

תרגיל: הידרודינאמיקה חד ממדית לגרנז'ית

נתונה מערכת חד-ממדית עם זורם המתואר על ידי משוואת מצב של גז אידיאלי: $p = (\gamma - 1)\rho e$, עם תנאי התחלה בהם יש "קפיצה" בצפיפות ובלחץ, כפי שמתואר בשרטוט הבא:

$$x = 0 \qquad x = 8 \qquad x = 16$$



$$u_l = 0, \rho_l = 1, p_l = 1 \quad u_r = 0, \rho_r = 0.125, p_r = 0.1$$

כאשר: $\gamma = 1.4$, אנרגיה פנימית סגולית e , לחץ p , צפיפות ρ , מהירות u , היחידות ב-cgs. תנאי השפה בשני הקצוות הם של קיר קשיח (=תאוצה 0).

נדרש לתאר את התפתחות המערכת עד זמן $t = 2.5$ על ידי שימוש במשוואות ההפרשים שנסקרו בסיכום 19 (כמובן, עם צמיגות מלאכותית). יש לבצע 4 חישובים עם רזולוציה מרחבית שונה (מס' מרווחים: 34, 100, 334, 1000). עבור כל חישוב יש להגיש גרף המתאר את פרופיל הצפיפות $\rho(x)$ בזמן הסופי. כמו כן יש לצרף טבלה המציגה עבור כל רזולוציה את שבר אי-שימור האנרגיה הכוללת ואת מהירות ההתקדמות של התופעות המתרחשות בזרימה: הלם, משטח מגע ושני קצוות מניפת הריווח.

הסבר:

עבור מצב התחלה המאופיין ב"קפיצה" בתנאים התרמודינמיים או במהירות, יתקבלו בדינמיקה תופעות של שינויים בתכונות (לחץ, צפיפות ומהירות – כמובן גם בגדלים תרמודינמיים אחרים, אך מספיק לתאר שניים) שמיקומם לאורך המערכת (ציר ה-x) משתנה עם הזמן. התופעות שצפויות להתקבל בתנאי ההתחלה שפורטו לעיל הם:

- הלם – קפיצה בלחץ, בצפיפות ובמהירות
- משטח מגע – קפיצה בצפיפות ללא קפיצה בלחץ
- מניפת ריווח – שינוי רציף בתנאים (ניתן לדבר על שני קצוות מניפת הריווח)

בפתרון האנליטי של הזרימה ההלם ומשטח המגע מיוצגים על ידי אי רציפות (לכן תוארו כ"קפיצה" לעיל) אך ברזולוציה סופית (עם צמיגות מלאכותית) צפוי שהם "ימרחו" על מספר תאי חישוב.

כדי "לחלץ" את מהירות ההתקדמות של התופעות אפשר לנתח שני גרפים של פרופיל הצפיפות $\rho(x)$ בזמנים שונים: 2.0 ו-2.5. לדוגמה, נמצא את מיקום מרכז ההלם בשני הזמנים ונקבל שמהירות התקדמותו היא הפרש המיקומים מחולק בהפרש הזמנים. יש לשים לב שמהירות ההתקדמות אינה בהכרח שווה למהירות החומרית.

שבר אי-שימור האנרגיה הוא: $\frac{E_{total}^{end} - E_{total}^{start}}{E_{total}^{start}}$, כאשר E_{total}^{start} היא האנרגיה הכוללת בתחילת החישוב ו- E_{total}^{end} היא

האנרגיה הכוללת בסוף החישוב. האנרגיה הכוללת היא סכום האנרגיה הפנימית והאנרגיה הקינטית. האנרגיה הפנימית היא הסכום על תאי החישוב של מכפלת האנרגיה הפנימית הסגולית במסה והאנרגיה הקינטית היא חצי סכום על הקודקודים של מכפלת ריבוע המהירות במסת הקודקוד.