Faculte des Arts et des Sciences
Département de mathématiques et statistique

Solutionnaire: TP 4

Écrit par
Emiliano Aviles

Février, 2025

Travail présenté dans le
cadre du cours MAT 1978

Partie A:

Exercice 1:

Partie A Deux participants à un jeu sont assis autour d'une table sur laquelle se trouve 10 jetons indiscernables au toucher. Sur chaque jeton est imprimé un symbole : soit une des lettres $\{A, B, C, D, E\}$ ou soit un des chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Les jetons sont tous différents. Les jetons sont retournés sur la table (face cachée) de sorte à ce qu'ils semblent tous identiques. Un arbitre place 5 jetons qu'il séléctionne *au hasard*[1] parmi les 10 disponibles dans un sac. L'objectif des joueurs est de savoir s'il y'a plus de lettres ou de chiffres dans le sac. Pour cela, ils vont pouvoir obtenir une connaissance *partielle* du sac au moyen d'une des deux stratégies suivantes :

- Stratégie 1 : piger sans remise 3 jetons du sac.
- Stratégie 2 : piger avec remise un jeton du sac 10 fois de suite.

Quel serez votre choix?

#1 On considère la variable aléatoire (v.a.) X qui donne le nombre de chiffre(s) dans le sac. Donner l'univers de X, notée $\mathcal{S}_X$, et sa fonction de masse, notée $p_X : \mathcal{S}_X \to [0, 1]$. Pour la fonction de masse, on l'exprimera sous forme de fonction de x.

L'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X est :

$$\mathcal{S}_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Lors du TP, nous avions utilisé une approche combinatoire détaillée pour illustrer l'intuition derrière la fonction de masse d'une loi hypergéométrique. Afin de faciliter son application dans des contextes futurs, voici un rappel des conditions d'utilisation de cette loi :

Supposons qu'un sac contient $N + M$ piles : N d'entre elles sont neuves, alors que M d'entre elles ne sont plus bonnes.

Un échantillon de n piles est tiré aléatoirement (sans remise).

Autrement dit, l'échantillon pigé sera l'un des $\binom{N+M}{n}$ échantillons possibles.

Posons X, le nombre de piles neuves dans notre échantillon. La fonction de masse de X est alors

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}, \quad i = 0, 1, \ldots, \min(N, n) .$$

Note : Nous supposons que $\binom{m}{r} = 0$ si $r > m$ ou si $r < 0$.

Dans le cas présent, X suit une loi hypergéométrique de paramètres $(N = 10, K = 5, n = 5)$. Sa fonction de masse est donnée par :

$$p_X(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{5}{5-x}}{\binom{10}{5}}, \quad x \in \mathcal{S}_X.$$

Cette expression traduit la probabilité d'observer x éléments d'un certain type dans un échantillon de taille 5 tiré sans remise d'une population de 10 éléments contenant 5 éléments de ce type.

Exercice 2:

#2 Décrire l'événement E = {il y'a plus de jetons avec un chiffre que de jeton(s) avec une lettre} au moyen d'événements faisant intervenir la v.a. X et calculer $\mathbb{P}(E)$.

$$E = \{\text{Il y a plus de jetons avec un chiffre que de jeton(s) avec une lettre}\} = \{X > 2\}$$

$$\implies \quad \mathbb{P}(E) = \sum_{x=3}^{5} p_X(x) = \frac{1}{\binom{10}{5}} + \frac{25}{\binom{10}{5}} + \frac{100}{\binom{10}{5}} = \frac{126}{252} = \frac{1}{2}$$

Ce résultat signifie que l'événement E est équiprobable avec son complémentaire, ce qui traduit une symétrie dans la répartition des jetons entre chiffres et lettres. Ainsi, avant le tirage, nous n'avons pas d'information permettant de privilégier un des deux cas.

Exercice 3:

On introduit deux autres v.a. : Y donne le nombre de chiffre(s) observé(s) si la Stratégie 1 est utilisée et Z donne le nombre de chiffre(s) observé(s) si la Stratégie 2 est utilisée.

#3 Donner l'univers des v.a. Y et Z, notés $\mathcal{S}_Y$ et $\mathcal{S}_Z$.

L'univers de Y, noté $\mathcal{S}_Y$, correspond aux valeurs possibles du nombre de jetons avec un chiffre obtenus lors d'un tirage sans remise de 3 jetons parmi les 10 disponibles (5 avec un chiffre et 5 avec une lettre). Puisque le nombre de jetons tirés est limité à 3, nous avons :

$$\mathcal{S}_Y = \{0, 1, 2, 3\}.$$

L'univers de Z, noté $\mathcal{S}_Z$, correspond aux valeurs possibles du nombre de jetons avec un chiffre obtenus lors de 10 tirages indépendants avec remise. À chaque tirage, un jeton est sélectionné parmi 10 possibles, et le nombre total de jetons avec un chiffre peut varier entre 0 et 10 :

$$\mathcal{S}_Z = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Exercice 4:

Cas particulier : on suppose à présent que $\{X = 1\}$, c'est-à-dire qu'il y'a un seul chiffre dans le sac (et quatre lettres donc).

#4 Sachant que $\{X = 1\}$, préciser ce que deviennent les univers $\mathcal{S}_Y$ et $\mathcal{S}_Z$.

On sait que $X = 1$, ce qui signifie qu'un seul des 5 jetons dans le sac contient un chiffre.

L'univers de Y actualisé par cette nouvelle information, noté $\mathcal{S}_{Y|X=1}$, est alors restreint aux valeurs possibles du nombre de jetons avec un chiffre dans un sous-échantillon de taille 3, sachant que sur les 5 jetons disponibles dans le sac, un seul porte un chiffre. Ainsi, Y ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 :

$$\mathcal{S}_{Y|X=1} = \{0, 1\}.$$

Concernant Z, il s'agit toujours du nombre de jetons avec un chiffre obtenus lors de 10 tirages indépendants avec remise. Cependant, sachant que $X = 1$, il y a maintenant exactement un seul jeton avec un chiffre parmi les 5 jetons présents dans le sac. La probabilité de tirer un jeton avec un chiffre devient alors $p = \frac{1}{5}$, et le nombre de jetons avec un chiffre suit une loi binomiale $(10, \frac{1}{5})$. L'ensemble des valeurs possibles de Z reste inchangé :

$$\mathcal{S}_{Z|X=1} = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}.$$

Ainsi, la connaissance de $X = 1$ restreint l'univers de Y mais ne modifie pas celui de Z, bien que la probabilité des événements associés à Z soit affectée.

Exercice 5:

#5 Donner les probabilités (sous forme de fraction ou approximativement, à une décimale près) de l'événement $\{Y = 1\}$ et $\{Y = 2\}$ (sachant que $\{X = 1\}$). Pour cela on pourra commencer par observer que, sachant que $\{X = 1\}$, le sac est un ensemble du type $\mathcal{S} = \{C, L_1, L_2\}$ et que la Stratégie 1 est une expérience aléatoire équiprobable d'univers $C_3(\mathcal{S})$.

Sachant que $X = 1$, le sac contient un unique jeton portant un chiffre (C) et quatre jetons portant une lettre (L_1, L_2, L_3, L_4). L'ensemble du sac est alors :

$$\mathcal{S}_{\text{sac}|X=1} = \{C, L_1, L_2, L_3, L_4\}.$$

La Stratégie 1 consiste à tirer aléatoirement 3 jetons sans remise parmi ces 5 jetons. Il s'agit donc d'une expérience équiprobable où toutes les combinaisons possibles de 3 jetons parmi 5 ont la même probabilité.

Le nombre total de triplets possibles est donné par le coefficient binomial :

$$|\mathcal{C}_3(S)| = \binom{5}{3} = 10.$$

Nous devons maintenant dénombrer les cas correspondant aux événements $\{Y = 1\}$ et $\{Y = 2\}$. L'événement $\{Y = 1\}$ correspond aux triplets contenant exactement un jeton avec un chiffre et deux jetons avec une lettre. Pour cela, on choisit le jeton C et on sélectionne 2 jetons parmi les 4 lettres:

$$\text{Nombre de cas favorables} = \binom{4}{2} = 6.$$

Ainsi, la probabilité de cet événement est :

$$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{|\ \{\{x, y, z\} \in \mathcal{C}_3(\mathcal{S}_{\text{sac}|x=1}) : x = C\}\ |}{|\ \mathcal{C}_3(\mathcal{S}_{\text{sac}|x=1})\ |} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

L'événement $\{Y = 2\}$ correspond aux triplets contenant exactement 2 jetons avec un chiffre. Or, il n'y a qu'un seul jeton portant un chiffre dans le sac. Il est donc impossible d'obtenir deux jetons avec un chiffre dans un échantillon de taille 3. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(Y = 2 \mid X = 1) = 0.$$

Exercice 6:

#6 Même question pour Z, i.e. donner la probabilité des événements $\{Z = 1\}$ et $\{Z = 2\}$ (sachant que $\{X = 1\}$). On pourra commencer par traduire la Stratégie 2 en une expérience aléatoire et préciser son univers et sa probabilité.

La Stratégie 2 consiste à tirer un jeton du sac avec remise 10 fois de suite. Chaque tirage est indépendant et la probabilité de tirer un jeton avec un chiffre, conditionnellement à l'événement $\{X = 1\}$, est :

$$p = \frac{1}{5}$$

Ainsi, le nombre total de jetons portant un chiffre obtenus après 10 tirages suit une loi binomiale:

$$Z \sim Binomiale(10, \frac{1}{5}).$$

La probabilité que $Z = 1$ signifie que sur les 10 tirages, un seul correspond à un jeton avec un chiffre, tandis que les 9 autres correspondent à un jeton avec une lettre. En utilisant la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(Z = 1 \mid X = 1) = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^9$$

La probabilité que $Z = 2$ signifie que sur les 10 tirages, exactement deux correspondent à un jeton avec un chiffre, et les 8 autres correspondent à un jeton avec une lettre. Par la loi binomiale :

$$\mathbb{P}(Z = 2 \mid X = 1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^8$$

Exercice 7:

On généralise le raisonnement précédent en supposant que $\{X = x\}$ pour un $x \in \mathcal{S}_X$ inconnu mais fixe. Dans une telle situation, la fonction $p_{Y|X=x} : \mathcal{S}_Y \to [0, 1]$ définie par

$$y \in \mathcal{S}_Y, \qquad p_{Y|X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x),$$

est appelée fonction de masse de Y *conditionnellement* à $\{X = x\}$.

#7 En généralisant le raisonnement de la question #5, donner $\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x)$ sous forme d'un tableau du type en gardant les probabilités sous forme exacte (i.e. pas d'approximation).

$\mathbb{P}(Y = y \,\vert\, X = x)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 0$				
$x = 1$				
$x = 2$				
$x = 3$				
$x = 4$				
$x = 5$				

$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 0$	1	0	0	0
$x = 1$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	0	0
$x = 2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	0
$x = 3$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
$x = 4$	0	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$
$x = 5$	0	0	0	1

Exercice: Faire les calculs de votre côté en passant par l'hypothèse d'équiprobabilité, et en ajustant $\mathcal{S}_{Y|X=x}$ et $\mathcal{S}_{\text{sac}|X=x}$ pour chaque choix de x comme à l'exercice 5.

Exercice 8:

#8 Donner la fonction de masse conditionnelle de Z sachant que $\{X = 0\}$, puis, sachant que $\{X = 5\}$.

Sachant que $X = 0$, il n'y a aucun jeton avec un chiffre dans le sac. Chaque tirage donnera nécessairement un jeton avec une lettre, donc $Z = 0$ avec certitude :

$$\mathbb{P}(Z = z \mid X = 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } z = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad z \in \mathcal{S}_Z$$

Sachant que $X = 5$, tous les jetons du sac portent un chiffre. Ainsi, à chaque tirage, un jeton avec un chiffre est obtenu avec probabilité 1, donc $Z = 10$ avec certitude :

$$\mathbb{P}(Z = z \mid X = 5) = \begin{cases} 1, & \text{si } z = 10, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad z \in \mathcal{S}_Z$$

Exercice 9:

#9 Montrer que pour $x \in \{1,2,3,4\}$ la fonction de masse conditionnelle de Z sachant $\{X = x\}$ est donnée par

$$z \in \mathcal{S}_Z, \qquad p_{Z\,|\,X=x}(z) = \binom{x}{z}\left(\frac{x}{5}\right)^z\left(1-\frac{x}{5}\right)^{x-z}.$$

Nous devons montrer que pour $x \in \{1,2,3,4\}$, la fonction de masse conditionnelle de Z sachant $X = x$ est donnée par:

$$\mathbb{P}(Z = z \mid X = x) = \binom{10}{z}\left(\frac{x}{5}\right)^z\left(1-\frac{x}{5}\right)^{10-z}, \quad z \in \mathcal{S}_Z.$$

(Il y avait un typo dans l'énoncé).

La variable aléatoire Z représente le nombre de jetons avec un chiffre obtenus en tirant avec remise 10 fois dans un sac contenant 5 jetons, dont x portent un chiffre et $5-x$ portent une lettre.

Chaque tirage est indépendant et suit une loi de Bernoulli, où la probabilité de tirer un jeton avec un chiffre est :

$$p_x = \frac{x}{5}.$$

Ainsi, Z suit une loi binomiale conditionnellement à $X = x$:

$$Z \mid X = x \sim \mathit{binomiale}(10, \frac{x}{5}).$$

La fonction de masse d'une loi binomiale (n, p) est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \binom{n}{z}p^z(1-p)^{n-z}.$$

En appliquant cette formule avec $n = 10$ et $p = \frac{x}{5}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(Z = z \mid X = x) = \binom{10}{z}\left(\frac{x}{5}\right)^z\left(1-\frac{x}{5}\right)^{10-z}, \quad z \in \mathcal{S}_Z,\ x \in \{1,2,3,4\}.$$

Exercice 10:

On passe à présent à la partie intéressante du problème. Un joueur qui choisit la Stratégie 1 observe l'information $\{Y = y\}$ pour un $y \in \mathcal{S}_Y$ tandis qu'un joueur qui choisit la Stratégie 2 observe l'information $\{Z = z\}$ pour un $z \in \mathcal{S}_Z$. On souhaiterait savoir comment prédire (rationnellement) si l'événement $E = \{$il y'a plus de chiffres que de lettres dans le sac$\}$ est réalisé ou non, étant donné l'information observée. Pour cela, on va commencer par calculer la probabilité de $\{X = x\}$ sachant $\{Y = y\}$ et la probabilité de $\{X = x\}$ sachant $\{Z = z\}$, c'est à dire les fonctions de masse conditionnelles

$$x \in \mathcal{S}_X, \qquad p_{X\,|\,Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y), \qquad p_{X\,|\,Z=z}(x) = \mathbb{P}(X = x \mid Z = z).$$

#10 Quel résultat du cours permet de justifier que pour tout $x \in \mathcal{S}_X$,

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)}{\sum_{x'=0}^{5}\mathbb{P}(Y = y \mid, X = x')\mathbb{P}(X = x')} = \frac{p_{Y\,|\,X=x}(y)p_X(x)}{\sum_{x'=0}^{5}p_{Y\,|\,X=x'}(y)p_X(x')}\,?$$

Il s'agit du théorème de Bayes et la formule des probabilités totales:

Probabilité conditionnelle

Une formule utile qui inverse le conditionnement est dérivée comme suit :

Rappelons-nous que

$$\mathbb{P}(EF) = \mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(EF) = \mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) \ .$$

Formule de Bayes

Si $\mathbb{P}(E) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(EF)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)}$$

et en utilisant la formule des probabilités totales, nous obtenons

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c)\mathbb{P}(F^c)} \ .$$

Florian Maire MAT1978 51 / 61

Il faut juste réaliser que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}\Big(\{Y=y\} \cap \Big(\bigcup_{x'=0}^{5}\{X=x'\}\Big)\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x'=0}^{5}\big(\ \{Y=y\} \cap \{X=x'\}\ \big)\Big) \\
&= \sum_{x'=0}^{5} \mathbb{P}\Big(\ \{Y=y\} \cap \{X=x'\}\ \Big) = \sum_{x'=0}^{5} p_{X,Y}(x',y) \\
&= \sum_{x'=0}^{5} p_{Y|X}(y \mid x')p_X(x')
\end{aligned}$$

Car les événements $\{X=0\}, \{X=1\}, \ \ldots, \ \{X=5\}$ forment une partition de l'univers.

Exercice: Justifier chaque égalité en utilisant les arguments suivants une et une seule fois:

1. Par les axiomes des probabilités (les événements en question sont disjoints entre-eux).
2. En utilisant les opérations ensemblistes de base.
3. Par la définition de la fonction de masse conditionnelle.
4. Par la définiton de la fonction de masse jointe
5. Car $\bigcup_{x'=0}^{5}\{X=x'\}$ recouvre l'univers

Exercice 11:

#11 Compléter les deux tableaux suivants (ne pas faire d'approximation).

$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$y = 0$						
$y = 1$						
$y = 2$						
$y = 3$						

$\mathbb{P}(X = x \mid Z = z)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$z = 0$						
$z = 1$						
$z = 2$						
$\vdots$						
$z = 10$						

Pour le premier tableau, nous illustrons comment calculer la première rangée i.e. nous voulons calculer $P(X = x|Y = 0)$ pour $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Par Bayes, on a que:

$$P(X = x|Y = 0) = \frac{P(Y = 0|X = x)P(X = x)}{P(Y = 0)}, \; x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Rappelons les éléments nécessaires:

$$P(Y = 0|X = x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{4}{10}, & x = 1 \\ \frac{1}{10}, & x = 2 \\ 0, & x = 3 \\ 0, & x = 4 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

Les probabilités de X (loi hypergéométrique) sont:

$$P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{5}{5-x}}{\binom{10}{5}}$$

Les valeurs exactes sont :

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{252}, & x = 0 \\ \frac{25}{252}, & x = 1 \\ \frac{100}{252}, & x = 2 \\ \frac{100}{252}, & x = 3 \\ \frac{25}{252}, & x = 4 \\ \frac{1}{252}, & x = 5 \end{cases}$$

Il suit que

$$P(Y = 0) = \sum_{x=0}^{5} P(Y = 0|X = x)P(X = x)$$

$$= 1 \times \frac{1}{252} + \frac{4}{10} \times \frac{25}{252} + \frac{1}{10} \times \frac{100}{252} + 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{12}$$

Enfin, on a que

$$P(X=0|Y=0) = \frac{1 \times \frac{1}{252}}{\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{252}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{252} \times \frac{12}{1} = \frac{1}{21} \approx 0.0476$$

$$P(X=1|Y=0) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{25}{252}}{\frac{1}{12}} = \frac{10}{21} \approx 0.4762$$

$$P(X=2|Y=0) = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{100}{252}}{\frac{1}{12}} = \frac{10}{21} = 0.4762$$

$$P(X=3|Y=0) = P(X=4|Y=0) = P(X=5|Y=0) = 0$$

Il faut répéter la même démarche pour toutes les valeurs de $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Nous pouvons continuer avec un programme python comme le suivant de façon à ne pas perdre notre temps:

```
import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.special import comb
import ace_tools as tools

# Definition de X et ses valeurs possibles
S_X = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5])

# Definition de la loi hypergeometrique de X
def hypergeom_pmf(x):
    return (comb(5, x) * comb(5, 5 - x)) / comb(10, 5)

# Calcul des probabilites de X
P_X = np.array([hypergeom_pmf(x) for x in S_X])

# Matrice de probabilite conditionnelle P(Y | X) (exercice 7)
P_Y_given_X = np.array([
    [1, 0, 0, 0],      # x = 0
    [4/10, 6/10, 0, 0],   # x = 1
    [1/10, 6/10, 3/10, 0],   # x = 2
    [0, 3/10, 6/10, 1/10],   # x = 3
    [0, 0, 6/10, 4/10],   # x = 4
    [0, 0, 0, 1]      # x = 5
])

# Calcul des probabilites totales de Y
P_Y = P_Y_given_X.T @ P_X

# Application du theoreme de Bayes pour P(X | Y)
P_X_given_Y = (P_Y_given_X * P_X[:, None]) / P_Y

# Creation du tableau pour P(X | Y)
df_X_given_Y_corrected = pd.DataFrame(P_X_given_Y.T, index=["y = 0", "y = 1"
    , "y = 2", "y = 3"],
                                      columns=["x = 0", "x = 1", "x = 2", "x
    = 3", "x = 4", "x = 5"])

# Affichage du tableau
tools.display_dataframe_to_user(name="Tableau P(X | Y)", dataframe=
    df_X_given_Y_corrected)
```

		x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
1	y = 0	0.047619047619047616	0.47619047619047616	0.47619047619047616	0.0	0.0	0.0
2	y = 1	0.0	0.14285714285714285	0.5714285714285714	0.2857142857142857	0.0	0.0
3	y = 2	0.0	0.0	0.2857142857142857	0.5714285714285714	0.14285714285714285	0.0
4	y = 3	0.0	0.0	0.0	0.47619047619047616	0.47619047619047616	0.047619047619047616

En adaptant légèrement le code, on obtient $\mathbb{P}(X = x \mid Z = z)$:

		x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
1	z = 0	0.232584933319202	0.6243404263426962	0.14063521513027127	0.002438829790401157	5.954174292971558e-07	0.0
2	z = 1	0.0	0.6157141649207528	0.36984563928635167	0.014430800740330138	9.395052565319079e-06	0.0
3	z = 2	0.0	0.3646074416948551	0.5840306213281109	0.05127292148833901	8.901548869503283e-05	0.0
4	z = 3	0.0	0.16342164060006392	0.6980529843600382	0.13788700925630387	0.0006383657835939989	0.0
5	z = 4	0.0	0.05709188224799281	0.6503122212310435	0.2890276538804642	0.0035682426404995493	0.0
6	z = 5	0.0	0.015936254980079678	0.4840637450199203	0.4840637450199203	0.01593625498007966	0.0
7	z = 6	0.0	0.0035682426404995585	0.28902765388046414	0.6503122212310435	0.05709188224799279	0.0
8	z = 7	0.0	0.0006383657835940001	0.13788700925630387	0.6980529843600383	0.16342164060006384	0.0
9	z = 8	0.0	8.901548869503301e-05	0.051272921488339014	0.5840306213281109	0.3646074416948551	0.0
10	z = 9	0.0	9.395052565319101e-06	0.01443080074033014	0.36984563928635167	0.6157141649207529	0.0
11	z = 10	0.0	5.954174292971576e-07	0.0024388297904011577	0.1406352151302713	0.6243404263426964	0.23258493331920205

Remarque: Le Professeur ne demanderait jamais un exercice calculatoire comme celui-ci en examen car vous n'avez pas le droit à la calculatrice.

Exercice 12:

#12 Justifier qu'un individu rationnel utilisant la Stratégie 1 qui observe $\{Y = y\}$ prédira que l'événement

$$E = \{\text{il y'a plus de chiffres que de lettre(s) dans le sac}\} = \{X > 2\}$$

se produit si $\mathbb{P}(E \mid Y = y) = \mathbb{P}(X > 2 \mid Y = y) \geq 0.5$. De manière similaire, un individu rationnel utilisant la Stratégie 2 qui observe $\{Z = z\}$ prédira que E se produit si $\mathbb{P}(X > 2 \mid Z = z) \geq 1/2$.

Lorsqu'un individu rationnel observe une réalisation $Y = y$, la meilleure estimation de l'état du sac repose sur la probabilité conditionnelle :

$$P(E|Y = y) = P(X > 2|Y = y).$$

L'individu rationnel adoptera la règle de décision suivante :

- Si $P(X > 2|Y = y) \geq 0.5$, alors il prédira que E s'est produit (c'est-à-dire que $X > 2$).
- Sinon, il prédira que $X \leq 2$.

L'interprétation est qu'un individu rationnel adoptera la prédiction qui minimise le risque d'erreur en choisissant l'état $X > 2$ lorsqu'il est plus probable que son complémentaire.

De manière similaire, un individu qui observe une réalisation $Z = z$ mettra à jour sa croyance sur X en utilisant la probabilité conditionnelle :

$$P(E|Z = z) = P(X > 2|Z = z).$$

L'individu rationnel suivra la même règle de décision :

- Si $P(X > 2|Z = z) \geq \frac{1}{2}$, alors il prédira que $X > 2$.
- Sinon, il prédira que $X \leq 2$.

Dans les deux cas, cette règle de décision minimise la probabilité d'erreur en prédisant l'événement le plus probable.

Exercice 13:

#13 Donner pour chaque $y \in \mathcal{S}_Y$ et $z \in \mathcal{S}_Z$, la règle de décision pour les deux stratégies.

L'individu rationnel décide que $X > 2$ si la probabilité conditionnelle :

$$P(X > 2|Y = y) = P(X = 3|Y = y) + P(X = 4|Y = y) + P(X = 5|Y = y)$$

est supérieure ou égale à 0.5.

On obtient ainsi la règle de décision pour la Stratégie 1:

$$d_1(y) = \begin{cases} \text{Prédire } E \text{ (i.e. } X > 2) \text{ si } \sum_{x=3}^{5} P(X = x|Y = y) \geq 0.5, \\ \text{Prédire } E^c \text{ (i.e. } X \leq 2) \text{ sinon.} \end{cases}$$

De manière similaire, pour un individu utilisant la Stratégie 2, la meilleure prédiction repose sur la règle de décision pour la Stratégie 2 suivante:

$$d_2(z) = \begin{cases} \text{Prédire } E \text{ (i.e. } X > 2) \text{ si } \sum_{x=3}^{5} P(X = x|Z = z) \geq 0.5, \\ \text{Prédire } E^c \text{ (i.e. } X \leq 2) \text{ sinon.} \end{cases}$$

En ajoutant ce bout de code à notre programme antérieur:

```
# Calcul de P(X > 2 | Y = y)
P_X_gt_2_given_Y = df_X_given_Y_corrected.loc[:, ["x = 3", "x = 4", "x = 5"
    ]].sum(axis=1)

# Calcul de P(X > 2 | Z = z)
P_X_gt_2_given_Z = df_X_given_Z_corrected.loc[:, ["x = 3", "x = 4", "x = 5"
    ]].sum(axis=1)

# Determination des decisions
decision_Y = ["Predire E" if p >= 0.5 else "Ne pas predire E" for p in
    P_X_gt_2_given_Y]
decision_Z = ["Predire E" if p >= 0.5 else "Ne pas predire E" for p in
    P_X_gt_2_given_Z]

```

```
# Creation du tableau
df_decision_Y = pd.DataFrame({"P(X > 2 | Y = y)": P_X_gt_2_given_Y, "Decision": decision_Y}, index=P_X_gt_2_given_Y.index)
df_decision_Z = pd.DataFrame({"P(X > 2 | Z = z)": P_X_gt_2_given_Z, "Decision": decision_Z}, index=P_X_gt_2_given_Z.index)

# Affichage des tableaux
tools.display_dataframe_to_user(name="Tableau decision P(X > 2 | Y)", dataframe=df_decision_Y)
tools.display_dataframe_to_user(name="Tableau decision P(X > 2 | Z)", dataframe=df_decision_Z)
```

Ce qui nous donne:

		P(X > 2 | Y = y)	Décision
1	y = 0	0.0	Ne pas prédire E
2	y = 1	0.2857142857142857	Ne pas prédire E
3	y = 2	0.7142857142857142	Prédire E
4	y = 3	1.0	Prédire E

Et:

		P(X > 2 | Z = z)	Décision
1	z = 0	0.002439425207830454	Ne pas prédire E
2	z = 1	0.014440195792895457	Ne pas prédire E
3	z = 2	0.05136193697703404	Ne pas prédire E
4	z = 3	0.13852537503989787	Ne pas prédire E
5	z = 4	0.29259589652096374	Ne pas prédire E
6	z = 5	0.49999999999999994	Ne pas prédire E
7	z = 6	0.7074041034790363	Prédire E
8	z = 7	0.8614746249601021	Prédire E
9	z = 8	0.948638063022966	Prédire E
10	z = 9	0.9855598042071045	Prédire E
11	z = 10	0.9975605747921698	Prédire E

Exercice 14:

#14 Justifier pourquoi il faut (et il suffit) de comparer les probabilités

$$\alpha_1 = \mathbb{P}(\{Y > 1\} \cap \{X \leq 2\}), \qquad \alpha_2 = \mathbb{P}(\{Z \geq 5\} \cap \{X \leq 2\}),$$

interpréter et calculer les probabilités α_1 et α_2 et conclure.

La quantité $P(X \leq 2|Y > 1)$ représente la probabilité que $X \leq 2$ sachant que $Y > 1$, c'est-à-dire que l'on observe plus d'un jeton avec un chiffre dans l'échantillon de la Stratégie 1.

De même, $P(X \leq 2|Z \geq 5)$ est la probabilité que $X \leq 2$ sachant que l'on observe au moins 5 jetons avec un chiffre dans la Stratégie 2.

Un critère rationnel pour juger la pertinence des deux stratégies est de comparer la probabilité que l'on surestime la quantité de jetons avec un chiffre dans le sac, c'est-à-dire la probabilité de prédire à tort $X > 2$ alors que $X \leq 2$. Cela correspond à comparer :

$$\alpha_1 = P(Y > 1 \cap X \leq 2) = \sum_{x \leq 2} \sum_{y > 1} P(X = x, Y = y)$$

$$\alpha_2 = P(Z \geq 5 \cap X \leq 2) = \sum_{x \leq 2} \sum_{z \geq 5} P(X = x, Z = z)$$

Si $\alpha_2 > \alpha_1$, cela signifie que la Stratégie 2 est plus susceptible de donner une fausse indication de $X > 2$, et donc qu'elle est moins fiable pour cette prédiction.

En utilisant le code suivant:

```python
# Calcul de la fonction de masse jointe P(X, Y)
P_XY = P_X[:, None] * P_Y_given_X

# Calcul de alpha_1
P_Y_gt_1_X_le_2 = P_XY[:3, 2:].sum()
alpha_1 = P_Y_gt_1_X_le_2

# Calcul de la fonction de masse jointe P(X, Z)
P_XZ = P_X[:, None] * P_Z_given_X

# Calcul de alpha_2
P_Z_ge_5_X_le_2 = P_XZ[:3, 5:].sum()
alpha_2 = P_Z_ge_5_X_le_2

# Creation du tableau des probabilit s alpha_1 et alpha_2
df_alpha_corrected = pd.DataFrame({"Valeur": [alpha_1, alpha_2]}, index=[r"
    alpha_1", r"alpha_2"])

# Affichage des r sultats
tools.display_dataframe_to_user(name="Tableau des probabilites alpha_1 et
    alpha_2", dataframe=df_alpha_corrected)
```

Nous obtenons les valeurs:

$$\alpha_1 \approx 0.1190 \quad \alpha_2 \approx 0.1488$$

La valeur de α_2 est légèrement supérieure à celle de α_1, ce qui indique que la Stratégie 2 (tirage avec remise) surestime plus souvent la quantité de chiffres dans le sac par rapport à la Stratégie 1. Cependant, l'écart étant relativement faible, cela suggère que la différence entre les deux stratégies en termes de fiabilité n'est pas drastique, bien qu'il y ait une légère tendance en faveur de la Stratégie 1 pour éviter la surestimation.

Ainsi, la Stratégie 1 est un peu plus robuste pour détecter si $X > 2$.

Partie B:

Exercice 1:

Partie B Ces questions rapides (et un peu difficiles) sont toutes relatives à une variable aléatoire X d'univers $\mathcal{S}_X$ et de fonction de masse p_X. L'expérience aléatoire sous-jacente sur laquelle est définie X n'est pas spécifiée.

#1 Donner un exemple (i.e. spécifier $\mathcal{S}_X$ et p_X) de v.a. X telle que p_X soit décroissante.

$$\mathcal{S}_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{si } x = 0 \\ 0.3 & \text{si } x = 1 \\ 0.2 & \text{si } x = 2 \\ 0.1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Exercice 2:

#2 Donner un exemple de v.a. tel que $\mathcal{S}_X = \mathbb{Z}$ et $p_X(x) = p_X(-x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.

$$p_X(x) = \begin{cases} k \times \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{Z}^* \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

Où k est une constante de normalisation. Trouvons cette constante, il faut que:

$$p_X(0) + \sum_{x=-1}^{-\infty} p_X(x) + \sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) = 1$$

$$\iff \quad p_X(0) + 2k\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1, \quad \text{par la parité de la fonction } \frac{1}{x^2}$$

$$\iff \quad 2k\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad k\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\iff \quad k = \frac{1}{4\left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{4 \times \frac{\pi^2}{6}} = \frac{3}{2\,\pi^2}$$

Exercice 3:

#3 Est-il possible que $\mathcal{S}_X$ soit dénombrable non fini et que p_X soit croissante?

Il est impossible. Supposons par l'absurde qu'un tel S_X infini dénombrable et une telle fonction de masse p_X strictement croissante existent. Autrement dit, posons:

- $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ un ensemble dénombrable infini;
- $p_X(x_1) < p_X(x_2) < p_X(x_3) < \cdots$ (strictement croissant);
- $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$.

Pour qu'une suite de nombres réels non négatifs $\big(p_X(x_i)\big)_{i\geq 1}$ soit sommable et converge vers 1, il est nécessaire (bien que pas toujours suffisant) qu'elle *tende vers zéro*, c'est-à-dire

$$\lim_{i\to\infty} p_X(x_i) = 0.$$

En effet, si la limite d'une suite à termes positifs est strictement positive, la série diverge. Or ici, nous avons que la suite $\big(p_X(x_i)\big)_{i\geq 1}$ est strictement *croissante*, donc nécessairement:

$$p_X(x_1) < p_X(x_2) < p_X(x_3) < \cdots$$

Cette propriété interdit à la suite de *décroître* vers 0. En particulier, il est impossible qu'elle converge vers 0 en étant strictement croissante (et restant positive).

1. Si $\big(p_X(x_i)\big)_{i\geq 1}$ est strictement croissante et à valeurs non négatives, alors elle est soit (a) divergente vers $+\infty$, soit (b) converge vers une limite $L > 0$. Dans tous les cas, $p_X(x_i)$ *ne peut* tendre vers 0.
2. Or pour être la fonction de masse d'une variable aléatoire (sur un support infini), il faut que $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i)$ *converge* et soit égale à 1.
3. Une condition nécessaire à la convergence d'une série de termes strictement positifs est que les termes tendent vers 0. Comme ici ils ne tendent pas vers 0 (car la suite est strictement croissante), la série ne peut pas converger.

Ce raisonnement entraîne une contradiction avec le fait que $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$. On en conclut qu'une fonction de masse *strictement croissante* sur un ensemble dénombrable *infini* est impossible.

Exercice 4:

#4 Est-il possible que $\mathcal{S}_X = [0,1] \cap \mathbb{Q}^2$ et que p_X soit constante?

$$\mathcal{S}_X = [0,1] \cap \mathbb{Q} \implies |\ \mathcal{S}_X\ | = \infty$$

Supposons par l'absurde que p_X est constante sur $\mathcal{S}_X$. Puisque la fonction de masse est sujet à la contrainte $\sum\limits_{x\in\mathcal{S}_X} p_X(x) = 1$, cela implique que $p_X(x) = \frac{1}{|\mathcal{S}_X|} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{S}_X$, ce qui mène à une contradiction car on aurait que $\sum\limits_{x\in\mathcal{S}_X} p_X(x) = 0 \neq 1$.

Exercice 5:

#5 Soit $\mathcal{S}_X = \{k\pi/6 \ : \ k \in \{0, 1, \dots, 6\}\}$ et p_X constante sur $\mathcal{S}_X$. Soit $Y = \cos(X)$ si $X \neq 0$ et $Y = 10$ si $X = 0$. Donner l'univers de Y noté $\mathcal{S}_Y$ et sa fonction de masse p_Y.

$$\mathcal{S}_Y = \{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 10\}$$

La variable aléatoire Y est une fonction de X telle que:

$$Y = f(X) = \begin{cases} \cos(X), & X \neq 0 \\ 10, & X = 0 \end{cases}$$

On constate que la *restriction* de f à $\mathcal{S}_X$ est bijective sur $\mathcal{S}_Y$. Par conséquent, si X est uniforme sur $\mathcal{S}_X$, on obtient pour tout $y \in \mathcal{S}_Y$:

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\big(X = \arccos(y)\big) = \frac{1}{|\mathcal{S}_X|} = \frac{1}{|\mathcal{S}_Y|} = \frac{1}{7}$$

Exercice 6:

#6 Soit $\lambda > 0$. L'ensemble $\mathcal{S}_X = \mathbb{N}^3$ et la fonction

$$x \in \mathcal{S}_X, \qquad p_X(x) = \lambda^x \frac{e^x}{x!}.$$

définissent-ils bien l'univers et la fonction de masse d'une v.a. X?

Oui, si on règle le petit typo:

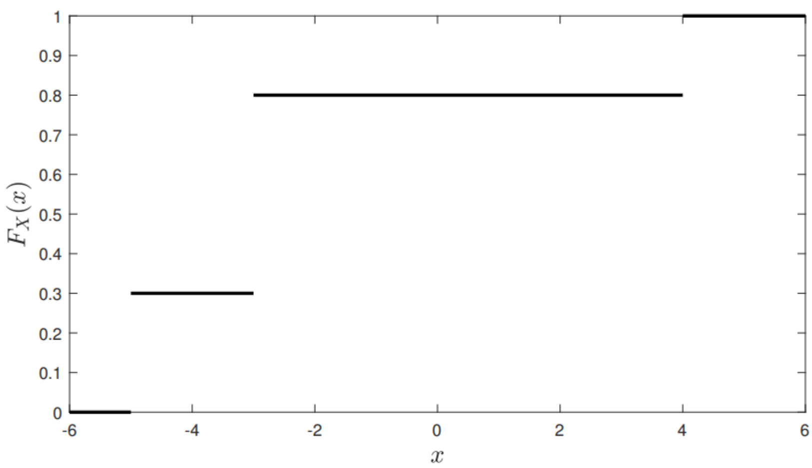
$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

On constante que X suit la loi de $Poisson(\lambda)$, qui définit bien une v.a. valide.

Exercice: Vérifiez que $0 \leq p_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \{0, 1, 2, ...\}$ et que $\sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = 1$, rendant X une v.a. valide.

Exercice 7:

#7 Que peut on dire sur la v.a. X dont la fonction de répartition est illustrée par le graphique suivant?



Nous constatons que:

$$\mathcal{S}_X = \{-5, -3, 4\}$$

Et que:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0.3 & \text{si } x = -5 \\ 0.5 & \text{si } x = -3 \\ 0.2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

Remarque: Dans le cas général, si on connait la fonction de répartition d'une variable aléatoire, nous pouvons en déduire son univers et sa fonction de masse.