ایستگاه مطالعه

درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

تعریف دو مجموعه برابر: دو مجموعه را برابر گوییم درصورتی که عضوهایشان کاملا یکسان باشد.(دقت کنید جابه جایی عضو ها ایرادی ندارد.)درصورتی که مجموعه های Aو B مساوی باشند با نماد A=B این موضوع را بیان میکنیم.

مثال: دو مجموعه ی $A = \{0, 2, 1\}$ و $B = \{2, 1, 0\}$ با هم برابرند.

مثال: نمودار ون مجموعه های $A = \{3, 2, 1\}$ و $B = \{2, 1\}$ را رسم کنید.

پاسخ:

زیر مجموعه:اگر همه ی اعضای مجموعهB در مجموعه A وجود داشته باشند، میگوییم B زیرمجموعه یAاست.

زیر مجموعه بودن را با علامت $\subseteq$ و زیر مجموعه نبودن را با علامت $\nsubseteq$ نشان میدهیم.

مثال: مجموعه های $A = \{1و2و3و4و5\}$ و $B = \{3و4و5\}$ و $C = \{4و5و6\}$ را در نظر بگیرید روابط زیر بین این سه مجموعه برقرار است:

پاسخ:

دقت کنید که اگر حتی یک عضو در مجموعه B باشد که در مجموعه ی A نباشد B زیرمجموعه A نخواهد بود.

نکته 1: با توجه به تعریف زیرمجموعه واضح است، هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. که بصورت جبری مینویسیم: $A \subseteq A$

چرا هر مجموعه زیرمجموعه خودشه؟

چون اگر یک مجموعه دلخواه مثل $A = \{1و2\}$ داشته باشیم همه ی عضوهای A در خودش قرار دارند.

آیا مجموعه تهی عضوی وجود دارد که در مجموعه دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد؟

پاسخ: خیر، چون تهی عضوی ندارد.

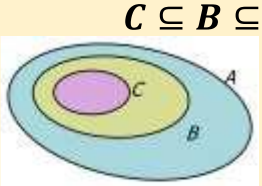
با توجه به سوال میتوان نکته زیر را بیان کرد:

نکته 2: مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است. که به صورت جبری مینویسیم:

$$\emptyset \subseteq A$$

نکته 3: با توجه به دو نکته بالا میتوان نتیجه گرفت که مجموعه تهی زیر مجموعه خودش نیز است. که بصورت جبری مینویسیم: $\emptyset \subseteq \emptyset$

نکته 4: مانند نمودار داده شده اگر مجموعه C زیر مجموعه ی، مجموعه B و مجموعه B نیز زیرمجموعه ی، مجموعه A باشد؛ آنگاه مجموعه C نیز زیرمجموعه، مجموعه ی A است. و بطور کلی میتوان نوشت $C \subseteq B \subseteq A$



مثال: $A = \{1و2و3\}$ و $B = \{1و3\}$ و $C = \{3\}$ باشد آنگاه:

$$(C \subseteq B \quad و \quad B \subseteq A) \quad \rightarrow \quad C \subseteq A$$

نوشتن زیرمجموعه های یک مجموعه:

با توجه به عضوهای یک مجموعه میتوان زیرمجموعه های آن را تعیین کرد؛ با استفاده از راهبرد الگوسازی که در پایه هفتم آموختید به شیوه زیر عمل میکنیم:

1. نوشتن زیرمجموعه صفر عضوی (یعنی تهی)
2 . نوشتن زیر مجموعه های یک عضوی (هر عضو مجموعه را اگر داخل یک آکولاد قرار دهیم یک زیرمجموعه یک عضوی ساخته میشود)
3 . نوشتن زیر مجموعه های دو عضوی (هر دو عضو را داخل آکولاد قرار می دهیم تا زیر مجموعه دو عضوی بوجود آید)
4 . این مراحل را آنقدر ادامه میدهیم تا آخرین زیر مجموعه که خود مجموعه میباشد برسیم.

مثال 1: زیر مجموعه های مجموعه ی $A = \{1, 2\}$ را بنویسید.

پاسخ:

تعداد عضو های مجموعه B یدونه بیشتر از A هست و تعداد زیرمجموعه هاش 2 برابر تعداد زیر مجموعه های A پس میشه نتیجه گرفت اگر به مجموعه ای یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه هاش 2 برابر میشه؟

بله علی جان دقیقا به همین صورت . و اگر بخواهیم این نتیجه رو دقیق تر بیان کنیم، الگویی بین تعداد عضوهای مجموعه و تعداد زیرمجموعه هاش هست به جدول زیر دقت کن و الگو رو حدس بزن:

تعداد عضو های مجموعه	0 عضو	1 عضو	2 عضو	3 عضو	...		n عضو
تعداد زیر مجموعه ها	1	2	4	8	...		؟

اگر الگو یابی کنیم مفهمیم که هر مرحله دوبرابر مرحله قبلشه (البته بجز مرحله اول) که گفتیم علتش یک عضو بیشتر داشتن نسبت به مرحله قبلشه پس میشه گفت

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه که n عضو دارد 2^n است.

یک جمع بندی: ارتباط تساوی دو مجموعه و مفهوم زیرمجموعه:

اگر مجموعه »: با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه میتوان گفت A زیرمجموعه B و همچنین مجموعه B نیز زیر نیز زیر A باشد، مجموعه A و B مساوی اند.

$(B \subseteq A \text{ و } A \subseteq B) \to A = B$

برعکس: اگر دومجموعه $A=B$ اشند آنگاه A زیرمجموعه B و همچنین B زیرمجموعه A میباشد.

$A = B \to (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A)$

مجموعه های عددی مهم:

در بحث مجموعه ها بیشمار مجموعه عددی میتوان نوشت. اما برخی از مجموعه ها پرکاربرد تر هستند، بنابراین این مجموعه ها را با اسامی و حروف خاصی نامگذاری میکنند برخی از این مجموعه ها عبارت اند از:

مجموعه اعداد طبیعی با حرف N نامگذاری میشود: $\mathbb{N} = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \ldots\}$

مجموعه اعداد حسابی که با حرف W نامگذاری میشود: $\mathbb{W} = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \ldots\}$

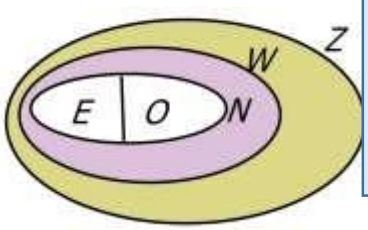
مجموعه اعداد صحیح که با حرف Z نامگذاری میشود: $\mathbb{Z} = \{\ldots \text{ و } -2 \text{ و } -1 \text{ و } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \ldots\}$

مجموعه اعداد طبیعی دو زیر مجموعه مهم دارد که عبارت اند از:

مجموعه اعداد فرد طبیعی که با حرف O نامگذاری میشود: $\mathbb{O} = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } \ldots\}$

مجموعه اعداد زوج طبیعی که با حرف E نامگذاری میشود: $\mathbb{E} = \{2 \text{ و } 4 \text{ و } 6 \text{ و } \ldots\}$

ما در پایه هشتم خوندیم که مثلا هر عدد طبیعی عددی صحیح است با توجه به این میشه گفت مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند؟



بله و اگر بخوایم کلی تر بیان کنیم میشه گفت:

$\mathbb{E} \text{ و } \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

که اگر به اعضای این مجموعه ها و نمودار ون دقت کنید این رابطه قابل درک خواهد بود.

محدوده های عددی:

دانش آموزان عزیز شما با نمادهای $<$ و $\le$ آشنا شده اید. با ترکیب کردن این نماد ها و یک متغیر محدوده ای عددی برای آن متغیر ساخته میشود. برای درک بهتر این موضوع به مثال های زیر دقت کنید:

مثال 1 : $-3 \le x$ اعداد مورد نظر از 3- بزرگتر و از 4 کوچکتر هستند.

مثال 2 : $-3 < x < 4$ اعداد مورد نظر از 3- بزرگتر و از 4 کوچکتر هستند.

مثال 3 : $-3 < x \le 4$ اعداد مورد نظر از 3- بزرگتر و کوچکتر یا مساوی 4 هستند.

مثال 4 : $-3 \le x < 4$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی 3- و کوچکتراز 4 هستند.

مثال 5 : $-3 \le x \le 4$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی 3- و کوچکتر یا مساوی 4 هستند.

نمایش مجموعه ها به زبان ریاضی:

ابتدای فصل عبارت های کلامی را آموختیم که یک مجموعه را مشخص میکردند حال میخواهیم عبارت های ریاضی (جبری) را بیاموزیم که یک مجموعه را با استفاده از علائم و نماد ها توضیح میدهند. هر عبارت ریاضی که یک مجموعه را بصورت جبری نمایش میدهد معمولا به صورت زیر نوشته میشود:

{قسمت اول | قسمت دوم}

قسمت اول: یک الگو یا رابطه ی کلی است که با استفاده از آن اعضا مجموعه را تعیین میکنیم

خط عمودی« | »که دو قسمت را از هم جدا میکند « بطوری که یا به شرطی که» زیر نوشته میشود:

قسمت دوم: یک محدوده عددی برای ما مشخص میکند که اعداد این محدوده را در رابطه ای که در قسمت اول آمده قرار میدهیم تا اعضا مشخص شوند.

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:

در این حالت اعضای مجموعه مشخص است و از ما میخواهند که زبان ریاضی مجموعه را بیان کنیم. برای این کار ابتدا رابطه ی بین اعضا را با استفاده از الگویابی مشخص میکنیم، سپس با توجه به رابطه محدوده عددها را مشخص میکنیم.

مثال 1: مجموعه $A = \{-5$ و -4 و -3 و...و $2\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ:

مجموعه اعداد گویا و نمایش جبری آن

تعریف اعداد گویا: هر عدد که بتوان بصورت کسری نوشت بطوریکه صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد و مخرج عددی غیر صفر باشد را عدد گویا می نامیم.

مجموعه اعداد گویا: مجموعه ایست شامل همه ی اعداد گویا که با حرف $\mathbb{Q}$ نامگذاری میشود.

نمایش جبری مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | \boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$ و $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}\}$

نکته : در پایه هشتم خواندید که هر عدد صحیح ، عدد گویاست (چون میتوانیم برای آن مخرج یک قرار دهیم)پس میتوان گفت مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه، مجموعه اعداد گویا هستند.

به نمودار ون و رابطه زیر دقت کنید:

$\mathbb{E}$ و $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$