Ce TP contient un peu plus de questions que d'habitude. Le TP porte sur les notions couvertes des pages 1 à 44 du chapitre 3, v.a. continues. Bien qu'en cours nous n'ayons pas travaillé sur les notions telles que fonctions de densité jointe, conditionelle et marginale, espérance et variance d'une v.a. continue, corrélation et indépendance entre deux v.a. continues, les idées sont vraiment similaires à ce qu'on a vu avec les v.a. discrètes. Alors, une lecture des définitions et des exemples des pages 1 à 44 du chapitre 3 sera suffisant pour travailler sur ces exercices.

#1 Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont des fonctions de densité d'une v.a. continue :

(a) $f(x) = 1/(1+x)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

(b) $f(x) = 1/x^2$ pour $x \in (0,1)$ et $f(x) = 0$ sinon.

(c) $f(x) = \cos(x) + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

#2 Préciser deux réels a et b ($a < b$) tels que la fonction g définie par

$$x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \sin(x) & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

soit la fonction de répartition d'une v.a. continue. Les réels a et b sont-ils uniques?

#3 Soit $\alpha_1 > 0$ et f_1 la fonction définie par

$$x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \alpha_1/(x^2+1) & \text{si} \quad x \geq 0 \,. \end{cases}$$

Est-il possible de choisir α_1 de sorte à ce que f_1 soit la fonction de densité d'une v.a. continue? On pourra se rappeler que la dérivée de la fonction arc tangente[1] est donnée par

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

et que $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\pi/2$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$. Même question pour la fonction f_2 définie par

$$x \in \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \frac{\alpha_2}{x^2+1}$$

où $\alpha_2 > 0$.

#4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Est-il possible que f et g soient toutes les deux des fonctions de densité?

#5 Soit X la v.a. dont la fonction de répartition est donnée par

$$x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2\,, \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \in [2,3]\,, \\ 1 & \text{si} \quad x > 3\,. \end{cases}$$

(a) Calculer la probabilité des événements suivants $E_1 = \{X \leq 8/3\}$, $E_2 = \{X \in (0, 5/2)\}$ et $E_3 = \{X > 2 + \sqrt{2}\}$. [2]

(b) Calculer la probabilité de $E_1 \cup E_2$ et de $E_1 \cap E_3$.

(c) Trouver le nombre réel a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) = 9/16$.

On rappelle que l'espérance de X est le nombre réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x\,,$$

où f_X est la fonction de densité de la v.a. X.

(d) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

[1] La fonction arc tangente est la fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à $(-\pi/2, \pi/2)$

[2] On rappelle que $\sqrt{2} \in (1.41, 1.42)$

#6 Soit X une v.a. continue de fonction de densité f_X qui vérifie $f_X(x) = f_X(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.

(b) Montrer que $F_X(0) = 1/2$ avec F_X la fonction de répartition de X.

(c) Montrer que $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

#7 Soit X une v.a. continue de fonction de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Soit a et b deux réels non nuls et soit la v.a. $Y = aX + b$. L'objectif de cette question est d'exprimer les fonctions de répartition et densité de Y, en fonction de F_X, f_X, a et b.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les événements $\{Y \leq t\}$ et $\{X \leq (t-b)/a\}$ sont égaux.

(b) En déduire F_Y, la fonction de répartition de Y, en fonction de F_X, a et b.

(c) En déduire f_Y, la fonction de densité de Y, en fonction de f_X, a et b.

#8 Soit X une v.a. continue de fonction de densité f_X. Comme dans le cas discret, la variance d'une v.a. est définie par $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

(a) Montrer que $\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_X(x)\mathrm{d}x$ avec $\mu = \mathbb{E}(X)$.

(b) On suppose que $f_X(x) = f_X(-x)$ et $f_X(x) = 0$ si $x \in (0,1)$. Montrer alors que $\mathbb{E}(X^2) > \mathbb{E}(X)$ et que $\mathrm{var}(X) = 2\int_1^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x$.

(c) Quelle v.a. a la plus grande variance entre

- la v.a. Y dont la densité est $f_Y(y) = (3/2)y^2$ pour $y \in (-1,1)$ et $f_Y(y) = 0$ si $|z| > 1$.
- la v.a. Z dont la fonction de répartition est

$$z \in \mathbb{R}, \qquad F_Z(z) = \max\left\{0, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^z\right\}.$$

#9 Soit X une v.a. continue et $Y = \alpha X$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Est-il vrai que

$$\mathrm{var}(Y) > \mathrm{var}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1\,?$$

#10 Soit deux v.a. X et Y définies simultanément/jointement par la fonction de densité jointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha(x + \frac{1}{xy}) & \text{si} \quad 1 < x < \sqrt{2} \text{ et } 1 < y < 2\,, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que pour définir une fonction de densité jointe, $f_{X,Y}$ doit être non-négative (i.e. positive ou nulle) et “intégrer à 1”, i.e. vérifier

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1\,.$$

(a) Calculer α.

(b) Donner les fonctions de densité marginale de X et Y, i.e.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x$$

(c) Donner les fonctions de densité conditionnelle de $X \mid Y$ et $Y \mid X$, i.e.

$$f_{X\mid Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{et} \quad f_{Y\mid X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\,.$$

(d) En déduire la probabilité des événements suivants :

i. $\{X < 4/3\}$

ii. $\{X < 4/3\} \cup \{Y < 1\}$

iii. $\{X < 4/3\} \cap \{Y < 1\}$

iv. $\{X < 4/3\}$ sachant que $\{Y = 1\}$

v. $\{X < 4/3\}$ sachant que $\{Y \leq 1\}$

#11 Si deux v.a. Z et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(ZY) = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(Y)$. Montrer que

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{2}\mathbb{E}((Z-Y)^2)$$

où X et Y sont deux v.a. aléatoires de même loi que X.