Intra MAT1720 - Exam A24

Probabilités (Université de Montréal)

(1) **(5 points) Vrai ou Faux** (Aucune justification n'est nécessaire)

(a) Le nombre de manières de séparer un groupe de 10 personnes en deux groupes de 5 est $\frac{10!}{(5!)^2}$;

(b) On a $\mathbb{P}[E \mid F] \leq \mathbb{P}[E \mid E \cup F]$.

(c) Si $F_X(t) = \frac{x}{2}\mathbf{1}_{x\in[0,1/2]} + \mathbf{1}_{x>1/2}$ alors $\mathbb{P}[X = 1/2] = 1/2$.

(d) Si E est indépendant de lui même alors $E = \Omega$.

(e) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2$.

(2) **(7 points)** Dans mon armoire, il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches (les chaussures sont distinguables). Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

(a) Quelle est la probabilité que j'obtienne deux chaussures de la même couleur ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir une chaussures de pied droit et une chaussure de pied gauche ?

(c) Quelle est la probabilité d'avoir une chaussure droite et une gauche de la même couleur ?

(d) Sachant qu'on a une chaussure droite et une gauche de la même couleur, quelle est la probabilité que les deux chaussures ne proviennent pas de la même paire ?

(3) **(5 points)** Une personne rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte du dominicile.

(a) Elle essaye les clefs les unes après les autres au hasard (en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas fonctionnée). Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

(b) Trouver le nombre moyen d'essais si la personne remet les clefs dans le trousseau à chaque essai.

(4) **(8 points)** Soit E un ensemble à n éléments.

(a) Soit X une partie à k éléments de E. Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

(b) Montrer qu'il existe 3^n couples (X, Y) formés de parties disjointes de E.

(5) **(5 points)** Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $1/(1 + X)$.

(6) **(5 points)**Un insecte pond des oeufs. Le nombre d'oeufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

(a) Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P[Z = k \mid X = n]$.

(b) En déduire la loi de Z.