Dans les questions 1–4, on considère un ou plusieurs dé(s) à six faces numérotées $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Les dés sont identiques et les expériences aléatoires concernent le chiffre présent sur la face du “dessus” du/des dés.

#1 On lance le dé une fois.

(a) Donner $\mathcal{S}$ l'univers de cette expérience aléatoire.

(b) L'ensemble de sous-ensembles de $\mathcal{S}$ donné par $\{\emptyset, \mathcal{S}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ est-il acceptable[1] pour définir un ensemble d'événements?

(c) Spécifier quatre sous-ensembles de $\mathcal{S}$, notés A, B, C, D, tels que l'ensemble de sous-ensembles de $\mathcal{S}$ suivante $\{\emptyset, \mathcal{S}, \{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, A, B, C, D\}$ soit en ensemble d'événements acceptable.

#2 On lance un dé deux fois de suite (et l'ordre compte).

(a) Donner $\mathcal{S}$ l'univers de cette expérience aléatoire et préciser sa cardinalité.

(b) Combien d'éléments contient l'ensemble des parties de $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{P}(\mathcal{S})$?

(c) Donner un exemple d'ensembles d'événements qui ne soit ni l'ensemble trivial $\{\emptyset, \mathcal{S}\}$ ni $\mathcal{P}(\mathcal{S})$.

#3 On lance simulatément deux dés (et il n'y a pas d'ordre entre les dés).

(a) Répondre aux mêmes sous-questions qu'au numéro précédent.

#4 On lance le dé jusqu'à ce que la somme du/des dé(s) apparu(s) dans la suite soit plus grande ou égale à 4 (et l'ordre compte).

(a) Donner $\mathcal{S}$ l'univers de cette expérience aléatoire et un ensemble d'événements $\mathcal{E}$ tel que pour tout $s \in \mathcal{S}$, $\{s\} \in \mathcal{E}$.

#5 Soit trois ensembles A, B, C. Trouver, en imposant des relations d'inclusion sur A, B, C, une situation où

(a) $[A \cap B] \cup C \neq A \cap [B \cup C]$.

(b) $[A \cap B] \cup C = A \cap [B \cup C]$.

#6 Soit une expérience aléatoire $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$. Soit trois événements $F \in \mathcal{E}$, $G \in \mathcal{E}$ et $H \in \mathcal{E}$.

(a) Montrer que:

$$\left[\overline{F} \cap \overline{G}\right] \cup \left[\overline{F} \cap \overline{H}\right] \cup \left[\overline{G} \cap \overline{H}\right] = \left[\overline{F} \cap \overline{G} \cap \overline{H}\right] \cup \left[F \cap \overline{G} \cap \overline{H}\right] \cup \left[\overline{F} \cap G \cap \overline{H}\right] \cup \left[\overline{F} \cap \overline{G} \cap H\right].$$

On rappelle les opérations ensemblistes : union $\cup$, intersection $\cap$, complémentaire (dans $\mathcal{S}$) noté $\overline{\bullet}$[2]. Donner les événements suivants en fonction d'opérations ensemblistes sur F, G, H :

(b) Seulement F.

(c) Seulement F et G.

(d) Au moins un des trois événements F, G, H.

(e) Aucun des trois événements F, G, H.

(f) Au plus un des trois événements F, G, H.

#7 Soit une expérience aléatoire $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$. On considère n événements $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{E}$. Montrer que

$$F_i \cap F_j = \emptyset, \quad \forall (i, j) : 1 \leq i < j \leq n \quad \Longrightarrow \quad F_i \cap F_j \cap F_k = \emptyset, \quad \forall (i, j, k) : 1 \leq i < j < k \leq n.$$

La réciproque est-elle vraie?

#8 On introduit la différence symétrique entre deux ensembles E et F notée $E \Delta F$ et définie par

$$E \Delta F = [E \cup F] \setminus [E \cap F]$$

[1] On rappelle qu'un ensemble de sous-ensembles de $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{E}$, est un ensemble d'événements “acceptable” si les trois conditions suivantes sont réunies (i) $\emptyset \in \mathcal{E}$, (ii) $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E^c \in \mathcal{E}$, (iii) $(E_1, \ldots, E_n) \in \mathcal{E} \Rightarrow \cup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{E}$.

[2] le complémentaire de E était notée E^c dans le cours mais ici la notation avec une barre au dessus est plus lisible.

(a) $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$. Que vaut $E \Delta F$?

(b) $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Que vaut $E \Delta F$?

Soit une expérience aléatoire $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ et une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$. Soit deux événements $E, F \in \mathcal{E}$.

(c) Montrer que

$$E \Delta F = [E \cap \overline{F}] \cup [F \cap \overline{E}] .$$

On pourra s'aider du rappel que $\setminus$ est distributive (tout comme $\cup$ et $\cap$), c'est-à-dire que $[A \cup B] \setminus C = [A \setminus C] \cup [B \setminus C]$.

(d) En déduire que

$$\mathbb{P}(E \Delta F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(E \cap F) .$$

#9 Soit une expérience aléatoire $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ et deux événements $E, F \in \mathcal{E}$. Montrer que

(a) Montrer que

$$\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F} .$$

On pourra procéder par double inclusion.

(b) En déduire que si $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ est une probabilité sur cette expérience aléatoire alors

$$\mathbb{P}(E \cup F) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E} \cap \overline{F}) .$$

#10 Avec les axiomes des probabilités, on a montré que pour une expérience aléatoire $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ munie d'une probabilité $\mathbb{P}$, on a que pour deux événements $E, F \in \mathcal{E}$,

$$E \subset F \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F) .$$

La réciproque est-elle vraie? Si oui le démontrer, si non il suffit de trouver un contre-exemple!