$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \qquad \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \frac{1}{e}$

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1 \;\Rightarrow\; e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$e^x = \sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \log(1+x) = \sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{for } |x|<1 \qquad \frac{x^m}{1-x} = \sum_{n\ge m} x^n \quad \text{for } |x|<1 \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n\ge 0}\binom{n}{\alpha}x^n \quad \binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!}, |x|<1, \alpha\in\mathbb{C}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^5) \qquad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + o(x^5) \qquad \sin x = \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cos x = \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\arcsin x = \sum_{n\ge 0}\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} \quad \text{for } |x|<1 \qquad \arctan x = \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad \text{for } |x|<1 \qquad \sinh x = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \cosh x = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Calcolo potenzale (Integrazione lungo poligonali) $U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x,y,t)dt$

Formula Gauss-Green: D dominio regolare del piano, $\bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $\qquad \int_{\partial + D}\bar{F}\cdot d\bar{s} = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy \qquad \int_{\partial+D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$

Calcolo delle aree con Gauss-Green: se $Q_x(x,y) - P_y(x,y) = 1$ $\qquad \int_{\partial+D} Pdx + Qdy = \iint_D 1dxdy = Area(D) = \int_{\partial+D} -ydx = \int_{\partial+D} xdy = \frac{1}{2}\int_{\partial+D}(-ydx + xdy)$

Superfice: semplice se per (u,v) e $(u',v') \in D$ $\quad \bar{r}(u,v) = \bar{r}(u',v') \Rightarrow (u,v) = (u',v')$ $\qquad$ regolare se $\quad \bar{r}_u(u,v)\times\bar{r}_v(u,v) = \bar{0}$

Teorema di Stokes: $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $S = \bar{r} : D$ (domino regolare del piano) $\to \mathbb{R}^3$ $\qquad \int_S \bar{\nabla}\times\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = \int_{\bar{r}(\partial+D)}\bar{F}\cdot d\bar{s}$

Teorema della divergenza: $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3) : A$ (aperto) $\subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $C \subset A$ $\qquad \iint_{\partial D}\bar{F}\cdot\bar{n}_e\,dS = \iiint_C \bar{\nabla}\cdot\bar{F}dxdydz$

$(+)\,(x_1,\,y_1) + (x_2,\,y_2) = (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \qquad (\cdot)\,(x_1,\,y_1)\cdot(x_2,\,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \qquad |Re(z)|, |Im(z)| \le |z| \le |Re(z)| + |Im(z)|$

$\left|z^k\right| = |z|^k \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad |z\cdot w| = |z||w|$

Serie telescopica: $\quad \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1 \qquad \sum_{n\ge 1}\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty}\log(N+1) - \log(1) = +\infty \qquad \alpha_0 + \sum_{n\ge 1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$

Serie geometrica: $\quad \sum_{n\ge 0} q^n \qquad (i)\, |q| < 1$ converge con somma $\frac{1}{1-q} \qquad (ii)\, |q| > 1 \lor q = 1$ diverge $\qquad (iii)\, |q| = 1 \land q \ne 1$ indeterminata

Serie armonica generalizzata: $\quad \sum_{n\ge 1} n^{-\alpha} \quad \alpha\in\mathbb{R} \qquad (i)\,\alpha > 1$ converge $\qquad (ii)\,\alpha \le 1$ diverge

Serie di Leibniz $\quad \sum_{n\ge 0}(-1)^n b_n \quad : \quad b_n > 0 \quad\land\quad b_{n+1} < b_n \quad\land\quad b_n \to 0\,(n\to\infty) \Rightarrow$ la serie converge semplicemente e inoltre $\left|\sum_{n\ge 0}(-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n b_n\right| \le b_{N+1}$

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinchè $\sum_{n\ge 0} a_n$ converga: $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- Criterio del confronto $\quad S_1 = \sum_{n\ge 0} a_n \land S_2 = \sum_{n\ge 0} b_n : \forall n \ge n_0 0 \le a_n \le b_n \Rightarrow \qquad (i)\, S_1$ divergente $\Rightarrow S_2$ divergente $\qquad (ii)\, S_2$ convergente $\Rightarrow S_1$ convergente

- Criterio del confronto asintotico $\quad \sum_{n\ge 0} a_n \land \sum_{n\ge 0} b_n : a_n, b_n > 0 \Rightarrow \qquad (i)\, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R} \land \sum_{n\ge 0} b_n\, conv. \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n\, conv. \qquad (ii)\, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\in\bar{\mathbb{R}}_{\ne 0} \land \sum_{n\ge 0} b_n\, div. \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n\, div.$

(corollario) $\quad (iii)\, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\in\mathbb{R}_{\ne 0} \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n \land \sum_{n\ge 0} b_n$ hanno lo stesso carattere

- Criterio del rapporto (corollario) $\quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \forall n a_n > 0 \land l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \qquad (i)\, l > 1 \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n\, div. \qquad (ii)\, l < 1 \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n\, conv. \qquad (iii)\, l = 1$ non posso dire nulla

- Criterio della radice (corollario) $\quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \forall n a_n > 0 \land l = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} \Rightarrow \qquad (i)\, l > 1 \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n\, div. \qquad (ii)\, l < 1 \Rightarrow \sum_{n\ge 0} a_n\, conv. \qquad (iii)\, l = 1$ non posso dire nulla

- Criterio di Maclaurin $\quad \forall n\; a_n = f(n) \land f$ non è crescente $\Rightarrow \qquad \sum_{n\ge 0} a_n$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hanno lo stesso carattere e inoltre $\sum_{n\ge 2} a_n \le \int_1^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{n\ge 1} a_n$

Somma tra serie e prodotto per uno scalare $\quad S = \sum_{n\ge 0} a_n$ e $T = \sum_{n\ge 0} b_n$ entrambe convergenti $\Rightarrow \qquad (i)\,\forall\lambda\in\mathbb{C} \quad \lambda S = \sum_{n\ge 0}(\lambda a_n) \qquad (ii)\, S + T = \sum_{n\ge 0}(a_n + b_n)$

Prodotto tra serie (secondo Cauchy) $\quad S = \sum_{n\ge 0} a_n$ e $T = \sum_{n\ge 0} b_n \quad c_n := \sum_{k\ge 0} a_k b_{n-k} \Rightarrow \qquad S\cdot T = \sum_{n\ge 0} c_n$

Convergenza puntuale (semplice) di (f_n), a $f : S \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \quad z \in S$ $\quad \Leftarrow$ convegenza assoluta

Convergenza uniforme di (f_n), a $f : S \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad \forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n \geq N$ oppure $a_n := \sup |f_n(z) - f(z)| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\quad \Rightarrow$ convergenza puntuale

Convergenza totale (normale) di $\sum_{k\geq 0} u_k$, a $u : S \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se $\exists M_k \geq 0 : \sum_{k\geq 0} M_k$ conv e inoltre $\forall k \geq 0 \quad \sup |u_k(z)| \leq M_k$ $\quad \Rightarrow$ convergenza assoluta, convergenza uniforme

Continuità della funzione limite $\quad (i)\,(f_n)$ conv uniforme a f $\quad (ii)\,\forall (f_n)\ (f_n)$ continua in z_0 (definitivamente) $\quad \Rightarrow f$ continua in z_0

Passaggio di limite sotto segno di $\int$ $\quad (i)\,(f_n)$ conv uniforme a f $\quad (ii)\,\forall (f_n)\ (f_n)$ continua su $[a, b]$ (definitivamente) $\quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \forall x_0, x \in [a, b]$

Passaggio di limite sotto segno di ∂ $\quad (i)\,\forall f_n\ f_n \in C' : f_n' \to g_n$ uniformemente su (a, b) $\quad (ii)\,f_n \to f$ su (a, b) $\quad \Rightarrow \quad (i) \lim_{n\to\infty} \partial[f_n] = \partial[\lim_{n\to\infty} f_n] \quad (ii)\,f \in C'(a, b)$

Teorema della chiusura $\quad \{u_k\} \in C(\mathbb{C})$ $\quad (i) \sum_{k\geq 1} u_k$ conv tot su $S \in \mathbb{C} \Rightarrow$ conv tot su $\bar{S}$ $\quad (ii) \sum_{k\geq 1} u_k$ conv unif su $S \in \mathbb{C} \Rightarrow$ conv unif su $\bar{S}$

Raggio di convergenza $\rho \in [0, +\infty]$ $\quad A = \{u \in \mathbb{C} : \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ conv in $z = u\} \in \mathbb{C}$ $\quad \Rightarrow \rho := \sup\{|z|\} \quad z \in A$

Teorema del disco di convergenza $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ centrata in 0 e $\Rightarrow$ $\quad (i)\,\rho = 0 \Rightarrow$ conv. $z = 0$ $\quad (ii)\,\rho \in (0, +\infty) \Rightarrow$ conv ass $z \in B_\rho(0) \quad \wedge \quad$ conv tot $z \in B_r(0)\ 0 < r < \rho$

$(iii)\,\rho = +\infty \Rightarrow$ conv ass $\forall z \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad$ conv tot $z \in B_r(0)\ 0 < r$ $\quad$ il comportamento agli estremi deve essere studiato singolarmente.

Calcolo raggio di convergenza $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Se esiste il limite $\in \bar{\mathbb{R}}$ $\quad l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{l}$

Criterio di Abel $\quad \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ con ρ raggio di conv $\quad (i)$ conv sempl in $x = x_0 + \rho \Rightarrow$ conv unif in $[x_0, x_0 + \rho]$ $\quad (ii)$ conv sempl in $x = x_0 - \rho \Rightarrow$ conv unif in $[x_0 - \rho, x_0]$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \qquad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \qquad \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2} \quad t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

---

cilindro retto $\quad r(u, v) = \begin{cases} x = \gamma_1(u) \\ y = \gamma_2(u) \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ $\qquad$ toro $\quad r(\theta, \phi) = \begin{cases} x = (a + b\cos\theta)\cos\phi \\ y = (a + b\cos\theta)\sin\phi \\ z = b\sin\theta \end{cases} \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

sfera $\quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad r(\theta, \phi) = \begin{cases} x = (x_0 + r\cos\theta)\sin\phi \\ y = (y_0 + r\sin\theta)\sin\phi \\ z = z_0 + b\sin\theta \end{cases} \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ $\qquad$ cono $\quad r(\theta, \phi) = \begin{cases} x = au\cos v \\ y = au\sin v \\ z = bu \end{cases}$

ellissoide $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad r(\theta, \phi) = \begin{cases} x = a\cos\theta\sin\phi \\ y = b\sin\theta\sin\phi \\ z = c\sin\theta \end{cases} \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$
