Feuille de notes pour quiz #1 :

S : l'univers. contient un ensemble d'objects non ordonnées, dénombrables et fini

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $|S| = n$

* tous les cas possibles d'une expérience.

E : évènements : des sous-ensembles de S.

les évènements peuvent être unis ($\cup$) ou intersecté ($\cap$) pour former de nouveau ensembles.

$E \subset F$: E est un sous-ensemble de l'ensemble F

union et intersection sont commutatifs, associatifs et distributif

$P(S)$: ensemble de parties d'un ensemble.
↳ ensemble de tous les sous-ensembles de S.

· contient tjrs l'ensemble $\emptyset$

$\boxed{\cdot\ |P(S)| = 2^{|S|}}$ ($|S| \to n$)

$\mathbb{P}(A)$: probabilité de l'évènement A. $= \frac{|A|}{|S|}$

Axiomes de probabilité : pour chaque évènement E, la fonction de probabilité doit satisfaire les 3 axiomes :

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$: chaque évèn. E est assigné un réel entre 0 et 1

2. $\mathbb{P}(S) = 1$: $\to \mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$

3. Pour tout $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ t.q $E_i \cap E_j = \emptyset$ (disjoint)
$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

Quelques propriétés :

- si $E \subset F$, alors $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

Expérience aléatoire équiprobable :

tous les éléments de l'univers ont la même probabilité

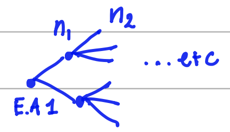
expérience aléatoire $(S, \mathcal{E})$

$\forall s \in S$, $\mathbb{P}(\{s\}) = \frac{1}{n}$

Dénombrement :

Principe généralisé du dénombrement

Supposons que r expériences seront menées. Si la première expérience peut mener à l'un de n_1 résultats possibles et si, pour chacun des n_1 résultats de la première expérience il existe n_2 résultats possibles de la deuxième expérience et si, pour chacun des $n_1 \times n_2$ résultats des deux premières expériences il existe n_3 résultats possibles de la troisième expérience, et ainsi de suite pour les r expériences, alors il existe un total de $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$ résultats possibles pour les r expériences.



$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$ résultats possibles pour les r expériences

Le produit cartésien :

noté $S \times S$ pour l'univers avec lui même

$S = \{(s, s') \mid s \in S \text{ et } s' \in S\}$

il donne les cas possibles pour une expérience aléatoire d'univers S qui est répété deux fois de suite.

$\boxed{\cdot\ |S \times S| = n^2}$

Permutation :

· nbr d'arrangement ordonnés possibles formé de 'n' éléments.

Perm(S) : contient tous les vecteurs de taille 'n' (ORDRE COMPTE) où chaque élément de S apparaît une et une seule fois. (sans remise) *

$\boxed{\cdot\ |\text{Perm}(S)| = n!}$

Arrangement:

Arrangement de 'p' éléments de S noté $A_p(S)$ $(p \leq n)$ contient tous les vecteurs de taille p possibles avec les éléments de S

ORDRE COMPTE

chaque élément de S apparaît au plus une fois

* (sans remise)

★ $A_n(S) = Perm(S)$

$$\boxed{|A_p(S)| = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Permutations d'éléments indistinguables :

- cmb de permutations possibles de 'n' éléments si parmi ses 'n' éléments certains se répètent (sont identiques) n_1 fois et un autre n_2 fois, alors le nombre de perm. doit être divisé par la multiplication de la factorielle de ces nombres de répétitions

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}}$$

voir page 32 pdf pour un exemple.

Combinaison:

- Combinaisons de p éléments de S noté $C_p(S)$ t.q $(p \leq n)$ contient tous les sous-ensembles de cardinalité p (qui contiennent 'p' éléments de S)

PAS D'ORDRE

- chaque élément de S apparaît au plus une fois

* (sans remise)

* exemple: tirage de 'p' éléments stimultanément

$$\boxed{|C_p(S)| = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

* $\binom{n}{n} = 1$
* $0! = 1$

Chaque séquence de longueur k possède k permutations d'elle-même, et chacune de ces permutations définit le même sous-ensemble de S.

permet d'ignorer l'ordre (principe des éléments indistinguables)

Théorème du binôme:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n = C_p(S) = |\mathcal{P}(S)|$$

Partition:

- une partition de S que nous appelerons "R" est un ensemble de sous-ensembles qui est caractérisé par les choses suivantes:
  - $\emptyset \notin R$
  - L'union des éléments de R est S
  - Les éléments de R sont deux à deux disjoints $(r_1 \cap r_2 = \emptyset)$

exemple:

si $S = \{a,b,c,d,e\}$

$[\{a,b\},\{c,d\},\{e\}]$ est une partition de S

$[\{a,b,c\},\{d,e\}]$ est une partition de S

$[\{a,b,c,d,e\},\{a\}]$ ✗ pas une partition car éléments non-disjoints deux à deux

$[\{a,b,c,d,e\}]$ est une partition de S

$n_1, n_2, \dots n_d$ $(\in \mathbb{R}^+)$ t.q $n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$

$$Part_{n_1,n_2\dots n_d}(S)$$

Ex: $S = \{a,b,c\}$

$Part_{1,1,1}(S) = \{[\{a\},\{b\},\{c\}]\}$ $\quad 1+1+1 = n = 3$ $\quad d = 3$

$Part_{2,1}(S) = \{[\{a,b\},\{c\}],[\{a,c\},\{b\}],[\{b,c\},\{a\}]\}$ $\quad 2+1 = n = 3$ $\quad d = 2$

$Part_{3}(S) = \{[\{a,b,c\}]\}$ $\quad 3 = n$ $\quad d = 1$

suite →

* si les n_k sont tous différents
(les blocs dans la partition sont de tailles différentes)

$$\boxed{\mathrm{Part}_{n_1, n_2, \dots, n_d}(S) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_d!}}$$

* si certains blocs ont la même taille,
d' : nbr de tailles différentes
$n_1', n_2', \dots n_{d'}'$: les tailles
m_k : nbr de blocs de taille n_k'

$\Rightarrow n_1' m_1 + n_2' m_2 + \dots + n_{d'}' m_{d'} = n$

$$\boxed{\mathrm{Part}_{n_1, n_2, \dots, n_d}(S) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_d! m_1! m_2! \dots m_{d'}!}}$$

Problème: Thm des étoiles

$x_1 + x_2 + x_3 = 17$

· cmb de façons peut-on distribuer 'n' objects dans 'k' groupes et $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^{+*}$

n étoiles $= 17$

$* \; * \; | \dots \; * \; \dots | \; * \dots$ K-1 barres $= 3-2=1$

Le problème devient un arrangement de $n+k-1$ symboles où il faut choisir les n positions des étoiles, ou inversement, les $k-1$ positions des barres.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

$$= \binom{19}{2} = \frac{19!}{2!17!} = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

Multi-ensemble :

· collection d'objects non ordonné, mais telle que chaque objet peut être présent plusieurs fois.

ex: $S = \{a, b, a, b\}$

les résultats de dénombrement ne marchent pas avec S.

* Si on souhaite faire une permutation, il faut divisé par le factoriel du nombre de fois que chaque élément est répété.

Probabilité conditionnelle :

· $\mathbb{P}(B|A)$: probabilité conditionnelle de l'événement B, étant donné l'événement A.

$\mathbb{P}(A) > 0$,

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(A)}}$$

$$\|$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}$$

Intuition : Si l'événement F s'est produit, alors pour que l'événement E se produise, il est nécessaire que les événements E et F se produisent tous les deux à la fois, d'où l'intersection au numérateur. Si l'événement F s'est produit, alors F est le nouvel univers.

Formule des probabilités totales :

$E, F \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap (F \cup F^c))$$
$$= \mathbb{P}((E \cap F) \cup (E \cap F^c))$$
$$= \underline{\mathbb{P}(E \cap F)} + \underline{\mathbb{P}(E \cap F^c)}$$
$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c) \cdot \mathbb{P}(F^c)$$

Cette formule peut être généralisée. Supposons que $\cup_{i=1}^n F_i = \mathcal{S}$ et que $F_i \cap F_j = \emptyset$ (autrement dit $F_1, F_2, \dots, F_n$ forment une partition de $\mathcal{S}$), alors

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E|F_i)\mathbb{P}(F_i) .$$

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E|F)\,\mathbb{P}(F)$$

inversement du conditionnement

$$\boxed{\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F|E)\,\mathbb{P}(E)}$$

Formule de Bayes:

si $\mathbb{P}(E) \neq 0$

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E|F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)}$$

et en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F)\cdot\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c)\cdot\mathbb{P}(F^c)$$

on obtiens,

$$\boxed{\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E|F)\cdot\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E|F)\cdot\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c)\,\mathbb{P}(F^c)}}$$

Pour n évènements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

Formule de probabilité de l'union (ou d'addition)

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \cancel{\mathbb{P}(E \cap F)}$$

$$\mathbb{P}(E \cup F) \leq \underbrace{\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)}_{\text{ici on compte deux fois la probabilité de l'intersection.}}$$

* C'est cependant une égalité stricte si E et F sont disjoints. $\boxed{E \quad F}$

Évènements indépendants:

· Ssi E et F sont des évènements indépendants ($E \perp\!\!\!\perp F$) alors,

$$\boxed{\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(F)}$$

si $\mathbb{P}(F) \neq 0$, alors

$$\boxed{\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)}$$

Par conséquent, le fait de savoir que l'événement F s'est produit ne change pas la probabilité de l'événement E.

Ex:

Exemple

Nous pigeons une carte d'un jeu de 52 cartes. En comptant les événements, nous réalisons que

$$\frac{3}{13}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{Figure}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}, \qquad \mathbb{P}(\text{Figure et Coeur}) = \frac{3}{52}$$

$$\mathbb{P}(\text{Coeur}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(\text{Figure} \mid \text{Coeur}) = \frac{3}{13}\frac{\cdot 4}{\cdot 4} = \frac{12}{52}$$

Nous voyons donc que

$$\mathbb{P}(\text{Figure et Coeur}) = \mathbb{P}(\text{Figure})\cdot\mathbb{P}(\text{Coeur}) = \frac{3}{52}.$$

Par conséquent, les événements "Figure" et "Coeur" sont indépendants. Ceci implique que

$$\mathbb{P}(\text{Figure} \mid \text{Coeur}) = \mathbb{P}(\text{Figure}) = \frac{3}{13}.$$

Feuille de note quiz #2.

variable aléatoire discrète:

· fonction $x(s)$ d'une expérience aléatoire $(S, \mathcal{E})$ ayant pour ensemble de définition l'univers S dénombrable (fini ou infini) et à valeur dans les nombres réels $\mathbb{R}$:

$$X(\cdot) : S \to \mathbb{R}$$

Exemple

Tirons une pièce de monnaie trois fois de suite (l'ordre compte). L'univers de l'expérience aléatoire est $S \times S \times S = 2^3 = 8$

$$\mathcal{S} = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\} ,$$

1 2 3 4 5 6 7 8

et des exemples de variables aléatoires sont

- $X(s) =$ le nombre de F dans la séquence ; *e.g.* $X(FPF) = 2$, EN
- $Y(s) =$ la position du premier F et 0 si la séquence ne contient pas de F ; *e.g.* $Y(PPF) = 3$, $Y(PPP) = 0$. EN

Dans l'exemple précédent, les variables aléatoires $X(s)$ et $Y(s)$ étaient des entiers.

La valeur d'une v.a correspond à des events $\in \mathcal{E}$

Exemple

Pour l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\} ,$$

avec la variable aléatoire

$$X(s) = \text{ le nombre de } F \text{ dans la séquence,}$$

la valeur $X(s) = 2$ correspond à l'ensemble $E_2 = \{FFP, FPF, PFF\}$;

les valeurs $1 < X(s) \leq 3$ correspondent à l'ensemble 2 et 3

$$\{FFF, FFP, FPF, PFF\} .$$

Fonction de masse:

$$P_x(x) \Rightarrow \mathbb{P}(X = x)$$

$$X(s) = \text{ le nombre de } F \text{ dans la séquence,}$$

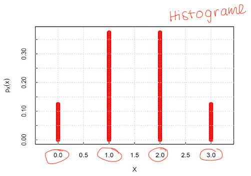
nous avons

$$\begin{aligned} p_X(0) &\equiv \mathbb{P}(\{PPP\}) &= \tfrac{1}{8} \\ p_X(1) &\equiv \mathbb{P}(\{FPP, PFP, PPF\}) &= \tfrac{3}{8} \\ p_X(2) &\equiv \mathbb{P}(\{FFP, FPF, PFF\}) &= \tfrac{3}{8} \\ p_X(3) &\equiv \mathbb{P}(\{FFF\}) &= \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

où

$$p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 1 .$$

Histograme



Exemple (Représentation graphique de X)

Les événements E_0, E_1, E_2, E_3 avec $E_j = \{s \in \mathcal{S} : X(s) = j\}$ sont disjoints puisque $X(s)$ est une fonction.

Notons que $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ doit être défini pour tout $s \in \mathcal{S}$ et doit être un scalaire.

- pour chaque $s \in S$, il existe une seule valeur $X(s)$, car $X(s)$ est une fonction (1 x pour 1y)*
- un élément $s \in S$ appartient à un unique ensemble E_j

$\Rightarrow s \in E_j$ alors $X(s) = j$

Si $s \in E_j$ et $s \in E_k$, alors $X(s) = j$ et $X(s) = k$

ce qui est impossible, car X est une fonction

$\Rightarrow$ alors chaque E_j est disjoint deux à deux, et chacun d'entre eux correspond à une valeur possible de $X(s)$

$\Rightarrow$ ces ensembles E_j forment une partition de S

car $E_1 \cup E_2 \cup E_3 .. \cup E_j = S$

La fonction de masse est défini comme suit:

$$P_x(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

1. $p_x(x) \geq 0 \ \forall x$
2. $\sum_x p_x(x) = 1$

(Car la variable aléatoire doit prendre une et une seule des valeurs possibles.)

elle associe à chaque valeur x prise par X sa probabilité d'occurence

La fonction de répartition:

défini comme suit:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

donne la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à un certain seuil x

fonction croissante qui indique la probabilité cumulée jusqu'à x

Propriétés fondamentales:

1. $F_x(x)$: fonction non-décroissante de x

$\forall x_1 \leq x_2 \quad F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$

plus x augmente, plus $F_x(x)$ augmente (ou reste constante)

2. $F_x(-\infty) = 0$ et $F_x(\infty) = 1$

valeurs aux bornes:

· $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$ (avant la première valeur prise par X, la prob. cumulée est nulle).

· $\lim_{x \to \infty} F_x(x) = 1$ (après la dernière valeur prise par X, la prob. cumulée est 1).

3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$

propriété des sauts

· $F_x(x)$ est une fonction en escalier.

· Le saut à une valeur x_i = $\mathbb{P}(X = x_i) = F_x(x_i) - F_x(x_i^-)$

($F_{x_i}^-$) est la limite de $F_x(x)$ quand x tend vers x_i par la gauche

Exemple

Pour l'ensemble $\mathcal{S} = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$ avec la variable aléatoire $X(s) =$ "le nombre de F dans la séquence", nous avons

$$p_X(0) = \frac{1}{8}, \; p_X(1) = \frac{3}{8}, \; p_X(2) = \frac{3}{8}, \; p_X(3) = \frac{1}{8}.$$

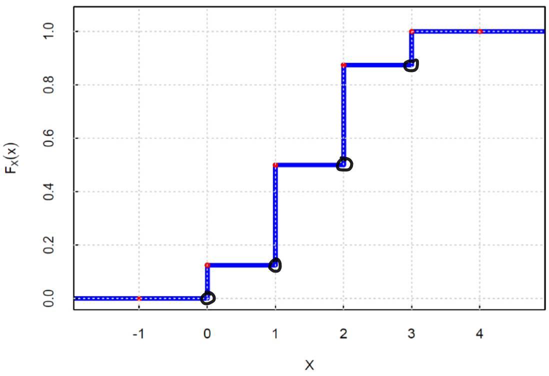
Exemple

La fonction de répartition est alors

$$\begin{aligned}
F(-1) &\equiv \mathbb{P}(X \le -1) &= 0\\
F(0) &\equiv \mathbb{P}(X \le 0) &= \tfrac{1}{8}\\
F(1) &\equiv \mathbb{P}(X \le 1) &= \tfrac{4}{8}\\
F(2) &\equiv \mathbb{P}(X \le 2) &= \tfrac{7}{8}\\
F(3) &\equiv \mathbb{P}(X \le 3) &= 1\\
F(4) &\equiv \mathbb{P}(X \le 4) &= 1
\end{aligned}$$

En particulier, nous avons

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}(\overset{a}{0} < X \le \overset{b}{2}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)}\\
= F(\underset{b}{2}) - F(\underset{a}{0}) = \tfrac{7}{8} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$



Si X est discrète,

$$\boxed{F_X(x) = \sum_{k \le x} p_X(k)}$$

$$\boxed{p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)}$$

Distribution conjointe :

F_X et P_X peuvent être des fonctions de plus d'une v.a

Fonction de masse conjointe :

$$P_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\mathcal{S} = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\},$$

nous posons

$$X(s) = \#F, \quad Y(s) = \text{position du premier } F,$$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=0$	$\frac{1}{8}$ +	0 +	0 +	0	= $\frac{1}{8}$
$x=1$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$ +	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$x=2$	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$ +	0	$\frac{3}{8}$
$x=3$	0	$\frac{1}{8}$	0 =	0	$\frac{1}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\boxed{1}$

Notes :

- Les probabilités marginales p_X forment la fonction de masse de X.
- Les probabilités marginales p_Y forment la fonction de masse de Y.

$$\to P(Y) = \sum_X \mathbb{P}(X \cap Y)$$

$$\to P(X) = \sum_y \mathbb{P}(Y \cap X)$$

Indépendance :

- Est-ce que $X = 2$ et $Y = 1$ sont indépendants ?

On pourra commencer par observer que les événements

$$E_{ij} \equiv \{s \in \mathcal{S} : X(s) = i, Y(s) = j\}$$

sont disjoints.

Fonction de répartition conjointe :

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$F_X(x)$
$x=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$ x=0	$\frac{1}{8}$ x=0	$\frac{1}{8}$ x=0	$\frac{1}{8}$
$x=1$	$\frac{1}{8}$ y=0	x=0 + x=1 $\frac{2}{8}$ PPP FPP	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$
$x=2$	$\frac{1}{8}$ y=0	$\frac{4}{8}$ PPP FFP FPP FPF	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$
$x=3$	$\frac{1}{8}$ y=0	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	1
$F_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	$\boxed{1}$

3+2+1+0 = tout

- La fonction de répartition marginale F_X est une copie de la 4e colonne.
- La fonction de répartition marginale F_Y est une copie de la 4e ligne.
- Pourquoi avons-nous la relation suivante

$$\mathbb{P}(1 < X \le 3, 1 < Y \le 3) = F(3,3) - F(1,3) - F(3,1) + F(1,1) \; ?$$

provient de la formule d'inclusion - exclusion appliquée à la fonction de répartition conjointe $F(x,y)$

$$\mathbb{P}(1 < X \leq 3 , 1 < Y \leq 3) = F(3,3) - F(1,3) - F(3,1) + F(1,1)$$

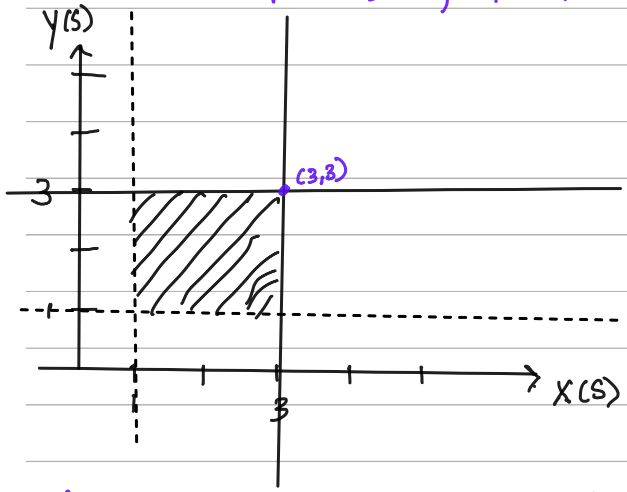
$F(x,y)$ donne la probabilité cumulée jusqu'à (x,y)

→ 1. prendre la proba. totale jusqu'à $(3,3)$: $F(3,3)$

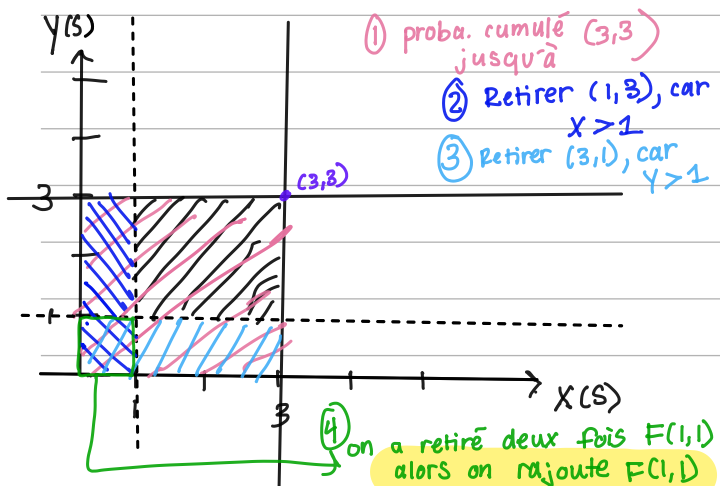
→ 2. Soustraire les proba. des régions indésirables
- $X \leq 1$ et $Y \leq 3$
- $X \leq 3$ et $Y \leq 1$

→ 3. Ajouter $F(1,1)$, car la zone $X \leq 1, Y \leq 1$ a été soustraite deux fois.

$1 < X \leq 3 , \; 1 < Y \leq 3$



· Aire cumulée en-dessous du point (x,y)



(*) Exemples dans le power-point p. 33

variable aléatoire indépendante :

Deux v.a discrètes $X(s)$ et $Y(s)$ sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(X = x , Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y) \quad \forall x \text{ et } y,$$

ou de façon équivalente, si leur fonction de masse satisfont

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \forall x \text{ et } y$$

ou de façon équivalente, si les events

$$E_x \equiv X^{-1}(\{x\}) \quad \text{et} \quad E_y \equiv Y^{-1}(\{y\})$$

sont indépendants dans l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(E_x \cap E_y) = \mathbb{P}(E_x) \cdot \mathbb{P}(E_y) \quad \forall x, y$$

→ X associe à chaque issue s d'un univers une valeur $X(s)$ dans un ensemble de nbr $(\mathbb{R})$

$X^{-1}(\{x\})$: ensemble des issues s pour lesquelles la v.a X prend la valeur x

$$X^{-1}(\{x\}) = \{ s \in S \mid X(s) = x \}$$

$\parallel$

E_x : ensemble des résultats de l'E.A qui conduisent à $X = x$

Note: x, y sont des v.a discrètes et sont donc typiquement des Entiers.

Exemple

Nous tirons un dé à deux reprises. Posons X comme étant le résultat du 1er tir et Y comme étant le résultat du 2e tir.

Est-ce que X et Y sont indépendants, c'est-à-dire OUI

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \ , \ \forall\, 1 \le x, y \le 6 \ ?$$

$1/6 \quad 1/6 = 1/36$

2 et 3 $\quad \frac{1}{6} \cdot 1/6 = 1/36$

Exemple

Trois tirs : $X(s) = \#F$ et $Y(s) =$ position 1er F. NON

Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, sachant qu'ils possèdent la fonction de masse conjointe suivante ?

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=0$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
$x=1$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$x=2$	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
$x=3$	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

FFP
FPF
PFF

$x=2$
$P_X(2) =$
$y=1$
$P_Y(1) =$

FPP
FFP
FFF
FPF

$3/8 \cdot 4/8 = \frac{12}{64} = \frac{6}{32} = 3/16$

$$P_X(2) \cdot P_Y(1) \neq P_{X,Y}(2,1)$$

Exemple

Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, sachant qu'ils possèdent les fonctions de masse et de répartition conjointes suivantes ?

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$x=2$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
$x=3$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_Y(y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

oui ✓

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$F_X(x)$
$x=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x=2$	$\frac{5}{9}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$x=3$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	1
$F_Y(y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	1

oui ✓

Est-ce que $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$? Oui

Propriété : La fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires indépendantes X et Y satisfait

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \ , \ \forall \ x \text{ et } y \ .}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x_k, y_\ell) &= \mathbb{P}(X \le x_k, Y \le y_\ell) \\
&= \sum_{i \le k} \sum_{j \le \ell} p_{X,Y}(x_i, y_j) \\
&= \sum_{i \le k} \sum_{j \le \ell} p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) \\
&= \sum_{i \le k} p_X(x_i) \cdot \sum_{j \le \ell} p_Y(y_j) \\
&= F_X(x_k) \cdot F_Y(y_\ell) \ .
\end{aligned}$$

Distribution conditionnelles :

considérons X et Y des v.a.d avec fonction de masse conjointe $P_{X,Y}(x,y)$

étant donné x et y, posons

$$E_x \equiv X^{-1}(\{x\}) \quad \text{et} \quad E_y \equiv Y^{-1}(\{y\})$$

comme étant leurs évènements correspondant dans S

Nous rappelons que

$$\mathbb{P}(E_x \mid E_y) = \frac{\mathbb{P}(E_x \cap E_y)}{\mathbb{P}\, E_y} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

par conséquent, il est naturel de définir la fonction de masse conditionnelle :

$$P_{(X|Y)}(x|y) = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

Exemple

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=0$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
$x=1$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$x=2$	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
$x=3$	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$P_{X,Y}(x,y)$

$P_Y(y)$

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	1	0	0	0
$x=1$	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	1
$x=2$	0	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$	0
$x=3$	0	$\frac{2}{8}$	0	0
	1	1	1	1

$P_{X|Y}(x|y)$

$(x|y)$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$= \frac{2/8}{4/8}$$

$$= \frac{2}{8} \cdot \frac{8}{4} = \frac{16}{32} = 1/2 = 4/8$$

Exemple

Étant donné la fonction de masse conjointe suivante, construisons les tables pour $p_{X|Y}(x|y)$ et $p_{Y|X}(y|x)$.

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$x=2$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
$x=3$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_Y(y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\frac{1}{18} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x=2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x=3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	1	1	1

Que nous dit la dernière table ? $P_{X|Y}(x|y)$

Table de $P_{Y|X}(y|x)$

	$y=1$	$y=2$	$y=3$	
$X=1$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{6}$	1
$X=2$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{18}\cdot\frac{3}{1}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}\cdot\frac{3}{1}=\frac{1}{6}$	1
$X=3$	$\frac{1}{9}\cdot\frac{6}{1}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{36}\cdot\frac{6}{1}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}\cdot\frac{6}{1}=\frac{1}{6}$	1

Espérance :

L'espérance d'une v.a.d X est

$$E[X] \equiv \sum_k x_k \cdot P(X = x_k) = \sum_k x_k \cdot P_X(x_k)$$

$E[X]$ représente la moyenne pondérée de X

· chaque x_k est pondéré par sa probabilité d'occurence ($p_X(x_k)$).

$\boxed{\text{espérance}}$ est une sorte de moyenne théorique qui donne une idée de la valeur attendue de X sur le long terme

Propriétés de l'espérance :

1. $E[aX] = aE[X]$

2. $E[aX + b] = aE[X] + b$

Exemple

Nous tirons une pièce de monnaie jusqu'à ce que nous obtenions F. Alors,

$$\mathcal{S} = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, \ldots\} .$$

La variable aléatoire X est le nombre de tirs jusqu'à ce que F survienne :

$$X(F) = 1 \ , \quad X(PF) = 2 \ , \quad X(PPF) = 3 \ , \quad \ldots .$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 .$$

n	1	2	3	10	40
$\sum_{k=1}^{n} k/2^k$	0.500000	1.000000	1.375000	1.988281	1.999999

0.5 + 0.5 $\quad$ 1 + 3/8

$$E[XY] = \sum_k \sum_\ell (x_k, y_\ell) \cdot P_{X,Y}(x_k, y_\ell)$$

si X et Y sont indépendants, alors

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

$\Longrightarrow$ ☆

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Variance et Écart-type:

Supposons la moyenne de X = à

$$\mu = E[X]$$

alors la variance de X est

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_k (x_k - \mu)^2 \cdot p(x_k)$$

ce qui représente la moyenne pondérée de la distance quadratique par rapport à μ

$$Var(X) = E[X^2] - \mu^2$$
$$= E[X^2] - E[X]^2$$

L'écart-type de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2}$$

ce qui représente la moyenne pondérée de la distance par rapport à μ

Covariance:

Soit X, Y avec leurs moyennes $E[X]$ et $E[Y]$

la covariance est la suivante;

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

La variance et l'écart-type sont des mesures de dispersion autour de la moyenne.

La covariance mesure plutôt la "concordance" ou la "cohérence" de X et Y :

- Si, on a de bonnes chances que $X > \overset{E[X]}{\mu_X}$ lorsque $Y > \overset{E[Y]}{\mu_Y}$ et on a de bonnes chances que $X < \mu_X$ lorsque $Y < \mu_Y$, alors
$$\boxed{\mathbb{C}ov(X,Y) > 0 .}$$
- Si, on a de bonnes chances $X > \mu_X$ lorsque $Y < \mu_Y$ et on a de bonnes chances que $X < \mu_X$ lorsque $Y > \mu_Y$, alors
$$\boxed{\mathbb{C}ov(X,Y) < 0 .}$$

Quelques propriétés

Propriétés

- * $\mathbb{V}ar(aX + b) = a^2\ \mathbb{V}ar(X)$,
- $\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{C}ov(Y, X)$,
- $\mathbb{C}ov(cX, Y) = c\ \mathbb{C}ov(X, Y)$,
- $\mathbb{C}ov(X, cY) = c\ \mathbb{C}ov(X, Y)$,
- * $\mathbb{C}ov(X + Y, Z) = \mathbb{C}ov(X, Z) + \mathbb{C}ov(Y, Z)$,
- * $\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) + 2\mathbb{C}ov(X, Y)$.

Si X et Y sont indépendants, alors

$$Cov(X,Y) = 0$$

$\Longrightarrow$ *

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y)$$

Exemple

Calculons

$\mathbb{E}[X]$ 1 , $\mathbb{E}[Y]$ 2 , $\mathbb{E}[X^2]$ 3 , $\mathbb{E}[Y^2]$ 4
$\mathbb{E}[XY]$ 5 , $\mathbb{V}ar[X]$ 6 , $\mathbb{V}ar[Y]$ 7
$\mathbb{C}ov(X, Y)$ 8

pour la fonction de masse suivante :

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=0$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
$x=1$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$x=2$	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
$x=3$	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E[X] = \sum_x x\, p_X(x)$

1. $p_X(0) = 1/8$
   ⋮
   $p_X(3) = 1/8$
2. $E[X] = 0 \times 1/8 \dots 3 \times 1/8$
   $= 1.5$

$E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y)$

1. $p_Y(0) = 1/8$
   ⋮
   $p_Y(3) = 1/8$
2. $E[Y] = 0 \times 1/8 \dots 3 \times 1/8$
   $= 1.375$

$E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x)$

1. $E[X^2] = 0^2 \times 1/8 \dots 3^2 \times 1/8$
   $= 3$

$E[Y^2] = \sum_y y^2 p_Y(y)$

1. $E[Y^2] = 0^2 \times 1/8 \dots 3^2 \times 1/8$

$E[XY] = \sum_x \sum_y xy\, p(x,y)$

1. $E[XY] = (0 \cdot 0 \cdot 1/8) + (1 \cdot 1 \cdot 1/8) + (1 \cdot 2 \cdot 1/8) \dots (3 \cdot 1 \cdot 1/8)$
   $= \frac{17}{8} = 2.125$

$var[X] = E[X^2] - (E[X]^2)$

1. $var[X] = 3 - (1.5)^2$
   $= 0.75$
2. $var[Y] = 2.625 - (1.375)^2$
   $= 0.7344$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

1. $cov(X,Y) = 2.125 - (1.5 \times 1.375)$
   $= 0.0625$

Lois discrètes particulières:

- v.a Bernoulli
- v.a Binomiale
- v.a Poisson
- v.a Hypergéométrique

Il existe une variété d'autres lois que nous ne considérons pas ici (géométrique, binomiale négative, ...).

Note : Bien que nous ne l'ayons pas étudiée spécifiquement, la loi uniforme discrète a été utilisée à maintes reprises dans les exemples (le tir d'un dé ou d'une pièce de monnaie, par exemple).

La variable aléatoire Bernoulli

un tir Bernoulli a seulement 2 résultats possibles

$$\mathbb{P}(X=1) = p$$
$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

ex: lancer une pièce de monnaie, gagner ou perdre une partie

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p}$$
$$\boxed{\mathbb{E}[X^2] = 1^2\cdot p + 0^2\cdot(1-p) = p}$$
$$\boxed{\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p).}$$

Note : Si p est petit, alors $\mathbb{V}ar(X) \approx p$.

La variable aléatoire binomiale

nous faison 'n' tirs Bernoulli consécutifs,

*Supposons que les tirs sont indépendants

exemple de résultats:

100011001010 $(n=12)$

avec probabilité

$$\mathbb{P}(100011001010) = p^{\overset{\text{nb de 1}}{5}} \cdot (1-p)^{\overset{\text{nb de 0}}{7}}$$

Posons X le nb de succès (1),

$$X(100011001010) = 5$$

Nous avons

$$\mathbb{P}(X=5) = \overset{\binom{n}{x}}{\binom{12}{5}} \cdot p^5 \cdot (1-p)^7$$

De manière générale, pour k succès dans une séquence de n tirs, nous avons,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n)$$

Démontrons maintenant, en utilisant le fait que

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} ,$$

et

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \binom{n}{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot (1-p)^{\overset{n-(k+1)}{n-k-1}} ,$$

que

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \underset{\text{coefficient binomial}}{c_k} \cdot \mathbb{P}(X=k) ,$$

où

$$\boxed{\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}} \qquad c_k = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} .$$

Note : Cette formule de récurrence est un algorithme stable et efficace pour calculer les probabilités binomiales :

$$\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n ,$$
$$\mathbb{P}(X=k+1) = c_k \cdot \mathbb{P}(X=k) , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

En remplaçant k par $k+1$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$$

Or, la relation entre les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k+1}$ est donnée par :

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

En remplaçant cette expression dans la formule de $\mathbb{P}(X=k+1)$:

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \left(\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}\right) p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$$

En remplaçant cette expression dans la formule de $\mathbb{P}(X=k+1)$:

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \left(\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}\right) p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$$

$$p^k \cdot p \qquad (1-p)^{n-k} \cdot (1-p)^{-1}$$

On peut regrouper les puissances de p et $1-p$:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \mathbb{P}(X=k) \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

Autrement dit :

$$\mathbb{P}(X=k+1) = c_k \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

avec

$$c_k = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

1. On commence par calculer $\mathbb{P}(X=0)$ directement avec la formule :
   $\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n$
2. Ensuite, on utilise la relation de récurrence :
   $\mathbb{P}(X=1) = c_0 \cdot \mathbb{P}(X=0)$
   $\mathbb{P}(X=2) = c_1 \cdot \mathbb{P}(X=1)$
   Et ainsi de suite jusqu'à $k=n$.

Cette méthode est **numériquement stable et rapide**, car elle évite les calculs répétitifs des coefficients binomiaux qui peuvent être coûteux, surtout pour de grandes valeurs de n.

Preuve :

$$\mathbb{P}(X = k+1) = \binom{n}{k+1} p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-k-1}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

ce qui signifie que :

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1\. $= \left(\dfrac{n!}{\underbrace{(k+1)!}_{(k+1)k!}\underbrace{(n-k-1)!}_{(n-(k+1))!}}\right) p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-k-1}$

2\. $= \left(\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right)\left(\dfrac{p}{1-p}\right) p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$\dfrac{1}{(\cancel{n-k})} \dfrac{(n-k)!}{(\cancel{n-k})(n-k-1)!}$

3\. $= \dfrac{n-k}{k+1}\left(\dfrac{p}{1-p}\right) \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

4\. $= \underbrace{\dfrac{n-k}{k+1}\left(\dfrac{p}{1-p}\right)}_{C_K} \mathbb{P}(X = k)$.

Ex: (choix d'un tirage avec remise)

Moyenne et Variance:

Moyenne d'une variable binomiale X:

$$|E| = \sum_{K=0}^{n} K \cdot P(X=K) = \sum_{K=0}^{n} K \cdot \underbrace{\binom{n}{K}}_{= n\binom{n-1}{K-1}} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

$$\boxed{= n \cdot p}$$

Dans une séquence de 'n' tirs ind. de Bernoulli, posons

X_K = le résultat du $K^{ième}$ tir Bernoulli
$(X_K = 0$ ou $1)$

Par conséquent,

$$X = X_1 + X_2 + X_3 \cdots X_n$$

variable aléatoire binomiale qui compte le nbr de succès.

Nous savons que

$$E[X_K] = p \quad , (K = 1, 2, \ldots, n)$$

alors,

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

$$= np$$

Variance d'une v.a binomiale:

Si $Var(X) = p(1-p)$

alors, *puisque les X_K sont indépendants,

$$var(X) = var(X_1) + var(X_2) + \ldots + var(X_n)$$

$$\boxed{var(X) = np(1-p)}$$

* si p est petit, $var(X) \approx n \cdot p$

La variable aléatoire Poisson

· cette variable aléatoire approxime la v.a Binomiale

$$P(X = K) = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^K}{K!}$$

$\lambda = np$ (le nbr moyen de succès) = Espérance

· approximation est précise si ;
n >> grand
p << petit

Dans ce cas:

$$E[X] = \lambda \quad \text{et} \quad var(X) = \lambda$$

Une façon stable et efficace de calculer les probabilités d'une Poisson

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbb{P}(X = k+1) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!},$$

est d'utiliser la relation de récurrence

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda},$$

$$\mathbb{P}(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1}\mathbb{P}(X = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Note : Contraignement à la variable aléatoire binomiale, la variable aléatoire Poisson peut prendre n'importe quelle valeur non négative k.

Poisson:

K peut théoriquement prendre n'importe quel valeur $\in \mathbb{N}$

↳ car il n'y a pas de contraintes sur le nbr maximal d'évenements pouvant se produire

Binomiale:

K est limité par 'n', car il ne peut pas y avoir plus de succès que d'essais.

Fonction de répartition d'une Poisson:

$$F(K) = \mathbb{P}(X \leq K) = \sum_{\ell=0}^{K} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{K} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}$$

$$\lim_{K \to \infty} F(K) = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{K} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

La variable aléatoire Poisson modélise la probabilité de k succès à l'intérieur d'un intervalle de temps donné, lorsque le nombre moyen de succès est λ.