#1 Soit une v.a. X d'univers $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On suppose que X est une v.a. uniforme sur $\mathcal{S}_X$. Donner son espérance et sa variance.

[on pourra utiliser que $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.]

#2 On considère un ensemble dénombrable $\mathcal{S}_X \subset \mathbb{R}$ et une v.a. X dont l'univers est $\mathcal{S}_X$ et ayant une certaine fonction de masse p_X. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la v.a. Y par $Y = \phi(X)$.

(a) Donner l'univers de $\mathcal{S}_Y$ en fonction de ϕ et $\mathcal{S}_X$.

(b) Montrer que, à part pour un choix particulier de ϕ, les v.a. X et Y sont dépendantes, i.e. X et Y ne sont pas indépendantes.

[aide : pour le cas particulier, réfléchir à la possibilité que ϕ annihile/anéantisse l'aléatoire de X...]

#3 Soit X et Y deux v.a. telles que X est uniforme sur $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et Y vérifie :

- conditionnellement à $\{X \text{ est pair}\}$, $Y = 0$ avec probabilité 1,
- conditionnellement à $\{X \text{ est impair}\} \cap \{X = x\}$, $Y = -x^2$ avec probabilité $1/x$ et $Y = 1/x$ avec probabilité $1 - 1/x$.

(a) Donner l'univers de Y, noté $\mathcal{S}_Y$.

(b) Donner la fonction de masse de Y, conditionnellement à $X = x$, notée $p_{Y|X=x}$.

(c) En déduire la fonction de masse de Y marginale, notée p_Y.

(d) Calculer $\mathrm{var}(X + Y)$.

#4 Soit deux v.a. X et W indépendantes. On donne que $W \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ et que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathrm{var}(X) = 1$. On définit une autre v.a. Y par

$$Y = \alpha X + \beta\left(W - \frac{1}{2}\right)$$

où α et β sont deux réels. Montrer que $\mathrm{cov}(X, Y) = \alpha$.

#5 Toute v.a. X est caractérisée par sa *fonction caractéristique* définie par

$$\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} e^{itx} p_X(x).$$

(a) Montrer que deux v.a. X et Y qui ont la même fonction de masse ont la même fonction caractéristique. Il se trouve que la réciproque est aussi vraie (nous l'admettons).

(b) Soit X et Y deux v.a. de Poisson indépendantes, $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ avec $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Montrer que

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\mu + \lambda).$$

[on utilisera que si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ alors $\phi_X(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$.]

(c) Dans une certaine compétition de Soccer, le nombre de buts inscrits au cours d'un match (un match dure 90 minutes + arrêts de jeu) peut être modélisé par une v.a. de loi de Poisson. En particulier :

- du début du match jusquà la 80-ème minute, le nombre de buts inscrits par tranche de 10 minutes est $X \sim \text{Poisson}(1/3)$
- à partir de la 80-ème minute jusqu'à la fin du match, le nombre de buts inscrits est $X \sim \text{Poisson}(1)$.

Donner la probabilité que dans un certain match de cette compétition, 6 buts ou plus soient inscrits et donner le nombre moyen de but(s) inscrit(s) dans un match de cette compétition.