#1 Cadre : une classe de "Probabilités et statistique" comporte 70 étudiants. Un examen a lieu et les étudiants sont classés selon leur performance. Nous faisons l'hypothèse que les étudiants ont tous obtenu des résultats différents. De plus, chaque étudiant est identifié (de manière arbitraire) à un entier de l'ensemble $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 70\}$ si bien que chaque entier correspond à un et un unique étudiant.

(a) L'expérience aléatoire consiste à s'intéresser au classement des 70 étudiants. Donner l'univers de l'expérience aléatoire en fonction de $\mathcal{S}$ et en déduire la taille de l'univers.

(b) Proposer un ensemble d'événements $\mathcal{E}$ pour cette expérience aléatoire.

(c) En absence d'information sur les étudiants, on suppose que tous les classements possibles sont équiprobables. Quelle est la probabilité que chaque étudiant apparaisse dans le classement au rang correspondant à l'entier qui lui a été arbitrairement assigné.

#2 Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ une permutation donnée d'un ensemble $\mathcal{S}$ (avec donc $|\mathcal{S}| = n$). On appelle *dérangements* de la permutation v, le sous-ensemble de Partition($\mathcal{S}$), noté Dérangement(v), tel que

$$\forall u = (u_1, \ldots, u_n) \in \text{Dérangement}(v)\,, \qquad u_i \neq v_i \;\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Par exemple si $\mathcal{S} = \{a, b, c, d\}$ et $v = (a, b, c, d)$ alors

$$\text{Dérangement}(v) = \{(b,a,d,c)\,;\,(b,c,d,a)\,;\,\underline{(b,d,a,c)}\,;\,(c,a,d,b)\,;\,(c,d,a,b)\,;\,(c,d,b,a)\,;\,(d,a,b,c)\,;\,(d,c,a,b)\,;\,(d,c,b,a)\}$$

[Note : Le vecteur souligné contenait une typo dans la version précédente.]

On peut montrer que le nombre de dérangements possibles de v (i.e. |Dérangement(v)|) est donné par l'entier le plus proche de $n!/e$ avec e le nombre d'euler, i.e. $e = \exp(1) = 2.71828....$ Cet entier est parfois appelé le sous-factoriel de n et noté $!n$.

(a) À l'aide de la formule ci-dessus (et sans ordinateur/calculatrice), trouver l'entier a tel que $4!/e \in (a - 1/2, a + 1/2)$.

(b) En reprenant l'expérience aléatoire de la question #1, et en utilisant ce qui précéde, dire (sans ordinateur/calculatrice) lequel des deux événements suivants est le plus probable :

E = {chaque étudiant apparaît dans le classement au rang correspondant à l'entier qui lui a été arbitrairement assigné}

F = {aucun étudiant n'apparaît dans le classement au rang correspondant à l'entier qui lui a été arbitrairement assigné}.

#3 On reprend le cadre de la question #1 en le modifiant : chaque étudiant est inscrit soit dans le programme "régulier" soit dans le programme "COOP". En particulier, il y'a 15 étudiants COOP et le reste dans le programme régulier. À chaque étudiant COOP est assigné une lettre arbitraire $\mathcal{S}_1 = \{a, b, \ldots, m, n, o\}$ et à chaque étudiant régulier un nombre arbitraire $\mathcal{S}_2 = \{1, \ldots, 55\}$. On suppose encore que les étudiants ont tous obtenu des résultats différents.

(a) L'expérience aléatoire consiste à s'intéresser aux classements possibles avant que le cours ne commence. On suppose que l'expérience aléatoire est équiprobable.
   - Donner l'univers de l'expérience aléatoire en fonction de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.
   - Quelle est la probabilité qu'aucun étudiant COOP ne termine à un rang inférieur à un étudiant régulier?

(b) On suppose maintenant qu'à l'issue du cours deux classements sont produits : un pour les étudiants COOP exclusivement et un autre pour les étudiants réguliers exclusivement. L'expérience aléatoire consiste à s'intéresser aux classements possibles avant que le cours ne commence. Donner l'univers et la taille de l'univers de cette expérience aléatoire.

#4 Cadre : on mélange un jeu de 52 cartes (usuel) et on place toutes les cartes en une pile. On ne voit que le dos de la carte du dessus de la pile. L'expérience aléatoire consiste à prendre la carte du dessus puis la retourner face apparente, puis faire de même pour le seconde, puis pour la troisième, etc. puis une cinquième puis la retourne face apparente. L'expérience aléatoire est équiprobable et l'ordre des cartes compte.

(a) Donner l'univers de l'expérience aléatoire.

(b) On considère l'événement

$$B = \{\text{les deux premières cartes ont le même nombre et les trois dernières cartes ont le même nombre}\}$$

et par nombre, on entend $\{\text{deux}, \ldots, \text{dix}, \text{valet}, \text{dame}, \text{roi}, \text{as}\}$.

- Donner un exemple d'élément de B.
- Donner la probabilité de B.

#5 Nous avons vu en classe, comment utiliser les techniques de dénombrement pour trouver combien de solutions non-négatives l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17$$

a-t-elle de solutions. En adaptant la méthode, trouver le nombre de solutions (x_1, x_2, x_3) que possède

(a) l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, telles que $\min(x_1, x_2, x_3) > 0$,

(b) l'inéquation $x_1 + x_2 + x_3 \leq 17$, telles que $\min(x_1, x_2, x_3) \geq 0$,

(c) l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, telles que $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$.

#6 Soit n un nombre entier positif pair. L'expérience aléatoire consiste à piger sans remise des couples d'entiers parmi les entiers $\{1, \ldots, 2n\}$ jusqu'à ce que tous les nombres soient pigés. L'ordre n'apparition des couples n'est pas important et l'ordre dans les couples n'est pas important. L'expérience aléatoire est équiprobable.

(a) Proposer un élément de l'univers de cette expérience aléatoire pour $n = 4$.

(b) Soit D l'événement que, pour tous les couples pigés aient la même parité. Donner un élément de D pour $n = 4$ et calculer la probabilité de D en fonction de n.

#7 On considère un dé à six faces numérotées $\{1, 2, \ldots, 6\}$ (sans biais). L'expérience aléatoire consiste à lancé le dé n fois de suite et à reporter la somme des dés obtenus. On considère deux familles d'événements, pour $n \in \mathbb{N}$:

- $A_n = \{\text{la somme des dés est inférieure ou égale à 9 aprés } n \text{ lancés}\}$,
- $B_n = \{\text{la somme des dés est strictement supérieure à 6 aprés } n \text{ lancés}\}$.

(a) Donner l'univers de l'expérience aléatoire et sa taille en fonction de n.

(b) Quelle est la probabilité de A_3? Même question pour A_{10}.

(c) Donner la probabilité de A_3, conditionnellement à B_3.