Université de Montréal

Faculte des Arts et des Sciences
Département de mathématiques et statistique

Solutionnaire: TP 6

Écrit par
Emiliano Aviles

21 Février, 2025

Travail présenté dans le
cadre du cours MAT 1978

Exercice 1:

#1 Soit une v.a. X d'univers $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On suppose que X est une v.a. uniforme sur $\mathcal{S}_X$. Donner son espérance et sa variance.

[on pourra utiliser que $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.]

Soit X une variable aléatoire définie sur $S_X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et suivant une loi uniforme discrète sur cet ensemble. Cela signifie que X prend chacune des valeurs $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec la même probabilité :

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \text{pour } k \in S_X.$$

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} k \times P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

La variance est définie par :

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Calculons d'abord $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Enfin, calculons la variance :

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Exercice 2:

Solution écrite par Florian Maire.

partie (a)

#2 On considère un ensemble dénombrable $\mathcal{S}_X \subset \mathbb{R}$ et une v.a. X dont l'univers est $\mathcal{S}_X$ et ayant une certaine fonction de masse p_X. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la v.a. Y par $Y = \phi(X)$.

(a) Donner l'univers de $\mathcal{S}_Y$ en fonction de ϕ et $\mathcal{S}_X$.

$$S_Y = \{\phi(x) : x \in S_X\}, \text{ i.e. l'image de } S_X \text{ par } \phi.$$

partie (b)

(b) Montrer que, à part pour un choix particulier de ϕ, les v.a. X et Y sont dépendantes, i.e. X et Y ne sont pas indépendantes.

[aide : pour le cas particulier, réfléchir à la possibilité que ϕ annihile/anéantisse l'aléatoire de X...]

Supposons que $|S_Y| > 1$ et soit $y_0, y_1 \in S_Y$. Il doit donc exister $x_0, x_1 \in S_X$ t.q. $y_0 = \phi(x_0)$ et $y_1 = \phi(x_1)$. Soit la fonction de masse jointe $p_{X,Y}$, on remarque que

$$p_{X,Y}(x_0, y_1) = P(\{X = x_0\} \cap \{Y = y_1\})$$

mais les événements $\{X = x_0\}$ et $\{Y = y_1\}$ sont disjoints car $\{Y = y_1\} \subset \{X \neq x_0\}$ ainsi $p_{X,Y}(x_0, y_1) = 0$. Hors, $p_X(x_0) > 0$ et $p_Y(y_1) > 0$ en particulier

$$p_Y(y_1) = P(Y = y_1) \geq P(X = x_1) > 0,$$

par inclusion $\{X = x_1\} \subset \{Y = y_1\}$. Ainsi,

$$0 = p_{X,Y}(x_0, y_1) \neq p_X(x_0)p_Y(y_0) > 0.$$

Maintenant si $|S_Y| = 1$, i.e. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas pour tout $x \in S_X$,

$$p_{X,Y}(x, y_0) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y_0\}) = P(X = x) = p_X(x) = p_X(x)p_Y(y_0)$$

car $\{X = x\} \subset \{Y = y_0\}$ et la fonction de masse de Y est $p_Y(y_0) = 1$.

Exercice 3:

partie (a)

#3 Soit X et Y deux v.a. telles que X est uniforme sur $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et Y vérifie :

- conditionnellement à $\{X \text{ est pair}\}$, $Y = 0$ avec probabilité 1,
- conditionnellement à $\{X \text{ est impair}\} \cap \{X = x\}$, $Y = -x^2$ avec probabilité $1/x$ et $Y = 1/x$ avec probabilité $1 - 1/x$.

(a) Donner l'univers de Y, noté $\mathcal{S}_Y$.

L'univers de Y est l'ensemble des valeurs que peut prendre Y pour toutes les valeurs possibles de X.

- Pour $X = 2$ et $X = 4$ (nombres pairs), on a $Y = 0$.
- Pour $X = 1$, on a :
$$Y = -1^2 = -1 \quad \text{(avec probabilité 1)}.$$
Donc Y prend la valeur -1.
- Pour $X = 3$, on a :
$$Y = -3^2 = -9 \quad \text{(avec probabilité } \frac{1}{3}\text{)},$$
$$Y = \frac{1}{3} \quad \text{(avec probabilité } \frac{2}{3}\text{)}.$$
Donc Y prend les valeurs -9 et $\frac{1}{3}$.
- Pour $X = 5$, on a :
$$Y = -5^2 = -25 \quad \text{(avec probabilité } \frac{1}{5}\text{)},$$
$$Y = \frac{1}{5} \quad \text{(avec probabilité } \frac{4}{5}\text{)}.$$
Donc Y prend les valeurs -25 et $\frac{1}{5}$.

En rassemblant toutes ces valeurs, on obtient l'univers de Y :

$$S_Y = \left\{-25, -9, -1, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right\}.$$

partie (b)

(b) Donner la fonction de masse de Y, conditionnellement à $X = x$, notée $p_{Y|X=x}$.

On obtient directement par la définition de Y que la fonction de masse conditionnelle est:

$p_{Y\|X=x}(y \mid x)$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
$y=-25$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
$y=-9$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
$y=-1$	1	0	0	0	0
$y=0$	0	1	0	1	0
$y=\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{4}{5}$
$y=\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	0

partie (c)

(c) En déduire la fonction de masse de Y marginale, notée p_Y.

La fonction de masse jointe peut être obtenue à partir de la fonction de masse conditionnelle $p_{Y|X=x}(y)$ et de la probabilité marginale de X, $p_X(x)$. En effet,

$$p_{Y,X}(y,x) = p_{Y|X=x}(y \mid x) \cdot p_X(x)$$

Ensuite, la fonction de masse marginale de Y est donnée par :

$$p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{Y,X}(y,x)$$

Nous pouvons résumer les résultats numériques sous la forme d'un tableau:

$p_{X,Y}(x,y)$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$p_Y(y)$
$y=-25$	0	0	0	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$y=-9$	0	0	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{15}$
$y=-1$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
$y=0$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
$y=\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$
$y=\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{15}$	0	0	$\frac{2}{15}$

partie (d)

(d) Calculer var$(X + Y)$.

La variance de la somme de deux variables aléatoires X et Y est donnée par :

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y).$$

Nous devons donc calculer $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$ et $\text{Cov}(X,Y)$.

Puisque X est uniformément distribué sur $S_X = \{1,2,3,4,5\}$, nous avons :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{et } \mathbb{E}[X^2] = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 11 - 3^2 = 11 - 9 = 2$$

Nous avons la fonction de masse marginale de Y :

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, & \text{si } y = -25, \\ \frac{1}{15}, & \text{si } y = -9, \\ \frac{1}{5}, & \text{si } y = -1, \\ \frac{2}{5}, & \text{si } y = 0, \\ \frac{2}{15}, & \text{si } y = \frac{1}{3}, \\ \frac{4}{25}, & \text{si } y = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[Y] = (-25) \times \frac{1}{25} + (-9) \times \frac{1}{15} + (-1) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{25} = -\frac{1939}{1125}$$

$$\text{et } \mathbb{E}[Y^2] = (-25)^2 \times \frac{1}{25} + (-9)^2 \times \frac{1}{15} + (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{15} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{25} = \frac{516\,733}{16\,875}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \frac{516\,733}{16\,875} - \left(-\frac{1939}{1125}\right)^2 = \frac{34\,995\,254}{1\,265\,625}$$

La covariance est donnée par :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_x \sum_y x \times y \times p_{Y,X}(y,x) = -\frac{503}{75}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = -\frac{503}{75} - 3 \times \left(-\frac{1939}{1125}\right) = -\frac{192}{125}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) = 2 + \frac{34\,995\,254}{1\,265\,625} + 2 \times \left(-\frac{192}{125}\right) = \frac{33\,638\,504}{1\,265\,625}$$

<u>Exercice 4:</u>

#4 Soit deux v.a. X et W indépendantes. On donne que $W \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ et que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\operatorname{var}(X) = 1$. On définit une autre v.a. Y par

$$Y = \alpha X + \beta\left(W - \frac{1}{2}\right)$$

où α et β sont deux réels. Montrer que $\operatorname{cov}(X,Y) = \alpha$.

La covariance entre X et Y est définie par :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Substituons l'expression de Y :

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[X\left(\alpha X + \beta\left(W - \frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \alpha\mathbb{E}[X^2] + \beta\mathbb{E}\left[X\left(W - \frac{1}{2}\right)\right]$$

Comme $\text{Var}(X) = 1$, nous avons :

$$\mathbb{E}[X^2] = 1$$
$$\mathbb{E}[X] = 0$$

Comme X et W sont indépendantes :

$$\mathbb{E}\left[X\left(W - \frac{1}{2}\right)\right] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}\left[W - \frac{1}{2}\right] = 0 \times 0 = 0$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[XY] = \alpha \times 1 + \beta \times 0 = \alpha$$
$$\implies \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \alpha - 0 = \alpha$$

Exercice 5:

partie (a)

#5 Toute v.a. X est caractérisée par sa *fonction caractéristique* définie par

$$\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{x \in S_X} e^{itx} p_X(x).$$

(a) Montrer que deux v.a. X et Y qui ont la même fonction de masse ont la même fonction caractéristique. Il se trouve que la réciproque est aussi vraie (nous l'admettons).

La fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x \in S_X} e^{itx} p_X(x)$$

De même, la fonction caractéristique de Y est :

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \sum_{y \in S_Y} e^{ity} p_Y(y)$$

Puisque X et Y ont la même loi de probabilité, on a $p_X(x) = p_Y(x)$ pour tout $x \in S_X$, ce qui implique:

$$\phi_X(t) = \sum_{x \in S_X} e^{itx} p_X(x) = \sum_{x \in S_X} e^{itx} p_Y(x) = \phi_Y(t)$$

Ainsi, nous obtenons:

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous avons montré que si X et Y ont la même fonction de masse de probabilité, alors leurs fonctions caractéristiques sont identiques :

$$p_X(x) = p_Y(x) \quad \Rightarrow \quad \phi_X(t) = \phi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La réciproque est vraie aussi (nous l'admettons):

$$p_X(x) = p_Y(x) \quad \Leftarrow \quad \phi_X(t) = \phi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

partie (b)

(b) Soit X et Y deux v.a. de Poisson indépendantes, $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ avec $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Montrer que

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\mu + \lambda)\,.$$

[on utilisera que si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ alors $\phi_X(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$.]

La fonction caractéristique de $X + Y$ est définie par :

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX}e^{itY}]$$

Puisque X et Y sont indépendantes, leur espérance se factorise :

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}]$$

En utilisant les fonctions caractéristiques de X et Y, nous avons :

$$\phi_X(t) = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right)$$

$$\phi_Y(t) = \exp\left(\mu(e^{it} - 1)\right)$$

Donc :

$$\phi_{X+Y}(t) = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right) \times \exp\left(\mu(e^{it} - 1)\right)$$

En utilisant la propriété exponentielle $e^a e^b = e^{a+b}$, on obtient :

$$\phi_{X+Y}(t) = \exp\left((\lambda + \mu)(e^{it} - 1)\right)$$

Or, cette expression est exactement la fonction caractéristique d'une variable de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Ainsi, nous avons montré que :

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$$

partie (c)

(c) Dans une certaine compétition de Soccer, le nombre de buts inscrits au cours d'un match (un match dure 90 minutes + arrêts de jeu) peut être modélisé par une v.a. de loi de Poisson. En particulier :

- du début du match jusquà la 80-ème minute, le nombre de buts inscrits par tranche de 10 minutes est $X \sim \text{Poisson}(1/3)$
- à partir de la 80-ème minute jusqu'à la fin du match, le nombre de buts inscrits est $X \sim \text{Poisson}(1)$.

Donner la probabilité que dans un certain match de cette compétition, 6 buts ou plus soient inscrits et donner le nombre moyen de but(s) inscrit(s) dans un match de cette compétition.

Par additivité de la loi de Poisson (somme de variables indépendantes de Poisson), (il s'agit du résultat qu'on vient de montrer à la partie b), le nombre total de buts dans un match est :

$$X_{\text{total}} = X_{\text{total, 0-80}} + X_{\text{total, 80-90}} \sim \text{Poisson}\left(\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$\iff \quad X_{\text{total}} \sim \text{Poisson}\left(\frac{4}{3}\right)$$

Afin de trouver le nombre moyen de buts dans un match, nous devons utiliser la propriété suivante de la fonction caractéristique:

$$\mathbb{E}(X) = -i\,\phi'_X(0)$$

Calculons cette valeur pour la fonction caractéristique d'une v.a. de Poisson(λ):

$$
\begin{aligned}
& \phi_X(t) = \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big) \\
\implies \quad & \phi'_X(t) = \lambda \times i \times e^{it} \times \exp(\lambda(e^{it} - 1)) \\
\implies \quad & \phi'_X(0) = \lambda \times i \\
\implies \quad & \mathbb{E}[X] = -i\,\phi'_X(0) = \lambda \times (-i^2) = \lambda
\end{aligned}
$$

On a montré que l'espérance d'une variable de Poisson de paramètre λ est égale à son paramètre, donc :

$$\mathbb{E}[X_{\text{total}}] = \frac{4}{3}$$

Ainsi, le nombre moyen de buts inscrits dans un match est :

$$\frac{4}{3} \approx 1.33 \text{ buts.}$$

La probabilité que le nombre de buts soit supérieur ou égal à 6 est donnée par :

$$P(X_{\text{total}} \geq 6) = 1 - P(X_{\text{total}} \leq 5)$$

Nous devons donc calculer :

$$P(X_{\text{total}} \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} P(X_{\text{total}} = k) = \sum_{k=0}^{5} \frac{(\frac{4}{3})^k e^{-\frac{4}{3}}}{k!}.$$

En calculant cette somme, nous obtenons :

$$P(X_{\text{total}} \leq 5) \approx 0.9975$$

Ainsi,

$$P(X_{\text{total}} \geq 6) \approx 1 - 0.9975 = 0.0025$$