آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. داریم: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

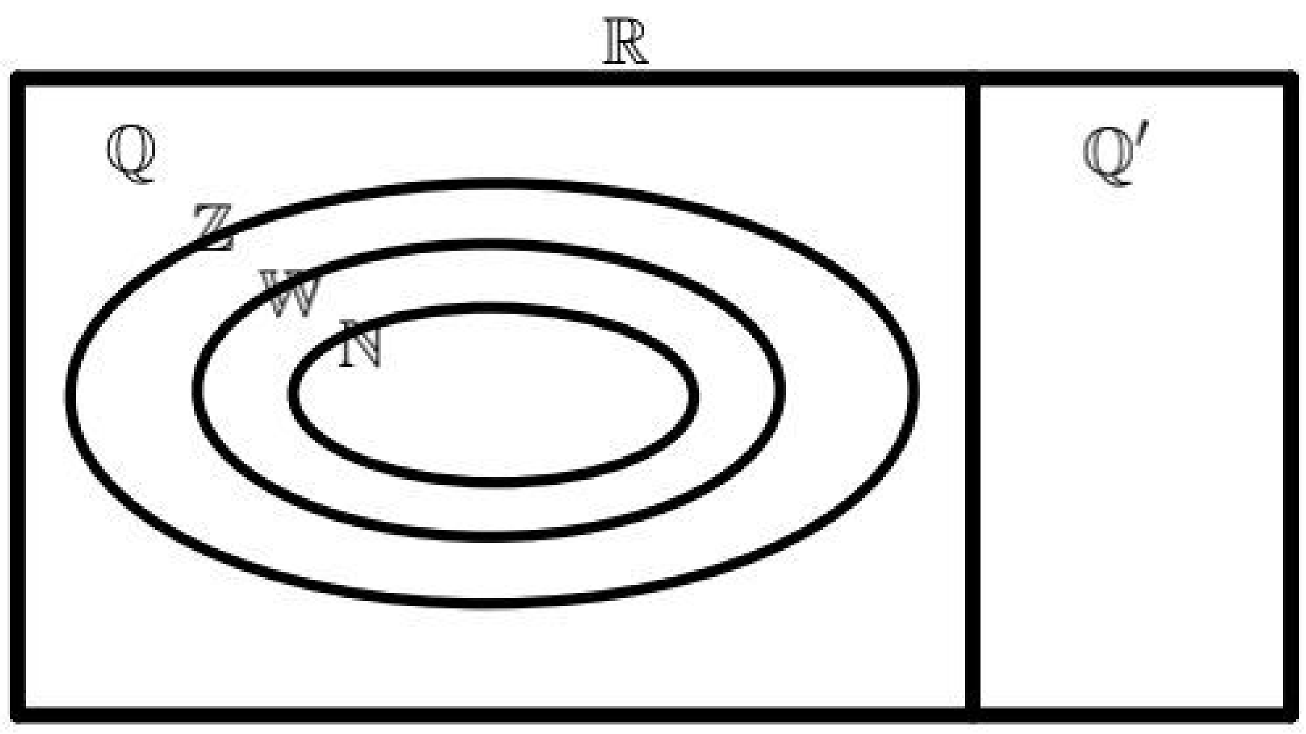
نکته:

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$

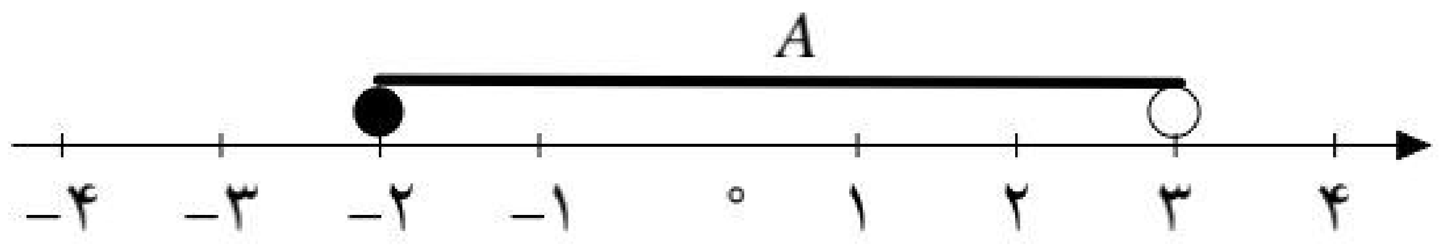
$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\emptyset$



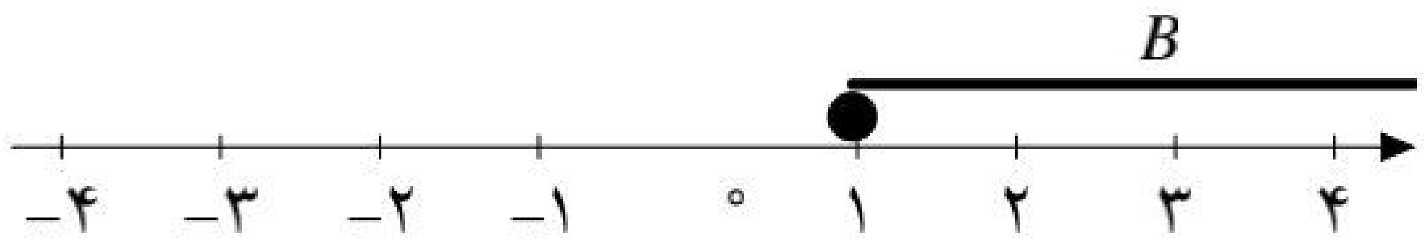
نکته: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند، پس نمایش این اعداد به صورت خط ممتدی است. (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد، دایره توپر و اگر سرکش نداشته باشد، دایره توخالی قرار می‌دهیم).

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} | -۲ \leq x \leq ۳\}$



ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۱\}$



۳.۲ قدرمطلق و محاسبه‌ی تقریبی

قدرمطلق: فاصله‌ی نقطه‌ی نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدرمطلق a) نمایش می‌دهیم.

مثال:

$|-\frac{۴}{۳}| = \frac{۴}{۳}$ $\quad$ $|۵| = ۵$ $\quad$ $|-۲| = ۲$

$|۰| = ۰$ $\quad$ $|-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$ $\quad$ $|-\pi| = \pi$

خواص قدر مطلق:

۱. قدر مطلق عدد صفر، برابر با صفر است. $\quad a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$

۲. قدر مطلق عددهای مثبت برابر با خود آن عدد است. $\quad a > ۰ \Rightarrow |a| = a$

۳. قدر مطلق عددهای منفی برابر با قرینه آن عدد است. $\quad a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$

نکته: به طور کلی قدرمطلق هر عدد (به جز صفر)، عددی مثبت می‌شود.

مثال: عبارت‌های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$$|۲۰ - ۴۰ + ۱۵| = |-۲۰ + ۱۵| = |-۵| = ۵$$

$$|(-۷) \times (+۸)| = |-۵۶| = ۵۶$$

$$|۴ - ۶ \times ۴ \div ۳ + ۲| = |۴ - ۲۴ \div ۳ + ۲| = |۴ - ۸ + ۲| = |-۴ + ۲| = |-۲| = ۲$$

نکته: مقدار تقریبی برخی از اعداد تا یک رقم اعشار به صورت زیر است:

$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \qquad \sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \qquad \sqrt{۵} \simeq ۲/۲ \qquad \sqrt{۶} \simeq ۲/۴ \qquad \sqrt{۷} \simeq ۲/۶ \qquad \sqrt{۸} \simeq ۲/۸$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$|\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۲}) = -۱+\sqrt{۲} = \sqrt{۲}-۱$$

$$|\underbrace{۲-\sqrt{۳}}_{\text{مثبت}}| = ۲-\sqrt{۳}$$

$$|\underbrace{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}| = ۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}$$

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}| = ۳-\sqrt{۵}+-(-۲-\sqrt{۵}) = ۳-\sqrt{۵}+(+۲+\sqrt{۵}) = ۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵} = ۵$$

نکته: اگر a عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $\sqrt{a^۲} = |a|$

مثال:

$$\sqrt{(-۷)^۲} = |-۷| = ۷$$

$$\sqrt{۹^۲} = |۹| = ۹$$

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲} = |\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۳}) = -۱+\sqrt{۳}$$