<u>תרגיל במציאת שורש רב ממדי</u>

מבנה של (כוכב) ננס לבן – פתרון n משוואות לא ליניאריות עם n נעלמים

ננס לבן הוא כוכב המורכב כולו מחומר מנוון, חומר בו הלחץ תלוי רק בצפיפות ולא בטמפרטורה. במקרה שכזה ניתן לרשום את משוואת המצב של החומר:

$$p = \kappa\rho^{\gamma}$$

כאשר p הוא הלחץ, ρ הצפיפות ו-γ , κ הינם קבועים. ניתן לדבר על שני מקרי גבול:

- חומר לא יחסותי עבורו $\gamma = \frac{5}{3}$, $\kappa \approx 3.15 \cdot 10^{12}$ ביחידות cgs.
- חומר יחסותי עבורו $\gamma = \frac{4}{3}$, $\kappa \approx 4.9 \cdot 10^{14}$ ביחידות cgs.

חומר הופך למנוון כאשר הצפיפות גבוהה, וכאשר היא גבוהה עוד יותר הוא הופך גם ליחסותי, ערכי κ שצוינו נכונים עבור חומר עם $\frac{A}{Z} = 2$ כאשר A , Z הם המספר האטומי והמסה האטומית של החומר בהתאמה.

לצורך מציאת המבנה של הכוכב נניח שהוא ניתן לתיאור בסימטריה כדורית ונשתמש בתנאי ההידרוסטטיות לפיו הכבידה העצמית בכוכב מאוזנת לחלוטין על ידי גרדיאנט הלחץ:

$$\frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

כאשר m היא המסה הנצברת ממרכז הכוכב עד רדיוס r (משוואה זו תוצג בהמשך הקורס).

<u>תכונות של פתרון בעיית מבנה ננס לבן</u>

נקרב את תנאי ההידרוסטטיות על ידי קירוב ליניארי:

$$\frac{P}{M} = \frac{GM}{4\pi R^4} \quad \xrightarrow{yields} \quad P = \frac{GM^2}{4\pi R^4}$$

כאשר P – הלחץ במרכז הכוכב, M – מסת הכוכב ו-R – הרדיוס החיצוני של הכוכב

כמו כן, נקרב את הצפיפות במרכז הכוכב על ידי הצפיפות הממוצעת: $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$ ועל ידי שימוש במשוואת המצב מקבלים: $P = \kappa\left(\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\right)^{\gamma}$

נשווה את שני הביטויים ללחץ ונקבל:

$$\frac{GM^2}{4\pi R^4} = \kappa\left(\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\right)^{\gamma} \xrightarrow{yields} R^{3\gamma-4}M^{2-\gamma} = \frac{4\pi}{G}\kappa\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma}$$

עבור $\gamma = \frac{5}{3}$ וכשרדיוס הכוכב ומסת הכוכב ניתנים ביחידות שמש נקבל: $RM^{\frac{1}{3}} = \frac{4\pi}{G}\kappa\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma} \approx 0.006$

כלומר, מקבלים שככל שהמסה של הכוכב גדולה יותר הרדיוס החיצוני שלו קטן ושעבור כוכב של מסת שמש הרדיוס הוא 6 אלפיות של רדיוס שמש.

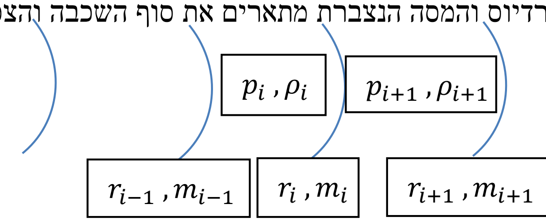
עבור $\gamma = \frac{4}{3}$ נקבל שאין תלות ב-R : $M = \left(\frac{4\pi}{G}\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2} \approx 0.8M_{\odot}$

כלומר, קיים פתרון רק עבור מסה מסוימת! משמעות הדבר היא שעבור מסה גדולה יותר הכבידה חזקה יותר והלחץ לא עומד בה ועם הקטנת הרדיוס החיצוני הכבידה עולה מהר יותר מהלחץ, ולהיפך. במציאות הפיזיקאלית, מסה קטנה יותר תגרום להתפשטות עד שלפחות החלקים החיצוניים בכוכב יפסיקו להיות יחסותיים והערך של γ יגדל.

פתרון נומרי של מבנה ננס לבן

נמצא את הפתרון על ידי שיטת רלקסציה, כלומר, נניח שאנו רוצים לחשב את מבנהו של כוכב במסה M ולצורך הפתרון נגדיר ווקטור עם n איברים כך ש: $i = 1..n$, $m_i = \frac{M}{n}i$ ונשאל לכל i מהו ערכו של הרדיוס r_i המקיים את תנאי ההידרוסטטיות. למעשה אנו מבצעים "דיסקרטיזציה" של מבנה הכוכב והפיכה של המשוואה הדיפרנציאלית של תנאי ההידרוסטטיקה לאוסף משוואות הפרשים על הגדלים הדיסקרטיים.

משוואות ההפרשים מתייחסות למצב המתואר בתרשים המצורף לפיו הכוכב מתואר על ידי שכבות כדוריות כשהרדיוס והמסה הנצברת מתארים את סוף השכבה והצפיפות והלחץ מיוחסים למרכזה:



באופן זה, כשרוצים לבטא את תנאי ההידרוסטטיות עבור r_i, מקבלים את הביטוי: $\frac{\delta p_i}{\delta m_i} = -\frac{Gm_i}{4\pi r_i^4}$ כאשר אגף שמאל מתאר את הפרש הלחצים מחולק בהפרש המסות סביב רדיוס זה. כלומר, הפרש הלחצים הוא בין אמצע השכבה עבורה r_i הוא הגבול התחתון לבין אמצע השכבה בה הוא הגבול העליון: $\delta p_i = p_{i+1} - p_i$.

הפרש המסות הוא בין המסה באמצע השכבה מעל: $\frac{1}{2}(m_i - m_{i+1})$ לבין המסה באמצע השכבה מתחת: $\frac{1}{2}(m_{i-1} - m_i)$. כלומר, $\delta m_i = \frac{1}{2}(m_i - m_{i+1}) - \frac{1}{2}(m_{i-1} - m_i) = \frac{1}{2}(m_{i+1} - m_{i-1})$.

כמו כן הלחץ בשכבה מחושב מהצפיפות הממוצעת שלה כלומר ממסת השכבה חלקי הנפח שלה: $p_i = \kappa\left(\frac{m_i - m_{i-1}}{\frac{4\pi}{3}\left(r_i^3 - r_{i-1}^3\right)}\right)^{\gamma}$ כשהביטוי בתוך הסוגריים הינו למעשה ρ_i – הצפיפות הממוצעת בשכבה.

כך, נגדיר לכל $i = 1..n$ פונקציה שכאשר היא שווה לאפס, מתקיים תנאי ההידרוסטטיות:

$$f_i = \frac{\frac{\delta p_i}{\delta m_i}}{\frac{G m_i}{4\pi r_i^4}} + 1$$

.

לצורך המשוואות עבור $i = 1$ ו-$i = n$ נזכור ש: $r_0 = 0\,, m_0 = 0\,, m_{n+1} = m_n = M\,, p_{n+1} = 0$

כלומר, בהינתן הגדרות אלו, תנאי ההידרוסטטיות שקול לדרישה שיתקיימו n המשוואות: $f_i = 0 \;\;,\;\; i = 1..n$ התלויות ב-n נעלמים: $r_i \;\;,\;\; i = 1..n$.

מטלות:

1. כתבו פונקציה לפתרון n משוואות לא ליניאריות עם n נעלמים בהינתן הפונקציה הווקטורית $F_i\left(\left\{x_j\right\}_1^n\right)$ ופונקציה המחזירה את מטריצת הנגזרות $\partial_j F_i\left(\left\{x_j\right\}\right)$ ובהינתן ניחוש התחלתי ל-$\left\{x_j\right\}_1^n$.
   במילים אחרות, יש למצוא את ערכי $\left\{x_j\right\}_1^n$ עבורם מתקיים $F_i\left(\left\{x_j\right\}_1^n\right) = 0 \quad \forall i = 1..n,$
2. בדקו פונקציה זו עבור מקרה פשוט וצרפו הבדיקה להגשת התרגיל
3. כתבו פונקציה המחזירה את $f_i\left(\left\{r_j\right\}_1^n\right)$ לפי נוסחת ההפרשים של תנאי ההידרוסטטיות בעמוד הקודם
   וכן פונקציה המחזירה את מטריצת הנגזרות $\partial_j f_i\left(\left\{r_j\right\}_1^n\right)$
4. בהסתמך על הפונקציות שב-1 וב-3, יש לכתוב פונקציה המוצאת את מבנה הכוכב כשהפרמטרים של הפונקציה הם:
   a. n – מספר הנקודות (או שכבות) המתארות את הכוכב
   b. M – מסת הכוכב ביחידות שמש (כלומר, בכפולות של מסת השמש שהיא: $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{33} gr$)
   c. R – ניחוש ראשוני לרדיוס החיצוני של הכוכב ביחידות שמש (כפולות של רדיוס השמש שהוא $R_\odot \approx 7 \cdot 10^{10} cm$)
   d. gamma – של משוואת המצב

הפונקציה מתחילה לחפש שורש רב ממדי, כלומר למצוא את ערכי $i = 1..n$, r_i המקיימים את המשוואות $i = 1..n$, $f_i = 0$, כאשר הניחוש הראשוני הוא: $i = 1..n$, $r_i = \frac{R}{n} i$ וזאת על ידי שימוש באלגוריתם המתואר בסיכום 10 של הקורס.

5. השתמשו בפונקציה לחישוב מבנה של ננס לבן עם $\gamma = \frac{5}{3}$, $n = 100,\ M = 1M_{\odot},\ R = 1R_{\odot}$ וצרפו טבלה ושרטוט של $\rho(r)$ (ב cgs) לכוכב זה.
6. בדקו על ידי חישוב עבור לפחות 5 ערכים שונים של M האם מקיים $RM^{\frac{1}{3}} = Const$ ואם כן, מהו ערכו של הקבוע (ראינו שערכו הוא כ-0.006 אך עשינו קירוב גס לקבלת ערך זה).
7. בדקו את תלות הרדיוס החיצוני במסת הכוכב עבור מקרה קרוב ליחסותי בו $\gamma = 1.334$ (גם כאן עם $n = 100, R = 1R_{\odot}$) עבור ערכי המסה הבאים (ביחידות שמש): - 1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.44, 1.45 ו-1.46. צרפו טבלה המציגה תוצאות אלו להגשה.
8. לצורך בדיקה והשוואה, חשבו מבנה של ננס לבן עבור $n = 100,\ M = 1M_{\odot},\ \gamma = \frac{5}{3}$ וכן עבור $n = 100,\ M = 1.42M_{\odot},\ \gamma = 1.334$ על ידי שימוש בפונקציה מתאימה מחבילת scipy (מצאו באיזה פונקציה יש או כדאי להשתמש). הדפיסו את הרדיוס החיצוני המתקבל בשני המקרים. יתכן ותצליחו למצוא פתרון במקרים אלו רק עבור ניחוש ראשוני לרדיוס החיצוני שהוא קרוב יותר לפתרון ולא תוכלו להשתמש בניחוש ראשוני $R = 1R_{\odot}$.

הערה חשובה

כזכור, האלגוריתם למציאת שורש רב-ממדי המתואר בסיכום 10 מבוסס על עדכון איטרטיבי לניחוש, אותו ניתן לתאר כ: $r_i^{n+1} = r_i^n + d_i$ כאשר האינדקס העליון מתאר את מספר האיטרציה והווקטור d_i הוא ווקטור התיקון. כשהניחוש רחוק מהפתרון ייתכן במקרה שלנו מצב בו שימוש ישיר בווקטור התיקון יביא לערכי r_i^{n+1} שאינם פיזיקאליים במובן שהם אינם מונוטוניים (כלומר, היפוך שכבות). **אין לאפשר מצב שכזה!** הדרך לכך היא הכפלת ווקטור התיקון בפקטור חיובי קטן מ-1 כך שהיפוך השכבות נמנע. כלומר עדכון המשוואה האיטרטיבית ל: $r_i^{n+1} = r_i^n + f d_i$. כדאי להשתמש ב-$f$ הגדול ביותר שיבטיח את אי היפוך השכבות (כלומר כזה שיגרום לעובי חיובי מינימאלי מוגדר מראש של השכבות). למען הסר ספק, הפקטור f מכפיל את כל ווקטור התיקון, כלומר את כל איבריו.