#1 Soit X une v.a. d'univers $\mathcal{S}_X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dont la fonction de masse est donnée par

$$x \in \mathbb{N}, \qquad p_X(x) = \kappa e^{-x}$$

avec $\kappa > 0$ une constante.

(a) Que vaut κ?

(b) Montrer que X peut-être interprétée comme une certaine fonction d'une suite d'expériences de Bernoulli.

Soit la v.a. Y définie comme fonction de X de la manière suivante :

$$Y \equiv Y(X) = \begin{cases} -10 & \text{si} \quad X \leq 2 \\ 1/X & \text{si} \quad 2 < X \leq 5 \\ 10 & \text{si} \quad X \in (5, 6) \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

(c) Donner l'univers de Y, $\mathcal{S}_Y$.

(d) Donner la fonction de répartition de Y, F_Y.

(e) Donner l'espérance de Y.

#2 On considère une suite (infinie) d'expériences de Bernoulli (indépendantes et de même paramètre $p \in [0, 1]$) et soit $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ l'univers et un ensemble d'événements pour cette expérience aléatoire. L'univers $\mathcal{S}$ est formé des suites $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ avec $s_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. On considère la v.a. X qui donne l'indice du premier succès dans la suite d'expériences de Bernoulli et la v.a. Y qui donne l'indice du second succès dans la suite d'expériences de Bernoulli.

(a) Montrer que X et Y sont constantes pour tout élément de l'événement

$$E = \{s \in \mathcal{S} \,:\, s = (1, 0, 0, 1, \ldots)\}$$

(b) Préciser les événements

$$F_1 = \{X = 1\} \cap \{s \in \mathcal{S} \,:\, s = (0, 0, s_3, s_4, 1, s_6, \ldots)\}\,,$$
$$F_2 = \{Y = 6\} \cap \{s \in \mathcal{S} \,:\, s = (0, 0, s_3, s_4, 1, s_6, \ldots)\}\,, \qquad F_3 = \{X \leq 3\} \cap \{Y = 3\}\,.$$

(c) Quelle est la probabilité de l'événement $\{Y = 4\}$?

(d) Donner la fonction de masse de Y.

(e) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes?

#3 Soit X et Y deux v.a. d'univers respectifs $\mathcal{S}_X$ (non précisé) et $\mathcal{S}_Y = \{1, 2, \ldots, n\}$. On suppose que tous les événements $\{Y = j\}$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ ont la même probabilité, i.e. Y est équiprobable sur $\mathcal{S}_Y$[1]. Montrer que la fonction de masse de X vérifie

$$i \in \mathcal{S}_X\,, \qquad p_X(i) = \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathcal{S}_Y} p_{X\,|\,Y}(i\,|\,j)\,.$$

#4 Soit X et Y deux v.a. d'univers respectifs $\mathcal{S}_X = \{0, 1, 2\}$ et $\mathcal{S}_Y = \{0, 1, 2\}$. On donne que

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 2 \times \mathbb{P}(Y = 2)\,.$$

On donne aussi la fonction de masse conditionnelle de $X\,|\,Y$ à travers le tableau suivant :

$p_{X\|Y}(i\,\|\,j)$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 0$	$1/2$	$2/3$	$1/10$
$i = 1$	$1/2$	$1/6$	$1/5$
$i = 2$	α	β	γ

(a) Donner le tableau de la fonction de masse jointe de X et Y.

[1] on peut aussi dire que Y est uniforme sur $\mathcal{S}_Y$ (synonymes)

(b) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes?

#5 Soit X et Y deux v.a. qui prennent les valeurs $\mathcal{S}_X = \{0, 1, 2\}$ et $\mathcal{S}_Y = \{0, 1, 2\}$. On donne la fonction de masse conditionnelle de $Y \mid X$:

$p_{Y\mid X}(j \mid i)$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 0$	α	β	γ
$i = 1$	α	β	γ
$i = 2$	α	β	γ

(a) Donner la fonction de masse de Y, notée p_Y.

(b) Montrer que nécessairement, il existe trois constantes α', β', γ' telles que la fonction de masse conditionnelle de $Y \mid X$ vérifie :

$p_{X\mid Y}(i \mid j)$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 0$	α'	α'	α'
$i = 1$	β'	β'	β'
$i = 2$	γ'	γ'	γ'

#6 Soit X et Y deux v.a. discrètes de fonction de répartition respectives F_X et F_Y. Soit Z la v.a. définie par $Z = X + Y$.

(a) Quel est l'univers de Z?

(b) Est-il vrai que la fonction de répartition de Z, disons F_Z, vérifie $F_Z = F_X + F_Y$?

#7 Un certain programme informatique utilise un micro-processeur multi-cœur. À tout moment de l'exécution du programme, le nombre de cœur(s) utilisé(s) par ce dernier est modélisé par une v.a. X dont la fonction de masse est donnée par le tableau ci-dessous.

i	1	2	4	8	16
$p_X(i)$	2/15	2/15	3/15	7/15	1/15

(a) Combien de cœurs le programme peut-il utiliser?

(b) Chaque cœur a une puissance de calcul de 2.5GHz. En moyenne, quelle est la puissance de calcul que le programme utilise?

#8 Espérance et variance.

(a) Est-il vrai que pour toute v.a. discrète X d'univers $\mathcal{S}_X$, $\mathbb{E}(X) \in \mathcal{S}_X$?

(b) Montrer que pour toute v.a. discrète X d'univers fini $\mathcal{S}_X$, c'est-à-dire $|\mathcal{S}_X| < \infty$, il est vrai que

$$\min\{\mathcal{S}_X\} \leq \mathbb{E}(X) \leq \max\{\mathcal{S}_X\}.$$

(c) Soit la v.a. X telle que $\mathcal{S}_X = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $p_X(x) = 6/(\pi x)^2$ pour $x \in \mathcal{S}_X$. Que vaut $\mathbb{E}(X)$?

(d) Justifier que si une v.a. discrète X est telle que $\mathcal{S}_X$ est un ensemble fini, c'est-à-dire $|\mathcal{S}_X| < \infty$, alors $\mathrm{var}(X) < \infty$.