Partie A Deux participants à un jeu sont assis autour d'une table sur laquelle se trouve 10 jetons indiscernables au toucher. Sur chaque jeton est imprimé un symbole : soit une des lettres $\{A, B, C, D, E\}$ ou soit un des chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Les jetons sont tous différents. Les jetons sont retournés sur la table (face cachée) de sorte à ce qu'ils semblent tous identiques. Un arbitre place 5 jetons qu'il séléctionne *au hasard*[1] parmi les 10 disponibles dans un sac. L'objectif des joueurs est de savoir s'il y'a plus de lettres ou de chiffres dans le sac. Pour cela, ils vont pouvoir obtenir une connaissance *partielle* du sac au moyen d'une des deux stratégies suivantes :

- Stratégie 1 : piger sans remise 3 jetons du sac.
- Stratégie 2 : piger avec remise un jeton du sac 10 fois de suite.

Quel serez votre choix?

#1 On considère la variable aléatoire (v.a.) X qui donne le nombre de chiffre(s) dans le sac. Donner l'univers de X, notée $\mathcal{S}_X$, et sa fonction de masse, notée $p_X : \mathcal{S}_X \to [0, 1]$. Pour la fonction de masse, on l'exprimera sous forme de fonction de x.

#2 Décrire l'événement $E = \{$il y'a plus de jetons avec un chiffre que de jeton(s) avec une lettre$\}$ au moyen d'événements faisant intervenir la v.a. X et calculer $\mathbb{P}(E)$.

On introduit deux autres v.a. : Y donne le nombre de chiffre(s) observé(s) si la Stratégie 1 est utilisée et Z donne le nombre de chiffre(s) observé(s) si la Stratégie 2 est utilisée.

#3 Donner l'univers des v.a. Y et Z, notés $\mathcal{S}_Y$ et $\mathcal{S}_Z$.

Cas particulier : on suppose à présent que $\{X = 1\}$, c'est-à-dire qu'il y'a un seul chiffre dans le sac (et quatre lettres donc).

#4 Sachant que $\{X = 1\}$, préciser ce que deviennent les univers $\mathcal{S}_Y$ et $\mathcal{S}_Z$.

#5 Donner les probabilités (sous forme de fraction ou approximativement, à une décimale près) de l'événement $\{Y = 1\}$ et $\{Y = 2\}$ (sachant que $\{X = 1\}$). Pour cela on pourra commencer par observer que, sachant que $\{X = 1\}$, le sac est un ensemble du type $\mathcal{S} = \{C, L_1, L_2\}$ et que la Stratégie 1 est une expérience aléatoire équiprobable d'univers $C_3(\mathcal{S})$.

#6 Même question pour Z, i.e. donner la probabilité des événements $\{Z = 1\}$ et $\{Z = 2\}$ (sachant que $\{X = 1\}$). On pourra commencer par traduire la Stratégie 2 en une expérience aléatoire et préciser son univers et sa probabilité.

On généralise le raisonnement précédent en supposant que $\{X = x\}$ pour un $x \in \mathcal{S}_X$ inconnu mais fixe. Dans une telle situation, la fonction $p_{Y\,|\,X=x} : \mathcal{S}_Y \to [0, 1]$ définie par

$$y \in \mathcal{S}_Y\,, \qquad p_{Y\,|\,X=x}(y) = \mathbb{P}(Y = y\,|\,X = x)\,,$$

est appelée fonction de masse de Y *conditionnellement* à $\{X = x\}$.

#7 En généralisant le raisonnement de la question #5, donner $\mathbb{P}(Y = y\,|\,X = x)$ sous forme d'un tableau du type en gardant les probabilités sous forme exacte (i.e. pas d'approximation).

$\mathbb{P}(Y = y\,|\,X = x)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 0$				
$x = 1$				
$x = 2$				
$x = 3$				
$x = 4$				
$x = 5$				

#8 Donner la fonction de masse conditionnelle de Z sachant que $\{X = 0\}$, puis, sachant que $\{X = 5\}$.

#9 Montrer que pour $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ la fonction de masse conditionnelle de Z sachant $\{X = x\}$ est donnée par

$$z \in \mathcal{S}_Z\,, \qquad p_{Z\,|\,X=x}(z) = \binom{x}{z}\left(\frac{x}{5}\right)^z\left(1 - \frac{x}{5}\right)^{x-z}\,.$$

[1] equiprobabilité de tous les sacs possibles

On passe à présent à la partie intéressante du problème. Un joueur qui choisit la Stratégie 1 observe l'information $\{Y = y\}$ pour un $y \in \mathcal{S}_Y$ tandis qu'un joueur qui choisit la Stratégie 2 observe l'information $\{Z = z\}$ pour un $z \in \mathcal{S}_Z$. On souhaiterait savoir comment prédire (rationnellement) si l'événement $E = \{$il y'a plus de chiffres que de lettres dans le sac$\}$ est réalisé ou non, étant donné l'information observée. Pour cela, on va commencer par calculer la probabilité de $\{X = x\}$ sachant $\{Y = y\}$ et la probabilité de $\{X = x\}$ sachant $\{Z = z\}$, c'est à dire les fonctions de masse conditionnelles

$$x \in \mathcal{S}_X\,, \qquad p_{X\,|\,Y=y}(x) = \mathbb{P}(X = x\,|\,Y = y)\,, \qquad p_{X\,|\,Z=z}(x) = \mathbb{P}(X = x\,|\,Z = z)\,.$$

#10 Quel résultat du cours permet de justifier que pour tout $x \in \mathcal{S}_X$,

$$\mathbb{P}(X = x\,|\,Y = y) = \frac{\mathbb{P}(Y = y\,|\,X = x)\mathbb{P}(X = x)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(Y = y\,|\,X = x)\mathbb{P}(X = x)}{\sum_{x'=0}^{5}\mathbb{P}(Y = y\,|\,, X = x')\mathbb{P}(X = x')} = \frac{p_{Y\,|\,X=x}(y)p_X(x)}{\sum_{x'=0}^{5} p_{Y\,|\,X=x'}(y)p_X(x')}\ ?$$

#11 Compléter les deux tableaux suivants (ne pas faire d'approximation).

$\mathbb{P}(X = x\,\|\,Y = y)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$y = 0$						
$y = 1$						
$y = 2$						
$y = 3$						

$\mathbb{P}(X = x\,\|\,Z = z)$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$z = 0$						
$z = 1$						
$z = 2$						
$\vdots$						
$z = 10$						

#12 Justifier qu'un individu rationnel utilisant la Stratégie 1 qui observe $\{Y = y\}$ prédira que l'événement

$$E = \{\text{il y'a plus de chiffres que de lettre(s) dans le sac}\} = \{X > 2\}$$

se produit si $\mathbb{P}(E\,|\,Y = y) = \mathbb{P}(X > 2\,|\,Y = y) \geq 0.5$. De manière similaire, un individu rationnel utilisant la Stratégie 2 qui observe $\{Z = z\}$ prédira que E se produit si $\mathbb{P}(X > 2\,|\,Z = z) \geq 1/2$.

#13 Donner pour chaque $y \in \mathcal{S}_Y$ et $z \in \mathcal{S}_Z$, la règle de décision pour les deux stratégies.

Nous sommes à présent en mesure de juger de l'efficacité des deux stratégies.

#14 Justifier pourquoi il faut (et il suffit) de comparer les probabilités

$$\alpha_1 = \mathbb{P}(\{Y > 1\} \cap \{X \leq 2\})\,, \qquad \alpha_2 = \mathbb{P}(\{Z \geq 5\} \cap \{X \leq 2\})\,,$$

interpréter et calculer les probabilités α_1 et α_2 et conclure.

Partie B Ces questions rapides (et un peu difficiles) sont toutes relatives à une variable aléatoire X d'univers $\mathcal{S}_X$ et de fonction de masse p_X. L'expérience aléatoire sous-jacente sur laquelle est définie X n'est pas spécifiée.

#1 Donner un exemple (i.e. spécifier $\mathcal{S}_X$ et p_X) de v.a. X telle que p_X soit décroissante.

#2 Donner un exemple de v.a. tel que $\mathcal{S}_X = \mathbb{Z}$ et $p_X(x) = p_X(-x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.

#3 Est-il possible que $\mathcal{S}_X$ soit dénombrable non fini et que p_X soit croissante?

#4 Est-il possible que $\mathcal{S}_X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$[2] et que p_X soit constante?

[2] $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels

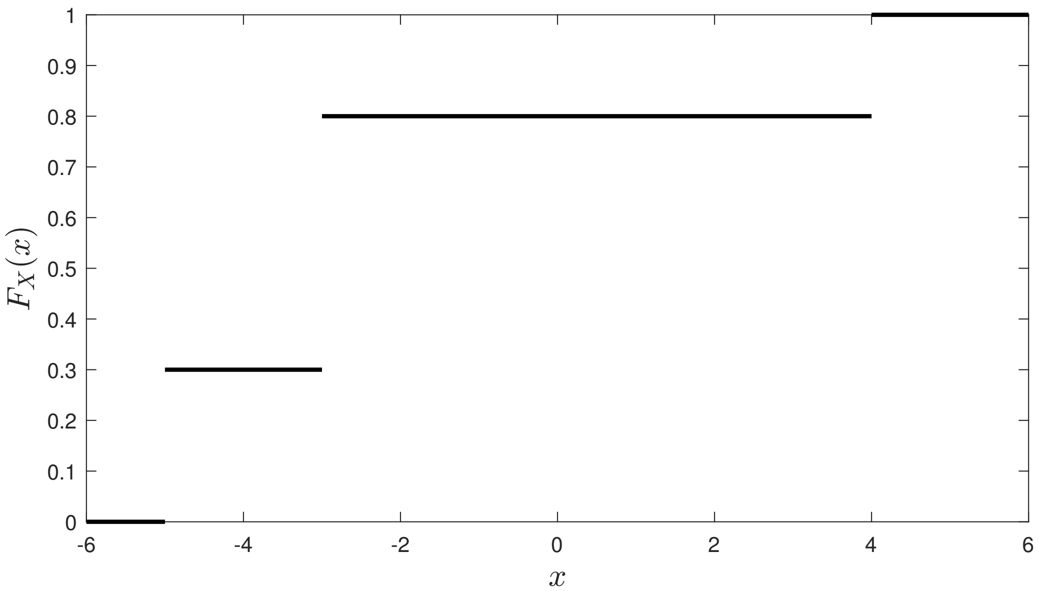
#5 Soit $\mathcal{S}_X = \{k\pi/6 \ : \ k \in \{0, 1, \ldots, 6\}\}$ et p_X constante sur $\mathcal{S}_X$. Soit $Y = \cos(X)$ si $X \neq 0$ et $Y = 10$ si $X = 0$. Donner l'univers de Y noté $\mathcal{S}_Y$ et sa fonction de masse p_Y.

#6 Soit $\lambda > 0$. L'ensemble $\mathcal{S}_X = \mathbb{N}$[3] et la fonction

$$x \in \mathcal{S}_X\,, \qquad p_X(x) = \lambda^x \frac{e^x}{x!}\,.$$

définissent-ils bien l'univers et la fonction de masse d'une v.a. X?

#7 Que peut on dire sur la v.a. X dont la fonction de répartition est illustrée par le graphique suivant?



[3] i.e. l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots\}$