Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В четырех частях

Часть 1

**Н. В. Лапицкая, Н. П. Можей**

# ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»*

Минск БГУИР 2018

УДК 519.873(076)
ББК 22.18я73
М54

Рецензенты:

кафедра информатики и веб-дизайна учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет» (протокол №7 от 22.02.2018);

главный научный сотрудник государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор О. И. Костюкова

**Методы** оптимизации. В 4 ч. Ч. 1 : Линейная оптимизация
М54 и ее приложения : учеб.-метод. пособие / Н. В. Лапицкая, Н. П. Можей. – Минск : БГУИР, 2018. – 179 с. : ил.
ISBN 978-985-543-414-7 (ч. 1).

Содержит теоретический материал по первому разделу дисциплины «Методы оптимизации» в рамках действующей программы. Предназначено для студентов третьего курса специальности «Программное обеспечение информационных технологий» как очной, так и дистанционной форм обучения. Будет полезно студентам и других специальностей, а также всем интересующимся методами оптимизации.

**УДК 519.873(076)**
**ББК 22.18я73**

**ISBN 978-985-543-414-7 (ч. 1)**
**ISBN 978-985-543-413-0**

## Содержание

## Введение

Поскольку современные техника, наука, экономика, финансы существенно используют экстремальные свойства процессов и систем, а на первый план выдвигаются вопросы качества принимаемых решений, возрастает роль методов и алгоритмов решения оптимизационных задач. Целью преподавания дисциплины «Методы оптимизации» является изучение математического аппарата и методов решения экстремальных задач, возникающих в практической деятельности, подготовка специалистов, владеющих систематизированными знаниями и обладающих необходимыми навыками по методам оптимизации. Задачами изучения методов оптимизации являются: выработка навыков применения методов оптимизации и алгоритмов решения прикладных задач; подготовка студентов к их внедрению; приобретение знаний по линейной оптимизации, включая задачи распределения ресурсов, элементы теории двойственности, оптимизации поставок, размещения и концентрации производства; выработка навыков применения методов оптимизации в теории игр, сетевом планировании и управлении; приобретение знаний по нелинейной оптимизации и ее приложениям, в том числе по поисковым методам одномерной и многомерной, локальной и глобальной, условной и безусловной оптимизации; овладение элементами многокритериальной оптимизации и динамического программирования. Студент должен научиться моделировать оптимизационные задачи; овладеть навыками выбора подходящих методов оптимизации и их применения; проводить анализ результатов; корректировать результат при изменении исходных данных.

Издание написано на основании курса лекций по методам оптимизации, читаемых студентам учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники». В части первой рассматриваются основные задачи и методы математического программирования и их классификация. Основное внимание уделяется задачам линейного программирования, приводятся примеры моделей, сводящихся к таким задачам, даются правила построения двойственных задач, рассматриваются задачи оптимизации поставок, даются элементы теории игр, сетевого планирования и управления. Все основные понятия и теоремы, приведенные в учебно-методическом пособии, иллюстрируются примерами. Для лучшего усвоения изложенного материала формулируются упражнения.

# 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Понятие «оптимизация» прочно вошло в нашу жизнь: если у задачи существует несколько решений, то естественно выбрать то из них, которое является оптимальным. Основные методы оптимизации связаны с вопросами нахождения экстремумов функций. Пусть, например, на некотором множестве $U$ задана функция $I$ со значениями в множестве $\mathbf{R}$, т. е. $I: U \to \mathbf{R}$. Следующая задача относится к числу оптимизационных: найти $u \in U$, такое, чтобы $I(u) \le I(\nu)$ для любых $\nu \in U$, что записывается в виде

$$\begin{cases} I(u) \to \min, \\ u \in U. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $U$ представляет собой множество возможных способов достижения определенной цели (или множество способов функционирования какой-нибудь системы). В прикладных задачах принадлежность к множеству $U$ выражается с помощью некоторых ограничений. Поэтому $U$ часто называют *множеством* (областью) *ограничений.* Функция $I$ представляет собой *критерий качества*, который предопределяет наш выбор из множества возможных решений. В задаче (1.1) речь идет о том, чтобы выбрать решение $u$, которое *минимизирует* значение критерия $I$ на множестве $U$. Если в (1.1) заменить $I$ на $-I$, то *задача минимизации* преобразуется в *задачу максимизации.* Задачи оптимизации встречаются в различных сферах человеческой деятельности и подразумевают выбор *оптимального* (в некотором смысле наилучшего) решения по сравнению с другими возможными вариантами. На практике критерием $I$ может быть стоимость, выработка, прибыль, время и т. д.

В данном разделе изучаются различные задачи нахождения *экстремума* (минимума, максимума) *функций* и *функционалов*. Приведем классификацию *оптимизационных задач*.

## 1.1. Задачи математического программирования

***Математическое программирование*** (МП) представляет собой дисциплину, содержание которой составляют теория и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). МП является одним из разделов *науки об исследовании операций*. В МП можно выделить два направления:

- к первому относятся *детерминированные задачи*, когда вся исходная информация является полностью определенной;

- ко второму, так называемому *стохастическому программированию*, относятся задачи, в которых либо исходная информация содержит элементы неопределенности, либо некоторые параметры носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками.

Наименование «математическое *программирование*» связано с тем, что целью решения задач является выбор *программы* действий. Например, ряд производственных и экономических задач связан с распределением ресурсов, которые, как правило, являются ограниченными. Кроме того, само распределение возможно не единственным образом. Необходимую для выпуска продукцию можно получить различными способами (за счет выбора вида сырья, технологии производства, применяемого оборудования, организации работы на рабочих местах и всего производственного процесса). При этом каждый способ распределения ресурсов, оцениваемый с точки зрения некоторого *критерия* (например, прибыли, объема выпускаемой продукции, удовлетворения спроса потребителей и др.), характеризуется определенным его значением. При решении задачи необходимо найти максимальное (или минимальное) значение критерия. Таким образом, требуется выбрать такое распределение ресурсов (программу, план), которое доставляло бы *экстремальное* значение выбранному критерию. Такую программу (план) называют *оптимальной* [3, 5].

*Общая задача МП* формулируется следующим образом: найти вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений в виде равенств

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \; i = \overline{1, k},$$

и неравенств

$$g_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le b_j, \; j = \overline{k+1, m},$$

и доставляющий экстремум целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (скалярной функции векторного аргумента):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \text{extr}.$$

Предполагается, что функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и постоянные $b_l$, $l = \overline{1, m}$, известны. Зачастую на некоторые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ накладываются условия неотрицательности: $x_j \ge 0$. Если

$$g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \; i = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

где $a_{ij}$, $c_j$ – известные постоянные, то получаем *задачу линейного программирования* (ЗЛП). Если хотя бы одна из функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нелинейна, то соответствующая задача является *задачей нелинейного программирования.*

Наиболее изученным разделом МП является *линейное программирование* (ЛП). Для решения задач ЛП разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ. Среди задач *нелинейного программирования* наиболее глубоко изучены *задачи выпуклого программирования*. Это задачи минимизации выпуклой (или максимизации вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве. В свою очередь, среди задач выпуклого программирования наиболее подробно исследованы *задачи квадратичного программирования*. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений либо некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования (ЗМП) являются *задачи целочисленного* (ЗЦП), *параметрического* (ЗПП) и *дробно-линейного* (ЗДЛП) *программирования.* В ЗЦП неизвестные могут принимать только целочисленные значения. В ЗПП целевая функция и/или функции, определяющие область возможных изменений переменных, зависят от некоторых параметров. В ЗДЛП целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций (линейными являются и функции, определяющие область возможных изменений переменных). На рис. 1.1 приведено описание задач математического программирования.

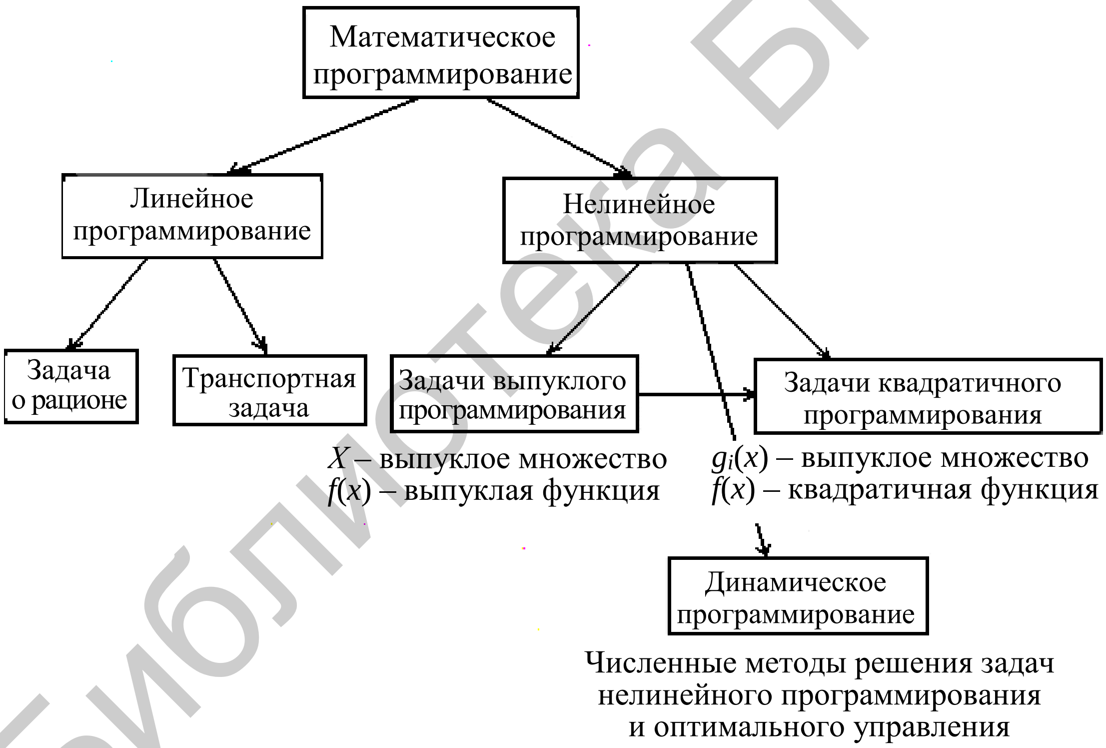



Рис. 1.1. Описание задач математического программирования

Выделяют также отдельные классы задач *стохастического* и *динамического программирования*. Если в целевой функции или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такая задача относится к задаче *стохастического программирования*. Задачи, процесс поиска решения которых является многоэтапным, относятся к задачам *динамического программирования*.

Типичная ЗМП в векторной форме может быть записана в виде

$$\begin{cases} f(x) \to \text{extr (min, max)}, \\ g(x) = 0, \\ h(x) \le 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – функции векторного аргумента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$: $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{m-k}$, или в более общем виде (ср. с задачей (1.1)):

$$\begin{cases} f(x) \to \text{extr}, \\ x \in X \subset \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Если ищутся только целочисленные значения компонент вектора $x$, то ЗМП (1.3) – *задача целочисленного программирования*. Если рассматриваются задачи оптимизации, где требуется одновременно найти экстремум нескольких целевых функций $f_i(x), i = \overline{1, p}$, то исследуемая задача относится к *многокритериальным задачам оптимизации*.

### 1.2. Задачи вариационного исчисления

К задачам вариационного исчисления (ЗВИ) [1, 2] относят задачи нахождения *экстремумов функционалов* при различных ограничениях (связях).

Если каждой функции $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, из некоторой совокупности $Y = \{y = y(x),\ x \in [a; b]\}$ функций, заданных на отрезке $[a;\ b]$, ставится в соответствие некоторое число $I(y)$, то говорят, что задан *функционал.*

Например, $I(y) = y^2(a) + 2$, $I(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ – функционалы.

*Простейшая ЗВИ* состоит в нахождении такой *функции* $y = y(x) \in Y$, $x \in [a;\, b]$, которая доставляет экстремум функционалу $I(y)$ и для заданных чисел $y_0$, $y_1$ удовлетворяет граничным условиям $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$:

$$\begin{cases} I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx \to \text{extr}, \\ y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \end{cases}$$

### 1.3. Задачи оптимального управления

Чаще всего задачи оптимального управления (ЗОУ) [1, 2, 6] связаны с оптимизацией *функционалов* на *траекториях динамических систем*. Рассмотрим *задачу оптимального быстродействия.* Пусть имеется динамическая система (т. е. некоторый объект, поведение которого описывается, например, системой обыкновенных дифференциальных уравнений)

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad t > t_0, \tag{1.4}$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n$ – *вектор состояния* объекта; $u(t) \in \mathbf{R}^r$ – *вектор управляющих воздействий (управление)*; $u(\cdot) \in U$ , т. е. значения управляющего воздействия принадлежат множеству $U$ кусочно-непрерывных $r$-вектор-функций, $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \times \tilde{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}^n$, $\tilde{\mathbf{R}} = \{t \in \mathbf{R},\ t > t_0\}$; $f$ – заданная $n$-вектор-функция; $t$ – время, $t \in \mathbf{R},\ t > t_0$.

В пространстве состояний $\mathbf{R}^n$ системы (1.4) заданы две «точки»: *начальное* $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ и *конечное* $x(t_1) = x_1 \in \mathbf{R}^n$ положения системы (заметим, что конечный момент времени $t_1$ не задан). Требуется найти управление $u(t)$, такое, что траектория (решение) $x(t)$, порожденная в силу (1.4) этим управлением и начальным условием $x(t_0) = x_0$, попадет из начального положения $x_0$ в конечное положение $x_1$ за минимально возможное время:

$$I(u) = t_1 - t_0 \to \min.$$

Минимизируемый функционал $I(u)$ называется *целевой функцией* (или *критерием качества*) переходного процесса.

Многие ЗОУ решаются с помощью принципа максимума Понтрягина либо методом динамического программирования Беллмана.

## 1.4. Примеры математических моделей оптимизационных задач

*Математической моделью* называется приближенное описание какого-либо явления или процесса внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Под *математическим моделированием* понимают изучение свойств объекта на математической модели. Цель математического моделирования состоит в исследовании каких-либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их моделей, в использовании моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов. В модели должны быть учтены все наиболее существенные факторы, влияющие на исследуемый процесс, и вместе с тем она не должна быть загромождена второстепенными факторами, учет которых только усложнит анализ.

Модели ЗМП включают:

- *план задачи* – совокупность искомых переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют имеющимся ограничениям;
- *целевую функцию* (прибыль, объем выпуска или реализации продукции, затраты на производство, отходы и т. д.);
- *условия* (системы ограничений), *налагаемые на неизвестные величины* (в виде равенств и неравенств), совокупность которых образует область допустимых значений.

Далее рассмотрены некоторые модели, приводящие к задачам линейного программирования.

### 1.4.1. Задача о наилучшем использовании ресурсов

Пусть имеется предприятие, специализирующееся на выпуске $n$ видов продукции, которые обозначим $\Pi_j$, $j = \overline{1, n}$, для производства которых используется $m$ видов ресурсов (виды сырья, группы оборудования, рабочая сила различной квалификации, производственные площади, финансовые средства и т. д.). Заданы нормы расходов ресурсов на производство всех видов продукции, требуемые объемы выпускаемой продукции, а также прибыль от реализации единицы продукции каждого вида.

**Задача (планирование производства).** Организовать производство (т. е. составить план выпуска продукции), чтобы при выполнении всех заданных ограничений предприятие получило максимальную прибыль.

Составим математическую модель задачи. Построение модели обычно начинают с определения переменных. В рассматриваемой задаче за переменные естественно принять объемы выпуска каждого из возможных видов продукции.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *план* производства, показывающий, какие виды продукции необходимо производить и в каких количествах; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – имеющиеся объемы ресурсов; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – прибыль от реализации единицы продукции вида $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно; $a_{ij}$ – расход $i$-го вида ресурсов на производство $j$-го вида продукции ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Будем искать такой план выпуска продукции, который обеспечит максимальную прибыль. Это наиболее часто используемая, хотя далеко не единственная, трактовка задачи. Тогда, умножая прибыль от производства единицы продукции на количество продукции, получаем, что в силу введенных обозначений *целевая функция* (прибыль от реализации продукции) будет иметь вид

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max .$$

Осталось сформулировать ограничения, которые состоят в том, что

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Необходимый объем ресурсов}\\ \text{для производства всей продукции}\end{array}\right\} \le \left\{\begin{array}{l}\text{Располагаемые}\\ \text{ресурсы}\end{array}\right\},$$

т. е. левая часть неравенства – расход ресурса, а правая часть – запас ресурса, расход ресурса не превосходит его запаса.

Для записи этих ограничений коэффициенты затрат ресурсов на производство единицы каждого вида продукции удобно представить в табличной форме (табл. 1.1). Чтобы сгруппировать все используемые данные, занесем в эту таблицу и коэффициенты целевой функции.

Таблица 1.1

Исходные данные задачи планирования производства

| Вид ресурса, $i$ | Расход $i$-го ресурса на единицу $j$-й продукции, $a_{ij}$ | | | | Запас ресурса, $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $n$ | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| Прибыль, $c_j$ | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_n$ | |

Для определения расхода ресурса каждого вида мы расход ресурса на единицу продукции умножаем на количество продукции, получаем ограничения на ресурсы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

при этом по смыслу введенных переменных $x_j$, $j = \overline{1, n}$,

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если не задать дополнительно введенные условия неотрицательности переменных при решении или при обращении к используемому пакету прикладных программ, то весьма вероятно, что решение не будет получено. Действительно, предположим, что один из видов продукции, требующий расхода всех видов ресурсов, дает незначительную прибыль. Если соответствующей переменной формально придать отрицательное значение, то получим прирост всех ресурсов при малых затратах (соответствующие слагаемые при переносе в правую часть получат знак плюс). Тогда прибыль будет неограниченно возрастать за счет увеличения производства более выгодных видов продукции.

При решении реальных практических задач приведенные выше ресурсные ограничения нужно дополнять условиями, учитывающими ограниченные возможности реализации продукции и имеющиеся обязательства по ее поставке, взаимосвязи между отдельными видами продукции и т. д. Поэтому процесс построения модели во многом является искусством, требующим знания предметной области и ясного математического мышления.

*Математическая модель задачи*, состоящая из *целевой функции* и *системы ограничений*, примет вид

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0. \end{array}\right\}$$

В векторно-матричной форме математическая модель задачи имеет вид

$$z = c'x \to \max,$$

$$Ax \le b,\ x \ge 0,$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Знак «'» означает транспонирование, т. е. если, например, $c$ – вектор-столбец коэффициентов целевой функции, то $c' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор-строка. Полученная математическая модель относится к моделям ЗЛП.

**Пример**. Пусть предприятие выпускает два вида изделий и располагает следующими ресурсами (в расчете на сутки): фонд рабочего времени производственных рабочих – 780 чел.-ч, фонд сырья – 850 ед., электроэнергии – 790 ед. Цена изделия I вида – 6 усл. ед., II вида – 7 усл. ед. Требуется определить оптимальную производственную программу предприятия с учетом получения максимальной прибыли.

Нормы расхода ресурсов в расчете на одно изделие представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Нормы расхода ресурсов

| Ресурс | Изделие | |
|---|---|---|
| | I вид | II вид |
| Рабочее время, чел.-ч | 2 | 4 |
| Сырье, ед. | 1 | 5 |
| Электроэнергия, ед. | 3 | 4 |

***Решение.*** Математическое описание исследуемого объекта или процесса начинается с выбора переменных модели. Так как в рассматриваемом примере требуется построить модель для определения оптимальной структуры производственной программы по выпуску изделий I и II видов, введем переменные:

$x_1$ – суточный объем производства продукции I вида; $x_2$ – суточный объем производства продукции II вида.

Запишем ограничения на ресурсы.

*Рабочее время.* Так как нормы расхода рабочего времени для производства единицы продукции I и II вида составляют 2 и 3 чел.-ч соответственно, то для производства изделий I вида в объеме $x_1$, изделий II вида в объеме $x_2$ требуется $2x_1 + 4x_2$ (чел.-ч). С другой стороны, объем использования оборудования не должен превышать имеющегося суточного фонда рабочего времени – 780 чел.-ч. Таким образом, получаем ограничение:

$$2x_1 + 4x_2 \le 780.$$

Аналогично составляются ограничения для оставшихся видов ресурсов.

*Сырье:* $x_1 + 5x_2 \le 850$.

*Электроэнергия:* $3x_1 + 4x_2 \le 790$.

Кроме того, объем производства изделий каждого вида не может быть отрицательным: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

В данном примере целью управления (критерием качества) является получение максимальной прибыли, что приводит к математической оптимизационной модели – задаче максимизации целевой функции:

$$z(x) = 6x_1 + 7x_2 \to \max$$

при следующих ограничениях:

$$2x_1 + 4x_2 \le 780,$$

$$x_1 + 5x_2 \le 850,$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 790,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Сформулированная модель является задачей линейного программирования.

### 1.4.2. Задача о смесях (рационе, выборе диеты)

Пусть имеется $n$ пищевых продуктов №1, 2, 3, …, $n$ и известны их характеристики (цена; калорийность; содержание белков, жиров, углеводов, витаминов), т. е. в продуктах содержится $m$ различных питательных веществ №1, 2, …, $m$. Единица $j$-го продукта содержит $a_{ij}$ единиц $i$-го питательного вещества ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Для нормальной жизнедеятельности в заданный промежуток времени $t$ необходимо употреблять не менее $b_i$ единиц питательного вещества $i$-го вида $\left(i = \overline{1, m}\right)$. Пусть $c_j$ – стоимость единицы продукта $j$-го вида.

**Задача (формирование минимальной продовольственной корзины).** Составить рацион минимальной стоимости, содержащий необходимое количество питательных веществ.

Составим математическую модель задачи. *Планом* задачи является количество $x_j$, $j=\overline{1,n}$, продуктов №1, 2, 3, …, $n$ каждого вида, которое должно составить рацион в заданный промежуток времени $t$. Получим математическую модель (симметричную по отношению к ранее записанной). Вместо максимума теперь нужно найти минимум, при этом изменились и знаки ограничений:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min \text{ (стоимость рациона)},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

(ограничения по содержанию питательных веществ в рационе),

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

(использование (> 0) или отсутствие (= 0) продуктов $x_j$, $j=\overline{1,n}$, в рационе).

Таким образом, математическая модель задачи о смесях (рационе, выборе диеты) также представляет собой ЗЛП. В векторно-матричной форме эта задача имеет вид

$$z = c'x \to \min, Ax \ge b, x \ge 0.$$

Разумеется, и в этом случае может потребоваться введение определенных соотношений между отдельными группами продуктов, ограничение содержания некоторых ингредиентов и т. д.

### 1.4.3. Транспортная задача

Имеется $m$ предприятий $A_1, A_2,\ldots, A_m$, на которых производится $a_i$, $i=\overline{1,m}$, единиц однородной продукции, и $n$ пунктов $B_1, B_2,\ldots, B_n$ ее потребления с потребностями $b_j$, $j=\overline{1,n}$, соответственно. Известна стоимость $c_{ij}$ (затраты) перевозки единицы продукции из $i$-го пункта производства в $j$-й пункт потребления.

**Задача.** Определить такой план перевозок продукции по пунктам ее потребления, при котором весь продукт из пунктов производства будет вывезен, спрос всех потребителей удовлетворен, а транспортные расходы минимальны.

Составим математическую модель задачи. Рассмотрим *план* задачи в виде *матрицы планирования* (матрицы перевозок) $X = (x_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, где $x_{ij}$ – количество продукции, перевозимой из $i$-го пункта ее производства в $j$-й пункт ее потребления. Тогда $c_{ij}x_{ij}$ – стоимость перевозки продукта от $i$-го производителя к $j$-му потребителю. Математическая модель задачи принимает вид

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{m,n-1}x_{m,n-1} + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

т. е. требуется минимизировать целевую функцию $z$ (общую стоимость всех перевозок) при условии, что вся продукция из пунктов производства вывезена:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

и все запросы потребителей удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

при этом

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \ \ j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, математическая модель транспортной задачи также представляет собой ЗЛП.

### 1.4.4. Задачи целочисленного программирования

К данному типу задач относится *задача о контейнерных перевозках*. Контейнер оборудован $m$ отсеками вместимостью $b_i$, $i = \overline{1, m}$, для перевозки $n$ видов продукции $x_j$. Все виды продукции характеризуются неделимостью (т. е. их можно брать в количестве 0, 1, 2, … единиц). Пусть $x_j$ – количество единиц $j$-го вида продукции, погруженной в контейнер; $a_{ij}$ – используемый объем $i$-го отсека для перевозки $j$-го вида продукции; $c_j$ – прибыль от перевозки единицы $j$-го вида продукции.

**Задача.** Найти план $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перевозки, при котором общая прибыль от рейса максимальна.

Составим математическую модель задачи. *Целевая функция* задачи имеет вид $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$, *основные ограничения* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m},$ *прямые ограничения* $x_j \geq 0$. При этом должно выполняться условие целочисленности перевозимой продукции $x_j$, $j = \overline{1, n}$.

### 1.4.5. Типичная задача вариационного исчисления

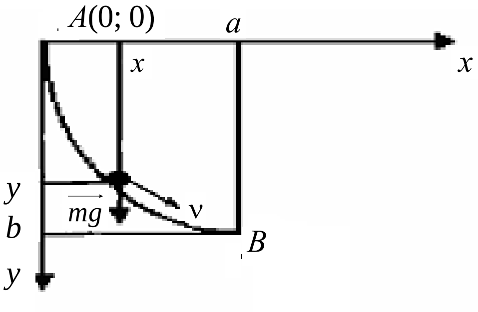



Рис. 1.2.
Задача о брахистохроне

Такой задачей является *задача о брахистохроне* (от греческого *брахистос* – наискорейший, *хронос* – время) [1]. В вертикальной плоскости заданы точки $A$, $B$, расположенные на разных уровнях (рис. 1.2). Требуется соединить их гладкой кривой так, чтобы, двигаясь по ней только под действием силы тяжести с нулевой начальной скоростью, точка массой $m$ прошла путь от $A$ до $B$ за минимальное время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

Составим математическую модель задачи. Введем декартову систему координат, поместив начало координат в точку $A$. По закону сохранения энергии суммы потенциальной и кинетической энергий в точках $A$ и $B$ (и в любой точке $(x; y)$ кривой) равны, следовательно,

$$mgy = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gy}. \tag{1.5}$$

Пусть $y = y(x)$, $x \in [0; a]$, – уравнение искомой гладкой линии, соединяющей точки $A$ и $B$. Известно, что если $s$ – путь, $t$ – время, то скорость и длина пути определяются по формулам

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{1.6}$$

где $dy = y'_x dx$.

Подставив (1.5) в (1.6), получим

$$\sqrt{2gy} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} \Rightarrow \sqrt{2gy} = \frac{\sqrt{1 + {y'_x}^2}}{dt} dx \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{1 + {y'_x}^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Проинтегрировав последнее соотношение от 0 до $a$, найдем, что время движения от точки $A$ до точки $B$ по линии $y = y(x)$, равно

$$T\big(y(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'_x(x)^2}{y(x)}} dx.$$

Таким образом, задача о брахистохроне свелась к поиску такой *дифференцируемой функции* $y(x)$, $0 \le x \le a$, которая на концах интервала $0 \le x \le a$ принимает заданные значения $y(0) = 0$, $y(a) = b$ и доставляет минимум функционалу $T(y(x))$.

Решением задачи о брахистохроне является *дуга циклоиды*. Эта линия называется *брахистохроной*. На практике к такому решению пришли строители зданий в тропических странах (при строительстве буддийских пагод), где в условиях затяжных дождей быстрейший скат воды с крыши существенно влиял на ее долговечность.

В отличие от задач, рассмотренных ранее, в задаче о брахистохроне находится не конечномерный вектор, минимизирующий функцию, а *функция*, на которой достигается минимум *функционала*, т. е. задача

$$T\left(y\left(x\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{a}\sqrt{\frac{1+y_x'(x)^2}{y(x)}}dx\to\min,\ y(0)=0,\ y(a)=b,$$

рассматривается ***на элементах*** $y(\cdot)$ ***функционального пространства***.

**Упражнение.** Для производства литья используется $n$ различных материалов (чугун различных марок, стальной лом, феррофосфор и др.). Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем химических элементов (кремния, марганца, фосфора и др.). Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, который задается величинами $H_i$, представляющими собой доли (в процентах) $j$-го химического элемента в готовом продукте. При этом известны величины: $h_{ij}$ – содержание (в процентах) $j$-го химического элемента в $i$-м исходном шихтовом материале; $c_i$ – цена единицы $i$-го шихтового материала.

Составить математическую модель определения состава шихты, обеспечивающего получение литья заданного качества при минимальной общей стоимости используемых материалов.

# 2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 2.1. Постановка задачи линейного программирования

### 2.1.1. Формы записи задач линейного программирования

***Общая форма задачи линейного программирования***. В самом общем случае требуется найти

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i\ ,\quad i = \overline{1, m_1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i = \overline{m_1 + 1, m_2},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ ,\quad i = \overline{m_2 + 1, m_3},$$

$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1, n_1},$$

$x_j$ – любого знака $\left( j = \overline{n_1 + 1, n_2} \right)$.

***Симметричная форма задачи линейного программирования*** (примеры таких задач уже были приведены) – это

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0,\qquad j = \overline{1, n},$$

или

$$\min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0,\qquad j = \overline{1, n}.$$

***ЗЛП в нормальной форме*** называется задача максимизации (минимизации) линейной функции (линейной формы)

$$z(x) = z(x_1, x_2,\ \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min) \qquad (2.1)$$

по переменным $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, удовлетворяющим неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0, \qquad (2.3)$$

где $a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ – заданные действительные числа, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Ограничения (2.2) называются *основными*, а (2.3) – *прямыми ограничениями* ЗЛП (2.1)–(2.3), которая может быть записана в более компактной форме:

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min), \qquad (2.1а)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (2.2а)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}\ . \qquad (2.3а)$$

***Каноническая форма задачи линейного программирования*** используется, чтобы применить аппарат линейной алгебры для решения оптимизационных задач. Чаще всего предполагается, что задача решается только на максимум и что все условия записаны как равенства. *ЗЛП в канонической форме* имеет вид

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min), \qquad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (2.5)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}\ . \qquad (2.6)$$

Введем в рассмотрение векторы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ j = \overline{1, n}, \qquad (2.7)$$

где $c$ – вектор стоимостей; $b$ – вектор ограничений; $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ – векторы-столбцы условий; $A = [A_1, A_2, \ldots, A_n] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица условий (матрица затрат).

Тогда ЗЛП (2.1)–(2.3) может быть переписана в *векторном виде*:

$$z(x) = c'x \to \max\ (\min); \qquad (2.8)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \le b, \qquad (2.9)$$

$$x \geq 0, \tag{2.10}$$

где штрих «'» в (2.8) означает операцию транспонирования.

Задача (2.8)–(2.10) также может быть представлена в более компактной *векторно-матричной форме*:

$$z(x) = c'x \to \max (\min); \tag{2.8а}$$

$$Ax \leq b; \tag{2.9а}$$

$$x \geq 0, \tag{2.10а}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{R}^{m \times n}$ – множество действительных ($m \times n$)-матриц, а неравенство $x \geq 0$ означает неотрицательность всех компонент $n$-вектора $x$: $x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}$.

Аналогично *ЗЛП в канонической форме* в матричной форме записи имеет вид

$$z(x) = c'x \to \max (\min), \tag{2.4а}$$

$$Ax = b, \tag{2.5а}$$

$$x \geq 0. \tag{2.6а}$$

Используется и векторная форма записи:

$$z(x) = c'x \to \max (\min),$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_j x_j + \ldots + A_n x_n = b, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

#### 2.1.2. Приведение задачи линейного программирования к канонической форме

Каноническая форма введена для реализации метода поиска оптимального решения, но практические задачи первоначально записываются в общей или симметричной форме. Покажем, что путем эквивалентных преобразований всегда можно перейти к канонической форме.

***Преобразование целевой функции.*** Нетрудно видеть, что *задачу минимизации целевой функции можно заменить задачей максимизации и наоборот*. Действительно, поскольку для любой функции $y = f(x)$ справедливо равенство $\min f(x) = -\max(-f(x))$, то для функции $z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ее минимум равен максимуму функции $-z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$, взятому с противоположным знаком. Заметим, что оба экстремума достигаются при одних и тех же значениях переменных $x$, т. е. $\min z(x) = -\max(-z(x))$. На рис. 2.1, если $x^*$ – точка минимума функции $y = f(x)$, то для функции $y = -f(x)$ (и наоборот) она будет точкой максимума.

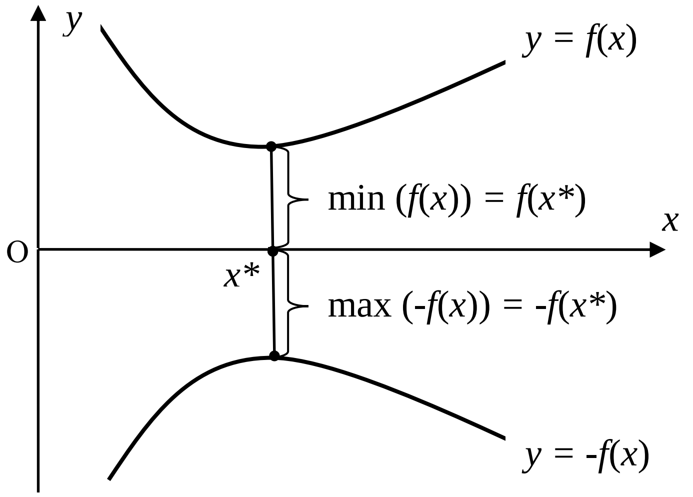



Рис. 2.1. Интерпретация задачи на экстремум

Очевидно, что $\min(f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)) = -\max(-f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*))$.

***Замена неравенства типа «меньше или равно» на равенство***. В нормальной форме основные ограничения заданы неравенствами (2.2) (или, что то же самое, (2.2a), (2.9), (2.9a)), в канонической форме – равенствами (2.5). Нетрудно заметить, что *любое ограничение в виде неравенства путем введения дополнительной неотрицательной переменной можно свести к ограничению типа равенства и наоборот.*

Действительно, пусть дано неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i.$$

Путем введения дополнительной неотрицательной переменной $x_{n+i} \ge 0$ из него можно получить равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i.$$

Ограничения типа «меньше или равно» были использованы при построении модели оптимального планирования производства. Заменяя их равенствами, получаем так называемые «ограничения-равенства», т. к. равенствами они являются только по форме, а по содержанию – ресурсными ограничениями. Каждое из них содержит свою дополнительную переменную $x_{n+i}$, $i = \overline{1, m}$. Иногда такие переменные называют остаточными, поскольку их значения показывают величины неиспользованных ресурсов. Если продажа (сдача в аренду) свободных ресурсов не предполагается, то в целевую функцию модели дополнительные переменные войдут с нулевыми коэффициентами, иначе говоря, функция не изменится.

***Замена неравенства типа «больше или равно» на равенство*** выполняется аналогично. От левой части каждого ограничения типа $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ge b$ отнимаем дополнительную неотрицательную переменную $x_{n+1}$, чтобы обеспечить выполнение равенства $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - x_{n+1} = b$. Если это равенство выполняется при некотором неотрицательном $x_{n+1}$, то выполняется и исходное ограничение. Такие ограничения были использованы для построения модели формирования минимальной продовольственной корзины. После замены неравенств «больше или равно» равенствами получим

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \\ \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}. \end{array}\right\}$$

В этой модели содержательный смысл дополнительных переменных в том, что они показывают превышение содержания отдельных веществ в рационе сверх заданных минимальных величин. Поэтому их иногда называют избыточными. Очевидно, что в целевую функцию модели они войдут с нулевыми коэффициентами. При расчете подобной модели обеспечение норм по питательным веществам приведет, вероятно, к избыточной насыщенности.

ЗЛП может содержать ограничения в виде линейных равенств и неравенств одновременно; возможно, что некоторые переменные не подчинены условию неотрицательности. ***Замена переменных любого знака на неотрицательные*** выполняется путем замещения их разностью двух новых переменных, на которые налагают условие неотрицательности. Если, например, переменная $x_k \leq 0$, то всегда можно выбрать такие $x'_k \geq 0$, $x''_k \geq 0$, что $x_k \leq 0$ представимо в виде $x_k = x'_k - x''_k$.

Таким образом, от любой формы записи линейной модели можно перейти к канонической форме. Справедливо и обратное: каждое ограничение типа равенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде двух ограничений типа неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Поскольку последнее соотношение эквивалентно

$$-(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \leq -b_i,$$

то исходное ограничение типа равенства свелось к двум ограничениям типа неравенства со знаком $\leq$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i\ ,$$

$$-(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \leq -b_i\ ,$$

т. е. к ограничению вида (2.2).

**Пример.** Имеется два вида оборудования: А и Б. Каждое оборудование выпускает за смену 10 ед. продукции. Для обслуживания оборудования А в смену требуется три человека и 100 кВт·ч электроэнергии, для обслуживания оборудования Б – 4 человека и 60 кВт·ч электроэнергии. Трудовые ресурсы составляют 90 чел., ресурсы электроэнергии – 2000 кВт·ч, затраты на эксплуатацию оборудования типа А – 12 ден. ед. в смену, типа Б – 10 ден. ед. в смену. Запланирован выпуск 250 ед. продукции. Требуется выполнить план выпуска продукции с минимальными затратами.

Составить математическую модель задачи и привести ее к канонической форме.

***Решение.*** Пусть $x_1$ – количество используемого в смену оборудования типа А; $x_2$ – количество используемого в смену оборудования типа Б. Тогда целевая функция задачи будет иметь вид

$$z(x_1, x_2) = 12\,x_1 + 10\,x_2 \to \min.$$

Ограничения по трудовым ресурсам можно выразить неравенством $3x_1 + 4x_2 \le 90$, ограничения по использованию электроэнергии: $100x_1 + 60x_2 \le 2000$. Требование выполнения плана по выпуску продукции: $10x_1 + 10x_2 = 250$. Очевидно, что переменные $x_1$, $x_2$ должны удовлетворять условиям $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Таким образом, математическая модель *задачи* имеет вид

$$z(x_1, x_2) = 12x_1 + 10x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 90, \\ 100x_1 + 60x_2 \le 2000, \\ 10x_1 + 10x_2 = 250; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Сведем задачу к канонической форме. Для этого добавим к левым частям первого и второго неравенств основных ограничений неотрицательные переменные $x_3$ и $x_4$ соответственно. В результате получим *ЗЛП в канонической форме*:

$$z(x_1, x_2) = -\,12x_1 - 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 90, \\ 100x_1 + 60x_2 + x_4 = 2000, \\ 10x_1 + 10x_2 = 250; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

## 2.2. Геометрический метод решения задач линейного программирования

### 2.2.1. Графическое построение области допустимых решений

Рассмотрим ЗЛП (2.1)–(2.3) в нормальной форме. Каждый вектор $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющий ограничениям (2.9а), (2.10а), называется *планом* (допустимым решением) ЗЛП (2.8а)–(2.10а). Все допустимые планы образуют область в $n$-мерном пространстве, множество

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \colon Ax \le b,\ x \ge 0 \right\} \tag{2.11}$$

называется *множеством планов* (допустимых решений) ЗЛП (2.8а)–(2.10а) или *областью допустимых планов*. План $x^0 \in X$, доставляющий максимум целевой функции ($c'x^0 = \max c'x$), называется *оптимальным планом* ЗЛП (2.8а)–(2.10а).

Например, в задаче о наилучшем использовании ресурсов любой план производства, удовлетворяющий системе ограничений, является допустимым (т. е. на него хватает ресурсов). Наилучший из допустимых планов, обеспечивающий максимальную прибыль, т. е. максимальное значение целевой функции, является оптимальным.

Задачи линейного программирования могут содержать большое количество переменных, однако на примере двух переменных можно наглядно показать структуру задачи, идею ее решения и возникающие проблемы. ЗЛП с двумя переменными ($n$ = 2) всегда можно решить геометрически. При $n$ = 3 решение ЗЛП существенно усложняется, а при $n$ > 3 геометрическое решение, вообще говоря, невозможно.

Начнем с одного ограничения вида $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$. Определим множество точек плоскости, удовлетворяющих этому условию. Сначала построим прямую $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Для всех точек одной из полуплоскостей ограничение будет выполняться, а для другой – нет (рис. 2.2); при построении принято, что $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$, как это обычно имеет место в реальных задачах, следовательно, можно ограничиться только первым квадрантом координатной плоскости.

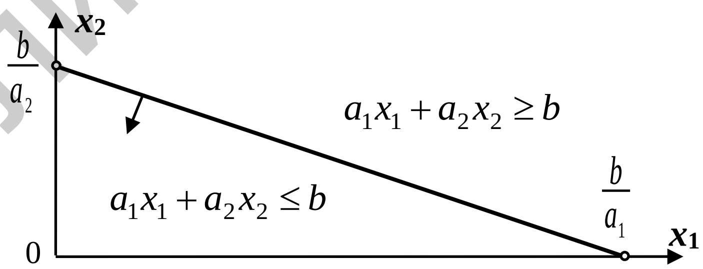



Рис. 2.2. Ограничение вида $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$

Для построения прямой часто проще всего найти точки ее пересечения с координатными осями, полагая поочередно одну из координат равной нулю. Чтобы определить, какая именно полуплоскость нужна, достаточно взять произвольную точку, не принадлежащую построенной прямой, и подставить ее координаты в неравенство. Часто в качестве такой точки берут начало координат $O$(0; 0). При $b > 0$ ограничение будет выполняться. На рис. 2.2 это показано стрелкой, указывающей на выделяемую полуплоскость. Второй вариант выделения полуплоскости – около проведенной прямой нужная полуплоскость помечается с помощью нанесения *штриховки* у ее границы.

Рассмотрим частный случай, когда, например, $b = 0$, а знаки коэффициентов $a_1$ и $a_2$ разные, т. е. $a_1x_1 - a_2x_2 \ge 0$. Такая прямая (рис. 2.3) проходит через начало координат, но для ее построения нужна еще одна точка. Проще всего взять точку с координатами $x_1 = a_2, x_2 = a_1$. Чтобы правильно выделить полуплоскость, достаточно заметить, что при $x_2 = 0$ и любом $x_1 \ge 0$ ограничение выполняется.

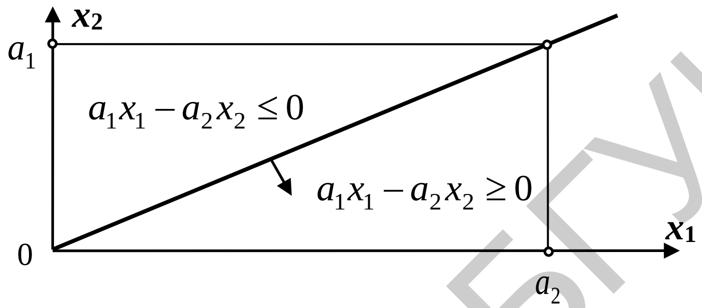



Рис. 2.3. Ограничение вида $a_1x_1 - a_2x_2 \ge 0$

Рассмотрим теперь *геометрический* (графический) *метод* решения ЗЛП при $n = 2$:

$$z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max (\min), \tag{2.12}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2.13}$$

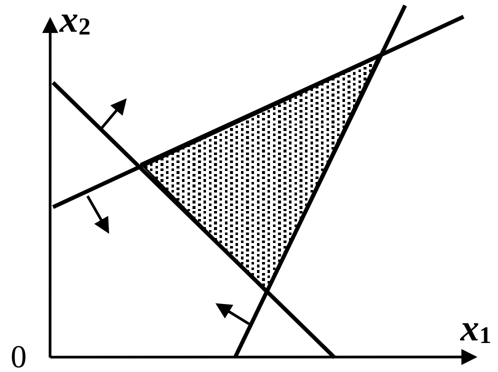
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{2.14}$$

Дадим геометрическую интерпретацию элементов этой задачи. Область $D$ *допустимых планов* задачи (2.12)–(2.14) образуется пересечением $m$ множеств, каждое из которых определяется соответствующим неравенством вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1, m},$ и представляет собой полуплоскость, лежащую по одну сторону от прямой

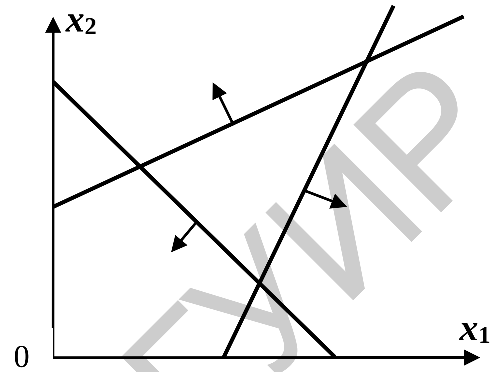
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{2.15}$$

Чтобы определить, какую полуплоскость задает неравенство (2.13) для каждого $i$, $i = \overline{1, m}$, достаточно взять произвольную точку, не лежащую на граничной прямой (2.15), и проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки неравенству (2.13). Если удовлетворяют, то (2.13) определяет полуплоскость, содержащую данную точку. Если не удовлетворяют, то неравенство (2.13) определяет полуплоскость, не содержащую данную точку. Пересечение $D$ указанных полуплоскостей образует многоугольную область, которая является *выпуклым множеством* (*выпуклым множеством* называется множество, которое вместе с любыми своими точками $x_1$ и $x_2$ содержит и все точки отрезка $[x_1; x_2]$, т. е. точки вида $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in [0;1]$ ).

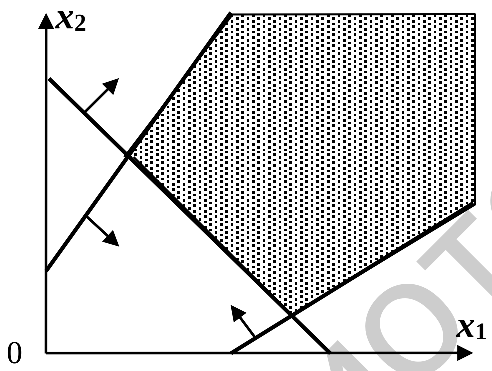
Если последовательно нанести на один чертеж все заданные ограничения, то, в зависимости от их сочетания, получатся различные варианты области допустимых решений. Область $D$ может оказаться пустым, ограниченным или неограниченным множеством (рис. 2.4).



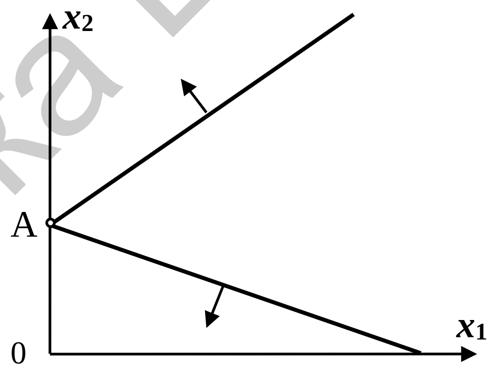

Выпуклый многоугольник
(ограниченная область)



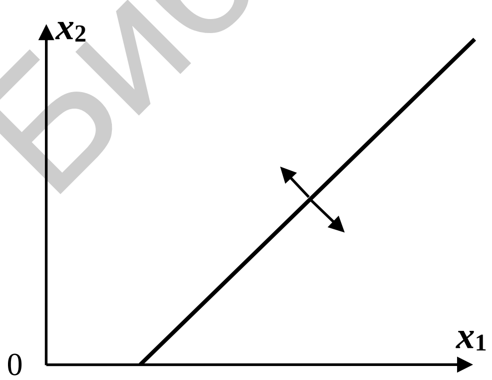

Пустое множество
(пустая область)



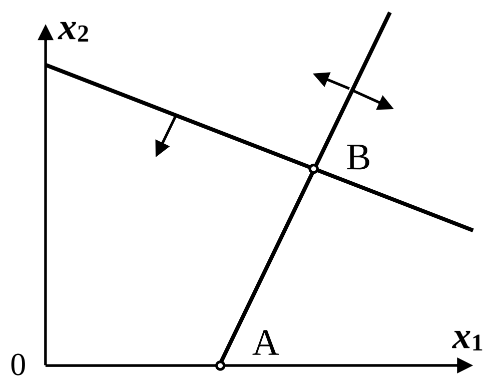

Выпуклая неограниченная
допустимая область




Область – одна точка
(точка А)




Луч




Отрезок АВ

Рис. 2.4. Некоторые возможные варианты области $D$

Перечислим возможные случаи. Например, при трех ограничениях может получиться как треугольник, так и пустое множество. При увеличении числа ограничений возрастет и число вершин, но многоугольник всегда будет выпуклым. Для случая пустого множества можно указать области, в которых выполняются любые два ограничения, но нет ни одной точки, удовлетворяющей всем трем ограничениям. Когда одно из ограничений является равенством, что равносильно заданию двух неравенств с разными знаками, получаются луч и отрезок. Направленные в противоположные стороны стрелки показывают, что только точки прямой могут принадлежать области допустимых решений.

Во всех случаях получаются выпуклые фигуры. Примеры выпуклых множеств приведены на рис. 2.5.

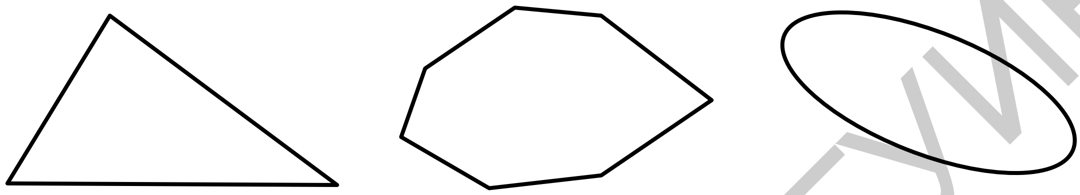


Рис. 2.5. Примеры выпуклых множеств

На рис. 2.6 приведены примеры невыпуклых множеств.

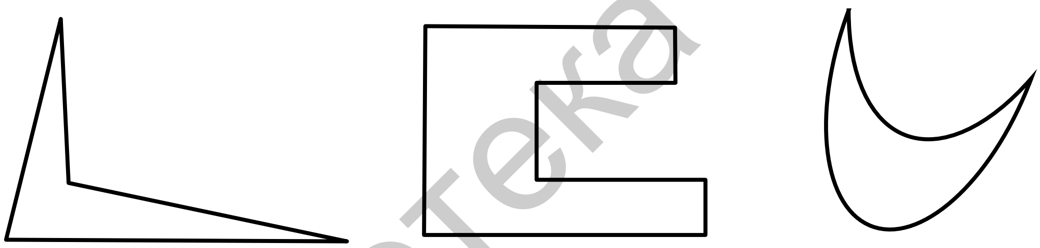


Рис. 2.6. Примеры невыпуклых множеств

### 2.2.2. Графическое нахождение оптимального решения

Область $D$ называют *многоугольником допустимых решений* ЗЛП (2.12)–(2.14), а вершины многоугольника – *крайними* (угловыми) точками. Предположим, что область допустимых решений – непустое множество (иначе задача решений не имеет), содержащее более одной точки. Если множество состоит из одной точки, то оптимизация не требуется, достаточно эту точку найти. В общем же случае необходимо определить в области допустимых решений точку (или точки), в которой целевая функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение.

Рассмотрим целевую функцию $z(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ ЗЛП (2.12)–(2.14). *Линии уровня* (линии постоянного значения) целевой функции $z(x_1, x_2)$ – это линии, описываемые уравнением вида

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C, \tag{2.16}$$

где $C$ – постоянная, и образующие семейство параллельных прямых. Чтобы установить направление возрастания (или убывания) целевой функции $z$, находим ее частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = c_1, \ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = c_2$, указывающие скорость возрастания вдоль соответствующих осей. Тогда вектор с координатами $c_1$, $c_2$ является *градиентом* функции $z$. Он показывает направление *наискорейшего возрастания* целевой функции и служит вектором нормали к прямым $c_1x_1 + c_2x_2 = C$. Вектор $-c$ (*антиградиент*) указывает направление *наискорейшего убывания* целевой функции (рис. 2.7).

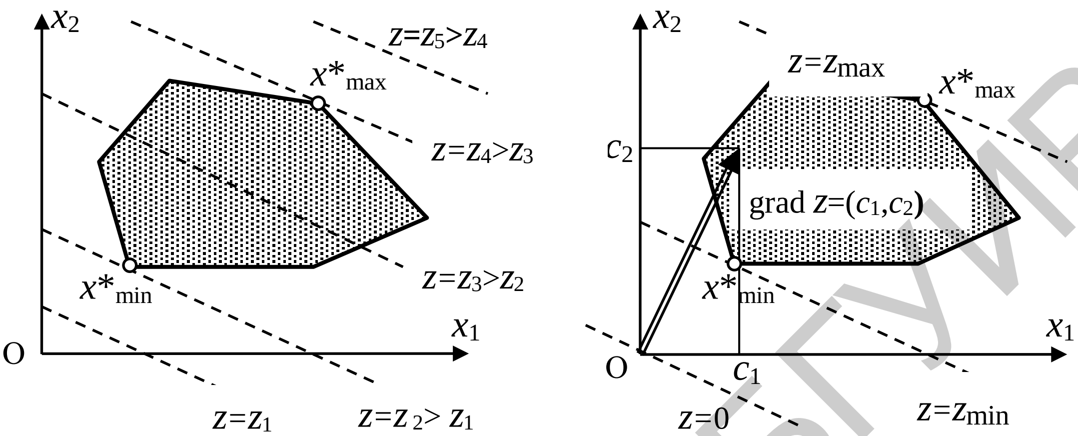



Рис. 2.7. Графическое нахождение оптимального решения

Теперь из семейства параллельных прямых, соответствующих фиксированным значениям целевой функции, следует выделить прямые, при которых достигаются минимальное и максимальное значения целевой функции. Эти прямые будут соприкасаться с областью допустимых решений, но не могут ее пересекать. При построении (для определенности) за область допустимых решений принят многоугольник, а линии фиксированных значений целевой функции изображены пунктиром; принято также, что $c_1 > 0,\ c_2 > 0$.

***Геометрическая интерпретация ЗЛП***. ЗЛП (2.12)–(2.14) представляет собой отыскание такой точки области $D$, через которую проходит прямая (2.16), соответствующая наибольшему (при решении задачи на максимум) значению функции $z$. Тогда выберем из семейства прямых (2.16) прямую, имеющую общую точку с областью $D$, и будем смещать ее в направлении вектора $c$ = grad $z$. Найдется такое предельное положение прямой, когда $D$ окажется по одну сторону от прямой и будет иметь с $D$ хотя бы одну общую точку. Тогда все точки области $D$, лежащие на предельной прямой, будут решениями ЗЛП. Полученная предельная прямая называется *опорной прямой* к области $D$.

***Алгоритм геометрического метода решения ЗЛП:***

1. Строим многоугольник (многоугольную область) допустимых решений ЗЛП.
2. Строим вектор $c$ = grad $z$ и одну из прямых семейства (2.16), в частности прямую $z = 0$: $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору grad $z$. Поскольку любая прямая, для которой значения

целевой функции постоянны, перпендикулярна вектору градиента, можно найти координаты искомых экстремумов.

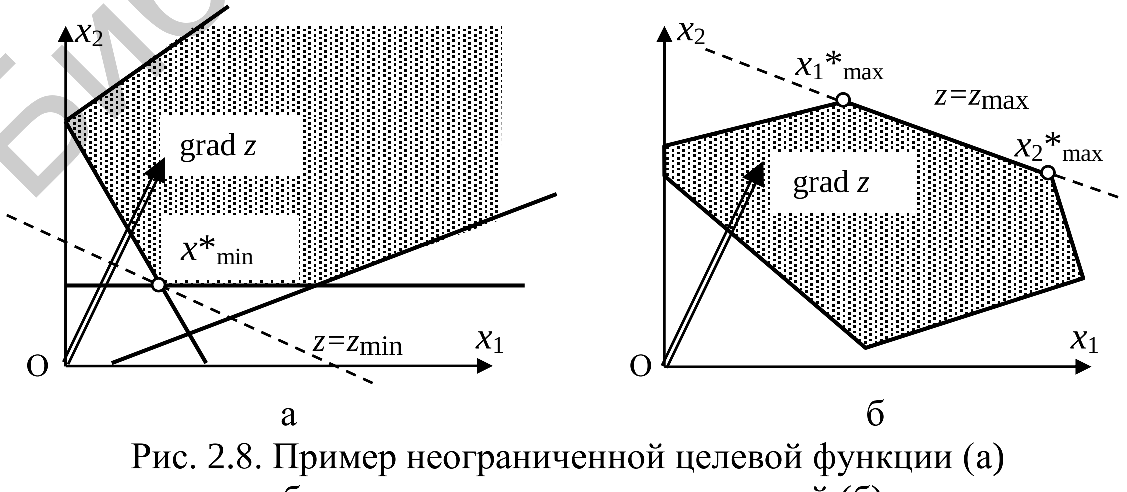
3. Прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ перемещаем параллельно самой себе (т. е. рассматриваем семейство $c_1x_1 + c_2x_2 = C$) в направлении вектора grad $z$ при решении задачи на максимум (или (–grad $z$) в задаче на минимум) до того момента, когда при некотором $C = C_0$ область $D$ окажется полностью расположенной по одну сторону от прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$, причем будет иметь с перемещаемой прямой по крайней мере одну общую точку. Возможны следующие случаи:

а) *прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ проходит через вершину области $D$* и имеет с ней единственную общую точку $A_{\max}$ ($B_{\min}$ в задаче на минимум), тогда ЗЛП разрешима и имеет единственное решение;

б) *прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ совпадает с одной из сторон области $D$*, тогда ЗЛП разрешима и имеет бесконечное множество решений: целевая функция достигает одного и того же экстремального значения во всех точках области $D$, лежащих на прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ (в этом случае говорят, что имеет место *альтернативный оптимум* (рис. 2.8));

в) при любом значении *$C$ прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ имеет общие точки с областью $D$* (см. рис. 2.8), в этом случае ЗЛП не имеет решения, точнее, целевая функция не ограничена на множестве планов: $z_{\max} = +\infty$ (аналогично $z_{\min} = -\infty$ в ЗЛП на минимум).

4. В случае, указанном в п. 3а, находим крайнюю точку $A_{\max}$ ($B_{\min}$), в которой достигается максимум (минимум) целевой функции (2.12). Ее координаты $x_1^0, x_2^0$ определяют оптимальный план $x^0 = (x_1^0, x_2^0)'$ и экстремальное значение целевой функции $z_{\max}(A) = c'x^0$ (или $z_{\min}(B) = c'x^0$); в случае, указанном в п. 3б, достаточно найти координаты какой-либо точки отрезка прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$, совпадающего с одной из сторон области $D$, на котором (в каждой точке которого) достигается максимум (минимум) целевой функции (2.12). Координаты $x_1^0, x_2^0$ точки определят альтернативный оптимум, т. е. оптимальный план $x^0 = (x_1^0, x_2^0)'$ и экстремальное значение $c'x^0$ целевой функции.




а б

Рис. 2.8. Пример неограниченной целевой функции (а) и бесконечного множества решений (б)

Например, на рис. 2.8 экстремум одновременно достигается в двух угловых точках ($x_1{}^*{}_{max}$ и $x_2{}^*{}_{max}$), тогда во всех точках отрезка, соединяющего эти угловые точки, целевая функция будет иметь то же самое значение.

Очевидно, что решение нельзя найти в случае пустого множества допустимых планов. Нет оснований для оптимизационного подхода и тогда, когда это множество состоит из одной-единственной точки. В подобных ситуациях, а они иногда возникают при директивном планировании, необходим пересмотр постановки задачи.

**Пример (задача о рационе).** При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 ед. питательного вещества $S_1$, не менее 8 ед. питательного вещества $S_2$ и не менее 12 ед. питательного вещества $S_3$. Для составления рациона используют два вида кормов. Содержание количества единиц каждого питательного вещества в 1 кг каждого вида кормов и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Содержание питательных веществ

| Питательное вещество | Количество питательных единиц на 1 кг корма, ед. | | Ежедневная норма, ед. |
|---|---|---|---|
| | Корм I | Корм II | |
| $S_1$ | 3 | 2 | ≥9 |
| $S_2$ | 1 | 2 | ≥8 |
| $S_3$ | 1 | 6 | ≥12 |
| Стоимость, тыс. руб. | 4 | 6 | – |

Требуется составить дневной рацион с минимальными денежными затратами.

***Решение.*** Составим математическую модель задачи. Пусть $x_1$ и $x_2$ – количество килограммов корма I и II вида в дневном рационе. На основании условий задачи получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12. \end{cases}$$

Если корм I не используется в рационе, то $x_1 = 0$, в противном случае $x_1 > 0$. Аналогично имеем $x_2 \ge 0$. Следовательно, прямые ограничения задачи имеют вид $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Общая стоимость дневного рациона

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 6\,x_2 \to \min.$$

Так как $n = 2$, то задачу можно решить геометрическим методом. Построим многоугольную область $D$ допустимых решений. Для этого на плоскости $x_1Ox_2$ изобразим граничные прямые

$l_1$: $3x_1 + 2x_2 = 9$, $l_2$: $x_1 + 2x_2 = 8$, $l_3$: $x_1 + 6x_2 = 12$.

Получим неограниченную многоугольную область с угловыми точками *A*, *B*, *C*, *E* (рис. 2.9). Построим вектор-градиент целевой функции $\text{grad}\, z = \vec{c}$ с координатами $(4; 6)$.

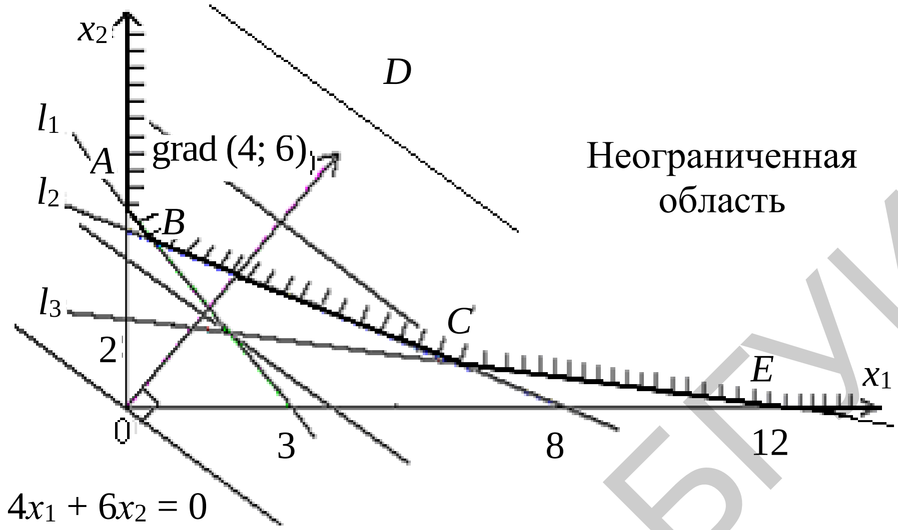



Рис. 2.9. Область допустимых значений в задаче о рационе

Прямую вида $4x_1 + 6x_2 = C$, параллельную прямой $4x_1 + 6x_2 = 0$ и имеющую общие точки с *D*, перемещаем в направлении антиградиента целевой функции. Из рис. 2.9 видно, что минимальное значение целевой функции достигается в точке *B* – точке пересечения прямых $l_1$ и $l_2$:

$$B\colon \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 3{,}75$. Следовательно, точка *B* имеет координаты (0,5; 3,75). Таким образом, дневной рацион должен состоять из 0,5 кг корма I вида и 3,75 кг корма II вида, при этом минимальные денежные затраты составят $z_{\min}(B) = 4 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 3{,}75 = 24{,}5$ тыс. руб.

При возникновении сомнений, в какой именно точке достигается экстремум (на рис. 2.9 точки *A*, *B*), необходимо вычислить значение целевой функции во всех точках, относительно которых есть сомнения.

Найдем значение целевой функции в точке *A* пересечения прямой $l_1$ и оси $Ox_2$.

$$A\colon \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4{,}5, \quad z(A) = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 4{,}5 = 27 > z(B).$$

Так как $z(A) > z(B)$, то точка $A(0;\, 4{,}5)$ не является решением задачи о рационе, поскольку не обеспечивает минимум денежных затрат.

*Ответ*: суточный рацион состоит из 0,5 кг корма I вида и 3,75 кг II вида. Минимальная стоимость рациона $z_{\min}(0,5;\ 3,75) = 24,5$ тыс. руб.

**Упражнение.** Решить ЗЛП геометрическим методом:

$$z(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \to \min\ (\max);$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 0 \leq x_1 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0.$$

*Замечание*. С помощью геометрического метода может быть решена также ЗЛП, система ограничений которой содержит $n$ неизвестных и $m$ линейно независимых уравнений, причем $n - m = 2$.

### 2.2.3. Графический анализ чувствительности

В реальности исходные данные для модели не только определяются с некоторой погрешностью, но и изменяются по различным причинам. Конечно, всегда можно, изменяя отдельные параметры, рассчитать серию вариантов, чтобы оценить их влияние на оптимальное решение. Такой прием полезен на заключительном этапе анализа задачи, но простой перебор вариантов не лучший способ оценки ситуации.

Рассмотрим, основываясь на графическом решении, основные идеи анализа чувствительности. Определим, как влияют изменения величин коэффициентов целевой функции и правых частей ограничений на оптимальное решение. Пусть задана линейная модель следующего вида:

$$\max\ (\min)\ Z = 4x_1 + 8x_2;$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x_1 + 4x_2 \leq 60, & (1) \\ 10x_1 + 9x_2 \leq 180, & (2) \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 30, & (3) \\ 6x_1 - 2x_2 \geq 0, & (4) \end{array}\right\}.$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

При построении удобно нумеровать все заданные ограничения. Тогда легко проверять правильность построения как линий, так и области допустимых решений. Изобразим ограничения-неравенства (1)–(4) на чертеже (рис. 2.10). Их пересечение задает заштрихованную область допустимых планов.

После построения вектора $\operatorname{grad} z = (4;\ 8)$, перемещая перпендикулярную ему линию уровня (линию фиксированных значений целевой функции), найдем, что искомые экстремумы достигаются в следующих точках:

$$A(4;\ 12),\ z_{\max} = 120 \quad \text{и} \quad E(1,8;\ 5,3),\ z_{\min} = 49,4.$$

Очевидно, что эти точки останутся экстремальными и в некотором диапазоне изменения вектора градиента. Изменение длины этого вектора влечет только пропорциональное изменение величины целевой функции и не влияет на координаты точек экстремума. Поэтому задача определения чувствительности решения по отношению к коэффициентам целевой функции сводится к определению интервала изменения отношения $c_1/c_2$, для которого остается неизменной рассматриваемая точка экстремума.

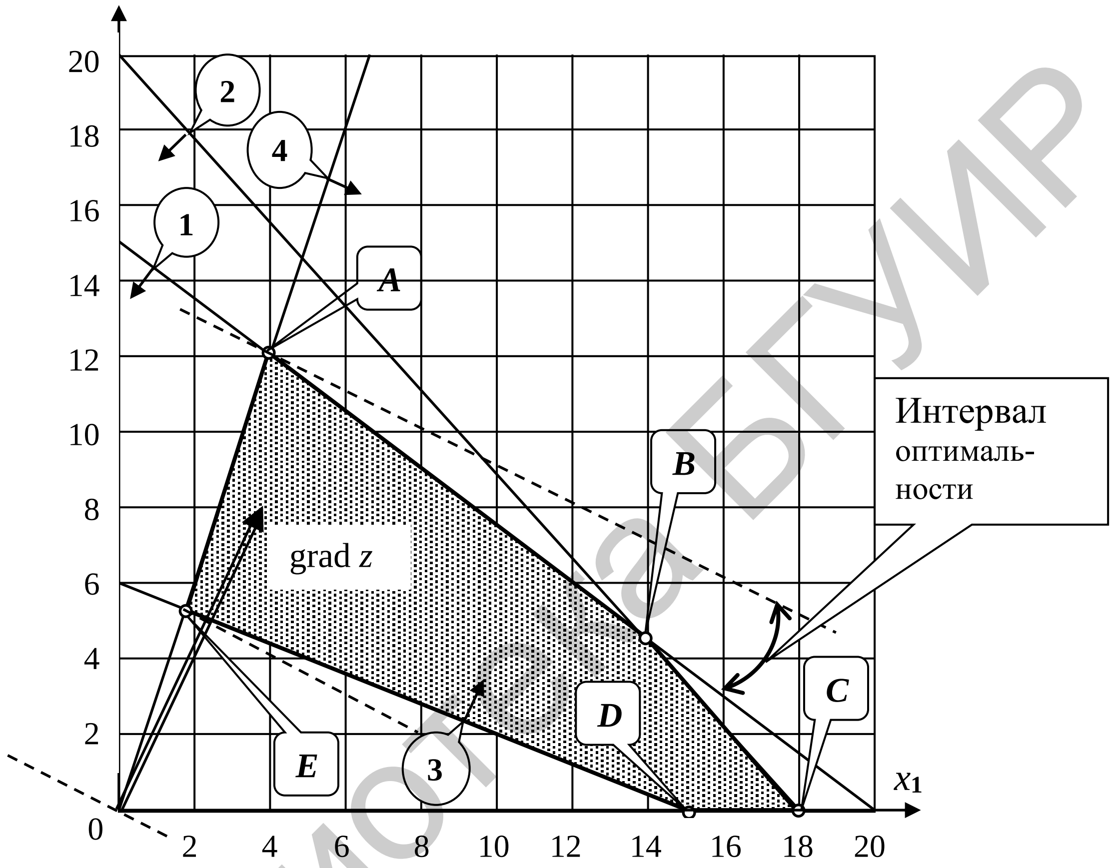



Рис. 2.10. Графический анализ чувствительности

Пусть $c_1 \geq 0$ и $c_2 > 0$, тогда любое увеличение $c_2$ (уменьшение $c_1$) приведет только к повороту вектора градиента против часовой стрелки, что не повлияет на положение точки максимума. Однако, как только этот вектор станет перпендикулярен прямой *DE* (третье ограничение), а это произойдет, если $c_1/c_2 = 2/5$, все точки этого отрезка будут обеспечивать минимальные значения целевой функции. Дальнейшее увеличение $c_2$ повлечет перемещение точки минимума в точку *D*.

Граничное значение отношения $c_1/c_2$ легко находится, если вспомнить, что вектор $\vec{n} = (a_1; a_2)$ – это перпендикуляр к прямой $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$. Уравнение прямой *DE* – это $2x_1 + 5x_2 = 30$, а $\vec{n}_3 = (2;\ 5)$ – это ее нормальный вектор. На рис. 2.10 показан интервал оптимальности и для точки максимума при возрастании коэффициента $c_1$. Максимум переместится в точку *B*, как только $c_1/c_2 > 3/4$, а при дальнейшем увеличении этого отношения даже в точку *C*.

Аналогичный подход можно применить и по отношению ко всем остальным коэффициентам модели. Изменение правых частей ограничений приведет к параллельному перемещению соответствующих прямых, изменение коэффициентов при переменных – к изменению углов их наклона. Если прямая определяет точку экстремума, то можно определить зависимость приращения координат этой точки от таких изменений. Например, при уменьшении правой части первого ограничения эта точка будет плавно перемещаться по отрезку *AE*.

Такой анализ устойчивости решения важен в реальных практических задачах, когда необходимо учитывать и погрешности в исходных данных и возможные изменения ситуации. Поэтому компьютерные программы предусматривают получение отчетов по устойчивости решения, если только это возможно. Проведенный анализ иллюстрирует идею такого подхода.

### 2.2.4. Теорема об экстремальном значении целевой функции на выпуклом множестве

Графический способ решения задачи линейного программирования позволяет заметить, что оптимальное решение всегда достигается в угловых точках области допустимых решений. На этой идее основан симплекс-метод решения любой задачи линейного программирования.

Без ограничения общности можно считать, что область допустимых решений на практике является ограниченной, т. к. всегда можно предполагать, что сумма всех переменных реальной задачи не превышает некоторое достаточно большое положительное число.

**Теорема (основная теорема линейного программирования).** Если задача линейного программирования имеет решение, то целевая функция достигает экстремального значения хотя бы в одной из угловых (крайних) точек многогранника допустимых решений (планов). Если же целевая функция достигает экстремального значения в различных угловых точках, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.

Для двух переменных это уже показано, а для случая *n* переменных теорему нужно доказывать. Уточним использованные термины.

***Угловая точка.*** Точка выпуклого множества называется угловой, если ее нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек этого множества.

Выпуклой линейной комбинацией двух точек $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ называют точку $\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2$, где $0 \le \lambda \le 1$. Геометрически это отрезок, соединяющий точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, которые получатся соответственно при значениях $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$. Остальные точки отрезка получатся при промежуточных значениях $\lambda$. В частности, середине отрезка соответствует значение $\lambda = 0,5$.

В общем случае для $n$ точек $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ выпуклой линейной комбинацией называется точка

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n, \text{ где } \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}, \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Если точки являются вершинами выпуклого многоугольника на плоскости, то любую точку многоугольника (как внутреннюю, так и граничную) можно представить в виде их выпуклой линейной комбинации (рис. 2.11).

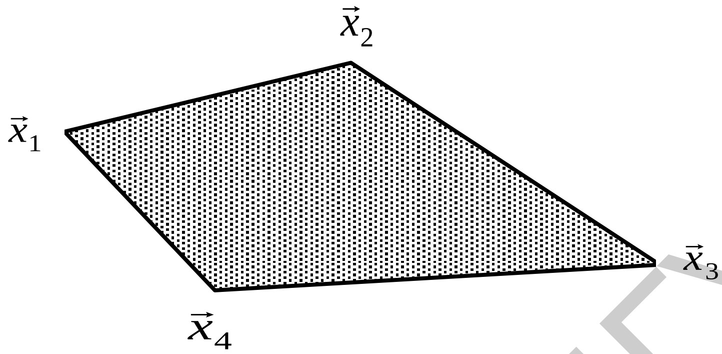



Рис. 2.11. Выпуклая линейная комбинация вершин

При этом для всех точек границы (кроме вершин) потребуется использовать по две различные точки, для любой внутренней точки достаточно трех. Вершины в виде выпуклой линейной комбинации различных точек представить нельзя, и согласно определению они являются угловыми точками.

Можно показать и в общем случае, что множество допустимых решений задачи линейного программирования, если оно не пусто, является выпуклым. Действительно, в $n$-мерном пространстве каждое неравенство вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \ldots\ + a_{in}x_n \leq b_i$ исключает из числа допустимых решений некоторое полупространство. При любом числе таких ограничений область допустимых решений останется выпуклой. Можно представить для наглядности обработку алмаза на плоскошлифовальном станке. Получаемый бриллиант всегда будет иметь форму выпуклого многогранника.

Докажем сформулированную теорему, рассуждая от противного. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ – все угловые точки многогранника допустимых решений, а экстремум целевой функции достигается в некоторой внутренней точке многогранника $\vec{x}*$, например $\max Z = Z(\vec{x}*)$. Но любую внутреннюю точку выпуклого многогранника можно представить как выпуклую линейную комбинацию угловых точек, т. е.

$$\vec{x}* = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{x}_k, \text{ где } \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1, k}, \text{ и } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Следовательно, $z(\vec{x}*) = \lambda_1 z(\vec{x}_1) + \lambda_2 z(\vec{x}_2) + \ldots + \lambda_k z(\vec{x}_k)$.

Обозначим $M = \max\left(z\left(\vec{x}_1\right), z\left(\vec{x}_2\right), \ldots, z\left(\vec{x}_k\right)\right)$, тогда $z\left(\vec{x}^*\right) \leq \lambda_1 M + \lambda_2 M + \ldots + \lambda_k M$. И получается, что $z(\vec{x}^*) \leq M$.

Поскольку $M$ – значение целевой функции в одной из угловых точек, то утверждение теоремы, что экстремум достигается в одной из угловых точек многогранника допустимых планов, доказано. Остается доказать, что если целевая функция достигает экстремального значения более чем в одной угловой точке, то она принимает это же значение в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией.

Пусть в угловых точках $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ целевая функция принимает свое максимальное значение, равное $M$. Любая точка $\vec{x}$, являющаяся их выпуклой линейной комбинацией, может быть представлена как

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_p \vec{x}_p, \text{ где } \lambda_i \geq 0, \; i = \overline{1, p}, \text{ и } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Подставляя $\vec{x}$ в целевую функцию, получим

$$z(\vec{x}) = \lambda_1 M + \lambda_2 M + \ldots + \lambda_p M .$$

Значит, $Z(\vec{x}) = M$ , что и требовалось доказать.

## 2.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

### 2.3.1. Общая идея симплексного метода

В связи с основной теоремой ЛП возникает идея решения ЗЛП путем упорядоченного перебора угловых точек многоугольника области допустимых планов (в общем случае – многогранной области) и сравнения значений целевой функции в этих точках. Простой перебор всех угловых точек даже с относительно небольшим числом переменных и ограничений практически неосуществим, т. к. требует большого числа вычислений. Действительно, пусть задача записана в канонической форме и содержит $m$ равенств с $n$ переменными ($m < n$):

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что все уравнения линейно независимы (иначе некоторые можно опустить) и что ранг матрицы коэффициентов системы равен $m$, в противном случае система несовместна. Произвольно выбирая $m$ переменных из их общего числа $n$, положим оставшиеся $n - m$ переменных равными нулю. Общее количество полученных таким путем миноров и соответственно наборов уравнений – это число сочетаний из $n$ элементов по $m$, которое равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Среди решений этих групп уравнений содержатся все угловые точки множества допустимых планов, но количество таких групп даже для относительно простых задач настолько велико, что поиск оптимального решения простым перебором вершин очень громоздок. Даже для рассмотренного ранее примера графического решения задачи $C_n^2 = 15$ (кроме четырех ограничений) надо учитывать и две координатные оси, поэтому $n = 6$. Попарные пересечения этих прямых дадут все вершины многоугольника области допустимых решений, в том числе и точки экстремума. Более того, часть полученных точек окажется вне области допустимых решений. В реальных задачах число переменных может измеряться тысячами, поэтому разработаны методы рационального перебора угловых точек.

Одним из универсальных методов решения ЗЛП является *симплекс-метод* (*метод последовательного улучшения плана*). Симплекс-метод позволяет вести расчеты как вручную, так и на компьютере. В нем реализуется целенаправленный переход по ребрам многогранника из вершины в соседнюю вершину в направлении наискорейшего возрастания целевой функции в задаче на максимум. Этот метод применяется к ЗЛП в *канонической форме* при условии, что известен *базисный* план.

*Планом*, или *допустимым решением*, ЗЛП в канонической форме

$$z(x) = c'x \to \max\ (\min), \tag{2.17}$$

$$Ax = b, \tag{2.18}$$

$$x \geq 0, \tag{2.19}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$, называют вектор $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющий ограничениям (2.18), (2.19). При этом, не ограничивая общности, полагают $b \geq 0$, rank $A = m$. Действительно, предполагая противное, т. е. rank $A < m$, можно заключить, что либо в ограничениях-равенствах (2.18) ЗЛП (2.17)–(2.19) есть уравнения-следствия и их можно исключить, либо система ограничений (2.18) несовместна (не имеет решения). В последнем случае ЗЛП (2.17)–(2.19) не имеет допустимых решений.

План $x \in \mathbf{R}^n$ ЗЛП (2.17)–(2.19) называют *базисным*, если у него $(n - m)$ компонент (координат) равны нулю, а остальные $m$ компонент соответствуют линейно независимым векторам условий. Это решение одного из выделенных наборов уравнений, если для этой группы оно является единственным.

Базисный план называют *невырожденным*, если он содержит ровно $m$ положительных компонент (например, $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0)'$, $x_i > 0$, $i = \overline{1, m}$), и *вырожденным* – в противном случае. Первые $m$ компонент называются *базисными*, а остальные $(n - m)$ – *небазисными* (или свободными) переменными. Базисный план часто называют *опорным планом.* Если хоть одна базисная переменная отрицательна, то это *недопустимый базисный план.*

Поскольку ранг матрицы коэффициентов $m$ и вектор правых частей ненулевые, то среди ее миноров $m$-го порядка обязательно будут ненулевые. Значит, базисные решения всегда существуют. Множество базисных решений содержит в своем составе (как подмножество) все угловые точки области допустимых планов.

*Оптимальным* планом ЗЛП называется план, доставляющий экстремум (максимальное или минимальное значение) целевой функции.

Алгоритм симплекс-метода нахождения оптимального плана всегда начинается с некоторого допустимого базисного плана. Далее следует проверка, можно ли улучшить значение целевой функции, если ввести в базис одну из небазисных (нулевых) переменных. Если такой переменной нет, то оптимальное решение найдено; если есть, то необходимо перейти к новому, лучшему (или хотя бы не худшему) базисному решению. Но базисное решение содержит ровно $m$ переменных, поэтому необходимо определить исключаемую из базиса переменную (после определения переменной, вводимой в базис).

Каждый такой цикл преобразования называют *итерациями*, а методы вычислений, основанные на последовательных итерациях, – *итерационными* методами.

Многократное повторение однотипных вычислений весьма трудоемко и утомительно, если выполнять его вручную, но его несложно запрограммировать.

Таким образом, решение ЗЛП симплекс-методом включает в себя три этапа:

- построение первоначального базисного плана;
- проверка плана на оптимальность;
- переход к новому базисному плану в случае неоптимальности плана.

Последовательно рассмотрим все этапы.

### 2.3.2. Построение первоначального базисного плана

Рассмотрим процедуру построения первоначального базисного плана в зависимости от вида основных ограничений ЗЛП. Исследуем три случая.

1. Пусть среди векторов ограничений ЗЛП имеется единичный базис

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &+ a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1,\\
x_2 \qquad &+ a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2,\\
\ldots,\\
x_m &+ a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где $x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n},\ b_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$.

Система ограничений вида (2.20) называется *системой в предпочтительном виде*. Здесь базис образуют векторы

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix},\ \dots,\ A_m=\begin{pmatrix}0\\\dots\\0\\1\end{pmatrix},\ \text{т. е. } A_i=\begin{pmatrix}0\\\dots\\1\\\dots\\0\end{pmatrix}\leftarrow i,\ i=\overline{1,\ m}. \quad (2.21)$$

Переменные $x_1$, $x_2$, …, $x_m$, соответствующие базисным векторам $A_1$, $A_2$, …, $A_m$, являются *базисными переменными* (БП), остальные компоненты $x_{m+1}$, …, $x_n$ – *свободными переменными* (СП).

Так как $b \geq 0$, то, полагая в (2.20) СП равными нулю (т. е. $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$), получаем значение для БП: $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, …, $x_m = b_m$, т. е. $x_i = b_i$, $i=\overline{1,\ m}$. Тогда $x^1 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)'$ – *первоначальный базисный план* для задачи (2.17)–(2.20).

2. Пусть ЗЛП задана в нормальной форме, т. е. система ограничений (2.18) имеет вид $Ax \leq b$, где $b \geq 0$. Представим эти ограничения в координатной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i=\overline{1,m}. \quad (2.22)$$

С помощью введения *дополнительных* неотрицательных *переменных* $x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$, …, $x_{n+m} \geq 0$ приведем (2.22) к канонической форме:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + x_{n+1} = b_1,\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + x_{n+2} = b_2,\\ \dots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j + x_{n+m} = b_m.\end{cases} \quad (2.23)$$

Очевидно, что здесь переменные $x_{n+1}$, $x_{n+2}$, …, $x_{n+m}$ являются БП, а все остальные – СП. Полагая в (2.23) СП $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, получаем значения БП: $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2$, …, $x_{n+m} = b_m$. Тогда из системы ограничений (2.23) следует, что *первоначальный базисный план* ЗЛП (2.17), (2.19), (2.22) имеет вид

$$x^1=\Big(\underbrace{0,\ 0,\ \dots,\ 0}_{n},\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_m\Big)'.$$

В задаче распределения ресурсов смысл такого плана очевиден: производство отсутствует, все ресурсы зарезервированы. Он будет оптимален, только если все виды продукции являются убыточными.

3. Пусть ЗЛП задана в нормальной форме, а система основных ограничений имеет вид

$$Ax \geq b,\ b \geq 0. \qquad (2.24)$$

Ограничения (2.24), записанные в координатной форме $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$, $i = \overline{1,\ m}$, приведем к канонической форме с помощью введения дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0,\ i = \overline{1,\ m}$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - x_{n+1} = b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j - x_{n+m} = b_m. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Тогда целевая функция $z(x)$ в (2.17) для ЗЛП (2.17), (2.25), (2.19) примет вид

$$z(x, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = c'x + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} \to \max\ (\min),$$

а прямые ограничения – $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,\ n}$, $x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$, …, $x_{n+m} \geq 0$. В общем случае система ограничений (2.25) не содержит единичного базиса и не является системой в предпочтительном виде. В этом случае для решения ЗЛП вводят *искусственный базис* и переходят к *М-задаче*. Вместо целевой функции вида (2.17) рассматривают функцию $\tilde{z}$ вида

$$\tilde{z}(x, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, x_{n+m+1}, \ldots, x_{n+2m}) = c'x - (+)M \sum_{l=1}^{m} x_{l+n+m} \to \max\ (\min), \qquad (2.26)$$

а для образования базиса в систему ограничений (2.25) вводят неотрицательные *искусственные переменные* $x_{n+m+i}$, $i = \overline{1,\ m}$. В результате вместо ЗЛП (2.14), (2.21), (2.16) получаем ЗЛП (2.26) с основными ограничениями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2, \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j - x_{n+m} + x_{n+2m} = b_m \end{cases} \qquad (2.27)$$

и прямыми ограничениями

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n+2m}. \qquad (2.28)$$

В новой целевой функции $\tilde{z}$ в (2.26) знак минус относится к задаче (2.17), (2.24), (2.19) при исследовании ЗЛП на максимум; плюс – к этой же задаче на минимум. Здесь $M$ – большое положительное число (штраф за нарушение ограничений); $x_{n+m+i}, i = \overline{1, m}$, – *искусственные* переменные (за них полагается штраф). Система ограничений (2.27), в отличие от (2.25), имеет предпочтительный вид (т. к. векторы $A_{n+m+1}$, $A_{n+m+2}$, …, $A_{n+2m}$, соответствующие *искусственным* переменным $x_{n+m+i}$, $i = \overline{1, m}$, образуют единичный базис). Положив СП $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+m} = 0$, из системы (2.27) основных ограничений получим первоначальный базисный план $x^1$ $M$-задачи (2.25)–(2.27): $x^1 = \Big(\underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{n+m},\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m\Big)'$.
Если некоторые из уравнений системы ограничений (2.24) имеют предпочтительный вид, т. е. содержат базисные векторы, то в эти уравнения искусственные переменные можно не вводить.

Для модели формирования минимальной продовольственной корзины при таком опорном плане затраты на приобретение продуктов минимальны (равны нулю), что было бы хорошо, но вот только корзина будет пустая, а это уже неприемлемо.

Таким образом, в общем случае любую задачу линейного программирования требуется преобразовать к каноническому виду:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Причем правые части ограничений-равенств должны быть неотрицательны, иначе соответствующие ограничения необходимо умножить на –1. Искусственные переменные добавляются ко всем левым частям ограничений-равенств, не имеющих предпочтительного вида.

Такой метод называют *М-методом* или *методом больших штрафов*, а полученную задачу – *М-задачей*, соответствующей исходной. Естественно ожидать, что все искусственные переменные в процессе оптимизации получат нулевые значения. Однако если исходная задача несовместна, то при любом штрафе исключить все искусственные переменные не удастся. Например, если задачу оптимального планирования производства дополнить условиями по минимальным объемам производства отдельных видов продукции, то при недостатке наличных ресурсов придется приобретать их по любой цене. Зато сразу видно, что задача не имеет допустимого решения и, более того, видно, сколько и каких именно ресурсов не хватает.

Остается открытым вопрос, как понимать термин «достаточно большое». Теоретически надо, чтобы $M \to \infty$. При аналитических вычислениях пишут $M$, и при обнулении искусственных переменных соответствующее выражение исчезает.

В компьютерных вычислениях имеют место ошибки округления, особенно когда в операциях сложения или вычитания одновременно участвуют и большие, и малые числа. В этом легко убедиться, вычисляя, например, значение $10^{15} + 1$. Скорее всего, единица просто не будет прибавлена (если это не так, то достаточно увеличить первое или уменьшить второе число). Поэтому лучше назначать $M$, исходя из «разумной достаточности». Если же в решение необоснованно войдет искусственная переменная, то соответствующий ей штраф можно увеличить.

В компьютерных программах, реализующих симплекс-метод, для подавления ошибок округления используется двухэтапный метод. На первом этапе решается $M$-задача, но за критерий принимается просто сумма значений искусственных переменных. Если достигается нулевое значение этой суммы, то переходят ко второму этапу, принимая полученное оптимальное решение за опорный план исходной задачи. Если же на первом этапе целевая функция не обнуляется, то исходная система ограничений несовместна.

**Пример.** Составить первоначальный базисный план для ЗЛП

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \ge 6; \end{cases} \tag{2.29}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,\ 4}.$$

***Решение.*** Путем введения неотрицательных дополнительных переменных $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$ приведем ЗЛП (2.29) к каноническому виду:

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_6 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_7 = 6; \end{cases} \tag{2.30}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,\ 7}.$$

Система основных ограничений ЗЛП (2.30) содержит лишь один базисный вектор $A_5 = (1, 0, 0)'$ (векторы $A_6 = (0, -1, 0)'$, $A_7 = (0, 0, -1)'$ базисными не являются!). До базиса в системе ограничений (2.30) не хватает двух единичных векторов. Поэтому во второе и третье уравнения системы основных ограничений (2.30) вводим две *искусственные* переменные $x_8 \ge 0$, $x_9 \ge 0$. В результате возникает $M$-задача с целевой функцией

$$\tilde{z}(x_1, \ldots, x_9) = -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 - M\left(x_8 + x_9\right) \to \max$$

и ограничениями

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_6 + x_8 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_7 + x_9 = 6; \end{cases} \quad (2.31)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 9}.$$

В (2.31) векторы $A_5$, $A_8$, $A_9$ являются базисными. Тогда $x_5$, $x_8$, $x_9$ – БП, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_6$, $x_7$ – СП. Полагая для СП $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$, из (2.31) получаем первоначальный базисный план: $x^1$=(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 6)'.

### 2.3.3. Симплекс-таблица

После приведения системы ограничений ЗЛП к предпочтительному виду ее данные заносят в *симплексную таблицу*. Это естественный способ организации данных и на бумаге, и в памяти компьютера. Для ЗЛП с основными ограничениями (2.20) она имеет вид, представленный в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Общий вид симплекс-таблицы

| $i$ | Базис | $c_Б$ | $b$ | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_k$ | … | $c_m$ | $c_{m+1}$ | … | $c_n$ | θ | Номер итерации |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | … | $A_k$ | … | $A_m$ | $A_{m+1}$ | … | $A_n$ | | |
| 1 | $A_1$ | $c_1$ | $b_1$ | 1 | 0 | … | 0 | … | 0 | $a_{1,m+1}$ | … | $a_{1,n}$ | $\theta_1$ | |
| 2 | $A_2$ | $c_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | … | 0 | … | 0 | $a_{2,m+1}$ | … | $a_{2,n}$ | $\theta_2$ | |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | |
| $k$ | $A_k$ | $c_k$ | $b_k$ | 0 | 0 | … | 1 | … | 0 | $a_{k,m+1}$ | … | $a_{k,n}$ | $\theta_k$ | |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | |
| $m$ | $A_m$ | $c_m$ | $b_m$ | 0 | 0 | … | 0 | … | 1 | $a_{m,m+1}$ | … | $a_{m,n}$ | $\theta_m$ | |
| $m+1$ | $\Delta_j = z_j - c_j$ | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | … | $\Delta_k$ | … | $\Delta_m$ | $\Delta_{m+1}$ | … | $\Delta_n$ | – | |

В столбце «Базис» записывают базисные векторы $A_1$, $A_2$, …, $A_m$, соответствующие первоначальному базисному плану $x^1 = \left(b_1, b_2, ..., b_m, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m}\right)'$. В столбце «$c_Б$» – коэффициенты $c_1$, $c_2$, …, $c_m$ целевой функции $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, соответствующие векторам базиса $A_1$, $A_2$, …, $A_m$. В столбце «$b$» записывают координаты $b_1$, $b_2$, …, $b_m$ вектора $b$ в базисе $A_1$, $A_2$, …, $A_m$. В этом столбце на каждой итерации получаем *координаты текущего базисного плана*. В столбцах $A_j$, $j = \overline{1, n}$, записывают координаты вектора $A_j$ в выбранном на данной итерации базисе. В частности, на первой итерации имеем

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i; \; A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n},$$

т. к. на первом шаге векторы-столбцы $A_1, A_2, \dots, A_m$ образуют единичный базис.

Следует проверить, можно ли улучшить значение целевой функции, если увеличить одну из небазисных (нулевых) переменных и ввести ее в базис.

ЗЛП имеет вид (2.20):

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Выражая базисные переменные через свободные, получим

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j , \quad i = \overline{1, m},$$

выразим значение целевой функции только через небазисные переменные:

$$Z = \sum_{n}^{m} c_i b_i + \left( c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} \right) x_{m+1} + \left( c_{m+2} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+2} \right) x_{m+2} + \dots +$$

$$+ \left( c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,n} \right) x_n .$$

Тогда целевая функция может быть представлена как

$$Z = c_Б b + (c_{m+1} - c_Б A_{m+1}) x_{m+1} + (c_{m+2} - c_Б A_{m+2}) x_{m+2} + \dots + (c_n - c_Б A_n) x_n ,$$

а если ввести обозначения для входящих в нее слагаемых

$$\Delta_0 = c_Б b \text{ и } \Delta_j = c_Б A_j - c_j ,$$

то окончательно получим $Z = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$.

В строке (*индексной*) с номером $m + 1$ записывают: в столбце «$b$» – *значение целевой функции* на базисном плане: $z(x^1) = \Delta_0 = = c'_Б b$, в столбцах «$A_j$» – *оценки индексной строки:* $\Delta_j = z_j - c_j = c'_Б A_j - c_j$, где $z_j = c'_Б A_j$. На первом шаге $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \; j = \overline{1, n}$. Построенный первоначальный базисный план $x_0$ проверяется на оптимальность.

Переменные $x_j$, $j = \overline{m+1, n}$, – это свободные переменные, поэтому величины $\Delta_j$ называют *оценками свободных переменных*. Если все эти оценки *неотрицательны*, то опорный план $(b_1, b_2, \ldots, b_m, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m})$ является *оптимальным*, т. к. введение любой из этих переменных в базис только уменьшит величину целевой функции. Ее значение для текущего опорного плана – $\Delta_0$, оно определяется базисными переменными.

Если для нескольких свободных переменных оценки отрицательны, то включение любой из них в базис приведет к увеличению целевой функции. Обычно для очередной итерации вводят в базис ту свободную переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка. Однако вполне может случиться, что такая переменная требует значительных затрат дефицитных ресурсов и при последующих итерациях ее место займет переменная, не столь требовательная к ресурсам и обеспечивающая за счет своей величины более значительный прирост целевой функции, несмотря на меньшую оценку.

**Теорема.** Критерий оптимальности (*при решении ЗЛП на максимум*):

1. Если $\Delta_j \geq 0$ для всех $j = \overline{1, n}$, то базисный план $x_0$ оптимален.

2. Если найдется хотя бы одна оценка $\Delta_j < 0$, такая, что в столбце $A_j$ все числа $x_{ij} \leq 0$, $i = \overline{1, m}$, то целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов задачи и ЗЛП не имеет решения.

3. Если среди оценок $\Delta_j$ есть отрицательные, причем для каждого номера $j$ с $\Delta_j < 0$ существует хотя бы один номер $i$, при котором $x_{ij} > 0$, то план $x_0$ не является оптимальным. В этом случае осуществляется следующая итерация симплекс-метода.

На практике симплекс-метод применяется для решения очень больших задач, а приведенные выше соображения поясняют, почему количество необходимых итераций зависит не только от размерности модели, но и от ее структуры. Довольно часто число итераций для нахождения оптимального решения оказывается примерно таким же, как и число ограничений модели, но можно искусственно построить задачу, содержащую $n$ переменных, при решении которой потребуется $2n$ итераций.

Если все оценки свободных переменных неотрицательны, но хотя бы одна из них нулевая, то при включении этой переменной в базис целевая функция не изменится и мы получим *альтернативное оптимальное решение*. Это будет еще одна угловая точка, и получается бесконечное множество решений, которым соответствует отрезок, соединяющий найденные угловые точки. Для интерпретации возникшей проблемы выбора одного из множества решений предположим, что одинаковые результаты получаются при производстве любого из двух видов товаров. Возможно, будет принято решение производить оба товара, чтобы «не класть все яйца в одну корзину».

### 2.3.4. Переход к новому базисному плану

В первой строке симплекс-таблицы (табл. 2.3) записаны все переменные, входящие в модель, а под ними – соответствующие им коэффициенты целевой функции. Очевидно, что при переходе к нехудшему опорному плану эти строки изменяться не должны. Первоначальный порядок перечисления переменных модели может быть любым. В столбце «БП» перечислены все переменные, входящие в текущий базис, в столбцах «$c_Б$» и «$b$» – коэффициенты целевой функции при базисных переменных и сами значения этих переменных.

Таблица 2.3

Пересчет симплекс-таблицы

| БП | $c_Б$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_P$ | … | $x_m$ | $x_{m+1}$ | … | $x_П$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_P$ | … | $c_m$ | $c_{m+1}$ | … | $c_П$ | … | $c_n$ |
| $x_1$ | $c_1$ | $b_1$ | 1 | 0 | … | 0 | … | 0 | $a_{1,m+1}$ | … | $a_{1,П}$ | … | $a_{1,n}$ |
| $x_2$ | $c_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | … | 0 | … | 0 | $a_{2,m+1}$ | … | $a_{2,П}$ | … | $a_{2,n}$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $x_P$ | $c_P$ | $b_P$ | 0 | 0 | … | 1 | … | 0 | $a_{P,m+1}$ | … | $a_{P,П}$ | … | $a_{P,n}$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $x_m$ | $c_m$ | $b_m$ | 0 | 0 | … | 0 | … | 1 | $a_{m,m+1}$ | … | $a_{m,П}$ | … | $a_{m,n}$ |
| Оценки | | $\Delta_0$ | 0 | 0 | … | 0 | … | 0 | $\Delta_{m+1}$ | … | $\Delta_П$ | … | $\Delta_n$ |

Основная часть таблицы содержит все коэффициенты матрицы модели, а последняя строка – текущее значение целевой функции $\Delta_0 = c_Б b$ и оценки свободных переменных $\Delta_j = c_Б A_j - c_j$, $j = \overline{m+1, n}$. При выполнении вычислений эти значения удобно находить, попарно перемножая соответствующие столбцы таблицы, суммируя результаты и отнимая записанные во второй строке коэффициенты целевой функции. Для базисных переменных можно сразу записать нулевые значения, которые всегда получатся при использовании формулы для оценок.

Если первоначальный базисный план $x^1 = \left(x_1^1,\ x_2^1,\ ...,\ x_n^1\right)'$ не является оптимальным, то при исследовании *ЗЛП* (*на максимум*) переходят к нехудшему базисному плану $x^2 = \left(x_1^2,\ x_2^2,\ ...,\ x_n^2\right)'$ в направлении наискорейшего возрастания целевой функции. Для этого среди отрицательных оценок $\Delta_j < 0$ находят оценку $\Delta_{j_0}$, максимальную по абсолютной величине:

$$\max_{\Delta j<0} \left|\Delta_j\right| = \left|\Delta_{j_0}\right|.$$

Столбец $A_{j_0}$, соответствующий номеру $j_0$, называют *разрешающим* столбцом. При решении задачи на *минимум* из всех положительных оценок

$\Delta_j > 0$ выбирают max $\Delta_j > 0$ и в качестве разрешающего столбца $A_{j_0}$ берут столбец с номером $j_0$ из условия $\max\limits_{\Delta j>0} \Delta_j = \Delta_{j_0}$. Вектор-столбец $A_{j_0}$ вводят в базис.

Если переменная $x_j = x_\Pi$ имеет наибольшую по абсолютной величине отрицательную оценку, то ее называют *перспективной*, поскольку введение ее в базис обеспечивает переход к нехудшему опорному плану. Прирост целевой функции будет пропорционален величине значения этой переменной в новом опорном плане, но ни одно из ограничений-равенств, коэффициенты которых записаны в строках симплексной таблицы, нарушать нельзя.

Значения свободных переменных в текущем опорном плане равны нулю, поэтому каждому ограничению соответствуют равенства

$$x_i + a_{i,\Pi} x_\Pi = b_i, \quad x_i \ge 0, \quad b_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Перспективная переменная $x_\Pi$ тоже равна нулю, но при введении ее в базис ей нельзя придать значение, большее чем $\min\limits_{\substack{i=\overline{1,m} \\ a_{i,\Pi}>0}} \{b_i / a_{i,\Pi}\}$, которое и называется *наименьшим симплексным отношением*. Условие $a_{i,\Pi} > 0$ означает, что для строк, в которых коэффициенты $a_{i,\Pi} \le 0$, симплексные отношения вычислять излишне, т. к. они не ограничивают рост переменной $x_\Pi$. Симплексные отношения $\theta_i$, $i = \overline{1, m}$, заносят в столбец θ симплекс-таблицы (см. табл. 2.2).

Пусть наименьшее симплексное отношение есть $b_P / a_{P,\Pi}$ и, следовательно, переменная $x_P$ должна получить нулевое значение и быть исключена из базиса. Строка, в которой находится наименьшее симплексное отношение, называется *разрешающей строкой*, а коэффициент $a_{P,\Pi}$ – *разрешающим элементом*. Именно разрешающая строка является «самым слабым звеном» и симплексное отношение для нее и есть максимально возможное значение перспективной переменной в новой итерации. Базисный вектор, стоящий в этой строке, исключается из базиса. Элемент, стоящий на пересечении *разрешающего столбца* и *разрешающей строки*, называется *разрешающим элементом*.

Если минимальное значение симплексного отношения достигается более чем в одной строке, то в качестве разрешающей можно выбрать любую из них. Если предположить, что минимальное симплексное отношение не определяется, т. к. $a_{i,\Pi} \le 0$, $i = \overline{1, m}$, то перспективная переменная и целевая функция могут неограниченно возрастать.

### 2.3.5. Симплексные преобразования

Разрешающая строка и разрешающий столбец отмечаются в симплекс-таблице стрелками или выделяются. Если перспективная переменная $x_\Pi$ должна заменить в базисе переменную $x_P$, то необходимо найти ее значение из уравнения

$$x_{\text{Р}} + a_{\text{Р},m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{\text{Р},\text{П}}x_{\text{П}} + \ldots + a_{\text{Р},n}x_n = b_{\text{Р}}.$$

Получаем, что

$$x_{\text{Р}} = \frac{b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} - \left( \frac{1}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_p + \frac{a_{\text{Р},m+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{m+1} + \ldots + \frac{a_{\text{Р},\text{П}-1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{П}-1} + \frac{a_{\text{Р},\text{П}+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{П}+1} + \ldots + \frac{a_{\text{Р},n}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_n \right),$$

подставляем это выражение в остальные уравнения исходной системы ограничений. Так, вместо уравнения

$$x_i + a_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{i,\text{П}}x_{\text{П}} + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i$$

получим

$$x_i + a_{i,m+1} + \ldots + a_{i,\text{П}} \frac{b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} -$$

$$-a_{i,\text{П}} \left( \frac{1}{\text{a}_{\text{Р},\text{П}}} x_p + \frac{a_{\text{Р},m+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{m}+1} + \ldots + \frac{a_{\text{Р},\text{П}-1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{П-1}} + \frac{a_{\text{Р},\text{П}+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{П}+1} + \ldots \frac{a_{\text{Р},n}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_n \right) +$$

$$+ a_{i,n}x_n = b_i,$$

откуда

$$x_i = \frac{b_i a_{\text{Р},\text{П}} - b_{\text{Р}} a_{i,\text{П}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} -$$

$$-\left( \frac{a_{i,m+1}a_{\text{Р},\text{П}} - a_{\text{Р},m+1}a_{i,\text{П}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{m+1} + \ldots + \frac{a_{i,\text{П}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{Р}} + \ldots + \frac{a_{i,n}a_{\text{Р},\text{П}} - a_{\text{Р},n}a_{i,\text{П}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_n \right).$$

Аналогично при подстановке в выражение для целевой функции

$$\text{Z} = \Delta_0 - \left( \Delta_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \Delta_{\text{П}}x_{\text{П}} + \ldots + \Delta_n x_n \right)$$

получим

$$\text{Z} = \Delta_0 - \Delta_{m+1}x_{m+1} - \ldots - \Delta_{\text{П}} \frac{b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} +$$

$$+\Delta_{\text{П}} \left( \frac{1}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_p + \frac{a_{\text{Р},m+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{m+1} + \ldots + \frac{a_{\text{Р},\text{П}-1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{П}-1} + \frac{a_{\text{Р},\text{П}+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{П}+1} + \ldots + \frac{a_{\text{Р},n}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_n \right) - \ldots - \Delta_n x_n$$

и окончательно

$$Z = \frac{\Delta_0 a_{\text{Р},\text{П}} - \Delta_{\text{П}} b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} - \left( \frac{\Delta_{m+1}a_{\text{Р},\text{П}} - \Delta_{\text{П}}a_{\text{Р},m+1}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{m+1} + \ldots + \frac{\Delta_{\text{П}}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_{\text{Р}} + \ldots + \frac{\Delta_n a_{\text{Р},\text{П}} - \Delta_{\text{П}} a_{\text{Р},n}}{a_{\text{Р},\text{П}}} x_n \right).$$

Приведенные формулы полностью описывают переход к новому базису задачи линейного программирования, который и называется *симплексным преобразованием*. Их не требуется запоминать, т. к. они эквивалентны правилам, которые следуют из сопоставления этих формул и симплексной таблицы.

Для завершения шага преобразований, ведущих к новому базисному плану $x^2$, составляют *новую симплекс-таблицу по следующим правилам:*

1. Элементы разрешающей строки $i = \text{Р}$ новой таблицы получаются делением элементов разрешающей строки старой таблицы на разрешающий элемент:

$$b'_{\text{Р}} = \frac{b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р,П}}}, \quad a'_{\text{Р},j} = \frac{a_{\text{Р},j}}{a_{\text{Р,П}}}, \quad j = 1, n.$$

2. Элементы остальных строк разрешающего столбца $j = \text{П}$ в новой таблице равны нулю, за исключением разрешающего элемента:

$$a'_{i,\text{П}} = 0 \quad (i \neq \text{Р}), \quad a'_{\text{Р,П}} = 1 .$$

3. Все остальные элементы новой симплексной таблицы, включая значения базисных переменных, оценки свободных переменных и значение целевой функции, вычисляются по *правилу прямоугольника*. Для этого в исходной таблице выделим такой прямоугольник, чтобы одна из его диагоналей определялась вычисляемым и разрешающим элементами. Эту диагональ называют *главной*, а другую – *побочной*.

Чтобы получить элемент новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и разделить полученное число на разрешающий элемент. Это правило отображено на рис. 2.12.

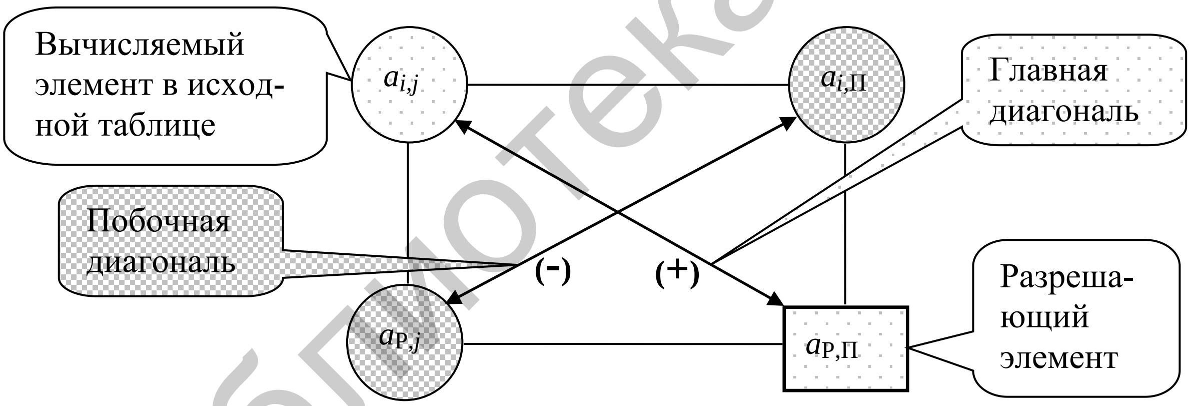


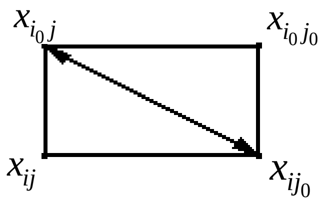

Рис. 2.12. Правило прямоугольника

Соответствующие формулы для новой симплексной таблицы получаются из вышеприведенных соотношений и имеют следующий вид:

$$a'_{i,j} = \frac{a_{i,j}a_{\text{Р,П}} - a_{\text{Р},j}a_{i,\text{П}}}{a_{\text{Р,П}}}, \quad b'_{\text{i}} = \frac{b_i a_{\text{Р,П}} - b_{\text{Р}}a_{i,\text{П}}}{a_{\text{Р,П}}}, \quad i \neq \text{Р}, \ j \neq \text{П},$$

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j a_{\text{Р,П}} - \Delta_{\text{П}} a_{\text{Р},j}}{a_{\text{Р,П}}}, \quad \Delta'_0 = \frac{\Delta_0 a_{\text{Р,П}} - \Delta_{\text{П}} b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р,П}}}, \quad j = \overline{1, n} .$$

Эти выражения легко преобразовать, тогда получаемый порядок вычислений называют *правилом треугольника*: чтобы получить все остальные элементы (включая элементы индексной строки в новой таблице), нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенного на разрешающий элемент (рис. 2.13).




$$\left(x_{ij}\right)_{\text{нов}} = x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}.$$

Рис. 2.13. Правило треугольника

Для контроля вычислений элементов индексной строки применяют формулы

$$\Delta_0 = c'_{\text{Б}} b; \quad \Delta_j = c'_{\text{Б}} A_j - c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Например, для нового значения целевой функции получим $\Delta_0^{'} = \Delta_0 - \dfrac{b_{\text{Р}}}{a_{\text{Р,П}}} \Delta_{\text{П}}$. Но величина $b_{\text{Р}} / a_{\text{Р,П}}$ – это наименьшее симплексное отношение, равное значению переменной $x_{\text{П}}$ в новой симплексной таблице, следовательно, $\Delta_0^{'} = \Delta_0 - x_{\text{П}} \Delta_{\text{П}}$.

Таким образом, прирост целевой функции на каждую единицу прироста переменной $x_{\text{П}}$ (до вхождения в базис она была свободной и имела нулевое значение) равен абсолютному значению оценки этой переменной $\Delta_{\text{П}}$. Эта оценка всегда отрицательна, иначе переменная $x_{\text{П}}$ не была бы выбрана как перспективная.

Новый базисный план $x^2$ опять проверяется на оптимальность по описанной ранее схеме с использованием критерия оптимальности. Если план $x^2$ оптимален, то задача решена, если нет – строим новый базисный план. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не будет получено решение (случай 1 *критерия оптимальности*, см. п. 2.3.3) или установлена неограниченность целевой функции (случай 2 *критерия оптимальности*, см. п. 2.3.3). Переход от старого базисного плана к новому называется *симплекс-итерацией.*

С помощью симплекс-метода может быть решена ЗЛП с любым числом переменных, в частности и с $n = 2$. Возникает вопрос: как в симплекс-таблице отражается ситуация, когда $z_{\max}$ достигается не в одной точке, а на отрезке *AE*, т. е. когда имеет место *альтернативный оптимум*?

**Теорема (альтернативный оптимум –** признак бесконечности множества оптимальных планов). Если в индексной строке последней симплекс-таблицы, содержащей оптимальный план, имеется хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной (небазисной) переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Ввиду особого значения случая 2 (см. п. 2.3.3) критерия оптимальности сформулируем его в виде отдельного утверждения.

**Теорема (признак неограниченности целевой функции).** Если в разрешающем столбце симплекс-таблицы нет ни одного положительного элемента, то ЗЛП неразрешима в силу неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов.

*Обсуждение.* Описанный алгоритм симплекс-метода для ЗЛП с невырожденными базисными планами позволяет за конечное число итераций получить оптимальный план либо установить неограниченность значений целевой функции на множестве планов. Этот алгоритм можно применять и для вырожденных ЗЛП, т. е. задач с вырожденными базисными планами. Теоретически здесь возможно «*зацикливание*», т. е. возвращение к уже использованным базисным векторам, однако, как правило, на практике это явление не наблюдается.

Таким образом, при использовании симплекс-метода возможны следующие четыре особых случая:

1. Вырожденность.
2. Альтернативные оптимальные решения.
3. Неограниченные решения.
4. Отсутствие допустимых решений.

Выясним способы их интерпретации в реальных задачах.

*Вырожденность.* Если хоть одна базисная переменная нулевая, то базисное решение называют *вырожденным*. Такая ситуация вполне может возникнуть в процессе решения задачи. Тогда может случиться, что переход к новому базису не обеспечивает улучшения значения целевой функции. Как правило, при последующих итерациях вырожденность исчезает. Дело в том, что на практике ее возникновение объясняется наличием в исходной постановке задачи избыточных ограничений. В этом случае, когда искусственная переменная, соответствующая одному из таких ограничений, выводится из базиса, целевая функция может и не улучшаться. Такая ситуация показана на рис. 2.14.

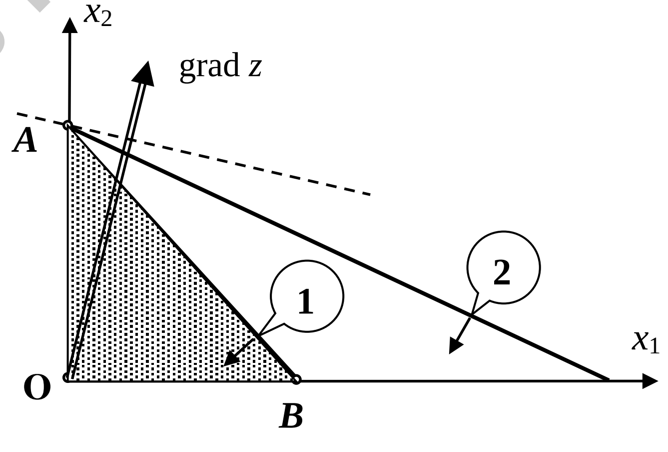



Рис. 2.14. Вырожденность

Из двух ограничений ресурсного типа второе является избыточным. При графическом решении (см. рис. 2.14) это очевидно, но из данных симплексной таблицы такой вывод сделать не удается. При исключении из базиса дополнительной переменной, соответствующей второму ограничению, значение целевой функции не возрастет. В итоге получим точку *A* как оптимальное решение, которое не перестает быть верным от того, что оно вырожденное.

Можно вообразить ситуацию, когда последовательность итераций при вырожденном базисе приведет к повторению уже имевшей место итерации, т. е. возникнет *зацикливание*. Искусственные примеры такого рода существуют, однако в реальных задачах зацикливание маловероятно, в большинстве программ, реализующих симплекс-метод, средства защиты от зацикливания не предусматриваются, т. к. они значительно замедляют процесс вычислений. Во-первых, нужно контролировать возникновение зацикливания, во-вторых, реализовать алгоритм для изменения порядка выбора разрешающих строк и столбцов.

Если подобные затруднения все же возникнут при компьютерном расчете, то можно попробовать произвести незначительные изменения отдельных коэффициентов модели (в пределах точности их определения) и повторить расчет. Если ранее имело место зацикливание, то порядок выбора разрешающих элементов, скорее всего, изменится.

*Альтернативные оптимальные решения.* Если целевая функция достигает экстремального значения более чем в одной угловой точке, то согласно основной теореме линейного программирования она принимает это же значение в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией. Графическая иллюстрация для случая двух переменных приведена на рис. 2.15. Максимальное значение целевая функция получает в угловых точках *A* и *B*. Предположим, что при использовании симплекс-метода получена точка *A* как оптимальный план. Тогда небазисной переменной $x_1$ будет соответствовать нулевая оценка, т. к. при ее введении в базис с последующим переходом к точке *B* значение целевой функции не изменится.

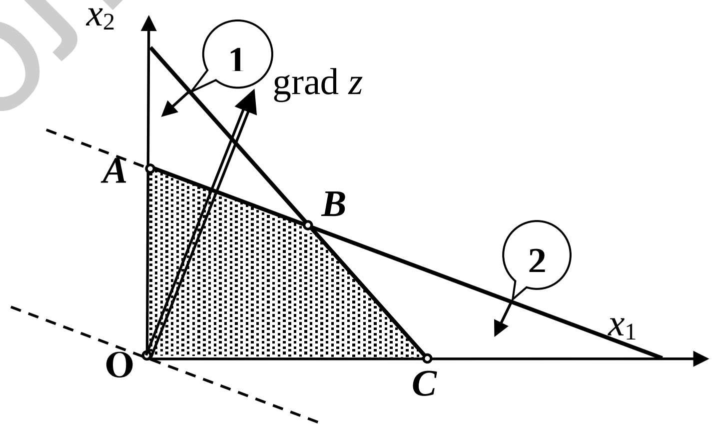



Рис. 2.15. Альтернативные оптимальные решения

Таким образом, признаком существования альтернативных планов является наличие нулевых оценок для небазисных переменных. На практике существование альтернативных решений можно использовать для учета дополнительных соображений при выборе плана действий. Если рассмотренный пример интерпретировать как задачу об оптимальном производственном плане, то лучше выбрать точку *B*, чтобы меньше зависеть от изменений рыночной конъюнктуры.

Если все оценки небазисных переменных строго больше нуля, то найденный оптимальный план является единственным.

С практической точки зрения малые положительные значения оценок не очень существенно отличаются от нулевых хотя бы потому, что большая часть используемых данных определена с некоторой погрешностью. Следовательно, есть основания выполнить расчеты дополнительных вариантов, чтобы оценить реальный эффект от введения таких переменных в принимаемый план.

*Неограниченные решения*. Неограниченное возрастание переменных без нарушения ограничений на практике – явный признак ошибки. Например, в задаче о производственном плане каждый ресурс ограничен. При использовании компьютерных программ, если не указать требование неотрицательности переменных, придавая формально одной из переменных отрицательное значение, программа может получать ресурсы для неограниченного роста других переменных.

Если ошибку не удается быстро обнаружить, то можно ввести дополнительные ограничения, например, на минимальные и максимальные значения переменных, задавая их с большим допуском по отношению к реально возможным значениям. Ошибка выявится при анализе ограничений, в которых участвуют переменные, значения которых вышли за пределы допустимого.

*Отсутствие допустимых решений*. Такая ситуация возникает при несовместности ограничений задачи, что можно считать ошибкой в ее постановке или в используемых данных. На рис 2.16 показаны ограничения по минимальным объемам производства каждого из двух видов продукции. Видно, что третье ограничение, определяющее максимально допустимое использование некоторого ресурса, позволяет удовлетворить любое из этих требований, но не оба одновременно.

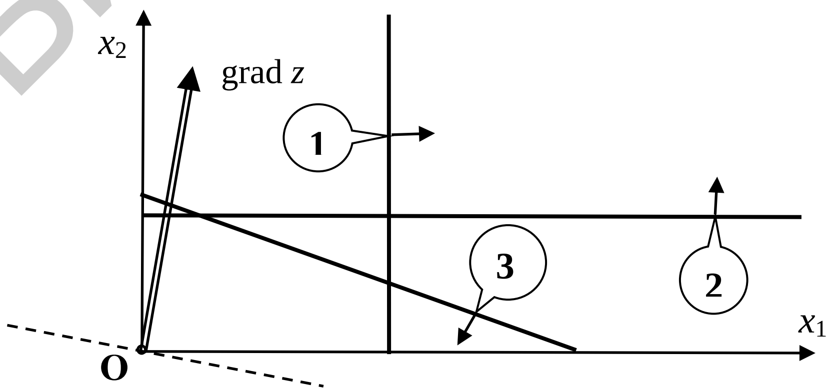



Рис. 2.16. Отсутствие допустимых решений

Такие противоречия возникают при разных целях центрального планирующего органа и руководителей производства. Первый, как правило, стремится к увеличению объема плановых заданий, последним же предпочтительнее такой план, который легче выполнить. Оптимизационная модель становится эффективным средством контроля и анализа статистической отчетности.

### 2.3.6. Метод искусственного базиса (*M*-задача)

Рассмотрим ЗЛП в канонической форме:

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max; \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2.33}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.34}$$

где, не ограничивая общности, полагаем $b_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}$ .

Если среди векторов условий системы основных ограничений (2.33) единичный базис отсутствует, то в ЗЛП (2.32)–(2.34) вводим *искусственные* переменные $x_{n+i} \ge 0,\ i = \overline{1, m}$, и переходим к расширенной задаче (*M-задаче*):

$$\begin{gathered} \tilde{z}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \\ = c_1x_1 + \dots + c_nx_n - M\left(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}\right) \to \max; \end{gathered} \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{2.36}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n+m}. \tag{2.37}$$

В (2.35) $M$ – произвольное, достаточно большое положительное число, а $x_{n+i},\ i = \overline{1, m}$ , – *искусственные* переменные. Единичные векторы $A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным $x_{n+i},\ i = \overline{1, m},$ образуют базис. Тогда $x_1, x_2, \dots, x_n$ – СП. Положив в системе (2.36) основных ограничений СП $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, получим первоначальный базисный план $\tilde{x}^1 = (\underbrace{0, \dots, 0,}_{n} b_1, b_2, \dots, b_m)'$. Решая *M*-задачу симплекс-методом, через конечное число итераций придем к оптимальному плану либо установим неразрешимость *M*-задачи.

Рассмотрим связь между решениями ЗЛП (2.32)–(2.34), содержащей $n$ переменных $x_i$, $i=\overline{1,\ n}$, и $M$-задачей (2.35)–(2.37) с переменными $x_i$, $i=\overline{1,\ n+m}$.

**Теорема.** Если в оптимальном плане $\tilde{x}^0=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m})'$ $M$-задачи (2.35)–(2.37) все искусственные переменные равны нулю, то план $x^0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ является оптимальным планом ЗЛП (2.32)–(2.34).

**Теорема.** Если в оптимальном плане $M$-задачи (2.35)–(2.37) не все искусственные переменные равны нулю, то исходная ЗЛП (2.32)–(2.34) не имеет планов (допустимых решений). Множество планов пусто.

**Теорема.** Если в $M$-задаче (2.35)–(2.37) целевая функция $\tilde{z}$ не ограничена, то и в исходной ЗЛП (2.32)–(2.34) целевая функция $z$ не ограничена (на множестве планов).

### 2.3.7. Симплекс-таблица для М-задачи. Организация и контроль вычислений

Все данные $M$-задачи (2.35)–(2.37) заносим в симплекс-таблицу обычным образом за исключением последней ($m$ + 1)-й строки. Поскольку в $M$-задаче оценки $\Delta_j = z_j - c_j$ являются линейными функциями от $M$, то их удобно записывать в двух строках. В строке ($m$ + 1) записывают свободные члены, а в строке ($m$ + 2) – коэффициенты при $M$. В столбце «$b$» записывают значение целевой функции $\tilde{z}$ на базисном плане также в двух строках. При решении задачи на максимум по наименьшему отрицательному элементу строки ($m$ + 2) определяем вектор, подлежащий включению в базис. В случае равенства нулю элементов строки ($m$ + 2) правило выбора разрешающего столбца применяем к строке ($m$ + 1).

*Замечание.* При наличии в матрице условий единичных векторов число искусственных переменных может быть уменьшено. Искусственные переменные достаточно ввести так, чтобы соответствующие им базисные векторы составили вместе с выбранными единичными векторами условий единичную матрицу. Симплекс-метод начинается, вообще говоря, с искусственного базиса. Оказывается, что *если искусственный вектор на некоторой итерации выйдет из базиса, то обратно в базис он уже никогда не войдет.* В этом случае из симплекс-таблицы может быть удален соответствующий столбец.

Рассмотрим организацию вычислений на примере (при увеличении объема вычислений следует использовать компьютер). Пусть фирма может выпускать три вида продукции $\Pi_j$, $j=\overline{1,3}$. При ее изготовлении используются три вида ресурсов (труд, сырье и оборудование), расход которых $b_i$, $i=\overline{1,3}$, ограничен величинами $b_1=180$, $b_2=60$ и $b_3=120$. Затраты ресурса $i$-го вида на единицу продукции $j$-го вида составляют $a_{ij}$ единиц. Прибыль от производства единицы продукции $j$-го вида составляет $c_j$ единиц. Значения параметров приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Значения параметров примера

| Вид ресурса, $i$ | Расход $i$-го ресурса на единицу $j$-й продукции, $a_{ij}$ | | | Запас ресурса, $b_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | |
| Труд | 6 | 2 | 5 | 180 |
| Сырье | 0 | 2 | 4 | 60 |
| Оборудование | 5 | 2 | 5 | 120 |
| Прибыль, $c_j$ | 9 | 6 | 7 | |

Математическая модель задачи оптимизации производственного плана по величине прибыли примет вид

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180, \\ 2x_2 + 4x_3 \le 60, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{array}\right\}$$

Преобразовывая модель к канонической форме и предпочтительному виду, получим

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6;$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 180, \\ \quad 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 120, \\ x_j \ge 0\ , \ j = \overline{1,6}. \end{array}\right\}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу (табл. 2.5). Значения базисных переменных $x_4, x_5$ и $x_6$ будут равны правым частям системы ограничений. Значение целевой функции для опорного плана вычисляется как скалярное произведение $\Delta_0 = c_Б b$, где $c_Б$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, а $b$ – вектор значений базисных переменных. Оценки свободных переменных вычисляются по формуле $\Delta_j = c_Б A_j - c_j$ $(j = \overline{1,3})$, где $A_j$ – вектор-столбец коэффициентов при переменной $x_j$.

Для ввода в базис (при нулевой итерации) выберем переменную с максимальной по абсолютной величине отрицательной оценкой. Это переменная $x_1$. Соответствующий ей столбец называют разрешающим (в табл. 2.5 он выделен). Вычисленные симплексные отношения показывают максимально возможные значения для этой переменной, если учитывать только одно, соответствующее строке, ограничение. Для этой переменной второй вид ресурса не требуется

($a_{2,1} = 0$) и симплексное отношение во второй строке не вычисляется. Если бы получился отрицательный результат, то его также заменили бы прочерком.

Выберем в качестве разрешающей строки ту, для которой симплексное отношение минимально. В данном случае строка, соответствующая третьему ограничению, ограничивает максимальное значение переменной $x_1$ и, следовательно, будет разрешающей. Она выделена, как и элемент $a_{3,1}$, называемый разрешающим.

Перейдем к нехудшему опорному плану, вводя в базис переменную $x_1$ (разрешающий столбец) вместо $x_6$ (разрешающая строка). По правилам симплексного преобразования элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, который становится равным единице. Все остальные элементы разрешающего столбца для новой итерации равны нулю. Для продолжения пересчета элементов таблицы, включая значения базисных переменных и оценки, используется формула прямоугольников. Старое значение элемента умножаем на разрешающий элемент (первая диагональ) и отнимаем произведение элементов, образующих вторую диагональ прямоугольника. Результат делим на разрешающий элемент и записываем в таблицу для новой итерации. Например, новое значение переменной $x_4$ вычисляется как (180·5 – 120·6)/5 = 180 – 24·6 = 36, новое значение коэффициента $a'_{1,2}$ будет

$$\frac{5 \cdot 2 - 6 \cdot 2}{5} = -\frac{2}{5},$$

величина новой оценки $\Delta'_2$ для переменной $x_2$ составит

$$\frac{5 \cdot (-6) - (-9) \cdot 2}{5} = \frac{-30 + 18}{5} = \frac{-12}{5} = -2{,}4.$$

Прежде чем переходить к следующей итерации, следует (для контроля правильности расчетов) вычислить оценки, используя формулы для $\Delta_0$ и $\Delta_j$, $j = \overline{1,6}$. В этих формулах участвуют все используемые числовые значения, поэтому случайные ошибки при ручном расчете будут своевременно обнаружены. При программной реализации на этой основе можно построить алгоритмы для коррекции погрешностей, возникающих из-за ограниченной точности вычислений, которые могут накапливаться при большом числе итераций.

Для рассматриваемой задачи на первой итерации только переменная $x_2$ имеет отрицательную оценку и, следовательно, должна быть включена в базис. Разрешающей строкой, как это видно из значений симплексных отношений, приведенных в табл. 2.5, будет вторая, поэтому переменную $x_5$ исключаем из базиса. После выполнения второй итерации получаем, что все оценки переменных положительны, а следовательно, оптимальный по прибыли план найден.

Таблица 2.5

Симплекс-таблица примера

| Номер итерации | БП | $c_Б$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | Симплексные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 0 | 180 | 6 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 180/6 = 30 |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | – |
| | $x_6$ | 0 | 120 | 5 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 120/5 = 24 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 0 | –9 | –6 | –7 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $x_4$ | 0 | 36 | 0 | –2/5 | –1 | 1 | 0 | –6/5 | – |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 60/2 = 30 |
| | $x_1$ | 9 | 24 | 1 | 2/5 | 1 | 0 | 0 | 1/5 | 24/(2/5)=60 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 216 | 0 | –2,4 | 2 | 0 | 0 | 1,8 | |
| 2 | $x_4$ | 0 | 48 | 1 | 0 | –1/5 | 1 | 1/5 | –6/5 | – |
| | $x_2$ | 6 | 30 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1/2 | 0 | – |
| | $x_1$ | 9 | 12 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | –1/5 | 1/5 | – |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 288 | 0 | 0 | 6,8 | 0 | 1,2 | 1,8 | |

Это вектор $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (12,\ 30,\ 0,\ 48,\ 0,\ 0)$, которому соответствует прибыль $Z^* = Z(x^*) = 288$. В этот оптимальный план вошла дополнительная переменная $x_4 = 48$, означающая, что такое количество единиц первого ресурса не используется в оптимальном плане. Переменные $x_5$ и $x_6$ равны нулю (в базис они не входят), следовательно, второй и третий ресурсы использованы полностью.

Таким образом, при применении симплексного метода не только находится оптимальный план, но и полезная для анализа задачи дополнительная информация, например, об объемах ресурсов, не используемых в этом плане. Вполне определенный практический смысл имеют и оценки переменных, полученные при последней итерации. Его выяснение отложим до рассмотрения теории двойственности.

Компьютерные программы могут предусматривать и получение дополнительных отчетов. Полученный оптимальный план не предусматривает производство третьего вида продукции. Предположим, что по тем или иным причинам ее производство нужно обеспечить. Введение дополнительного ограничения на минимальный объем производства этой продукции приведет к снижению прибыли, значит, в реальной действительности производство будет искать способы обойти это ограничение. Чтобы получить желаемый результат, можно повысить прибыльность этой продукции (или снизить прибыльность других видов продукции). Например, можно получить отчет об устойчивости решения по отношению к коэффициентам целевой функции (такие отчеты составляет *Excel*). Очевидно, что для третьего вида продукции должно существовать такое минимальное значение величины прибыли, при котором эта продукция войдет в оптимальное решение. Удобнее получить это значение из дополнительного отчета, чем выполнять перебор вариантов.

**Упражнение.** Решить симплекс-методом задачу о рационе.

## 2.4. Двойственные задачи. Элементы теории двойственности

С каждой ЗЛП, которая называется *прямой* или исходной, тесно связана другая ЗЛП, называемая *двойственной*. Многие ЗЛП первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о *паре взаимно двойственных задач*. Рассмотрим экономическую задачу, приводящую к двойственной ЗЛП.

### 2.4.1. Двойственная задача к ЗЛП о распределении ресурсов

Имеются два предприятия $A$ и $B$. Предприятие $A$ располагает $m$ видами ресурсов в объеме $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и производит $n$ видов продукции в количестве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Известна норма $a_{ij}$ затрат $i$-го, $i=\overline{1,\ m}$, вида ресурсов на производство единицы $j$-го, $j=\overline{1,\ n}$, вида продукции и выручка $c_j$ от реализации единицы продукции $j$-го вида, $j=\overline{1,\ n}$. Требуется спланировать производство продукции на предприятии $A$ таким образом, чтобы суммарная прибыль от ее реализации была максимальной.

Составим математическую модель задачи:

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{2.38}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,\ \ i=\overline{1,\ m}, \tag{2.39}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. \tag{2.40}$$

Предположим, что предприятие $A$ решило реализовать имеющиеся ресурсы, не выпуская готовую продукцию. В его интересах получить прибыль, не меньшую, чем при реализации готовой продукции. Предприятие $B$, желающее закупить ресурсы, заинтересовано в наименьшей их стоимости. Каковы должны быть установлены оптимальные цены $y_1, y_2, \ldots, y_m$ на эти ресурсы? Оценки должны быть установлены исходя из следующих требований, отражающих несовпадающие интересы предприятия и организации-покупателя:

1. Чтобы не снижать доход, выручка от продажи ресурсов должна быть не

меньше, чем прибыль от их использования в собственном производстве (предприятие согласно уступить ресурсы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той, что могло бы получить, организовав собственное производство).

2. Очевидно, предприятию $A$ выгодно продать ресурсы, идущие на изготовление единицы продукции $j$-го, $j=\overline{1,\ n}$, вида, если стоимость $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m$, $j=\overline{1,\ n}$, ресурсов не меньше прибыли $c_j$ от реализации единицы этого вида продукции. В интересах предприятия $B$, чтобы стоимость $b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$ ресурсов была минимальна. Таким образом, приходим к ЗЛП следующего вида:

$$f(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min, \tag{2.41}$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j, \quad j=\overline{1,\ n}, \tag{2.42}$$

$$y_i \ge 0,\ i=\overline{1,\ m}. \tag{2.43}$$

Задача (2.41)–(2.43) называется *двойственной* к ЗЛП (2.38)–(2.40). Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ считаются *двойственными* (объективно обусловленными) *оценками.*

Значение расчета цен сырья состоит в оценке их использования и влияния на объем производства. В зарубежной литературе переменные $y_i,\ i=\overline{1,\ m}$, иногда называют *теневыми ценами*. Эти цены определяются нуждами собственного производства. Если представить себе регион, богатый лесом, но не располагающий возможностями для его переработки, то продаваться этот лес будет дешево, при развитии лесопереработки цены на продажу леса возрастут. Таким образом, *прямая ЗЛП* (2.38)–(2.40) в векторно-матричной форме имеет вид

$$z(x) = c'x \to \max, \tag{2.38a}$$

$$Ax \le b, \tag{2.39a}$$

$$x \ge 0, \tag{2.40a}$$

а *двойственная задача* (2.41)–(2.43) может быть записана как

$$f(y) = b'y \to \min; \tag{2.41a}$$

$$A'y \ge c; \tag{2.42a}$$

$$y \ge 0. \tag{2.43a}$$

Сопоставляя задачи (2.38а)–(2.40а) и (2.41а)–(2.43а), можно сформулировать следующее ***правило перехода от прямой ЗЛП в нормальной форме*** (2.38а)–(2.40а) ***к двойственной ЗЛП*** (2.41а)–(2.43а):

$$x \to y,\ c \to b,\ \max \to \min,\ A \to A',\ \le \to \ge,\ x \ge 0 \to y \ge 0.$$

Для прямой ЗЛП в канонической форме

$$z(x) = c'x \to \max,\ Ax = b,\ x \ge 0,$$

двойственной является ЗЛП следующего вида:

$$f(y) = b'y \to \min,\ A'y \ge c,\ y \text{ – любого знака.}$$

### 2.4.2. Правила построения двойственной задачи

Пара взаимно двойственных симметричных задач имеет следующий вид:

| *прямая задача* | *двойственная задача* |
|---|---|
| $\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ , | $\min f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ , |
| $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},$ | $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n},$ |
| $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n};$ | $y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$ |

*Правила построения симметричных двойственных задач:*

1. Если прямая задача – на максимум, то двойственная – на минимум, и наоборот.
2. Каждому из $m$ ограничений прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи.
3. Каждой из $n$ переменных прямой задачи соответствует ограничение двойственной.
4. Коэффициенты $c_j$ целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной.
5. Свободные члены $b_i$ ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной.
6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи, и наоборот.
7. Для пары взаимно двойственных симметричных задач все переменные неотрицательны; задаче на максимум соответствуют неравенства типа «$\le$», а задаче на минимум – вида «$\ge$».

Дополнительные правила построения двойственных задач для случая, когда прямая задача представлена в общей форме, приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Дополнительные правила построения двойственных задач

| *Задача максимизации* | | *Задача минимизации* |
|---|---|---|
| <u>Ограничения</u> | | <u>Переменные</u> |
| $\le$ | $\Leftrightarrow$ | $\ge 0$ |
| $=$ | $\Leftrightarrow$ | Любого знака |
| <u>Переменные</u> | | <u>Ограничения</u> |
| $\ge 0$ | $\Leftrightarrow$ | $\ge$ |
| Любого знака | $\Leftrightarrow$ | $=$ |

*прямая задача*

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1, m_1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{m_1 + 1, m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n_1},\ n_1 \le n,$$

$$x_j - \forall\text{знака},$$

$$j = \overline{n_1 + 1, n},$$

*двойственная задача*

$$\min f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ j = \overline{1, n_1},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ j = \overline{n_1 + 1, n},$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m_1},\ m_1 \le m,$$

$$y_i - \forall\text{знака},$$

$$i = \overline{m_1 + 1, m}.$$

Заметим, что если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

**Пример**. Рассмотрим ЗЛП:

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 \ge 1, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, у переменных $x_2$, $x_3$ произвольные знаки.

Построить двойственную ей задачу.

***Решение.*** Приведем основные ограничения исходной ЗЛП к виду $\le 0$, вектору ограничений прямой ЗЛП, в силу правил, поставим в соответствие вектор стоимости двойственной ЗЛП, $y_i$, $i = \overline{1,\ 5}$, – переменные двойственной задачи:

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = -12x_1 + 10x_2 - 15x_3 - 11x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_4 \le -3, & \big| y_1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, & \big| y_2 \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_4 \le -1, & \big| y_3 \\ -x_1 - 3x_3 - 2x_4 \le -2, & \big| y_4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -5, & \big| y_5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, у переменных $x_2$, $x_3$ произвольные знаки.

Тогда целевая функция двойственной задачи и основные ограничения, в силу правил, представляются как

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = -3y_1 + 4y_2 - y_3 - 2y_4 - 5y_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 - y_4 - 2y_5 \geq -12, \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 = 10, \\ 2y_2 - 3y_4 = -15, \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 \geq -11, \end{cases}$$

а прямые ограничения записываются в виде

$y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, у переменных $y_2$, $y_5$ произвольные знаки.

### 2.4.3. Соотношения между решениями прямой и двойственной задач

Следующие утверждения указывают на связь решений прямой и двойственной задач линейного программирования.

Тесная взаимосвязь прямой и двойственной задач позволяет сформулировать ряд общих закономерностей.

**Теорема** (**основное неравенство теории двойственности**). Для любых допустимых планов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ прямой и двойственной задач справедливо неравенство $Z(X) \leq f(Y)$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Таким образом, для любого допустимого плана производства $X$ и любого допустимого вектора оценок ресурсов $Y$ общая созданная стоимость не превосходит суммарной оценки ресурсов.

**Теорема (критерий оптимальности Канторовича**). Если для некоторых допустимых планов $X^*$ и $Y^*$ пары двойственных задач выполняется равенство $Z(X^*) = f(Y^*)$, то $X^*$ и $Y^*$ являются оптимальными планами соответствующих задач.

Получаем, что план производства $X$ и вектор оценок ресурсов $Y$ являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

**Теорема** (**малая теорема двойственности**). Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.

Между решениями прямой и двойственной задач существует следующее соответствие: основным переменным прямой задачи соответствуют дополнительные переменные двойственной и наоборот.

### 2.4.4. Основные теоремы двойственности и их содержание

**Теорема (первая теорема двойственности).** *Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение,* *причем экстремальные значения целевых функций равны. Если у одной из двойственных задач целевая функция не ограничена на множестве допустимых планов, то система ограничений другой задачи противоречива (т. е. не имеет допустимых планов).*

Для задачи о распределении ресурсов теорема означает, что если разрешима задача определения оптимального плана производства, максимизирующего выпуск продукции, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Чтобы план производства и вектор оценок ресурсов были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы доход и суммарная оценка ресурсов совпадали (полное отсутствие непроизводительных затрат). Несовпадение говорит о том, что система находится в нестабильном состоянии, поскольку стоимость потребляемых ресурсов превышает получаемый доход. Таким образом, двойственные оценки выступают как инструмент балансировки затрат и результатов, а максимально возможный доход от реализации продукции совпадает с минимально возможной стоимостью сырья. Двойственные оценки $y_1$, $y_2$, …, $y_m$ указывают величины назначаемых (экономически обусловленных) цен.

Второе утверждение теоремы можно интерпретировать так: предположим, что ресурсов недостаточно для обеспечения заданного плана производства, тогда для его выполнения пришлось бы приобретать ресурсы по любой (формально неограниченной) цене. Совпадения значений целевых функций для планов двойственных задач достаточно для того, чтобы эти планы были оптимальными. Двойственные оценки гарантируют рентабельность оптимального плана и убыточность всякого другого, отличного от оптимального. Они позволяют сопоставить и сбалансировать затраты и результаты системы.

**Теорема (о дополняющей нежесткости).** *Для того чтобы планы $X^*$ и $Y^*$ пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1, m}\ .$$

*Эти условия означают, что если после оптимизации какая-либо переменная одной из задач положительна, то соответствующее ограничение двойственной задачи должно обращаться в строгое равенство*.

Величина $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ представляет суммарную стоимость всех ресурсов, используемых для производства единицы продукции, которая и должна равняться доходу от ее реализации $c_j$, если планы оптимальны. Разность $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$ часто называют приведенной стоимостью (приведенными издержками) $j$-го вида деятельности.

Величина $b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ – это неиспользованное количество $i$-го ресурса, которое для оптимального плана производства может быть положительным только для недефицитных (используемых не полностью ресурсов), которым соответствует нулевое значение двойственной оценки $y_i^*$.

Таким образом, если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \text{, то } y_i^* = 0 \text{, если } y_i^* > 0 \text{, то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i .$$

**Теорема (об оценках).** Двойственные оценки показывают приращение целевой функции, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения ЗЛП. Значения переменных $y_i$ в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции. Двойственные оценки численно равны изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу:

$$\frac{\partial Z\left(X^*\right)}{\partial b_i} = y_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, единичный прирост ресурса (при оптимальном его использовании) позволяет увеличить доход на величину, равную теневой цене этого ресурса.

При изменении $i$-го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от его приращения, причем коэффициентом служит $y_i$ – $i$-я компонента оптимального решения двойственной задачи.

Если $y_i$ мало, то значительному увеличению $i$-го ресурса будет соответствовать небольшое увеличение оптимального дохода и ценность ресурса невелика.

Если $y_i = 0$, то при увеличении $i$-го ресурса оптимальный доход остается неизменным и ценность этого ресурса равна нулю. Действительно, сырье, запасы которого превышают потребности в нем, не представляет ценности для производства и его оценку можно принять за нуль.

Если $y_i$ велико, то незначительному увеличению $i$-го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода и ценность ресурса высока. Уменьшение ресурса ведет к существенному сокращению выпуска продукции.

Переменную $y_i$ считают некоторой характеристикой ценности $i$-го ресурса. В частности, при увеличении $i$-го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимальный доход возрастает на $y_i$, что позволяет рассматривать $y_i$ как «условную цену», оценку единицы $i$-го ресурса.

Так как $y_i$ представляет частную производную от оптимального дохода по $i$-му ресурсу, то $y_i$ характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении $i$-го ресурса.

Двойственную задачу, как любую ЗЛП, можно решить симплекс-методом. Следует иметь в виду, что решение двойственной задачи можно получить по конечной симплекс-таблице решения прямой задачи. При этом решение $y^*$ двойственной задачи может быть вычислено по формуле $y^{*\prime} = c_б^{*\prime} A_{ст.б}^*$. Здесь $c_б^*$ – вектор-столбец $c_б$ последней симплекс-таблицы прямой задачи; $A_{ст.б}^*$ – матрица, составленная из столбцов этой таблицы, соответствующих первоначальным базисным векторам, взятым в том же порядке.

### 2.4.5. Применение двойственных оценок в послеоптимизационном анализе

С помощью $y_i$ можно определить степень влияния ограничений на значение целевой функции. Предельные значения (нижняя и верхняя границы) ограничений ресурсов, для которых $y_i$ остаются неизменными, определяются по формулам

$$b_i^H = \min\left(\frac{x_j}{d_{ij}}\right), \quad b_i^B = \max\left(\frac{x_j}{d_{ij}}\right),$$

где $x_j$ – значение переменной в оптимальном решении; $d_{ij}$ – элементы матрицы, обратной матрице базиса оптимального решения, для которой $A = (a_{ij})$.

Если в план включаются новые виды продукции, то их оценка находится по формуле $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{\text{опт}\, i} - c_j$. Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции улучшает план. При $\Delta_j > 0$ нецелесообразно включать новый вид продукции.

Теперь рассмотрим проблему взаимозаменяемости ресурсов. Дефицитным называется ресурс, который при реализации оптимального плана полностью используется. Если в ЗЛП имеются два или больше дефицитных ресурсов, то представляет интерес, каким количеством одного дефицитного ресурса можно заменить другой дефицитный ресурс, чтобы целевая функция принимала то же самое максимальное значение.

Введем понятие коэффициента взаимозаменяемости. Пусть $b_i$ и $b_k$ – объемы дефицитных ресурсов $i$-го и $k$-го вида. Обозначим отношение $\Delta b_k / \Delta b_i$ через $\eta_{ki}$, т. е.

$$\eta_{ki} = \frac{\Delta b_k}{\Delta b_i}.$$

Это отношение называется ***коэффициентом взаимозаменяемости***. При $\Delta b_i = 1$ имеем $\eta_{ki} = \Delta b_k$, т. е. коэффициент взаимозаменяемости показывает, насколько нужно увеличить ресурс $k$-го вида, чтобы компенсировать уменьшение ресурса $i$-го вида на единицу. Заменив в соотношении $\eta_{ki} = \frac{\Delta b_k}{\Delta b_i}$ приращения на дифференциалы, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_i} \approx \frac{\partial z(x^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad \frac{\Delta z}{\Delta b_k} \approx \frac{\partial z(x^*)}{\partial b_k} = y_k^*,$$

$$\eta_{ki} = \frac{\Delta z \,/\, y_k^*}{\Delta z \,/\, y_i^*} = \frac{y_i^*}{y_k^*}.$$

Если ресурс $i$-го вида уменьшить на $\Delta b_i$, то, увеличив ресурс $k$-го вида на $\Delta b_k^* = (y_i^* / y_k^*)\Delta b_i$, можно компенсировать уменьшение целевой функции, при этом сам оптимальный план изменится.

**Пример**. Пусть фирма может выпускать три вида продукции $П_j$, $j = \overline{1,3}$. При ее изготовлении используются три вида ресурсов (труд, сырье и оборудование), расход которых $b_i$, $i = \overline{1,3}$, ограничен величинами $b_1 = 180, b_2 = 60$ и $b_3 = 120$. Затраты ресурса $i$-го вида на единицу продукции $j$-го вида составляют $a_{ij}$ единиц. Прибыль от производства единицы продукции $j$-го вида составляет $c_j$ единиц. Значения параметров приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Значения параметров

| Вид ресурса, $i$ | Расход $i$-го ресурса на единицу $j$-й продукции, $a_{ij}$ | | | Запас ресурса, $b_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | |
| Труд | 6 | 2 | 5 | 180 |
| Сырье | 0 | 2 | 4 | 60 |
| Оборудование | 5 | 2 | 5 | 120 |
| Прибыль, $c_j$ | 9 | 6 | 7 | |

Построение модели начинаем с введения переменных. Объемы выпуска каждого вида продукции обозначим через $x_j$, $j = \overline{1,3}$.

Математическая модель задачи оптимизации производственного плана по величине прибыли примет вид

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 180, \\ 2x_2 + 4x_3 &\le 60, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 120, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}&. \end{aligned}\right\}$$

Преобразовывая модель к канонической форме и предпочтительному виду, получим

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 180, \\ 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 60, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 120, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. & \end{aligned}\right\}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Симплекс-таблица примера

| Номер итерации | БП | $c_Б$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | Симплексные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 0 | 180 | 6 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 180/6 = 30 |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | – |
| | $x_6$ | 0 | 120 | 5 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 120/5 = 24 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 0 | –9 | –6 | –7 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $x_4$ | 0 | 36 | 0 | –2/5 | –1 | 1 | 0 | –6/5 | – |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 60/2 = 30 |
| | $x_1$ | 9 | 24 | 1 | 2/5 | 1 | 0 | 0 | 1/5 | 24/(2/5)=60 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 216 | 0 | –2,4 | 2 | 0 | 0 | 1,8 | |
| 2 | $x_4$ | 0 | 48 | 1 | 0 | –1/5 | 1 | 1/5 | –6/5 | – |
| | $x_2$ | 6 | 30 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1/2 | 0 | – |
| | $x_1$ | 9 | 12 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | –1/5 | 1/5 | – |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 288 | 0 | 0 | 6,8 | 0 | 1,2 | 1,8 | |

Значения базисных переменных $x_4, x_5$ и $x_6$ будут равны правым частям системы ограничений. Значение целевой функции для опорного плана вычисляется как скалярное произведение $\Delta_0 = c_Б b$, где $c_Б$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, а $b$ – вектор значений базисных переменных. Оценки свободных переменных вычисляются по формуле $\Delta_j = c_Б A_j - c_j$, $j = \overline{1, 3}$, где $A_j$ – столбец коэффициентов при переменной $x_j$.

После выполнения второй итерации получаем, что все оценки переменных положительны, следовательно, оптимальный по прибыли план найден. Это вектор $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (12,\ 30,\ 0,\ 48,\ 0,\ 0)$, которому соответствует прибыль $Z^* = Z(x^*) = 288$.

Запишем модель прямой задачи

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180; \\ 2x_2 + 4x_3 \le 60; \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{array}\right\}$$

Модель двойственной задачи, согласно приведенным правилам, примет вид

$$\min f = 180y_1 + 60y_2 + 120y_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 6y_1 \qquad\quad + \ 5y_3 \ge 9; \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 6; \\ 5y_1 + 4y_2 + 5y_3 \ge 7; \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{array}\right\}$$

Если записать исходное и конечное состояния симплексной таблицы, то видно соответствие между переменными прямой и двойственной задач (табл. 2.9).

Содержательный смысл оценок переменных прямой задачи в том, что они показывают, насколько уменьшится целевая функция, если соответствующая переменная увеличится на единицу. Значит, оценки переменных $x_4$, $x_5$, $x_6$ – это и есть оптимальные значения переменных двойственной задачи, т. е. двойственные оценки.

Например, если на последней итерации (при получении оптимального решения) оценка $\Delta_6 = 1{,}8$, то эта величина есть отклонение целевой функции от оптимального значения при присвоении переменной $x_6$ единичного значения. Но это равносильно уменьшению третьего ресурса на единицу (достаточно посмотреть на третью строку нулевой итерации), т. е. это цена третьего ресурса.

Следовательно, значения $y_1^* = 0,\ y_1^* = 1{,}2,\ y_1^* = 1{,}8$ – это оценки соответствующих ресурсов. Первый ресурс недефицитный (ранее было отмечено, что величину этого ресурса можно уменьшить на 48 ед. без изменения прибыли), а наиболее дефицитным является третий ресурс.

Таблица 2.9

Исходное и конечное состояния симплексной таблицы

| Номер итерации | БП | $c_Б$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $x_4$ | 0 | 180 | 6 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| | $x_6$ | 0 | 120 | 5 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ |
| | | | 0 | –9 | –6 | –7 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $x_4$ | 0 | 48 | 1 | 0 | –1/5 | 1 | 1/5 | –6/5 |
| | $x_2$ | 6 | 30 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1/2 | 0 |
| | $x_1$ | 9 | 12 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | –1/5 | 1/5 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ |
| | | | 288 | 0 | 0 | 6,8 | 0 | 1,2 | 1,8 |
| Соответствующие переменные двойственной задачи | | | | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

Если подставить найденные цены ресурсов в математическую модель двойственной задачи, то целевая функция должна получить значение 288, как и при решении прямой задачи. Действительно, имеем

$$180 \cdot 0 + 60 \cdot 1{,}2 + 120 \cdot 1{,}8 = 72 + 216 = 288.$$

Оценки переменных $x_1, x_2, x_3$ – это значения свободных переменных двойственной задачи $y_4^* = 0,\ y_5^* = 0,\ y_6^* = 6{,}8$, которые можно истолковать так: если вместо продажи части ресурсов по оптимальным двойственным ценам произвести по единице каждого из возможных видов продукции, то производство третьего вида продукции повлечет указанный убыток, а производство первых двух видов прибыль не изменит.

Иными словами, при производстве первых двух видов продукции получаемый доход равен стоимости используемых ресурсов.

**Пример**. Исходя из специализации и технологических возможностей предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в табл. 2.10. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

Таблица 2.10

Исходные данные примера

| Вид ресурса, *i* | | Выпускаемая продукция | | | | Запас ресурса |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | |
| $Р_1$ | Трудовые ресурсы, чел.-ч. | 4 | 2 | 2 | 8 | 4800 |
| $Р_2$ | Полуфабрикаты, кг | 2 | 10 | 6 | 0 | 2400 |
| $Р_3$ | Станочное оборудование, станко-ч. | 1 | 0 | 2 | 1 | 1500 |
| Цена единицы продукции, ден. ед. | | 65 | 70 | 60 | 120 | |

Построение модели начинаем с введения переменных. Объемы выпуска каждого вида продукции обозначим через $x_j$, $j=\overline{1,4}$.

Математическая модель прямой задачи:

$$\max Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800, \\ &2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400, \\ &x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1500, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,4}.$$

Значения коэффициентов:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Z* | 65 | 70 | 60 | 120 | | max |
| | 4 | 2 | 2 | 8 | ≤ | 4800 |
| $y_i$ | 2 | 10 | 6 | 0 | | 2400 |
| | 1 | 0 | 2 | 1 | | 1500 |

Составим двойственную задачу. Транспонируем таблицу:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *f* | 4800 | 2400 | 1500 | | min |
| | 4 | 2 | 1 | ≥ | 65 |
| | 2 | 10 | 0 | | 70 |
| | 2 | 6 | 2 | | 60 |
| | 8 | 0 | 1 | | 120 |

Математическая модель двойственной задачи:

$$\min f = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 65, \\ 2y_1 + 10y_2 \geq 70, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 60, \\ 8y_1 + y_3 \geq 120, \end{array}\right\}$$

$$y_j \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Симплексным методом решим прямую задачу: $x^* = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200)$, $Z^* = Z(x^*) = 84\,000$ (табл. 2.11).

Учитывая соответствие между переменными, выписываем из индексной строки последней (второй) итерации компоненты искомого оптимального плана $y^*$ = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0) – двойственные оценки.

В соответствии с теоремой min $f$ = max $Z$ = 84 000, запишем это равенство в развернутой форме:

$$48\,000 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500.$$

Учитывая, что компоненты $y_1^* = 15, y_2^* = 5, y_3^* = 0$ представляют собой оценки ресурсов $P_1$, $P_2$, $P_3$, заключаем следующее: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции; оптимальность плана означает точное воплощение в оценке произведенной по этому плану продукции оценки всех израсходованных ресурсов, т. е. полное отсутствие непроизводительных затрат.

Найден оптимальный план $x^*$ = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200) выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: 0 + 2 · 400 + 500 = 1300 < 1500. Это означает, что расход ресурса $P_3$ меньше его запаса, т. е. ресурс $P_3$ избыточный (осталось 200 ед.). Именно поэтому в оптимальном плане $y^*$ = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0) двойственной задачи оценка $y_3^*$ этого ресурса равна нулю.

А вот оценки $y_1^*$ и $y_2^*$ ресурсов $P_1$ и $P_2$ выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства: 4 · 0 + 2 · 0 + 2 · 400 + 8 · 500 = = 4800, 2 · 0+ 10 · 0 + 6 · 400 = 2400.

Поскольку 15 > 5, ресурс $P_1$ считается более дефицитным, чем ресурс $P_2$.

На основе теоремы о дополняющей нежесткости нетрудно объяснить, почему не вошла в оптимальный план продукция $П_1$ и $П_2$: первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства: 4 · 15 + + 2 · 5 + 0 > 65, 2 · 15+ 10 · 5 > 70. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции $П_1$ и $П_2$, превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно (теряем на 1 шт. 5 и 10 ден. ед. соответственно). Что же касается продукции П3 и П4 ($x_3^* > 0,\ x_4^* > 0$), то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: $2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 60$; $8 \cdot 15 + 0 = 120$.

Таблица 2.11

Симплекс-таблица примера

| Номер итерации | БП | $c_Б$ | $b$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 65 | 70 | 60 | 120 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 0 | 4800 | 4 | 2 | 2 | **8** | 1 | 0 | 0 |
| | $x_6$ | 0 | 2400 | 2 | 10 | 46 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | $x_7$ | 0 | 1500 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | $\Delta_7$ |
| | | | 0 | –65 | –70 | –60 | –120 | 0 | 0 | |
| 1 | $x_4$ | 120 | 600 | 1/2 | 1/4 | 1/4 | 1 | 1/8 | 0 | 0 |
| | $x_6$ | 0 | 2400 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | $x_7$ | 0 | 900 | 1/2 | –1/4 | 7/4 | 0 | –1/8 | 0 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 72 000 | –5 | –40 | –30 | 0 | 15 | 0 | 0 |
| 2 | $x_4$ | 120 | 500 | 5/12 | –1/6 | 0 | 1 | 1/8 | –1/24 | 0 |
| | $x_3$ | 60 | 400 | 1/3 | 5/3 | 1 | 0 | 0 | 1/6 | 0 |
| | $x_7$ | 0 | 200 | –1/12 | –19,6 | 0 | 0 | –1/8 | –7/24 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 84 000 | 5 | 10 | 0 | 0 | 15 | 5 | 0 |
| Соответствующие переменные двойственной задачи | | | | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

Установлено, что ресурсы Р$_1$ и Р$_2$ являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы об оценках можно утверждать, что на каждую единицу ресурса Р$_i$, введенную дополнительно в производство, будет получена дополнительная выручка $\Delta_i Z$, численно равная $y_i^*$. В самом деле, при $\Delta b_1 = 1$ получаем $\Delta_1 Z = y_i^* \Delta b_1 = 15 \cdot 1 = 15$. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса Р$_2$ обеспечит прирост $\Delta_2 Z$ выручки, равный 5 ден. ед. Теперь становится понятно, почему ресурс Р$_1$ считается более дефицитным по сравнению с ресурсом Р$_2$: он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса Р$_3$, то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3 Z = y_3\, \Delta b_3 = 0$. $\Delta b_3 = 0$. Из этих рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции П$_1$, П$_2$, П$_3$, П$_4$. По оптимальному плану $x^*$ = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200) выпускать следует продукцию П$_3$ и П$_4$. Оценки $y_6^*$ и $y_7^*$ этих видов продукции равны нулю. Что это означает практически, станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = (2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*) - 60 = (2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0) - 60 = 0,$$
$$y_7^* = (8y_1^* + y_3^*) - 120 = (8 \cdot 15 + 0) - 120 = 0.$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции П$_1$ и П$_2$, являющейся, как установлено ранее, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем

$$y_4^* = (y_1^* + 2y_2^* + y_3^*) - 65 = 70 - 65 = 5,$$
$$y_5^* = (2y_1^* + 10y_2^*) - 70 = 80 - 70 = 10.$$

Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая изготовленная единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень выручки.

Выясним состав двойственной оценки. Для этого рассмотрим, например, первый ресурс (его запас $b_1$ = 4800). Он дефицитен. Увеличение запаса этого ресурса на единицу приведет к дополнительному выпуску продукции, что увеличит выручку на $y_1^*$ = 15 ден. ед. За счет чего? Возьмем соответствующий столбец $A_5$ = (1/8; 0; –1/8)$^{\text{т}}$ табл. 2.11. Его элементы характеризуют изменение объемов выпуска продукции и остатка ресурса при увеличении первого ресурса на единицу, т. е. если заменить $b_1$ на $b_1'$ = $b_1$ + 1 = 4800 + 1 = 4801, то выпуск продукции П$_4$ $x_4$ = 500 заменится на $x_4^{'*}$ = 500 + 1/8 = 500,125; выпуск продукции П$_3$ $x_3^*$ = 400 – на $x_3^{'*}$ = 400 + 0 = 400. Резерв же третьего ресурса сократится до $x_7^{'*}$ = = 200 – 1/8 = 199,875. При этом выручка возрастет на 120 · 1/8 + 60 · 0 + + 0 · (–1/8) = 15 ден. ед., что соответствует двойственной оценке первого ресурса. Аналогично при увеличении второго ресурса на единицу выручка возрастет на 120 · (–1/24) + 60 · 1/6 + 0 · (–7/24) = 5 ден. ед., что соответствует двойственной оценке второго ресурса. Полученные равенства показывают, какие составляющие образуют двойственные оценки.

Найдем коэффициент взаимозаменяемости ресурсов. В примере дефицитны трудовые ресурсы и полуфабрикаты. Если бы трудовые ресурсы уменьшили на единицу, то связанное с этим падение выручки (на 15 ден. ед.) можно было бы компенсировать увеличением полуфабрикатов на

$$\Delta b_2 = \frac{y_1^*}{y_2^*}\Delta b_1 = \frac{15}{5}\cdot 1 = 3.$$

Следовательно, обеспечив полуфабрикаты в объеме $b_2^{'} = b_2 + \Delta b_2 = 2400 + 3 = 2403$ кг, можно получить с трудовыми ресурсами $b_1^{'} = b_i - \Delta b_1 = 4800 - 1 = 4799$ чел.-ч ту же выручку, что и при начальных ресурсах. В табл. 2.12 представлены значения коэффициентов взаимозаменяемости для примера. Знак «∞» означает, что заменить уменьшение на единицу одного ресурса никаким увеличением другого невозможно.

Таблица 2.12

Значения коэффициентов взаимозаменяемости

| $k$ \ $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1/3 | 0 |
| 2 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | ∞ | ∞ | 1 |

Проанализируем целесообразность расширения ассортимента выпускаемой продукции и установление цены на новую продукцию. Пусть в условиях примера изучается вопрос о целесообразности выпуска продукции $П_5$ с характеристиками, представленными в табл. 2.13.

Чтобы выпуск продукции $П_5$ был оправдан, оценка ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции $П_5$, должна быть не менее цены $c_5 = 95$.

Таблица 2.13

Характеристики продукции $П_5$

| Вид ресурса, $i$ | | $П_1$ |
|---|---|---|
| $Р_1$ | Трудовые ресурсы, чел.-ч. | 3 |
| $Р_2$ | Полуфабрикаты, кг | 6 |
| $Р_3$ | Станочное оборудование, станко-ч. | 8 |
| Цена единицы продукции, ден. ед. | | 95 |

Находим оценку затраченных ресурсов: $3\cdot15+6\cdot5+8\cdot0 = 75$. Поскольку $75 < 95$, выпускать продукцию $П_5$ целесообразно: каждая единица этой продукции принесет предприятию прибыль, равную $95 - 75 = 20$ ден. ед.

**Пример.** Выпускается продукция четырех типов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Норма расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 2.14.

Таблица 2.14

Исходные данные примера

| Ресурс | Продукция | | | | Запас ресурса |
|---|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | |
| Трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| Сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 110 |
| Финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | 100 |
| Прибыль | 60 | 70 | 120 | 130 | |

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить экономический смысл переменных.

2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, устойчивости, пределам):

а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план;

б) указать дефицитные и избыточные ресурсы;

в) выписать оптимальное решение двойственной задачи;

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи;

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок.

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в п. 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить раздельные и суммарное изменения.

***Решение***. 1. Составим математическую модель задачи. Пусть переменные $x_j$ – количество выпускаемой продукции $П_j$, $j=\overline{1,4}$. Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$z(x) = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110, \quad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,4}, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \end{cases}$$

где $z(x)$ – целевая функция, которая определяет суммарную прибыль от реализации произведенной продукции; первые три неравенства описывают условия ограниченности имеющихся ресурсов; кроме того, переменные $x_j$, $j=\overline{1,4}$, не могут быть выражены отрицательными числами.

2. Составим математическую модель двойственной задачи. Для этого прямую задачу запишем в виде табл. 2.15.

Таблица 2.15

Коэффициенты прямой задачи

| Коэфициенты целевой функции $c_j$ | 60 | 70 | 120 | 130 | $\to \max$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Знаки неравенств | $b_i$ |
| $y_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $\le$ | 16 |
| $y_2$ | 6 | 5 | 4 | 3 | $\le$ | 110 |
| $y_3$ | 4 | 6 | 10 | 13 | $\le$ | 100 |
| | $x_1 \ge 0$ | $x_2 \ge 0$ | $x_3 \ge 0$ | $x_4 \ge 0$ | | |

Согласно правилам построения двойственных задач, каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, поэтому, исходя из экономического смысла, можно сказать, что переменные двойственной задачи $y_i$, $i=\overline{1,3}$, – это оценки ресурсов (трудовых, сырья, финансов).

Двойственная задача имеет вид

$$f(y) = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge 60, \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 \ge 70, \\ y_1 + 4y_2 + 10y_3 \ge 120, \\ y_1 + 3y_2 + 12y_3 \ge 130, \end{cases} \quad y_i \ge 0,\ i=\overline{1,3}.$$

где $f(y)$ – целевая функция, которая определяет суммарную оценку ресурсов; неравенства системы показывают, что оценка ресурсов, затрачиваемых на производство единицы соответствующей продукции не меньше, чем прибыль от выпуска единицы этой продукции; кроме того, переменные $y_i$, $i=\overline{1,3}$, не могут быть выражены отрицательными числами.

3. Решение задачи на компьютере. Для решения задачи средствами Excel рекомендуется использовать надстройку **Поиск решения**. Для ее подключения в Excel 2007/2010/2013/2016 следует выбрать **Файл → Параметры → Надстройки → Перейти → Поиск решения.** После этого **Поиск решения** появится в меню **Данные.**

Следует сделать форму и ввести исходные данные (рис. 2.17).

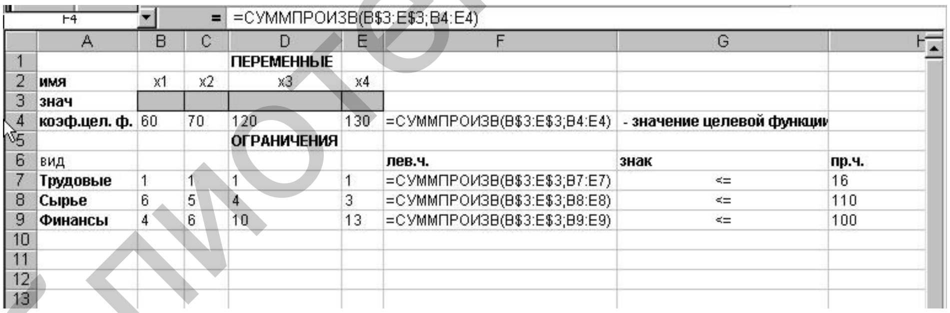
Далее осуществляется ввод зависимостей из математической модели (рис. 2.18). Чтобы получить значение целевой функции в ячейке F4, воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Выбираем Мастер Функций и вызываем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В массив 1 введем строку со значениями переменных, т. е. B$3:E$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес строки ячеек не менялся при копировании формул). Заметим, что в указанных ячейках B3:E3, которые на рис. 2.17 выделены серым цветом, по окончании решения задачи будет находиться оптимальное решение. В массив 2 введем адрес строки коэффициентов целевой функции, т. е. B4:E4. В ячейке будем иметь значение 0 согласно введенной формуле.

F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | | | | |
| 2 | имя | x1 | x2 | x3 | x4 | | | | | | |
| 3 | знач | | | | | | | | | | |
| 4 | коэф.цел. ф. | 60 | 70 | 120 | 130 | 0 | - значение целевой функции | | | | |
| 5 | | | | ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | | | | |
| 6 | вид | | | | | лев.ч. | знак | пр.ч. | | | |
| 7 | Трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | <= | 16 | | | |
| 8 | Сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 0 | <= | 110 | | | |
| 9 | Финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | 0 | <= | 100 | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | |

Рис. 2.17. Исходные данные

Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F4 в столбец «левые части ограничений». На рис. 2.18 показано, какие формулы должны быть введены в указанные ячейки.



F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | |
| 2 | имя | x1 | x2 | x3 | x4 | | | |
| 3 | знач | | | | | | | |
| 4 | коэф.цел. ф. | 60 | 70 | 120 | 130 | =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4) | - значение целевой функции | |
| 5 | | | | ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | |
| 6 | вид | | | | | лев.ч. | знак | пр.ч. |
| 7 | Трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B7:E7) | <= | 16 |
| 8 | Сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B8:E8) | <= | 110 |
| 9 | Финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B9:E9) | <= | 100 |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |

Рис. 2.18. Формулы для расчетов

Окно решения задачи изображено на рис. 2.19. Курсор – в ячейку F4. Командой **Поиск решения** из меню **Сервис (**Excel 2003**)** либо **Данные (**Excel 2007/2010/2013/2016**)** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные:

- *Установить целевую* – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т. е. $F$4;

- *Равной* – максимальному значению;

- *Изменяя ячейки* – адреса изменяемых значений переменных, т. е. $B$3:$E$3;

- *Ограничения* – **Добавить…**

На экране появится диалоговое окно **Добавление ограничения**.

Вводим ограничения по ресурсам $F$7 ≤ $H$7 **Добавить;** $F$8 ≤ $H$8 **Добавить;** $F$9 ≤ $H$9. По окончании ввода данных нажимаем **OK**.

Можно добавить все ограничения сразу, т. к. они имеют одинаковый знак ограничений ≤ (см. рис. 2.19).

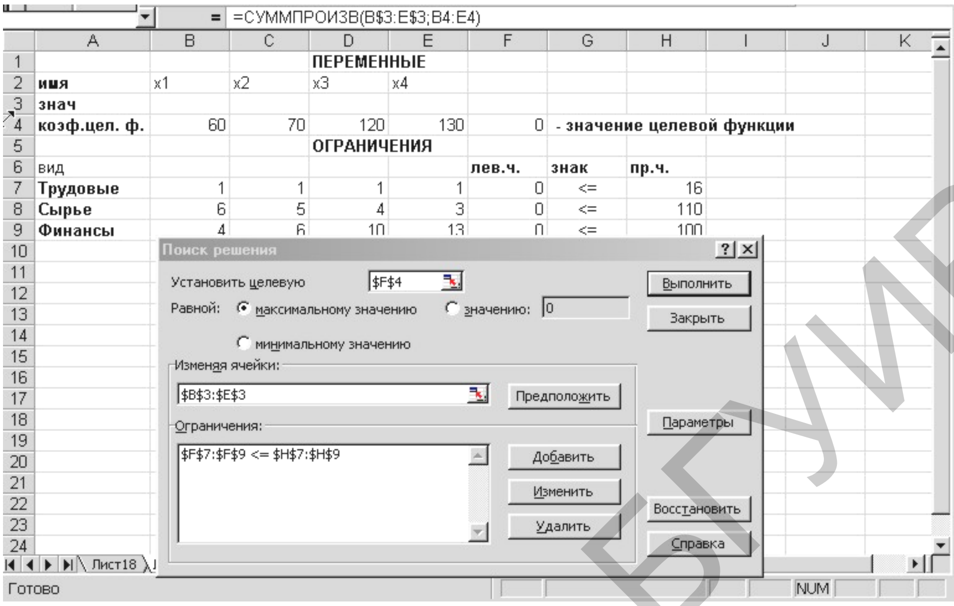



Рис. 2.19. Поиск решения

Командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры** и устанавливаем флажки: **Линейная модель, Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование** (рис. 2.20). Нажимаем **OK**.

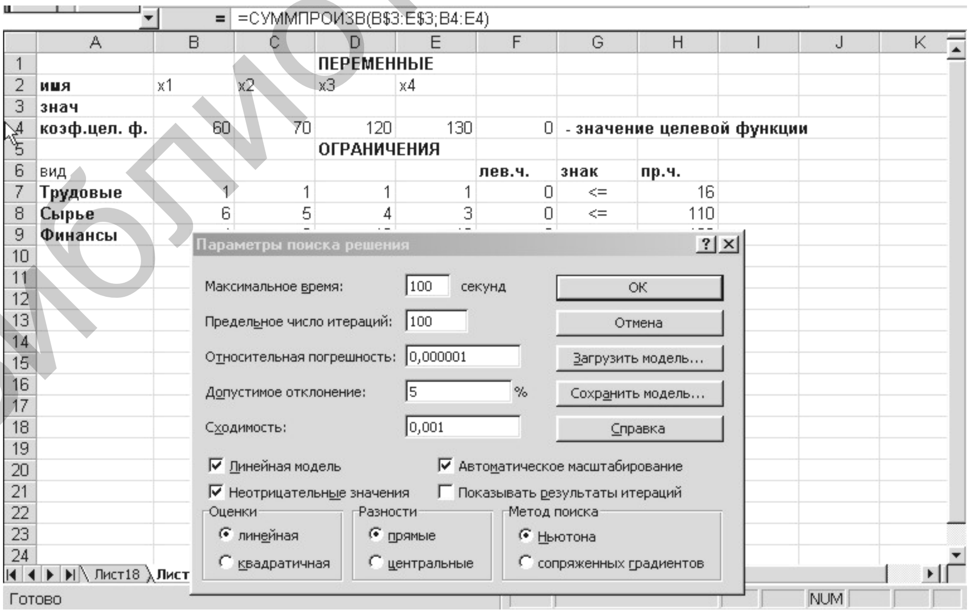



Рис. 2.20. Параметры модели

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, нажав кнопку **Выполнить,** находим оптимальное решение задачи. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 2.21). В ячейках B3:E3 имеем оптимальное решение задачи $X^{\text{опт}} = (10;0;6;0)$, максимальное значение целевой функции – в ячейке F4 $z(X^{\text{опт}}) = 1320$.

Таким образом, согласно оптимальному плану следует выпускать продукцию $П_1$ и $П_3$ в количествах 10 и 6 ед. соответственно. Продукцию $П_2$ и $П_4$ выпускать не следует. Ограничения говорят о том, что первый и третий ресурсы израсходованы полностью, а второго ресурса осталось 26 ед.

При этом будет получена максимальная прибыль в количестве 1320 ден. ед.

Если задача не имеет решения или данные введены неверно (целевая функция неограничена или система ограничений несовместна), то выдается сообщение: «Значения целевой ячейки не сходятся».

4. **Анализ оптимального решения.** Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется окно **Результаты поиска решения**, в котором есть запись «Решение найдено» (см. рис. 2.21). С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов: результаты, устойчивость, пределы.

Вызов отчета осуществляется по следующему алгоритму. Выделим тип вызываемого отчета, например отчета по устойчивости, затем **ОК**. На экране: вызванный отчет на новом листе, на ярлыке которого указано название отчета. Устанавливаем курсор на ярлыке с названием отчета и щелкаем левой кнопкой мыши. На экране: вызванный  отчет (рис. 2.22). Можно сразу выделить все три типа отчетов (по устойчивости, пределам и результатам).

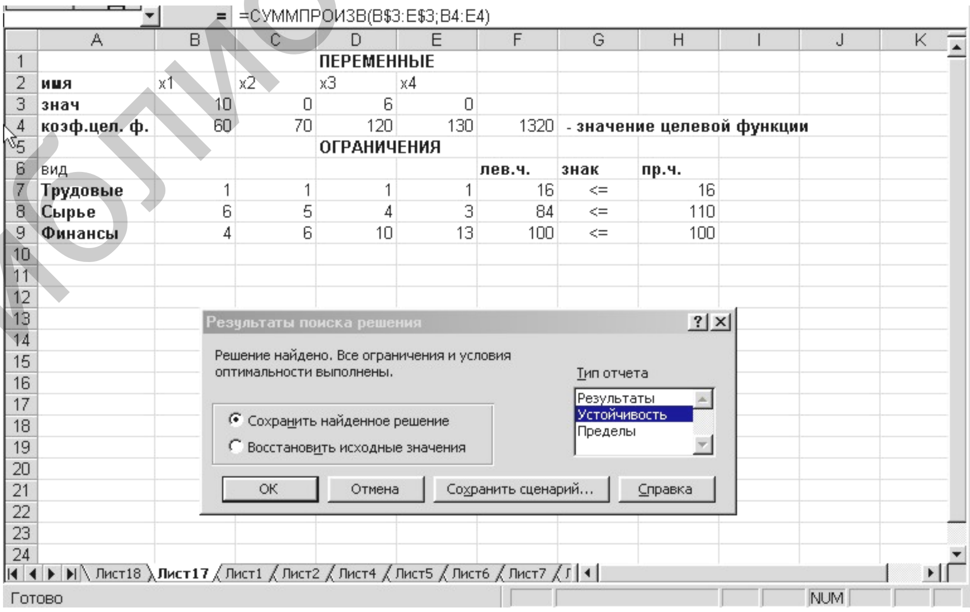


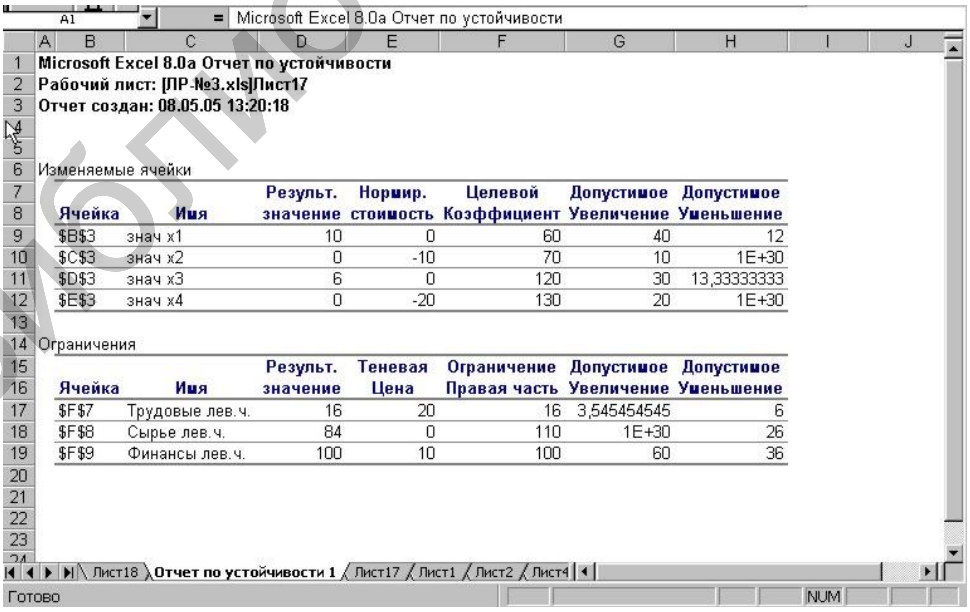

Рис. 2.21. Результаты поиска решения

**Отчет по устойчивости.** Отчет состоит из двух таблиц. Первая приводит следующие значения для переменных: результат решения задачи; нормировочную стоимость, т. е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение; коэффициенты целевой функции; предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Во второй таблице приводятся аналогичные значения для ограничений: величина использованных ресурсов; теневая цена, т. е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу; значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Согласно полученным данным $Y^{\text{опт}} = (20;0;10;0;10;0;20)$. Первые три значения (берем из графы «теневая цена» отчета по устойчивости) показывают оценки ресурсов (трудовые, сырье, финансы). Наиболее дефицитным является первый ресурс, т. к. его оценка наибольшая (при изменении количества ресурса на единицу в пределах интервала устойчивости прибыль изменится на 20), менее дефицитным является третий ресурс (финансы). Второй ресурс (сырье) дефицитным не является (его оценка равна нулю).

Последние четыре значения (берем из графы «нормировочная стоимость» с противоположным знаком) показывают, какую продукцию выгодно выпускать, а какую – нет. Согласно полученным данным при выпуске единицы продукции $П_4$ целевая функция уменьшится на 20 ед., а при выпуске единицы второй продукции – на 10 ед.



Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [ЛР-№3.xls]Лист17
Отчет создан: 08.05.05 13:20:18

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$3 | знач x1 | 10 | 0 | 60 | 40 | 12 |
| $C$3 | знач x2 | 0 | -10 | 70 | 10 | 1E+30 |
| $D$3 | знач x3 | 6 | 0 | 120 | 30 | 13,33333333 |
| $E$3 | знач x4 | 0 | -20 | 130 | 20 | 1E+30 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$7 | Трудовые лев.ч. | 16 | 20 | 16 | 3,545454545 | 6 |
| $F$8 | Сырье лев.ч. | 84 | 0 | 110 | 1E+30 | 26 |
| $F$9 | Финансы лев.ч. | 100 | 10 | 100 | 60 | 36 |

Рис. 2.22. Отчет по устойчивости

Интервал устойчивости для первого ресурса (трудовые ресурсы) имеет вид (16-6;16+3,545). Значения берем из столбцов «Допустимое увеличение», «Допустимое уменьшение», «Ограничение, правая часть».

**Отчет по результатам.** Отчет состоит из трех таблиц. В первой таблице приводятся сведения о целевой функции. В столбце «Исходно» приведены значения целевой функции до начала вычислений. Во второй таблице приводятся значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи. В третьей показываются результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

**Отчет по пределам.** В нем показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

Если же задача линейного программирования решения не имеет, то выдается сообщение: «Поиск не может найти подходящего решения».

# 3. МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОСТАВОК, РАЗМЕЩЕНИЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

## 3.1. Постановка и математическая модель транспортной задачи

Для некоторых видов ЗЛП созданы специальные методы решения, значительно сокращающие объем вычислений по сравнению с симплекс-методом. Одну из таких задач (транспортную задачу для двух поставщиков) в 30-е гг. исследовал математик А. Н. Толстой. В общем случае транспортная задача была решена академиком Л. В. Канторовичем.

Транспортные задачи (модели) – специальный класс задач линейного программирования. Они часто используются для оптимизации объемов перевозок из пунктов отправления в пункты назначения при минимальных суммарных затратах. При этом должны быть учтены как ограниченные возможности поставщиков по отправке грузов, так и заданные потребности получателей. Предполагается, что тарифы за перевозку единицы груза от любого поставщика к любому получателю известны и что стоимость перевозки по выбранному маршруту пропорциональна объему груза.

Модели транспортного типа часто используются для составления расписаний, решения задач управления запасами, движением капиталов, назначением персонала и др. Разумеется, эти задачи можно решать симплекс-методом, но для них существует более простой и эффективный алгоритм, использующий таблицы со специальной структурой. Таким образом достигается наглядность описания ситуации, а объем вычислительной работы сокращается настолько, что при небольшой размерности задачи ее можно решить даже без вычислительной техники.

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного товара (груза) из $m$ пунктов отправления в $n$ пунктов назначения. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза.

Имеется $m$ пунктов производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$ однородного груза и $n$ пунктов $B_1, B_2, \ldots, B_n$ его потребления. В $i$-м пункте производства $A_i$ произведено $a_i, i = \overline{1, m},$ единиц груза, а в $j$-м пункте потребления $B_j$, $j = \overline{1, n},$ реализуется $b_j, j = \overline{1, n},$ единиц груза. Известна стоимость $c_{ij}$ (*тариф*) перевозки единицы груза из пункта $A_i$ в пункт $B_j$. Матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$ называется *матрицей тарифов*. Очевидно, что решение такой задачи можно найти, если суммарные возможности поставщиков $\sum_{i=1}^{m} a_i = A$ достаточны, чтобы обеспечить все запросы получателей, равные $\sum_{j=1}^{n} b_i = B$, т. е. $A \geq B$. Если наоборот $A < B$, то задача формально противоречива и надо корректировать постановку задачи, принимая решение о том, какой или какие получатели недополучат заказанный груз. Модель транспортной задачи называют открытой, если $A \neq B$, и закрытой, когда $A = B$. Случай, когда спрос и предложение точно совпадают, может показаться на практике маловероятным, но, во-первых, открытые модели всегда преобразуются в закрытые. Для этого достаточно при $A > B$ ввести фиктивного получателя с объемом спроса $A - B$, а при $A < B$ ввести фиктивного поставщика с объемом поставки $B - A$. Если тарифы фиктивных перевозок считать нулевыми, то результаты интерпретируются так: поставки к фиктивному получателю – грузы, оставшиеся у поставщика; поставки от фиктивного поставщика – недовыполнение заказа получателя. Во-вторых, только к закрытой модели применим специальный алгоритм решения транспортной задачи. Поэтому далее будем рассматривать закрытую модель. Полагая, что выполняется *условие баланса*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{3.1}$$

т. е. запасы всего произведенного груза полностью востребованы потребителями.

**Задача.** Составить план перевозок, при котором весь груз из пунктов производства $A_i$, $i = \overline{1,\ m}$, будет вывезен, все запросы потребителей $B_j$, $j = \overline{1,\ n}$, удовлетворены, а транспортные расходы по перевозке груза окажутся минимальными.

Составим математическую модель задачи. Пусть $x_{ij}$ ($x_{ij} \geq 0$) – количество груза, запланированного к перевозке из пункта $A_i$ в пункт $B_j$, $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$.

*Планом* транспортной задачи называется матрица перевозок $X = (x_{ij})_{m \times n}$, где $x_{ij}$ – количество единиц груза, которое необходимо доставить из $i$-го пункта производства в $j$-й пункт потребления при условии, что все запасы вывезены и все потребности удовлетворены.

Тогда общая стоимость $z$ всех перевозок выразится функцией

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} .$$

*Определение.* План $X^0 = (x_{ij}^0)_{m \times n}$, при котором функция $z$ принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Таким образом, приходим к следующей ЗЛП: указать количество $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$, груза, перевозимого из пункта $A_i$ в пункт $B_j$, при следующих условиях:

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,\ m}\quad \text{(все запасы вывезены)},\qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,\ n}\quad \text{(все потребности удовлетворены)}.$$

Утверждение о том, что закрытая транспортная задача всегда имеет решение, можно обосновать, если принять

$$x_{ij}=\frac{a_i b_j}{A},\qquad i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n}.$$

Действительно, суммируя по всем столбцам и учитывая, что $A=B$, получим

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i b_j}{A}=\frac{a_i}{A}\sum_{j=1}^{n}b_j=\frac{B}{A}a_i=a_i,\qquad i=\overline{1,m}\ .$$

Суммируя по строкам, получим ограничения-равенства для получателей.

Такой план является допустимым, но не оптимальным. Для выполнения оптимизации условие задачи удобно представить в виде транспортной таблицы (табл. 3.1), объединяя матрицы тарифов и перевозок в одной *матрице планирования*.

Таблица 3.1

Матрица планирования

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | … | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | … | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | … | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| Потребности | $b_1$ | $b_1$ | … | $b_n$ | $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ |

В правом верхнем углу каждой клетки матрицы планирования записывают стоимость $c_{ij}$ перевозки единицы груза от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю, которую называют *тарифом* клетки ($i,\ j$).

**Теорема существования решения.** Для того чтобы транспортная задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса (3.1).

Решение транспортной задачи, как и любой ЗЛП, состоит из трех этапов:

1) построение первоначального базисного плана перевозок;

2) проверка построенного плана на оптимальность;

3) в случае неоптимальности плана – переход к нехудшему базисному плану.

### 3.2. Построение первоначального базисного плана

Решение транспортной задачи начинаем с построения *первоначального базисного плана* $X_1 = (x_{ij}),\ i = \overline{1,\ m},\ \ j = \overline{1,\ n}$. Система ограничений задачи (3.2) содержит $m \times n$ неизвестных $x_{ij}$, а число уравнений в системах основных ограничений (3.2) – $(m + n)$. Так как по предположению выполняется условие баланса (3.1), то число линейно независимых уравнений составляет $m + n - 1$. Следовательно, план транспортной задачи может иметь не более $m + n - 1$ отличных от нуля перевозок.

Специальная структура транспортной модели (каждая переменная входит точно в два уравнения, все коэффициенты при переменных равны единице) позволяет построить первоначальный опорный план без использования искусственных переменных, которые вводились при применении симплекс-метода. Для этого есть целый ряд методов, которые отличаются по степени приближения к оптимальному решению, что неизбежно влечет их усложнение.

Рассмотрим методы построения первоначального базисного плана.

*Метод северо-западного угла.* Сначала заполним клетки первой строки матрицы планирования слева направо по порядку, пока не будут исчерпаны запасы $a_1$, при этом по возможности полностью удовлетворяют потребности $B_1$, $B_2$, …, $B_n$. Затем последовательно заполним клетки второй строки, начиная с того потребителя, которому не хватило запасов $a_1$, до полного исчерпания запасов $a_2$ и т. д.

*Метод минимальной стоимости* (*минимального элемента*):

1. Выберем в транспортной таблице ячейку с минимальной стоимостью перевозок. Если таких ячеек несколько, то выберем любую из них.

2. Переменной в выбранной ячейке присвоим максимально возможное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение.

3. Корректируем значения спроса и предложения, уменьшая их на величину присвоенного значения переменной. При этом одно из этих значений обязательно будет равно нулю.

4. Вычеркнем строку (или столбец) с обнуленной величиной ограничения, чтобы исключить остальные переменные из дальнейшего рассмотрения. Если одновременно обнуляются значения и спроса и предложения, то вычеркивается только что-то одно.

5. Если осталось больше одной ячейки, то возвращаемся к первому шагу. Иначе заносим в оставшуюся ячейку еще нераспределенный груз, для которого спрос и предложение всегда будут совпадать. Опорный план построен.

Рассмотрим применение этого метода на примере (табл. 3.2). Пусть возможности поставщиков составляют 50, 60 и 70 ед. груза, а спрос получателей задан как 90, 30 и 40 ед. Поскольку возможные поставки превышают спрос на 20 ед., введем фиктивного получателя с таким объемом спроса. Эти данные вместе со значениями стоимостей перевозок занесем в таблицу. Номерами ее строк и столбцов будем считать порядковые номера поставщиков и получателей.

Таблица 3.2

Исходные данные примера

| Предложение поставщиков | Спрос получателей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **90** | **30** | **40** | **20** |
| **50** | 8 | 9 | 2<br>~ | 0 |
| **60** | 5 | 3 | 1<br>**40** | 0 |
| **70** | 7 | 6 | 4<br>~ | 0 |

Для фиктивного получателя транспортные затраты нулевые, т. к. груз остается у поставщика. Поэтому при выборе маршрута с минимальной стоимостью не будем принимать его во внимание. Тогда наименьшую стоимость имеет ячейка (2, 3). С учетом ограничений для второй строки (60) и третьего столбца (40) записываем в нее максимально возможное значение объема перевозки 40 ед. (т. к. min{60, 40}=40) и корректируем предложение и спрос. Для третьего получателя спрос удовлетворен, следовательно, третий столбец вычеркиваем. У второго поставщика останется 60 – 40=20 ед. груза. Следующей ячейкой с минимальной стоимостью в незаполненной части таблицы будет ячейка (2, 2), в нее занесем значение объема перевозок, равное 20 (т. к. min{20, 30}=20). Последовательность действий и конечный результат представлены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Метод минимального элемента

| Предложение поставщиков | Спрос получателей | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **90** | **30** | **40** | **20** |
| **50** | 8<br>**30** | 9<br>~ | 2<br>~ | 0<br>**20** |
| **60** | 5<br>~ | 3<br>**20** | 1<br>**40** | 0<br>~ |
| **70** | 7<br>**60** | 6<br>**10** | 4<br>~ | 0<br>~ |

Напоминаем, что составлен только первоначальный опорный план, он (возможно) нуждается в улучшении.

Клетки, в которых стоят отличные от нуля перевозки $x_{ij}$, называются *загруженными* (занятыми), а остальные – *свободными*. План, содержащий $m + n - 1$ загруженную клетку, называется *невырожденным*. *Базисность* плана состоит в его *ацикличности*, т. е. в невозможности построения в матрице планирования замкнутого *цикла*, все вершины которого расположены в загруженных клетках.

*Циклом* называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в загруженных клетках матрицы планирования, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Цикл состоит из последовательности вертикальных и горизонтальных отрезков (диагональные недопустимы), соединяющих заполненные клетки.

Загруженные клетки соответствуют базисным переменным и для невырожденного плана их число равно $m + n - 1$. Если число загруженных клеток построенного первоначального плана меньше, чем $m + n - 1$, то он называется *вырожденным*. Тогда для получения невырожденного плана в свободную клетку (обычно в ту, которой соответствует наименьший тариф) заносится *базисный нуль*, и эта клетка считается загруженной. Построенный план будет базисным, если он *ацикличен.*

Отметим важные свойства планов транспортной задачи:

- план транспортной задачи является базисным тогда и только тогда, когда из занятых этим планом клеток нельзя образовать ни одного цикла;

- для любого невырожденного базисного плана и для каждой свободной клетки существует (и при том только один) цикл, содержащий данную клетку и некоторые загруженные клетки.

После нахождения первоначального невырожденного ациклического плана необходимо исследовать его на оптимальность и, если он не оптимален, перейти к улучшенному плану. Для определения оптимальности плана транспортной задачи разработано несколько методов. Однако наиболее часто используется *метод потенциалов*.

## 3.3. Метод потенциалов. Проверка на оптимальность

Первоначальный опорный план может быть построен и любым другим способом, требуется только выполнение следующих условий:

- число занятых клеток, в которые занесены значения объемов перевозок, равно $m+n-1$;
- план не допускает циклов с вершинами в занятых клетках.

Этот метод, являющийся модификацией симплекс-метода, основан на соотношениях теории двойственности. После того как найден первоначальный невырожденный базисный план перевозок, каждому поставщику $A_i$ ставится в соответствие некоторое число $u_i$, $i=\overline{1, m}$, а каждому потребителю $B_j$ – некоторое число $v_j$, $j=\overline{1, n}$. Числа $u_i$ и $v_j$ называются *потенциалами* соответственно строк $A_i$ и столбцов $B_j$. Числа $u_i$ и $v_j$ выбирают так, чтобы для *любой загруженной клетки* их сумма была равна тарифу этой клетки, т. е.

$$u_i+v_j=c_{ij},\ i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Так как чисел $u_i$ и $v_j$ $m + n$, а число загруженных клеток $m + n – 1$, то для нахождения потенциалов $u_i$ и $v_j$ получаем систему (3.3) $m + n – 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными. Поэтому один потенциал можно задать произвольно, например, положив его равным нулю (обычно для строки или столбца, где больше занятых клеток). Тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Если число занятых клеток меньше $m+n-1$, то это значит, что базис *вырожденный* и переменная с нулевым значением пропущена. Поскольку базис должен содержать $m+n-1$ переменную, то недостающую нулевую переменную следует ввести. Можно использовать любую клетку, для которой нельзя построить цикл (базисные переменные должны быть независимыми), но из числа допустимых вариантов предпочтительнее тот, где меньше величина тарифа; проще всего ставить «0» при построении первоначального опорного плана, если запасы и потребности нулевые, а ячейка еще не вычеркнута. Потенциалы можно интерпретировать как выплаты за единицу груза, получаемые транспортной организацией как при погрузке, так и после доставки груза. Величины потенциалов могут быть любого знака, но выплаты за перевозку по тому опорному плану, для которого они определены, будут точно соответствовать заданным тарифам.

При проверке оптимальности плана для *каждой свободной клетки* вычисляют разность $\Delta_{ij}$ между тарифом этой клетки и суммой потенциалов $u_i$ и $v_j$, соответствующих данной клетке:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} – (u_i + v_j). \tag{3.4}$$

Для незаполненных клеток значение разности $c_{ij}-(u_i+v_j)$ может оказаться любого знака. Если $c_{ij}-(u_i+v_j)>0$, то включение такой клетки в базис только увеличит суммарные затраты. Следовательно, если во всех незаполненных клетках тарифы превышают суммы потенциалов, то план оптимален. Рассматриваемые разности являются оценками переменных, поэтому если план еще не является оптимальным, то нужно выбрать для включения в базис ту клетку, для которой абсолютное значение отрицательной оценки $c_{ij}-(u_i+v_j)<0$ является наибольшим, и занести в нее максимально возможную величину перевозимого груза. При этом балансы по строкам и столбцам необходимо сохранить, а все переменные должны оставаться неотрицательными (это аналогично переходу к следующей симплекс-таблице в симплекс-методе).

**Теорема (критерий оптимальности)**. План является оптимальным, если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \geq 0$. Если хотя бы для одной клетки $\Delta_{ij} < 0$, то план не оптимален и необходимо переходить к новому базисному плану.

### 3.4. Переход к новому плану

Переход к новому базисному плану осуществляется по следующим правилам:

1. Свободная клетка, для которой значение $\Delta_{ij}$ минимально, называется *перспективной* и подлежит загрузке. Если таких клеток несколько, то выбираем клетку с наименьшим тарифом и ее загружаем.
2. Для выбранной перспективной клетки строим *цикл*, т. е. составляем *замкнутый контур*, по которому следует перераспределить груз. *Контур* представляет собой замкнутую ломаную линию, составленную из направленных горизонтальных и вертикальных отрезков, соединяющих клетки, из которых одна (перспективная) свободна, а все остальные загружены. Для каждой свободной клетки такой *контур существует и является единственным*. Точка, в которой меняется направление контура (горизонтальное на вертикальное и наоборот), называется *вершиной цикла*. В одной строке или столбце могут находиться две и только две вершины цикла. Точки самопересечения контура вершинами цикла не являются (рис. 3.1).

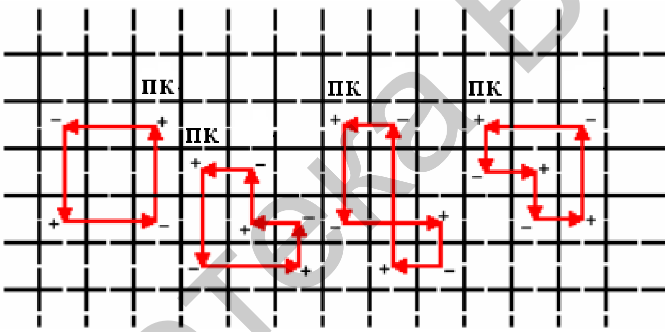



Рис. 3.1. Примеры циклов для транспортной задачи

3. Расставляем поочередно знаки «+» и «–» в вершинах цикла, начиная с перспективной клетки. Перспективной клетке приписываем знак «+», а остальным вершинам цикла поочередно знаки «–» и «+», пока не придем в исходную вершину.
4. В клетках, соответствующих отрицательным вершинам, отыскиваем наименьший груз θ, который перемещаем по клеткам цикла, т. е. прибавляем к поставкам $x_{ij}$ в клетках со знаком «+» (включая перспективную клетку) и вычитаем из поставок в клетках со знаком «–». В итоге получаем новый план, для которого составляем новую систему потенциалов и проверяем план на оптимальность. Процесс продолжаем, пока не получим оптимальный план.

*Замечание*. Наличие в оптимальном плане свободных клеток, в которых $\Delta_{ij} = 0$, говорит о неединственности оптимального плана, что полезно учитывать при составлении конкретных плановых заданий.

При выполнении *условия баланса* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ имеем *закрытую модель* транспортной задачи. Если условие баланса не выполнено, получаем *открытую модель* транспортной задачи. При этом возможно выполнение двух условий: а) запасы превосходят потребности: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{i=1}^{n} b_j$ (*перепроизводство товаров*); б) запасы не обеспечивают потребности: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_j$ (*дефицит товаров*). Для сведения открытой задачи к закрытой вводят фиктивного потребителя в случае «а» или фиктивного поставщика в случае «б». Все дополнительные тарифы при этом полагают равными нулю.

Выполнение описанной процедуры рассмотрим на примере (табл. 3.4). Сначала требуется определить семь неизвестных потенциалов ($m$+$n$), имея шесть уравнений ($m$+$n$–1). Любому из них можно присвоить произвольное значение (например, $u_1 = 0$) и затем, считая, что в *заполненных* клетках $u_i + v_j = c_{ij}$, последовательно (порядок вычислений показан стрелками) найти остальные потенциалы. Для наглядности можно также выписать и решить систему линейных уравнений.

Таблица 3.4

Нахождение потенциалов

| Предложение поставщиков | Спрос получателей **90** | **30** | **40** | **20** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 8<br>**30** | 9 | 2<br>**–3** | 0<br>**20** | 0 |
| **60** | 5 | 3<br>**20** | 1<br>**40** | 0 | –4 |
| **70** | 7<br>**60** | 6<br>**10** | 4 | 0 | –1 |
| | 8 | 7 | 5 | 0 | $u_i$ / $v_j$ |

*Перспективной* для ввода в базис является переменная (1, 3), оценка которой равна $c_{13} - (u_1 + v_3) = 2 - (0 + 5) = -3$. Занесем ее в правый нижний угол клетки и построим замкнутый цикл, который начинается и заканчивается *в этой ячейке* и состоит из последовательности вертикальных и горизонтальных отрезков (диагональные недопустимы), соединяющих *заполненные* клетки. Поскольку вводимая в базис переменная всегда может быть выражена через базисные переменные, то такой цикл всегда существует и будет единственным. Его можно обходить как по часовой стрелке, так и против, что несущественно. Важно то, что если вводимую в базис переменную пометить знаком «+» и изменять знак в каждой угловой точке цикла, то в любой строке и любом столбце каждому знаку «+» будет соответствовать знак «–» (табл. 3.5). Если цикл содержит самопересечения, то точки самопересечения вершинами не являются.

Таблица 3.5

Цикл перераспределения груза

| Предложение поставщиков | Спрос получателей | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **90** | **30** | **40** | **20** | |
| **50** | – 8<br>**30** | 9 | + 2<br>**–3** | 0<br>**20** | 0 |
| **60** | 5 | + 3<br>**20** | – 1<br>**40** | 0 | –4 |
| **70** | + 7<br>**60** | – 6<br>**10** | 4 | 0 | –1 |
| | 8 | 7 | 5 | 0 | $u_i$ / $v_j$ |

Следовательно, если всем участвующим в цикле переменным дать некоторое приращение Δ с соответствующими знаками, то все балансовые соотношения по строкам и столбцам будут сохранены. Чтобы объемы перевозок оставались неотрицательными, это приращение Δ нужно взять равным минимальному по абсолютной величине значению переменной из числа *помеченных знаком* «–». В примере это ячейка (3, 2), поэтому $\Delta = 10$ (т. к. min{30, 40, 10}=10). Прибавляем 10 в клетках со знаком «+», отнимаем 10 в клетках со знаком «–», клетки, не вошедшие в цикл, не изменяются. После изменения грузопотоков получим новое базисное решение, которое приведено в табл. 3.6. В него введена переменная $x_{13}$ и исключена переменная $x_{32}$. После этой итерации суммарные затраты на перевозки изменятся на

$$\Delta\,(c_{13} - (u_1 + v_3)) = 10\ (2 - 0 - 5) = 10(-3) = -30.$$

Таблица 3.6

Нахождение нового базиса

| Предложение поставщиков | Спрос получателей | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **90** | **30** | **40** | **20** | |
| **50** | – 8<br>**20** | 9 | + 2<br>**10** | 0<br>**20** | 0 |
| **60** | + 5<br>**–2** | 3<br>**30** | – 1<br>**30** | 0 | –1 |
| **70** | 7<br>**70** | 6 | 4 | 0 | –1 |
| | 8 | 4 | 2 | 0 | $u_i$ / $v_j$ |

Вычисление новых значений потенциалов производится аналогично, поскольку изменилась система линейных уравнений (значения потенциалов также нуждаются в пересчете).

Новой вводимой в базис переменной будет $x_{22}$, ее оценка $c_{22}-(u_2+v_2)=5-(-1)-8=-2$. Построенный для нее цикл позволяет изменить значения входящих в него переменных на $\Delta=20$. Результаты приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Следующая итерация

| Предложение поставщиков | Спрос получателей **90** | **30** | **40** | **20** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 8 | 9 | ⊕ 2<br>**30** | ⊖ 0<br>**20** | 0 |
| **60** | ⊕ 5<br>**20** | 3<br>**30** | ⊖ 1<br>**10** | 0 | –1 |
| **70** | ⊖ 7<br>**70** | 6 | 4 | ⊕ 0<br>**–1** | 1 |
| | 6 | 4 | 2 | 0 | $u_i$ / $v_j$ |

После вычисления потенциалов отрицательная оценка получится для переменной $x_{34}$. Действительно, $c_{34}-(u_3+v_4)=0-1-0=-1$ и $\Delta=10$. Получим табл. 3.8.

Таблица 3.8

Оптимальный план

| Предложение поставщиков | Спрос получателей **90** | **30** | **40** | **20** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 8 | 9 | 2<br>**40** | 0<br>**10** | 0 |
| **60** | 5<br>**30** | 3<br>**30** | 1 | 0 | –2 |
| **70** | 7<br>**60** | 6 | 4 | 0<br>**10** | 0 |
| | 7 | 5 | 2 | 0 | $u_i$ / $v_j$ |

Теперь для небазисных переменных все оценки $c_{ij}-(u_i+v_j)>0$ (неотрицательны), поэтому решение оптимально. Так как среди этих оценок нет нулевых, то решение единственно.

*Ответ.* Оптимальной является перевозка от первого поставщика 40 ед. груза третьему получателю, и 10 ед. груза у него останется (поскольку поставки фиктивному получателю не осуществляются), от второго поставщика – 30 ед. груза первому получателю и 30 ед. груза второму получателю, от третьего поставщика – 60 ед. груза первому получателю, и 10 ед. груза у него останется. Расходы на перевозку составят $40 \cdot 2 + 30 \cdot 5 + 30 \cdot 3 + 60 \cdot 7 = 740$.

**Пример**. Имеется четыре поставщика некоторых товаров с запасами $a_1 = 400$, $a_2 = 200$, $a_3 = 300$, $a_4 = 200$ и четыре потребителя, потребности которых в данном товаре составляют $b_1 = 240$, $b_2 = 360$, $b_3 = 180$, $b_4 = 400$. Известна матрица тарифов $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица стоимости перевозок единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю. Составить оптимальный план перевозок.

***Решение.*** Прежде чем составлять матрицу планирования, проверим выполнение условия баланса. Так как $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1100 < \sum_{j=1}^{4} b_j = 1180,$ то условие баланса не выполняется, следовательно, имеем открытую модель транспортной задачи типа «б». Поэтому для решения задачи необходимо ввести фиктивного поставщика $A_5$ с запасом $a_5 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{4} a_i = 80$ и нулевыми тарифами. Первоначальный базисный план, построенный по методу минимальной стоимости, представлен в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Первоначальный базисный план

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 4<br>– | 7<br>– | 1<br>180 | 3<br>220 | 400 |
| $A_2$ | 2<br>200 | 8<br>– | 4<br>– | 4<br>– | 200 |
| $A_3$ | 6<br>– | 5<br>120 | 1<br>– | 3<br>180 | 300 |
| $A_4$ | 4<br>– | 3<br>200 | 7<br>– | 6<br>– | 200 |
| $A_5$ | 0<br>40 | 0<br>40 | 0<br>– | 0<br>– | 80 |
| Потребности | 240 | 360 | 180 | 400 | 1180<br>1180 |

Полученный первоначальный базисный план

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 180 & 220 \\ 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 180 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 40 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является невырожденным. Действительно, число загруженных клеток в матрице планирования $X_1$ совпадает с числом $m + n - 1 = 8$. Стоимость перевозки товаров по этому плану составляет

$$z(X_1) = 1 \cdot 180 + 3 \cdot 220 + 2 \cdot 200 + 5 \cdot 120 + 3 \cdot 180 + 3 \cdot 200 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 40 = 2980 \text{ ден. ед.}$$

Выясним, является ли этот план оптимальным. Согласно формуле (3.3), составим систему потенциалов, положив один из них, например $u_1$, равным нулю. Тогда остальные потенциалы определяются однозначно (табл. 3.10).

Таблица 3.10

Проверка на оптимальность

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы | Потенциалы, $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | + 4<br>– | 7<br>– | 1<br>180 | - 3<br>220 | 400 | $u_1 = 0$ |
| $A_2$ | 2<br>200 | 8<br>– | 4<br>– | 4<br>– | 200 | $u_2 = -3$ |
| $A_3$ | 6<br>– | 5<br>- 120 | 1<br>– | 3<br>180 + | 300 | $u_3 = 0$ |
| $A_4$ | 4<br>– | 3<br>200 | 7<br>– | 6<br>– | 200 | $u_4 = -2$ |
| $A_5$ | 0<br>- 40 | 0<br>+ 40 | 0<br>– | 0<br>– | 80 | $u_5 = -5$ |
| Потребности | 240 | 360 | 180 | 400 | 1180<br>1180 | |
| Потенциалы, $v_j$ | $v_1 = 5$ | $v_2 = 5$ | $v_3 = 1$ | $v_4 = 3$ | | |

По всем свободным клеткам, согласно формуле (3.4), вычислим $\Delta_{ij}$:

$$\Delta_{11} = 4 - (5 + 0) = -1 < 0;\ \Delta_{12} = 7 - (5 + 0) = 2 > 0;$$
$$\Delta_{22} = 8 - (5 + (-3)) = 6 > 0;\ \Delta_{23} = 4 - (1 + (-3)) = 6 > 0;$$
$$\Delta_{24} = 4 - (3 + (-3)) = 4 > 0;\ \Delta_{31} = 6 - (5 + 0) = 1 > 0;$$
$$\Delta_{33} = 1 - (1 + 0) = 0;\ \Delta_{34} = 3 - (3 + 0) = 0;$$
$$\Delta_{41} = 4 - (5 + (-2)) = 1 > 0;\ \Delta_{43} = 7 - (1 + (-2)) = 8 > 0;$$
$$\Delta_{44} = 6 - (3 + (-2)) = 5 > 0;\ \Delta_{53} = 0 - (1 + (-5)) = 4 > 0;$$
$$\Delta_{54} = 0 - (3 + (-5)) = 2 > 0.$$

Среди оценок $\Delta_{ij}$ значение $\Delta_{11}$ оказалось отрицательным. Это означает, что план $X_1$ не является оптимальным, стоимость перевозки товаров можно уменьшить. Свободная клетка (1, 1) является перспективной. Ее следует загрузить. Согласно второму пункту правил перехода к новому плану, необходимо построить цикл (см. табл. 3.10) с клеткой (1, 1) в качестве одной из вершин замкнутого контура, в котором только одна клетка (перспективная) является незагруженной, а остальные – загруженные. Таким замкнутым контуром является контур, проходящий через клетки (1, 1), (1, 4), (3, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 1), (1, 1). Расставим в вершинах цикла поочередно знаки «+» и «–», начиная с перспективной. Из клеток со знаком «–» выберем наименьший груз: $\theta = \min(220; 120; 40) = 40$, который прибавим ко всем перевозкам в вершинах цикла со знаком «+» и вычтем из всех перевозок в вершинах цикла со знаком «–». В результате получим новую табл. 3.11 и новый план

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 180 & 180 \\ 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 220 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

стоимость перевозок по которому равна

$$z(X_2) = 4\cdot 40 + 1\cdot 180 + 3\cdot 180 + 2\cdot 200 + 5\cdot 80 + 3\cdot 220 + 3\cdot 200 + 0\cdot 80 = 2940 \text{ ден. ед.}$$

Для того чтобы узнать, является ли данный план оптимальным, по загруженным клеткам составим новую систему потенциалов (см. табл. 3.11). Затем по свободным клеткам вычислим оценки $\Delta_{ij}$:

$$\Delta_{12} = 7 - (5 + 0) = 2 > 0;\ \Delta_{22} = 8 - (5 + (-2)) = 5 > 0;$$
$$\Delta_{23} = 4 - (1 + (-2)) = 5 > 0;\ \Delta_{24} = 4 - (3 + (-2)) = 3 > 0;$$
$$\Delta_{31} = 6 - (4 + 0) = 2 > 0;\ \Delta_{33} = 1 - (1 + 0) = 0;$$
$$\Delta_{41} = 4 - (4 + (-2)) = 2 > 0;\ \Delta_{43} = 7 - (1 + (-2)) = 8 > 0;$$
$$\Delta_{44} = 6 - (3 + (-2)) = 5 > 0;\ \Delta_{51} = 0 - (4 + (-5)) = 1 > 0;$$
$$\Delta_{53} = 0 - (1 + (-5)) = 4 > 0;\ \Delta_{54} = 0 - (3 + (-5)) = 2 > 0.$$

Так как все $\Delta_{ij} \geq 0$, то, согласно теореме, план

$$X^0 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 180 & 180 \\ 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 220 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным. Стоимость перевозок по нему составляет

$$z(X^0) = 4\cdot 40 + 1\cdot 180 + 3\cdot 180 + 2\cdot 200 + 5\cdot 80 + 3\cdot 220 + 3\cdot 200 = 2940 \text{ ден. ед.}$$

Таблица 3.11

Оптимальный план

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы | Потенциалы, $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 4<br>40 | 7<br>– | 1<br>180 | 3<br>180 | 400 | $u_1 = 0$ |
| $A_2$ | 2<br>200 | 8<br>– | 4<br>– | 4<br>– | 200 | $u_2 = -2$ |
| $A_3$ | 6<br>– | 5<br>80 | 1<br>– | 3<br>220 | 300 | $u_3 = 0$ |
| $A_4$ | 4<br>– | 3<br>200 | 7<br>– | 6<br>– | 200 | $u_4 = -2$ |
| $A_5$ | 0<br>– | 0<br>80 | 0<br>– | 0<br>– | 80 | $u_5 = -5$ |
| Потребности | 240 | 360 | 180 | 400 | 1180<br>1180 | |
| Потенциалы, $v_j$ | $v_1 = 4$ | $v_2 = 5$ | $v_3 = 1$ | $v_4 = 3$ | | |

В силу замечания клетка (3, 3) с $\Delta_{33} = 0$ говорит о том, что полученный план не является единственным: альтернативный план той же стоимости можно получить, если построить цикл с перспективной клеткой (3, 3).

**Упражнение.** Постройте альтернативный план для примера и убедитесь, что стоимость перевозки продуктов по нему равна 2940 ден. ед.

**Пример (транспортная задача).** Четыре промхоза заготавливают материалы в объемах: первый промхоз – 300 тыс. м$^3$; второй – 400 тыс. м$^3$; третий – 300 тыс. м$^3$; четвертый – 400 тыс. м$^3$, всего 1400 тыс. м$^3$. Эти материалы используют четыре завода в объемах: первый завод – 200 тыс. м$^3$; второй – 350 тыс. м$^3$; третий – 400 тыс. м$^3$; четвертый – 450 тыс. м$^3$; всего 1400 тыс. м$^3$. Матрица стоимости перевозок имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составим оптимальный план перевозок, чтобы все материалы были вывезены, все потребности были удовлетворены и чтобы транспортные затраты были минимальными.

Все исходные данные запишем в виде таблицы транспортной задачи. В правом верхнем углу клетки $(i, j)$ дается цена перевозки единицы груза $c_{ij}$, которую назовем стоимостью клетки. Первоначальный план строим методом «минимальной стоимости». В матрице транспортной задачи выбираем наименьший элемент. Он равен единице. Ему соответствуют клетки (4, 1) и (2, 3). Выбираем любую, например (4, 1), и записываем в ней число $\min(200,\ 400) = 200$; исключаем из рассмотрения первый столбец. В клетку (2, 3) записываем $\min(400,\ 400) = 400$ и исключаем из рассмотрения второй столбец и вторую строку. Минимальная цена для незаполненных клеток равна 2. Таких клеток будет две: (1, 4) и (4, 2). Записываем в клетку (1, 4) $\min(300,\ 450) = 300$, а в клетку (4, 2) – $\min(300,\ 200) = 200$. Остались незаполненными два столбца: второй и четвертый. Записываем оставшиеся нераспределенные объемы в клетку (3, 2) – 150 тыс. м$^3$ и в клетку (3, 4) – 150 тыс. м$^3$.

Так как количество загруженных клеток $6 < 4 + 4 - 1 = 7$, то план вырожденный. Дополним его до невырожденного фиктивной клеткой (1, 3). Понятно, что эта клетка не составляет с другими занятыми клетками цикл. Таким образом, мы получили начальный невырожденный план.

Таблица 3.12

Начальный невырожденный план

| Промхозы, $A_i$ | Заводы | | | | Запасы, $a_i$ | Потенциалы, $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 2 | 3 | 0 – 5 | 300 + 2 | 300 | $u_1 = 0$ |
| $A_2$ | 4 | 2 | 400 1 | 3 | 400 | $u_2 = -4$ |
| $A_3$ | 3 | 150 4 | + 3 | 150 – 5 | 300 | $u_3 = 3$ |
| $A_4$ | 200 1 | 200 2 | 2 | 4 | 400 | $u_4 = 1$ |
| Потребности, $b_j$ | 200 | 350 | 400 | 450 | 1400 | |
| Потенциалы, $v_j$ | $v_1 = 0$ | $v_2 = 1$ | $v_3 = 5$ | $v_4 = 2$ | | |

Теперь найдем потенциалы. По загруженным клеткам записываем систему уравнений

$$u_1 + v_3 = 5; \qquad u_1 + v_4 = 2; \qquad u_3 + v_4 = 5;$$

$$u_3 + v_2 = 4; \qquad u_2 + v_3 = 1; \qquad u_4 + v_2 = 2; \qquad u_4 + v_1 = 1.$$

Решая эту систему, при условии $u_1$=0 находим потенциалы $u_i$, $v_j$ и записываем их в соответствующие столбец и строку таблицы.

Проверим на оптимальность полученный план:

$$\Delta_{11} = C_{12} - (u_1 + v_1) = 2 - (0 + 0) = 2 > 0;$$
$$\Delta_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) = 3 - (0 + 1) = 2 > 0;$$
$$\Delta_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 4 - (-4 + 0) = 8 > 0;$$
$$\Delta_{22} = C_{22} - (u_2 + v_2) = 2 - (-4 + 1) = 5 > 0;$$
$$\Delta_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 3 - (-4 + 2) + 2 = 5 > 0;$$
$$\Delta_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (3 + 0) = 0 \ge 0;$$
$$\Delta_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 3 - (3 + 5) = -5 < 0;$$
$$\Delta_{43} = C_{43} - (u_4 + v_3) = 3 - (1 + 5) = -3 < 0;$$
$$\Delta_{44} = C_{44} - (u_4 + v_4) = 4 - (1 + 2) = 1 > 0.$$

План не является оптимальным, потому что $\Delta_{33} < 0$ и $\Delta_{43} < 0$. $\min(\Delta_{33};\ \Delta_{34}) = \min(-5;\ -3) = -5$ достигается в клетке (3, 3). Для клетки (3, 3) строим цикл с вершинами в клетках (3, 3), (1, 3), (1, 4), (3, 4) . Расставим знаки «+» в клетках (3, 3) и (1, 4) и «–» в клетках (1, 3), и (3, 4).

Найдем минимальную перевозку $\Theta$ среди клеток с отрицательными знаками и $\Theta = \min(x_{13},\ x_{34}) = \min(0,\ 150) = 0$. Значение $\Theta$ запишем в перспективную клетку (3, 3), прибавим к перевозкам в клетку (1, 4) и отнимем от перевозок клеток (1, 3) и (3, 4). Таким образом, мы получили новую таблицу планирования.

Отметим, что поскольку в цикл с отрицательными вершинами вошла клетка с фиктивными перевозками, то новая матрица планирования практически не изменилась, за исключением того, что клеткой с фиктивными перевозками стала клетка (3, 3) вместо клетки (1, 3).

Новый план проверяем на оптимальность. Находим потенциалы из системы уравнений

$$\begin{aligned} u_1 + v_4 &= 2, \qquad & u_3 + v_4 &= 5, \\ u_2 + v_3 &= 1, \qquad & u_4 + v_1 &= 1, \\ u_3 + v_2 &= 4, \qquad & u_4 + v_2 &= 2, \\ u_3 + v_3 &= 3, \qquad & u_1 &= 0 \end{aligned}$$

и записываем в табл. 3.13.

Вычисляем $\Delta_{ij}$ для незагруженных клеток:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= 3 - (1 + 0) = 2 > 0, \qquad & \Delta_{31} &= 3 - (3 + 0) = 0 \ge 0, \\ \Delta_{13} &= 5 - (0 + 0) = 5 > 0, \qquad & \Delta_{43} &= 3 - (1 + 0) = 2 > 0, \\ \Delta_{21} &= 4 - (1 + 0) = 3 > 0, \qquad & \Delta_{44} &= 4 - (1 + 2) = 1 > 0, \end{aligned}$$
$$\Delta_{24} = 3 - (1 + 2) = 0 \ge 0.$$

Поскольку все $\Delta_{ij} \geq 0$, то план оптимален.

Таблица 3.13

Оптимальный план

| Промхозы, $A_i$ | Заводы | | | | Запасы, $a_i$ | Потенциалы, $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 2 | 3 | 5 | 300 2 | 300 | $u_1 = 0$ |
| $A_2$ | 4 | 2 | 400 1 | 3 | 400 | $u_2 = 1$ |
| $A_3$ | 3 | 150 4 | 0 3 | 150 5 | 300 | $u_3 = 3$ |
| $A_4$ | 200 1 | 200 2 | 2 | 4 | 400 | $u_4 = 1$ |
| Потребности, $b_j$ | 200 | 350 | 400 | 450 | 1400 | |
| Потенциалы, $v_j$ | $v_1=0$ | $v_2=1$ | $v_3=0$ | $v_4=2$ | | |

*Ответ*. Матрица оптимальных перевозок имеет вид

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 150 \\ 200 & 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные затраты составляют

$$Z=200\cdot1+150\cdot4+200\cdot2+400\cdot1+300\cdot2+150\cdot5=2950 \text{ ден. ед.}$$

Чтобы исключить ошибки при выполнении расчетов, целесообразно:

1. Проверять для каждой новой таблицы выполнение балансовых соотношений по строкам и столбцам.

2. После вычисления потенциалов убедиться, что их суммы для заполненных клеток действительно равны тарифам.

3. При записи новой таблицы необходимо сразу заносить в нее тарифы, чтобы лучше различать отдельные клетки. Величины спроса и предложения переписывать не обязательно.

4. Если балансовые соотношения выполняются, план не содержит циклов, а потенциалы вычислить не удается, то это значит, что базис вырожденный (число занятых клеток меньше $m+n-1$) и переменная с нулевым значением пропущена. Поскольку базис должен содержать $m+n-1$ переменную, то недостающую нулевую переменную следует ввести. Можно использовать любую клетку, для которой нельзя построить цикл (базисные переменные должны быть независимыми), но из числа допустимых вариантов предпочтительнее тот, где меньше величина тарифа (проще всего ставить «0» при построении первоначального опорного плана, если запасы и потребности нулевые, а ячейка еще не вычеркнута).

**Упражнение.** В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Стоимости перевозок 1 т бензина из хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

### 3.5. Транспортная модель с промежуточными пунктами

Часто кроме исходных и конечных пунктов перевозок используются промежуточные пункты для временного хранения грузов. При этом часть продукции может быть реализована непосредственно в этих пунктах, возможно также, что через отдельные конечные пункты осуществляются перевозки транзитом в другие конечные пункты. Такую модель можно преобразовать в обычную транспортную модель, если буфер достаточно большой, чтобы вместить объем всего предложения или спроса. Будем называть транзитными все пункты, в которые груз может как ввозиться, так и вывозиться. Для каждого транзитного пункта (таким пунктам будут соответствовать *одновременно и строка, и столбец* транспортной модели) увеличим и объем спроса, и объем предложения на величину буфера. Очевидно, что тариф перевозки из такого пункта в него же может быть только нулевым, а полученная переменная, которая может достигать величины буфера, выполняет только техническую роль. При таком построении модели транзитные перевозки будут использоваться только тогда, когда это необходимо или выгодно. Для исключения несуществующих маршрутов перевозок будем полагать, что тарифы для них равны достаточно большому числу $M$. Пример такой задачи приведен на рис. 3.2.

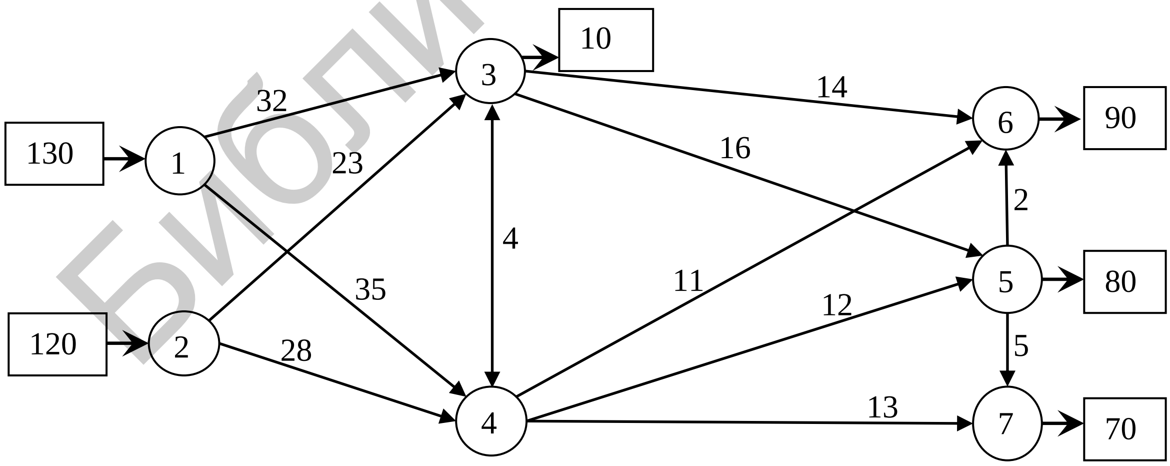



Рис. 3.2. Пример задачи с промежуточными пунктами

Пункты ① и ② – это грузоотправители с объемами поставки 130 и 120 ед., пункты ③ и ④ – транзитные (перевалочные) центры, причем в пункте ③ реализуется 10 ед. груза. Объемы реализации в пунктах ⑤ ⑥ и ⑦, а также затраты на транспортировку единицы груза по всем возможным маршрутам показаны на рис. 3.2. Заметим, что между пунктами ③ и ④ возможны перевозки в любом направлении, а через пункт ⑤ допустим транзит в пункты ⑥ и ⑦. Транспортную модель этой задачи представим в виде табл. 3.14.

Таблица 3.14

Транспортная модель с промежуточными пунктами

| | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | 32 | 35 | $M$ | $M$ | $M$ | 130 |
| ② | 23 | 28 | $M$ | $M$ | $M$ | 120 |
| ③ | 0 | 4 | 16 | 14 | $M$ | $B$ |
| ④ | 4 | 0 | 12 | 11 | 13 | $B$ |
| ⑤ | $M$ | $M$ | 0 | 2 | 5 | $B$ |
| | $B$+10 | $B$ | $B$+80 | 90 | 70 | |

Для расчета примем объем буфера $B = 250$, что равно всему объему предложения (или спроса). Поскольку через пункты ③, ④ и ⑤ может осуществляться транзит, то, когда эти пункты рассматриваются как поставщики, им соответствует объем предложения, равный буферу. Для этих же пунктов объем спроса увеличен на объем буфера. В результате баланс спроса и предложения сохраняется. Перемещению груза из пункта в него же соответствует нулевой тариф, т. к. груз никуда не перемещается, а для исключения недопустимых маршрутов возьмем при численном расчете, например, $M = 99$. Если ни один из таких маршрутов не войдет в оптимальное решение, что всегда возможно при корректной постановке задачи, значит, это число выбрано достаточно большим. Далее решаем ее как обычную транспортную задачу (ТЗ). Решение, полученное с использованием компьютера, приведено на рис. 3.3. Показаны только используемые маршруты и оптимальные объемы перевозок.

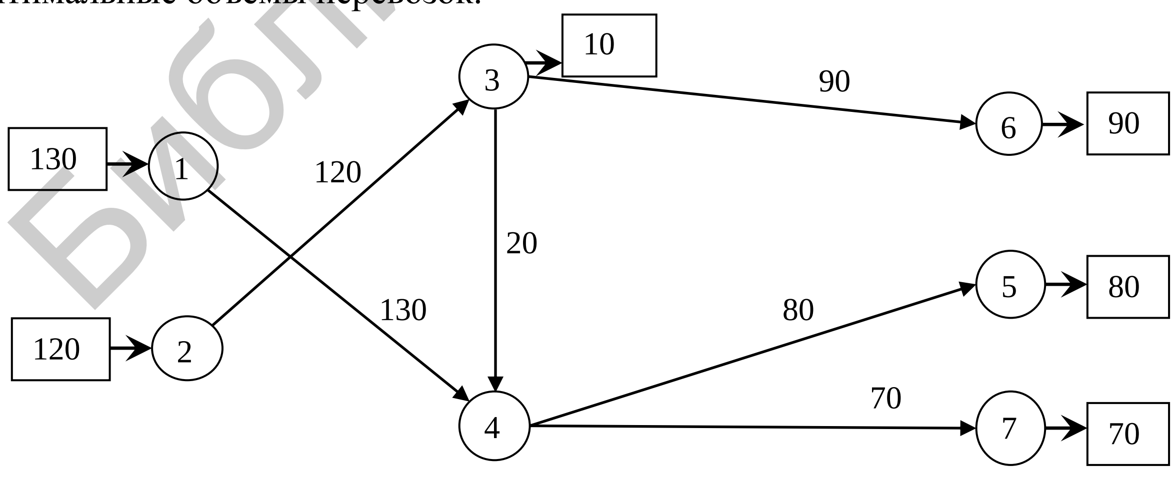



Рис. 3.3. Решение задачи с промежуточными пунктами

Можно учесть и другие дополнительные условия. Например, пусть объем поставки груза от *i*-го поставщика к *j*-му получателю не должен превышать $d_{ij}$. Для этого *j*-й столбец заменим на два столбца и занесем в первый из них спрос $d_{ij}$, а во второй – оставшийся объем спроса. Тарифы в обоих столбцах одни и те же, но в *i*-й строке в первом из двух введенных столбцов тариф используется фактический, а во второй заносится достаточно большое число *M*. При использовании готового пакета прикладных программ (*Excel, MathCad*) достаточно просто добавить условие, что $x_{ij} \le d_{ij}$.

## 3.6. Задачи и модели оптимального размещения и концентрации производства

Требуется найти план размещения предприятий по производству определенных видов продукции. Кроме того, необходимо определить оптимальный план поставок сырья и полуфабрикатов этим предприятиям. В результате решения такой задачи устанавливают, следует ли строить (расширять, модифицировать) рассматриваемые предприятия или нет; если же нужно, то каковы должны быть оптимальные мощности этих предприятий.

Таким образом, имеется система, состоящая из трех типов предприятий:

$A_i$, $i = \overline{1, m}$, – предприятия-заготовители и поставщики сырья;

$B_j$, $j = \overline{1, n}$, – предприятия-потребители сырья, они же поставщики каких-либо полуфабрикатов;

$Q_k$, $k = \overline{1, p}$, – предприятия-потребители промежуточной продукции и сырья.

Схема перевозок в этом случае имеет вид, представленный на рис. 3.4:

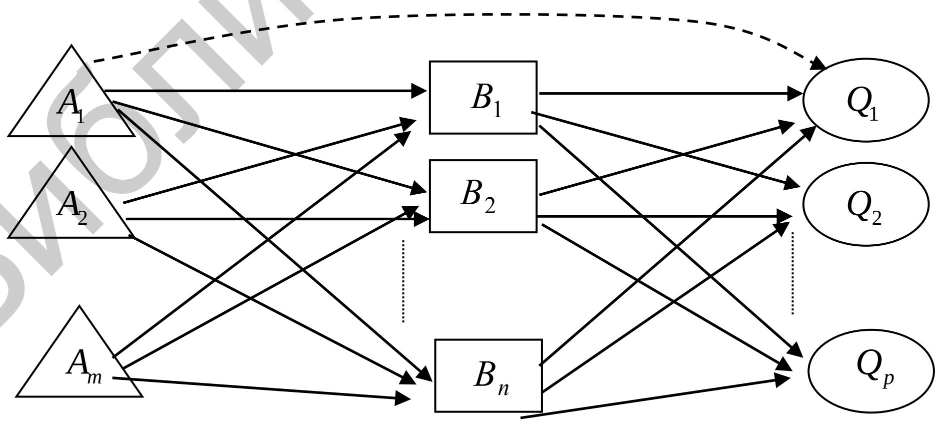



Рис. 3.4. Схема перевозок

Возможно включение в цепь поставок не трех, а большего числа предприятий, а также создание комплексных предприятий, производящих и промежуточную и конечную продукцию.

Среди рассматриваемых предприятий могут быть как действующие, не подлежащие реконструкции или планируемые к реконструкции, так и новые, которые предполагается построить.

Каждое из предприятий может выпускать несколько различных видов продукции и соответственно потреблять различную продукцию. Между поставщиками и потребителями могут существовать коммуникации (связи), пропускная способность которых может быть ограничена и не ограничена, и такие, между которыми связи нет.

Если предприятие существует и не подлежит реконструкции, то его мощности известны. Если предполагается предприятие расширить, то задаются мощности после расширения. На мощность предприятия могут накладываться как односторонние, так и двусторонние ограничения. Кроме того, для таких задач, должны быть определены значения некоторых неуправляемых параметров. Например, затраты каждого из предприятий на изготовление единицы продукции каждого вида; затраты на перевозку единицы груза, капиталовложения в строительство, реконструкцию, расширение производства.

Решением задачи является оптимальный размер производства по отношению к выбранному критерию. Задача является многоэтапной и многопродуктовой. Если рассматривать лишь два звена производства, например $A_i$, $i=\overline{1,m}$, и $B_j$, $j=\overline{1,n}$, то получаем одноэтапную задачу. Если осуществляются перевозки однородного продукта, то имеем однопродуктовую задачу. Условия, которым удовлетворяет модель, вытекают из содержания задачи и обеспечивают адекватность модели реальной задаче. При этом важно, чтобы выполнялось условие начальной несбалансированности предложения и спроса, для того чтобы можно было решать задачу на размещение производства. Если имеет место баланс, то задача сводится к обычной ТЗ.

### 3.7. Одноэтапная однопродуктовая модель с двусторонними ограничениями мощностей

Постановка задачи: есть $B_j$, $j=\overline{1,n}$, потребителей и спрос каждого потребителя известен и равен $b_j$, $j=\overline{1,n}$; $Q_k$, $k=\overline{1,p}$, – поставщики.

Будем предполагать, что:

1) первая часть – предприятия, действующие и не подлежащие реконструкции (количество таких предприятий – $s$);

2) вторая часть – предприятия, действующие, но предполагаемые к реконструкции (их количество $h$);

3) третья часть – новые предприятия, предполагаемые к постройке (их количество $p-(s+h)$).

Ограничения:

1. Для первых $s$ предприятий мощности $q_k$, $k=\overline{1,s}$, заданы.

2. Для второй группы предприятий задаются два возможных предела объема производства:

$\underline{q}_k$, $k = \overline{s+1, s+h}$ – нижний предел соответствует достигнутой мощности;

$\overline{q}_k$, $k = \overline{s+1, s+h}$ – верхний предел соответствует максимальной мощности, которую предприятие может иметь после реконструкции.

3. Для третьей группы предприятий задается только верхний предел мощностей $\overline{q}_k$, $k = \overline{(s+h)+1, p}$.

Кроме того, известны $c_{kj}$ – удельные приведенные затраты при перевозке от $k$-го поставщика к $j$-му потребителю, например $c_{kj} = c_k + t_{kj} + E_H K_k$, где $c_k$ – себестоимость единицы продукции на предприятии $k$; $t_{kj}$ – затраты на перевозку единицы продукции от $k$-го к $j$-му предприятию; $K_k$ – удельные капиталовложения в строительство $k$-го предприятия; $E_H$ – нормативный коэффициент эффективности капиталовложений.

Требуется найти оптимальные мощности предприятий и оптимальный план перевозок груза, который минимизирует расходы.

Выпишем математическую модель задачи.

Целевая функция:

$$z = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_{kj} \to \min,$$

где $x_{kj}$ – количество груза, перевозимого от $k$-го поставщика $j$-му потребителю.

Ограничения:

1. Условие несбалансированности:

$$\sum_{k=1}^{s} q_k + \sum_{k=s+1}^{p} \overline{q}_k > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Если имеет место баланс, то задача сводится лишь к оптимальному прикреплению поставщиков к потребителю (обычной ТЗ).

2. Спрос потребителей должен быть удовлетворен:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kj} = b_j, \ j = \overline{1, n}.$$

3. Сумма поставок от каждого действующего и нереконструируемого предприятия должна быть равна мощности этого предприятия:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = q_k, \ k = \overline{1, s}.$$

При введении фиктивного потребителя для действующих нереконструируемых предприятий поставки ему не должны планироваться. Ограничение пропускных способностей и отсутствие соответствующих связей математически записывается с помощью очень большой стоимости перевозки М.

4. Сумма поставок от каждого из реконструируемых предприятий по всем потребителям должна быть меньше верхнего предела, но больше нижнего:

$$\underline{q}_k \le x_k = \sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le \overline{q}_k\,,\ k = \overline{s+1, s+h}.$$

Для этих предприятий существуют дополнительные условия: часть продукции, соответствующая мощности предприятия до реконструкции, **не может** поставляться фиктивному потребителю.

5. Сумма поставок от каждого предприятия, планируемого к новому строительству, должна быть не более верхнего предела мощностей:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le \overline{q}_k\,,\ k = \overline{(s+h)+1, p}$$

6. $x_{kj} \ge 0$, $k = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, n}$, т. к. $x_{kj}$ – количество груза.

Получена модель открытой ТЗ, имеющей двусторонние ограничения.

***Решение:***

1. Преобразуем эту задачу к закрытой ТЗ.

Должно быть выполнено условие баланса. Для этого вводим фиктивного потребителя $B_{n+1}$ со спросом $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{s} q_k + \sum_{k=s+1}^{p} \overline{q}_k - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

2. Следует избавиться от двусторонних ограничений.

Каждое предприятие $Q_k$, для которого мощности ограничены с двух сторон, разбиваем условно на два предприятия: $Q_k^{[1]}$ и $Q_k^{[2]}$, мощности которых $\underline{q}_k$ и $\overline{q}_k - \underline{q}_k$ соответственно, $k = \overline{s+1, s+h}$.

Предприятие $Q_k^{[1]}$ можно рассматривать как обычное предприятие $Q_k$ с мощностью $\underline{q}_k$ до реконструкции, а предприятие $Q_k^{[2]}$ как ту часть предприятия, которая будет достраиваться или реконструироваться. Поставки $x_{kj} = x_{kj}^{[1]} + x_{kj}^{[2]}$. Поставки фиктивному потребителю $c_{k,n+1} = M$, для $Q_k^{[1]}$ и $c_{k,n+1} = 0$ для $Q_k^{[2]}$.

Соответствующим образом изменяются ограничения и целевая функция.

Так как для действующих предприятий поставки фиктивному потребителю запрещены (эти поставки должны быть реальными), то удельные приведенные затраты для такого потребителя полагаем равными М, ноль – при поставках фиктивному потребителю от реконструируемых и строящихся предприятий.

Распределительная таблица для решения данной задачи (с двусторонними ограничениями на мощности) представлена в табл. 3.15.

*Замечание.* При решении многопродуктовой задачи дополнительно вводится запрет на перевозку, если рассматриваемый вид продукции не пригоден потребителю.

Таблица 3.15

Модель с двусторонними ограничениями мощностей

| Поставщики | | | Потребители и их спрос | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Действительные и условные | | Мощности | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_j$ | … | $B_n$ | $B_{n+1}$ |
| | | | $b_1$ | $b_2$ | | $b_j$ | | $b_n$ | $b_{n+1}$ |
| $Q_1$ | | $q_1$ | | | | | | | M |
| ⋮ | | | | | | | | | |
| $Q_s$ | | $q_s$ | | | | | | | M |
| $Q_{s+1}$ | $Q_{s+1}^{[1]}$ | $\underline{q}_{s+1}$ | | | | | | | M |
| | $Q_{s+1}^{[2]}$ | $\overline{q}_{s+1} - \underline{q}_{s+1}$ | | | | | | | 0 |
| ⋮ | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $Q_{s+h}$ | $Q_{s+h}^{[1]}$ | $\underline{q}_{s+h}$ | | | | | | | M |
| | $Q_{s+h}^{[2]}$ | $\overline{q}_{s+h} - \underline{q}_{s+h}$ | | | | | | | 0 |
| $Q_{s+h+1}$ | | $\overline{q}_{s+h+1}$ | | | | | | | 0 |
| ⋮ | | | | | | | | | |
| $Q_p$ | | $\overline{q}_p$ | | | | | | | 0 |

**Пример (одноэтапная многопродуктовая задача размещения и концентрации производства).** В состав леспромхоза входят два лесопункта, каждый из которых осуществляет отгрузку круглых лесоматериалов. Поскольку леспромхоз производит несколько видов сортиментов, то задача является многопродуктовой. Кроме отгрузки сортиментов на сторону, в составе первого лесопункта организовано производство материалов и технологической щепы из дров. При решении задачи следует учитывать, что в перерабатывающих производствах может быть использовано сырье обоих лесопунктов.

В задаче известны: минимально и максимально возможные объемы производства отдельных сортиментов в разрезе лесопунктов; направления использования заготовленных сортиментов и потребности в них по каждому из этих направлений; текущие затраты на заготовку и транспортировку сырья.

В результате решения задачи требуется определить оптимальные объемы производства сортиментов конкретного вида в разрезе лесопунктов, а также оптимальные размеры каждого из лесопунктов.

Исходные данные, необходимые для решения задачи, представлены в табл. 3.16–3.18.

Таблица 3.16

Мощности лесопунктов по выпуску отдельных сортиментов, тыс. м$^3$

| Лесопункт 1 | | | Лесопункт 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Пиловочник | Техн. сырье | Дрова | Пиловочник | Техн. сырье | Дрова |
| 50/60 | 10/15 | 35/50 | 23/30 | 4/10 | 15/25 |

Здесь числитель – нижний предел производства; знаменатель – верхний предел производства.

Таблица 3.17

Потребности в сортиментах по направлениям использования, тыс. м$^3$

| Переработано внутри предприятия (на первом лесопункте) | | Поставлено на сторону | | | Использовано дров на топливные нужды |
|---|---|---|---|---|---|
| пиловочника | дров | пиловочника | дров | техн. сырья | |
| 14 | 20 | 60 | 20 | 15 | 15 |

Таблица 3.18

Затраты на производство и транспортировку сырья, ден. ед./тыс. м$^3$

| Затраты на производство | | | | | | Затраты на перевозку сырья из второго лесопункта в первый |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Пиловочника | | Техн. сырья | | Дров | | |
| Лесопункт №1 | Лесопункт №2 | Лесопункт №1 | Лесопункт №2 | Лесопункт №1 | Лесопункт №2 | |
| 25 | 23 | 6 | 10 | 3 | 7 | 4 |

Решение данной задачи начинается с представления исходных данных в виде таблицы, в которой отражены все допустимые перевозки и их стоимость.

Составим рабочую таблицу (табл. 3.19). Данная задача является транспортной многопродуктовой задачей с двусторонними ограничениями на мощности поставщиков. Поэтому построение транспортной таблицы начинается с определения количества поставщиков и их мощностей. Фактически в задаче имеется три поставщика: поставщики пиловочника, дров и технического сырья, но т. к. каждый из них имеет двусторонние ограничения на мощности, будем рассматривать каждого из поставщиков как двух. Первый из них имеет мощность, равную нижней границе мощности исходного поставщика, а второй – мощность, равную разнице между нижней и верхней границей. Так, например, для пиловочника имеем $Л_1^{11}$ – первый поставщик с мощностью 50 ед., $Л_1^{21}$ – второй поставщик с мощностью 60 – 50 = 10 ед. (данные взяты из табл. 3.19). Аналогично производится подсчет мощностей остальных поставщиков (для первого и второго лесопунктов). Таким образом, имеем 12 поставщиков с соответствующими мощностями.

Далее нужно определить потребителей и их потребности. Используя условие задачи, получим шесть потребителей с соответствующими потребностями.

Получили открытую транспортную задачу. Для решения этой задачи нужно ввести фиктивных потребителей, т. к. имеющиеся мощности производителей больше потребностей потребителей (190>144). Введем трех фиктивных потребителей (по количеству используемых сортиментов): $B_4^1$, $B_4^2$, $B_4^3$. Определим их потребности. Для пиловочника имеем: мощности равны 50 + 10 + 23 + + 7 = 90, а потребности равны 14 +60 = 74. Тогда 90 – 74 = 16. Таким образом, мощности фиктивного поставщика по пиловочнику $b_4^1 = 16$. Аналогично рассчитываются мощности остальных фиктивных потребителей (по дровам и техническому сырью).

Таблица 3.19

Транспортная таблица

| Лесопункты | Наименование продукта | Мощности | Потребности | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $B_1$ (внутри предприятия) | | $B_2$ – поставки за пределы предприятия | | | $B_3$ (топл.) | $B_4$ – фиктивные | | |
| | | | $B_1^1$ – пиловочник | $B_1^2$ – дрова | $B_2^1$ – пиловочник | $B_2^2$ – дрова | $B_2^3$ – техн. сырье | $B_3$ | $B_4^1$ – пиловочник | $B_4^2$ – дрова | $B_4^3$ – техн. сырье |
| | | | $b_1^1=14$ | $b_1^2=20$ | $b_2^1=60$ | $b_2^2=20$ | $b_2^3=15$ | $b_3=15$ | $b_4^1=16$ | $b_4^2=20$ | $b_4^3=10$ |
| $Л_1$ | $Л_1^{11}$ – пиловочник | 50 | 25 | M | 25 | M | M | M | M | M | M |
| | $Л_1^{12}$ – дрова | 35 | M | 3 | M | 3 | M | 3 | M | M | M |
| | $Л_1^{13}$ – техн. сырье | 10 | M | M | M | M | 6 | M | M | M | M |
| | $Л_1^{21}$ – пиловочник | 60 – 50= =10 | 25 | M | 25 | M | M | M | 0 | M | M |
| | $Л_1^{22}$ – дрова | 50 – 35= =15 | M | 3 | M | 3 | M | 3 | M | 0 | M |
| | $Л_1^{23}$ – техн. сырье | 15 – 10= =5 | M | M | M | M | 6 | M | M | M | 0 |
| $Л_2$ | $Л_2^{11}$ – пиловочник | 23 | M | M | 23+4 | M | M | M | M | M | M |
| | $Л_2^{12}$ – дрова | 15 | M | M | M | 7+4 | M | 7+4 | M | M | M |
| | $Л_2^{13}$ – техн. сырье | 4 | M | M | M | M | 10+4 | M | M | M | M |
| | $Л_2^{21}$ – пиловочник | 30 – 23= =7 | M | M | 23+4 | M | M | M | 0 | M | M |
| | $Л_2^{22}$ – дрова | 25 –15= =10 | M | M | M | 7+4 | M | 7+4 | M | 0 | M |
| | $Л_2^{23}$ – техн. сырье | 10 – 4 = 6 | M | M | M | M | 10+4 | M | M | M | 0 |

Тарифы полагаются равными некоторой большой величине *M*, когда вид продукции, производимый в пункте производства, непригоден в пункте потребления. В остальных случаях данные берутся из условия. Затраты на «поставку» сырья от любого из «поставщиков» фиктивному «потребителю» принимаются равными нулю не для всех пунктов производства, а лишь для тех, по которым объем производства равен разности между установленными верхними и нижними границами объема производства. В этом случае поставки фиктивному потребителю будут характеризовать излишки производственных мощностей.

Транспортная таблица составлена. Далее задачу можно решать по таблице, а можно воспользоваться тем фактом, что при переработке сортименты не перемешиваются и поэтому исходную задачу можно разбить на три транспортные задачи (по количеству сортиментов) меньшего размера (табл. 3.20–3.22).

Таблица 3.20

Пиловочник

| Лесопункты | | Мощности | Потребности | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $b_1^1 = 14$ | $b_2^1 = 60$ | $b_4^1 = 14$ |
| Л₁ | $Л_1^{11}$ | 50 | 25 | 25 | M |
| | $Л_1^{21}$ | 10 | 25 | 25 | 0 |
| Л₂ | $Л_2^{11}$ | 23 | M | 27 | M |
| | $Л_2^{21}$ | 7 | M | 27 | 0 |

Таблица 3.21

Дрова

| Лесопункты | | Мощности | Потребности | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $b_1^2 = 20$ | $b_2^2 = 20$ | $b_3 = 15$ | $b_4^2 = 20$ |
| Л₁ | $Л_1^{11}$ | 35 | 3 | 3 | 3 | M |
| | $Л_1^{21}$ | 15 | 3 | 3 | 3 | 0 |
| Л₂ | $Л_2^{11}$ | 15 | M | 11 | 11 | M |
| | $Л_2^{21}$ | 10 | M | 11 | 11 | 0 |

Таблица 3.22

Техническое сырье

| Лесопункты | | Мощности | Потребности | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $b_2^3 = 15$ | $b_4^3 = 10$ |
| Л₁ | $Л_1^{11}$ | 10 | 6 | M |
| | $Л_1^{21}$ | 5 | 6 | 0 |
| Л₂ | $Л_2^{11}$ | 4 | 14 | M |
| | $Л_2^{21}$ | 6 | 14 | 0 |

Получим три транспортные задачи закрытого типа (необходимо проверить, что эти задачи закрытого типа). Решая задачи, представленные в таблицах, находим

$$X_{\text{пил}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}13&37&0\\1&0&9\\0&23&0\\0&0&7\end{pmatrix},\quad X_{\text{др}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}15&5&15&0\\5&0&0&10\\0&15&0&0\\0&0&0&10\end{pmatrix},\quad X_{\text{техн. с}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}10&0\\1&4\\4&0\\0&6\end{pmatrix}.$$

Значения целевых функций $F(x_{ij}^{k})$: $F(X_{\text{пил}}^{\text{опт}})=1896$, $F(X_{\text{др}}^{\text{опт}})=285$, $F(X_{\text{техн. с}}^{\text{опт}})=122$, что дает в сумме 2303 и совпадает с решением многопродуктовой задачи.

Объединяя объемы перевозок по каждому лесопункту, получаем

$$X_{\text{пил}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}14&37&9\\0&23&7\end{pmatrix},\quad X_{\text{др}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}20&5&15&10\\0&15&0&10\end{pmatrix},\quad X_{\text{техн. с}}^{\text{опт}}=\begin{pmatrix}11&4\\4&6\end{pmatrix}.$$

Полученное решение говорит о том, что мощность первого лесопункта по пиловочнику должна быть равна 14 + 37 = 51 тыс. $\text{м}^3$, из них 14 тыс. $\text{м}^3$ перерабатывается внутри предприятия, а 37 тыс. $\text{м}^3$ поставляется на сторону. Резервы производственной мощности для первого лесопункта составляют 9 тыс. $\text{м}^3$.

Аналогичные выводы следует сделать по второму лесопункту и по остальным сортиментам: по техническому сырью и дровам.

### 3.8. Двухэтапная транспортная задача

Ранее была рассмотрена модель с промежуточными пунктами. Частным случаем такой ситуации является двухэтапная транспортная задача. Особенностью рассматриваемой модели является наличие ограничений на пропускную способность баз.

Допустим, имеется $m$, $i=\overline{1,m}$, пунктов производства, $n$, $j=\overline{1,n}$, пунктов потребления и $p$, $k=\overline{1,p}$, промежуточных баз. Как и в обычной транспортной задаче, обозначим через $a_i$, $b_j$ соответственно объемы поставок и потребления. Пусть $d_k$ – мощность $k$-й базы, $c_{ik}$ и $c_{kj}$ – соответственно стоимость перевозки единицы продукции от поставщиков на базы и с баз к потребителям. Тогда модель задачи примет вид

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}c_{ik}x_{ik}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_{kj}\to\min$$

при ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik} \le a_i\,,\ i=\overline{1,m}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k\,,\ k=\overline{1,p}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kj} \ge b_j\,,\ j=\overline{1,n}\,,$$

$$x_{ik} \ge 0\,,\ x_{kj} \ge 0\,.$$

Если суммарная пропускная мощность баз равна суммарной мощности поставщиков и суммарному спросу потребителей, т. е.

$$\sum_{k=1}^{p} d_k = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,,$$

то пропускные емкости баз будут использованы полностью и, следовательно, схема перевозок с баз к потребителям не зависит от схемы перевозок от поставщиков на базы. В таких условиях задачу можно решать по частям. Оптимальный план можно составить объединением плана поставок от поставщиков к базам и плана поставок с баз к потребителям. Однако оптимальный план двухэтапной транспортной задачи, вообще говоря, отличен от плана, полученного объединением оптимальных планов решения транспортной задачи для каждого этапа в отдельности.

Двухэтапную транспортную задачу легко свести к классической транспортной задаче. Для этого базы будем считать одновременно поставщиками и потребителями. Для каждой базы в расширенной матрице (поставщики+базы) – (потребители+базы) отведем строку и столбец. Тогда матрица тарифов будет состоять из четырех блоков (табл. 3.23).

Таблица 3.23

Матрица тарифов

<table>
<tr><td></td><td>$d_1$</td><td>…</td><td>$d_p$</td><td>$b_1$</td><td>…</td><td>$b_n$</td></tr>
<tr><td>$a_1$</td><td colspan="3" rowspan="3">**I**<br>$(c_{ik})_{m\times p}$</td><td colspan="3" rowspan="3">**II**<br>M</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$a_m$</td></tr>
<tr><td>$d_1$</td><td>0</td><td>**III**</td><td>M</td><td colspan="3" rowspan="3">**IV**<br>$(c_{kj})_{p\times n}$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>…</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$d_p$</td><td>M</td><td>…</td><td>0</td></tr>
</table>

В блоке I будем отражать связи поставщиков с базами, в блоке IV – связи баз с потребителями, в блоке II – связи поставщиков с потребителями. Поскольку по условию задачи непосредственные перевозки от поставщиков к потребителям запрещены, то в этом блоке все тарифы считают равными М (где М – большое число). Блок III образуют строки и столбцы баз, он имеет форму квадрата. Так как перевозки между базами запрещаются, то соответствующие показатели также считают равными М. В клетках третьего квадрата, в которых отражаются связи внутри базы, тарифы равны нулю. Поставки в этих клетках показывают величину неиспользованной мощности базы. Диагональ из нулевых тарифов, отражающая связи внутри базы, называется *фиктивной.*

Решение двухэтапной транспортной задачи имеет некоторые особенности. Основная из них – некоторое изменение нахождения базисного решения. Вначале необходимо распределить поставки в одном из блоков (первом или четвертом). Затем заполняется фиктивная диагональ и только потом распределяются поставки в другом блоке (четвертом или первом). Вторая особенность заключается в том, что если цикл пересчета проходит через фиктивную диагональ, то он обязательно проходит через нее дважды; одна вершина цикла, находящаяся на диагонали, будет всегда положительной, а другая – отрицательной.

**Пример (двухэтапная транспортная задача).** В некотором районе имеется два маслодельных завода $A_1$, $A_2$. Сливочное масло поступает сначала в холодильники $D_1$, $D_2$, $D_3$, а из них – в пункты потребления $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Возможности маслодельных заводов, мощность холодильников, запросы потребителей и соответствующие тарифы представлены в табл. 3.24

Таблица 3.24

Данные двухэтапной транспортной задачи

| Поставки производства, $a_i$, т | Объем потребления, $b_j$, т | Пропускная способность базы, $d_k$, т | Тариф, $c_{ik}$ | Тариф, $c_{kj}$ |
|---|---|---|---|---|
| 350<br>450 | 150<br>250<br>175<br>225 | 240<br>500<br>260 | 20, 23, 16<br>15, 10, 24 | 12, 19, 20, 13<br>10, 15, 14, 12<br>16, 21, 25, 11 |

***Решение.*** Так как $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 800$, можно решать двухэтапную ТЗ (табл. 3.25) (при $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ следует ввести фиктивного поставщика или фиктивного потребителя).

Начальный опорный план, приведенный в табл. 3.25, найден способом минимального элемента, причем распределение начато с четвертого блока. Затем заполнялась фиктивная диагональ и, наконец, первый блок.

Таблица 3.25

Начальный опорный план

| | 240 | 500 | 260 | 150 | 250 | 175 | 225 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 350 | 20<br>**75** | 23<br>**50** | 16<br>**225** | M | M | M | M |
| 450 | 15 | 10<br>**450** | 24 | M | M | M | M |
| 240 | 0<br>**165** | M | M | 12 | 19<br>**75** | 20 | 13 |
| 500 | M | 0 | M | 10<br>**150** | 15<br>**175** | 14<br>**175** | 12 |
| 260 | M | M | 0<br>**35** | 16 | 21 | 25 | 11<br>**225** |

Оптимальный план (не единственный) представлен в табл. 3.26: $z_{\min} = 10\ 600{+}10\ 425{=}21\ 025$ руб. Интересно отметить, что если решать задачу в два этапа, т. е. находить сначала оптимальный план прикрепления поставщиков к холодильникам, а затем задачу оптимального прикрепления холодильников к потребителям, то суммарные потери составят $z_{\min} = 10\ 460{+}14\ 810{=}25\ 270$ руб., т. е. возрастут, хотя на первом этапе издержки уменьшатся.

Таблица 3.26

Оптимальный план

| | 240 | 500 | 260 | 150 | 250 | 175 | 225 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 350 | 20<br>**125** | 23 | 16<br>**225** | M | M | M | M |
| 450 | 15 | 10<br>**450** | 24 | M | M | M | M |
| 240 | 0<br>**115** | M | M | 12<br>**125** | 19 | 20 | 13 |
| 500 | M | 0<br>**50** | M | 10<br>**25** | 15<br>**250** | 14<br>**175** | 12 |
| 260 | M | M | 0<br>**35** | 16 | 21 | 25 | 11<br>**225** |

**Пример (двухэтапная транспортная задача в Excel).** В некотором районе имеются $m$, $i = \overline{1,m}$, заводов $A_i$, мощности которых $a_i$. Продукция заводов поступает сначала на промежуточные базы $D_r$, $r = \overline{1,q}$, пропускная способность которых $d_r$, а затем $n$, $j = \overline{1,n}$, потребителям $B_j$ с потребностями $b_j$. Возможности заводов, мощности промежуточных баз, запросы потребителей и стоимости перевозок единицы продукции от заводов на базы $c_{ir}$ и с баз к потребителям $t_{rj}$ представлены в табл. 3.27

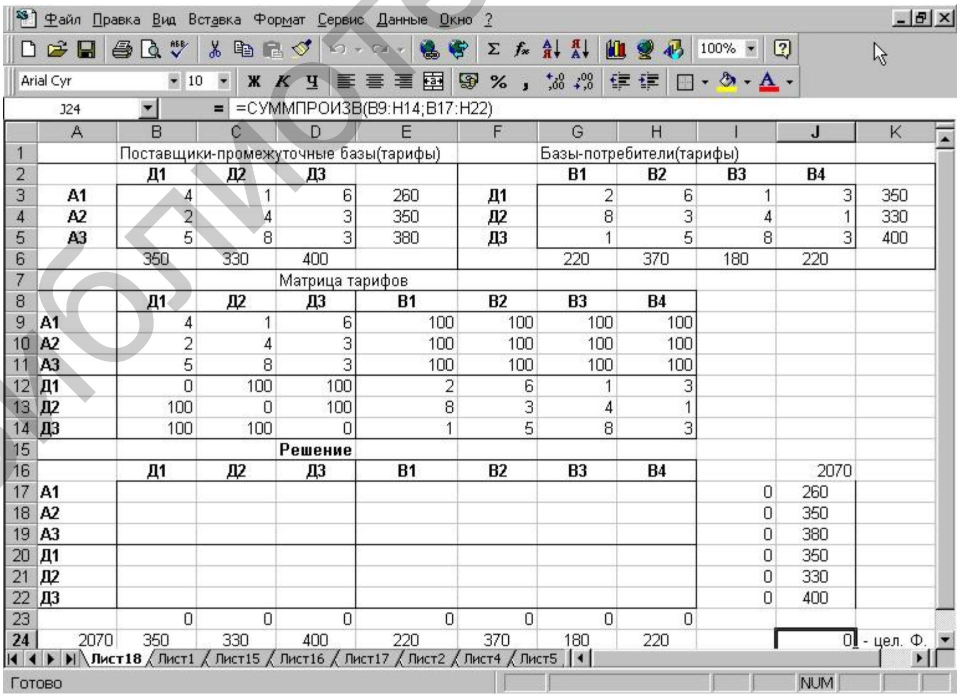
Таблица 3.27

Исходные данные задачи

| Объем поставок, $a_i$, т | Объем потребления, $b_j$, т | Пропускная способность промежуточных пунктов (базы), $d_r$, т | Стоимость перевозки единицы продукции | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $c_{ir}$, ден. ед. | $t_{rj}$, ден. ед. |
| 260 | 220 | 350 | 4, 1, 6 | 2, 6, 1, 3 |
| 350 | 370 | 330 | 2, 4, 3 | 8, 3, 4, 1 |
| 380 | 180 | 400 | 5, 8, 3 | 1, 5, 8, 3 |
| | 220 | | | |

Определить оптимальную схему прикрепления потребителей к перевалочным базам и перевалочных баз к поставщикам на основе решения двухэтапной транспортной задачи.

***Решение***. Так как выполняются необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи, т. е. $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j \le \sum_{r=1}^{3} d_r$, то можно приступать к решению задачи. Для решения транспортной задачи с помощью команды **Поиск решения** следует ввести данные, как показано на рис. 3.5.



J24 =СУММПРОИЗВ(B9:H14;B17:H22)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Поставщики-промежуточные базы(тарифы) | | | | | Базы-потребители(тарифы) | | | | |
| 2 | | Д1 | Д2 | Д3 | | | В1 | В2 | В3 | В4 | |
| 3 | А1 | 4 | 1 | 6 | 260 | Д1 | 2 | 6 | 1 | 3 | 350 |
| 4 | А2 | 2 | 4 | 3 | 350 | Д2 | 8 | 3 | 4 | 1 | 330 |
| 5 | А3 | 5 | 8 | 3 | 380 | Д3 | 1 | 5 | 8 | 3 | 400 |
| 6 | | 350 | 330 | 400 | | | 220 | 370 | 180 | 220 | |
| 7 | | | | Матрица тарифов | | | | | | | |
| 8 | | Д1 | Д2 | Д3 | В1 | В2 | В3 | В4 | | | |
| 9 | А1 | 4 | 1 | 6 | 100 | 100 | 100 | 100 | | | |
| 10 | А2 | 2 | 4 | 3 | 100 | 100 | 100 | 100 | | | |
| 11 | А3 | 5 | 8 | 3 | 100 | 100 | 100 | 100 | | | |
| 12 | Д1 | 0 | 100 | 100 | 2 | 6 | 1 | 3 | | | |
| 13 | Д2 | 100 | 0 | 100 | 8 | 3 | 4 | 1 | | | |
| 14 | Д3 | 100 | 100 | 0 | 1 | 5 | 8 | 3 | | | |
| 15 | | | | Решение | | | | | | | |
| 16 | | Д1 | Д2 | Д3 | В1 | В2 | В3 | В4 | | 2070 | |
| 17 | А1 | | | | | | | | 0 | 260 | |
| 18 | А2 | | | | | | | | 0 | 350 | |
| 19 | А3 | | | | | | | | 0 | 380 | |
| 20 | Д1 | | | | | | | | 0 | 350 | |
| 21 | Д2 | | | | | | | | 0 | 330 | |
| 22 | Д3 | | | | | | | | 0 | 400 | |
| 23 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 24 | 2070 | 350 | 330 | 400 | 220 | 370 | 180 | 220 | | 0 | - цел. Ф. |

Рис. 3.5. Ввод данных

В ячейки B9:H14 вводится стоимость перевозок.

Ячейки B17:H22 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестных, после решения здесь появится оптимальное решение.

В ячейки J17:J22 введены объемы производства, а в ячейки B24: H24 – объемы спроса.

В ячейку J24 вводится целевая функция, в ячейку I17 – формула =СУММ(B17:H17), которая затем копируется в ячейки I18:I22. Формулы в указанных ячейках характеризуют объем производства.

В ячейку B23 вводится формула =СУММ(B17:B22), затем она копируется в ячейки C23:H23. Эти формулы определяют объем продукции, ввозимой в пункты потребления.

Далее выбираем **Поиск решения** и заполняем открывшееся диалоговое окно, т. е. вводим требуемые данные (рис. 3.6).

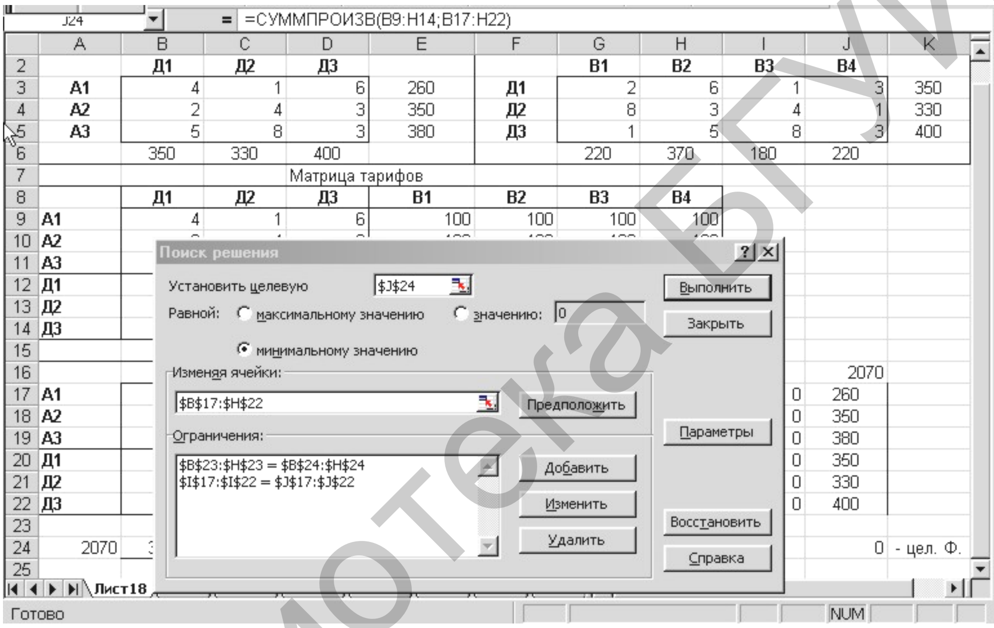



Рис. 3.6. Поиск решения

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** устаналиваем флажки: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование**.

После нажатия кнопки **Выполнить** получим оптимальный план поставок продукции и соответствуюшие ему транспортные расходы (рис. 3.7).

Усложним постановку задачи. Пусть требуется решить рассмотренную выше задачу с дополнительными ограничениями на перевозки: от второго производителя на первую базу может быть доставлено груза не более 100 ед., а от третьего производителя на первую базу должно быть доставлено не менее 150 ед. Решение задачи аналогично ранее рассмотренному.

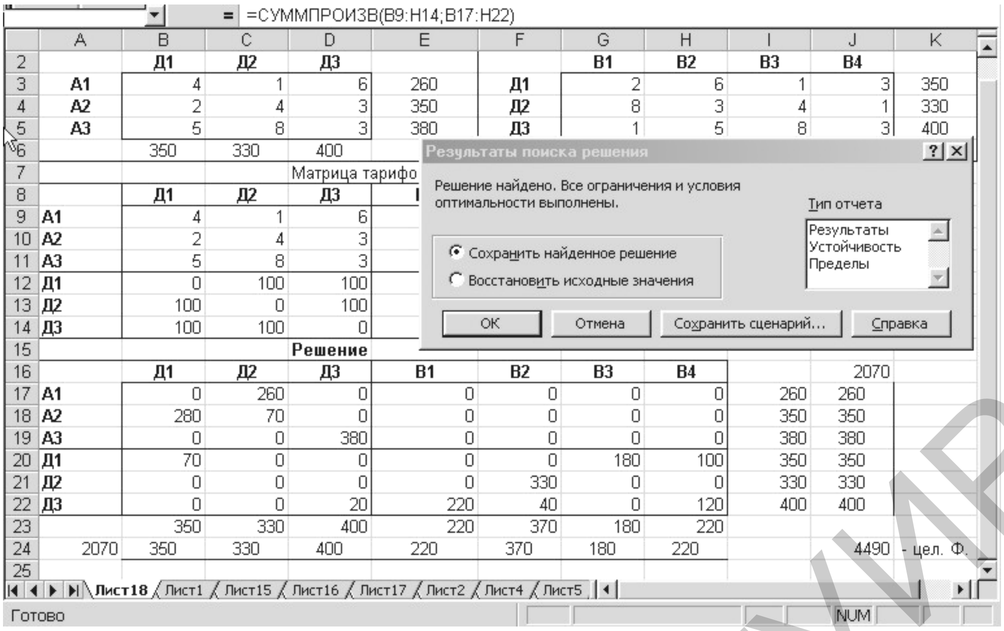



Рис. 3.7. Оптимальный план поставок

Указанные ограничения учитываются в компьютерной реализации на этапе ввода ограничений. Сначала вводим общие ограничения на перевозки (окно **Добавить ограничения**), а затем дополнительные ограничения (рис. 3.8).

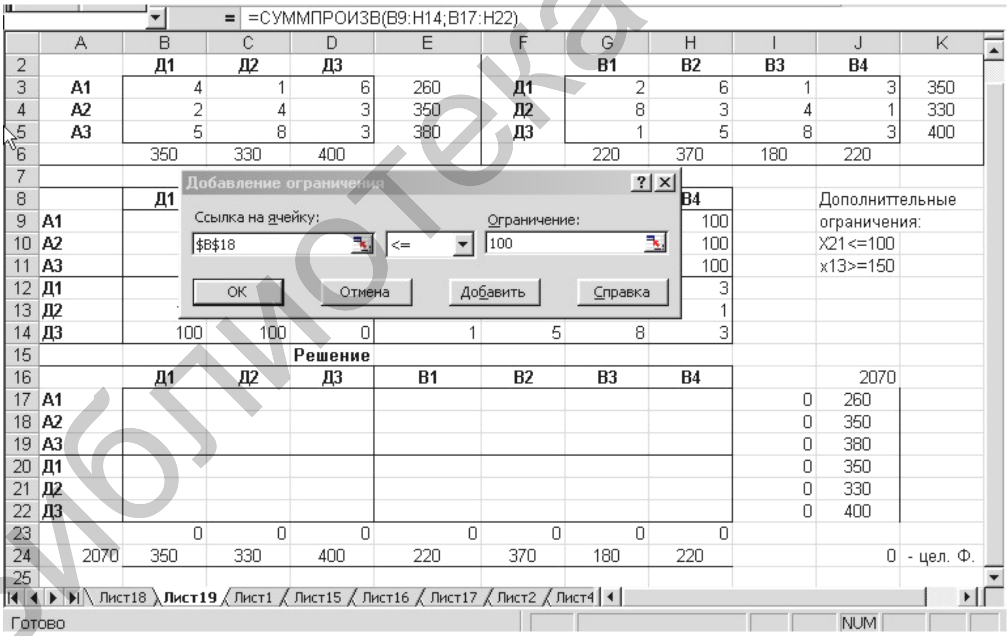
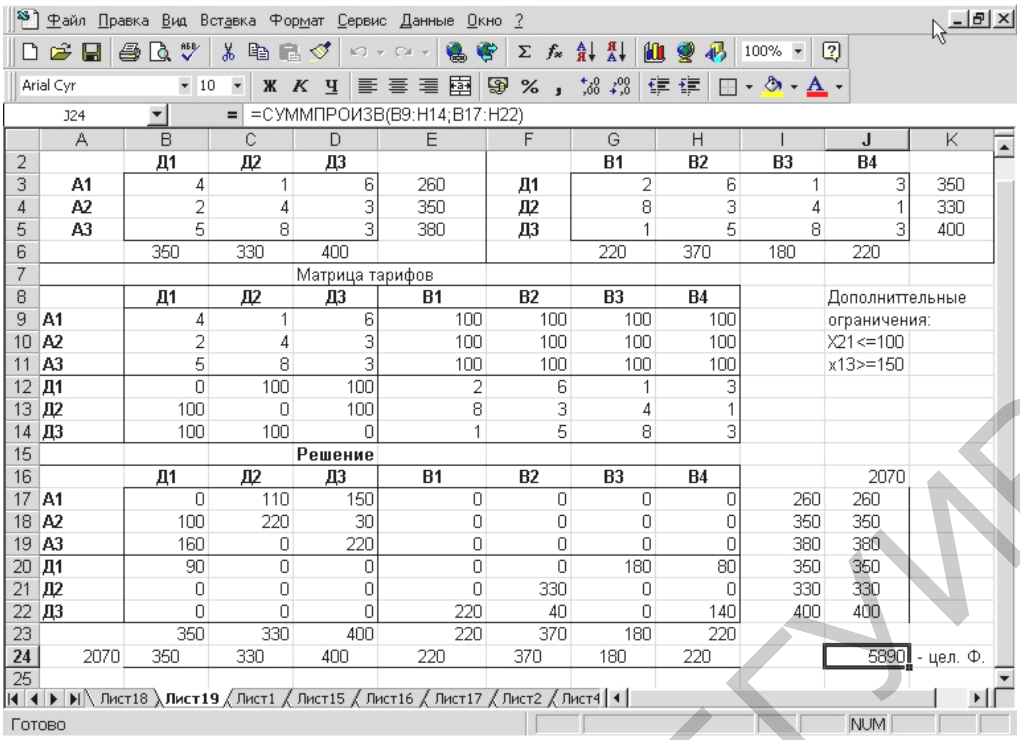



Рис. 3.8. Ввод ограничений

В результате решения получаем оптимальный план, представленный на рис. 3.9.



Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

Arial Cyr 10 100%

J24 = =СУММПРОИЗВ(B9:H14;B17:H22)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | Д1 | Д2 | Д3 | | | В1 | В2 | В3 | В4 | |
| 3 | А1 | 4 | 1 | 6 | 260 | Д1 | 2 | 6 | 1 | 3 | 350 |
| 4 | А2 | 2 | 4 | 3 | 350 | Д2 | 8 | 3 | 4 | 1 | 330 |
| 5 | А3 | 5 | 8 | 3 | 380 | Д3 | 1 | 5 | 8 | 3 | 400 |
| 6 | | 350 | 330 | 400 | | | 220 | 370 | 180 | 220 | |
| 7 | | | | Матрица тарифов | | | | | | | |
| 8 | | Д1 | Д2 | Д3 | В1 | В2 | В3 | В4 | | Дополниттельные | |
| 9 | А1 | 4 | 1 | 6 | 100 | 100 | 100 | 100 | | ограничения: | |
| 10 | А2 | 2 | 4 | 3 | 100 | 100 | 100 | 100 | | X21<=100 | |
| 11 | А3 | 5 | 8 | 3 | 100 | 100 | 100 | 100 | | x13>=150 | |
| 12 | Д1 | 0 | 100 | 100 | 2 | 6 | 1 | 3 | | | |
| 13 | Д2 | 100 | 0 | 100 | 8 | 3 | 4 | 1 | | | |
| 14 | Д3 | 100 | 100 | 0 | 1 | 5 | 8 | 3 | | | |
| 15 | | | | Решение | | | | | | | |
| 16 | | Д1 | Д2 | Д3 | В1 | В2 | В3 | В4 | | 2070 | |
| 17 | А1 | 0 | 110 | 150 | 0 | 0 | 0 | 0 | 260 | 260 | |
| 18 | А2 | 100 | 220 | 30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 350 | 350 | |
| 19 | А3 | 160 | 0 | 220 | 0 | 0 | 0 | 0 | 380 | 380 | |
| 20 | Д1 | 90 | 0 | 0 | 0 | 0 | 180 | 80 | 350 | 350 | |
| 21 | Д2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 330 | 0 | 0 | 330 | 330 | |
| 22 | Д3 | 0 | 0 | 0 | 220 | 40 | 0 | 140 | 400 | 400 | |
| 23 | | 350 | 330 | 400 | 220 | 370 | 180 | 220 | | | |
| 24 | 2070 | 350 | 330 | 400 | 220 | 370 | 180 | 220 | | 5890 | - цел. Ф. |
| 25 | | | | | | | | | | | |

Лист18 Лист19 Лист1 Лист15 Лист16 Лист17 Лист2 Лист4

Готово NUM

Рис. 3.9. Оптимальный план

## 3.9. Транспортные задачи с ограничениями или запрещениями перевозок

При нахождении решения ряда конкретных транспортных задач часто бывает необходимо учитывать дополнительные ограничения, которые не встречаются при рассмотрении простых вариантов транспортных задач. Остановимся подробнее на некоторых возможных усложнениях в постановках транспортных задач.

1. При некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта отправления $A_i$, $i=\overline{1,m}$, в пункт назначения $B_j$, $j=\overline{1,n}$, не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ является сколь угодно большой величиной $M$, и при этом условии известными методами находят решение новой транспортной задачи. При таком предположении исключается возможность при оптимальном плане транспортной задачи перевозить груз из пункта $A_i$ в пункт $B_j$. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называют *запрещением перевозок* или *блокированием* соответствующей клетки таблицы данных задачи.

2. В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из пункта отправления $A_i$ в пункт назначения $B_j$ требуется обязательно перевезти $d_{ij}$ единиц груза. Тогда в клетку таблицы данных транспортной задачи, находящуюся на пересечении строки $A_i$ и столб-

ца $B_j$, записывают указанное число $d_{ij}$ и в дальнейшем эту клетку считают *свободной* со сколь угодно большим тарифом перевозок $M$. Для полученной таким образом новой транспортной задачи находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

3. Пусть при решении транспортной задачи требуется ограничить перевозки от поставщика с номером $l$ к потребителю с номером $k$. Возможны ограничения двух типов: 1) $x_{lk} \geq a$; 2) $x_{lk} \leq b$, где $a$ и $b$ – постоянные величины.

1) Если $x_{lk} \geq a$, то необходимо прежде, чем решать задачу, сократить (уменьшить) запасы $l$-го поставщика и запросы $k$-го потребителя на величину $a$ (зарезервировать перевозку $x_{lk} = a$). После решения задачи в оптимальном решении следует увеличить объем перевозки $x_{lk}$ на величину $a$.

2) Если $x_{lk} \leq b$, то необходимо вместо $k$-го потребителя с запросами $b_k$ ввести двух других потребителей. Один из них с номером $k$ должен иметь запросы $b_k^{'} = b$, а другой с номером $n+1$ – запросы $b_{n+1} = b_k - b$. Стоимости перевозок для этих потребителей остаются прежними, за исключением стоимости $c_{l(n+1)}$, которая принимается равной сколь угодно большому числу $M$. После получения оптимального решения величины грузов, перевозимых к $(n+1)$-му потребителю, прибавляются к величинам перевозок $k$-го потребителя. Так как $c_{l(n+1)} = M$ – самая большая стоимость перевозки, то в оптимальном решении клетка с номером $(l, n+1)$ останется пустой, $x_{l(n+1)} = 0$ и объем перевозки $x_{lk}$ не превзойдет $b$.

**Пример (транспортная задача с ограничениями перевозок).** Решить транспортную задачу, исходные данные которой приведены в табл. 3.28, при дополнительных условиях: объем перевозки груза от первого поставщика второму потребителю должен быть не менее 100 ед. ($x_{12} \geq 100$), а от третьего первому не более 200 ед. $(x_{31} \leq 200)$.

Таблица 3.28

Исходные данные примера

| $a_i$ \ $b_j$ | 500 | 400 | 300 |
|---|---|---|---|
| 200 | 1 | 5 | 6 |
| 300 | 2 | 6 | 7 |
| 500 | 3 | 7 | 8 |

***Решение.*** Для того чтобы в оптимальном решении объем перевозки $x_{12}$ был не менее 100 ед., при решении задачи будем предполагать, что запасы первого поставщика $a_1$ и запросы второго потребителя $b_2$ меньше фактических на

100 ед. После получения оптимального решения объем перевозки $x_{12}$ увеличим на 100 ед.

Для того чтобы удовлетворить требованию $x_{31} \le 200$, вместо первого потребителя введем двух других. Один из них под прежним первым номером имеет запросы $b_1 = 200$ ед. и прежние стоимости перевозок единиц груза. Другому присвоим четвертый номер. Его запросы равны $b_4 = 500 - 200 = 300$ ед. и стоимости перевозок единиц груза те же, что и у первого потребителя, за исключением $c_{34}$, которую примем равной сколь угодно большому числу $M$, т. е. $c_{34} = M$. После нахождения оптимального решения задачи объемы перевозок для четвертого потребителя необходимо прибавить к соответствующим объемам перевозок для первого потребителя.

В результате указанных преобразований таблица исходных данных задачи будет иметь вид, представленный в табл. 3.29

Таблица 3.29

Преобразованная таблица исходных данных

| $a_i$ \ $b_j$ | 200 | 300 | 300 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 1 | 5 | 6 | 1 |
| 300 | 2 | 6 | 7 | 2 |
| 500 | 3 | 7 | 8 | M |

Далее проверяем выполнение необходимого и достаточного условия существования решения задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и запросы потребителей:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 100 + 300 + 500 = 900,$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 200 + 300 + 300 + 300 = 1100.$$

Имеем открытую транспортную задачу. Вводим фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 900 = 200$ (табл. 3.30).

Таблица 3.30

Ввод фиктивного поставщика

| $a_i$ \ $b_j$ | 200 | 300 | 300 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 1 | 5 | 6 | 1 |
| 300 | 2 | 6 | 7 | 2 |
| 500 | 3 | 7 | 8 | M |
| 200 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Полученную задачу решаем методом потенциалов.

Последняя таблица имеет вид, представленный в табл. 3.31.

Таблица 3.31

Последняя расчетная таблица

| $a_i$ \ $b_j$ | 200 | 300 | 300 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 1 **100** | 5 | 6 | 1 |
| 300 | 2 **0** | 6 | 7 | 2 **300** |
| 500 | 3 **100** | 7 **300** | 8 **100** | M |
| 200 | 0 | 0 | 0 **200** | 0 |

Решение оптимальное, т. к. все оценки неположительные. Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем перевозки $x_{12}$ на 100 ед. и объединим объемы перевозок четвертого потребителя с объемами перевозок первого потребителя.

Получим

$$X^* = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}.$$

Вычислим значение целевой функции на этом решении:

$$Z(X^*) = 100 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 300 \cdot 7 + 100 \cdot 8 = 4400\,.$$

Заметим, что т. к. имеются нулевые оценки свободных клеток, найденное решение не является единственным. Загружая любую из свободных клеток с нулевой оценкой, получим другое оптимальное решение, причем значение целевой функции на новом решении останется тем же.

*Ответ*. $Z_{\min} = 4400$ при $X^* = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 100 & 300 & 100 \end{pmatrix}$.

## 3.10. Оптимальные назначения

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении других задач, например:

- сокращение производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции (может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из отдаленного источника, но при меньшей себестоимости);

- увеличение производительности автомобильного транспорта за счет минимизации порожнего пробега;

- оптимальное распределение посевных площадей между сельхозкультурами;

- оптимальные назначения.

Разберем подробнее последний случай. Пусть имеются $m$ лиц $A_i$, $i=\overline{1,m}$, которые могут выполнять $B_j$, $j=\overline{1,m}$, различных работ. Известна производительность $c_{ij}$ $i$-го лица при выполнении $j$-й работы. Необходимо определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности при условии, что каждое лицо может быть назначено только на одну работу.

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\max$$

при ограничениях

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1, & i=\overline{1,m},\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1, & j=\overline{1,m},\end{cases}\qquad x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}.$$

Умножая функцию $f$ на $-1$, приводим задачу к транспортной, в которой объем запасов каждого поставщика и объем потребностей каждого потребителя равны единице.

Приведенная задача допускает следующее обобщение: имеется $m$ групп лиц $A_i$, $i=\overline{1,m}$, по $a_i$ человек в каждой и $n$ категорий работ $B_j$, $j=\overline{1,n}$, по $b_j$ единиц в каждой. Известна производительность $c_{ij}$ лица $i$-й группы при выполнении $j$-й категории работ. Необходимо определить сколько лиц, из какой группы и на какую категорию работ назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности.

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\max$$

при ограничениях

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, & i=\overline{1,m},\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=\overline{1,n},\end{cases}\qquad x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

В задаче общее число работ равно общему числу лиц, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивную группу лиц, содержащую $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ человек; если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то используют фиктивную категорию работ, состоящую из $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ единиц.

# 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ИГР

## 4.1. Описание постановки задачи

В процессе целенаправленной человеческой деятельности возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (участников, групп, сторон) либо прямо противоположны (антагонистичны), либо, не будучи непримиримыми, все же не совпадают. Примерами таких ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные учения, борьба между блоками избирателей за своих кандидатов, в международных отношениях – отстаивание интересов своего государства и т. д. Здесь каждый из участников сознательно стремится добиться наилучшего результата за счет другого участника. Подобного рода ситуации встречаются в различных сферах деятельности.

Для приведенных ситуаций (они называются конфликтными) характерно, что эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, существенно зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, т. к. и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности. Так, при определении объема выпуска продукции на одном предприятии нельзя не учитывать размеров выпуска аналогичной продукции на других предприятиях. В реальных условиях нередко возникают ситуации, в которых антагонизм отсутствует, но существуют противоположные тенденции. Например, для нормального функционирования производства, с одной стороны, необходимо наличие запасов разнообразных ресурсов, но с другой – стремление к чрезвычайному увеличению этих запасов вызывает дополнительные затраты по их содержанию и хранению. В приведенных примерах конфликтные ситуации возникают в результате сознательной деятельности людей. Однако на практике встречаются неопределенности, которые порождаются не сознательным противодействием другой стороны, а недостаточной информированностью об условиях проведения планируемой операции.

Раздел математики, изучающий конфликтные ситуации на основе их математических моделей, называется теорией игр. Таким образом, *теория игр* – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т. е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наилучший результат. Игровую схему можно придать многим практическим ситуациям. Выигрышем могут быть эффективность использования дефицитных ресурсов и производственных фондов, величина прибыли, себестоимость и т. д. Возникновение теории игр относится к 1944 г., когда вышла монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», содержащая в основном практические примеры. В настоящее время теория игр бурно развивается.

Методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к конфликтным ситуациям, которые обладают свойством *многократной повторяемости*. Если конфликтная ситуация реализуется однократно или ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Чтобы проанализировать конфликтную ситуацию по математической модели, ее необходимо упростить, учитывая лишь важнейшие факторы, существенно влияющие на ход конфликта. Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам. Поэтому можно сказать, что *игра* – это совокупность правил, определяющих возможные действия (чистые стратегии) участников игры. Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший исход. *Исход игры* – это значение некоторой функции, которая называется *функцией выигрыша* (*платежной функцией*). Она может задаваться либо аналитическим выражением, либо таблично (матрицей). Далее будем рассматривать только такие игры, в которых выигрыш выражается количественно: стоимостью, баллами и т. д.

Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком. *Стратегия* – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры. *Оптимальной стратегией* называется стратегия, которая обеспечивает игроку наилучший результат. Причем предполагается, что противник столь же разумен, как и игрок, и делает все, чтобы добиться своей цели.

В реальных конфликтах можно прогнозировать образ мышления и вероятное поведение противника, что является предметом теории рефлексивных игр. Предположение о разумности противника позволяет найти наиболее осторожную стратегию, без учета которой вряд ли стоит принимать окончательное решение.

Всякая игра состоит из отдельных партий. *Партией* называют каждый вариант реализации игры. В свою очередь, в партии игроки совершают конкретные ходы. *Ход* – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения. Ходы бывают *личные* и *случайные*. При личном ходе игрок самостоятельно и осознанно выбирает и реализует ту или иную *чистую стратегию*. Например, в шахматах каждый ход является личным. При случайном ходе выбор стратегии производится с использованием какого-либо механизма случайного выбора, например с применением генератора случайных чисел.

Классифицировать игры можно по разным признакам. Различают, например, игры по количеству игроков. В игре может участвовать любое конечное число игроков. Если при этом игроки объединяются, например, в две группы, преследующие противоположные цели, то имеет место игра двух «лиц» (*парная игра*). В зависимости от количества стратегий в игре они делятся на *конечные* и *бесконечные.* Примером игры с бесконечным числом стратегий может быть ситуация «продавец – покупатель», когда как цена, так и количество товара, могут быть названы любыми. В зависимости от взаимоотношений участников различают игры *бескоалиционные* (участники не имеют права заключать соглашения), или некооперативные, и *коалиционные*, или кооперативные. Примером может служить ситуация, когда несколько производителей одного товара могут воздействовать на его цену.

По характеру выигрышей игры делятся на игры *с нулевой* и *ненулевой* суммой. В первых – общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, в связи с чем сумма выигрышей равна нулю (проигрыш принимается как отрицательный выигрыш). Так как имеется прямой конфликт интересов, то их также называют *антагонистическими*. Однако если возникает новая стоимость, которую можно разделить между игроками, то это игра с ненулевой суммой, т. е. сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при проведении лотереи часть взноса участников идет организатору лотереи.

По виду функции выигрыша игры делятся на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и др. В *матричных* играх (при двух участниках) выигрыши первого игрока задаются матрицей, в *биматричных* – выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей. Другие типы таких игр различаются видом аналитического выражения платежной функции.

По количеству ходов игры делятся на *одноходовые* (выигрыш распределяется после одного хода каждого игрока) и *многоходовые* (выигрыш распределяется после нескольких ходов). Многоходовые игры, в свою очередь, делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные и др. В зависимости от объема имеющейся информации различают игры с *полной* и *неполной информацией.*

Игры, в которых участники стремятся добиться для себя наилучшего результата, сознательно выбирая допустимые правилами игры способы действий, называют *стратегическими.* Неопределенность может быть обусловлена как сознательным противодействием противника, так и неизвестными объективными обстоятельствами.

В экономической практике нередко приходится формализовать (моделировать) ситуации, придавая им игровую схему, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют *играми с природой*, понимая под термином «природа» всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку (его называют иногда «статистиком», а соответствующую игру – *статистической*) приходится принимать решение. Например, выбор агрономической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры в надежде получить в предстоящем году наилучший урожай; определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды и т. д. В таких играх в качестве второго игрока выступают: в первом примере – в буквальном смысле природа; во втором – уровень спроса; в третьем – размеры ожидаемой прибыли. В играх с природой степень неопределенности для сознательного игрока (статистика) возрастает: если в стратегических играх каждый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то в статистических играх «природа», являясь безразличной в отношении выигрыша инстанцией, может предпринимать и такие ответные действия (т. е. реализовать такие состояния), которые ей совершенно невыгодны, а выгодны сознательному игроку (статистику).

## 4.2. Матричные игры с нулевой суммой

Чтобы описать матричную игру с нулевой суммой, необходимо перечислить все возможные стратегии каждой из сторон и определить результат игры для каждой пары таких стратегий. Матричная игра $m \times n$ (с нулевой суммой) – это антагонистическая игра, в которой первый игрок ***A*** использует возможные стратегии $A_1$, $A_2$, …, $A_m$, а его противник (оппонент ***B***) – стратегии $B_1$, $B_2$, …, $B_n$. Если игрок ***A*** применит стратегию $A_i$, а оппонент – стратегию $B_j$, то плата $a_{ij}$ игры будет выигрышем игрока ***A*** (проигрышем ***B***) для $a_{ij} > 0$ и, таким образом, игра с нулевой суммой полностью описывается так называемой *платежной матрицей* игры (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Платежная матрица игры

| Игроки | Стратегии игрока ***B*** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***B*** / ***A*** | $B_1$ | … | $B_j$ | … | $B_n$ |
| Стратегии игрока ***A*** | $A_1$ | $a_{11}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ |
| | … | … | | | | |
| | $A_i$ | $a_{i1}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{in}$ |
| | … | … | | | | |
| | $A_m$ | $a_{m1}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ |

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары чистых стратегий $(A_i, B_j)$ единственным образом определяет исход (результат) игры. Если же в игре используются случайные ходы, то исход игры определяется средним значением (математическим ожиданием) выигрыша. Платежная матрица является табличной записью функции выигрыша. В теории матричных игр всегда предполагается, что в платежной матрице записаны выигрыши игрока ***A***.

## 4.3. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Целью участников любой матричной игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку ***A*** максимальный выигрыш, а игроку ***B*** минимальный проигрыш. Стратегию *игрока* ***A*** называют *оптимальной*, если при ее применении выигрыш игрока ***A*** не уменьшается, какими бы стратегиями ни пользовался игрок ***B***. *Оптимальной для игрока* ***B*** называют стратегию, при использовании которой проигрыш игрока ***B*** не увеличивается, какие бы стратегии ни применял игрок ***A***.

При поиске оптимальных стратегий игроки опираются на основной принцип теории игр – *принцип осторожности (принцип гарантированного результата, принцип максимина)*, в соответствии с которым каждый игрок, считая партнера по игре весьма разумным противником, выбирает свои действия в предположении о том, что соперник ни в коем случае не упустит ни единой возможности использовать любую его ошибку, любой промах в своих интересах. Поэтому игроки должны быть предельно внимательны при выборе каждой своей чистой стратегии.

Предположим, что игроку ***A*** надлежит сделать свой выбор. Анализируя платежную матрицу, он для каждой чистой стратегии $A_i$, $i=\overline{1,m}$, сначала найдет минимальное значение α ожидаемого выигрыша: $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, а затем из всех $\alpha_i$ выберет наибольшее $\alpha = \max_i \alpha_i$ и соответствующую ему чистую стратегию $A_i$. Это и будет наиболее предпочтительная (гарантирующая, «перестраховочная») в данных условиях стратегия игрока ***A***. Ее называют *максиминной,* поскольку она отвечает величине

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}.$$

Число $\alpha$ называется *нижней чистой ценой игры (максимином)*. Оно показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок ***A***, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока ***B***.

В свою очередь, игрок ***B***, стремясь минимизировать проигрыш, при выборе наиболее предпочтительной стратегии, используя принцип осторожности, выберет стратегию согласно условию

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}.$$

Ее называют *минимаксной.* Число β, определяемое по формуле, называется *верхней чистой ценой игры* (*минимаксом*), которая показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока ***B*** при правильном выборе им своих чистых стратегий независимо от действий игрока ***A***.

Таким образом, правильно используя чистые стратегии, игрок ***A*** обеспечит себе выигрыш не меньше α, а игрок ***B*** в результате правильного применения своих чистых стратегий не позволит игроку ***A*** выиграть больше, чем β.

Различают стратегии *чистые* и *смешанные.* Чистая стратегия $A_i$, $i=\overline{1,m}$, первого игрока (чистая стратегия $B_j$, $j=\overline{1,n}$, второго игрока) – это ход первого (второго) игрока, гарантированно выбранный им (вероятность этого равна единице).

Если первый игрок имеет *m* чистых стратегий, а второй – *n* чистых стратегий, то для любой пары стратегий первого и второго игроков чистые стратегии можно представить в виде единичных векторов.

Например, для пары стратегий $A_1$, $B_2$ чистые стратегии первого и второго игроков запишутся в виде $p_1$ =(1; 0; ...; 0), $q_2$ = (0; 1; 0; ...; 0).

Для пары стратегий $A_i$, $B_j$ чистые стратегии можно записать в виде

$$p_i = (0;\ \ ...;\ \ 0;\ \ 1;\ \ 0;\ \ ...;\ \ 0),$$

$i$ -е место

$$q_j = (0;\ \ ...;\ \ 0;\ \ 1;\ \ 0;\ \ ...;\ \ 0),$$

$j$ -е место

**Теорема.** *В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т. е.* $\alpha \le \beta$.

Действительно, $\alpha \le a_{ij} \le \beta$, где $i$ – номер строки, а $j$ – номер столбца, в которых получены $\alpha$ и $\beta$ соответственно.

Если для чистых стратегий $A_i$, $B_j$ игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно имеет место равенство $\alpha = \beta$, то используются следующие термины:

- пару чистых стратегий ($A_i$, $B_j$) называют *седловой точкой матричной игры;*

- элемент $a_{ij}$ матрицы, стоящий на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца, – *седловым элементом платежной матрицы;*

- число $v = \alpha = \beta$ – *чистой ценой игры.*

Ситуация, когда ни один из игроков не имеет разумных оснований для изменения своей стратегии, называется *ситуацией равновесия*.
Про игры с седловой точкой говорят, что они решаются в чистых стратегиях, т. к. последние полностью определяют рациональное поведение конфликтующих сторон. Например, если игра задана платежной матрицей, представленной в табл. 4.2, то для определения нижней и верхней чистой цены игры следует определить, какой выигрыш гарантирует игроку $\boldsymbol{A}$ каждая из стратегий при самых неблагоприятных действиях оппонента. Это означает, что в каждой строке нужно найти минимальное значение $a_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,4}$.

Таблица 4.2

Платежная матрица игры без седловой точки

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 4 |
| $A_2$ | 7 | 9 | 3 | –3 | 4 | 7 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| $A_4$ | 3 | 4 | 3 | 6 | –6 | 3 |

Поскольку оппонент может провести такой же анализ для выбора одной из стратегий $B_j$, $j=\overline{1,n}$, то в каждом столбце он будет искать максимально возможные значения выигрыша игрока $\boldsymbol{A}$: $b_j = \max_i a_{ij}$, $j=\overline{1,6}$. Дополняя платежную матрицу этими значениями, получим табл. 4.3.

Таблица 4.3

Расширенная платежная матрица игры без седловой точки

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 4 | **4** |
| $A_2$ | 7 | 9 | 3 | –3 | 4 | 7 | –3 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 1 |
| $A_4$ | 3 | 4 | 3 | 6 | –6 | 3 | –6 |
| $b_j$ | 7 | 9 | **5** | 6 | 6 | 7 | – |

Из табл. 4.3 видно, что выбор стратегии $A_1$ гарантирует игроку $\boldsymbol{A}$ выигрыш не менее 4 ед. при любой стратегии оппонента. Таким образом, $A_1$ – максиминная стратегия. Соответствующее ей значение 4 ед. есть нижняя цена игры.

Для оппонента стратегия $B_3$ минимизирует максимально возможный проигрыш и является минимаксной. Используя ее, оппонент не может проиграть больше верхней цены игры $\beta = \min_j \max_i \ a_{ij} = 5$. Для рассматриваемого примера $4 \le v \le 5$.

Для платежной матрицы, представленной в табл. 4.4, $A_2$ – максиминная стратегия, $B_3$ – минимаксная стратегия, следовательно, $\alpha = \beta = 2$ и $v = 2$.

Таблица 4.4

Платежная матрица игры с седловой точкой

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 1 |
| $A_2$ | 4 | 3 | **2** | 5 | 6 | **2** |
| $A_3$ | 7 | 4 | –3 | 4 | –1 | –3 |
| $b_j$ | 7 | 4 | **2** | 5 | 6 | – |

Особенность этого примера в том, что если оппонент придерживается стратегии $B_3$, то игроку $\boldsymbol{A}$ невыгодно использовать какую-либо стратегию, кроме $A_2$. Но если игрок $\boldsymbol{A}$ использует стратегию $A_2$, то оппоненту придется использовать $B_3$. Причина состоит в том, что выигрыш $a_{23} = 2$ одновременно является минимальным для максиминной стратегии $A_2$ и максимальным для минимаксной стратегии $B_3$. Это игра с седловой точкой $(A_2, B_3)$; стратегии сторон $A_2$, $B_3$, соответствующие этой точке, являются оптимальными чистыми стратегиями. Чистая цена игры равна $v = 2$.

Про игры с седловой точкой говорят, что они решаются в чистых стратегиях, т. к. последние полностью определяют рациональное поведение сторон. Платежная матрица может иметь несколько седловых точек. Так, в платежной матрице, представленной в табл. 4.5, есть две максиминные стратегии у игрока ***A*** – $A_1$ и $A_2$, а у оппонента – две минимаксные – $B_3$ и $B_5$. Каждой из четырех седловых точек соответствует одна и та же чистая цена игры $v = 2$.

Таблица 4.5

Платежная матрица с несколькими седловыми точками

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 7 | 2 | **2** | 4 | **2** | **2** |
| $A_2$ | 4 | 3 | **2** | 5 | **2** | **2** |
| $A_3$ | 3 | 4 | –3 | 4 | –1 | –3 |
| $b_j$ | 7 | 4 | **2** | 5 | **2** | |

В развернутой форме признак матричной игры с седловой точкой запишется в виде

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = a_{i_0 j_0}.$$

Седловой элемент является наименьшим в строке и наибольшим в столбце. Поэтому, если игрок ***B*** отклонится от своей минимаксной стратегии, его проигрыш может только увеличиться. Аналогично отклонение игрока ***A*** от своей максиминной стратегии ведет к уменьшению его выигрыша. Таким образом, наиболее предпочтительные стратегии в игре с седловой точкой обладают свойством устойчивости (создают ситуацию равновесия). Отсюда следует, что если в матрице игры существует седловой элемент, то наилучшими для игроков являются наиболее предпочтительные чистые стратегии.

Итак, если матричная игра имеет седловую точку, т. е. в платежной матрице присутствует элемент, который является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце, то она решается в чистых стратегиях: чистые стратегии, образующие седловую точку, и будут оптимальными, а решением игры считается тройка $\left\{A_i, B_j, v\right\}$.

### 4.4. Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Если игра имеет седловую точку, то оптимальными для игроков будут соответственно максиминная и минимаксная стратегии, а чистой ценой игры – седловой элемент платежной матрицы.

Проанализируем возможное поведение сторон на примере платежной матрицы без седловой точки (табл. 4.6).

Таблица 4.6

Платежная матрица

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 4 | **4** |
| $A_2$ | 7 | 9 | 3 | –3 | 4 | 7 | –3 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 1 |
| $A_4$ | 3 | 4 | 3 | 6 | –6 | 3 | –6 |
| $b_j$ | 7 | 9 | **5** | 6 | 6 | 7 | – |

Если игра проводится однократно и нет обоснованных предположений о действиях другой стороны, то игроку ***A*** логично использовать максиминную стратегию $A_1$, а оппоненту – минимаксную стратегию $B_3$. Но при многократном повторении игры оппонент, убедившись в предсказуемости поведения, может уменьшить свой проигрыш с 5 до 4, применив стратегию $B_1$. Игрок ***A*** может в ответ увеличить свой выигрыш до 7, применив стратегию $A_2$, которой оппонент может противопоставить $B_4$, и т. д.

Следовательно, надо определиться, во-первых, какие стратегии и как часто надо использовать, во-вторых, в каком порядке их чередовать. При этом оппонента нельзя недооценивать, значит, любой фиксированный порядок неприемлем, т. к. может быть разгадан. Выход в том, что каждой доступной стратегии можно приписать определенную вероятность ее использования, а сам выбор доверить случаю, т. е. использовать смешанные стратегии.

*Смешанной стратегией* первого ***A*** (второго ***B***) игрока называется вектор

$$p = (p_1, p_2, ..., p_m)\text{, где } p_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m}) \text{ и } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

$$(q = (q_1, q_2, ..., q_n)\text{, где } q_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \text{ и } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1),$$

где $p_i$ и $q_j$ – вероятности, с которыми игроки ***A*** и ***B*** выбирают свои чистые стратегии $A_i$ и $B_j$ в ходе игры.

Механизм случайного выбора чистых стратегий, которым пользуется игрок ***A***, обеспечивает ему бесконечное множество смешанных стратегий. Любая его чистая стратегия $A_i$ может рассматриваться как частный случай смешанной стратегии, *i*-я компонента которой равна единице, а остальные равны нулю. Аналогично для игрока ***B*.**

Поскольку игроки выбирают свои чистые стратегии случайно и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер и случайной становится величина выигрыша (проигрыша).

В таком случае средняя величина выигрыша (проигрыша) – математическое ожидание – является функцией смешанных стратегий *p*,*q*:

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j\,.$$

Функция $f(p,q)$ называется *платежной функцией* игры с матрицей $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Стратегии $p=(p_1,p_2,...,p_m)$, $q=(q_1,q_2,...,q_n)$ называются *оптимальными,* если для произвольных стратегий $p=(p_1,p_2,...,p_m)$, $q=(q_1,q_2,...,q_n)$ выполняется условие

$$f\left(p,q^*\right)\le f\left(p^*,q^*\right)\le f\left(p^*,q\right).$$

$(p^*, q^*)$ – является седловой точкой функции $f(p,q)$.

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии *p*, второму игроку – проигрыш, не больший, чем при использовании им любой другой стратегии *q*.

Значение платежной функции при оптимальных стратегиях определяет цену игры *v*, т. е. $f(p^*,q^*)=v$, причем $\alpha\le v\le\beta$. Совокупность *оптимальных стратегий* и *цены игры* составляет *решение игры*.

Если использовать смешанные стратегии, то для любой матричной игры можно найти оптимальные стратегии и цену игры. В этом состоит смысл следующей теоремы, которая в теории игр считается основной.

**Теорема**. В смешанных стратегиях любая конечная матричная игра имеет седловую точку, причем $\max\limits_p\min\limits_q f(p,q)=\max\limits_q\min\limits_p f(p,q)=f(p^*,q^*)$, где $p^*, q^*$ – оптимальные смешанные стратегии игроков ***A*** и ***B*** соответственно.

Предположим, что задана матричная игра и указаны некоторые смешанные стратегии *p** и *q** игроков и число *v*. Как проверить, будет ли набор {*p*; *q*; *v*} решением игры? Для ответа на этот вопрос требуется установить справедливость неравенства из определения оптимальных смешанных стратегий для любых стратегий. Но поскольку различных смешанных стратегий существует бесконечное множество, то непосредственная проверка неравенства невозможна. Ответить на поставленный вопрос позволяет следующая теорема, которая имеет непосредственные практические приложения.

**Теорема.** Для того чтобы смешанные стратегии $p^*$ и $q^*$ были оптимальными для игроков ***A*** и ***B*** в игре с матрицей $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ с ценой *v*, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge v,\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v,\ j=\overline{1,n}.$$

Чтобы проверить, является ли набор {*p*; *q*; *v*} решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли *p* и *q* неравенствам теоремы и уравнениям

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

в которых все *p* и *q* неотрицательны.

Итак, теорема утверждает, что если игрок ***A*** применяет оптимальную смешанную стратегию *p**, а игрок ***B*** – любую чистую стратегию, то выигрыш игрока ***A*** будет не меньше цены игры *v*; если игрок ***B*** использует оптимальную смешанную стратегию *q**, а игрок ***A*** – любую чистую стратегию, то проигрыш игрока ***B*** не превысит цены игры.

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями* игрока.

**Теорема.** Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Можно доказать, что число активных стратегий игроков не превышает наименьшего из чисел *m* и *n*.

Решение игры можно существенно упростить, если своевременно выявить имеющееся в платежной матрице доминирование одних стратегий над другими, т. к. это позволит предварительно сократить размерность матрицы.

В платежной матрице сравниваем элементы строк *s* и *t*, а именно $a_{sj}$ с элементами $a_{tj}$ для $j=\overline{1,n}$. Если $a_{sj} \ge a_{tj}$, $j=\overline{1,n}$, то выигрыш игрока ***A*** при стратегии $A_s$ будет больше, чем при стратегии $A_t$, какую бы чистую стратегию не применил игрок ***B***. В этом случае стратегия $A_s$ доминирует над стратегией $A_t$. Стратегию $A_s$ называют *доминирующей,* а стратегию $A_t$ – *доминируемой*.

Поскольку игрок ***B*** заинтересован в минимизации проигрыша, доминирующим будет столбец с наименьшими элементами. Например, сравниваем элементы $r$-го и $l$-го столбцов. Если все элементы $a_{ir} \ge a_{il}$, $i=\overline{1,m}$, то игроку ***B*** свой выбор выгодно сделать по $l$-му столбцу. В этом случае стратегия $B_l$ игрока ***B*** доминирует над стратегией $B_r$. Стратегия $B_l$ называется *доминирующей,* а стратегия $B_r$ – *доминируемой.*

Если в матричной игре имеем строки (столбцы) с одними и теми же элементами, то такие строки (столбцы), а соответственно и стратегии игроков ***A*** и ***B*** называются *дублирующими*.

В матричной игре доминируемые и дублирующие строки (столбцы) можно опускать, что не влияет на решение игры, но позволяет уменьшить размерность платежной матрицы.

Упрощение платежных матриц за счет исключения заведомо невыгодных игрокам чистых стратегий оправдано ввиду справедливости следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть $I$ – игра, в матрице которой $k$-я стратегия игрока ***A*** доминирует над $s$-й, а $I'$ – игра, матрица которой получена из матрицы игры $I$ исключением $s$-й строки, тогда:

а) цена игры $I'$ равна цене игры $I$;

б) оптимальная смешанная стратегия $q^* = (q_1, ..., q_n)$ игрока ***B*** в игре $I'$ является также его оптимальной смешанной стратегией и в игре $I$;

в) если $p^* = (p_1, ..., p_{s-1}, p_{s+1}, ..., p_m)$ оптимальная смешанная стратегия игрока ***A*** в игре $I'$, то его смешанная стратегия $p = (p_1 ,..., p_{s-1}, 0, p_{s+1}, ..., p_n)$ является оптимальной в игре $I$.

Если стратегия $A_s$ доминирует над стратегией $A_t$, то вероятность применения последней в оптимальной смешанной стратегии $p^*$ игрока ***A*** равна нулю, а поэтому $t$-ю строку из платежной матрицы можно исключить. Если $l$-я стратегия $B_l$ игрока ***B*** доминирует над $r$-й стратегией $B_r$, то $r$-й столбец из платежной матрицы можно исключить.

В случае необходимости платежную матрицу можно подвергать и другим преобразованиям, не меняющим вероятности активных стратегий игроков. Это вытекает из следующей теоремы.

**Теорема.** Оптимальные смешанные стратегии $p^*$ и $q^*$ соответственно игроков ***A*** и ***B*** в матричной игре $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ с ценой $v$ будут оптимальными и в матричной игре $\left[ba_{ij}+c\right]_{m\times n}$ с ценой $v' = bv + c$, где $b > 0$.

Можно упростить платежную матрицу, прибавляя, например, ко всем элементам достаточно большое положительное число, в результате чего можно получить новую матрицу с положительными (неотрицательными) элементами. Умножая элементы на подходящий положительный множитель, отличный от нуля, можно уменьшить (увеличить) элементы новой матрицы, что облегчает дальнейшие вычисления. При этом вероятности активных стратегий не меняются.

Так, разделив элементы матрицы

$$\begin{pmatrix} 400 & -300 \\ 200 & 600 \end{pmatrix}$$

на 100 (умножив на 0,01), а затем прибавив к элементам новой матрицы число 3, придем к матрице

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Работать с этой матрицей, конечно, проще, чем с исходной.

Поскольку оптимальные смешанные стратегии игроков в результате рассмотренных упрощений платежной матрицы не меняются, то все получаемые в процессе преобразований матрицы называют *стратегически эквивалентными*.

### 4.5. Непосредственное решение матричной игры

Если игра имеет седловую точку, то ее решение лежит в области чистых стратегий: оптимальными будут максиминная и минимаксная стратегии, а ценой игры – седловой элемент платежной матрицы.

Рассмотренная принципиальная схема определения оптимальных смешанных стратегий для игр без седловых точек, вытекающая из теоремы, предусматривает решение системы $m + n$ линейных неравенств и линейных уравнений при условии неотрицательности всех неизвестных $p$ и $q$. Однако этот путь нельзя признать рациональным, т. к. он связан с большим объемом вычислений, заметно увеличивающимся с ростом числа чистых стратегий участников игры.

Оказывается, *решение любой конечной матричной игры может быть сведено к решению двух взаимно двойственных задач линейного программирования*.

Исключение доминируемых стратегий может привести к потере некоторых решений; если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменяется.

#### 4.5.1. Решение игр 2×2. Сведение матричной игры к системе линейных алгебраических уравнений

Игра 2×2 является наиболее простым случаем конечных матричных игр. В этой игре каждый из игроков обладает только двумя стратегиями.

Рассмотрим матричную игру 2×2 (табл. 4.7).

Таблица 4.7

Платежная матрица

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Если игра 2×2 имеет седловую точку, то ее решение очевидно.

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальные смешанные стратегии игроков $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ и $q^* = (q_1^*, q_2^*)$, а также цену игры $v$.

Очевидно, что в игре 2×2, не имеющей седловой точки, обе стратегии игроков являются активными. Поэтому если игрок ***A*** будет применять свою оптимальную смешанную стратегию, то, независимо от действий игрока ***B***, выигрыш его будет равен цене игры $v$.

Игрок ***A*** будет применять стратегию $A_1$ с вероятностью $p_1$ и стратегию $A_2$ с вероятностью $p_2$. Если игрок ***B*** отвечает своей стратегией $B_1$, то выигрыш игрока ***A*** определяется из уравнения

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = v.$$

Если же игрок ***B*** будет применять стратегию $B_2$, то выигрыш игрока ***A*** не изменится и будет определяться равенством

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = v.$$

Учитывая условие $p_1 + p_2 = 1$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = v, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = v, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем оптимальное решение для игрока ***A***: $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ и цену игры $v$.

Аналогично определяется оптимальная стратегия игрока ***B*** из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = v, \\ a_{21} q_1 + a_{22} q_2 = v, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, матричная игра сведена к системе линейных уравнений.

### 4.5.2. Графическое решение игр вида 2×*n* и *m*×2

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет две стратегии. Рассмотрим игру 2×$n$, представленную в табл. 4.8.

Предполагаем, что игра не имеет седловой точки. Обозначим $p = p_1$ – вероятность применения первым игроком первой стратегии; $p_2$ – вероятность применения первым игроком второй стратегии, причем $p_2 = 1 - p$; $q_1$ – вероятность применения вторым игроком первой стратегии; $q_2$ – вероятность применения вторым игроком второй стратегии и т. д.; $q_n$ – вероятность применения вторым игроком *n*-й стратегии.

Таблица 4.8

Игра 2×*n*

| | | Второй игрок | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $q_1$ | $q_2$ | ... | $q_n$ |
| Первый игрок | $p_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1n}$ |
| | $p_2 = 1 - p_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2n}$ |

Ожидаемый выигрыш $v = v_1$ первого игрока при применении вторым игроком первой стратегии составит

$$v = v_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{11}p + a_{21}(1-p) =$$
$$= (a_{11} - a_{21})p + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2, 3,..., *n*-й стратегий. Полученные данные поместим в табл. 4.9.

Таблица 4.9

Выигрыши первого игрока

| Чистые стратегии второго игрока | Ожидаемые выигрыши первого игрока |
|---|---|
| 1 | $v = v_1^p = (a_{11} - a_{21})p + a_{21}$ |
| 2 | $v = v_2^p = (a_{12} - a_{22})p + a_{22}$ |
| ... | ... |
| $n$ | $v = v_n^p = (a_{1n} - a_{2n})p + a_{2n}$ |

Из таблицы видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от $p_1$. На плоскости *Opv* построим графики ожидаемых выигрышей первого игрока, которые представляют прямые, проходящие через точки $(0, a_{2i})$ и $(1, a_{1i})$, $i = \overline{1,n}$.

Первый игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш. Поскольку игрок ***A*** может рассчитывать только на выигрыш $v = \bar{v}(p) = \min\{v_1(p),...,v_n(p)\}$, то на плоскости *Opv* рисуем график зависимости $v = \bar{v}(p)$ и находим наивысшую точку $v = \bar{v}(p^*) = \max\limits_{p\in[0;1]} \bar{v}(p) = v$ на этом графике, ордината которой выражает цену игры

$v$, а стратегия $(p^*, 1-p^*)$ является оптимальной смешанной стратегией игрока $\boldsymbol{A}$.

Аналогично определяется оптимальная стратегия второго игрока. Она определяется как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимальные ожидаемые проигрыши.

### 4.6. Приведение матричной игры к задаче линейной оптимизации

В общем случае смешанные стратегии сторон могут содержать значительное число активных стратегий и платежную матрицу существенно упростить не удастся. Однако оптимальные смешанные стратегии игроков $p^*$ и $q^*$ всегда можно найти приведением матричной игры двух лиц с нулевой суммой к задаче линейного программирования.

Без ограничения общности можно предполагать, что *цена игры* – это *положительная величина*. В противном случае достаточно увеличить все элементы платежной матрицы на постоянную величину, что приведет к такому же увеличению цены игры без изменения искомых смешанных стратегий.

Для игры размерностью $m \times n$ при использовании игроком $\boldsymbol{A}$ оптимальной смешанной стратегии $p^* = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ любая чистая стратегия оппонента $B_j$ приведет к выигрышу игрока $\boldsymbol{A}$ не менее, чем цена игры $v$, следовательно, для платежной матрицы, заданной табл. 4.10, имеем

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_j + \ldots + a_{mj}p_m \geq v, \quad j = \overline{1,n},$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_j + \ldots + p_m = 1.$$

Таблица 4.10

Платежная матрица

| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_j$ | … | $B_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ | $p_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2j}$ | … | $a_{2n}$ | $p_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $A_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{in}$ | $p_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ | $p_m$ |
| | $q_1$ | $q_2$ | … | $q_j$ | … | $q_n$ | |

Разделив эти соотношения на положительную величину $v$, введем обозначения $p_i / v = x_i$, $i = \overline{1,m}$, и получим

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{mj}x_m \geq 1, \quad j = \overline{1,n},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_j + \ldots + x_m = v.$$

Так как цель игрока ***A*** максимизировать цену игры $v$, т. е. $\min\ Z = 1/v$, то критерий оптимальности – это

$$\min\ Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_j + \ldots + x_m$$

при записанных выше $n$ ограничениях. Решив полученную задачу линейной оптимизации, найдем как цену игры $v$, так и оптимальную смешанную стратегию игрока ***A*** $p^* = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ по формулам:

$$v = 1/(x_1 + x_2 + \ldots + x_j + \ldots + x_m),$$

$$p_i = vx_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Для смешанной стратегии оппонента построение линейной модели выполняется аналогично, но т. к. игрок ***B*** стремится к минимизации своего проигрыша, то решается оптимизационная задача на максимум. Таким образом, для оппонента необходимо решить симметричную двойственную задачу.

Найдем оптимальную смешанную стратегию $q$ игрока ***B***. Применяя ее, игрок ***B*** проиграет не более $v$ при любой чистой стратегии $A_i$ игрока ***A***, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le v,\ i = \overline{1,m}.$$

Разделим обе части неравенства на $v$ и введем переменные $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $j = \overline{1,n}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1,\ i = \overline{1,m},\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Игрок ***B*** стремится сделать свой гарантированный проигрыш $v$ возможно меньше, а значит, возможно больше величину

$$y_1 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}.$$

Учитывая соотношения, приходим к следующей задаче: максимизировать линейную функцию

$$z(y) = y_1 + \ldots + y_n$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1,\ i = \overline{1,m},$$

$$y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Это задача линейного программирования, записанная в симметричной форме. Решив ее (например, симплексным методом), найдем оптимальный вектор $y^* = (y_1, \ldots, y_n)$ и максимальное значение целевой функции $z(y^*)$, а затем определим цену игры и компоненты оптимальной смешанной стратегии

$$v = \frac{1}{z(y^*)},\ q_j = vy_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Сформулированные задачи образуют пару симметричных двойственных задач линейного программирования, а поэтому нет необходимости решать обе эти задачи. Найдя решение одной из них, воспользуемся соответствием между двойственными переменными, устанавливаемым применительно к каноническим формам задач, и выпишем оптимальные решения двух задач линейного программирования.

### 4.7. Статистические игры

Под ***статистической игрой (игрой с природой)*** будем понимать парную матричную игру, в которой один игрок заинтересован в наиболее выгодном для него исходе игры, а второй игрок («природа») совершенно безразличен к результату игры.

Так, в матричных играх предполагается участие двух игроков, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т. д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются *играми с природой*. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Предположим, что в игре с природой сознательный игрок ***A*** может использовать $m$ чистых стратегий $A_1,\ A_2,\ldots,A_m$, а природа ***П*** может реализовать $n$ различных состояний $П_1,\ П_2,\ldots,П_n$. Игроку ***A*** могут быть известны вероятности $q_1,\ldots,q_n$, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их.

Действуя против природы, игрок ***A*** имеет возможность использовать как чистые стратегии $A_i$, так и смешанные. Если игрок ***A*** в состоянии оценить (величиной $a_{ij}$) последствия применения каждой своей чистой стратегии $A_i$ при любом состоянии $П_j$ природы, то игру можно задать матрицей

$$A_{m\times n} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \ldots \\ A_m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} П_1 & \ldots & П_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array},$$

которая называется *платежной*.

Игры с природой, хотя и являются частным случаем парных матричных игр, обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, т. к. она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно оно игроку ***A*** или нет.

Кроме того, решение достаточно найти только для игрока ***A***, поскольку природа в наших рекомендациях не нуждается.

Также в играх с природой смешанные стратегии приобретают смысл только при многократном повторении игры.

С учетом отмеченных особенностей сформулирован ряд критериев, которыми пользуются при выборе оптимальных стратегий игрока ***A***. Эти критерии позволяют оценить принимаемое решение и высказать рекомендации по тому или иному образу действий. Если рекомендации, вытекающие из некоторых критериев, совпадают, принимается рекомендуемое решение. Если же рекомендации не совпадают, то необходимо дополнительное исследование.

Таким образом, цель при решении статистической игры заключается в определении такой стратегии (чистой или смешанной), которая при ее применении обеспечила бы наибольший выигрыш.

### 4.8. Решение статистической игры

При решении статистической игры необходимо:

- выявить и отбросить дублирующие и заведомо невыгодные стратегии лица, играющего с природой (стратегии природы отбрасывать нельзя!);
- построить и исследовать матрицу рисков;
- оценить выигрыш при различных игровых ситуациях: критерии Вальда, Байеса, Сэвиджа и Гурвица и др.;
- сделать вывод о выборе наилучшей стратегии.

***Построение матрицы рисков.*** *Риском* $r_{ij}$ игрока ***A***, когда он пользуется чистой стратегией $A_i$ при состоянии $\Pi_j$ природы, называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы точно знал, что природой будет реализовано именно состояние $\Pi_j$, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию $A_i$, не зная, какое же состояние реализует природа:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \geq 0,$$

где $\beta_j = \max_i a_{ij}$ – максимальный элемент $j$-го столбца платежной матрицы.

Элементы матрицы рисков, соответствующие стратегиям $A_i$ и $\Pi_j$ характеризуют общую благоприятность или неблагоприятность для игрока ***A*** отдельных состояний природы.

Матрица рисков имеет вид, представленный в табл. 4.11.

Таблица 4.11

Матрица рисков

| | $П_1$ | $П_2$ | … | $П_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $r_{11}$ | $r_{12}$ | … | $r_{1n}$ |
| $A_2$ | $r_{21}$ | $r_{22}$ | | $r_{2n}$ |
| … | … | | | … |
| $A_m$ | $r_{m1}$ | $r_{m2}$ | | $r_{mn}$ |

***Критерии для принятия решений в статистических играх***

1. Критерий, основанный на известных вероятностях условий.

Пусть известны вероятности $q_j$ состояний $П_j$ природы, тогда пользуются *критерием Байеса*, в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия $A_i$, при которой максимизируется средний выигрыш

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$$

игрока ***A***, т. е. обеспечивается $\overline{a} = \max\limits_i \overline{a_i} = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ .

Следует отметить, что когда известны вероятности состояний природы $q_j$, $j = \overline{1, n}$, игроку ***A*** нет смысла пользоваться смешанными стратегиями.

Применение в игре с природой в этом случае любой смешанной стратегии $p$ не может быть выгоднее для игрока ***A***, чем применение оптимальной чистой стратегии.

2. Если объективные оценки состояний природы получить невозможно, то вероятности состояний природы могут быть оценены субъективно на основе *принципа недостаточного основания Лапласа*, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е. $q_1 = ... = q_n = 1/n$, и оптимальной считают чистую стратегию $A_i$, обеспечивающую максимальное среднее значение выигрыша:

$$\max_i \overline{a_i} = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

Если вероятности $q_j$ состояний $П_j$ природы неизвестны и нельзя сделать о них никаких предположений, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

3. *Максиминный критерий Вальда*. По этому критерию рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} ,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим: считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом.

4. *Критерий максимума.* Оптимальная стратегия выбирается из условия

$$m = \max_i \max_j a_{ij}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

5. *Критерий Гурвица.* Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$s = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right\}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n},$$

где $\lambda$ (степень оптимизма) изменяется в диапазоне [0,1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\lambda = 1$ критерий превращается в критерий Вальда, при $\lambda = 0$ – в критерий максимума. На $\lambda$ оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем $\lambda$ ближе к единице. В общем случае число $\lambda$ выбирают из опыта или субъективных соображений.

6. *Критерий Сэвиджа.* Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести.

Этот критерий, так же как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма (но пессимизм понимается иначе, чем в критерии Вальда: рекомендуется всячески избегать большого риска).

Согласно этому критерию рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение: $r = \min_i \max_j r_{ij}$ – оптимальная стратегия, где $r_{ij}$ – элементы матрицы рисков.

**Пример.** Для отопления коттеджа в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 7,5 ден. ед., в мягкую зиму – 8,5, в обычную – 9,0, а в холодную – 9,5. Расход угля в отопительный сезон определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную требуется 7 т, а в холодную зиму расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества запасенного им с лета угля. При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести и зимой. Кроме того, надо учесть, что продать непотребовавшийся уголь возможности не будет. Используя игровой подход, составить платежную матрицу.

***Решение.*** Одним из участников рассматриваемой ситуации является домовладелец, озабоченный необходимостью заготовки определенного количества угля на предстоящий отопительный сезон. Если описанной ситуации придать игровую схему, то домовладелец выступает в ней в качестве сознательного игрока ***А***, заинтересованного в минимизации затрат на приобретение угля. Вторым участником является природа (игрок ***П***), подчиняющаяся своим законом развития. В данном случае игрок ***П*** является инстанцией, безразличной к результатам тех или иных действий сознательного игрока ***А*** – статистика.

Заготавливая летом уголь, домовладелец может ориентироваться либо на мягкую (первая его чистая стратегия $A_1$), либо на обычную (вторая стратегия $A_2$), либо на холодную зиму (третья чистая стратегия $A_3$), покупая соответственно 6, 7 или 8 т угля. Игрок ***П*** может реализовать либо мягкую зиму (первая его чистая стратегия – состояние $П_1$, либо обычную (второе возможное состояние $П_2$), либо холодную (третье возможное состояние $П_3$), что потребует затрат 6, 7 или 8 т угля соответственно. Таким образом, платежная матрица статистической игры будет иметь размерность 3×3 (табл. 4.12).

Таблица 4.12

Платежная матрица

| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ (6) | –45 | –54 | –64 | –64 |
| $A_2$ (7) | –52,5 | –52,5 | –62 | –62 |
| $A_3$ (8) | –60 | –60 | –60 | –60 |
| $\beta_j$ | –45 | –52,5 | –60 | |

Вычислим элемент, соответствующий ситуации ($A_1$, $П_1$). Это наиболее благоприятный случай. В самом деле, домовладелец в расчете на мягкую зиму купил летом 6 т угля, заплатив 6·7,5=45 ден. ед. Наступившая зима оказалась мягкой, и потому дополнительных затрат не потребовалось. Таким образом, «выигрыш» игрока *А* равен –45.

Рассмотрим теперь ситуацию ($A_1, П_2$), т. е. случай, когда домовладелец приобретает летом 6 т угля в расчете на мягкую зиму, а зима оказалась обыкновенной. Пришлось дополнительно купить зимой 1 т угля по цене 9 ден. ед., а потому общие расходы на отопление составили 45 + 9 = 54 ден. ед. «Выигрыш» в этом случае равен –54.

В ситуации ($A_1, П_3$) общие расходы, с учетом холодной зимы, составили 45 + 2 · 9,5 = 64 ден. ед. Рассуждая аналогично, находим и остальные элементы платежной матрицы.

Как следует из платежной матрицы, α = max (–64; –62; –60) = –60, β = = min (–45; –52,5; –60) = –60, т. е. *v* = –60. Следовательно, игра обладает седловой точкой, которая и определяет оптимальные чистые стратегии $A_3$ и $П_3$ игроков ***А*** и ***П*** и чистую цену *v* = –60. Поскольку данная игра является статистической (игрой с природой), то давать рекомендации игроку ***П*** (природе) по оптимальному поведению не имеет смысла, а вот сознательному игроку ***А*** (домовладельцу) рекомендовать следует чистую стратегию $A_3$, т. е. запасти летом 8 т угля, за что придется заплатить 60 ден. ед.

**Пример.** Упростить стратегическую матричную игру, заданную платежной матрицей, представленной в табл. 4.13.

Таблица 4.13

Платежная матрица примера

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 4 | **4** |
| $A_2$ | 7 | 9 | 3 | –3 | 4 | 7 | –3 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 1 |
| $A_4$ | 3 | 4 | 3 | 6 | –6 | 3 | –6 |
| $b_j$ | 7 | 9 | **5** | 6 | 6 | 7 | – |

***Решение.*** Легко заметить, что стратегии $B_1$ и $B_6$ полностью совпадают. Можно сказать, что $B_6$ *дублирует* $B_1$, и исключить одну из них. Сравнивая между собой наши стратегии, можно сделать вывод, что при любой стратегии оппонента выигрыш при использовании $A_1$ больше или равен, чем выигрыш при использовании $A_4$. В этом случае говорят, что стратегия $A_1$ *доминирует* над $A_4$ и последнюю следует исключить. Получим табл. 4.14.

Таблица 4.14

Платежная матрица

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 5 | **5** | 6 | 6 | **4** |
| $A_2$ | 7 | 9 | 3 | –3 | 4 | –1 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 3 | 1 | 4 | 1 |
| $b_j$ | 7 | 9 | **5** | 6 | 6 | – |

Из наших стратегий исключить пока нельзя ни одну, но у оппонента стратегия $B_3$ доминирует над стратегиями $B_2$ и $B_5$, исключая их, получим табл. 4.15.

Таблица 4.15

Платежная матрица после упрощения

| Стратегии игроков | $B_1$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | **5** | 6 | **4** |
| $A_2$ | 7 | 3 | –3 | –1 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 1 | 1 |
| $b_j$ | 7 | **5** | 6 | – |

**Пример.** Матричная игра задана платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 13 & 6 \\ 1 & 11 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 10 & 1 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Указать возможные чистые стратегии сторон.

2. Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:

а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,5));

б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы равны соответственно 0,3; 0,1; 0,2; 0,1; 0,3 (воспользоваться критерием Байеса);

в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа).

3. Решить матричную игру путем сведения ее к задаче линейного программирования:

а) составить математическую модель прямой и двойственной задачи;

б) найти их оптимальные планы;

в) выписать оптимальные стратегии игроков и цену игры.

***Решение.***

1. У игрока ***А*** четыре, а у игрока ***П*** пять возможных чистых стратегий (табл. 4.16).

Таблица 4.16

Платежная матрица игры с природой

| Стратегии игроков | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 0 | 0 | 13 | 6 |
| $A_2$ | 1 | 11 | 8 | 6 | 2 |
| $A_3$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 |
| $A_4$ | 10 | 1 | 8 | 1 | 5 |
| $b_j$ | 10 | 11 | 8 | 13 | 6 |

2. Часто приходится принимать решение, не имея достаточной информации. Если эта неопределенность не связана с сознательным противодействием противника, а определяется внешними условиями, которыми мы не можем управлять, но от которых зависит эффективность выбранной нами стратегии, то

такие ситуации принято называть *статистическими играми* или *играми с природой*.

Природа безразлична к нашему выигрышу, следовательно, ни одно ее возможное состояние нельзя отбросить. Смешанная стратегия может иметь смысл только при многократном повторении игры. Результаты игры будем представлять платежной матрицей, обозначая возможные состояния природы $П_j$. С учетом здравого смысла и практической целесообразности сформулирован ряд критериев, которые образуют логическую схему принятия решения. Для принятия решения кроме платежной матрицы используется *матрица рисков*, элементы которой есть разности между максимально возможным выигрышем при $j$-м состоянии природы и выигрышем при использовании нами $i$-й стратегии. Иначе говоря, это упущенная нами из-за невозможности предсказать состояние природы выгода.

Платежная матрица имеет вид, представленный в табл. 4.17.

Таблица 4.17

Платежная матрица

| Стратегии игроков | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ | $\min\limits_j a_{ij}$ | $\max\limits_j a_{ij}$ | По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 0 | 0 | 13 | 6 | 0 | 13 | 6,5 |
| $A_2$ | 1 | 11 | 8 | 6 | 2 | 1 | 11 | 6 |
| $A_3$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | 2 | 5 | 3,5 |
| $A_4$ | 10 | 1 | 8 | 1 | 5 | 1 | 10 | 5,5 |
| $b_j$ | 10 | 11 | 8 | 13 | 6 | | | |

Тогда элементы матрицы рисков $r_{ij} = b_j - a_{ij}$, получаем табл. 4.18.

Таблица 4.18

Матрица рисков

| Стратегии игроков | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ | $\max\limits_j r_{ij}$ | $\min\limits_j r_{ij}$ | По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10 | 11 | 8 | 0 | 0 | 11 | 0 | 5,5 |
| $A_2$ | 9 | 0 | 0 | 7 | 4 | 9 | 0 | 4,5 |
| $A_3$ | 8 | 7 | 5 | 8 | 4 | 8 | 4 | 6 |
| $A_4$ | 0 | 10 | 0 | 12 | 1 | 12 | 0 | 6 |

а) В условиях полной неопределенности используются следующие критерии:

- *Максиминный критерий Вальда.* Находим максимум из минимумов и соответствующую ему стратегию. Природа рассматривается как противодействующая сторона. Это стратегия крайнего пессимизма. Для приведенного примера нам следует выбрать $A_3$ (при этом минимальный гарантированный выигрыш равен 2, см. табл. 4.17).

- *Критерий Сэвиджа (минимаксного риска).* Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск). Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска. В рассматриваемом примере это также $A_3$ (при этом максимальный возможный риск равен 8, см. табл. 4.18).

- *Максимаксный критерий.* Выбирается стратегия, при которой возможно получение максимального выигрыша. Это безоглядный оптимизм, иногда на него делают ставку в безвыходном положении. В данном случае это $A_1$ (при этом максимальный возможный выигрыш равен 13, см. табл. 4.17).

- *Критерий Гурвица (пессимизма – оптимизма)* – это промежуточный выбор между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Стратегия выбирается в соответствии со значением

$$\max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}),$$

где $\lambda$ – коэффициент пессимизма $(0 \le \lambda \le 1)$.

При крайних значениях этого коэффициента получим соответственно минимаксный и максимаксный критерии. При использовании этого критерия часто принимают значение параметра $\lambda = 0,5$ или $\lambda = 0,6$. Можно критерий Гурвица применить и к матрице рисков, тогда он примет вид

$$\min_i(\lambda \max_j r_{ij} + (1-\lambda)\min_j r_{ij}).$$

Лучшими стратегиями оказываются $A_1$ – для матрицы выигрышей и $A_2$ – для матрицы рисков (при этом возможный выигрыш равен 6,5, а возможный риск равен 4,5 соответственно (см. табл. 4.17, 4.18).

Если бы результаты применения различных критериев совпадали, то мы имели бы основание для выбора стратегии. Однако есть основание сократить область выбора, опуская стратегию $A_4$. Окончательное же решение зависит от склонности и готовности к риску лица, принимающего решения. Стратегия $A_1$ перспективна, хотя и несколько рискованна, стратегии $A_2$ и $A_3$ представляются более осторожными. В подобной ситуации уместно поставить задачу сбора дополнительных статистических данных или проведения экспериментов для оценки вероятностей возможных состояний природы. Экономически такая работа будет оправдана, если затраты на ее проведение будут меньше ожидаемого выигрыша от уточнения стратегии.

б) Предположим, что вероятности состояний природы $q_j$, $j = \overline{1,n}$, известны и занесены в платежную матрицу (табл. 4.19) и матрицу рисков (табл. 4.20).

Таблица 4.19

Платежная матрица для критерия Байеса

| Стратегии игроков | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ | $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 0 | 0 | 13 | 6 | 3,1 |
| $A_2$ | 1 | 11 | 8 | 6 | 2 | 4,2 |
| $A_3$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | 2,7 |
| $A_4$ | 10 | 1 | 8 | 1 | 5 | 6,3 |
| $q_j$ | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | – |

Таблица 4.20

Матрица рисков

| Стратегии игроков | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ | $\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 10 | 11 | 8 | 0 | 0 | 5,7 |
| $A_2$ | 9 | 0 | 0 | 7 | 4 | 4,6 |
| $A_3$ | 8 | 7 | 5 | 8 | 4 | 6,1 |
| $A_4$ | 0 | 10 | 0 | 12 | 1 | 2,5 |
| $q_j$ | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | – |

В этом случае пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a_i}$, или минимизируют средний риск $\min \overline{r_i}$. В обоих случаях предпочтительной оказывается стратегия $A_4$.

в) Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Легко убедиться, что лучшие результаты дает стратегия $A_2$.

3. а) В данной игре $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2 \neq \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 6$, и игру следует решать в смешанных стратегиях. Так как цена игры $v$>0 ($\alpha$<$v$<$\beta$), задачу можно сразу свести к ЗЛП. Математическая модель задачи для игрока ***П***:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 13y_4 + 6y_5 \le 1, \\ y_1 + 11y_2 + 8y_3 + 6y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 5y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 10y_1 + y_2 + 8y_3 + y_4 + 5y_5 \le 1, \end{cases} \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Математическая модель задачи для игрока ***А***:

$$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 10x_4 \ge 1, \\ 11x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 1, \\ 8x_2 + 3x_3 + 8x_4 \ge 1, \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \\ 13x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \ge 1, \end{cases}$$

б) Находим оптимальную смешанную стратегию $q^*$ игрока ***П***. Для этого решаем ЗЛП для игрока ***П***, воспользовавшись **Поиском решения** (табл. 4.21).

Таблица 4.21

Поиск решения

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,010703 | 0,059633 | 0 | 0 | 0,166667 | | 0,237003 | | |
| | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 13 | 6 | | 1 | <= | 1 |
| 1 | 11 | 8 | 6 | 2 | | 1 | <= | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | | 0,593272 | <= | 1 |
| 10 | 1 | 8 | 1 | 5 | | 1 | <= | 1 |

Отсюда $y^*$ = (0,010703; 0,059633; 0; 0; 0,166667), $f(y)$ =0,237003.

Для нахождения оптимального решения ЗЛП для игрока ***А*** также можно воспользоваться **Поиском решения,** однако решение для двойственной задачи можно найти и из отчета по устойчивости. Получим табл. 4.22.

Таблица 4.22

Отчет по устойчивости

| Теневая цена |
|---|
| 0,062691131 |
| 0,082568807 |
| 0 |
| 0,091743119 |

Отсюда $x^*$ = (0,062691131; 0,082568807; 0; 0,091743119), $z(x)$ =0,237003.

в) Остается вычислить цену игры $v$ и компоненты $q_j$ оптимальной смешанной стратегии: $v = 1/f$ = 1/0,237003=4,219355; $q_1 = v\, y_1$ =4,219355 · 0,010703= = 0,045161; $q_2$ =0,251613; $q_3$ =0; $q_4$ =0; $q_5$ =0,703226. Итак, $\boldsymbol{q^*}$ **= (0,045161; 0,251613; 0; 0; 0,703226)**. Аналогично $p_1 = v \cdot x_1$ =4,219355 · 0,062691131= =0,264516; $p_2$ =0,348387; $p_3$ =0; $p_4$ = 0,387097. Таким образом, оптимальной для игрока ***А*** является смешанная стратегия $\boldsymbol{p^*}$ **= (0,264516; 0,348387; 0; 0,387097)**. Легко проверить, что сумма компонент каждой из оптимальных смешанных стратегий $p^*$ и $q^*$ равна единице, а цена игры $\boldsymbol{v}$**=4,219** действительно лежит между $\alpha$=2 и $\beta$= 6.

**Пример.** Определить производственную программу предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр.

Фирма «Фармацевт» – производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие – на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь и октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) – 20 ден. ед.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) – 15 ден. ед.

По данным наблюдений за несколько последних лет службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды – 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача – определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 ден. ед. за 1 усл. ед. продукции первой группы и 30 ден. ед. – второй группы.

***Решение.*** Фирма располагает двумя стратегиями:

$A_1$ – в этом году будет теплая погода; $A_2$ – погода будет холодная.

Если фирма примет стратегию $A_1$ и в действительности будет теплая погода (стратегия природы $B_1$), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. препаратов первой группы и 1100 усл. ед. второй группы) будет полностью реализована и доход составит

$$3050 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) = 77\,500 \text{ ден. ед.}$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы $B_2$) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы только в количестве 1525 усл. ед. и часть препаратов останется нереализованной. Доход составит

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - 20 \cdot (3050 - 1525) = 16\,500 \text{ ден. ед.}$$

Аналогично если фирма примет стратегию $A_2$ и в действительности будет холодная погода, то доход составит

$$1525 \cdot (40 - 20) + 3690 \cdot (30 - 15) = 85\;850 \text{ ден. ед.}$$

При теплой погоде доход составит

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - (3690 - 1100) \cdot 15 = 8150 \text{ ден. ед.}$$

Рассматривая фирму и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{ccc} & B_1 & B_2 \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 77\,500 & 16\,500 \\ 8150 & 85\,850 \end{pmatrix},} \end{array}$$

$$\alpha = \max\{16\,500, 8150\} = 16\,500 \text{ ден. ед.}$$

$$\beta = \min\{77\,500, 85\,850\} = 77\,500 \text{ ден. ед.}$$

Цена игры лежит в диапазоне $16\,500 \le v \le 77\,500$.

Из платежной матрицы видно, что при всех условиях доход фирмы будет не меньше 16 500 ден. ед., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77 500 ден. ед.

Находим решение игры. Обозначаем вероятность применения фирмой стратегии $A_1$ через $x_1$, стратегии $A_2$ – через $x_2$, причем $x_1 = 1 - x_2$. Решая игру графическим методом, получим $x_{\text{опт}} = (0,56; 0,44)$, при этом цена игры $v$=46 986 ден. ед. Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит

$$0,56 \cdot (3050;1100) + 0,44 \cdot (1525;3690) = (2379;22\,396).$$

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 22 396 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46 986 ден. ед.

В условиях неопределенности, если не представляется возможным фирме использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии природы.

1. Критерий Вальда:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\{16\,500, 8150\} = 16\,500 \text{ ден. ед.}$$

Фирме целесообразно использовать стратегию $A_1$.

2. Критерий максимума:

$$\max_i \max_j a_{ij} = \max\{77\,500, 85\,850\} = 85\,850 \text{ ден. ед.}$$

Целесообразно использовать стратегию $A_2$.

3. Критерий Гурвица: для определенности принимаем $\lambda$=0,4, тогда для стратегии $A_1$

$$\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij} = 0,4 \cdot 16500 + (1-0,4) \cdot 77\,500 = 53100 \text{ ден. ед.}$$

для стратегии $A_2$

$$\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij} = 0,4 \cdot 8150 + (1-0,4) \cdot 85\,850 = 54\,770 \text{ ден. ед.}$$

$$\max\{53100, 54\,770\} = 54\,770 \text{ ден. ед.},$$

Фирме целесообразно использовать стратегию $A_2$.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце – 77 500, во втором столбце – 85 850.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,2},$$

откуда $r_{11}$=77 500–77 500=0, $r_{12}$=85 850–16 500=69 350, $r_{21}$=77 500–8150=69 350, $r_{22}$=85 850–85 850=0. Матрица рисков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 69\,350 \\ 69\,350 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\min_i \max_j r_{ij} = \min(69\,350, 69\,350) = 69\,350 \text{ ден. ед.}$$

Целесообразно использовать стратегию $A_1$ или $A_2$.

Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия $A_2$. Следовательно, фирме целесообразно применять стратегию $A_2$.

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть известно для рассматриваемой задачи, что вероятности теплой и холодной погоды равны и составляют 0,5, тогда оптимальная стратегия фирмы определяется так:

$$\max\{(0,5\cdot 77\,500 + 0,5\cdot 16\,500); (0,5\cdot 8150 + 0,5\cdot 85\,850)\} =$$
$$= \max(47\,000; 47\,000) = 47\,000.$$

Фирме целесообразно использовать стратегию $A_1$ или $A_2$.

**Пример.** После $k$ лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) необходимо заменить отдельные детали и узлы; 3) дальнейшая эксплуатация возможна лишь после капитального ремонта. Накопленный на предприятии опыт свидетельствует, что вероятности указанных состояний оборудования составляют соответственно 0,3, 0,6 и 0,1. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения: 1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат, равных 2, 6 или 10 ден. ед, в зависимости от состояния оборудования (в затраты включены стоимость ремонта и заменяемых деталей и узлов; убытки, связанные с ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования и др.); 2) произвести ремонт с помощью специалистов-ремонтников, что вызовет затраты, равные 10, 4 или 8 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 14, 12 или 6 ден. ед.

Используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

***Решение.*** В рассматриваемой ситуации в качестве игрока ***A*** выступает руководство предприятия, обладающее тремя стратегиями: $A_1$ – ремонт своими силами; $A_2$ – ремонт выполняют приглашенные специалисты; $A_3$ – замена оборудования. Вторым игроком здесь следует считать природу ***П*** – комплекс внешних условий, в которых функционировало оборудование на протяжении $k$ лет и которые определили три возможных состояния $П_1$, $П_2$ и $П_3$, указанных в условии задачи. «Выигрышами» игрока ***A*** будут затраты, связанные с реализацией решений (чистых стратегий) $A_1$, $A_2$ и $A_3$ и составляющие платежную матрицу (табл. 4.23).

Таблица 4.23

Платежная матрица

| – | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $\min\limits_j a_{ij}$ | $\bar{a}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | –2 | –6 | –10 | –10 | –5,2 |
| $A_2$ | –10 | –4 | –8 | –10 | –6,2 |
| $A_3$ | –14 | –12 | –6 | –14 | –12 |
| $q_j$ | 0,3 | 0,6 | 0,1 | | |
| $\beta_j$ | –2 | –4 | –6 | | |

Здесь $\alpha = -10$, $\beta = -6$, игра не имеет седловой точки и у игрока ***A*** нет доминируемых стратегий. Поскольку известны вероятности $q_j$ состояний природы ***П***, то пользуемся критерием Байеса. Находим средние «выигрыши» $\bar{a}_i$ игрока $A$ при каждой его чистой стратегии:

$$\bar{a}_1 = -2 \cdot 0,3 + (-6) \cdot 0,6 + (-10) \cdot 0,1 = -5,2, \quad \bar{a}_2 = -6,2, \quad \bar{a}_3 = -12.$$

Оптимальной по Байесу будет чистая стратегия $A_1$, т. к. именно при ней средний «выигрыш» достигает максимального значения:

$$\max_i \bar{a}_i = \max(-5,2; -6,2; -12) = -5,2 = \bar{a}_1.$$

Таким образом, руководству предприятия следует произвести ремонт своими силами, т. к. средние затраты при этом будут минимальными (5,2 ден. ед.).

# 5. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЕТЕВОМ ПЛАНИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ

## 5.1. Описание постановки задачи

До появления сетевых методов планирование работ, проектов осуществлялось в небольшом объеме. Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы работ на операции. Определяются оценки продолжительности операций, и строится сетевая модель (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все операции и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации. Строится календарный график, определяющий начало и окончание каждой операции, а также взаимосвязи с другими операциями графика. Календарный график выявляет критические операции, которым надо уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план позволяет определить резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения работ или эффективном применении как трудовых, так и финансовых ресурсов.

*Сетевая модель* – графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе методов сетевого планирования и управления (СПУ) лежит графическое представление проекта в виде сетевого графика. Сетевой график можно рассматривать как совокупность некоторого количества точек $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$ и соответственно между ними установленных связей $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$, т. е. $G=(E, \vec{e})$. Если в паре вершин $E_i$, $E_j$ указано направление связи, т. е. какая из них является первой, то соединяющий их отрезок называется дугой; если же ориентация не указана – ребром. Объект $G$ называется *графом*, точки $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$ – его *вершинами*, связи между ними $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ – ребрами (дугами). Ориентация дуг, т. е. указание «начала» и «конца» каждой из них, делает граф *ориентированным (орграфом)*. Граф $G=(E, \vec{e})$ считается заданным, если заданы все его вершины и дуги. Исследование таких сетей проводится методами теории графов. Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Сетевой график – это ориентированный граф без контуров. Будем отождествлять вершины орграфа с событиями, а дуги – с работами. События и работы – основные понятия в СПУ.

*Работа* – это любые действия, трудовые процессы, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. Это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата. На сетевых графиках работы изображают стрелками. Рядом со стрелкой указываются числовые характеристики: время выполнения работы, расход ресурса, количество исполнителей и т. д. Под работами подразумеваются не только реальные хозяйственные или технологические процессы, требующие затрат времени и ресурсов для их осуществления, но и процессы, потребляющие только время. Также принято считать работами и те процессы, которые не требуют ни затрат времени, ни ресурсов. Это так называемые *фиктивные работы*. Они показывают, что одна работа не может совершаться раньше другой. На сетевых графиках фиктивные работы изображают пунктирными стрелками.

*Событие* – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной и/или нескольких предшествующих работ. *Событие* означает факт окончания всех работ в него входящих или начала работ из него выходящих. Событие не имеет протяженности во времени. На сетевом графике события изображаются кругами с указанием номера события. В каждое событие может входить и выходить несколько работ, а каждая работа ограничена двумя событиями. Событие выражает логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в данное событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него; ни одна выходящая из данного события работа не может начинаться до окончания всех работ, входящих в это событие.

Событие, с которого начинается выполнение проекта, является *исходным,* оно не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим*, оно не имеет последующих работ. Все прочие события являются *промежуточными*.

### 5.2. Правила построения сетевых графиков

Прежде чем представить проект сетевым графиком, необходимо составить перечень работ, оценить продолжительность каждой работы и установить последовательность работ, т. е. точно определить, какие работы обязательно должны быть закончены, чтобы могла начаться любая из работ, входящих в проект. Такой перечень удобно представить в виде структурно-временной таблицы.

При построении сетевых графиков следует соблюдать определенные правила. Приведем некоторые из них:

- сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего; общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером;
- в сетевых графиках не должно быть «тупиков», т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события);
- в сетевых графиках не должно быть событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;
- при построении сетевых графиков нельзя допускать, чтобы два смежных события были связаны двумя или большим количеством работ, что чаще всего бывает при изображении параллельно выполняемых работ; для изображе-

ния параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа;

- в сети не должно быть замкнутых циклов, т. е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;
- если какие-либо сложные работы могут быть начаты до полного окончания непосредственно предшествующей им работы, то последняя изображается как ряд последовательно выполняемых работ, каждая из которых завершается определенным событием;
- если для выполнения одной из работ необходимо получение результатов всех работ, входящих в предшествующее для нее событие, а для другой работы достаточно получить результат только одной или нескольких из этих работ, то должно быть дополнительно введено новое событие, отражающее результаты только этих последних работ, а также фиктивная работа, связывающая новое событие с прежним.

Построенный с соблюдением этих правил график является сетевой моделью выполнения проекта.

Для правильной нумерации событий можно воспользоваться графическим способом упорядочения вершин графа по рангам (методом вычеркивания дуг).

1. Исходную вершину, в которую не входит ни одна дуга, отнесем к рангу 0 и присвоим ей номер 1.

2. Вычеркнем все дуги, выходящие из вершины 1 и отнесем события, оказавшиеся без входящих дуг, к первому рангу. Этим событиям присвоим в произвольном порядке номера 2, 3, ..., $k_1$.

3. Вычеркнув все дуги, выходящие из вершины предыдущего ранга $i$, отнесем вершины, оказавшиеся без входящих дуг, к следующему ($i$+1)-му рангу. Присвоим им номера $k_i$+1, ..., $k_{i+1}$. Этот шаг повторяем до тех пор, пока все вершины не будут пронумерованы.

Любая последовательность работ сети, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называется *путем*. Под длиной пути $(i,j_1)$, $(j_1,j_2)$, ..., $(j_k,j)$ из $i$ в $j$ будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь, $t_{i,j_1}+t_{j_1,j_2}+\ldots+t_{j_k,j}$. Путь, в котором начальная вершина совпадает с исходным событием, а конечная – с завершающим, называется *полным*. Путь от исходного события до любого промежуточного события $i$ называется *предшествующим событию i путем*. Предшествующий событию $i$ путь, имеющий наибольшую длину, будет *максимальным предшествующим.* Он обозначается $L_1(i)$, а его продолжительность – $t[L_1(i)]$. Путь от данного события $i$ до завершающего называется *последующим путем*. Такой путь с наибольшей длиной будет *максимальным последующим*, он обозначается $L_2(i)$, его продолжительность – $t[L_2(i)]$. *Критическим* называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Таких путей в сети может быть несколько. *Критический путь* – это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

Суммарная продолжительность работ, принадлежащих критическому пути, называется *критическим временем* $t_{кр}$ выполнения всего комплекса работ. На сетевом графике критический путь выделяется двойной или жирной линией.

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором – стохастическими (вероятностными).

### 5.3. Временные параметры сетевого графика

Основным временным параметром сетевого графика является продолжительность критического пути. Расчет критического пути включает два этапа. Первый этап называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

*Ранним сроком* $t_р(i)$ *свершения события i* называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Так как может быть несколько путей, предшествующих данному событию, то ранний срок свершения события определяется продолжительностью максимального предшествующего пути

$$t_р(i) = t[L_1(i)].$$

*Поздним сроком* $t_п(i)$ *свершения события i* является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{кр}$. Очевидно, что $t_п(i)$ определяется разностью между $t_{кр}$ и длиной максимального из последующих путей:

$$t_п(i) = t_{кр} - t[L_2(i)].$$

Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения совпадают.

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет *резерв времени события* $R(i) = t_п(i) - t_р(i)$. Резервы критических событий равны нулю.

При расчете временных параметров вручную удобно проводить вычисления непосредственно на графе, воспользовавшись четырехсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делим на четыре сектора, в каждом из которых записываем следующую информацию (рис. 5.1).

1. Проставляем в верхних секторах номера событий (в соответствии с ранжированием).

2. Рассматривая события в порядке возрастания номеров, по входящим в данное событие работам определяем $t_{\text{р}}(i)$ и записываем в левом секторе.

3. Начиная с конечного события, для которого $t_{\text{п}}(n) = t_{\text{кр}}$ ($n$ – номер конечного события), для каждого события по выходящим из него работам определяем $t_{\text{п}}(i)$ и записываем в правом секторе.

4. В нижнем секторе записываем резерв времени события $R(i)$.

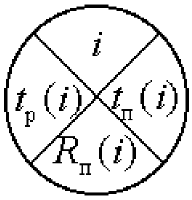


Рис. 5.1. Четырехсекторная схема расчетов

Зная сроки свершения событий, можно определить *временные параметры работ.*

*Ранний срок начала работы* $(i,j)$ равен раннему сроку свершения события *i:* $t_{\text{р}'}(i,j) = t_{\text{р}}(i)$.

*Ранний срок окончания работы* $(i,j)$ равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности:

$$t_{\text{р}''}(i,j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}.$$

*Поздний срок окончания работы* $(i,j)$ совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события: $t_{\text{п}''}(i,j) = t_{\text{п}}(j)$.

*Поздний срок начала работы* $(i,j)$ равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью:

$$t_{\text{п}'}(i,j) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}.$$

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{\text{р}'}(i,j)$ и $t_{\text{п}''}(i,j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени.

*Полный резерв времени работы* – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное для данной работы событие наступит не позднее своего позднего срока:

$$R_{\text{п}}(i,j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Таким образом, полный резерв времени работы есть максимальное время, на которое можно увеличить ее продолжительность, не изменяя продолжительность критического пути. Все некритические работы имеют полный резерв времени отличный от нуля.

*Независимый (свободный) резерв времени работы* – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное ее событие наступит в свой поздний срок, а конечное – в ранний срок:

$$R_{\text{св}}(i,j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}\,.$$

Величина необходимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы. Следует отметить, что критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю.

*Частный резерв времени работы первого вида* $R'(i,j)$ (гарантийный) отличается от полного тем, что его использование на данной работе возможно без уменьшения резервов у предшествующих:

$$R'(i,j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t_{ij}\,.$$

*Частный резерв времени работы второго вида* $R''(i,j)$ – это часть полного резерва, которая может быть использована для увеличения продолжительности данной работы или предшествующих ей работ без нарушения раннего срока наступления конечного события работы и без сокращения резервов времени у последующих работ: $R''(i,j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}$.

## 5.4. Линейный график (график Ганта) и учет потребностей в ресурсах

На графике Ганта каждая работа $(i,\ j)$ изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. Начало каждой работы совпадает с ожидаемым сроком свершения ее начального события. Полный резерв времени работы изображается пунктирной линией. По графику Ганта можно определить критическое время выполнения комплекса работ и критический путь.

При решении задач СПУ для каждой из работ иногда задается количество ресурсов, необходимых для ее выполнения, т. к. одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций.

Пусть $r_{ij}$ – потребности в трудовых ресурсах для выполнения каждой работы и $R$ – наличие трудовых ресурсов.

Выясним теперь потребности в трудовых ресурсах. Для этого на основе сетевого графика составляем линейный график (график Ганта).

На графике Ганта над каждой работой $(i,j)$ проставляется потребность в ресурсах $r_{ij}$. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы. Проекцию, совпадающую с началом координат, обозначим $\tau_0$, следующую – $\tau_1$ и т. д. В строке $\sum r_{ij}$ записываем сумму ресурсов $r_{ij}$ для каждого дня выполнения проекта. Полученные $\sum r_{ij}$ наносим на график интенсивности использования ресурса. Пунктирную линию на графике проводим на уровне $R$ ограничения наличного ресурса.

**Пример.** Комплекс работ представлен сетевым графиком (рис. 5.2).

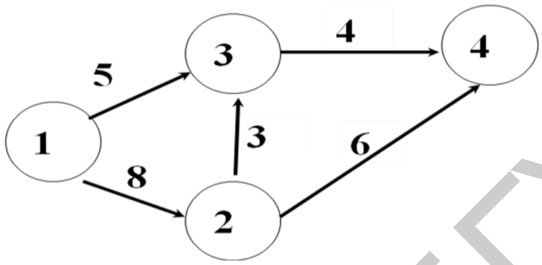



Рис. 5.2. Сетевой график

Для каждой работы известны продолжительность $t_{ij}$ ее выполнения и количество $r_{ij}$ (число в скобках) ресурса, расходуемого в единицу времени при выполнении этой работы (интенсивность потребления ресурса). В процессе выполнения работ расход ресурса не должен превышать заданной величины $R$. Требуется:

1) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критический срок и сроки начала и окончания работ без учета ограничения на используемый ресурс;

2) построить график интенсивности использования ресурсов;

3) указать потребности в ресурсах в каждый момент времени.

***Решение.*** Находим ранние и поздние сроки и резервы времени свершения каждого события (рис. 5.3).

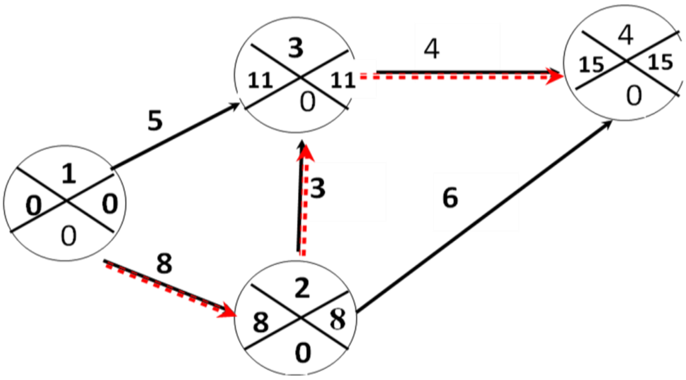



Рис. 5.3. Схема расчетов

Итак, завершающее четвертое событие может свершиться лишь на 15-й день от начала разработки. Это минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы проекта, оно определяется самым длинным полным путем. Ранний срок свершения события 4 совпадает с критическим временем. Критический путь выделяем на графике.

Вычисляем временные параметры работ и заносим результаты на календарный график (рис. 5.4).

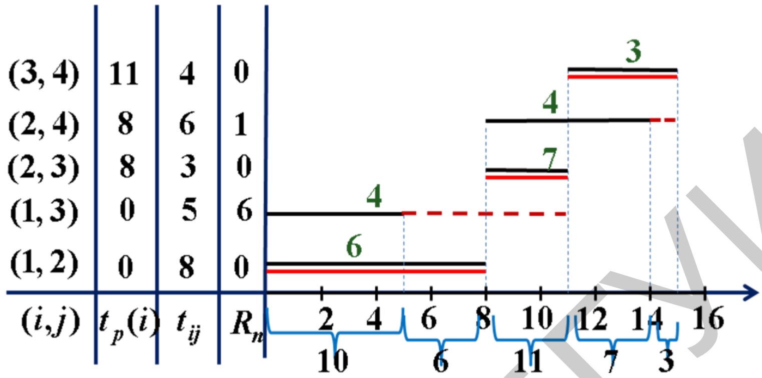



Рис. 5.4. Календарный график

По имеющемуся линейному графику построим график интенсивности использования ресурсов (рис. 5.5).

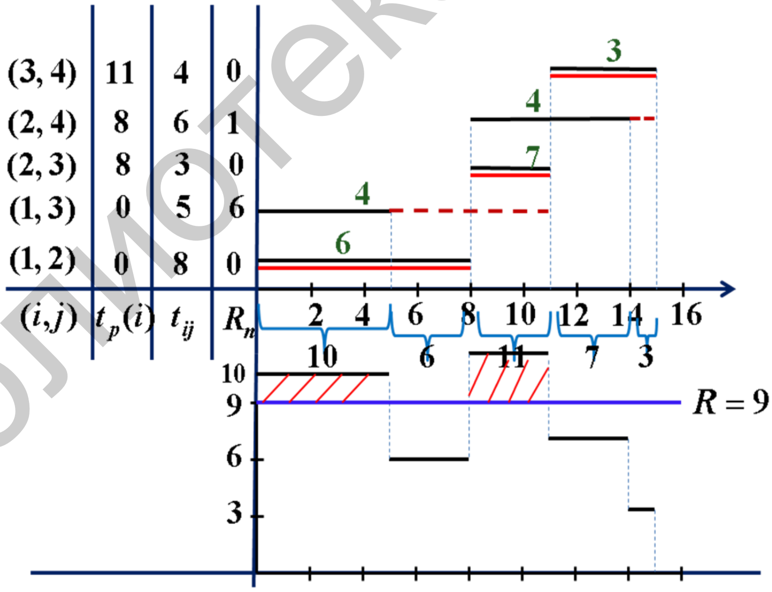



Рис. 5.5. График интенсивности использования ресурсов

**Пример.** Для организации производства и сбыта новой продукции необходимо выполнить комплекс работ. С этой целью создана группа из $R = 10$ специалистов (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Исходные данные проекта

| Работа | Описание работы | Непосредственно предшествующие работы | Продолжительность, дни | Число исполнителей |
|---|---|---|---|---|
| А | Разработка технических условий | – | 4 | 6 |
| Б | Эскизное проектирование | – | 1 | 4 |
| В | Техническое проектирование | Б | 2 | 7 |
| Г | Закупка необходимых комплектующих | А | 3 | 5 |
| Д | Изготовление деталей | А, В | 5 | 6 |
| Е | Согласование сроков поставки, заключение договоров | В | 10 | 3 |
| Ж | Сборка изделий | Г, Д | 4 | 8 |
| З | Отправка продукции потребителям | Е, Ж | 2 | 6 |

Необходимо:

1. Составить сетевой график выполнения проекта.
2. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени.
3. Определить критический путь.
4. Определить ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
5. Найти резервы времени работ (четыре типа).
6. Построить график Ганта и график интенсивности использования ресурса.

***Решение.*** Составляем сетевой график комплекса работ. Исходное событие 1 означает момент начала выполнения проекта. Работам А и Б не предшествуют никакие работы, следовательно, на графике они изображены дугами, выходящими из исходного события. Работе В предшествует работа Б, поэтому на графике дуга В непосредственно следует за дугой Б. Событие 2 означает момент окончания работы А и начала работ, которым она предшествует. Работе Д предшествуют работы А и В. На графике эта зависимость отражена с помощью введения фиктивной работы (2, 4). Аналогично с учетом взаимосвязей изображаются на графике (рис. 5.6) все оставшиеся работы. Завершающее событие 7 означает момент выполнения всего проекта. Номера, присвоенные нами событиям (см. рис. 5.6), соответствуют правилам ранжирования. Работу, соединяющую соседние события с номерами $i$ и $j$, теперь будем обозначать $(i, j)$. В новых обозначениях работа В примет вид (3, 4), ее продолжительность $t_{34} = 4$.

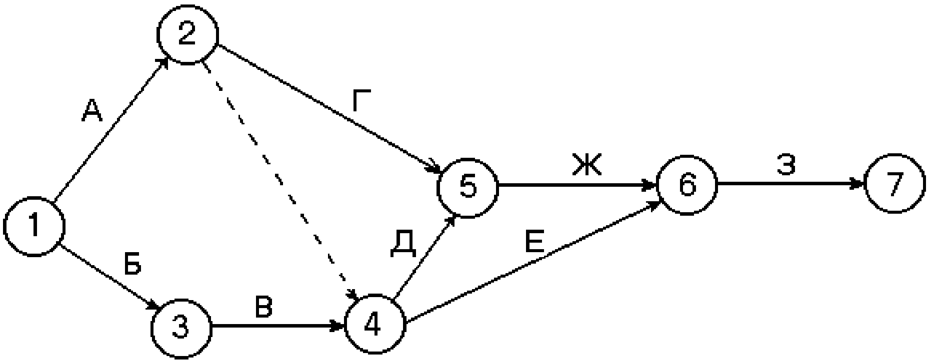



Рис. 5.6. Сетевой график по данным табл. 5.1

Находим ранний срок свершения каждого события:

$$t_р(1)=0,\;\; t_р(2)=t_р(1)+t_{12}=0+4=4,\;\;\; t_р(3)=t_р(1)+t_{13}=1,$$

$$t_р(4)=\max\left\{t_р(2)+t_{24},\, t_р(3)+t_{34}\right\}=\max\left\{4+0, 1+2\right\}=4,$$

$$t_р(5)=\max\left\{t_р(2)+t_{25},\, t_р(4)+t_{45}\right\}=\max\left\{4+3,\, 4+5\right\}=9,$$

$$t_р(6)=\max\left\{t_р(4)+t_{46},\, t_р(5)+t_{56}\right\}=\max\left\{4+10,\, 9+4\right\}=14,$$

$$t_р(7)=t_р(6)+t_{67}=16.$$

Итак, завершающее седьмое событие может свершиться лишь на 16-й день от начала разработки. Это минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы проекта, оно определяется самым длинным полным путем. Ранний срок свершения события 7 совпадает с критическим временем: $t_р(7)=t_{кр}$.

Находим поздний срок свершения каждого события:

$$t_п(7)=t_{кр}=16,\; t_п(6)=t_п(7)-t_{67}=16-2=14,\; t_п(5)=t_п(6)-t_{56}=10,$$

$$t_п(4)=\min\left\{t_п(5)-t_{45},\, t_п(6)-t_{46}\right\}=\min\left\{10-5, 14-10\right\}=4,\; t_п(3)=t_п(4)-t_{34}=2,$$

$$t_п(2)=\min\left\{t_п(4)-t_{24},\, t_п(5)-t_{25}\right\}=\min\left\{4-0, 10-3\right\}=4,\; t_п(1)=0.$$

Для нашего примера расчеты приведены на рис. 5.7. Критический путь $L_{кр}=\left\{1-2-4-6-7\right\}$.

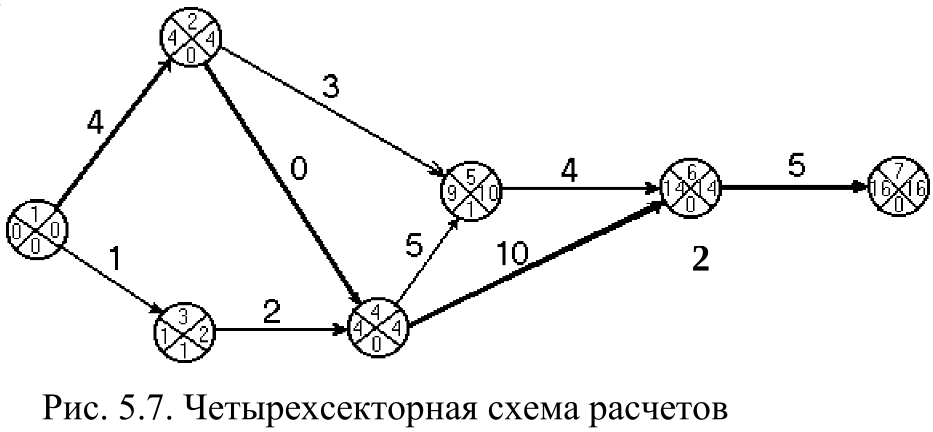



Рис. 5.7. Четырехсекторная схема расчетов

Вычисляем временные параметры работ примера и заносим результаты в таблицу (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Временные параметры работ

| $(i,j)$ | $t_{рн}$ | $t_{ро}$ | $t_{по}$ | $t_{пн}$ | $R_{п}$ | $R_{св}$ | $R'$ | $R''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1, 2) | 0 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (1, 3) | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| (2, 4) | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (2, 5) | 4 | 7 | 10 | 7 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| (3, 4) | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| (4, 5) | 4 | 9 | 10 | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| (4, 6) | 4 | 14 | 14 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (5, 6) | 9 | 13 | 14 | 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| (6, 7) | 14 | 16 | 16 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Строим график Ганта (рис. 5.8).

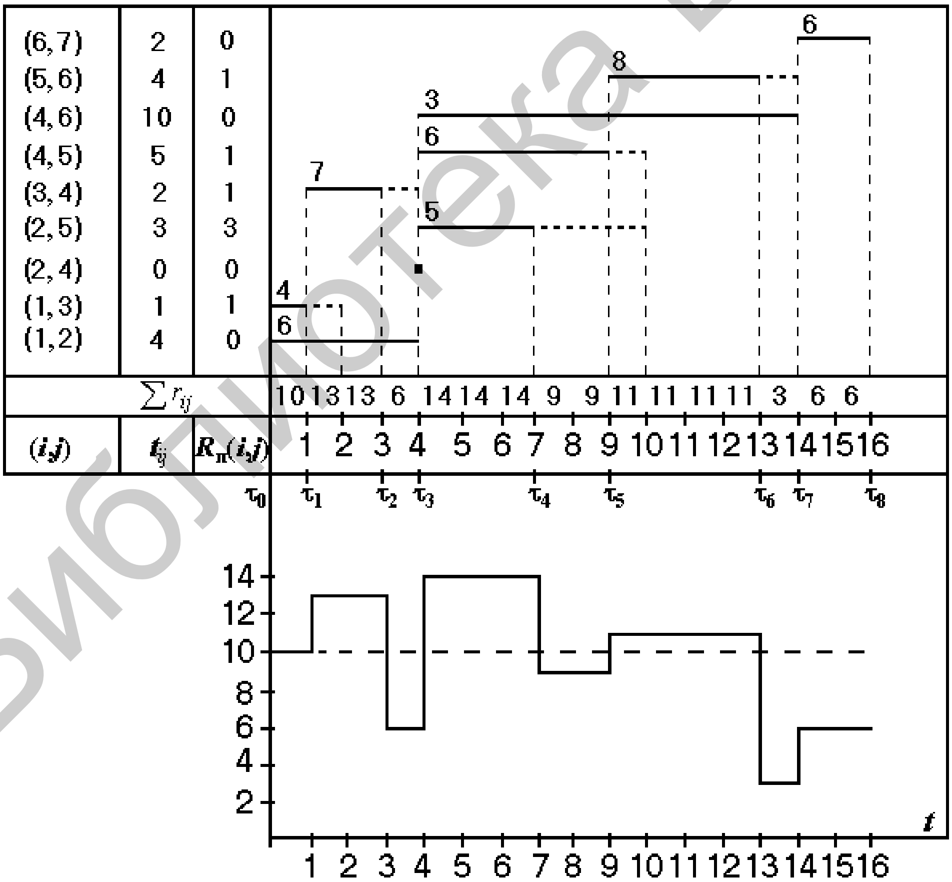



Рис. 5.8. График Ганта

Из рис. 5.8 видим, что на промежутках $(\tau_1, \tau_2)$, $(\tau_3, \tau_4)$, $(\tau_5, \tau_6)$ имеющихся ресурсов в количестве $R = 10$ человек недостаточно для удовлетворения потребности в них. Поэтому график подлежит корректировке с целью приведения сроков выполнения работ в соответствие имеющимся трудовым ресурсам.

**Пример**. Для перестройки производства в порядке перевода его на более интенсивную технологию необходимо осуществить комплекс подготовительных мероприятий (работ). С этой целью создана группа из $R$ специалистов и составлен сетевой график выполнения работ (рис. 5.9).

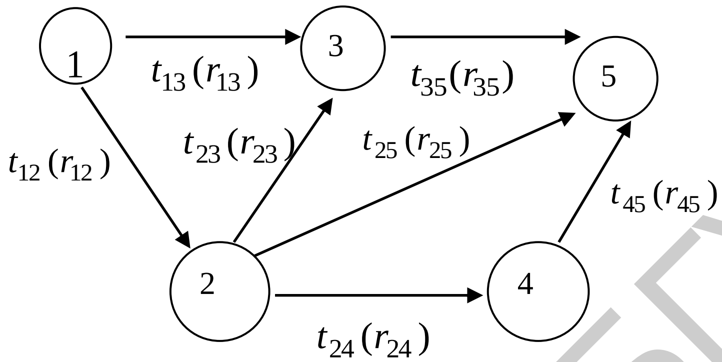



Рис. 5.9. Сетевой график по данным табл. 5.2

Известны продолжительность $t_{ij}$ выполнения каждой работы $(i, j)$ комплекса (может быть известно и количество ресурсов, затрачиваемых при выполнении соответствующих работ $r_{ij}$).

Необходимо:

1. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить длину критического пути.
2. Найти ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
3. Найти резервы времени работ (четыре типа) и построить линейный график.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 5.3

Таблица 5.3

Числовые данные примера

| Параметры задачи | $t_{12}$ | $t_{13}$ | $t_{23}$ | $t_{24}$ | $t_{25}$ | $t_{35}$ | $t_{45}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | 2 | 6 | 5 | 6 | 3 |

***Решение.*** Решение задачи начинаем с перечисления имеющихся работ и событий, а также с определения раннего срока свершения события $t_{\text{р}}(i)$ и позднего срока свершения события $t_{\text{п}}(i)$. Ранний срок свершения события 5 совпадает с критическим временем: $t_{\text{р}}(5) = t_{\text{кр}}$. Для нашей задачи сначала перечисляем все имеющиеся работы и их продолжительность, затем с использованием соответствующих формул рассчитываем ранний и поздний сроки свершения всех событий (рис. 5.10, ячейки C1:F6). Для определения раннего срока события сначала необходимо определить длину всех имеющихся путей сетевого графика. Рассмотрим пути из события 1 в 3; из 1 в 5; из 2 в 5 (т. к. для этих событий пути не единственные). Пути и их длина представлены на рис. 5.10 в строках 9–13. Далее по формуле $t_{р}(i)=t[L_1(i)]$, например, для события 3 получаем $t_{р}(3)=t[L_1(3)]$. При помощи функции Excel получаем МАКС(B10:B11) = 5. Определив ранний срок свершения последнего пятого события получаем критическое время: $t_{р}(5)=12$. Находим поздние сроки свершения событий по формуле $t_{п}(i)=t_{кр}-t[L_2(i)]$. Для события 3 имеем $t_{п}(3)=t_{кр}-t[L_2(3)]=$ $=t_{кр}-t_{35}=12-6=6$, а для события 2: $t_{п}(2)=t_{кр}-t[L_2(2)]=t_{кр}-$ $-\max\{t_{23}+t_{35};t_{25};t_{24}+t_{45}\}=12-\max\{8;5;9\}=3.$

D6 = =МАКС(F10:F14)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Работы: | продол. Ра | События | t(р) | t(п) | Rп(i) | t(РН)=t(р) | t(РО) | t(по) | t(пн) | R(п)(i;j) | R(н) | R' |
| 2 | (1;2) | 3 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 0 | **0** | 0 | 0 |
| 3 | (1;3) | 5 | **2** | 3 | 3 | 0 | 0 | 5 | 6 | 1 | **1** | 0 | 1 |
| 4 | (2;3) | 2 | **3** | 5 | 6 | 1 | 3 | 5 | 6 | 4 | **1** | 0 | 1 |
| 5 | (2;4) | 6 | **4** | 9 | 9 | 0 | 3 | 9 | 9 | 3 | **0** | 0 | 0 |
| 6 | (2;5) | 5 | **5** | **12** | **12** | 0 | 3 | 8 | 12 | 7 | **4** | 4 | 4 |
| 7 | (3;5) | 6 | | | | | 5 | 11 | 12 | 6 | **1** | 0 | 0 |
| 8 | (4;5) | 3 | | | | | 9 | 12 | 12 | 9 | **0** | 0 | 0 |
| 9 | Путь из 1 в 3: | | | Путь из 1 в 5: | | | Путь из 2 в 5: | | | | | | |
| 10 | 13 | 5 | | 135 | | 11 | 235 | 8 | | | | | |
| 11 | 123 | 5 | | 1235 | | 11 | 25 | 5 | | | | | |
| 12 | | | | 125 | | 8 | 245 | 9 | | | | | |
| 13 | | | | 1245 | | 12 | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | |

Рис. 5.10. Расчетный лист

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет **резерв времени события**: $R(i)=t_{п}(i)-t_{р}(i)$. Резервы критических событий равны нулю. На рис. 5.10 резервы событий представлены в ячейках F2:F6. Таким образом, события 1, 2, 4, 5 принадлежат критическому пути.

Определяем временные параметры работ: ранний срок начала работы $(i,j)$, поздний срок окончания работы $(i,j)$, поздний срок начала работы $(i,j)$. Например, для работы (2, 3): $t_{рн}(2,3)=t_{р}(2)=3$, $t_{ро}(2;3)=t_{р}(2)+t_{23}=3+2=5$, $t_{пн}(2;3)=t_{п}(3)-t_{23}=6-2=4$. Аналогичным образом рассчитываем временные параметры остальных работ (см. рис. 5.10, ячейки O2:J8).

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{рн}(i;j)$ и $t_{по}(i,j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени: полный резерв времени работы, независимый (свободный) резерв времени работы, частный резерв времени работы первого вида (гарантийный), частный резерв времени работы второго вида.

Вычисляем резервы времени работ задачи (на рис. 5.10 они находятся в столбцах К, L, M).

На основе сетевого графика составляем линейный график (график Ганта), на котором изображается время начала и окончания каждой работы, а также полный резерв времени для каждой работы. По графику также определяем работы, принадлежащие критическому пути. Для построения линейного графика нам понадобятся следующие данные: ранний срок начала работы, продолжительность работы и полный резерв времени работы. Копируем эти данные в ячейки A16:C23 (рис. 5.11). В столбце D указываем, принадлежит ли данное событие критическому пути (используем тот факт, что если полный резерв времени равен нулю, то событие принадлежит критическому пути). Функция ЕСЛИ возвращает одно значение, если указанное условие истинно, и другие, если оно ложно. Пример использования данной функции см. на рис. 5.11, ячейка D17.

***Построение диаграммы «Линейный график»:***

1. Нажать кнопку **Мастер диаграмм**. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 1 (вид диаграммы). Выбрать: **Линейчатая; Вид: Вид 2**. **Далее.**

2. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 2 (источник данных диаграммы) и вид выбранной диаграммы. **Диапазон:** вводим наши данные (три столбца A17:C23), **Ряд – подписи по оси X:** вводим столбец «Работы»: (1, 2) – (4, 5) (ячейки A2:A8, см. рис. 5.10). **Далее.**

3. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 3 (параметры диаграммы). На этом шаге можно ввести легенду, а также название диаграммы и осей. Вводимый текст виден на экране. **Далее.**

4. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 4 (размещение диаграммы). Выбрать: **поместить диаграмму на имеющемся листе**. **Готово**.

На экране отобразится диаграмма (см. рис. 5.11).

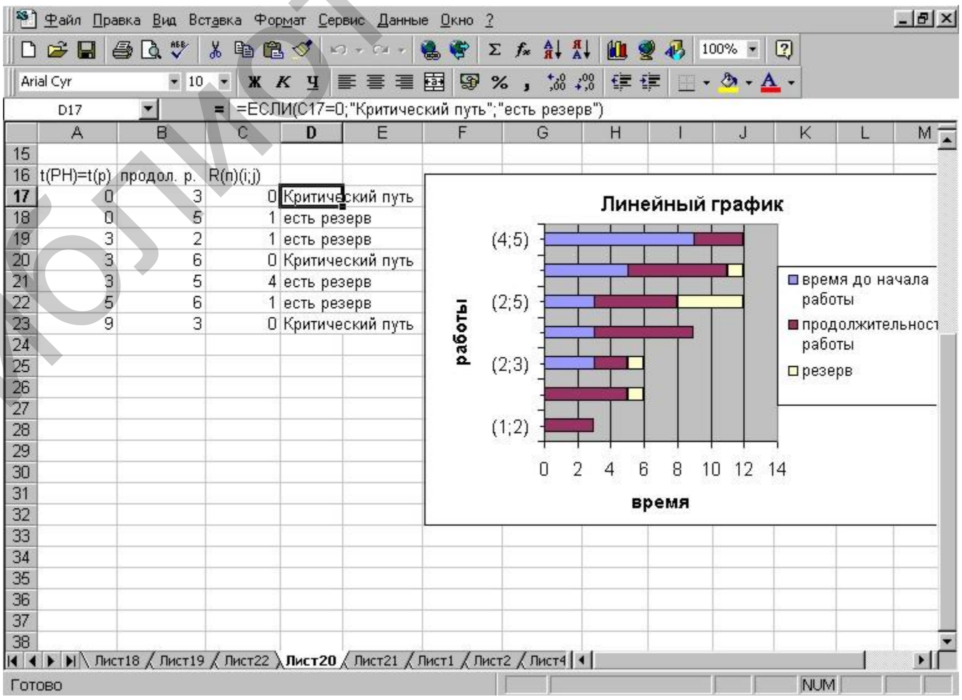



Рис. 5.11. Календарный график

### 5.5. Оптимизация комплекса работ по ресурсам

Под оптимальным распределением ресурсов понимается такое размещение работ во времени, при котором в любой момент времени было бы достаточно ресурса для выполнения работ, а время выполнения всего комплекса работ было бы минимальным. На практике получили широкое применение эвристические методы распределения ресурсов. Отметим, что приведенный ниже алгоритм не всегда позволяет найти оптимальное решение задачи, однако дает хорошее *приближение* к нему.

***Алгоритм решения задачи:***

*Первый шаг.* 1. Нумеруем работы, расположенные над промежутком $(\tau_0, \tau_1)$ на графике Ганта, в порядке возрастания их полных резервов. Работы с одинаковыми полными резервами времени нумеруем в порядке убывания интенсивностей.

2. Суммируем последовательно интенсивности работ, расположенных над промежутком $(\tau_0, \tau_1)$, в порядке возрастания присвоенных им номеров и сравниваем полученные суммы с заданной величиной ресурса $R$. Все работы, сумма интенсивностей которых не превосходит $R$, оставляем в первоначальном положении. Если после прибавления интенсивности какой-нибудь работы окажется, что суммарное потребление ресурсов больше $R$, то эту работу сдвигаем вправо на величину рассматриваемого промежутка, переходим к добавлению интенсивности следующей работы и так продолжаем до тех пор, пока не будут просмотрены все работы, расположенные над промежутком $(\tau_0, \tau_1)$. Результатом выполнения этого действия является новый график Ганта, момент $\tau_1$ которого считаем началом оставшейся части комплекса работ.

*Общий шаг.* Предположим, что выполнено $k$ шагов алгоритма и получен линейный график, момент $\tau_k$ которого является началом оставшейся части комплекса работ.

1. Проецируем на ось времени начало и конец каждой работы, расположенной над промежутком $(\tau_k, t_{\text{кр}})$, и обозначаем проекцию, ближайшую к $\tau_k$, через $\tau_{k+1}$. Таким образом, выделен новый промежуток $(\tau_k, \tau_{k+1})$.

2. Определяем полные резервы работ $R_{\text{п}}(i, j)$, расположенных над промежутком $(\tau_k, \tau_{k+1})$, и нумеруем их. Сначала нумеруем работы $(i,j)$, начатые левее момента $\tau_k$, согласно возрастанию разностей между полными резервами этих работ и длительностями от начала до момента $\tau_{k+1}$. Работы с одинаковыми разностями нумеруем в порядке убывания интенсивностей, все остальные работы – в порядке возрастания их полных резервов, а с одинаковыми резервами – в порядке убывания интенсивностей.

3. Эти действия выполняются так же, как и действие 2 первого шага. Следует иметь в виду, что если сдвигу подлежит работа $(i,j)$, начатая левее $\tau_k$, то сдвигаем всю работу, т. е. начало этой работы устанавливаем в момент $\tau_{k+1}$.

4. Проверяем, все ли работы комплекса просмотрены. Если все, решение закончено, если нет, то возвращаемся к п. 1 общего повторяющегося шага.

### 5.6. Оптимизация сетевого графика по затратам сведением к задаче линейного программирования

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность $t_{ij}$ и минимально возможное время выполнения $d_{ij}$. Пусть задан срок выполнения проекта $t_0$, а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы $(i, j)$ линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств $x_{ij}$ и выражается соотношением $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты $k_{ij}$ известны (табл. 5.4).

Требуется найти такие $t^{н}_{ij}$, $t^{о}_{ij}$, $x_{ij}$, чтобы срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины $t_0$, суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным, продолжительность выполнения каждой работы $t'_{ij}$ была не меньше заданной величины $d_{ij}$.

Таблица 5.4

Исходные данные проекта

| Пара-метры | Работы | | | | | | | | | | Срок выполнения проекта $t_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 2,4 | 2,5 | 3,4 | 3,6 | 4,5 | 4,6 | 5,6 | |
| $t_{ij}$ | 7 | 11 | 16 | 6 | 10 | 8 | 13 | 12 | 14 | 9 | |
| $d_{ij}$ | 4 | 8 | 13 | 5 | 7 | 6 | 10 | 10 | 11 | 7 | 34 |
| $k_{ij}$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,05 | 0,25 | 0,2 | 0,12 | 0,5 | 0,08 | 0,02 | |

1. Записываем все данные на сетевой график и рассчитываем сроки свершения событий (рис. 5.12).

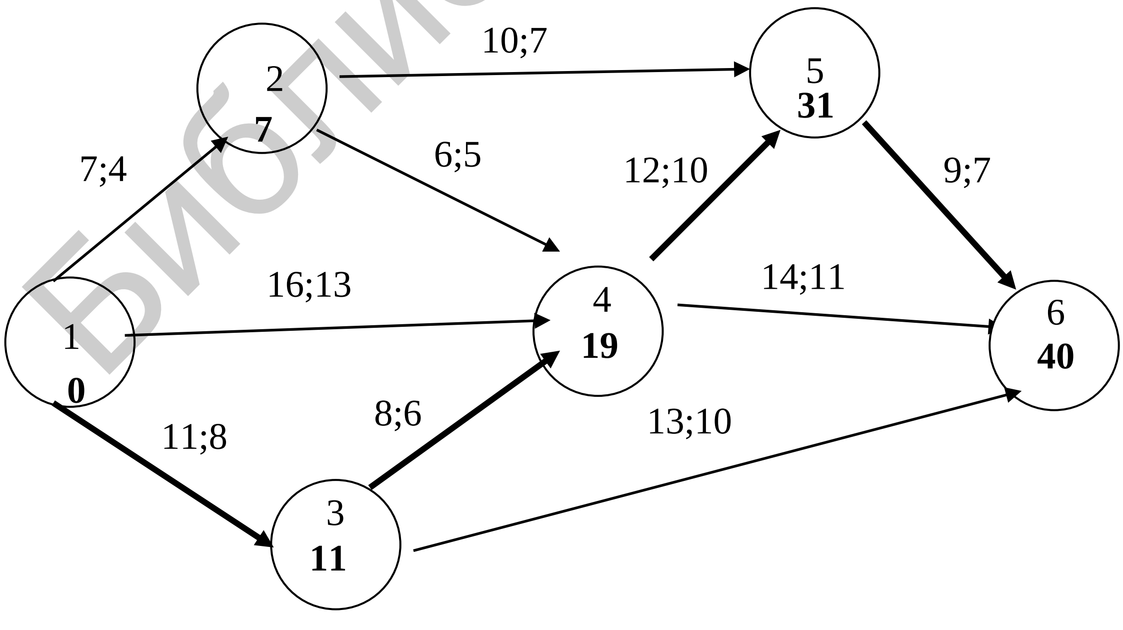



Рис. 5.12. Сетевой график по данным табл. 5.4

Расчеты показали, что срок выполнения проекта $t_{кр} = 40$, т. е. превышает директивный срок $t_0 = 34$.

2. Составляем математическую модель задачи.

Целевая функция имеет вид

$$f = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{14} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \ (\min).$$

Записываем ограничения задачи:

а) срок выполнения проекта не должен превышать $t_0 = 34$:

$$t^о_{36} \le 34;\ t^о_{46} \le 34;\ t^о_{56} \le 34;$$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$$t^о_{12} - t^н_{12} \ge 4,\quad t^о_{34} - t^н_{34} \ge 6,\quad t^о_{13} - t^н_{13} \ge 8,\quad t^о_{36} - t^н_{36} \ge 10,$$
$$t^о_{14} - t^н_{14} \ge 13,\quad t^о_{45} - t^н_{45} \ge 10,\quad t^о_{24} - t^н_{24} \ge 5,\quad t^о_{46} - t^н_{46} \ge 11;$$
$$t^о_{25} - t^н_{25} \ge 7,\quad t^о_{56} - t^н_{56} \ge 7,$$

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$$t^о_{12} - t^н_{12} = 7 - 0{,}1x_{12},\qquad t^о_{13} - t^н_{13} = 11 - 0{,}3x_{13},$$
$$t^о_{14} - t^н_{14} = 16 - 0{,}2x_{14},\qquad t^о_{24} - t^н_{24} = 6 - 0{,}05x_{24},$$
$$t^о_{25} - t^н_{25} = 10 - 0{,}25x_{25},\qquad t^о_{34} - t^н_{34} = 8 - 0{,}2x_{34},$$
$$t^о_{36} - t^н_{36} = 13 - 0{,}12x_{36},\qquad t^о_{45} - t^н_{45} = 12 - 0{,}5x_{45},$$
$$t^о_{46} - t^н_{46} = 14 - 0{,}08x_{46},\qquad t^о_{56} - t^н_{56} = 9 - 0{,}02x_{56};$$

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$$t^н_{12} = 0,\quad t^н_{13} = 0,\quad t^н_{14} = 0,$$
$$t^н_{24} \ge t^о_{12},\quad t^н_{25} \ge t^о_{12},\quad t^н_{34} \ge t^о_{13},$$
$$t^н_{36} \ge t^о_{13},\quad t^н_{45} \ge t^о_{14},\quad t^н_{45} \ge t^о_{24},$$
$$t^н_{45} \ge t^о_{34},\quad t^н_{46} \ge t^о_{14},\quad t^н_{46} \ge t^о_{24},$$
$$t^н_{46} \ge t^о_{34},\quad t^н_{56} \ge t^о_{25},\quad t^н_{56} \ge t^о_{45};$$

д) условие неотрицательности неизвестных:

$$t^н_{ij} \ge 0,\ t^о_{ij} \ge 0,\ x_{ij} \ge 0,\ (i, j) \in \vec{e}.$$

3. Получаем численное решение задачи, являющейся ЗЛП.

Решив данную задачу, получаем следующие результаты:

$$t^н_{12} = 0,\quad t^о_{12} = 7,\quad t^н_{13} = 0,\quad t^о_{13} = 8,$$
$$t^н_{14} = 0,\quad t^о_{14} = 15,\quad t^н_{24} = 7,\quad t^о_{24} = 13,$$
$$t^н_{25} = 7,\quad t^о_{25} = 17,\quad t^н_{34} = 8,\quad t^о_{34} = 15,$$
$$t^н_{36} = 8,\quad t^о_{36} = 21,\quad t^н_{45} = 15,$$
$$t^о_{45} = 25,\quad t^н_{56} = 25,\quad t^о_{56} = 34,$$
$$x_{12} = 0,\quad x_{13} = 10,\quad x_{14} = 5,\quad x_{24} = 0,\quad x_{25} = 0,$$
$$x_{34} = 5,\quad x_{36} = 0,\quad x_{45} = 4,\ x_{46} = 0,\ x_{56} = 0,\ f_{\min} = 24.$$

Результаты представляем на сетевом графике (рис. 5.13):

4. Анализируем полученные результаты. Чтобы выполнить работы проекта за время $t_0$=34, необходимо дополнительно вложить 24 ден. ед. При этом средства распределятся следующим образом: 10 ден. ед. – в работу (1,3), 5 ден. ед. – в работу (1,4), 5 ден. ед. – в работу (3,4) и 4 ден. ед. – в работу (4,5),

что приведет к сокращению продолжительности работы (1,3) на 3 дня, работы (1,4) – на 1 день, работы (3,4) – на 1 день и работы (4,5) – на 2 дня. Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 6 ед. времени.

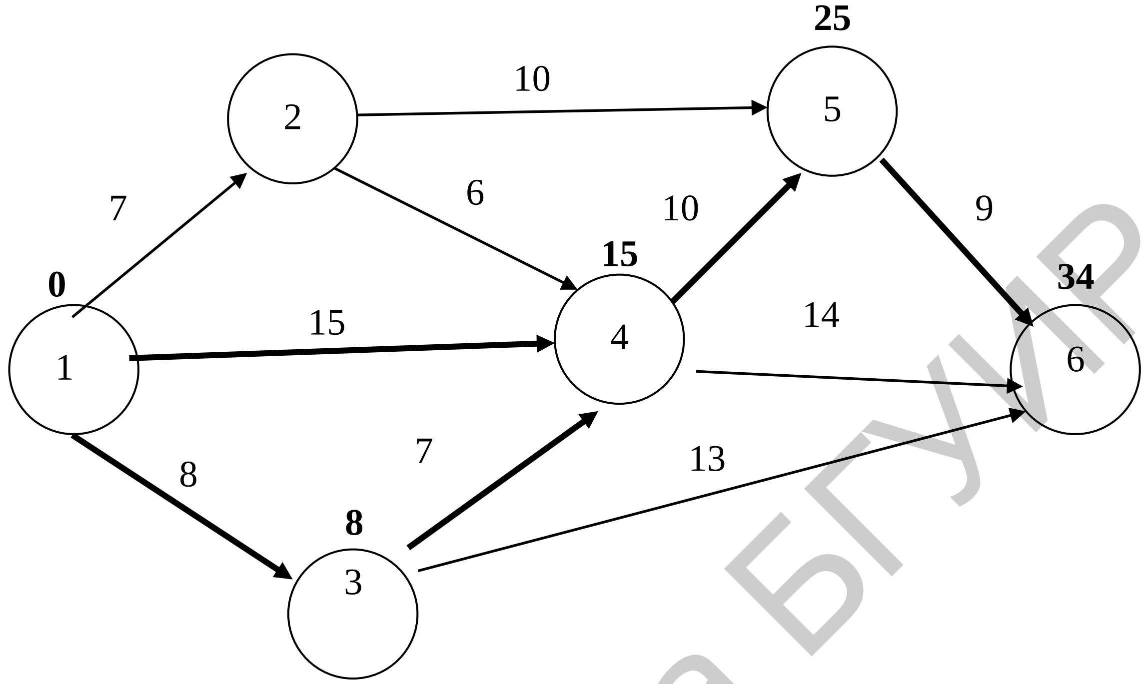



Рис. 5.13. Итоговый сетевой график

**5.7. Оптимизация сетевого графика по времени сведением к задаче линейного программирования**

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность $t_{ij}$ и минимально возможное время выполнения $d_{ij}$. Для сокращения срока реализации проекта выделено В ден. ед. Вложение дополнительных средств $x_{ij}$ в работу $(i, j)$ сокращает время ее выполнения до $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты $k_{ij}$ известны (табл. 5.5). Требуется найти такие $t^{н}_{ij}$, $t^{о}_{ij}$, $x_{ij}$, чтобы время выполнения всего комплекса работ было минимальным, количество используемых дополнительных средств не превышало В ден. ед., продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины $d_{ij}$.

Таблица 5.5

Исходные данные проекта

| Пара-метры | Работы | | | | | | | Сумма средств В |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (2,3) | (3,4) | (3,5) | (4,5) | |
| $t_{ij}$ | 5 | 6 | 2 | 4 | 9 | 7 | 4 | |
| $d_{ij}$ | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 | 4 | 2 | 47 |
| $k_{ij}$ | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 0,25 | 0,4 | 0,2 | 0,1 | |

***Решение.***

1. Записываем все данные на сетевой график (рис. 5.14).

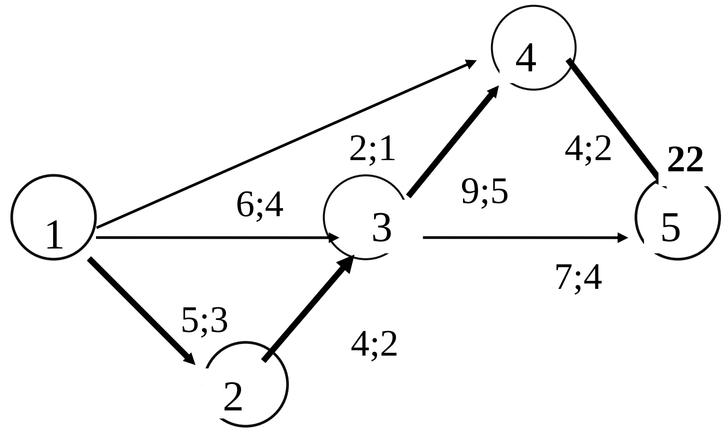



Рис. 5.14. Сетевой график по данным табл. 5.5

По первоначальному условию $t_{кр} = 22$ , т. е. проект может быть выполнен за 22 ед. времени.

2. Составляем математическую модель задачи.

Чтобы однозначно записать целевую функцию, добавляем на сетевом графике фиктивную работу (5,6), как показано на рис. 5.15.

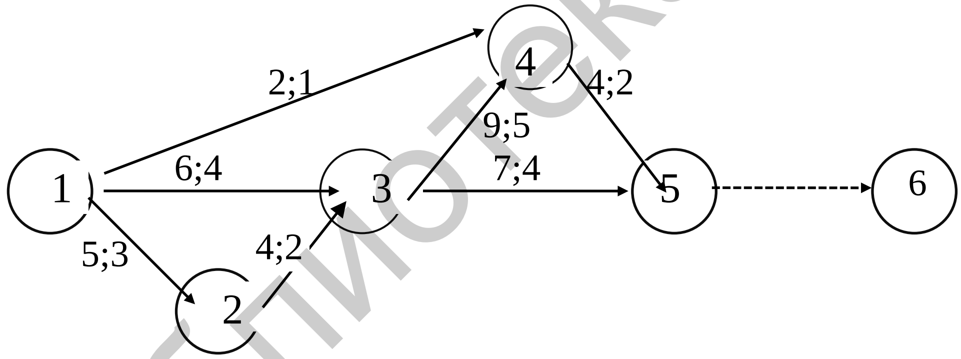



Рис. 5.15. Сетевой график с фиктивной работой

Целевая функция имеет вид $t_{кр} = t^{о}_{56}$ (min) .

Записываем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \leq 47;$$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$$t^{о}_{12} - t^{н}_{12} \geq 3, \qquad t^{о}_{34} - t^{н}_{34} \geq 5,$$
$$t^{о}_{13} - t^{н}_{13} \geq 4, \qquad t^{о}_{35} - t^{н}_{35} \geq 4,$$
$$t^{о}_{14} - t^{н}_{14} \geq 1, \qquad t^{о}_{45} - t^{н}_{45} \geq 2,$$

$$t^{о}_{23} - t^{н}_{23} \geq 2, \qquad t^{о}_{56} - t^{н}_{56} = 0;$$

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$$t^{о}_{12} - t^{н}_{12} = 5 - 0{,}5x_{12}, \quad t^{о}_{13} - t^{н}_{13} = 6 - 0{,}2x_{13},$$
$$t^{о}_{14} - t^{н}_{14} = 2 - 0{,}3x_{14}, \quad t^{о}_{23} - t^{н}_{23} = 4 - 0{,}25x_{23},$$
$$t^{о}_{34} - t^{н}_{34} = 9 - 0{,}4x_{34}, \quad t^{о}_{35} - t^{н}_{35} = 7 - 0{,}2x_{35},$$
$$t^{о}_{45} - t^{н}_{45} = 4 - 0{,}1x_{45};$$

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$$t^{н}_{12} = 0, \quad t^{н}_{13} = 0, \quad t^{н}_{14} = 0, \quad t^{н}_{23} \geq t^{о}_{12},$$
$$t^{н}_{34} \geq t^{о}_{13}, \quad t^{н}_{34} \geq t^{о}_{23}, \quad t^{н}_{35} \geq t^{о}_{13}, \quad t^{н}_{35} \geq t^{о}_{23},$$
$$t^{н}_{45} \geq t^{о}_{14}, \quad t^{н}_{45} \geq t^{о}_{34}, \quad t^{н}_{56} \geq t^{о}_{35}, \quad t^{н}_{56} \geq t^{о}_{45};$$

д) условие неотрицательности неизвестных: $t^{н}_{ij} \geq 0$, $t^{о}_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in \vec{e}$ .

3. Получаем численное решение задачи:

Решив данную задачу ЗЛП, получаем следующие результаты:

$t^{н}_{12} = 0$, $t^{о}_{12} = 3$, $t^{н}_{13} = 0$, $t^{о}_{13} = 3$, $t^{н}_{14} = 0$ , $t^{о}_{14} = 2$,

$t^{н}_{23} = 3$, $t^{о}_{23} = 3$, $t^{н}_{34} = 3$, $t^{о}_{34} = 8$, $t^{н}_{35} = 3$, $t^{о}_{35} = 10$,

$t^{н}_{45} = 8$, $t^{о}_{45} = 10$, $t^{н}_{56} = 10$, $t^{о}_{56} = 10$,

$x_{12} = 20$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{14} = 0$, $x_{34} = 10$, $x_{35} = 0$, $x_{45} = 20$, $t_{кр} = 10$.

Результаты представляем на сетевом графике (рис. 5.16):

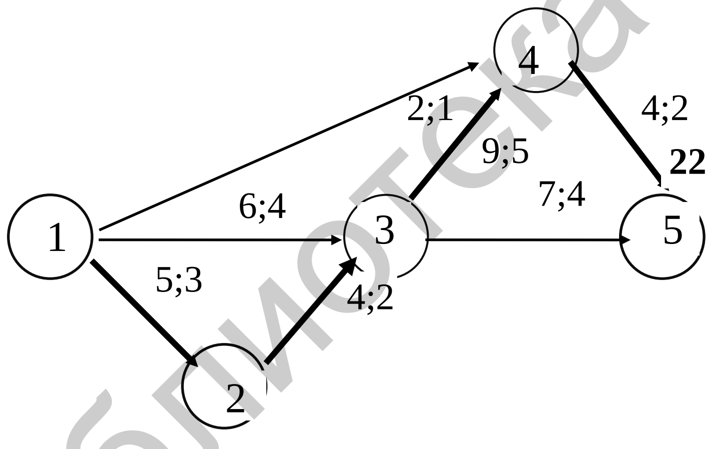



Рис. 5.16. Итоговый сетевой график

4. Анализируем полученные результаты. При дополнительном вложении 47 ден. ед. проект может быть выполнен за 10 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 20 ден. ед. – в работу (1,2), 10 ден. ед. – в работу (3,4) и 20 ден. ед. – в работу (4,5), что приведет к сокращению продолжительности работы (1,2). Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 8 ед. времени.

## Литература

1. Габасов, Р. Методы оптимизации : учеб. пособие / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск : Изд-во БГУ, 1981.

2. Галлеев, Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галлеев, В. М. Тихомиров. – М. : Эдиториал УРСС, 2000.

3. Карманов, В. Г. Математическое программирование : учеб. пособие / В. Г. Карманов. – М. : Физматлит, 2001.

4. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск : Выш. шк., 2001.

5. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Выш. шк., 2001.

6. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М. : Высш. шк., 2002.

7. Батищев, Д. И. Поисковые методы оптимального проектирования / Д. И. Батищев. – М. : Сов. радио, 1975.

8. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – М. : Изд-во МАИ, 1995.

9. Аттетков, А. В. Методы оптимизации / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.

10. Зайченко, Ю. П. Курс лекций «Исследование операций» / Ю. П. Зайченко [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://iasa.org.ua.

11. Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1969.

12. Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М. : Наука, 1978.

13. Альсевич, В. В. Методы оптимизации: упражнения и задания : учеб. пособие / В. В. Альсевич, В. В. Крахотко. – Минск : БГУ, 2005.

14. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач : учеб. пособие / Ф. П. Васильев. – М. : Наука, 1988.

15. Ашманов, С. А. Линейное программирование : учеб. пособие / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1981.

16. Моисеев, К. Н. Методы оптимизации : учеб. пособие / К. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столяров. – М. : Наука, 1978.

17. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М. : Айрис-пресс, 2002.

18. Пантелеев, А. В. Теория управления в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Бортаковский. – М. : Высш. шк., 2003.

Св. план 2018, поз. 41

*Учебное издание*

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В четырех частях

Часть 1

**Лапицкая** Наталья Владимировна
**Можей** Наталья Павловна

# ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Корректор *Е. И. Герман*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 20.07.2018. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 10,58. Уч.-изд. л. 11,1. Тираж 100 экз. Заказ 68.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014, №2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014. ЛП №02330/264 от 14.04.2014. 220013, Минск, П. Бровки, 6