Consignes :

- Toute communication ou tentative de communication sera sanctionnée par une exclusion de l'examen.
- Une feuille de notes est autorisée (écrite à la main, recto uniquement, pas imprimée, format lettre).
- Toute réponse non claire (ratures, illisible) ou non justifiée ne sera pas comptabilisée.
- Les 4 questions peuvent être traîtées dans n'importe quelle ordre.
- Il y'a 2 questions bonus, hors-barème, à la fin du sujet.
- Un barême indicatif est donné pour chaque sous-question.
- Pour les questions numériques, laisser les résultats sous forme de fractions, si possible irréductibles.
- Abbréviations : v.a. pour variable aléatoire, i.e. pour c'est-à-dire.

#1 On se trouve face à 3 portes barrées, désignées par $\{p_1, p_2, p_3\}$. Chaque porte ne peut être débarrée que par une et une seule clef. La clef de chaque porte est placée dans un sac. On se présente devant la porte p_1 et on pige une clef du sac au hasard (les 3 clefs ont la même probabilité d'être pigée), soit c_1 cette clef, et on essaye de débarrer p_1 avec c_1. Ensuite, on dépose la clef c_1 devant la porte p_1, que celle-ci ait été débarrée ou non, puis on se présente devant la porte p_2 et on pige une des deux clefs restantes dans le sac. Soit c_2 cette clef. On essaye de débarrer p_2 avec c_2. Ensuite, on dépose la clef c_2 devant la porte p_2, que celle-ci ait été débarrée ou non, puis on se présente devant la porte p_3 que l'on essaye de débarrer avec la clef restante. Pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, on désigne par $E_{i,j}$ l'événement {la clef c_i débarre la porte p_j}.

(a) Calculer la probabilité de l'événement $E_{1,1}$ ={la clef c_1 débarre la porte p_1}, i.e. $\mathbb{P}(E_{1,1})$. [6]
Les événements $\{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}\}$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$ sont équiprobables car la clef c_1 ouvre une des trois portes et le tirage de c_1 est équiprobable, donc $\mathbb{P}(E_{1,1}) = 1/3$.

(b) Exprimer l'événement F ={les 3 portes sont débarrées} en fonction des événements $\{E_{i,j}\}$ et probabilité $\mathbb{P}(F)$. [6]
Soit $F = E_{1,1} \cap E_{2,2} \cap E_{3,3}$,

$$\mathbb{P}(E) = \underbrace{\mathbb{P}(E_{3,3} \,|\, E_{2,2}, E_{1,1})}_{=1} \mathbb{P}(E_{2,2} \cap E_{1,1}) = \underbrace{\mathbb{P}(E_{2,2} \,|\, E_{1,1})}_{=1/2} \underbrace{\mathbb{P}(E_{1,1})}_{=1/2} = 1/6\,.$$

(c) Calculer la probabilité de l'événement $E_{2,2}$ ={la clef c_2 débarre la porte p_2}, i.e. $\mathbb{P}(E_{2,2})$. [6]
$\mathbb{P}\{E_{1,2}\} = 1/3$ et on note que $\mathbb{P}(E_{2,2} \,|\, E_{1,1} \cup E_{1,3}) = 1/2$ et $\mathbb{P}(E_{2,2} \,|\, E_{1,2}) = 0$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{2,2}) &= \mathbb{P}(E_{2,2} \,|E_{1,1} \cup E_{1,3})\mathbb{P}(E_{1,1} \cup E_{1,3}) + \mathbb{P}(E_{2,2} \,|\, E_{1,2})\mathbb{P}(E_{1,2}) \\ &= (1/2)(2/3) + 0(1/3) = 1/3\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

(d) Les événements $E_{1,1}$ ={la clef c_1 débarre la porte p_1} et $E_{2,2}$ ={la clef c_2 débarre la porte p_2} sont-ils indépendants? [7]
Non car

$$\mathbb{P}(E_{1,1} \cap E_{2,2}) = \mathbb{P}(E_{2,2} \,|\, E_{1,1})\mathbb{P}(E_{1,1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \mathbb{P}(E_{1,1})\mathbb{P}(E_{2,2})\,,$$

(e) Formaliser l'expérience aléatoire ci-dessus qui s'intéresse au statut des portes (i.e. barrées ou débarrés) à la fin de l'expérience, au moyen d'un univers dont les éléments sont des vecteurs tri-dimensionnels (i.e. de dimension trois), un ensemble d'événements et une loi de probabilité. La réponse attendue spécifiera donc un couple $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ et une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$. [7]

Comme chaque clef ouvre une et une seule porte, l'univers de l'expérience aléatoire peut être vu comme l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ et $s = (i, j, k)$ est la réalisation $\{c_1 = p_i\} \cap \{c_2 = p_j\} \cap \{c_3 = p_k\}$. Un ensemble d'événement est donné par $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ et par équiprobabilité on a que $\mathbb{P}(E) = |E|/|\mathcal{S}|$.

#2 On définit deux variables aléatoires X et Y d'univers respectifs

$$\mathcal{S}_X = \{0, 1\}, \qquad \mathcal{S}_Y = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}.$$

On donne aussi les informations suivantes :

- pour la fonction de masse de X
$$p_X(1) = \frac{4}{5}.$$
- pour la fonction de masse de Y
$$\mathbb{E}(Y) = 0, \quad p_Y(0) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad p_Y(-k) = p_Y(k) = \frac{1}{k}, \text{ pour } k \in \{4, 6\}.$$
- les v.a. X et Y sont indépendantes.

(a) Quel est le nom habituellement associé aux v.a. du même type que X? [5]

Bernoulli

(b) Quel est la probabilité de l'événement $\{Y > 2\}$? [6]

$\mathbb{P}(Y > 2) = p_Y(4) + p_Y(6) = 1/4 + 1/6 = 3/12 + 2/12 = 5/12.$

(c) Donner la fonction de masse jointe de X et Y, notée $p_{X,Y}$, sous forme d'un tableau. [7]

Par indépendance, on a $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ et des deux conditions sur p_Y on trouve $p_Y(2) = p_Y(-2) = 1/24$. Ainsi :

$p_{X,Y}$	-6	-4	-2	0	2	4	6
0	1/30	1/20	1/120	1/60	1/120	1/20	1/30
1	5/30	5/20	5/120	5/60	5/120	5/20	5/30

(d) Est-il vrai que la v.a. $Z = X^2$ a même univers et même fonction de masse que X? [7]

Oui Z a pour univers $\mathcal{S}_Z = \{0, 1\}$ car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$ et $p_Z(1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = p_X(1)$.

#3 Une propriété importante du cours dit que pour deux événements E et F tels que $E \subset F$, alors il est vrai que $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$. On considère une v.a. X telle que :

$$\mathbb{P}(X < 1) = 0, \quad \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X < 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X \leq 2) = \frac{3}{4} \quad \mathbb{P}(X < 4) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(X \leq 4) = 1.$$

(a) Soit $a = 0.9999999999$. Justifier que $\{X \leq a\} \subset \{X < 1\}$ et en déduire $\mathbb{P}(X \leq a)$. [5]

Comme $a < 1$ alors si $X \leq a$ on a que $X < 1$ d'où l'inclusion et on trouve que $\mathbb{P}(X \leq a) = 0$.

(b) Justifier rigoureusement que $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. [5]

On a que $\{X \leq 1\} = \{X < 1\} \cup \{X = 1\}$ et comme c'est une union d'événements disjoints on a

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X < 1) + \mathbb{P}(X = 1), \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 1/2.$$

(c) Soit $b = 1.5000000001$. En s'inspirant des techniques du (a) et (b), calculer $\mathbb{P}(X = b)$. [5]

On note cette fois que $\{X \le 1\} \subset \{X < b\} \subset \{X \le b\} \subset \{X < 2\}$ donc

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \le 1)}_{=1/2} \le \mathbb{P}(X \le b) < \mathbb{P}(X \le b) \le \underbrace{\mathbb{P}(X < 2)}_{=1/2}$$

et $\mathbb{P}(X = b) = \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X < b) = 0$.

(d) Donner l'univers et la fonction de masse de X (sous forme de tableau). [5]

$\mathcal{S}_X = \{1, 2, 4\}$ avec $p_X(1) = 1/2$, $p_X(2) = 1/4$ et $p_X(3) = 1/4$.

#4 On considère deux variables aléatoires X et Y d'univers $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{S}_Y = \{1, 2, 3\}$. La fonction de masse conditionnelle de X sachant Y et la fonction de masse marginale de Y sont données dans les tableaux ci-dessous.

x \ y	1	2	3
1	1/4	1/2	1/3
2			1/3
3	0	1/2	

Table 1. Fonction de masse conditionnelle $p_{X\,|\,Y}$.

y	1	2	3
$p_Y(y)$	9/10	1/20	1/20

Table 2. Fonction de masse marginale p_Y.

(a) Recopier la Table 1 sur votre cahier d'examen et remplir les entrées manquantes. [6]

de gauche à droite, 3/4,0,1/3.

(b) Que vaut la probabilité $\mathbb{P}(Y = 2\,|\,X = 1)$? [7]

On utilise Bayes et

$$\mathbb{P}(Y = 2\,|\,X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1\,|\,Y = 2)\mathbb{P}(Y = 2)}{p_{X|Y}(1, 1)p_Y(1) + p_{X|Y}(1, 2)p_Y(2) + p_{X|Y}(1, 3)p_Y(3)}$$
$$= \frac{1/2 \times 1/20}{1/4 \times 9/10 + 1/2 \times 1/20 + 1/3 \times 1/20} = \frac{3}{32}\,.$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$z \in \mathbb{R}\,, \quad \phi(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad z \le 3\,, \\ 0 & \text{si} \quad z > 3\,. \end{cases}$$

On définit la v.a. $Z = \phi(X + Y)$.

(c) Donner l'univers $\mathcal{S}_Z$ et la fonction de masse p_Z de la v.a. Z. [10]

On a que $X + Y$ peut avoir pour valeur $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ donc Z a pour univers $\{0, 2, 3\}$ Alors, $p_Z(2) = \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) = p_{X|Y}(1, 1)p_Y(1) = 9/40$. De plus

$$p_Z(3) = p_{X|Y}(1, 2)p_Y(2) + p_{X|Y}(2, 1)p_Y(1) = 1/2 \times 1/20 + 3/4 \times 9/10 = 28/40 = 7/10\,.$$

Ainsi, $p_Z(0) = 1 - 9/40 - 28/40 = 3/40$.

Questions Bonus

Bonus #1 On change légèrement l'expérience aléatoire de la question #1. À présent, il y'a 99 portes et en plus des 99 clefs (une qui débarre chaque porte), on rajoute une centième clef dans le sac et cette clef est un "passe-partout", c'est à dire qu'elle ouvre toutes les portes. On recommence la même procédure que décrit dans la question #1 (initialement toutes les portes sont barrées) et cette fois, évidemment, une fois la clef c_{99} déposée devant la porte p_{99}, il reste une clef, disons c_{100}, dans le sac qui demeure inutilisée. Quelle est la probabilité que toute les portes, i.e. les 99 portes, soient toutes débarrées? [10]

Ici $\mathcal{S}$ = partition($\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$) avec 0 correspondant au passe-partout et $\mathbb{P}(E) = |E|/100!$ Combien y-a-il d'éléments de $\mathcal{S}$ dans E = {les 99 portes sont débarrées}?

$$E = \{E \cap \{\text{passe-partout non utilisé}\}\} \cup \{E \cap \{\text{le passe partout est utilisé}\}\}$$

et dans le premier sous-ensemble il y'a un seul élément $s_0 = (1, 2, \ldots, 99, 0)$. Dans l'autre sous-ensemble il doit y avoir 98 portes avec leur propre clef et le passe-partout qui ouvre la porte restante. Comme le passe-partout peut ouvrir une des 99 portes, il y'a 99 éléments dans ce sous-ensemble

$$\{(0, 2, 3, \ldots, 99), (1, 0, 2, \ldots, 99), \ldots, (1, 2, \ldots, 98, 0)\}$$

donc

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{100!} + \frac{99}{100!} = \frac{100}{100!} = \frac{1}{99!}\,.$$

Bonus #2 Proposer une variable aléatoire discrète X, dont l'univers $\mathcal{S}_X$ et la fonction de masse p_X vérifient les deux conditions suivantes :

$$\text{(i)} \quad |\mathcal{S}_X| = 3\,, \qquad \text{(ii)} \quad \forall\, x \in \mathcal{S}_X\,, \qquad p_X(x) = x\,.$$

Pour répondre à la question, il suffira de spécifier $\mathcal{S}_X$. [10]

Il faut prendre un triplet de réels (x, y, z) dans $(0, 1)$ avec $x \neq y \neq z$ tels que $x + y + z = 1$.Par exemple, $1/2, 1/3, 1/6$ fonctionne.