С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин

Задачи по дискретной математике с алгоритмами на Python

2-е издание

Теоретическая часть: основные положения и терминология

Более 800 задач с ответами и решениями

Широкое использование тематики информационно-коммуникационных технологий

Контрольные вопросы к каждой главе

Схема информационной зависимости материала книги

Дополнительная справочная информация

bhv®

С. В. Борзунов
С. Д. Кургалин

Задачи по дискретной математике с алгоритмами на Python

2-е издание

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2022

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73
Б82

Борзунов, С. В.

Б82 Задачи по дискретной математике с алгоритмами на Python / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2022. — 592 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-1214-5

В учебное пособие включены задачи и упражнения вузовского курса дискретной математики, включая разделы, связанные со спецификой информационно-коммуникационных технологий. В каждой главе приводятся теоретические сведения, необходимые для решения задач разного уровня сложности, ответы и во многих случаях подробные пояснения к решениям.

Во втором издании, в отличие от первого, выходившего под названием «Задачи по дискретной математике», используется язык программирования Python. Добавлены более 50 новых задач с решениями и ответами, а также контрольные вопросы к каждой главе.

Для студентов и преподавателей профильных вузов

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.176я73

Рецензенты:

В. А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления Самарского национального исследовательского университета им. академика С. П. Королева;

А. М. Шмырин, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики Липецкого государственного технического университета

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

ISBN 978-5-9775-1214-5

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Второе издание книги отражает тенденцию возрастания интереса к дискретной математике у специалистов в области компьютерных наук. В отличие от первого издания [9], в качестве языка программирования мы теперь используем Python. Выбор этого языка обусловлен его универсальностью и быстрым ростом популярности в мире. На наш взгляд, Python достаточно хорошо подходит для обучения методам разработки и анализа алгоритмов.

Во втором издании мы сохранили структуру материала прежней: каждая глава состоит из теоретической части, содержащей основные определения, теоремы и типичные схемы решения задач, далее приводятся задачи для решения в аудитории под руководством преподавателя или для самостоятельной работы.

В книгу добавлены более 50 новых задач с решениями и ответами, а также контрольные вопросы к каждой главе для проверки знания основных определений и теоретических фактов. В ряде случаев в решениях и доказательствах были сделаны уточняющие комментарии или исправлены замеченные неточности.

Отметим также, что перевод книги был выпущен двумя изданиями в издательстве Springer в 2018 и 2020 гг. [117, 118].

Благодарности

Авторы выражают искреннюю признательность всем, кто после выхода первого издания высказал свои пожелания или предложил пути улучшения книги.

Мы благодарны нашим коллегам, сотрудникам кафедры цифровых технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета: А. В. Атанову, В. К. Кавериной, А. А. Крыловецкому, А. В. Лободе, П. А. Мелешенко, М. Е. Семенову за полезные обсуждения, советы и критические замечания.

Постоянную и всестороннюю поддержку на всех этапах работы над книгой нам оказывал Александр Бирюков (Aliaksandr Birukou).

Большую помощь в отладке и проверке программного кода представленных в книге алгоритмов нам оказал Н. В. Пауков.

Разумеется, все оставшиеся ошибки и неточности остаются на совести авторов.

Январь 2022 г.

С. В. Борзунов,
С. Д. Кургалин

Предисловие к первому изданию

Текущий период характерен бурным развитием информационно-коммуникационных технологий. Подготовка специалистов в области таких технологий, отвечающих требованиям времени, приводит к необходимости уделить особое внимание их математическому образованию. При этом желательно сформировать задания, предлагаемые в качестве практической части математических курсов, таким образом, чтобы их выполнение, в конечном итоге, привело к получению студентами нужных компетенций. Одним из математических курсов, который преподается, как правило, в начальных семестрах, является курс дискретной математики. Ряд общих курсов и специальных дисциплин, входящих в цикл подготовки специалиста в области информационных технологий, базируется на этом курсе. Так, математическая логика и теория алгоритмов образуют теоретическую основу информатики, булева алгебра лежит в основе методов разработки электронных схем, теория графов используется при построении многопроцессорных вычислительных систем, компьютерных сетей и в программировании. Научить студентов грамотному применению полученных теоретических знаний на практике — это одна из методических задач, решению которой может помочь предлагаемое пособие.

Учебное пособие создавалось в течение нескольких лет с использованием опыта преподавания этого курса на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета. Его содержание соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам по направлениям подготовки «Информационные системы и технологии», «Программная инженерия», «Радиофизика». Известные задачники по курсам дискретной математики и математической логики по объему и охвату материала пока не в полной мере ориентированы на подготовку специалистов именно по указанным направлениям, поэтому в данной книге предлагается большое число разнообразных задач широкого спектра сложности для этих направлений.

Настоящее учебное пособие предназначено для проведения практических, лабораторных занятий и для самостоятельной работы. Оно содержит базовые теоретические представления и методы решения основных типов задач, формирует представления о множествах, об отношениях на множествах и свойствах различных видов отношений, о функциях, основных понятиях комбинаторики, теории графов, булевой алгебре, основах теории алгоритмов и т. д. Некоторые из глав пособия, например «Машина Тьюринга» и «Асимптотический анализ», выходят за пределы «традиционного» курса дискретной математики. Тем не менее мы считаем необходимым включение их в состав пособия, поскольку они содействуют пониманию методов построения и анализа алгоритмов. Согласно известному тезису Чёрча–Тьюринга, машина Тьюринга способна имитировать все возможные способы пошагового вычисления и является моделью любых существующих в настоящее время вычислительных машин. Теория асимптотического анализа алгоритмов изучает методы получения асимптотических оценок вычислительной сложности алгоритмов, что имеет определяющее значение для оценки потребности в ресурсах при конкретной реализации алгоритма.

Естественно, что при подготовке книги мы проанализировали известные учебники и задачники с целью использования содержащегося в них положительного опыта для выработки наиболее эффективного способа представления материала. Многие из них перечислены в списке литературы, в особенности — это [4, 22, 78].

Учебное пособие соответствует двухсеместровому курсу обучения, отдельные его главы можно использовать и в курсах, продолжающихся один семестр. Предполагается, что в дальнейшем пособие послужит основой для создания учебно-методического комплекса по курсу дискретной математики для вышеназванных направлений.

Для освоения материала требуется знание основ математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры, а для глав 9, 12 и 13 также и основных конструкций языка программирования Python.

Каждая глава начинается с теоретической части, которая хотя и занимает сравнительно небольшой объем, но является важной, поскольку в ней напоминаются основные положения курса и задается используемая терминология. В тексте, наряду с основными определениями, теоретическими положениями и формулами, содержатся указания по их практическому использованию. Далее проводится подробный разбор нескольких типовых задач и даются задачи для решения в аудитории (компьютерном классе). Их можно использовать и для самостоятельной работы. Ответы или решения приводятся для всех задач, кроме самых простых. Упражнения существенно различаются по своей сложности. Наиболее трудные из них выделены с помощью символа «звездочка» ($*$), помещенного перед номером задания. Если в тексте теоретической части приводится пример, то его окончание обозначается знаком $\square$.

Отличительными особенностями учебного пособия, по нашему мнению, являются: подробный разбор задач, содержащих типовые методы и схемы вычислений; наличие большого количества упражнений и примеров широкого диапазона сложности; отражение в формулировках ряда заданий, где мы посчитали уместным, предметной области информационно-коммуникационных технологий. Кроме того, с учетом специфики подготовки бакалавров в области таких технологий при выполнении части заданий требуется реализовать разработанный алгоритм на конкретном языке программирования.

В главах «Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов» и «Базовые алгоритмы» приводятся фрагменты программ на языке Python с целью демонстрации применимости изучаемых методов в практике программирования. Заголовки заданий главы «Базовые алгоритмы», которые мы рекомендуем для выполнения в компьютерном классе, выделены полужирным шрифтом.

Отдельная глава книги посвящена параллельным алгоритмам. Многопроцессорные вычислительные системы в настоящее время находят широкое применение для решения задач математического и компьютерного моделирования, управления базами данных, сложными комплексами и проч. Более того, большинство современных вычислительных систем поддерживают параллельные вычисления на аппаратном уровне. В связи с этим вопросы построения и анализа параллельных алгоритмов становятся все более актуальными. Следует отметить, что во многих случаях разработка эффективного параллельного алгоритма решения некоторой задачи требует привлечения новых идей и методов по сравнению с созданием последовательной версии алгоритма. Таковы, например, практически важные задачи поиска целевого элемента в структурах данных, вычисления значений алгебраических выражений и т. д. Теоретическая часть этой главы по сравнению с другими главами занимает относительно бóльшее место, так как в ней рассматриваются достаточно сложные вопросы прикладных аспектов параллельного программирования, трудных при первоначальном усвоении. Данная глава требует уверенного владения методами решения задач, описанными в предыдущих главах, и имеет, по мнению авторов, повышенную сложность.

В пособии имеется достаточное число иллюстраций, помогающих наглядно представить изучаемые объекты и связи между ними. В заключительном разделе содержится справочная информация, включающая греческий алфавит, основные тригонометрические формулы, краткие сведения по дифференциальному и интегральному исчислению и важнейшие конечные суммы, что позволит снизить потребность в обращении к справочной литературе. Издание снабжено списком литературы, а также именным и предметным указателями. При упоминании в тексте фамилий ученых в ссылках приводятся их краткие биографические данные, взятые из источников [7, 139].

Ниже представлена схема информационной зависимости глав книги в виде ориентированного графа, отображающего предпочтительный порядок изучения учебного материала. Например, после изучения глав 1, 2 и 3 можно перейти к одной из трех глав: 4, 5 или 6, содержание которых является относительно независимым. Пунктирной границей отмечены главы, рассчитанные на читателей, желающих достичь высокого уровня овладения предметом, данные разделы содержат более сложный учебный материал. Так, после изучения главы 6 можно либо сразу перейти к главе 9, либо для лучшего усвоения последовательно разобрать материал глав 7 и 8 и только потом перейти к главе 9.

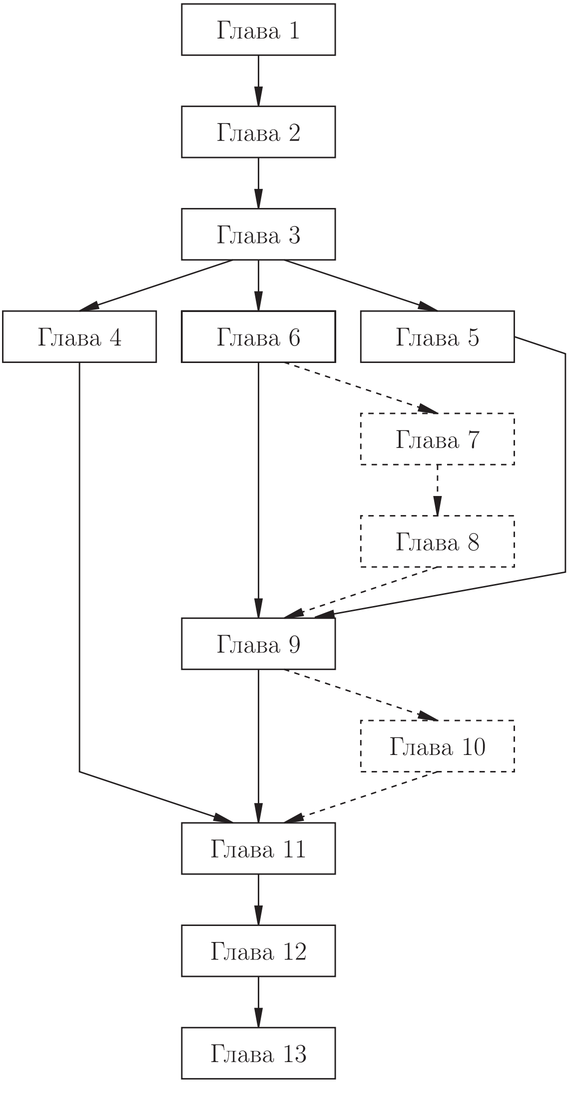


Схема информационной зависимости глав

Список основных обозначений

A **и** B	конъюнкция логических выражений A и B
A **или** B	дизъюнкция логических выражений A и B
$A \Rightarrow B$	импликация
$A \Leftrightarrow B$	эквиваленция
не A	отрицание
$\forall x(P(x))$	для всех x верно $P(x)$
$\exists x(P(x))$	существует такое x, что верно $P(x)$
F_n	числа Фибоначчи
L_n	числа Люка
H_n	гармонические числа
$\mathcal{C}_n$	числа Каталана
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	множество целых чисел
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	множество вещественных чисел
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	множество комплексных чисел
$\mathbb{B} = \{0, 1\}$	двухэлементное множество
$[a, b]$	сегмент $\{x\colon a \leqslant x \leqslant b\}$
(a, b)	отрезок $\{x\colon a < x < b\}$
$A \subseteq B$	множество A является подмножеством множества B
$A \subset B$	множество A является собственным подмножеством множества B
U	универсальное множество
$\varnothing$	пустое множество
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B

$A \setminus B$	дополнение множества B до A, теоретико-множественная разность
$\overline{A}$	дополнение множества A до универсального
$A \vartriangle B$	симметрическая разность
$\|A\|$	мощность множества A
$\mathcal{P}(A)$	показательное множество
$\aleph_0$	алеф нуль, мощность счетного множества
$A \times B$	декартово или прямое произведение множеств
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	вектор, элемент множества A^n
$x\ R\ y$	пара (x, y) принадлежит бинарному отношению R
R^*	замыкание отношения R
$x \prec y$	x является предшественником y
$x \prec\!\!\cdot\ y$	x является непосредственным предшественником y
R^{-1}	обратное отношение
$S \circ R$	композиция отношений R и S
$g \circ f$	композиция функций f и g
$\lfloor x \rfloor$	целая часть числа x
$\lceil x \rceil$	потолок числа x
$P(n, k)$	число различных (n, k)-размещений без повторений
$\widetilde{P}(n, k)$	число различных (n, k)-размещений с повторениями
$C(n, k)$	число различных (n, k)-сочетаний без повторений
$\widetilde{C}(n, k)$	число различных (n, k)-сочетаний с повторениями
$G(V, E)$	граф G, V — множество вершин, E — множество ребер
$d(v)$	степень вершины v
$M(i, j)$	элементы матрицы смежности графа
$\widetilde{M}(i, j)$	элементы матрицы инцидентности графа
$G_1 \sim G_2$	графы G_1 и G_2 изоморфны
$\chi(G)$	хроматическое число
$\chi'(G)$	хроматический индекс

$D(V, E)$	орграф D, V — множество вершин, E — отношение на V
$d^+(v)$	полустепень исхода вершины v орграфа
$d^-(v)$	полустепень захода вершины v орграфа
$x_1 \wedge x_2$	конъюнкция булевых величин x_1 и x_2
$x_1 \vee x_2$	дизъюнкция булевых величин x_1 и x_2
$x_1 \to x_2$	импликация
$x_1 \leftrightarrow x_2$	эквиваленция
$x_1 \oplus x_2$	сложение по модулю два
$x_1 \mid x_2$	штрих Шеффера
$x_1 \downarrow x_2$	стрелка Пирса
T_0	класс функций, сохраняющих константу 0
T_1	класс функций, сохраняющих константу 1
S	класс самодвойственных функций
L	класс линейных функций
M	класс монотонных функций
$O(g(n))$	класс функций, растущих не быстрее $g(n)$
$\Omega(g(n))$	класс функций, растущих, по крайней мере, так же быстро, как $g(n)$
$\Theta(g(n))$	класс функций, растущих с той же скоростью, что и $g(n)$
$B(n)$	асимптотическая сложность алгоритма в наилучшем случае
$A(n)$	асимптотическая сложность алгоритма в среднем случае
$W(n)$	асимптотическая сложность алгоритма в наихудшем случае
RAM	машина с произвольным доступом к памяти, Random Access Machine
PRAM	параллельная машина с произвольным доступом к памяти, Parallel Random Access Machine
p	число вычислительных узлов параллельной системы
S_p	ускорение, получаемое при использовании параллельного алгоритма на машине с p вычислительными узлами
E_p	эффективность параллельного алгоритма
C_p	стоимость параллельного алгоритма

Глава 1

Основы математической логики

Математическая логика — наука, изучающая математические доказательства [51, 56][1]. Предметами математической логики являются математические доказательства, методы и средства их построения [51].

Самый простой раздел математической логики — **логика высказываний**. **Высказыванием** называется утверждение, имеющее значение истинности, т. е. оно может быть *истинным* или *ложным* [24, 38, 72]. Соответствующие значения истинности будем обозначать как И и Л.

Составное высказывание может быть построено из простых высказываний с помощью логических операций и скобок. Наиболее часто используемыми логическими операциями являются: **и** (*конъюнкция* или *логическое умножение*), **или** (*дизъюнкция* или *логическое сложение*), **если ... то** (*логическое следствие* или *импликация*, эта операция обозначается также «$\Rightarrow$»), **не** (*отрицание*). Конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию относят к **бинарным** операциям, так как в них используются два операнда, отрицание — **унарная** операция, для нее нужен один операнд.

Два составных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они принимают одинаковые значения истинности при любом наборе значений составных частей. Составное высказывание, принимающее истинные значения при любых значениях своих компонент, называется **тавтологией**. Высказывание (**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P) называется **противоположным** или **контрапозитивным** к высказыванию $P \Rightarrow Q$. Запись $P \Rightarrow Q$ читается следующим образом: «P влечет Q», или «из P следует Q», или «Q необходимо для P», или «P достаточно для Q».

Для обоснования логической эквивалентности высказываний используют **таблицу истинности**, в которой перечислены истинностные значения логических выражений для всех возможных наборов истинностных значений компонент (табл. 1.1). Эквивалентность двух высказываний можно установить посредством сравнения их таблиц истинности. У логически эквивалентных высказываний они совпадают.

---

[1] Числами в квадратных скобках обозначены ссылки на литературу из списка, помещенного в конце книги.

Таблица 1.1

Таблица истинности

P	Q	**не** P	P **и** Q	P **или** Q	$P \Rightarrow Q$
И	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	И

Если высказывания A и B эквивалентны, то пишут $A \Leftrightarrow B$. Последнее высказывание может быть записано через операции конъюнкции и импликации как $(A \Rightarrow B)$ **и** $(B \Rightarrow A)$.

Основные законы алгебры логики перечислены в табл. 1.2. Справедливость перечисленных законов легко доказать построением соответствующих таблиц истинности. Некоторые законы алгебры логики имеют непосредственные аналоги в алгебре вещественных чисел, к ним относятся законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Однако есть и такие законы, как, например, законы де Моргана[1], которые таких аналогов не имеют.

Утверждения о свойствах переменной x называют **предикатами** и обозначают: $P(x)$, $Q(x)$, … **Областью истинности** предиката называется совокупность всех x, при которых данный предикат становится истинным высказыванием. Свойства предикатов изучает **логика предикатов**.

Для построения сложных логических выражений используются кванторы: $\forall$ (**для всех**) — квантор всеобщности и $\exists$ (**существует**) — квантор существования. **Квантор** — это логическая операция, которая по предикату $P(x)$ строит высказывание, характеризующее область истинности $P(x)$ [15, 55, 72].

Логическое выражение $\forall x\ (P(x))$ (читается «для всех x верно $P(x)$») означает, что для всех возможных значений x высказывание $P(x)$ принимает истинное значение. Выражение $\exists x\ (P(x))$ (читается «существует x такое, что верно $P(x)$») означает, что для некоторого значения x $P(x)$ принимает истинное значение. Скобки после $\forall x$ и $\exists x$ ограничивают область действия квантора. Часто скобки, определяющие область действия, опускают.

Для отрицаний логических выражений с кванторами известны следующие логические эквивалентности:

$$\textbf{не}\ \forall x\ (P(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x\ (\textbf{не}\ P(x));$$
$$\textbf{не}\ \exists x\ (P(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x\ (\textbf{не}\ P(x)).$$

[1] де Морган (Augustus de Morgan) (1806–1871).

Таблица 1.2

Законы алгебры логики

Законы идемпотентности

A **или** $A \Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** $A \Leftrightarrow A$

Свойства констант «И» и «Л»

A **или** Л $\Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** И $\Leftrightarrow A$

A **или** И $\Leftrightarrow$ И $\qquad$ A **и** Л $\Leftrightarrow$ Л

Свойства дополнения

A **или** (**не** A) $\Leftrightarrow$ И $\qquad$ A **и** (**не** A) $\Leftrightarrow$ Л

не (**не** A) $\Leftrightarrow A$

Законы коммутативности

A **или** $B \Leftrightarrow B$ **или** A $\qquad$ A **и** $B \Leftrightarrow B$ **и** A

Законы ассоциативности

A **или** (B **или** C) $\Leftrightarrow$ (A **или** B) **или** C

A **и** (B **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** B) **и** C

Законы дистрибутивности

A **или** (B **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** (A **или** C)

A **и** (B **или** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** B) **или** (A **и** C)

Законы поглощения

A **или** (A **и** B) $\Leftrightarrow A$ $\qquad$ A **и** (A **или** B) $\Leftrightarrow A$

Законы де Моргана

не (A **или** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **и** (**не** B)

не (A **и** B) $\Leftrightarrow$ (**не** A) **или** (**не** B)

Примечание. Названия логических операций происходят от латинских слов *conjungere* — объединять, *disjungere* — разъединять, *implicāre* — тесно связывать, *aequālis* — равный, *contrāpositum* — противопоставление. Термины «предикат» и «квантор» восходят к лат. *praedicātio* — высказывание, утверждение и *quantum* — сколько. Названия свойств бинарных операций происходят от лат. *commūtāre* — обменивать, *associāre* — соединять, *distributere* — распределять [27].

Существует несколько основных методов доказательства истинности высказывания вида $P \Rightarrow Q$ [78]:

1) *прямое рассуждение:* предполагается истинность P и выводится истинность Q;

2) *обратное рассуждение:* прямым рассуждением доказывается истинность высказывания $(\textbf{не}\ Q) \Rightarrow (\textbf{не}\ P)$ как логически эквивалентного $P \Rightarrow Q$;

3) метод *«от противного»:* предполагается истинность P и ложность Q и на основе аргументированных рассуждений получается противоречие.

Мощным способом доказательства истинности утверждений относительно всех натуральных чисел (к которым относятся $1, 2, 3, \ldots$) является принцип математической индукции [4, 43, 67] (от латинского *inductio* — выведение).

Принцип математической индукции. *Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n, и пусть выполняются следующие условия:*

1) $P(1)$ *истинно;*

2) $\forall k \geqslant 1$ *импликация* $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ *верна.*

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном n.

Высказывание *1* обычно называют **базой индукции**, высказывание *2* — **шагом индукции**.

Для доказательства тождеств методом математической индукции поступают следующим образом. Пусть предикат $P(k)$ принимает истинное значение, когда рассматриваемое тождество верно для некоторого натурального числа k. Тогда доказываются два утверждения:

1) база индукции, т. е. $P(1)$;

2) шаг индукции, т. е. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ для произвольного $k \geqslant 1$.

Согласно методу математической индукции, делается вывод о верности рассматриваемого тождества для всех натуральных значений n.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции для доказательства тождеств и неравенств.

Пример 1.1. Докажем, что для всех натуральных n выполняется равенство
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Доказательство.

Обозначим предикат «$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$» через $P(n)$.

База индукции

Рассмотрим случай $n = 1$. Равенство принимает вид $1^2 = \dfrac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}$, что является истинным утверждением.

Шаг индукции

Предположим, что $P(k)$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots$ принимает истинное значение, т. е. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2 = \dfrac{k(4k^2-1)}{3}$. Докажем, что $P(k+1)$ — истинно.

Запишем предикат $P(k+1)$ в виде:
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Воспользуемся индуктивным предположением и перепишем сумму $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2$ как дробь $\dfrac{1}{3}k(4k^2-1)$:
$$\underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2}_{k(4k^2-1)/3} + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1);$$
$$\frac{1}{3}k(4k^2-1) + (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Преобразуем левую часть равенства:
$$\frac{1}{3}(4k^3 - k + 3(4k^2+4k+1)) = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1);$$
$$\frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1) = \frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

Получили верное равенство. Значит, при любом $k = 1, 2, \ldots$ импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ справедлива, и методом математической индукции доказано, что $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ для всех натуральных n. $\square$

В следующем примере в качестве предиката $P(n)$ выступает неравенство.

Пример 1.2. Докажем **неравенство Бернулли**[1] [42]:

$$(1+a)^n \geqslant 1+na \ \text{ для } \ n=1,2,\ldots \ \text{ и } \ a>-1.$$

Доказательство.

Обозначим предикат «$(1+a)^n \geqslant 1+na$ для $a>-1$» через $P(n)$.

База индукции

Для $n=1$ неравенство принимает вид $(1+a)^1 \geqslant 1+a$, и это истинное утверждение.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$ — истинно, т. е. $(1+a)^k \geqslant 1+ka$ для некоторого натурального k и $a>-1$. Проверим истинность утверждения $P(k+1)$: $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$.

Для этого умножим обе части неравенства, составляющего индуктивное предположение, на положительное число $1+a$:

$$(1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a).$$

Раскроем скобки в правой части полученного неравенства:

$$(1+a)^k(1+a) \geqslant 1+(k+1)a+ka^2.$$

Принимая во внимание, что $ka^2 \geqslant 0$, получаем:

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a,$$

что составляет утверждение $P(k+1)$. Значит, по принципу математической индукции неравенство Бернулли выполняется для всех натуральных n. □

[1] Бернулли (Jacob Bernoulli) (1654–1705).

Контрольные вопросы к главе «Основы математической логики»

1. Какие утверждения относят к высказываниям?
2. Перечислите основные логические операции.
3. Какие высказывания называют логически эквивалентными?
4. Что такое тавтология?
5. Запишите высказывание, контрапозитивное по отношению к высказыванию $P_1 \Rightarrow P_2$.
6. Для чего используют таблицу истинности логических выражений?
7. Дайте определение понятию предиката.
8. Расскажите, как применяют кванторы для построения логических выражений.
9. Сформулируйте законы алгебры логики.
10. Перечислите основные типы доказательства истинности высказываний.
11. Сформулируйте принцип математической индукции.

Задачи к главе «Основы математической логики»

1.1. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Язык Python относится к высокоуровневым языкам программирования.

2) Пейте морковный сок!

3) Есть ли жизнь на Марсе?

4) Первые компьютеры появились в XVIII веке.

1.2. Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Любое квадратное уравнение имеет вещественные корни.

2) Треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$.

3) Неверно, что на Луне нет воды.

4) Да здравствуют Олимпийские игры!

∗1.3. На листе бумаги записано предложение: «Это предложение ложно». Является ли оно высказыванием?

1.4. Покажите, что выполняются следующие логические эквивалентности, известные как законы де Моргана (табл. 1.2):

1) $\textbf{не}\ (A\ \textbf{и}\ B)\ \Leftrightarrow\ (\textbf{не}\ A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ B)$;

2) $\textbf{не}\ (A\ \textbf{или}\ B)\ \Leftrightarrow\ (\textbf{не}\ A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ B)$.

∗1.5. Обобщите логические эквивалентности из упражнения **1.4** на случай произвольного числа простых высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n = 2, 3, \ldots$

1.6. С помощью логических операций запишите следующее высказывание P: «Из трех высказываний A, B и C истинное значение принимает ровно одно».

1.7. С помощью логических операций запишите следующее высказывание P: «Из трех высказываний A, B и C истинное значение имеет не менее чем одно из них».

1.8. С помощью логических операций запишите следующее высказывание P: «Из четырех высказываний A, B, C и D три имеют одинаковое значение истинности».

1.9. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A\ \textbf{и}\ B) \Rightarrow C$.

1.10. Покажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ логически эквивалентно высказыванию $(\textbf{не}\ C) \Rightarrow ((\textbf{не}\ A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ B))$.

1.11. Покажите, что высказывание $A\ \textbf{или}\ (B\ \textbf{и}\ C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A\ \textbf{или}\ B)\ \textbf{и}\ (A\ \textbf{или}\ C)$.

1.12. Покажите, что высказывание $A\ \textbf{и}\ (B\ \textbf{или}\ C)$ логически эквивалентно высказыванию $(A\ \textbf{и}\ B)\ \textbf{или}\ (A\ \textbf{и}\ C)$.

1.13. Докажите, что высказывание

$$((A\ \textbf{или}\ B)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ (A\ \textbf{и}\ B))) \Leftrightarrow ((A\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ B))\ \textbf{или}\ ((\textbf{не}\ A)\ \textbf{и}\ B))$$

является тавтологией.

1.14. Является ли высказывание $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A\ \textbf{и}\ B) \Rightarrow C)$ тавтологией?

1.15. Являются ли высказывания

1) $(A\ \textbf{и}\ (B\ \textbf{или}\ C)) \Rightarrow (A\ \textbf{или}\ (B\ \textbf{и}\ C))$,

2) $(A\ \textbf{и}\ (B \Rightarrow C))\ \textbf{и}\ (B\ \textbf{или}\ (B \Rightarrow C))$

тавтологиями?

1.16. Являются ли высказывания

1) $(A \Rightarrow (B\ \textbf{или}\ C)) \Rightarrow ((\textbf{не}\ B) \Rightarrow A)$,

2) $((A\ \textbf{и}\ B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((\textbf{не}\ C) \Rightarrow A)$

тавтологиями?

1.17. Обозначим через A высказывание: «я голоден», через B — «сейчас три часа», а через C — «пора обедать». Запишите следующие высказывания как составные высказывания, включающие A, B и C:

1) Если сейчас три часа или я голоден, то пора обедать.

2) Если не пора обедать, то я не голоден.

3) Если я голоден, то пора обедать. Но я не голоден. Значит, или сейчас не три часа, или не пора обедать.

1.18. Обозначим через A высказывание: «светит солнце», через B — «на улице жарко», а через C — «идет снег». Запишите следующие высказывания как составные высказывания, включающие A, B и C:

1) Если идет снег, то, если светит солнце, на улице не жарко.

2) Если светит солнце, то на улице либо жарко, либо идет снег (но не одновременно).

1.19. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если гвардейцы кардинала поблизости, то д'Артаньян готов к бою».

1.20. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если Арамис станет епископом и Портос получит баронский титул, то д'Артаньяну вручат маршальский жезл».

1.21. Сформулируйте высказывание, контрапозитивное к данному:

«Если Атос перехватит письмо и Портос уйдет от погони, то Арамис раскроет замысел кардинала».

1.22. Некоторые скобки в составных высказываниях можно опускать, если договориться о порядке действия логических операций согласно их силе связывания. Сила связывания операндов логическими операциями определяется в соответствии с приведенной схемой [69]:

не
и
или
$\Rightarrow$
$\Leftrightarrow$

Наибольшей силой связывания обладает унарная операция отрицания, затем следуют бинарные операции в таком порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и операция эквивалентности.

Пусть A, B, C, D — простые высказывания. Определите, являются ли логически эквивалентными высказывания P_1 и P_2:

1) $P_1 = A\,\textbf{или}\,B\,\textbf{и}\,C\,\textbf{или}\,D,\ \ P_2 = (A\,\textbf{или}\,B)\,\textbf{и}\,(C\,\textbf{или}\,D)$;
2) $P_1 = A \Rightarrow B\ \textbf{или}\ C,\ \ P_2 = A \Rightarrow (B\ \textbf{или}\ C)$.

1.23. Проверьте составлением таблиц истинности, являются ли эквивалентными следующие выказывания:

1) $X = A\ \textbf{или}\ (B \Rightarrow C),\ \ Y = (A\,\textbf{или}\,B) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,C)$;
2) $X = A \Rightarrow (\textbf{не}\ (B\ \textbf{и}\ C)),\ \ Y = \textbf{не}\ ((A \Rightarrow B)\ \textbf{и}\ (A \Rightarrow C))$;
3) $X = A \Rightarrow ((B \Rightarrow C)\ \textbf{и}\ (C \Rightarrow B))$,
$Y = ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))\ \textbf{и}\ ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$;
4) $X = A\ \textbf{или}\ ((B \Rightarrow C)\ \textbf{и}\ (C \Rightarrow B))$,
$Y = ((A\,\textbf{или}\,B) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,C))\ \textbf{и}\ ((A\,\textbf{или}\,C) \Rightarrow (A\,\textbf{или}\,B))$.

1.24. Установите, какие из следующих высказываний являются тождественно ложными:

1) $A \Rightarrow (A\ \textbf{или}\ B)$;
2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\textbf{не}\,B \Rightarrow \textbf{не}\,A)$;
3) $(A\ \textbf{и}\ B)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ A\ \textbf{или}\ \textbf{не}\ B)$;
4) $A\ \textbf{и}\ ((A \Rightarrow\ \textbf{не}\,A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\,A \Rightarrow A))$.

1.25. Друзья-мушкетеры заметили в дворцовом парке подозрительного человека в маске. Д'Артаньян считает, что это был кардинал. Портос утверждает, что неизвестный либо кардинал, либо миледи. Арамис доказывает, что если Портос не ошибается, то д'Артаньян прав. Атос уверен, что Портос и Арамис не могут ошибаться.

Дальнейшее расследование показало правильность выводов Атоса. Кто скрывался под маской?

1.26. Капитан королевских мушкетеров де Тревиль получил три письма от своих подчиненных.

В первом сообщалось, что если Атос сломал в бою шпагу, то Портос и Арамис сломали свои.

Второе гласило, что Атос и Арамис либо оба сломали свои шпаги, либо оба сохранили их в целости.

Наконец, в третьем сообщалось: чтобы Арамис сломал шпагу, необходимо, чтобы Портос сломал свою.

Де Тревилю известно также, что из трех писем, отправленных мушкетерами, одно было перехвачено и содержит неверные сведения. Кто из мушкетеров сломал шпагу?

1.27. В ограблении ювелирного магазина подозреваются трое: Александров, Быков и Соколов. Предварительное расследование привело к следующим выводам:

1) если к преступлению причастен Соколов, то причастен и Быков;

2) если виновен Александров, то виновен и Быков.

Первый вывод предварительного расследования подтвердился, второй оказался неверным. Кто совершил ограбление?

∗1.28. Технологический процесс предусматривает следующую схему работы четырех станков S_1–S_4. Если работает первый станок, то работают второй и третий. Третий станок работает тогда и только тогда, когда работает четвертый. Кроме того, если работает второй, то четвертый должен находиться в остановленном состоянии. Определите, какие станки работают в данный момент, если известно, что сейчас работает либо первый, либо второй (но не одновременно).

∗1.29. Технологический процесс предусматривает следующую схему работы четырех станков S_1–S_4. Если работает первый станок, то работает второй. Второй станок работает тогда и только тогда, когда работает третий, и если работает четвертый, то третий должен находиться в остановленном состоянии. Определите, какие станки работают в данный момент, если известно, что сейчас работает либо первый, либо второй (но не одновременно).

1.30. Высокопроизводительный компьютерный кластер находится под управлением двух серверов: вычислительного и файлового, а система охлаждения кластера состоит из трех блоков. Администратор кластера получил по электронной почте три диагностических сообщения:

1) неисправен файловый сервер, а также первый блок охлаждения;

2) неисправен вычислительный сервер, а также второй блок охлаждения;

3) файловый сервер работает в обычном режиме, но вышел из строя третий блок охлаждения.

Администратору точно известно, что вышли из строя только один сервер и не более одного блока охлаждения. После устранения неисправностей выяснилось, что каждое из диагностических сообщений содержало достоверную информацию либо о работе серверов, либо о состоянии блоков охлаждения, но не одновременно.

В каком сервере и в каких блоках охлаждения администратору пришлось устранять неисправности?

1.31. Высокопроизводительный компьютерный кластер находится под управлением двух серверов: основного и резервного, а система охлаждения кластера состоит из трех блоков. Администратор кластера получил по электронной почте три диагностических сообщения:

1) неисправен основной сервер, а также третий блок охлаждения;

2) неисправен резервный сервер, а также второй блок охлаждения;

3) основной сервер работает в обычном режиме, но вышел из строя первый блок охлаждения.

Администратору точно известно, что вышел из строя только один сервер и не менее двух блоков охлаждения. После устранения неисправностей выяснилось, что каждое из диагностических сообщений содержало достоверную информацию либо о работе серверов, либо о состоянии блоков охлаждения, но не одновременно.

В каком сервере и в каких блоках охлаждения администратору пришлось устранять неисправности?

1.32. Авиасообщение на некоторой территории обеспечивается работой четырех аэропортов: двух основных (A и B) и двух резервных (A_1 для A и B_1 для B). Резервный аэропорт работает тогда и только тогда, когда не работает соответствующий основной. Необходимым условием приема самолетов аэропортом B_1 является работа аэропорта A_1. Пилоты воздушных судов получили указание, что аэропорт B из-за погодных условий не может принимать рейсы. Установите, какие из аэропортов работают.

1.33. Для выполнения важного поручения королевы мушкетеры королевской роты отправляются в Англию. Известно, что поедут Атос или Портос (возможно, вместе), и Портос или Арамис (также, возможно, вместе). Если в путешествии примет участие Портос, то поедет Арамис, и если поедет Атос, то Арамис останется в Париже.

Кто из друзей-мушкетеров отправится выполнять поручение королевы?

1.34. Для выполнения важного поручения королевы мушкетеры королевской роты отправляются в Англию. Известно, что поедет либо Атос, либо Арамис (причем только один из них). Если Портос не примет участие в путешествии, то Арамис останется в Париже. Кроме того, если поедет Атос, то поедет Арамис.

Кто из друзей-мушкетеров отправится выполнять поручение королевы?

∗1.35. В оздоровительном лагере отдыхают четверо студентов: Алиса, Богдан, Валерия и Георгий. Некоторые из отдыхающих отправились на экскурсию, другие загорают на пляже. Либо Богдан, либо Валерия отправились на экскурсию (возможно, записались и Богдан, и Валерия). Если Валерия на пляже и Георгий на пляже, то Алиса тоже отдыхает на пляже. Неверно, что если Алиса на пляже, то Валерия или Георгий на экскурсии. Кто из студентов отправился на экскурсию, а кто пошел на пляж?

∗1.36. В оздоровительном лагере отдыхают четверо студентов: Алиса, Богдан, Валерия и Георгий. Некоторые из отдыхающих играют на спортивной площадке, другие готовятся к концерту самодеятельности. Известно, что либо Алиса, либо Богдан играют на спортплощадке (возможно, в одной команде). Если Богдан готовится к концерту и Валерия готовится к концерту, то Георгий тоже готовится к концерту. Кроме того, неверно, что если Георгий готовится к концерту, Богдан или Валерия — на спортплощадке. Кто из студентов играет на спортплощадке?

1.37. Рассмотрим еще две элементарные логические операции [4, 69]. **Штрих Шеффера**[1] двух высказываний A и B определяется как высказывание $A \mid B$, которое ложно тогда, когда оба высказывания истинны, и истинно в остальных случаях:

$$A \mid B = (\textbf{не}\, A)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\, B).$$

Стрелка Пирса[2] двух высказываний A и B определяется как высказывание $A \downarrow B$, которое истинно тогда, когда оба высказывания ложны, и ложно в остальных случаях:

$$A \downarrow B = (\textbf{не}\, A)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\, B).$$

Постройте таблицу истинности для высказываний $A \mid B$ и $A \downarrow B$.

[1] Шеффер (Henry Maurice Sheffer) (1882–1964).

[2] Пирс (Charles Sanders Peirce) (1839–1914).

1.38. Выразите основные логические операции (отрицание, дизъюнкцию, конъюнкцию, импликацию) через:

1) штрих Шеффера;

2) стрелку Пирса.

∗1.39. Выразите:

1) операцию «стрелка Пирса» через операцию «штрих Шеффера»;

2) операцию «штрих Шеффера» через операцию «стрелка Пирса».

1.40. Какие из следующих предложений являются предикатами:

1) произвольное четное число s можно представить в виде суммы двух нечетных чисел;

2) рациональное число q не больше $-\dfrac{7}{8}$;

3) треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$;

4) переменные x и y принимают одинаковые значения?

1.41. Запишите отрицание предиката P, если

1) $P(n) = \{$натуральное число n является четным$\}$;

2) $P(x, y) = \{x < y\}$.

1.42. Представьте отрицание высказывания T таким образом, чтобы операции отрицания относились к предикатам P и Q:

1) $T = \forall x\,(\exists y\,(P(x, y))$;

2) $T = \exists x\,(\exists y\,(P(x, y)) \Rightarrow Q(x, y))$.

1.43. Пусть x и y — вещественные числа. Определите истинностное значение высказываний

1) $\forall x\,(\exists y\,(x > y))$;

2) $\forall x\,(x \neq 0 \Rightarrow \exists y\,(xy = 1))$.

1.44. Пусть x и y — вещественные числа. Определите истинностное значение высказываний

1) $\exists x\,(\forall y\,(xy = y))$;

2) $\exists x\,(\forall y\,(x + y = 1))$.

1.45. Как известно из курса математического анализа [33, 42, 75], число a является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел n, больших или равных n_0, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

С помощью кванторов приведенное утверждение записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N}\; (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Запишите с помощью кванторов утверждение: «предел числовой последовательности $\{a_n\}$ не равен a».

1.46. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0\; \forall x\; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$.

Запишите с помощью кванторов утверждение: «предел функции $f(x)$ в точке x_0 не равен A».

1.47. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0\; \forall x\; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Запишите с помощью кванторов утверждение: «функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0».

$*$**1.48.** Запишите с помощью кванторов утверждение: «существует единственное значение переменной x, для которого предикат $P(x)$ принимает истинное значение».

1.49. Докажите методом математической индукции высказывание:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ для всех натуральных чисел n.

1.50. Докажите методом математической индукции высказывание:

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

для всех натуральных чисел n.

1.51. Докажите методом математической индукции высказывания:

1) $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ для всех натуральных чисел n;

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ для всех натуральных чисел n.

1.52. Докажите методом математической индукции, что сумма кубов первых n натуральных чисел равна квадрату их суммы:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.53. Докажите формулу для суммы кубов n первых нечетных натуральных чисел

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.54. Члены **арифметической прогрессии** определяются как $a_n = a_1 + (n-1)d$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где a_1, d — const. Докажите методом математической индукции, что сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии определяется формулой $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}n$.

1.55. Члены **геометрической прогрессии** определяются как $b_n = b_1 q^{n-1}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где b_1, q — const, $q \neq 1$. Докажите методом математической индукции, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

1.56. Докажите методом математической индукции, что $n^2 - n$ четно для всех натуральных n.

1.57. Докажите методом математической индукции, что для всех натуральных чисел n

1) $4n^3 + 14n$ кратно 3;
2) $n^5 - n - 10$ кратно 5;
3) $6^{2n-1} - 6$ кратно 7;
4) $n(n-1)(2n-1)$ кратно 6.

1.58. Докажите методом математической индукции, что для всех натуральных чисел a и n число $a^n - 1$ кратно $a - 1$.

1.59. Докажите методом математической индукции, что следующие числа делятся на 10 при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1) $4^n + 4(-1)^n$;

2) $3 \cdot 4^n - 8(-1)^n$.

1.60. Докажите, что число $\dfrac{1}{10}(79 \cdot 4^n - 4(-1)^n)$ целое при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1.61. Докажите, что число $\dfrac{79}{30} \cdot 4^n + \dfrac{(-1)^n}{5} - \dfrac{1}{3}$ целое при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1.62. Докажите методом математической индукции, что для всех натуральных значений n

1) $7^{n+1} - 2^{n+1}$ кратно 5;
2) $13^{n+1} + (-1)^n 12^{n+1}$ кратно 25;
3) $11 + (-1)^n(2n+5)$ кратно 4;
4) $10 - 2^{2n} - 6n$ кратно 18.

1.63. Докажите, что следующие выражения принимают целые значения для всех натуральных n:

1) $\dfrac{1}{10}(2 \cdot 7^n - 7 \cdot 2^n)$;
2) $\dfrac{1}{60}(7 \cdot 4^n - 42(-1)^n - 10)$;
3) $\dfrac{1}{36}(9 - (-3)^n(8n - 11))$;
4) $\dfrac{(-1)^n(2n-3)+3}{4}$.

1.64. Докажите, что следующие выражения принимают целые значения для всех натуральных n:

1) $\dfrac{1}{15}(13 \cdot 5^n - 5 \cdot 2^{n+1})$;
2) $\dfrac{1}{12}(11 \cdot 5^n - 2^{n+3} - 3)$;
3) $\dfrac{5}{84}(47 \cdot 7^n - 7 \cdot 3^{n+2} + 28)$;
4) $\dfrac{7}{60}(23 \cdot 2^{2n} + 12(-1)^n - 20)$.

1.65. Докажите тождество

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

1.66. Докажите тождество

$$\frac{1}{4 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 14} + \ldots + \frac{1}{(5n-1)(5n+4)} = \frac{n}{4(5n+4)}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

∗1.67. Предложите обобщение тождеств, сформулированных в упражнениях **1.65** и **1.66**.

1.68. Докажите, что для всех $n \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

1.69. Докажите, что для всех $n \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$(n+2)^{n+3} > (n+3)^{n+2}.$$

1.70. Используя метод математической индукции, докажите **неравенство Коши**[1]**–Шварца**[2] (называемое также **неравенством Коши–Буняковского**[3]**–Шварца**):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

где a_i, b_i — произвольные вещественные числа, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Установите, при каком условии в неравенстве Коши–Шварца имеет место знак равенства.

1.71. Сформулируйте принцип математической индукции с помощью кванторов.

1.72. Прямым рассуждением докажите истинность высказывания:

$$n \text{ и } m \text{ — четные числа} \;\Rightarrow\; n \cdot m \text{ — число четное.}$$

1.73. Докажите методом обратного рассуждения:

$$n^2 \text{ — нечетное число} \;\Rightarrow\; n \text{ — число нечетное.}$$

1.74. Методом «от противного» докажите:

$$n \cdot m \text{ — нечетное число} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \text{оба сомножителя являются нечетными числами.}$$

1.75. Докажите, что если квадрат некоторого целого числа p делится на 17, то и само число p делится на 17.

[1] Коши (Augustin-Louis Cauchy) (1789–1857).
[2] Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz) (1843–1921).
[3] Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889).

1.76. **Иррациональное число** t не может быть представлено в виде дроби с целыми числителем и знаменателем, т. е. не существует таких целых p и q, что $t = \dfrac{p}{q}$ [33, 42, 75].

Методом «от противного» докажите, что $\sqrt{17}$ является иррациональным числом.

1.77. Докажите иррациональность числа $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

1.78. Докажите иррациональность следующих чисел:

1) $\log_2 5$;

2) $\log_5 16$.

1.79. Пусть $a = \dfrac{3}{2} - 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{8} + 1$. На экзамене по курсу дискретной математики и математической логики студенту предложено выяснить, являются ли числа $a + b$ и $a \cdot b$ иррациональными. Студент рассуждает следующим образом: «Число a иррационально, число b также иррационально. Следовательно, их сумма $a + b$ и произведение $a \cdot b$ являются иррациональными числами».

Объясните, в чем ошибка студента.

1.80. **Простым числом** называется такое целое число $p > 1$, которое имеет только два делителя: единицу и само число p. Целое число $s > 1$, не являющееся простым, называется **составным** [4, 17].

1) Выпишите первые десять простых чисел.

2) Методом «от противного» докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

1.81. Запишите отрицание предиката

$$P(n) = \{\text{натуральное число } n \text{ является простым}\}.$$

1.82. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $8n + 7$, $n = 1, 2, \ldots$

1.83. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $10n + 9$, $n = 1, 2, \ldots$

1.84. **Факториалом** целого положительного числа n называется произведение всех натуральных чисел до n включительно [26, 36]:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

(по определению полагают $0! = 1$ и $1! = 1$). Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

1.85. **Гармоническое число** H_n определяется как сумма обратных величин первых n последовательных натуральных чисел [25, 36]:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Методом математической индукции докажите следующие тождества с гармоническими числами для всех натуральных значений переменной n:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} iH_i = \dfrac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1} - 1)$.

∗1.86. Докажите тождества, приведенные в предыдущем упражнении, не привлекая метод математической индукции.

1.87. Докажите следующие неравенства для гармонических чисел [36]:

$$1 + \frac{n}{2} \leqslant H_{2^n} \leqslant 1 + n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots$$

1.88. Докажите равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{H_{i+1}}{i(i+1)} = 2 - \frac{1}{n+2} - \frac{H_{n+2}}{n+1},$$

справедливое для всех $n \geqslant 1$.

1.89. Определите все значения n, при которых гармоническое число H_n является целым.

1.90. **Последовательность Фибоначчи**[1]

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots$$

[1] Под именем Фибоначчи известен средневековый математик Пизано (Leonardo Pisano) (ок. 1170 — ок. 1250).

определяется рекуррентным соотношением: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ с начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$ [21, 26]. (Подробнее о рекуррентных соотношениях см. главу «Рекуррентные соотношения» на стр. 341.) Используя метод математической индукции, докажите следующие свойства чисел Фибоначчи для всех натуральных n:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$;

4) F_{3n} — четны, а F_{3n+1} и F_{3n+2} — нечетны.

1.91. Докажите справедливость соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ для всех натуральных чисел n.

1.92. Докажите, что для всех натуральных n выполняются тождества

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(n - i + 1)F_i = F_{n+4} - n - 3$.

1.93. Вычислите сумму $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + (-1)^{n+1}F_n$.

1.94. **Числа Люка́**[1] определяются как

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ и } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

для целых чисел $n \geqslant 2$ [26]. Выпишите первые десять чисел Люка.

1.95. Докажите формулу для суммы чисел Люка:

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1, \quad n \geqslant 1.$$

1.96. Часто бывает удобнее воспользоваться эквивалентной формой принципа математической индукции [4, 77].

[1] Люка (François Édouard Anatole Lucas) (1842–1891).

Вторая форма принципа математической индукции (принцип полной индукции). *Пусть $P(n)$ — предикат, определенный для всех натуральных чисел n, и пусть выполняются следующие условия:*

1) $P(1)$ истинно;

2) для произвольного k из истинности $P(i)$ для всех $i \leqslant k$ следует истинность $P(k+1)$.

Тогда $P(n)$ истинно при любом натуральном n.

Принцип полной индукции используется в том случае, когда для доказательства предиката $P(k+1)$ требуется применить не только $P(k)$, но и некоторые предыдущие предикаты [69].

Сформулируйте принцип полной индукции с помощью кванторов.

∗1.97. Докажите эквивалентность первой и второй форм принципа математической индукции.

1.98. Задано вещественное число x такое, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ тоже целое для всех натуральных n [81].

1.99. Герой компьютерной игры сражается с многоголовыми драконами. В его распоряжении имеются два меча, первый из которых отсекает у чудовища за один игровой ход ровно 3 головы, а второй — ровно 5 голов. Докажите, что этот герой может обезвредить любого дракона с количеством голов, не меньшим 8. Дракон побежден, когда у него после нескольких игровых ходов не остается ни одной головы.

1.100. Герой компьютерной игры сражается с многоголовыми драконами. В его распоряжении имеются два меча, первый из которых отсекает у чудовища за один игровой ход ровно 4 головы, второй — ровно 11 голов. Чему должно быть равно максимальное количество голов у дракона, чтобы его невозможно было бы победить с помощью имеющегося оружия?

1.101. Докажите формулу сложения членов ряда Фибоначчи

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$$

для всех натуральных n и m, $n>1$.

1.102. Докажите, что выражение $F_n^2+F_{n+1}^2$ тоже является числом Фибоначчи.

∗1.103. Докажите, что явное выражение для чисел Фибоначчи F_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, дается формулой [26]

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

известной как **формула Бине́**[1].

1.104. Докажите, что для всех целых положительных $n = 2, 3, \ldots$ выполняется равенство $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение.

1.105. Докажите, что выполняется соотношение $F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = 1$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

1.106. Докажите, что выполняется соотношение $F_{2n+1}F_{2n+2} - F_{2n}F_{2n+3} = 1$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

∗1.107. Докажите тождество $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{F_{2n}} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{F_{2n+2}}$, $n \geqslant 1$.

1.108. Докажите, что числа Люка могут быть выражены через числа Фибоначчи

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad n \geqslant 2.$$

1.109. Представив рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи в виде $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, можно обобщить F_n на все целые значения n. Найдите выражение для чисел Фибоначчи с отрицательными индексами.

1.110. Представив рекуррентное соотношение для чисел Люка в виде $L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$, можно обобщить L_n на все целые значения n. Найдите выражение для чисел Люка с отрицательными индексами.

∗1.111. Докажите, что явное выражение для чисел Люка L_n, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, дается формулой

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

1.112. Докажите следующие тождества для $n = 1, 2, 3, \ldots$:

1) $L_{4n} = L_{2n}^2 - 2$;

2) $L_{4n+2} = L_{2n+1}^2 + 2$.

[1] Бине (Jacques Philippe Marie Binet) (1786–1856).

1.113. Докажите следующие тождества, верные для $n = 1, 2, 3, \ldots$:

1) $L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$;

2) $L_n^3 = L_{3n} + 3(-1)^n L_n$.

1.114. Докажите следующие тождества, верные для $n = 1, 2, 3, \ldots$:

1) $L_n^4 = L_{4n} + 4(-1)^n L_{2n} + 6$;

2) $L_n^5 = L_{5n} + 5(-1)^n L_{3n} + 10L_n$.

1.115. Упростите выражение $L_{n-1}L_m + L_nL_{m+1}$ для натуральных значений n и m.

1.116. Докажите тождество для целых неотрицательных n и k, $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$L_{n-k}L_{n+k} = L_{2n} + (-1)^{n+k}L_{2k}.$$

1.117. Докажите тождества для целых i:

1) $L_{6i} = L_{2i}(L_{4i} - 1)$;

2) $L_{8i} = L_{2i}L_{6i} - L_{4i}$.

1.118. Докажите следующее соотношение, связывающее числа Фибоначчи и числа Люка:

$$F_{n+k} + (-1)^k F_{n-k} = F_n L_k, \quad n, k = 1, 2, 3, \ldots,\ n > k.$$

1.119. Докажите тождества, устанавливающие связь между числами Фибоначчи и числами Люка:

1) $F_n^2 = \dfrac{L_n^2 - 4(-1)^n}{5}$, $\ n = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $F_{n-1}F_{n+1} = \dfrac{L_n^2 + (-1)^n}{5}$, $\ n = 2, 3, \ldots$

1.120. Докажите тождества для всех целых $n > 3$:

1) $F_{n-2}F_{n+2} = \dfrac{1}{5}(L_n^2 - 9(-1)^n)$;

2) $F_{n-3}F_{n+3} = \dfrac{1}{5}(L_n^2 + 16(-1)^n)$.

1.121. Обобщив тождества из упражнений **1.119** и **1.120**, выразите произведение чисел Фибоначчи $F_{n-k}F_{n+k}$ для целых неотрицательных n и k, причем $k \leqslant n - 1$, через числа Люка.

1.122. Докажите тождество, верное для натуральных значений n:

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}.$$

1.123. Произвольное натуральное число N в десятичной системе счисления можно представить единственным образом в виде [4, 17, 20]

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где каждое из a_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, равно одному из чисел $0, 1, \ldots, 9$. Такое число записывают как $N = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$.

Докажите **признак делимости на** 3: *для того чтобы число N делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.*

1.124. Докажите **признак делимости на** 7: *для того чтобы число N делилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы сумма утроенного числа десятков и числа единиц его десятичной записи делилась на 7.*

1.125. Докажите **признак делимости на** 9: *для того чтобы число N делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.*

1.126. Докажите **признак делимости на** 11: *для того чтобы число N делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммами цифр, стоящих в его десятичной записи на четных и нечетных местах, делилась на 11.*

$*$**1.127.** **Основная теорема арифметики** утверждает, что *каждое натуральное число, большее единицы, либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел. Такое представление единственно с точностью до расположения сомножителей* [17, 57].

Используя принцип математической индукции во второй форме, докажите основную теорему арифметики.

1.128. Докажите, что для произвольного числа n в натуральном ряду $1, 2, 3, \ldots$ найдутся n последовательных составных чисел.

1.129. Найдите десять последовательных составных чисел.

Ответы, указания, решения к главе «Основы математической логики»

1.1. *Решение.*

Как следует из определения, высказывание — это предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Предложение «язык Python относится к высокоуровневым языкам программирования» истинно, а «первые компьютеры появились в XVIII веке» — ложно. Вопросительные и восклицательные предложения не относят к высказываниям. В итоге получаем, что высказываниями являются только предложения из 1) и 4).

1.2. *Ответ:* высказываниями являются предложения 1) и 3).

1.3. *Ответ:* нет, поскольку из предположения об истинности или ложности рассматриваемого предложения следует противоречие.

1.4. *Доказательство.*

Составим таблицу истинности приведенных высказываний:

A	B	**не** $(A$ **и** $B)$	$($**не** $A)$ **или** $($**не** $B)$	**не** $(A$ **или** $B)$	$($**не** $A)$ **и** $($**не** $B)$
И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И

Столбцы, соответствующие правой и левой частям равенств, совпадают. Этим доказывается истинность логических эквивалентностей **не** $(A$ **и** $B) \Leftrightarrow ($**не** $A)$ **или** $($**не** $B)$ и **не** $(A$ **или** $B) \Leftrightarrow ($**не** $A)$ **и** $($**не** $B)$.

1.5. *Ответ:*

1) **не** $(A_1$ **и** A_2 **и** $\ldots$ **и** $A_n) \Leftrightarrow ($**не** $A_1)$ **или** $($**не** $A_2)$ **или** $\ldots$ **или** $($**не** $A_n)$;

2) **не** $(A_1$ **или** A_2 **или** $\ldots$ **или** $A_n) \Leftrightarrow ($**не** $A_1)$ **и** $($**не** $A_2)$ **и** $\ldots$ **и** $($**не** $A_n)$.

1.6. *Решение.*

Высказывание P можно представить как дизъюнкцию трех высказываний: $P = P_A$ **или** P_B **или** P_C, где через P_A обозначено высказывание

«A — истинно, B — ложно и C — ложно», а P_B и P_C для других двух вариантов истинностных значений высказываний A, B и C записываются аналогично. Окончательно получаем:

$$P = (A \textbf{ и не } B \textbf{ и не } C) \textbf{ или } (\textbf{не } A \textbf{ и } B \textbf{ и не } C) \textbf{ или}$$
$$\textbf{или } (\textbf{не } A \textbf{ и не } B \textbf{ и } C).$$

1.7. *Ответ:* $P = A$ **или** B **или** C.

1.8. *Ответ:*

$$P = \textbf{не}\big((A \textbf{ и } B \textbf{ и не } C \textbf{ и не } D) \textbf{ или } (A \textbf{ и не } B \textbf{ и } C \textbf{ и не } D) \textbf{ или}$$
$$\textbf{или } (A \textbf{ и не } B \textbf{ и не } C \textbf{ и } D) \textbf{ или } (\textbf{не } A \textbf{ и } B \textbf{ и } C \textbf{ и не } D) \textbf{ или}$$
$$\textbf{или } (\textbf{не } A \textbf{ и } B \textbf{ и не } C \textbf{ и } D) \textbf{ или } (\textbf{не } A \textbf{ и не } B \textbf{ и } C \textbf{ и } D)\big).$$

1.9. *Решение.*

Составим таблицу истинности приведенных высказываний:

A	B	C	A **и** B	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(A$ **и** $B) \Rightarrow C$
И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	Л	Л	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И

Два последних столбца совпадают, поэтому соответствующие выражения логически эквивалентны.

1.10. *Решение.*

Обозначим: $P_1 = A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $P_2 = (\textbf{не}\, C) \Rightarrow ((\textbf{не}\, A) \textbf{ или } (\textbf{не}\, B))$. Таблица истинности для высказываний P_1 и P_2 представлена ниже.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	(**не** A) **или** (**не** B)	P_1	P_2
И	И	И	И	Л	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Из сравнения двух последних столбцов следует логическая эквивалентность P_1 и P_2.

1.11. *Решение.*

Задача решается составлением таблицы истинности для высказываний $P_1 = A$ **или** (B **и** C), $P_2 = (A$ **или** $B)$ **и** $(A$ **или** $C)$.

A	B	C	A **или** B	A **или** C	B **и** C	P_1	P_2
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

1.12. *Решение.*

Задача решается составлением таблицы истинности для высказываний $P_1 = A$ **и** (B **или** C), $P_2 = (A$ **и** $B)$ **или** $(A$ **и** $C)$.

A	B	C	A **и** B	A **и** C	B **или** C	P_1	P_2
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

1.13. *Доказательство.*

Введем следующие обозначения: $P_1 = (A$ **или** $B)$ **и** (**не** $(A$ **и** $B))$, $P_2 = (A$ **и** (**не** $B))$ **или** ((**не** $A)$ **и** $B)$. На всех возможных наборах значений истинности высказываний A и B высказывание $P_1 \Leftrightarrow P_2$ истинно, поэтому приведенное высказывание является тавтологией.

A	B	A **и не** B	**не** A **и** B	P_1	P_2	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
И	И	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	Л	Л	И

1.14. *Решение.*

Составим таблицу истинности для составного высказывания $P = (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A$ **и** $B) \Rightarrow C)$:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(A$ **и** $B)$	$(A$ **и** $B) \Rightarrow C$	P
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И

Анализ таблицы показывает, что на всех возможных наборах значений истинности простых высказываний A, B и C высказывание P истинно. Следовательно, приведенное высказывание является тавтологией.

1.15. *Решение.*

1) Составим таблицу истинности для приведенного высказывания $P = (A$ **и** $(B$ **или** $C)) \Rightarrow (A$ **или** $(B$ **и** $C))$. Для всех наборов значений высказываний A, B и C, входящих в состав P, P принимает истинное значение.

A	B	C	B **или** C	A **и** $(B$ **или** $C)$	B **и** C	A **или** $(B$ **и** $C)$	P
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	И	И
Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И

В силу этого высказывание P является тавтологией.

2) Пусть $P = (A$ **и** $(B \Rightarrow C))$ **и** $(B$ **или** $(A \Rightarrow C))$. Из анализа таблицы истинности для высказывания P следует, что для некоторых наборов значений высказываний A, B и C, входящих в состав P (например, для $A = B =$ И, $C =$ Л), P принимает ложное значение.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	A **и** $(B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	B **или** $(A \Rightarrow C)$	P
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л
Л	И	И	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л
Л	Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л

Следовательно, высказывание P не является тавтологией.

1.16. *Ответ:*

1) не является;
2) не является.

1.17. *Решение.*

Обратим внимание, что последовательность высказываний, записанных в виде отдельных предложений, с помощью логических операций должна быть записана в виде конъюнкции простых высказываний. Учитывая сказанное и используя основные логические операции, получаем следующий символьный вид составных высказываний:

1) $(B$ **или** $A) \Rightarrow C$;

2) (**не** $C) \Rightarrow$ (**не** $A)$;

3) $((A \Rightarrow C)$ **и** (**не** $A)) \Rightarrow$ ((**не** $B)$ **или** (**не** $C)$).

1.18. *Ответ:*

1) $C \Rightarrow (A \Rightarrow$ (**не** $B))$;

2) $A \Rightarrow ((B$ **и** (**не** $C))$ **или** ((**не** $B)$ **и** $C))$.

1.19. *Решение.*

Приведенное высказывание рассматриваем как составное. Обозначим высказывания, входящие в его состав, через

A = «гвардейцы кардинала поблизости»;
B = «д'Артаньян готов к бою».

Контрапозитивным по отношению к высказыванию $A \Rightarrow B$ по определению является **не** $B \Rightarrow$ **не** A. Следовательно, ответом на данное упражнение будет **не** $B \Rightarrow$ **не** $A =$ «если д'Артаньян не готов к бою, то поблизости нет гвардейцев кардинала».

1.20. *Решение.*

Обозначим высказывания, входящие в состав приведенного составного высказывания, как

$A =$ «Арамис станет епископом»;
$B =$ «Портос получит баронский титул»;
$C =$ «д'Артаньяну вручат маршальский жезл».

Контрапозитивным по отношению к высказыванию (A **и** B) $\Rightarrow C$ является (**не** C) $\Rightarrow$ (**не** (A **и** B)), которое логически эквивалентно следующему: (**не** C) $\Rightarrow$ ((**не** A) **или** (**не** B)). В силу этого ответом на данное упражнение будет (**не** C) $\Rightarrow$ ((**не** A) **или** (**не** B)) $=$ «если д'Артаньяну не вручат маршальский жезл, то или Арамис не станет епископом, или Портос не получит баронский титул».

1.21. *Ответ:*

«Если Арамис не раскроет замысел кардинала, то либо Атос не перехватит письмо, либо Портос не уйдет от погони».

1.22. *Ответ:*

1) P_1 и P_2 не являются логически эквивалентными;

2) эквивалентные высказывания.

1.23. *Ответ:*

1) эквивалентные высказывания;

2) X и Y не являются логически эквивалентными;

3) эквивалентные высказывания;

4) эквивалентные высказывания.

1.24. *Ответ:*

Тождественно ложными являются высказывания пунктов 3) и 4).

1.25. *Решение.*

Введем обозначения:

$C =$ «инкогнито — кардинал»;
$M =$ «инкогнито — миледи».

Запишем высказывания каждого из мушкетеров с помощью логических операций:

1) д'Артаньян: C истинно, $C =$ И;
2) Портос: $P = (C$ **или** $M)$ **и** **не** $(C$ **и** $M)$.

Составлением таблицы истинности несложно показать, что высказывание Портоса логически эквивалентно

$$P = (C\ \textbf{и не}\ M)\ \textbf{или}\ (M\ \textbf{и не}\ C).$$

3) Арамис: $P \Rightarrow C$.
4) Атос: $P\ \textbf{и}\ (P \Rightarrow C)$.

Согласно условию, высказывание Атоса истинно, $P\ \textbf{и}\ (P \Rightarrow C) = \text{И}$. Конъюнкция двух высказываний истинна, если и только если каждое из высказываний принимает истинное значение, поэтому

$$\begin{cases} P = \text{И}; \\ P \Rightarrow C = \text{И}. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует $\text{И} \Rightarrow C = \text{И}$, значит, высказывание C является истинным, и под маской скрывался кардинал.

1.26. *Ответ:* шпаги сломали Портос и Арамис.

1.27. *Решение.*
Введем обозначения:
A — «виновен Александров»;
B — «виновен Быков»;
C — «виновен Соколов».

Пусть $P = (C \Rightarrow B)\ \textbf{и не}\ (A \Rightarrow B)$. Из условия задачи следует $P = \text{И}$. Выпишем таблицу истинности для высказывания в левой части полученного равенства.

A	B	C	$C \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	**не** $(A \Rightarrow B)$	P
И	И	И	И	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	Л

Составное высказывание $(C \Rightarrow B)\ \textbf{и не}\ (A \Rightarrow B)$ принимает истинное значение только в одном случае, а именно, когда высказывания

B и C ложны, а высказывание A истинно. Отсюда следует вывод, что в ограблении виновен Александров.

1.28. *Решение.*

Первый способ

Пусть $S_i =$ И, если i-й станок работает, где $i = 1, 2, 3, 4$, и $S_i =$ Л в противном случае. Составим таблицу истинности для логических выражений, соответствующих условиям работы станков (табл. 1.3). Из условия задачи заключаем, что следующие составные высказывания имеют истинное значение:

$$P_1 = S_1 \Rightarrow (S_2\,\textbf{и}\,S_3), \qquad P_2 = S_3 \Leftrightarrow S_4,$$
$$P_3 = S_2 \Rightarrow \textbf{не}\ S_4, \qquad P_4 = (S_1\ \textbf{и не}\ S_2)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2).$$

Из анализа таблицы истинности следует, что

$$S_1 = S_3 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = \text{И}.$$

Получаем, что в данный момент работает только второй станок.

Второй способ

Поскольку число строк в таблице истинности равно 2^n, где n — количество переменных в логическом выражении [4, 22], то с увеличением n размер таблицы истинности быстро возрастает, и работа с таблицей истинности становится затруднительной. В силу этого предпочтительным оказывается способ упрощения логических выражений с помощью эквивалентных преобразований.

Рассмотрим логическое выражение

$$P = P_1\ \textbf{и}\ P_2\ \textbf{и}\ P_3\ \textbf{и}\ P_4.$$

Согласно условию задачи, данное выражение принимает истинное значение. Упростим P, используя законы алгебры логики (табл. 1.2).

Так как изменение порядка выражений, связанных операцией конъюнкции, приводит к логически эквивалентной формуле (закон коммутативности), то представим выражение P в виде

$$P = P_1\,\textbf{и}\,P_2\,\textbf{и}\,P_3\,\textbf{и}\,P_4 = ((P_1\,\textbf{и}\,P_4)\,\textbf{и}\,P_2)\,\textbf{и}\,P_3.$$

Теперь последовательно упрощаем полученное выражение:

$$\begin{aligned}
P_1\,\textbf{и}\,P_4 &= (S_1 \Rightarrow (S_2\ \textbf{и}\ S_3))\ \textbf{и}\ [(S_1\ \textbf{и не}\,S_2)\ \textbf{или}\ (\,\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textbf{не}\,S_1\ \textbf{или}\ (S_2\,\textbf{и}\,S_3))\ \textbf{и}\ [(S_1\ \textbf{и не}\,S_2)\ \textbf{или}\ (\,\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [(\textbf{не}\,S_1\ \textbf{или}\ (S_2\,\textbf{и}\,S_3)\,\textbf{и}\,(S_1\ \textbf{и не}\,S_2)]\ \textbf{или} \\
&\qquad \textbf{или}\ [(\textbf{не}\,S_1\ \textbf{или}\ (S_2\,\textbf{и}\,S_3))\,\textbf{и}\,(\,\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_1\ \textbf{и не}\,S_2)\ \textbf{или}\ (S_2\,\textbf{и}\,S_3\,\textbf{и}\,S_1\ \textbf{и не}\,S_2)]\ \textbf{или} \\
&\qquad \textbf{или}\ [(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)\ \textbf{или}\ (S_2\,\textbf{и}\,S_3\ \textbf{и не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\text{Л}\ \textbf{или}\ \text{Л})\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2\,\textbf{и}\,S_3) = \textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2.
\end{aligned}$$

Таблица 1.3

К упр. ***1.28***

S_1	S_2	S_3	S_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P
И	И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	И	Л	И	И	И	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л
Л	И	И	И	И	И	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л

Далее вычисляем $(P_1\ \textbf{и}\ P_4)\ \textbf{и}\ P_3$:

$$\begin{aligned}(P_1\ \textbf{и}\ P_4)\ \textbf{и}\ P_3 = (\textbf{не}\ S_1\ \textbf{и}\ S_2)\ \textbf{и}\ (S_2 \Rightarrow \textbf{не}\ S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\textbf{не}\ S_1\ \textbf{и}\ S_2)\ \textbf{и}\ (\textbf{не}\ S_2\ \textbf{или}\ \textbf{не}\ S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\textbf{не}\ S_1\ \textbf{и}\ S_2\ \textbf{и}\ \textbf{не}\ S_2)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ S_1\ \textbf{и}\ S_2\ \textbf{и}\ \textbf{не}\ S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ \textbf{не}\ S_1\ \textbf{и}\ S_2\ \textbf{и}\ \textbf{не}\ S_4.\end{aligned}$$

Проведем заключительное логическое умножение:

$$
\begin{aligned}
P = ((P_1 \text{ и } P_4) \text{ и } P_3) \text{ и } P_2 = \\
&= (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4) \textbf{ и } [(S_3 \textbf{ и } S_4) \textbf{ или } (\textbf{не } S_3 \textbf{ и не } S_4)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и } S_4) \textbf{ или} \\
&\qquad \textbf{или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \text{Л } \textbf{или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_4 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4.
\end{aligned}
$$

Полученная эквивалентная форма

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4 = \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_3 \textbf{ и не } S_4$$

позволяет легко установить значения логических выражений S_1–S_4:

$$S_1 = S_3 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = \text{И}.$$

Следовательно, в данный момент работает только второй станок.

1.29. *Решение.*

Первый способ

Положим $S_i = \text{И}$, если i-й станок работает, где $i = 1, 2, 3, 4$, и $S_i = \text{Л}$ в противном случае. Ответ на вопрос задачи можно получить, построив таблицу истинности для логических выражений, соответствующих условиям работы станков (табл. 1.4). Из условия задачи заключаем, что следующие составные высказывания имеют истинное значение:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = S_1 \Rightarrow S_2, && P_2 = S_2 \Leftrightarrow S_3, \\
&P_3 = S_4 \Rightarrow \textbf{не } S_3, && P_4 = (S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и не } S_2).
\end{aligned}
$$

Из анализа таблицы истинности следует, что

$$S_1 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = S_3 = \text{И}.$$

Окончательно получаем, что в данный момент работают второй и третий станки.

Второй способ

Рассмотрим логическое выражение

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4.$$

Согласно условию задачи, данное выражение принимает истинное значение. Попробуем упростить P.

Применяя закон коммутативности, представим выражение P в виде

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4 = ((P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_2) \textbf{ и } P_3.$$

Таблица 1.4

К упр. ***1.29***

S_1	S_2	S_3	S_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P
И	И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	И	И	Л	И	И	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л
Л	И	И	И	И	И	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	И	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л

Теперь последовательно упрощаем полученное выражение:

$$
\begin{aligned}
&P_1\,\textbf{и}\,P_4 = (S_1 \Rightarrow S_2)\,\textbf{и}\,[(S_1\,\textbf{и не}\,S_2)\,\textbf{или}\,(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (\textbf{не}\,S_1\,\textbf{или}\,S_2)\,\textbf{и}\,[(S_1\,\textbf{и не}\,S_2)\,\textbf{или}\,(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow [(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{или}\,S_2)\,\textbf{и}\,(S_1\,\textbf{и не}\,S_2)]\ \textbf{или}\ [(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{или}\,S_2)\,\textbf{и}\,(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow [(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_1\,\textbf{и не}\,S_2)\,\textbf{или}\,(S_2\,\textbf{и}\,S_1\,\textbf{и не}\,S_2)]\ \textbf{или}\\
&\quad \textbf{или}\ [(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)\,\textbf{или}\,(S_2\,\textbf{и не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)] \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (\text{Л}\,\textbf{или}\,\text{Л})\,\textbf{или}\,(\textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2)\,\textbf{или}\,(S_2\,\textbf{и не}\,S_1) \Leftrightarrow \textbf{не}\,S_1\,\textbf{и}\,S_2.
\end{aligned}
$$

Далее вычисляем $(P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_2$:

$$\begin{aligned}(P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_2 = (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2) \textbf{ и } [S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ или } (\textbf{не } S_2 \textbf{ и не } S_3)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и не } S_2 \textbf{ и не } S_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ или } \text{Л} \Leftrightarrow \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3.\end{aligned}$$

Осталось провести последнее логическое умножение:

$$\begin{aligned}P = ((P_1 \textbf{ и } P_4) \textbf{ и } P_2) \textbf{ и } P_3 = (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ и } (S_4 \Rightarrow \textbf{не } S_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3) \textbf{ и } (\textbf{не } S_3 \textbf{ или не } S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и не } S_3) \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{Л} \textbf{ или } (\textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и не } S_4) \Leftrightarrow \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и не } S_4.\end{aligned}$$

Конечно, можно выбрать и любой другой порядок логического умножения выражений P_1–P_4, если этим будет обеспечиваться удобство вычислений.

Полученная эквивалентная форма

$$P = P_1 \textbf{ и } P_2 \textbf{ и } P_3 \textbf{ и } P_4 = \textbf{не } S_1 \textbf{ и } S_2 \textbf{ и } S_3 \textbf{ и не } S_4$$

позволяет легко установить значения логических выражений S_1–S_4:

$$S_1 = S_4 = \text{Л}, \quad S_2 = S_3 = \text{И}.$$

Следовательно, в данный момент работают второй и третий станки.

1.30. *Ответ:*

Неисправности возникли в вычислительном сервере и в первом блоке охлаждения.

1.31. *Ответ:*

Администратору пришлось устранять неисправности в основном сервере и в первом и втором блоках охлаждения.

1.32. *Решение.*

Задачу можно решать построением таблицы истинности или методом эквивалентных преобразований логических высказываний. Однако проще заметить, что поскольку резервный аэропорт работает тогда и только тогда, когда не работает соответствующий основной, то легко сделать вывод: работает B_1, $B_1 =$ И. Из оставшихся воздушных портов A и A_1 самолеты может принимать один и только один. Далее, работа A_1 необходима для B_1, поэтому $A_1 =$ И. Таким образом, действующие аэропорты — A_1 и B_1.

1.33. *Решение.*

Введем логические переменные:

A — «поедет Атос»;
B — «поедет Портос»;
C — «поедет Арамис».

Из условия задачи заключаем, что (A **или** B) **и** (B **или** C) **и** ($B \Rightarrow C$) **и** ($A \Rightarrow$ **не** C) = И. Упростим выражение в левой части полученного равенства:

(A **или** B) **и** (B **или** C) **и** ($B \Rightarrow C$) **и** ($A \Rightarrow$ **не** C) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** (B **или** C) **и** (**не** B **или** C) **и** (**не** A **или не** C) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** [(B **и не** B) **или** C] **и** (**не** A **или не** C) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** C **и** (**не** A **или не** C) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** [(C **и не** A) **или** (C **и не** C)] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (A **или** B) **и** (**не** A **и** C) $\Leftrightarrow$ (A **и** (**не** A **и** C)) **или** (**не** A **и** B **и** C) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ **не** A **и** B **и** C.

Следовательно, в путешествие отправятся Портос и Арамис.

1.34. *Ответ:* Арамис и Портос.

1.35. *Решение.*

Поскольку каждый из отдыхающих находится либо на экскурсии, либо на пляже, то можно ввести в рассмотрение логические переменные A, $Б$, $В$ и $Г$, значение которых определяет занятие соответствующего студента. Обозначим A = И, если Алиса на экскурсии, и A = Л, если Алиса на пляже. По аналогичному правилу определим значения переменных $Б$, $В$, $Г$.

Согласно условию задачи, выражение

($Б$ **или** $В$) **и** ((**не** $В$ **и не** $Г$) $\Rightarrow$ **не** $А$) **и** (**не** (**не** $А \Rightarrow$ ($В$ **или** $Г$)))

принимает истинное значение:

($Б$ **или** $В$) **и** ((**не** $В$ **и не** $Г$) $\Rightarrow$ **не** $А$) **и** (**не** (**не** $А \Rightarrow$ ($В$ **или** $Г$))) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($Б$ **или** $В$) **и** ($В$ **или** $Г$ **или не** $А$) **и** (**не** $А$ **и не** $В$ **и не** $Г$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (($Б$ **и не** $А$ **и не** $В$ **и не** $Г$) **или** ($В$ **и не** $А$ **и не** $В$ **и не** $Г$)) **и**
и ($В$ **или** $Г$ **или не** $А$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ((**не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$) **или** Л) **и** ($В$ **или** $Г$ **или не** $А$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (**не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$) **и** (**не** $А$ **или** $В$ **или** $Г$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (**не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$ **и не** $А$) **или**
или (**не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$ **и** $В$) **или**
или (**не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$ **и** $Г$) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (**не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$) **или** Л **или** Л $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ **не** $А$ **и** $Б$ **и не** $В$ **и не** $Г$.

Поскольку **не** A **и** $Б$ **и не** B **и не** $Г$ = И, то получаем следующий результат: на экскурсию отправился Богдан, а Алиса, Валерия и Григорий — на пляж.

1.36. *Ответ:* Алиса.

1.37. *Ответ:*

A	B	$A \mid B$	$A \downarrow B$
И	И	Л	Л
И	Л	И	Л
Л	И	И	Л
Л	Л	И	И

1.38. *Решение.*

1) Используя преобразования к логически эквивалентным выражениям для операций отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации, получим:

$$\textbf{не } A \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или } (\textbf{не } A) = A \mid A;$$
$$A \textbf{ или } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A) \textbf{ или не } (\textbf{не } B) = (A \mid A) \mid (B \mid B);$$
$$A \textbf{ и } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A \textbf{ или не } B) = (A \mid B) \mid (A \mid B);$$
$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или } B \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или не } (\textbf{не } B) = A \mid (B \mid B).$$

2) Задание выполняется аналогично пункту 1):

$$\textbf{не } A \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ и } (\textbf{не } A) = A \downarrow A;$$
$$A \textbf{ или } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A \textbf{ и не } B) = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B);$$
$$A \textbf{ и } B \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A) \textbf{ и не } (\textbf{не } B) \Leftrightarrow \textbf{не } A \downarrow \textbf{не } B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B);$$
$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\textbf{не } A) \textbf{ или } B \Leftrightarrow \textbf{не } (A \textbf{ и не } B) \Leftrightarrow \textbf{не } (\textbf{не } A \downarrow B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \textbf{не } ((A \downarrow A) \downarrow B) = ((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow B).$$

1.39. *Ответ:*

1) $A \downarrow B \Leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B)) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B))$;

2) $A \mid B \Leftrightarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$.

1.40. *Ответ:* предикатами являются предложения 2)–4).

1.41. *Ответ:*

1) **не** $P(n) = \{$натуральное число n является нечетным$\}$;

2) **не** $P(x, y) = \{x \geqslant y\}$.

1.42. *Решение.*

Запишем отрицание выражения T и воспользуемся логическими эквивалентностями **не** $\forall x\ (P(x)) \Leftrightarrow \exists x$ **не** $(P(x))$ и **не** $\exists x\ (P(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x$ **не** $(P(x))$:

$$\begin{aligned} 1)\quad \textbf{не}\, T \ &= \ \textbf{не}\, \forall x\, (\exists y\, (P(x,y)) \Leftrightarrow \exists x\, (\textbf{не}\, \exists y\, (P(x,y))) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists x\, (\forall y\, (\textbf{не}\, P(x,y))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\quad \textbf{не}\, T \ &= \ \textbf{не}\, \exists x\, (\exists y\, (P(x,y)) \Rightarrow Q(x,y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x\, (\textbf{не}\, (\exists\, y(P(x,y))) \Rightarrow Q(x,y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x\, (\exists y\, (P(x,y))\ \textbf{и не}\ Q(x,y)). \end{aligned}$$

1.43. *Решение.*

1) Высказывание $\forall x\, (\exists y\, (x > y))$ означает «для каждого вещественного числа x найдется некоторое число y, которое меньше x». Это истинное высказывание.

2) Высказывание $\forall x\, (x \neq 0 \Rightarrow \exists y\, (xy = 1))$ означает «для каждого ненулевого значения x существует обратное число y, такое, что $xy = 1$». Это истинное высказывание.

1.44. *Ответ:*

1) истинно;

2) ложно.

1.45. *Решение.*

Воспользовавшись определением предела числовой последовательности, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \ \Leftrightarrow\ \textbf{не}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Последовательно вносим операцию отрицания под знаки кванторов:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n \neq a \ &\Leftrightarrow\ \textbf{не}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \textbf{не}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \textbf{не}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \textbf{не}\ \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant n_0\ \textbf{и}\ |a_n - a| \geqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

При вычислении отрицания импликации была использована эквивалентность $P \Rightarrow Q \ \Leftrightarrow\ $ **не** P **или** Q.

1.46. *Ответ:* $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ (|x - x_0| < \delta$ **и** $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon)$.

1.47. *Ответ:* $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ (|x - x_0| < \delta$ **и** $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon)$.

1.48. *Ответ:* $\exists x\ (P(x)$ **и** $(\forall y\ ((P(y)) \Rightarrow (y = x))))$.

1.49. *Доказательство.*

Пусть $P(n)$ — предикат «$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$».

База индукции
Для $n = 1$ получаем $1 = 1^2$, т. е. $P(1)$ — истинно.

Шаг индукции
Пусть для $n = k$ высказывание $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ истинно. Докажем истинность $P(k + 1)$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = \\ = k^2 + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Таким образом, при любом натуральном k справедлива импликация $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Значит, по принципу математической индукции предикат $P(n)$ имеет истинное значение для всех натуральных n.

1.50. *Доказательство.*

Обозначим предикат «$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{1}{2}n\,(3n - 1)$» через $P(n)$.

База индукции
Для $n = 1$ получаем $1 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - 1)$, поэтому $P(1)$ — истинно.

Шаг индукции

Пусть для $n = k$ высказывание $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) = \dfrac{1}{2}k(3k - 1)$ истинно. Тогда

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) = \\ = \frac{1}{2}k(3k - 1) + (3(k + 1) - 2) = \frac{1}{2}(3k^2 + 5k + 2) = \\ = \frac{1}{2}(k + 1)(3(k + 1) - 1).$$

Таким образом, при любом $k = 1, 2, \ldots$ импликация $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ справедлива. Значит, по принципу математической индукции предикат $P(n)$ имеет истинное значение для всех натуральных n.

1.52. *Решение.*

Требуется доказать тождество

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

для всех натуральных n. Обозначим через $P(n)$ предикат $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

База индукции

При $n = 1$ получаем $1 = 1$, значит, $P(1)$ истинно.

Шаг индукции

Пусть для $n = k$ высказывание $P(k)$ истинно. Тогда

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k+1)^3.$$

Как известно, $1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, следовательно

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)^2 + (k+1)^3 = \\ = (k+1)^2\left(\frac{1}{4}k^2 + (k+1)\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Принимая во внимание, что $1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, окончательно получим:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + (k+1))^2.$$

Значит, по принципу математической индукции предикат $P(n)$ имеет истинное значение для всех натуральных n, и сумма кубов первых n натуральных чисел равна квадрату их суммы.

1.54. *Доказательство.*

Применим метод математической индукции. Обозначим через $P(n)$ предикат $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$.

База индукции

Если положить $n = 1$, то предикат $P(n)$ примет вид $S_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = a_1$, что является истинным утверждением.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — истинно. Рассмотрим сумму первых $k+1$ членов арифметической прогрессии:

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}.$$

Согласно индуктивному предположению $S_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2}k$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1 + a_k}{2}k + a_{k+1} = \frac{1}{2}\left[(a_1 + a_k)k + 2a_{k+1}\right] = \\ &= \frac{1}{2}[(a_1 + a_1 + (k-1)d)k + 2(a_1 + kd)] = \frac{1}{2}[2a_1(k+1) + k(k+1)d] = \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + a_1 + kd)(k+1) = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1). \end{aligned}$$

Методом математической индукции доказано, что $P(n)$ принимает истинное значение для всех натуральных n.

1.55. *Указание.* $S_{k+1} = S_k + b_1 q^k$.

1.56. *Доказательство.*
Обозначим $f(n) = n^2 - n$ и $P(n)$ — предикат «$f(n)$ делится на 2».

База индукции
При $n = 1$ получаем $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ — четное число, поэтому $P(1)$ истинно.

Шаг индукции
Предположим, что $f(k)$ четно для натуральных $k \geqslant 1$. Докажем, что это влечет четность $f(k+1)$:

$$f(k+1) = (k+1)^2 - (k+1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = (k^2 - k) + 2k = f(k) + 2k.$$

Поскольку в правой части полученного соотношения стоит сумма двух четных чисел, то $f(k+1)$ делится на 2.

Примечание. Утверждение задачи становится очевидным, если представить $k^2 - k$ в виде $k^2 - k = k(k-1)$. Из двух последовательных натуральных чисел одно обязательно является четным, и их произведение кратно 2.

1.57. *Доказательство.*
1) Обозначим предикат «$4n^3 + 14n$ кратно 3» через $P(n)$.
База индукции
Для $n = 1$ получаем: 18 кратно 3, что является истинным высказыванием.

Шаг индукции
Пусть $n = k$, и $4k^3 + 14k$ кратно 3. Покажем, что из последнего утверждения следует истинность $P(k+1)$:

$$\begin{gathered} 4(k+1)^3 + 14(k+1) = 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 14(k+1) = \\ = (4k^3 + 14k) + 3(4k^2 + 4k + 6). \end{gathered}$$

Первое слагаемое в сумме кратно 3 по индуктивному предположению, во второе число 3 входит в качестве сомножителя.

Таким образом, по принципу математической индукции предикат $P(n)$ имеет истинное значение для всех натуральных n.

2) Обозначим предикат «$n^5 - n - 10$ кратно 5» как $P(n)$. Поскольку $10 = 2 \cdot 5$, то достаточно доказать, что $f(n) = n^5 - n$ кратно 5 для всех натуральных значений n.

Б а з а и н д у к ц и и

Для $n = 1$ получаем: $f(1) = 0$ кратно 5.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что $f(k) = k^5 - k = 5l$ для некоторого целого l. Из данного предположения следует, что $f(k+1)$ кратно 5. Докажем это утверждение.

Действительно,

$$
\begin{aligned}
f(k+1) = (k+1)^5 - (k+1) &= (k+1)\big((k+1)^4 - 1\big) = \\
&= (k+1)\big((k+1)^2(k+1)^2 - 1\big) = \\
&= (k+1)\big((k^2+2k+1)(k^2+2k+1) - 1\big) = \\
&= (k+1)\big((k^4+4k^3+6k^2+4k+1) - 1\big) = \\
&= (k+1)(k^4+4k^3+6k^2+4k) = \\
&= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 4k = (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k).
\end{aligned}
$$

Используя индуктивное предположение, получаем, что $f(k+1)$ кратно 5. Значит, $n^5 - n + 10$ делится на 5 для всех натуральных n.

3) Б а з а и н д у к ц и и

Для $n = 1$ получаем: $6^{2n-1} - 6 = 0$ делится на 7.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что $6^{2k-1} - 6$ делится на 7, $k = 1, 2, \ldots$

Значит, $6^{2k-1} - 6 = 7l$, и $6^{2k-1} = 7l + 6$ для некоторого целого l. Докажем, что $6^{2(k+1)-1} - 6 = 6^{2k+1} - 6$ делится на 7:

$$
\begin{aligned}
6^{2k+1} - 6 = 6^{2k-1+2} - 6 = 36 \cdot 6^{2k-1} - 6 = \\
= 36(7l+6) - 6 = 36 \cdot 7l + 35 \cdot 6.
\end{aligned}
$$

Заметим, что оба слагаемых в полученной сумме кратны 7, поэтому выражение $6^{2k+1} - 6$ делится на 7. Индукционный переход доказан. Значит, $6^{2n-1} - 6$ кратно 7 для всех натуральных чисел n.

4) Обозначим $f(n) = n(n-1)(2n-1)$.

База индукции

Для $n = 1$ получаем: $f(1) = 0$ кратно 6.

Шаг индукции

Пусть $f(k) = k(k-1)(2k-1)$ делится на 6. Докажем, что из данного предположения следует делимость на 6 величины $f(k+1)$:

$$f(k+1) = (k+1)k\,(2(k+1)-1) = k(k+1)(2k+1) = \\ = (k^2+k)(2k+1) = 2k^3+3k^2+k.$$

Вычислим разность $f(k+1) - f(k)$:

$$f(k+1) - f(k) = 2k^3+3k^2+k-k(k-1)(2k-1) = \\ = 2k^3+3k^2+k-(2k^3-3k^2+k) = 6k^2.$$

В равенстве $f(k+1) = f(k)+6k^2$ правая часть делится на 6 по индуктивному предположению. В силу этого $f(k+1)$ делится на 6, и, согласно методу математической индукции, $f(n) = n(n-1)(2n-1)$ делится на 6 для всех натуральных n.

1.58. *Доказательство.*

База индукции

Для $n = 1$ получаем: $a-1$ кратно $a-1$ — истинное высказывание.

Шаг индукции

Пусть a^k-1 кратно $a-1$ для некоторого натурального k. Значит, найдется такой полином $p(a)$, что выполняется равенство $a^k-1 = (a-1)p(a)$, или $a^k = (a-1)p(a)+1$. Докажем, что $a^{k+1}-1$ делится на $a-1$:

$$a^{k+1}-1 = a\cdot a^k - 1 = a\,[(a-1)p(a)+1]-1 = a(a-1)p(a)+(a-1).$$

Из последнего равенства следует

$$a^{k+1}-1 = (a-1)(a\,p(a)+1) = (a-1)\widetilde{p}(a),$$

где $\widetilde{p}(a)$ — некоторый полином.

Это доказывает, что полином a^n-1 делится на $(a-1)$ для всех натуральных n.

Примечание. Утверждение этого пункта несложно доказать путем непосредственного деления полинома $a^n - 1$ на $(a - 1)$ известным из курса алгебры способом [44]:

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} a^n \qquad\qquad\qquad\quad -1 \\ \underline{a^n - a^{n-1}} \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} a^{n-1} \\ \underline{a^{n-1} - a^{n-2}} \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} a^2 \\ \underline{a^2 - a} \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} a - 1 \\ \underline{a - 1} \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a - 1 \\ \hline a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1
\end{array}
\end{array}
$$

Заметим, что получена формула для суммы геометрической прогрессии (см. упражнение **1.55**) в частном случае $b_1 = 1$.

1.59. *Указание.* Примените метод математической индукции.

1.60. *Указание.* $79 \cdot 4^n - 4(-1)^n = 80 \cdot 4^n - 4^n - 4(-1)^n$.

1.61. *Решение.*

Для доказательства воспользуемся принципом математической индукции. Обозначим $a_n = \dfrac{79}{30} \cdot 4^n + \dfrac{(-1)^n}{5} - \dfrac{1}{3}$.

База индукции

Для $n = 1$ получаем: $a_1 = 10$ — целое.

Шаг индукции

Предположим, что a_k — целое для некоторого целого значения k. Докажем, что a_{k+1} тоже целое. Для этого вычислим разность $a_{k+1} - a_k$:

$$
a_{k+1} - a_k = \left(\frac{79}{30} \cdot 4^{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{5} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{79}{30} \cdot 4^k + \frac{(-1)^k}{5} - \frac{1}{3}\right) =
$$

$$
= \frac{79}{10} \cdot 4^k - 2\frac{(-1)^k}{5} = \frac{1}{10}(79 \cdot 4^k - 4(-1)^k).
$$

Число $\dfrac{1}{10}(79 \cdot 4^k - 4(-1)^k)$ целое (см. предыдущее упражнение). Значит, $a_n = \dfrac{1}{10}(79 \cdot 4^n - 4(-1)^n)$ целое при всех значениях $n = 1, 2, \ldots$

1.65. *Доказательство.*

Первый способ

Обозначим через $P(n)$ предикат

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

для некоторого n.

База индукции

Базу индукции составляет утверждение $P(1)$. Для $n=1$ сумма в левой части состоит из единственного слагаемого: $\dfrac{1}{3\cdot 7}=\dfrac{1}{3\cdot(4+3)}$, поэтому $P(1)$ истинно.

Шаг индукции

Докажем истинность предиката $P(k+1)$:

$$\underbrace{\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}}_{k/(3(4k+3))}+\frac{1}{(4(k+1)-1)(4(k+1)+3)}=$$

$$=\frac{k}{3(4k+3)}+\frac{1}{(4k+3)(4k+7)}=\frac{1}{3(4k+3)(4k+7)}(k(4k+7)+3)=$$

$$=\frac{k+1}{3(4(k+1)+3)}.$$

Значит, исходное тождество верно для всех $n=1,2,\ldots$

Второй способ

Данный способ основан только на алгебраических преобразованиях. Заметим, что каждое слагаемое в сумме представляется в виде разности

$$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right).$$

Перепишем сумму в следующем виде:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)+\left(\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k+7}\right)+\ldots+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right].$$

Перегруппируем слагаемые в полученной сумме таким образом, чтобы объединить противоположные по знаку слагаемые:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{4k+7}+\frac{1}{4k+7}\right)+\ldots-\frac{1}{4n+3}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{n}{3(4n+3)}.$$

1.66. *Указание.* См. решение предыдущего упражнения.

1.67. *Ответ:*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(ak+b)(ak+a+b)}=\frac{n}{(a+b)(an+a+b)}.$$

Результаты упражнений **1.65** и **1.66** получаются при значениях параметров $a=4$, $b=-1$ и $a=5$, $b=-1$ соответственно.

1.68. *Доказательство.*

Воспользуемся методом математической индукции. Обозначим предикат «$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}$» через $P(n)$.

База индукции

Для $n=1$ имеем: $1\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$, это истинное утверждение.

Шаг индукции

Пусть для некоторого $k\geqslant 1$ предикат $P(k)$ принимает истинное значение:

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{k^3}\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2k^2}.$$

Докажем, что это влечет справедливость неравенства

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^3}\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2(k+1)^2}.$$

Для этого оценим сумму:

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^3}\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{k^3}=$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{k^3+k^2+3k+1}{2k^2(k+1)^3}.$$

Поскольку $k^3 + k^2 + 3k + 1 > k^3 + k^2$ для всех натуральных k, то

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \frac{3}{2} - \frac{k^3 + k^2}{2k^2(k+1)^3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(k+1)^2}.$$

Таким образом, доказано утверждение $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, и, согласно методу математической индукции, предикат $P(n)$ принимает истинное значение при всех $n \geqslant 1$.

1.69. *Доказательство.*

Для доказательства утверждения $(n+2)^{n+3} > (n+3)^{n+2}$ для всех натуральных чисел удобно воспользоваться методом математической индукции.

Обозначим предикат «$(n+2)^{n+3} > (n+3)^{n+2}$» через $P(n)$ и, как обычно, проведем доказательство базы и шага индукции.

База индукции

Заметим, что при наименьшем возможном значении $n = 1$ неравенство принимает вид $3^4 > 4^3$, или $81 > 64$, что является истинным утверждением. База индукции доказана.

Шаг индукции

Предположим, что для некоторого $k \geqslant 1$ выполняется неравенство $(k+2)^{k+3} > (k+3)^{k+2}$. Докажем импликацию $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, т. е. что из $P(k)$ следует справедливость неравенства $(k+3)^{k+4} > (k+4)^{k+3}$.

Для этого умножим обе части соотношения $(k+2)^{k+3} > (k+3)^{k+2}$ на положительную величину $\dfrac{(k+3)^{k+4}}{(k+2)^{k+3}}$:

$$(k+3)^{k+4} > \frac{(k+3)^{2k+6}}{(k+2)^{k+3}}.$$

Справедлива следующая оценка правой части неравенства:

$$\frac{(k+3)^{2k+6}}{(k+2)^{k+3}} = \frac{(k+3)^{2(k+3)}}{(k+2)^{k+3}} = \frac{(k^2+6k+9)^{k+3}}{(k+2)^{k+3}} =$$
$$= \frac{((k+2)(k+4)+1)^{k+3}}{(k+2)^{k+3}} > (k+4)^{k+3}.$$

Следовательно, шаг индукции доказан.

В результате с помощью метода математической индукции для всех натуральных n доказано неравенство $(n+2)^{n+3} > (n+3)^{n+2}$.

1.70. *Доказательство.*

Обозначим предикат «$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)$» через $P(n)$.

База индукции

Для $n = 1$ неравенство принимает вид $(a_1b_1)^2 \leqslant a_1^2b_1^2$. Это истинное высказывание.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$ принимает истинное значение, т. е. выполняется неравенство $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2\right)$ для некоторого натурального k. Докажем истинность предиката $P(k+1)$:

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right).$$

Введем обозначение: $S = \left(\sum\limits_{i=1}^{k+1} a_ib_i\right)^2$. Используя индуктивное предположение, получим оценку величины S:

$$\begin{aligned} S &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i + a_{k+1}b_{k+1}\right)^2 = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2 + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2b_{k+1}^2$ к виду:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 - a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} b_i^2 - b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} a_i^2.$$

Следовательно, справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} S &\leqslant \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 - \left(a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} a_i^2 - 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 - \sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}b_i - a_ib_{k+1})^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right). \end{aligned}$$

Шаг индукции доказан, и по принципу математической индукции предикат $P(n)$ принимает истинное значение для всех натуральных n. Таким образом, неравенство Коши–Шварца доказано.

Установим, при каком условии в неравенстве Коши–Шварца имеет место знак равенства. Для этого заметим, что база индукции $(a_1 b_1)^2 \leqslant \leqslant a_1^2 b_1^2$ выполняется для всех a_1 и b_1. Из проведенных на шаге индукции вычислений следует, что знак равенства сохраняется при выполнении следующего условия:

$$\forall k \left(\sum_{i=1}^{k} (a_{k+1} b_i - a_i b_{k+1})^2 = 0 \right).$$

Это условие можно записать в виде:

$$(\forall i\,(a_i = 0)) \ \textbf{или} \ (\forall i\,(b_i = 0)) \ \textbf{или} \ (\exists \lambda\colon\ (\forall i\,(b_i = \lambda a_i)) \ \textbf{и} \ (\lambda \neq 0)).$$

1.71. *Решение.*

Базой индукции является высказывание $P(1)$, а индукционным шагом — $(\forall k\ P(k) \Rightarrow P(k+1))$. Из конъюнкции этих высказываний следует истинность $P(n)$ для произвольного натурального числа n. Используя логические операции и квантор всеобщности, получаем формулировку принципа математической индукции с помощью кванторов:

$$(P(1) \ \textbf{и} \ (\forall k\ P(k) \Rightarrow P(k+1))) \Rightarrow \forall n\ P(n).$$

1.72. *Доказательство.*

Любое четное число a можно представить в виде $a = 2k$, где k — некоторое целое число, поэтому запишем n и m в виде $n = 2k_1$, $m = 2k_2$, где k_1, k_2 — целые. Произведение $m \cdot n = (2k_1) \cdot (2k_2) = 2 \cdot (2k_1 k_2)$. Поскольку k_1, k_2 — целые числа, их удвоенное произведение тоже будет некоторым целым числом $k_3 = 2k_1 k_2$. Таким образом, $m \cdot n = 2k_3$, где k_3 — целое, значит, произведение четных чисел n и m четно.

1.73. *Доказательство.*

Утверждение задачи логически эквивалентно следующему: «если n не является нечетным, то n^2 не является нечетным», или «если n четно, то n^2 — четно».

Докажем последнее утверждение прямым рассуждением. Четное число n представим в виде $n = 2k$, где k — целое. Тогда $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = = 2k'$, k' — целое. Отсюда делаем вывод, что n^2 является четным. Таким образом, доказано утверждение «если n^2 нечетно, то n — нечетно».

1.74. *Доказательство.*

Предположим, что хотя бы один из сомножителей, например n, является четным числом. Как любое четное число, n можно представить в виде $n = 2k$, где k — целое. Тогда получим, что произведение $n \cdot m = 2k \cdot m$ делится на 2 и является четным числом. Приходим к противоречию с условием. Значит, наше предположение было неверно, и оба сомножителя нечетны.

1.75. *Доказательство.*

Пусть $p = 17l + m$, где l, m — целые, причем $0 \leqslant m < 17$ — остаток от деления p на 17. Тогда

$$p^2 = (17l + m)^2 = 17^2 l^2 + 34lm + m^2.$$

Получаем, что p^2 делится на 17 тогда и только тогда, когда m^2 делится на 17. А последнее возможно только в случае $m = 0$, остальные возможные значения m приводят к дробному числу $\dfrac{m^2}{17}$, что проверяется непосредственным перебором. Значит, если p^2 делится на 17, то и p делится на 17.

1.76. *Доказательство.*

Предположим, что $\sqrt{17}$ рационально, другими словами, величина $\sqrt{17}$ может быть представлена в виде несократимой дроби $\sqrt{17} = \dfrac{p}{q}$, где p и q — некоторые целые числа, не имеющие общих делителей. Обе части равенства положительны, поэтому возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному равенству

$$17 = \frac{p^2}{q^2} \ \text{ или } \ p^2 = 17q^2.$$

Из полученного соотношения следует, что p^2 делится на 17, значит, само число p делится на 17 (см. предыдущее упражнение). Следовательно, существует такое целое число s, что $p = 17s$. Подставив полученное выражение в соотношение $p^2 = 17q^2$, получим

$$(17s)^2 = 17q^2 \quad \Rightarrow \quad 17s^2 = q^2.$$

Из последнего равенства следует, что q делится на 17, т. е. существует такое целое s', что $q = 17s'$. Но это противоречит исходному предположению о несократимости дроби $\dfrac{p}{q} = \dfrac{17s}{17s'}$. Полученное противоречие доказывает иррациональность числа $\sqrt{17}$.

1.77. *Указание.*

Воспользуйтесь методом «от противного» и предположите, что разность $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ может быть представлена в виде $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, где p и q — целые числа, не имеющие общих делителей.

1.79. *Указание.*

Сумма и произведение двух иррациональных чисел не обязательно иррациональны.

1.80. *Решение.*

1) Применяя определение простого числа, непосредственно находим первые десять простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

2) Предположим, что число простых чисел конечно, наибольшее из них обозначим через p_N. Рассмотрим произведение всех простых чисел $P = p_1 \cdot p_2 \ldots p_N$ и прибавим к нему единицу. Число $P' = P + 1$ при делении на p_1 дает в остатке единицу, при делении на p_2 остаток также равен единице, и т. д. Получаем, что P' не делится ни на одно из чисел $p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_N$.

Согласно основной теореме арифметики, любое число $n = 2, 3, \ldots$ можно единственным образом представить в виде произведения простых сомножителей (см. упражнение **1.127**), поэтому делаем вывод, что либо число P' — простое, либо представимо в виде $P' = p_a \cdot p_b \ldots$, причем $p_a, p_b, \ldots$ есть простые числа, каждое из которых не равно ни одному из $p_1, p_2, \ldots$

Полученное противоречие доказывает, что существует бесконечно много простых чисел.

Примечание. Данное доказательство факта бесконечности множества простых чисел было предложено Евклидом[1] [28].

1.81. *Ответ:*

не $P(n) = \{$натуральное число n является составным или равно $1\}$.

1.82. *Доказательство.*

Предположим, что существует только конечное число простых чисел вида $8n + 7$, обозначим их через $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Число $8p_1p_2 \ldots p_N - 1$ не делится ни на одно из чисел p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и может быть представлено в виде $8n + 7$. Полученное противоречие означает, что существует бесконечно много простых чисел вида $8n + 7$.

1.83. *Указание.* См. предыдущее упражнение.

1.84. *Указание.* Доказательство можно осуществить методами, рассмотренными в упражнении **1.65**.

[1] Евклид (Εὐκλείδης) (ок. 325 г. до н. э. — до 265 г. до н. э.).

1.85. *Доказательство.*

Прежде всего выпишем первые несколько членов последовательности гармонических чисел $\{H_n\}$:

$$H_1 = 1,\ H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},\ \ldots$$

1) Обозначим через $P(n)$ предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$.

База индукции

Если $n = 1$, то имеем $H_1 = (1+1)\cdot 1 - 1$, поскольку $H_1 = 1$, получили верное равенство.

Шаг индукции

Пусть для некоторого натурального k предикат $P(k)$ принимает истинное значение, т. е. верно равенство $\sum\limits_{i=1}^{k} H_i = (k+1)H_k - k$.

Вычислим сумму $\sum\limits_{i=1}^{k+1} H_i$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} H_i = \sum_{i=1}^{k} H_i + H_{k+1} = (k+1)H_k - k + H_{k+1}.$$

Из определения гармонических чисел следует, что $H_{k+1} = H_k + \dfrac{1}{k+1}$ или $H_k = H_{k+1} - \dfrac{1}{k+1}$. Далее,

$$\sum_{i=1}^{k+1} H_i = (k+1)\left(H_{k+1} - \frac{1}{k+1}\right) - k + H_{k+1} = (k+2)H_{k+1} - (k+1).$$

Значит, импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ истинна, и $P(n)$ выполняется для всех натуральных n.

2) Обозначим через $P(n)$ предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} iH_i = \dfrac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1} - 1)$.

База индукции

Для $n = 1$ получаем $H_1 = \dfrac{1\cdot 2}{4}(2H_2 - 1)$ — верное равенство.

Шаг индукции

Пусть для некоторого натурального k предикат $P(k)$ принимает истинное значение, т. е. верно равенство $\sum\limits_{i=1}^{k} iH_i = \dfrac{k(k+1)}{4}(2H_{k+1} - 1)$.

Проверим истинность $P(k+1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} iH_i = \sum_{i=1}^{k} iH_i + (k+1)H_{k+1} = \frac{k(k+1)}{4}(2H_{k+1}-1) + (k+1)H_{k+1} = \\ = \frac{(k+1)(k+2)}{4}(2H_{k+2}-1).$$

Получили, что $P(n)$ принимает истинное значение для всех натуральных n.

1.86. *Доказательство.*

Предложенные тождества можно доказать алгебраическими преобразованиями [36].

1) Рассмотрим левую часть соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$ и воспользуемся определением гармонического числа $H_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} = \\ = 1 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

В данной сумме изменим порядок следования слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n \text{ слагаемых}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\right)}_{n-1 \text{ слагаемое}} + \ldots + \\ + \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=j}^{n} 1.$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулы (A.55) и (A.56) раздела «Справочные материалы»:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} = (n+1)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} 1 = (n+1)H_n - n.$$

Таким образом, получили требуемое тождество.

2) Преобразуем левую часть предложенного соотношения $\sum\limits_{i=1}^{n} iH_i = \frac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1}-1)$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} iH_i = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} =$$
$$= 1 \cdot 1 + 2\left(1+\frac{1}{2}\right) + 3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \ldots + n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}_{n \text{ слагаемых}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(2+3+\ldots+n)}_{n-1 \text{ слагаемое}} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=j}^{n} i.$$

Применяя соотношения (A.55) и (A.56), получим

$$\sum_{i=1}^{n} iH_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot \frac{(n+j)(n-j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{n^2+n-j^2+j}{j} =$$
$$= \frac{n^2+n}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1}-1).$$

1.88. *Доказательство.*

Воспользуемся методом математической индукции. Обозначим равенство из условия задачи как предикат $P(n)$. Необходимо доказать справедливость $P(n)$ для всех $n \geqslant 1$.

Б а з а и н д у к ц и и

Если $n = 1$, то $\frac{H_2}{1 \cdot 2} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{H_3}{2}$, или $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ — верное равенство.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что для $k \geqslant 1$ имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{H_{i+1}}{i(i+1)} = 2 - \frac{1}{k+2} - \frac{H_{k+2}}{k+1}.$$

Докажем справедливость

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{H_{i+1}}{i(i+1)} = 2 - \frac{1}{k+3} - \frac{H_{k+3}}{k+2}.$$

Для этого преобразуем сумму:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{H_{i+1}}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{H_{i+1}}{i(i+1)} + \frac{H_{k+2}}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= 2 - \frac{1}{k+2} - \frac{H_{k+2}}{k+1} + \frac{H_{k+2}}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= 2 - \frac{1}{k+2} - \frac{H_{k+2}}{k+2}.$$

Из определения гармонических чисел непосредственно следует, что $H_{k+2} = H_{k+3} - \dfrac{1}{k+3}$.

Значит,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{H_{i+1}}{i(i+1)} = 2 - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+2}\left(H_{k+3} - \frac{1}{k+3}\right) = 2 - \frac{1}{k+3} - \frac{H_{k+3}}{k+2}.$$

Итак, доказана импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Согласно методу математической индукции делаем вывод, что $\forall n(P(n))$.

1.89. *Решение.*

Анализ первых нескольких членов последовательности $\{H_n\}$ показывает, что

$$H_1 = 1 \in \mathbb{Z},\ H_2 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z},\ H_3 = \frac{11}{6} \notin \mathbb{Z},\ H_4 = \frac{25}{12} \notin \mathbb{Z},\ \ldots,$$

где через $\mathbb{Z}$ обозначено множество целых чисел (подробнее см. главу «Теория множеств» на стр. 87). Возникает предположение, что ни одно гармоническое число H_n, кроме H_1, не является целым. Докажем это.

Для любого n можно указать такое целое k, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Приведем сумму $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ к общему знаменателю. Числитель полученной дроби будет нечетным, а знаменатель кратен 2^k. Значит, $H_n \notin \mathbb{Z}$. В итоге получаем, что существует единственное целое гармоническое число, а именно, $H_1 = 1$.

1.90. *Доказательство.*

1) Пусть $P(n)$ — предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

База индукции

Пусть $n = 1$. Тогда получаем $F_1 = F_3 - 1$, или $1 = 2 - 1$ — верное равенство.

Ш а г и н д у к ц и и

Пусть теперь утверждение $P(k)$ истинно для всех натуральных значений k, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$. Докажем истинность $P(k+1)$, или равенства $\sum\limits_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+3} - 1$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1} = (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = (F_{k+1} + F_{k+2}) - 1 = F_{k+3} - 1.$$

Следовательно, предикат $P(n)$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ принимает истинное значение.

2) Обозначим через $P(n)$ предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

Б а з а и н д у к ц и и

При $n = 1$ равенство принимает вид $F_1 = F_2$, или $1 = 1$, т. е. является верным.

Ш а г и н д у к ц и и

В предположении справедливости соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} = F_{2k}$$

докажем, что

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = F_{2k+2}.$$

Представим сумму в левой части последнего равенства в виде

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} + F_{2(k+1)-1} = \sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} + F_{2k+1}.$$

Теперь воспользуемся индуктивным предположением

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = F_{2k} + F_{2k+1}.$$

Сумма двух последовательных членов ряда Фибоначчи F_{2k} и F_{2k+1} равна, согласно определительному свойству, F_{2k+2}, что доказывает индукционное предположение. Следовательно, анализируемое тождество верно для всех натуральных значений n.

3) Обозначим через $P(n)$ предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Б а з а и н д у к ц и и

Пусть $n = 1$. Тогда равенство принимает вид $F_2 = F_3 - 1$ — верное равенство.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим справедливость соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} F_{2i} = F_{2k+1} - 1$$

для некоторого k. Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i} = F_{2k+3} - 1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i} &= \sum_{i=1}^{k} F_{2i} + F_{2k+2} = \\ &= (F_{2k+1} - 1) + F_{2k+2} = (F_{2k+1} + F_{2k+2}) - 1 = F_{2k+3} - 1.\end{aligned}$$

По принципу математической индукции $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$ для $n \geqslant 1$.

4) Обозначим через $P(n)$ утверждение данного пункта.

Б а з а и н д у к ц и и

Проверим верность утверждения для $n = 1$.

Получаем, что $F_3 = 2$ четно, а $F_4 = 3$ и $F_5 = 5$ нечетны.

Ш а г и н д у к ц и и

В предположении, что найдутся такие целые числа l_0, l_1, l_2, что $F_{3k} = 2l_0$, $F_{3k+1} = 2l_1 + 1$, $F_{3k+2} = 2l_2 + 1$, докажем: $F_{3(k+1)} = F_{3k+3}$ четно, а $F_{3(k+1)+1} = F_{3k+4}$ и $F_{3(k+1)+2} = F_{3k+5}$ нечетны. Для этого замечаем, что

$$\begin{aligned}F_{3k+3} &= F_{3k+1} + F_{3k+2} = (2l_1 + 1) + (2l_2 + 1) = \\ &= 2(l_1 + l_2 + 1) \text{ — четно,} \\ F_{3k+4} &= F_{3k+2} + F_{3k+3} = (2l_2 + 1) + 2(l_1 + l_2 + 1) = \\ &= 2(l_1 + 2l_2 + 1) + 1 \text{ — нечетно,} \\ F_{3k+5} &= F_{3k+3} + F_{3k+4} = 2(l_1 + l_2 + 1) + 2(l_1 + 2l_2 + 1) + 1 = \\ &= 2(2l_1 + 3l_2 + 2) + 1 \text{ — нечетно.}\end{aligned}$$

Значит, для всех натуральных n имеем: F_{3n} — четны, а F_{3n+1} и F_{3n+2} — нечетны.

1.91. *Доказательство.*

Обозначим предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ через $P(n)$.

База индукции

Положим $n = 1$. Имеем: $F_1^2 = F_1 F_2$, или $1 = 1 \cdot 1$ — верное равенство.

Шаг индукции

Предположим справедливость соотношения $\sum\limits_{i=1}^{k} F_i^2 = F_k F_{k+1}$ для $k = 1, 2, \ldots$ Докажем, что $\sum\limits_{i=1}^{k+1} F_i^2 = F_{k+1} F_{k+2}$. Для этого запишем сумму в левой части равенства в виде

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2.$$

Воспользовавшись индуктивным предположением, получим

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}).$$

Согласно основному рекуррентному соотношению для чисел Фибоначчи $F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 = F_{k+1} F_{k+2}.$$

Итак, по принципу математической индукции $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ для всех натуральных чисел n.

1.92. *Указание.*

Для доказательства второго тождества воспользуйтесь формулой для суммы чисел Фибоначчи из упражнения **1.90**, 1).

1.93. *Решение.*

Как известно из упражнения **1.90**, 2) и 3), для $k \geqslant 1$ выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} = F_{2k}, \quad \sum_{i=1}^{k} F_{2i} = F_{2k+1} - 1.$$

Почленно вычитая второе равенство из первого, получим

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + \ldots + F_{2k-1} - F_{2k} = F_{2k} - F_{2k+1} + 1.$$

Полученное равенство равносильно следующему:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1, \ \ n \geqslant 1,$$

в чем легко убедиться, рассмотрев случаи четных и нечетных значений величины n.

1.94. *Ответ:*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

1.95. *Доказательство.*

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Обозначим через $P(n)$ предикат $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1$.

База индукции

Базу индукции составляет утверждение $P(1)$. Для $n = 1$ получаем: $\sum\limits_{k=0}^{1} L_k = L_0 + L_1 = 3 = L_3 - 1$, поэтому $P(1)$ истинно.

Шаг индукции

Предположим справедливость равенства $\sum\limits_{i=0}^{k} L_i = L_{k+2} - 1$. Докажем, что импликация $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ истинна. В самом деле, так как

$$\sum_{i=0}^{k+1} L_i = \sum_{i=0}^{k} L_i + L_{k+1} = (L_{k+2} - 1) + L_{k+1} = (L_{k+1} + L_{k+2}) - 1,$$

то по определительному свойству чисел Люка $L_{k+3} = L_{k+1} + L_{k+2}$. Получаем соотношение:

$$\sum_{i=0}^{k+1} L_i = L_{k+3} - 1.$$

Значит, равенство $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1$ верно для всех $n \geqslant 1$.

1.96. *Решение.*

Базой индукции является высказывание $P(1)$, а индукционным шагом — $(\forall k, (\forall m < k)\ P(m) \Rightarrow P(k))$. Из конъюнкции этих высказываний следует истинность $P(n)$ для всех натуральных n. Используя логические операции и квантор всеобщности, получаем следующий символический вид принципа полной индукции:

$$(P(1)\ \textbf{и}\ (\forall k, (\forall m < k)\ P(m) \Rightarrow P(k))) \Rightarrow \forall n\ P(n).$$

1.97. *Доказательство.*

Требуется доказать, что вторая форма принципа следует из первой, а первая форма следует из второй.

Обобщенный принцип математической индукции для последовательности утверждений $P(k)$ совпадает с принципом математической индукции (в первой форме) для последовательности утверждений $\widetilde{P}(k) =$ = «утверждения $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ верны».

Первая форма принципа математической индукции непосредственно следует из второй, поскольку

$$\forall k\ \ (P(1) \textbf{ и } P(2) \textbf{ и } \ldots \textbf{ и } P(k)) \Rightarrow P(k+1))$$

влечет справедливость утверждения

$$\forall k\ P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

1.98. *Указание.*

Базу индукции составляют утверждения «$x + \dfrac{1}{x}$ — целое» и «$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ — целое». Для доказательства индукционного перехода следует рассмотреть произведение $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

1.99. *Доказательство.*

Задача сводится к доказательству утверждения: «Для любого натурального числа $n \geqslant 8$ существует такая пара неотрицательных целых чисел (c_1, c_2), что выполняется равенство $n = 3c_1 + 5c_2$».

Для наглядности выпишем в таблицу несколько значений n для $c_1, c_2 =$ $= 0, 1, 2, \ldots$

Значения суммы $3c_1 + 5c_2$

c_2 \ c_1	0	1	2	3	4	5	…
0	0	3	6	9	12	15	
1	5	8	11	14	17	20	
2	10	13	16	19	22	25	
3	15	18	21	24	27	30	…
4	20	23	26	29	32	35	
5	25	28	31	34	37	40	
…			…				

Из приведенной таблицы заключаем, что натуральные числа 1, 2, 4 и 7 нельзя представить в требуемом виде. Например, чтобы получить значение $n = 7$, коэффициенты c_1 и c_2 должны удовлетворять неравенствам $0 \leqslant c_1 < 3$ и $0 \leqslant c_2 < 2$. Все такие пары (c_1, c_2) перечислены в таблице, и ни одно из них не приводит к значению $n = 7$.

Если продолжать заполнение таблицы для все бóльших величин c_1 и c_2, то каждое из значений $n \geqslant 8$ встретится не менее одного раза. Докажем это.

Рассмотрим предикат

$$P(n) = \text{«для некоторых целых неотрицательных } c_1 \text{ и } c_2 \\ \text{выполняется равенство } n = 3c_1 + 5c_2\text{»}.$$

Используя метод математической индукции в полной форме, докажем истинность $P(n)$ для всех $n \geqslant 8$.

База индукции

Высказывания $P(8)$, $P(9)$ и $P(10)$ принимают истинные значения и образуют базу индукции:

$$\begin{aligned} 8 &= 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1; \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0; \\ 10 &= 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2. \end{aligned}$$

Шаг индукции

Предположим, что высказывание $P(k)$ истинно для некоторого $k > 10$. Заметим, что истинность $P(k)$ для $k = 7, 8, 9$ уже доказана. Проверим выполнение импликации $P(k-2) \Rightarrow P(k+1)$.

В силу индуктивного предположения выражение $k-2$ для произвольного $k > 10$ можно представить в виде $k - 2 = 3c_1 + 5c_2$. Тогда

$$k + 1 = (k-2) + 3 = (3c_1 + 5c_2) + 3 = 3(c_1 + 1) + 5c_2.$$

Таким образом, $P(k+1)$ принимает истинное значение, и, согласно методу математической индукции в полной форме, утверждение $P(n)$ доказано для всех $n \geqslant 8$.

1.100. *Ответ:* 29 голов.

1.101. *Доказательство.*

Доказательство проведем методом математической индукции по переменной m.

Обозначим предикат «$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ для всех натуральных чисел n» через $P(m)$.

Б а з а и н д у к ц и и

При $m = 1$ $F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2$. Следовательно, поскольку $F_1 = F_2 = 1$, приходим к верному тождеству $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$.

Пусть теперь $m = 2$. Тогда $F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3$. Принимая во внимание значение третьего члена ряда Фибоначчи $F_3 = 2$, перепишем последнее равенство в виде

$$F_{n+2} = F_{n-1} + 2F_n = (F_{n-1} + F_n) + F_n = F_{n+1} + F_n.$$

Таким образом, доказаны утверждения $P(1)$ и $P(2)$.

Ш а г и н д у к ц и и

Пусть $P(k-1)$ и $P(k)$ истинны, $k > 2$. Это значит, что верны равенства $F_{n+k-1} = F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k$ и $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$ для всех натуральных n. Покажем, что два последних равенства влекут $P(k+1)$, или $F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Действительно,

$$\begin{aligned}F_{n+k+1} = F_{n+k-1} + F_{n+k} = F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k + F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1} = \\ = F_{n-1}(F_{k-1} + F_k) + F_n(F_k + F_{k+1}).\end{aligned}$$

Осталось воспользоваться основным рекуррентным соотношением. В итоге получаем

$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}.$$

В силу этого $P(m)$ верно для всех натуральных m.

1.102. *Доказательство.*

Обозначим $a_n = F_n^2 + F_{n+1}^2$. Построим таблицу, содержащую первые несколько членов последовательности a_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21
a_n	2	5	13	34	89	233	610	1597

Анализ таблицы показывает, что $a_n = F_{2n+1}$.

Тождество $F_{2k+1} = F_k^2 + F_{k+1}^2$ можно доказать путем подстановки $n = k+1$, $m = k$ в формулу сложения для членов ряда Фибоначчи, изученную в упражнении **1.101**. Получаем:

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} n = k+1 \\ m = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{2k+1} = F_{(k+1)-1}F_k + F_{k+1}F_{k+1} = F_k^2 + F_{k+1}^2.$$

1.103. *Доказательство.*

Воспользуемся методом математической индукции в полной форме. Пусть $P(n)$ обозначает предикат $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Введем следующие обозначения: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\widetilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, требуется доказать, что $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\widetilde{\varphi}^n$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

Прежде чем приступить к доказательству данного утверждения, выпишем вспомогательные тождества, которым удовлетворяют величины φ и $\widetilde{\varphi}$.

Из определений φ и $\widetilde{\varphi}$ непосредственно следует:

$$\begin{cases} \varphi + \widetilde{\varphi} = 1; \\ \varphi - \widetilde{\varphi} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Кроме того, поскольку

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi;$$

$$\widetilde{\varphi}^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1+\widetilde{\varphi},$$

то для всех целых k несложно проверить выполнение следующей пары равенств:

$$\begin{cases} \varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi^{k-1}; \\ \widetilde{\varphi}^{k+1} = \widetilde{\varphi}^k + \widetilde{\varphi}^{k-1}. \end{cases}$$

Теперь можно перейти к доказательству $P(n)$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

База индукции

Базу индукции составляют утверждения $P(1)$ и $P(2)$.

Для $n = 1$ получаем равенство: $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi - \widetilde{\varphi}\big)$, или $1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}$ — истинное высказывание.

Далее проверим истинность $P(2)$. Для $n = 2$ имеем: $F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\widetilde{\varphi}^2$, или $1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi - \widetilde{\varphi}\big)\big(\varphi + \widetilde{\varphi}\big)$ — верное равенство.

Шаг индукции

Предположим, что для $i \leqslant k$ выполняется равенство $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^i - \widetilde{\varphi}^i\big)$. Докажем, что $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^{k+1} - \widetilde{\varphi}^{k+1}\big)$. Для этого представим φ^{k+1} и $\widetilde{\varphi}^{k+1}$ в виде $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi^{k-1}$, $\widetilde{\varphi}^{k+1} = \widetilde{\varphi}^k + \widetilde{\varphi}^{k-1}$ и подставим в выражение для F_{k+1}:

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^{k+1} - \widetilde{\varphi}^{k+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\varphi^k + \varphi^{k-1}) - (\widetilde{\varphi}^k + \widetilde{\varphi}^{k-1})\big).$$

Группируем слагаемые в скобках:

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\varphi^k - \widetilde{\varphi}^k) + (\varphi^{k-1} - \widetilde{\varphi}^{k-1})\big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^{k-1} - \widetilde{\varphi}^{k-1}\big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^k - \widetilde{\varphi}^k\big).$$

Воспользовавшись индуктивным предположением, окончательно получаем верное равенство

$$F_{k+1} = F_{k-1} + F_k.$$

В итоге делаем вывод, что для всех натуральных чисел n выполняется соотношение $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Примечание. Величину φ называют **золотым сечением** или **числом Фидия**[1]. Данная величина появляется во многих геометрических построениях. Можно показать [1], что если отношение сторон прямоугольника P равно $\dfrac{a_2}{a_1} = \varphi$, то после отсечения от P квадрата S остающийся прямоугольник P' будет подобен исходному (см. рис. 1.1, *а*). Кроме того, в правильном пятиугольнике длина диагонали в φ раз больше длины стороны (см. рис. 1.1, *б*) [1, 28].

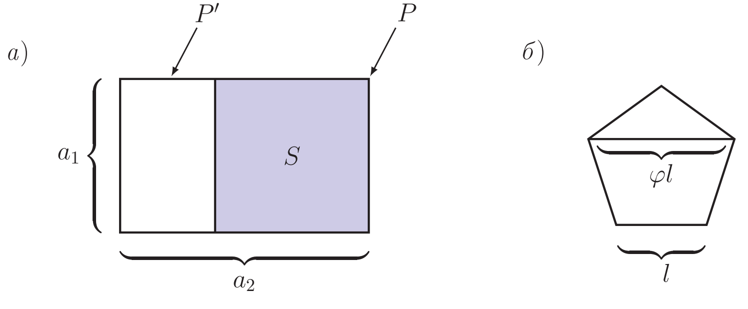


Рис. 1.1. Золотое сечение

1.104. *Указание.* Воспользуйтесь свойством $\varphi^2 = \varphi + 1$.

1.105. *Доказательство.*

Подставим в левую часть соотношения явные выражения для чисел Фибоначчи и выполним алгебраические преобразования:

[1] Фидий (Φειδίας) (ок. 490 до н. э. — ок. 430 до н. э.).

$$F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = \frac{\varphi^{2n-1} - \widetilde{\varphi}^{2n-1}}{\sqrt{5}} \times \frac{\varphi^{2n+1} - \widetilde{\varphi}^{2n+1}}{\sqrt{5}} - \left(\frac{\varphi^{2n} - \widetilde{\varphi}^{2n}}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\varphi^{4n} - \varphi^{2n-1}\widetilde{\varphi}^{2n+1} - \varphi^{2n+1}\widetilde{\varphi}^{2n-1} + \widetilde{\varphi}^{4n} - \left(\varphi^{4n} - 2\varphi^{2n}\widetilde{\varphi}^{2n} + \widetilde{\varphi}^{4n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[-(\varphi\widetilde{\varphi})^{2n-1}(\varphi^2 + \widetilde{\varphi}^2) + 2(\varphi\widetilde{\varphi})^{2n}\right].$$

Далее воспользуемся тем, что $\varphi\widetilde{\varphi} = -1$, $\varphi^2 + \widetilde{\varphi}^2 = 3$. Следовательно,

$$F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = 1 \ \text{ для } \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.106. *Доказательство.*

Преобразуем левую часть равенства, используя определительное свойство чисел Фибоначчи:

$$\begin{aligned} &F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1}; \\ &F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n} + 2F_{2n+1}. \end{aligned}$$

Подставим полученные равенства в исходное соотношение:

$$F_{2n+1}F_{2n+2} - F_{2n}F_{2n+3} = F_{2n+1}(F_{2n} + F_{2n+1}) - F_{2n}(F_{2n} + 2F_{2n+1}) =$$
$$= F_{2n+1}^2 - F_{2n}^2 - F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}(F_{2n+1} - F_{2n}) - F_{2n}^2 = F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2.$$

Согласно упражнению **1.105** $F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = 1$. Значит, $F_{2n+1}F_{2n+2} - F_{2n}F_{2n+3} = 1$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

1.107. *Доказательство.*

В доказательстве будем следовать [30]. Преобразуем правую часть тождества, воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1:$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+2}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_{2n+1}^{-1} + F_{2n+2}^{-1}}{1 - F_{2n+1}^{-1}F_{2n+2}^{-1}}\right) =$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}\right).$$

Упростим получившееся выражение. Знаменатель дроби под знаком арктангенса преобразуем к виду $F_{2n+1}F_{2n+2} - 1 = F_{2n}F_{2n+3}$ (см. упражнение **1.106**), а числитель равен $F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3}$ по определительному свойству последовательности $\{F_n\}$.

В итоге приходим к искомому соотношению

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n+2}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Примечание. Последовательное применение доказанной формулы, начиная с $n = 1$, с учетом $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(1/F_{2n+2}) = 0$, приводит к сумме [30]

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{F_{2k+1}}.$$

1.108. *Доказательство.*

Пусть $P(n-1)$ — предикат $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ для некоторого целого $n = 2, 3, 4, \ldots$

Б а з а и н д у к ц и и

Проверим истинность $P(1)$ и $P(2)$. Для $n = 2$ получаем: $L_2 = F_1 + F_3 = 3$, поэтому $P(1)$ истинно. Для $n = 3$ получаем: $L_3 = F_2 + F_4 = 4$, поэтому $P(2)$ также принимает истинное значение.

Ш а г и н д у к ц и и

Докажем, что из $L_{k-1} = F_{k-2} + F_k$ и $L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$ следует равенство $L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$. Действительно,

$$\begin{aligned} L_{k+2} = L_k + L_{k+1} &= (F_{k-1} + F_{k+1}) + (F_k + F_{k+2}) = \\ &= F_{k-1} + F_k + F_{k+1} + F_{k+2} = F_{k+1} + F_{k+3}. \end{aligned}$$

Следовательно, $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, для всех $n = 2, 3, \ldots$

1.109. *Решение.*

Используя рекуррентное соотношение $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ с известными начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$, получаем

$$\begin{array}{rcccccccc} n=0: & F_0 & = & F_2 - F_1 & = & 1-1 & = & 0, \\ n=-1: & F_{-1} & = & F_1 - F_0 & = & 1-0 & = & 1, \\ n=-2: & F_{-2} & = & F_0 - F_{-1} & = & 0-1 & = & -1, \\ n=-3: & F_{-3} & = & F_{-1} - F_{-2} & = & 1-(-1) & = & 2, \\ n=-4: & F_{-4} & = & F_{-2} - F_{-3} & = & -1-2 & = & -3, \\ n=-5: & F_{-5} & = & F_{-3} - F_{-4} & = & 2-(-3) & = & 5, \\ n=-6: & F_{-6} & = & F_{-4} - F_{-5} & = & -3-5 & = & -8, \\ n=-7: & F_{-7} & = & F_{-5} - F_{-6} & = & 5-(-8) & = & 13, \\ n=-8: & F_{-8} & = & F_{-6} - F_{-7} & = & (-8)-13 & = & -21 \end{array}$$

и т. д. Полученные значения представим в виде таблицы.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21

Сделаем предположение, что для любого целого n числа F_n и F_{-n} равны по абсолютной величине, и отличаются знаком, если $|n|$ четно. Другими словами, предположим, что выполняется равенство

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции в полной форме (см. упражнение **1.96**).

Пусть $P(n)$ — предикат $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$.

База индукции

Базу индукции составляют утверждения $P(1)$ и $P(2)$. Для $n = 1$ получаем: $F_{-1} = F_1 = 1$, а для $n = 2$: $F_{-2} = -F_2 = -1$ в соответствии с записанной ранее таблицей значений.

Шаг индукции

Пусть теперь $P(i)$ истинно для всех $i \leqslant k$. Докажем истинность предиката $P(k+1)$, используя рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи. Согласно индуктивному предположению, $F_{-k} = (-1)^{k-1} F_k$, $F_{-k+1} = (-1)^{k-2} F_{k-1}$. Следовательно,

$$F_{-(k+1)} = (-1)^{k-2} F_{k-1} - (-1)^{k-1} F_k.$$

В правой части полученного равенства вынесем общий множитель $(-1)^{k-2}$ и применим основное рекуррентное соотношение:

$$F_{-(k+1)} = (-1)^{k-2} \left(F_{k-1} - (-F_k)\right) = (-1)^{k-2} \left(F_{k-1} + F_k\right) = (-1)^{k-2} F_{k+1}.$$

Поскольку $(-1)^{k-2} = (-1)^k = (-1)^{(k+1)-1}$, то окончательно получаем

$$F_{-(k+1)} = (-1)^{(k+1)-1} F_{k+1},$$

что доказывает истинность предиката $P(k+1)$.

Значит, в силу метода математической индукции доказана формула для вычисления чисел Фибоначчи с отрицательными значениями индекса $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$ для целых $n = 1, 2, 3, \ldots$

1.110. *Ответ:* $L_{-n} = (-1)^n L_n$, $n = 1, 2, \ldots$

1.111. *Указание.* См. решение упражнения **1.103**.

1.112. *Указание.* Воспользовавшись результатами упражнения **1.111**, запишите число Люка в виде $L_n = \varphi^n + \widetilde{\varphi}^n$, где φ — золотое сечение, $\varphi\widetilde{\varphi} = -1$.

1.114. *Указание.* Представьте числа Люка в виде $L_n = \varphi^n + \widetilde{\varphi}^n$.

Примечание. Тождества упражнений **1.111**–**1.114** верны для всех целых n.

1.115. *Ответ:* $L_{n-1}L_m + L_nL_{m+1} = L_{n+m-1} + L_{n+m+1} \quad \forall n, m \geqslant 1.$

1.117. *Решение.*

Предлагаемые равенства для положительных $i > 0$ непосредственно следуют из тождества предыдущего упражнения, если положить $n = 3i$, $k = i$ и $n = 4i$, $k = 2i$. Случай $i \leqslant 0$ рассматривается с учетом результата упражнения **1.110**.

1.118. *Указание.* Выразите члены последовательностей Фибоначчи и Люка через постоянные φ и $\widetilde{\varphi}$.

1.121. *Решение.*

Из анализа тождеств, сформулированных в упражнениях **1.119** и **1.120**, можно высказать гипотезу, что верно равенство

$$F_{n-k}F_{n+k} = \frac{1}{5}\left(L_n^2 - (-1)^{n+k}L_k^2\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Запишем числа Люка в виде $L_k = \varphi^k + \widetilde{\varphi}^k$, а числа Фибоначчи — в виде $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \widetilde{\varphi}^k)$, где φ — золотое сечение, $\varphi\widetilde{\varphi} = -1$:

$$\begin{aligned} F_{n-k}F_{n+k} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n-k} - \widetilde{\varphi}^{n-k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+k} - \widetilde{\varphi}^{n+k}) = \\ &= \frac{1}{5}(\varphi^{2n} - \varphi^{n-k}\widetilde{\varphi}^{n+k} - \varphi^{n+k}\widetilde{\varphi}^{n-k} + \widetilde{\varphi}^{2n}) = \\ &= \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n} + \widetilde{\varphi}^{2n} - (\varphi\widetilde{\varphi})^{n-k}(\varphi^{2k} + \widetilde{\varphi}^{2k})\right) = \\ &= \frac{1}{5}(L_{2n} - (-1)^{n-k}L_{2k}). \end{aligned}$$

Далее осталось воспользоваться тождествами $L_{2k} = L_k^2 - 2(-1)^k$ (см. упражнение **1.113**) и $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$:

$$\begin{aligned} &F_{n-k}F_{n+k} = \frac{1}{5}(L_{2n} - (-1)^{n-k}L_{2k}) = \\ &= \frac{1}{5}\left((L_n^2 - 2(-1)^n) - (-1)^{n-k}(L_k^2 - 2(-1)^k)\right) = \frac{1}{5}(L_n^2 - (-1)^{n+k}L_k^2), \end{aligned}$$

т. е. требуемое равенство.

1.123. *Доказательство.*

Пусть $N = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0}$. Обозначим $P = \{N$ делится на $3\}$, $Q = \{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i$ делится на $3\}$. Требуется доказать, что $P \Leftrightarrow Q$. Для этого рассмотрим разность $N - \sum\limits_{i=0}^{k} a_i$. Используя десятичное представление числа N, получим

$$N - \sum_{i=0}^{k} a_i = a_k(10^k - 1) + a_{k-1}(10^{k-1} - 1) + \ldots + a_2(10^2 - 1) + a_1(10 - 1).$$

Для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ величина $10^k - 1$ делится на 3 в силу алгебраического тождества

$$d^k - 1 = (d - 1)(d^{k-1} + \ldots + d + 1).$$

Значит, разность $N - \sum\limits_{i=0}^{k} a_i$ делится на 3, и тогда оба числа N и $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i$ делятся на 3 или нет одновременно, следовательно, $P \Leftrightarrow Q$.

1.126. *Указание.*

Воспользуйтесь легко проверяемыми алгебраическими тождествами

$$d^{2n+1} + 1 = (d + 1)(d^{2n} - d^{2n-1} + \ldots - d + 1);$$
$$d^{2n} - 1 = (d + 1)(d - 1)(d^{2n-2} + d^{2n-4} + \ldots + d^2 + 1).$$

1.127. *Доказательство.*

Обозначим предикат «натуральное число n, большее единицы, либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел» через $P(n)$. Для доказательства воспользуемся принципом полной индукции.

База индукции

Базу индукции составляют бесконечное число случаев простых значений n. Ясно, что в этих случаях предикат $P(n)$ принимает истинное значение.

Шаг индукции

Докажем, что $P(n)$ верно для всех составных чисел $n > 2$. Для этого рассмотрим некоторое число $k + 1$, не являющееся простым, и докажем справедливость импликации $(\forall i < k\ P(k)) \Rightarrow P(k + 1)$.

Поскольку $k + 1$ — составное, то у него есть хотя бы один делитель, например, l. Тогда $k+1 = l \cdot m$, причем натуральные числа l и m не равны единице: $l \neq 1, m \neq 1$. Согласно индуктивному предположению, как l, так и m можно представить в виде произведения нескольких простых чисел; пусть их количество равно s и s' соответственно:

$$l = p_1 p_2 \ldots p_s, \quad m = p'_1 p'_2 \ldots p'_{s'}, \quad s, s' \text{ — целые.}$$

Следовательно,

$$k + 1 = p_1 p_2 \ldots p_s \cdot p'_1 p'_2 \ldots p'_{s'}.$$

Таким образом доказано, что любое натуральное число, большее единицы, либо простое, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел.

1.128. *Доказательство.*
Рассмотрим n последовательных натуральных чисел

$$(n+1)! + 2,\ (n+1)! + 3,\ \ldots,\ (n+1)! + n + 1, \quad n \geqslant 2.$$

В построенной последовательности первый член $(n+1)! + 2$ делится на 2, второй $(n+1)! + 3$ делится на 3 и т. д. [119]. Всего в последовательности n элементов, каждый из которых — составное число. Получаем, что для произвольного числа n в ряду натуральных чисел найдутся n последовательных составных чисел.

1.129. *Решение.*
Воспользовавшись идеей, описанной в предыдущем упражнении, получим десять последовательных составных чисел:

$$11! + 2,\ 11! + 3,\ \ldots,\ 11! + 11.$$

Однако можно указать набор из тринадцати меньших чисел, например

$$114,\ 115,\ \ldots,\ 126.$$

Глава 2

Теория множеств

Одним из основополагающих понятий математики является понятие множества. **Множество** — совокупность объектов, которые мы представляем себе как единое целое [35, 68]. Эти объекты называются **элементами** множества. Принадлежность некоторого элемента a множеству A можно указать так: $a \in A$, читается данная запись следующим образом:«a является элементом множества A» или «элемент a принадлежит множеству A». Если a не принадлежит A, то пишут $a \notin A$.

Указать, какие элементы принадлежат множеству, можно несколькими способами, наиболее распространенными из которых являются следующие [4, 14]:

1) перечислением элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, элементы множества A заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми;

2) с помощью характеристического предиката $A = \{x \colon P(x)\}$. Характеристический предикат — это высказывание, позволяющее установить принадлежность объекта x множеству A. Если для некоторого x предикат $P(x)$ принимает истинное значение, то $x \in A$, в противном случае $x \notin A$.

Некоторые часто встречающиеся множества имеют специальные обозначения [33]:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество **натуральных** чисел;

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ — множество **целых** чисел;

$\mathbb{Q} = \{p/q \colon p, q \text{ целые, } q \neq 0\}$ — множество **рациональных** чисел.

Множество **вещественных** чисел обозначают $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, а **комплексных** — $\mathbb{C}$.

Рассмотрим множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$. Такое множество будем называть **сегментом** или **замкнутым отрезком** и обозначать через $[a, b]$, т. е.

$$[a, b] = \{x \colon a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Интервалом или **открытым отрезком** называется множество

$$(a, b) = \{x \colon a < x < b\}.$$

Множество A называется **подмножеством** множества B (обозначение: $A \subseteq B$), если $x \in A \Rightarrow x \in B$, т. е. все элементы A принадлежат множеству B. Два множества являются **равными** ($A = B$) тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называют **собственным подмножеством** множества B ($A \subset B$).

Универсальное множество U содержит в качестве подмножества любое из множеств, встречающихся в рассматриваемой задаче. **Пустое множество**, которое не содержит ни одного элемента, обозначается символом $\varnothing$. Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Рассмотрим основные операции на множествах:

$A \cup B = \{x\colon x \in A$ **или** $x \in B\}$ — **объединение** множеств A и B;

$A \cap B = \{x\colon x \in A$ **и** $x \in B\}$ — **пересечение** множеств A и B;

$A \setminus B = \{x\colon x \in A$ **и** $x \notin B\}$ — **дополнение** множества B до A, или **теоретико-множественная разность** A и B;

$\overline{A} = \{x\colon x \notin A\}$ — **дополнение** множества A (до универсального множества U);

$A \vartriangle B = \{x\colon (x \in A$ **и** $x \notin B)$ **или** $(x \in B$ **и** $x \notin A)\}$ — **симметрическая разность** двух множеств A и B. Симметрическую разность двух множеств можно выразить через операции объединения, пересечения и дополнения: $A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Объединение, пересечение, теоретико-множественная разность и симметрическая разность двух множеств являются **бинарными** операциями, дополнение множества до универсального — **унарная** операция.

Пример 2.1. Пусть универсальным множеством является $\mathbb{R}$. Тогда для множеств $A = [0,1]$ и $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ имеем:

$$\begin{aligned} &A \cup \mathbb{R}^+ = [0,\infty), && A \cap \mathbb{R}^+ = (0,1], \\ &A \setminus \mathbb{R}^+ = \{0\}, && \mathbb{R}^+ \setminus A = (1,\infty), \\ &\overline{A} = (-\infty,0) \cup (1,\infty), && \overline{\mathbb{R}^+} = (-\infty,0], \\ &A \vartriangle \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \vartriangle A = \{0\} \cup (1,\infty). && \end{aligned}$$

□

Для наглядной иллюстрации соотношений теории множеств применяются **диаграммы Венна**[1]. На диаграмме Венна изображают прямоугольник, точки которого представляют элементы универсального множества U. Подмножества множества U изображают кругами или эллипсами в этом прямоугольнике. Примеры некоторых часто встречающихся множеств приведены на рис. 2.1, 2.2.

Основные законы алгебры множеств представлены в табл. 2.1. Если сравнить табл. 2.1 и 1.2, то видно соответствие между законами алгебры множеств и законами алгебры логики.

Если в произвольном тождестве алгебры логики произвести замену операций $\cup \rightleftarrows \cap$ и множеств $\varnothing \rightleftarrows U$, то получится **двойственное**

[1] Венн (John Venn) (1834–1923).

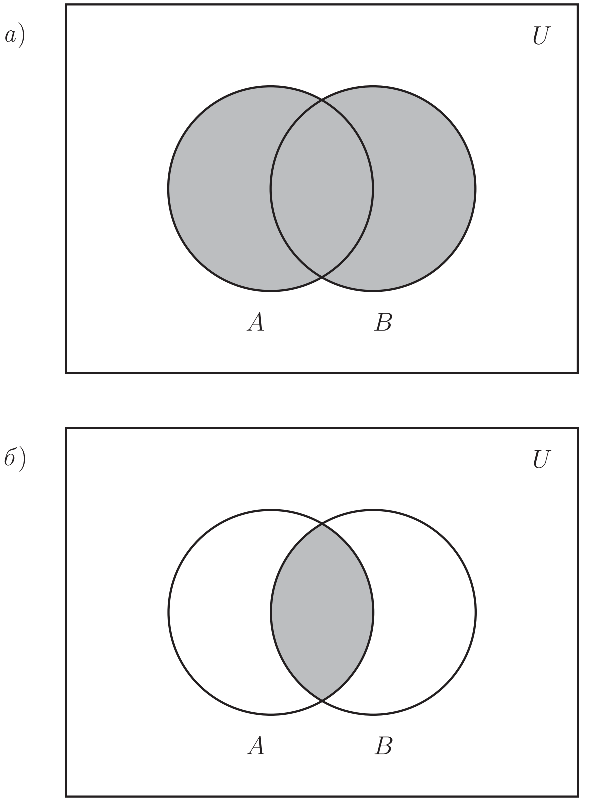


Рис. 2.1. Диаграммы Венна множеств *а*) $A \cup B$ и *б*) $A \cap B$

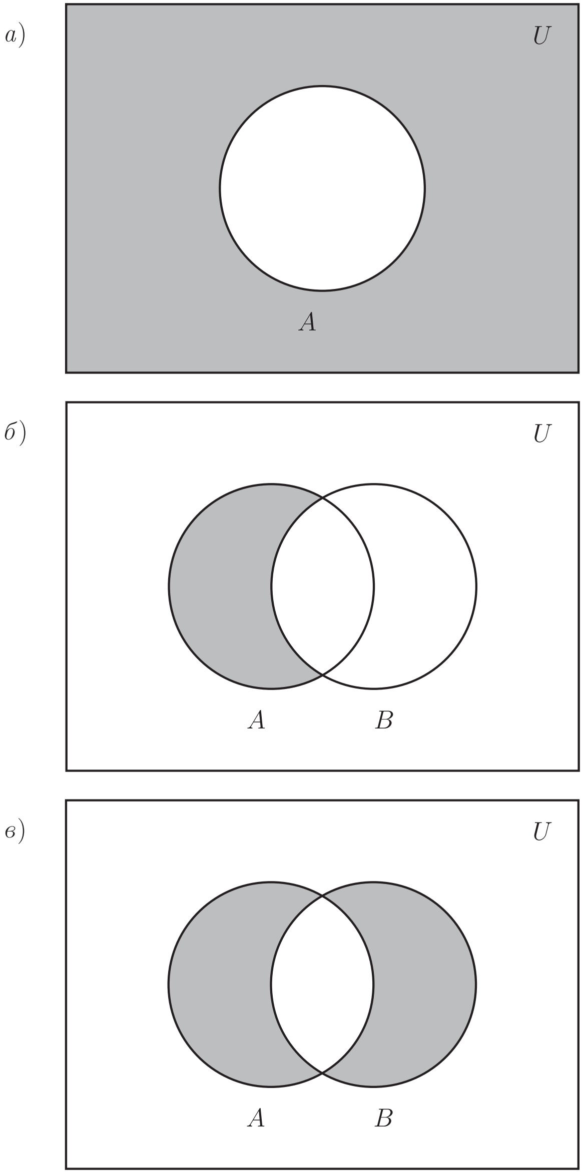


Рис. 2.2. Диаграммы Венна множеств *а)* $\overline{A}$, *б)* $A \setminus B$ и *в)* $A \triangle B$

тождество. Последнее утверждение носит название **закона двойственности**, который наглядно иллюстрируется табл. 2.1: *каждое из тождеств левой колонки двойственно соответствующему тождеству правой, и наоборот.*

Множество называется **конечным**, если оно содержит конечное число элементов, и **бесконечным** в противном случае. Число элементов конечного множества A называется его **мощностью** (обозначается $|A|$).

Для вычисления мощности объединения двух конечных множеств можно воспользоваться **формулой включений и исключений**:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Показательным множеством (или **булеаном**) $\mathcal{P}(A)$ называется множество, элементы которого — все подмножества множества A, т. е. $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$. Мощность булеана можно определить по формуле $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, в связи с чем используется еще одно обозначение для булеана множества A, а именно, 2^A [14].

Понятие мощности можно обобщить на случай бесконечных множеств. Два множества A и B называются **равномощными**, если между их элементами существует взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу из одного множества соответствует один и только один элемент другого. Множества, равномощные множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называются **счетными**, мощность таких множеств обозначается символом $\aleph_0$ (читается «алеф нуль»). Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются счетными, объединение конечного (и даже счетного) числа счетных множеств также счетно.

Теорема о несчетном множестве. *Множество чисел интервала* $(0, 1)$ *несчетно.*

Докажем данное утверждение методом «от противного». Пусть существует способ, согласно которому каждому вещественному числу x_k интервала $(0, 1)$, где $k = 1, 2, \ldots$, ставится в соответствие некоторое натуральное число. Запишем каждое из чисел x_k в виде бесконечного десятичного разложения:

$$\begin{gathered}
x_1 = 0{,}x_{11}x_{12}\ldots x_{1k}\ldots,\\
x_2 = 0{,}x_{21}x_{22}\ldots x_{2k}\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_k = 0{,}x_{k1}x_{k2}\ldots x_{kk}\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Введем в рассмотрение число $\widetilde{x} = 0{,}\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_k\ldots$, определенное в соответствии со следующим правилом:

$$\widetilde{x}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{kk} \neq 1,\\ 2, & \text{если } x_{kk} = 1. \end{cases}$$

Таблица 2.1

Законы алгебры множеств

Законы идемпотентности

$A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

Свойства пустого множества и универсального множества

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

Свойства дополнения

$A \cup \overline{A} = U$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$\overline{U} = \varnothing$ $\qquad$ $\overline{\varnothing} = U$

$\overline{\overline{A}} = A$

Законы коммутативности

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Законы ассоциативности

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Законы дистрибутивности

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Законы поглощения

$A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

Законы де Моргана

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Число $\widetilde{x}$ не содержит в своей десятичной записи нулей и девяток, что позволяет исключить из рассмотрения последовательности вида $0{,}4999\ldots = 0{,}5000\ldots$ Заметим, что $\widetilde{x}$ отличается от x_1 в первом знаке после запятой, от x_2 — во втором знаке и т. д. В силу этого для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\widetilde{x} \neq x_k$. Следовательно, нельзя занумеровать все числа из интервала $(0,1)$, и множество чисел из интервала $(0,1)$ не является счетным. Теорема о несчетном множестве доказана.

Отметим, что рассмотренный способ построения вспомогательного числа $\widetilde{x}$ носит название **диагональной процедуры Кантора**[1].

Как показано выше, примером несчетного множества является интервал $(0,1)$. Его мощность называют мощностью **континуума** (от латинского *continuum* — непрерывное) и обозначают через $\mathfrak{c}$. Мощность континуума имеют множество всех иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Мощность множества $2^{\mathbb{N}}$ равна мощности континуума.

Множество $A \times B = \{(a,b)\colon a \in A \text{ и } b \in B\}$ называется **декартовым**[2] или **прямым произведением** множеств A и B. Элементы (a,b) множества $A \times B$ называются **упорядоченными парами**. Мощность прямого произведения конечных множеств A и B равна $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Декартово произведение произвольного числа множеств определяется следующим образом:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\colon\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Если все множества A_i совпадают, $A_i = A$, то для обозначения прямого произведения $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$ пишут A^n. Произвольный элемент множества A^n называется **вектором**.

Пример 2.2. Пусть $A = \{\varnothing\}$, $B = \{1,2\}$. Перечислим элементы множеств $A \times B$ и $(2^A)^2$.

Решение.

Согласно определению декартова произведения множеств, элементы $A \times B$ являются всевозможными упорядоченными парами (a,b), где $a \in A$, $b \in B$. Таким образом, $A \times B = \{(\varnothing,1), (\varnothing,2)\}$.

Булеан множества A состоит из всех подмножеств множества $A = \{\varnothing\}$, значит, $2^A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Осталось выписать элементы декартова произведения $(2^A)^2 = 2^A \times 2^A$:

$$(2^A)^2 = \{(\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\{\varnothing\}), (\{\varnothing\},\varnothing), (\{\varnothing\},\{\varnothing\})\}. \qquad \square$$

Битовой строкой (длины n) называется элемент множества $\mathbb{B}^n$, где $\mathbb{B} = \{0,1\}$. Если $A \subseteq U$, где $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — универсальное мно-

[1] Кантор (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) (1845–1918).

[2] Декарт (René Descartes) (1596–1650).

жество, то **характеристическим вектором a** множества A называется строка бит длины n вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$, если $u_i \in A$, и $a_i = 0$ — в противном случае. Характеристические векторы используют для моделирования операций на конечных множествах [61, 78].

Пример 2.3. Пусть $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$ — универсальное множество. Запишем характеристические векторы множеств A, B, $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Решение.

Обозначим характеристический вектор множества A через $\mathbf{a}$, характеристический вектор множества B — через $\mathbf{b}$. По определению характеристического вектора имеем:

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$$

Операциям отрицания, объединения, пересечения множеств соответствуют логические операции **не**, **или**, **и** над величинами $1 \equiv$ И, $0 \equiv$ Л. Следовательно, множество $\overline{A}$ представляется битовой строкой

$$\textbf{не } \mathbf{a} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

множество $A \cup B$ — битовой строкой

$$\mathbf{a} \textbf{ или } \mathbf{b} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1),$$

множество $A \cap B$ — битовой строкой

$$\mathbf{a} \textbf{ и } \mathbf{b} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

По известному характеристическому вектору множества можно выписать элементы данного множества, в частности, $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $A \cap B = \{2\}$. □

Подчеркнем еще раз, что $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — неупорядоченный набор или множество, а $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — упорядоченный набор или вектор.

Примечание. Строго говоря, используемое в настоящем учебнике понятие множества не является математически корректным. Внутренняя противоречивость теории множеств, построенной на таком определении, следует из анализа **парадокса Рассела**[1] и других парадоксов [43, 61]. В настоящее время используются аксиоматические системы, на которых строится непротиворечивая теория множеств, среди них наиболее известна **система аксиом Цермело[2]–Френкеля[3]** [83].

[1] Рассел (Bertrand Arthur William Russell) (1872–1970).
[2] Цермело (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo) (1871–1953).
[3] Френкель (Abraham Halevi Fraenkel) (1891–1965).

Контрольные вопросы к главе «Теория множеств»

1. Что такое множество?
2. Какими способами можно задать множество?
3. Опишите, из каких элементов состоят множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
4. Дайте определение подмножества.
5. Что такое универсальное множество? Пустое множество?
6. Перечислите основные операции над множествами.
7. Для чего используют диаграммы Венна?
8. Сформулируйте закон двойственности.
9. Перечислите законы алгебры множеств.
10. Что называют мощностью конечного множества?
11. Запишите формулу включений и исключений.
12. Объясните, как построить показательное множество.
13. Мощность каких множеств равна $\aleph_0$?
14. Сформулируйте теорему о несчетном множестве.
15. Как вычисляют декартово произведение двух множеств? Произвольного числа множеств?
16. Дайте определение битовой строке.
17. Для чего используют характеристические векторы?

Задачи к главе «Теория множеств»

2.1. Перечислите элементы следующих множеств:

1) A_1 — множество всех простых чисел, не превосходящих по величине 11;
2) A_2 — множество галилеевых[1] спутников Юпитера;

[1] Галилей (Galileo Galilei) (1564–1642).

3) A_3 — множество простых четных чисел;
4) A_4 — множество студентов, побывавших на Меркурии.

2.2. Пусть A_1–A_4 — множества, определенные в предыдущем упражнении. Установите истинностное значение приведенных высказываний:

1) $A_3 \subset A_1$;
2) $A_3 \in A_1$;
3) $A_4 \subset A_2$;
4) $A_4 \in A_2$.

2.3. Пусть $A = \{2, 3\}$, $B = \{\varnothing, 1, \{2, 3\}\}$. Определите, какие из приведенных ниже высказываний являются истинными, а какие — ложными:

1) $\{1\} \subset A$;
2) $\{1\} \in A$;
3) $\varnothing \subset B$;
4) $\varnothing \in B$.

2.4. Пусть $A = \{\varnothing, a, \{b, c\}\}$, $B = \{b, c\}$. Определите, какие из приведенных ниже высказываний являются истинными, а какие — ложными:

1) $\{a\} \subset A$;
2) $\{a\} \in A$;
3) $B \subset A$;
4) $B \in A$.

2.5. С помощью кванторов запишите утверждение $P =$ «множество A содержит ровно один элемент».

2.6. С помощью кванторов запишите утверждение $Q =$ «множество A содержит ровно два элемента».

2.7. Запишите следующие множества, используя характеристические предикаты:

1) $S_1 = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$;
2) $S_2 = \{10, 2, -6, -14, \ldots\}$;
3) $S_3 = \{1, 3, 6, 10, \ldots\}$;
4) $S_4 = \{\pm 3, \pm 9, \pm 27, \pm 81, \ldots\}$.

2.8. Запишите следующие множества, используя характеристические предикаты:

1) $S_1 = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right\}$;
2) $S_2 = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{26}{27}, \dfrac{80}{81}, \ldots\right\}$;
3) $S_3 = \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots\right\}$;
4) $S_4 = \left\{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \ldots\right\}$.

2.9. Перечислите элементы следующих множеств: A, $B \cup C$, $(B \cap C) \triangle A$, где $A = \{x\colon x \in \mathbb{Z}$ **и** $x^2 \leqslant 15\}$, $B = \{x\colon x \in \mathbb{Z}$ **и** $x^2 - 4x - 12 = 0\}$, $C = \{x\colon x \in \mathbb{Z}$ **и** $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0\}$.

2.10. Перечислите элементы следующих множеств: $A \cap C$, $(B \cup C) \triangle A$, где

$A = \{x\colon x \in \mathbb{Z}$ **и** $-7 \leqslant x^3 \leqslant 555\}$;

$B = \{x\colon x \in \mathbb{Z}$ **и** $4x^2 + 3x - 1 \leqslant 0\}$;

$C = \{x\colon x \in \mathbb{R}$ **и** $4x^2 + 3x - 1 = 0\}$.

2.11. Даны множества $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 10\}$, $C = \{-1, 1, 2\}$, $D = \{2, 5, 10\}$. Определите элементы множеств:

1) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;
2) $(A \cup (B \cap C)) \cap ((A \cup B) \cap C)$;
3) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$;
4) $(A \setminus (B \cup C)) \setminus (A \setminus (B \cup D))$.

2.12. Даны множества $A = \{0, 1, 7\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, $D = \{-1, 1, 10\}$. Определите элементы множеств:

1) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
2) $(A \cap (B \cup C)) \cap (A \cup B \cup D)$;
3) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus D)$;
4) $(A \setminus (B \cap C)) \cap (D \setminus A)$.

2.13. Положим, что универсальное множество данной задачи имеет вид $U = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m\}$. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, f, h, m\}$, $C = \{c, e, g, k, m\}$. Найдите элементы следующих множеств: $\overline{A} \cap B$, $(A \triangle B) \cup C$, $(A \cup C) \setminus B$.

2.14. Положим, что универсальное множество данной задачи имеет вид $U = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m\}$. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, f, h, m\}$, $C = \{c, e, g, k, m\}$. Найдите элементы следующих множеств: $A \cup \overline{C}$, $(A \triangle C) \cup B$, $\big(B \cap \overline{C}\big) \setminus A$.

2.15. Положим, что универсальное множество данной задачи имеет вид $U = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m\}$. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, f, h, m\}$, $C = \{c, e, g, k, m\}$. Найдите элементы следующих множеств: $B \triangle C$, $\big(B \setminus \overline{C}\big) \cup A$, $(B \triangle C) \cap \overline{A}$.

2.16. Рассмотрим множества $A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$, $B = \{2, 3\}$. Выпишите элементы множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \triangle B$.

2.17. Рассмотрим множества $A = \{\varnothing, \{2\}\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$. Выпишите элементы множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \triangle B$.

2.18. Выпишите все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

2.19. Выпишите все подмножества множества $A = \{\{a, b, c\}\}$.

2.20. Выпишите все подмножества множества $A = \{a, \{b, c\}\}$.

2.21. Найдите булеан:

1) пустого множества $\varnothing$;
2) булеана пустого множества $\mathcal{P}(\varnothing)$.

2.22. Для множества $M = \{\varnothing, 0, \{1\}\}$ определите пересечение $M \cap \mathcal{P}(M)$.

2.23. На экзамене по курсу дискретной математики студент утверждает, что для любых множеств A и B справедливы равенства

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B),$$
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B).$$

Прав ли студент?

2.24. Выразите операцию теоретико-множественной разности множеств через операции дополнения до универсального множества и пересечения множеств.

2.25. Докажите с помощью законов алгебры множеств следующее тождество: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

$*$**2.26.** Определите, обладают ли бинарные операции дополнения и симметрической разности свойствами:

1) коммутативности;
2) ассоциативности.

2.27. Докажите с помощью законов алгебры множеств следующее тождество: $A \triangle A \triangle A = A$.

2.28. Докажите с помощью законов алгебры множеств следующее тождество: $(A \cup B) \triangle (A \cup C) = (B \triangle C) \setminus A$.

2.29. Пусть A, B, C — произвольные множества. Докажите тождества, используя законы алгебры множеств:

1) $\overline{(A \cup \overline{B})} = \overline{A} \cap B$;
2) $(A \cup (A \cap \overline{B})) \cap (A \cap (A \cup B)) = A$;
3) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
4) $(A \setminus (B \setminus C)) \setminus ((A \setminus B) \setminus C) = A \cap C$;
5) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus A) = A \triangle B$;
6) $(A \cup B \cup C) \triangle (A \cap B \cap C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Изобразите соответствующие диаграммы Венна.

2.30. Для универсального множества $U = \{-5, -4, \ldots, 5\}$ и множества $A = \{x\colon f(x) = 0 \textbf{ и } x \in \mathbb{Z}\}$ запишите элементы множеств $\overline{A}$, $A \triangle U$, $A \triangle A$. Какова мощность показательного множества $\mathcal{P}(A)$? Рассмотрите случаи:

1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
2) $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2)$;
3) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$;
4) $f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30$.

2.31. Изобразите множество $(A \setminus B) \cap C$ в декартовой системе координат, если множества $A, B, C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ определены следующим образом: $A = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 4\}$, $B = \{(x, y)\colon x^2 - 2x + y^2 \leqslant 0\}$, $C = \{(x, y)\colon y > 1\}$.

2.32. Изобразите множество $(A \cup B) \triangle C$ в декартовой системе координат, если множества $A, B, C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ таковы:

1) $A = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 - 5x < 0\}$, $B = \{(x, y)\colon x^2 \leqslant 4\}$,
$C = \{(x, y)\colon -3 \leqslant y \leqslant 0\}$;
2) $A = \{(x, y)\colon y - x^2 - 1 \leqslant 0\}$, $B = \{(x, y)\colon y - x^2 - 1 \geqslant 0\}$,
$C = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 < 7\}$;

3) $A = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 - y \leqslant 0\}$, $B = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 + y \leqslant 0\}$,
$C = \{(x, y) \colon y > |x| - \frac{1}{2}\}$;

4) $A = \{(x, y) \colon |x + y| < 10\}$, $B = \{(x, y) \colon -5 \leqslant x \leqslant 5\}$,
$C = \{(x, y) \colon x + y > 0\}$,

здесь через $|x|$ обозначен модуль числа x.

2.33. Изобразите множество $(A \vartriangle B) \cap C$ в декартовой системе координат, если множества $A, B, C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ таковы:

1) $A = \{(x, y) \colon x - y^2 - 3 \geqslant 0\}$, $B = \{(x, y) \colon x + y^2 - 3 \leqslant 0\}$,
$C = \{(x, y) \colon x^2 - 6x + y^2 < 0\}$;

2) $A = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, $B = \{(x, y) \colon |x| + |y| \leqslant 2\}$,
$C = \{(x, y) \colon y - x > 0\}$;

3) $A = \{(x, y) \colon x^2 - 6x + y^2 < 0\}$, $B = \{(x, y) \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$,
$C = \{(x, y) \colon x + 3y \leqslant 0\}$;

4) $A = \{(x, y) \colon y \geqslant |x| - 2\}$, $B = \{(x, y) \colon y \leqslant 2 - |x|\}$,
$C = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant 4\}$,

здесь через $|x|$ обозначен модуль числа x.

2.34. Изобразите множество $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в декартовой системе координат, если:

1) $S = \overline{A} \vartriangle (\overline{B} \cap C)$,
$A = \{(x, y) \colon y^2 \geqslant x^3\}$, $B = \{(x, y) \colon x \leqslant 3/2\}$,
$C = \{(x, y) \colon x > -1\}$;

2) $S = (A \cap B) \vartriangle C$,
$A = \left\{(x, y) \colon y^2 \leqslant x^3 - 2x + \sqrt{32/27}\right\}$,
$B = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leqslant 2\}$,
$C = \{(x, y) \colon \left||x| - 7/2\right| < 1/2\}$;

3) $S = \overline{A} \vartriangle (B \cap C)$,
$A = \{(x, y) \colon y^2 > x^3 + x + 2\}$, $B = \{(x, y) \colon x + y > 0\}$,
$C = \{(x, y) \colon x - y > 0\}$;

4) $S = (A \cap B) \vartriangle \overline{C}$,
$A = \{(x, y) \colon y^2 \leqslant x^3 - 4x + 2\}$, $B = \{(x, y) \colon |x + 1| \leqslant 1\}$,
$C = \{(x, y) \colon |y - 1/2| \geqslant 1/2\}$,

здесь через $|x|$ обозначен модуль числа x.

2.35. Докажите, что для произвольных конечных множеств A и B

$$|A \vartriangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

2.36. Докажите, что для произвольных конечных множеств A, B и C

$$|A \vartriangle B \vartriangle C| = |A|+|B|+|C|-2(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+4|A\cap B\cap C|.$$

2.37. Пусть A, B и C — конечные множества. Докажите **формулу включений и исключений для трех множеств** A, B и C:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

2.38. В классе 29 учеников. Из них посещают спортивную секцию 13 человек, кружок авиамоделирования — 6, дополнительные занятия по математике — 19. Двое занимаются авиамоделированием и спортом, 7 — спортом и математикой, 4 — авиамоделированием и математикой. Никто из учащихся не посещает все внеклассные мероприятия. Сколько учеников посещает только один факультатив и сколько не интересуется ими вообще?

2.39. В классе женской гимназии организованы дополнительные кружки по вязанию, шитью и вышивке. Известно, что вышивкой занимаются 9 учениц, вязанием — 10, шитьем — 15, вышивкой и вязанием — 2, шитьём и вязанием — 3, вышивкой и шитьём — 5, одна девушка посещает все кружки. Сколько учениц в классе посещают дополнительные занятия и сколько из них занимаются только шитьём?

2.40. По итогам экзаменационной сессии у 12 студентов имеются оценки «отлично», у 15 — «хорошо» и у 8 — «удовлетворительно». Оценки «отлично» и «хорошо» получили 10 учащихся, «хорошо» и «удовлетворительно» — двое, «отлично» и «удовлетворительно» — один студент. Набора из трех разных оценок не оказалось ни у кого. Сколько студентов сдавали экзаменационную сессию?

2.41. Известно, что $|A| = |B| = 16$, $|C| = 25$, $|A \cap B| = 10$, $|A \cap C| = |B \cap C| = 9$, $|A \cap B \cap C| = 3$. Вычислите $|(A \vartriangle B) \cup C|$.

2.42. Известно, что $|A| = |C| = 29$, $|B| = 19$, $|A \cap B| = 11$, $|A \cap C| = |B \cap C| = 9$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Вычислите $|A \cup (B \vartriangle C)|$.

2.43. Известно, что $|A| = 18$, $|B| = |C| = 23$, $|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 5$. Вычислите $|(A \vartriangle C) \cup B|$.

$*$2.44. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Докажите **формулу включений и исключений для n множеств** [61]:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

2.45. Запишите формулу включений и исключений для четырех множеств.

2.46. Среди гвардейцев кардинала провели опрос. Был задан единственный вопрос: «Кто из мушкетеров доставляет Вам наибольшее количество неприятностей?» Каждый из опрошенных отметил хотя бы одного мушкетера из четырех: д'Артаньяна, Атоса, Портоса или Арамиса. Результаты исследования приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

К упр. ***2.46***

N	Мушкетеры	Число респондентов
1	Д'Артаньян	25
2	Атос	12
3	Портос	19
4	Арамис	16
5	Д'Артаньян, Атос	7
6	Д'Артаньян, Портос	7
7	Д'Артаньян, Арамис	9
8	Атос, Портос	5
9	Атос, Арамис	4
10	Портос, Арамис	5
11	Д'Артаньян, Атос, Портос	2
12	Д'Артаньян, Атос, Арамис	2
13	Д'Артаньян, Портос, Арамис	2
14	Атос, Портос, Арамис	2
15	Д'Артаньян, Атос, Портос, Арамис	1

Сколько гвардейцев состоят на службе у кардинала?

2.47. Среди 100 посетителей электронной библиотеки провели опрос. Был задан единственный вопрос: «Стихи каких поэтов Вы знаете наизусть?» Результаты исследования приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

*К упр. **2.47***

N	Поэты, названные посетителями	Число респондентов
1	А. С. Пушкин	33
2	М. Ю. Лермонтов	27
3	С. А. Есенин	27
4	М. И. Цветаева	25
5	А. С. Пушкин, М. Ю. Лермонтов	9
6	А. С. Пушкин, С. А. Есенин	10
7	А. С. Пушкин, М. И. Цветаева	8
8	М. Ю. Лермонтов, С. А. Есенин	11
9	М. Ю. Лермонтов, М. И. Цветаева	9
10	С. А. Есенин, М. И. Цветаева	10
11	А. С. Пушкин, М. Ю. Лермонтов, С. А. Есенин	5
12	А. С. Пушкин, М. Ю. Лермонтов, М. И. Цветаева	2
13	А. С. Пушкин, С. А. Есенин, М. И. Цветаева	3
14	М. Ю. Лермонтов, С. А. Есенин, М. И. Цветаева	3
15	А. С. Пушкин, М. Ю. Лермонтов, С. А. Есенин, М. И. Цветаева	1

Сколько человек затруднились с ответом и не назвали ни одного автора?

2.48. Определите, какие из приведенных ниже множеств имеют мощность $\aleph_0$:

1) $A_1 = \{n\colon n > 10,\ n \in \mathbb{Z}\}$;
2) $A_2 = \{x\colon \sin x = 0\}$;
3) $A_3 = \{n\colon \sqrt{n} < 10^{10},\ n \in \mathbb{N}\}$;
4) $A_4 = \{n\colon n$ — простое число$\}$.

2.49. Докажите, что множество всех четных неотрицательных чисел $P = \{n\colon n = 2(k-1),\ k \in \mathbb{N}\}$ счетно.

2.50. Докажите, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.

2.51. Докажите, что объединение счетного множества A и конечного множества B счетно.

∗2.52. Докажите, что декартово произведение двух счетных множеств A и B счетно.

∗2.53. Определите номер, получаемый каждым элементом множества $A \times B$ в нумерации согласно схеме из решения предыдущего упражнения.

2.54. Докажите, что k-я степень множества натуральных чисел $\mathbb{N}^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ является счетным множеством.

2.55. Докажите, что объединение счетного числа счетных множеств $A_1, A_2, \ldots$ счетно.

2.56. Докажите, что любые два интервала (a, b) и (c, d), где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, равномощны. Чему равна мощность данных множеств?

2.57. Заданы множества $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$. Найдите элементы множеств $(A \times B) \cup (B \times A)$ и $(A \times B) \cap (B \times A)$.

2.58. Заданы множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Найдите элементы множеств $(A \times B) \cup (B \times A)$ и $(A \times B) \cap (B \times A)$.

2.59. Определите $|A \times B|$, если $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

2.60. Определите $|A \times B|$, если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$.

2.61. Про некоторые множества A, B и C известно следующее: $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)| = 4$, $|\mathcal{P}(C)| = 16$. Сколько элементов содержится в множестве $A \times B \times C$?

2.62. Про некоторые множества A, B и C известно, что $|\mathcal{P}(A)| = 32$, $|\mathcal{P}(B)| = 16$, $|\mathcal{P}(C)| = 1024$. Сколько элементов содержится в множестве $A \times B \times C$?

2.63. Мощность булеана множества A равна 512. Какова мощность множества A^3?

2.64. Мощность булеана множества A равна 1024. Какова мощность множества A^3?

2.65. Выясните, выполняются ли равенства

1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
2) $(A \times B) \times (C \times D) = A \times (B \times C) \times D$

для произвольных множеств A, B, C и D.

2.66. Положим, что универсальное множество имеет вид $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Выпишите характеристические векторы подмножеств $A = \{1, 5, 7, 11\}$ и $B = \{3, 5, 7, 9, 13\}$. Найдите характеристические векторы подмножеств $\overline{A} \cap B$ и $U \setminus (A \bigtriangleup B)$, после чего перечислите их элементы.

2.67. Положим, что универсальное множество имеет вид $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Выпишите характеристические векторы подмножеств $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ и $B = \{3, 4, 6, 7\}$. Найдите характеристические векторы подмножеств $A \cup \overline{B}$ и $U \bigtriangleup (A \setminus \overline{B})$, после чего перечислите их элементы.

2.68. Положим, что универсальное множество имеет вид $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$. Выпишите характеристические векторы подмножеств $A = \{2, 8, 10, 12, 14\}$ и $B = \{4, 8, 10, 16\}$. Найдите характеристические векторы подмножеств $A \setminus \overline{B}$ и $U \bigtriangleup \left(A \cap \overline{B}\right)$, после чего перечислите их элементы.

Ответы, указания, решения к главе «Теория множеств»

2.1. *Ответ:*

1) $A_1 = \{2, 3, 5, 7, 11\}$;
2) $A_2 = \{$Ио, Европа, Ганимед, Каллисто$\}$;
3) $A_3 = \{2\}$;
4) $A_4 = \varnothing$.

2.2. *Ответ:*

1) истинно;
2) ложно;
3) истинно;
4) ложно.

2.3. *Ответ:*

1) ложно;
2) ложно;
3) истинно;
4) истинно.

2.4. *Ответ:*

1) истинно;

2) ложно;
3) ложно;
4) истинно.

2.5. *Ответ:* $P = \exists x(\forall t(t = x))$.

2.6. *Ответ:* $Q = \exists x(\exists y(\forall t((x \neq y)$ **и** $((t = x)$ **или** $(t = y)))))$.

2.7. *Ответ:*

1) $S_1 = \{n\colon n = 3k - 2,\ k \in \mathbb{N}\}$;
2) $S_2 = \{n\colon n = 18 - 8k,\ k \in \mathbb{N}\}$;
3) $S_3 = \{n\colon n = k(k + 1)/2,\ k \in \mathbb{N}\}$;
4) $S_4 = \{n\colon n = \pm 3^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2.8. *Ответ:*

1) $S_1 = \{x\colon x = 2^{1-k},\ k \in \mathbb{N}\}$;

2) $S_2 = \{x\colon x = 1 - 3^{-k},\ k \in \mathbb{N}\}$;

3) $S_3 = \left\{x\colon x = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k + 1},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

4) $S_4 = \left\{x\colon x = \dfrac{k - 1}{k + 1},\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

2.9. *Решение.*

Поскольку множеству A принадлежат все целые числа, удовлетворяющие неравенству $x^2 \leqslant 15$, то, следовательно, $A = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\}$.

Для определения элементов множества B решим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 12 = 0$. Как известно, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которые вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

величина $D = b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом** квадратного уравнения (от латинского *discrīmināre* — отделять).

В нашем случае дискриминант равен $D = (-4)^2 - 4 \cdot (-12) = 64$, корни уравнения $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. Значит, $B = \{-2, 6\}$.

Далее рассмотрим множество C. Для определения его элементов решим квадратное уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Методом подстановки определим промежутки знакопостоянства функции $f\,(x) = x^2 - 2x - 8$: $f(-3) = 7$, $f(0) = -8$, $f(5) = 7$. Очевидно, что $f(x) \leqslant 0$ на промежутке $[-2, 4]$. Следовательно, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Теперь легко находим элементы оставшихся множеств:

$$\begin{aligned}
&B \cup C = \{-2,\ 6\} \cup \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\},\\
&(B \cap C) \vartriangle A = \\
&\qquad = (\{-2, 6\} \cap \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}) \vartriangle \{-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\} = \\
&\qquad = \{-2\} \vartriangle \{-3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\} = \{-3, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}.
\end{aligned}$$

2.10. *Ответ:*

$A = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $B = \{-1,\ 0\}$, $C = \{-1, \dfrac{1}{4}\}$, $A \cap C = \{-1\}$, $(B \cup C) \vartriangle A = \{\dfrac{1}{4},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

2.11. *Ответ:*

1) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2\}$;
2) $(A \cup (B \cap C)) \cap ((A \cup B) \cap C) = \{1, 2\}$;
3) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = \{2, 3, 4\}$;
4) $(A \setminus (B \cup C)) \setminus (A \setminus (B \cup D)) = \varnothing$.

2.12. *Ответ:*

1) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{0, 1\}$;
2) $(A \cap (B \cup C)) \cap (A \cup B \cup D) = \{0, 1\}$;
3) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus D) = \{7\}$;
4) $(A \setminus (B \cap C)) \cap (D \setminus A) = \varnothing$.

2.13. *Ответ:*

$\overline{A} \cap B = \{f, h, m\}$, $(A \vartriangle B) \cup C = \{b, c, e, f, g, h, k, m\}$, $(A \cup C) \setminus B = \{b, e, g, k\}$.

2.14. *Ответ:*

$A \cup \overline{C} = \{a, b, c, f, h\}$, $(A \vartriangle C) \cup B = \{a, b, c, e, f, g, h, k, m\} = U$, $(B \cap \overline{C}) \setminus A = \{f, h\}$.

2.15. *Ответ:*

$B \vartriangle C = \{a, e, f, g, h, k\}$, $(B \setminus \overline{C}) \cup A = \{a, b, c, m\}$, $(B \vartriangle C) \cap \overline{A} = \{e, f, g, h, k\}$.

2.16. *Ответ:*

$A \cup B = \{1, 2, 3, \{3, 4\}\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \vartriangle B = \{1, 3, \{3, 4\}\}$.

2.17. *Ответ:*

$A \cup B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, $A \cap B = \{\{2\}\}$, $A \vartriangle B = \{\varnothing, \{1\}\}$.

2.18. *Ответ:* $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2.19. *Решение.*

Множество A содержит только один элемент, а именно, $\{a, b, c\}$. В силу этого у A есть только два подмножества: пустое и содержащее единственный элемент $\{a, b, c\}$. В итоге $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\{a, b, c\}\}\}$.

2.20. *Ответ:* $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$.

2.21. *Ответ:*

1) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$;
2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

2.22. *Ответ:* $M \cap \mathcal{P}(M) = \{\varnothing\}$.

2.23. *Решение.*

Справедливо только первое из указанных равенств. В самом деле, выполняется цепочка логических эквивалентностей:

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow C \subseteq A \textbf{ и } C \subseteq B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Приведем контрпример, показывающий, что соотношение $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ выполняется не для всех множеств A и B.

Пусть $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $\{0, 1\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, тогда $\{0, 1\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Итак, для любых множеств A и B доказаны соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B), \\ \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B). \end{aligned}$$

2.24. *Решение.*

По определению теоретико-множественная разность множеств A и B равна

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \textbf{ и } x \notin B\}.$$

Покажем, что это множество совпадает с $A \cap \overline{B}$ для любых множеств $A, B \in U$. Действительно,

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \textbf{ и } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

2.25. *Решение.*

Используя тождество $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, доказанное в предыдущем упражнении, получим:

$$\begin{aligned} &(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap \overline{C} = \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = && \text{(закон ассоциативности)} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = && \text{(закон де Моргана)} \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} = A \setminus (B \cup C) && \text{(тождество из упр. } \textbf{2.24}\text{).} \end{aligned}$$

2.26. *Решение.*

1) Коммутативность некоторой операции «$\otimes$» алгебры множеств означает, что $\forall A, B \subseteq U \;\; A \otimes B = B \otimes A$. Проверим это соотношение для дополнения множества B до множества A и симметрической разности двух множеств:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \neq B \setminus A,$$
$$A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = B \vartriangle A.$$

Значит, операция симметрической разности $B \vartriangle A$ коммутативна, а операция дополнения $A \setminus B$ не является коммутативной.

2) Ассоциативность некоторой операции «$\otimes$» алгебры множеств означает, что $\forall A, B, C \subseteq U \;\; (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$. Проверим это соотношение для дополнения множества B до множества A:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \setminus (B \cup C) \neq A \setminus (B \setminus C).$$

Рассмотрим операцию симметрической разности некоторых множеств A и B. Представим выражение $(A \vartriangle B) \vartriangle C$, последовательно пользуясь определением симметрической разности, а также законами дистрибутивности и де Моргана:

$$\begin{aligned}(A \vartriangle B) \vartriangle C &= ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \vartriangle C = \\ &= (((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C}) \cup (\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)} \cap C) = \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (((\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})) \cap C).\end{aligned}$$

Заметим, что выражение $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) &= ((\overline{A} \cup B) \cap A) \cup ((\overline{A} \cup B) \cap \overline{B}) = \\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).\end{aligned}$$

Используя полученное соотношение, получаем

$$\begin{aligned}(A \vartriangle B) \vartriangle C &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) \cap C) = \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).\end{aligned}$$

Далее рассмотрим множество $A \vartriangle (B \vartriangle C)$. Выполним преобразования, аналогичные изложенным выше:

$$\begin{aligned}A \vartriangle (B \vartriangle C) &= A \vartriangle ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)) = \\ &= (A \cap \overline{((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C))}) \cup (\overline{A} \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C))) = \\ &= (A \cap ((\overline{B} \cup C) \cap (B \cup \overline{C}))) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).\end{aligned}$$

Поскольку $(\overline{B} \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) = (B \cap C) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$, то

$$\begin{aligned} A \vartriangle (B \vartriangle C) &= (A \cap ((B \cap C) \cup (\overline{B} \cap \overline{C}))) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с выражением для $(A \vartriangle B) \vartriangle C$, получаем, что $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C) = A \vartriangle B \vartriangle C$. Соответствующая диаграмма Венна приведена на рис. 2.3.

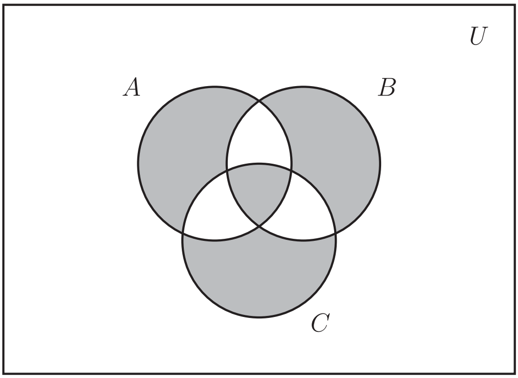


Рис. 2.3. Диаграмма Венна множества $A \vartriangle B \vartriangle C$ к упр. **2.26**

Значит, операция симметрической разности $A \vartriangle B$ ассоциативна, а операция дополнения $A \setminus B$ не является ассоциативной.

2.27. *Доказательство.*

Учитывая определение симметрической разности и известные законы алгебры множеств, получим:

$$\begin{aligned} &A \vartriangle A \vartriangle A = \\ &= (A \vartriangle A) \vartriangle A = && \text{(группируем слагаемые)} \\ &= \big((A \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap A)\big) \vartriangle A = && \text{(определение симметрической разности)} \\ &= (\varnothing \cup \varnothing) \vartriangle A = \varnothing \vartriangle A = && \text{(свойства дополнения и идемпотентности)} \\ &= (U \cap A) \cup (\overline{A} \cap \varnothing) = A && \text{(свойства } \varnothing \text{ и } U\text{).} \end{aligned}$$

2.29. *Решение.*

1) Воспользуемся законами де Моргана и свойствами дополнения:

$$\overline{(A \cup \overline{B})} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B.$$

2) По законам поглощения $A \cup (A \cap \overline{B}) = A$ и $A \cap (A \cup B) = A$. Осталось применить закон идемпотентности:

$$(A \cup (A \cap \overline{B})) \cap (A \cap (A \cup B)) = A \cap A = A.$$

3) Выразив дополнение множества C до множества $(A \cup B)$, получим:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

4) Тождество можно доказать следующими преобразованиями.

$$\begin{aligned}
&(A \setminus (B \setminus C)) \setminus ((A \setminus B) \setminus C) = \\
&= (A \cap \overline{(B \setminus C)}) \setminus ((A \setminus B) \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}) \cap \overline{((A \cap \overline{B}) \cap \overline{C})} = \\
&= (A \cap (\overline{B} \cup C)) \cap (\overline{(A \cap \overline{B})} \cup C) = (A \cap (\overline{B} \cup C)) \cap ((\overline{A} \cup B) \cup C) = \\
&= ((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)) \cap (\overline{A} \cup B \cup C) = \\
&= ((A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)) \cup ((A \cap C) \cap (\overline{A} \cup B \cup C)) = \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup \\
&\qquad \cup (A \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap C) = \\
&= \varnothing \cup \varnothing \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup \varnothing \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C) = \\
&= ((A \cap C) \cap (\overline{B} \cup B)) \cup (A \cap C) = (A \cap C) \cup (A \cap C) = A \cap C.
\end{aligned}$$

5) Используя определение симметрической разности, получаем:

$$\begin{aligned}
&(A \setminus B) \vartriangle (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \vartriangle (B \cap \overline{A}) = \\
&= ((A \cap \overline{B}) \cap \overline{(B \cap \overline{A})}) \cup (\overline{(A \cap \overline{B})} \cap (B \cap \overline{A})) = \\
&= ((A \cap \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup A)) \cup ((\overline{A} \cup B) \cap (B \cap \overline{A})) = \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{A}) \cup (B \cap B \cap \overline{A}) = \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \vartriangle B.
\end{aligned}$$

6) По определению симметрической разности множеств $(A \cup B \cup C)$ и $(A \cap B \cap C)$ получаем:

$$\begin{aligned}
&(A \cup B \cup C) \vartriangle (A \cap B \cap C) = \\
&= \Big((A \cup B \cup C) \cap \overline{(A \cap B \cap C)}\Big) \cup \Big(\overline{(A \cup B \cup C)} \cap (A \cap B \cap C)\Big).
\end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
\overline{(A \cup B \cup C)} \cap (A \cap B \cap C) &= (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap B \cap C) = \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A \cap B \cap C = \varnothing.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(A \cup B \cup C) \vartriangle (A \cap B \cap C) = \Big((A \cup B \cup C) \cap \overline{(A \cap B \cap C)}\Big) \cup \varnothing =$$
$$= (A \cup B \cup C) \cap \overline{(A \cap B \cap C)} = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

Соответствующие диаграммы Венна приведены на рис. 2.4, 2.5.

2.30. *Решение.*

1) Определим элементы множества A. Уравнение $f(x) = 0$ является биквадратным и заменой $t = x^2$ сводится к квадратному. Получаем, что $f(x) = 0$ имеет четыре корня: $x = \pm 1, x = \pm 2$. (Согласно основной теореме алгебры, уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — полином, имеет ровно n корней, где n — степень полинома, подробнее см. главу «Комплексные числа» на стр. 306.) Таким образом,

$A = \{-2, -1, 1, 2\}$,

$\overline{A} = \{-5, -4, -3, 0, 3, 4, 5\}$.

Воспользовавшись определением симметрической разности, получим:

$A \vartriangle U = \{-5, -4, -3, 0, 3, 4, 5\}$,

$A \vartriangle A = \varnothing$.

Так как число элементов множества A равно $|A| = 4$, то мощность показательного множества $|\mathcal{P}(A)| = 2^4 = 16$.

2) Уравнение $f(x) = 0$ имеет 4 корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$. Значит, $A = \{1, 2\}$, $\overline{A} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\}$, $A \vartriangle U = \overline{A}$, $A \vartriangle A = \varnothing$.

Так как число элементов множества A равно $|A| = 2$, то мощность показательного множества $|\mathcal{P}(A)| = 4$.

3) Подбором находим корень $x = 2$. Для определения оставшихся трех корней разделим полином $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$ на $x - 2$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,2x^3 & -\,25x^2 & -\,26x & +\,120 & x-2 \\
\cline{6-6}
-\;x^4 & -\,2x^3 & & & & x^3+4x^2-17x-60 \\
\cline{1-2}
 & 4x^3 & -\,25x^2 & & & \\
 & -\;4x^3 & -\,8x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -\,17x^2 & -\,26x & & \\
 & & -\;-\,17x^2 & +\,34x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -\,60x & +\,120 & \\
 & & & -\;-\,60x & +\,120 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

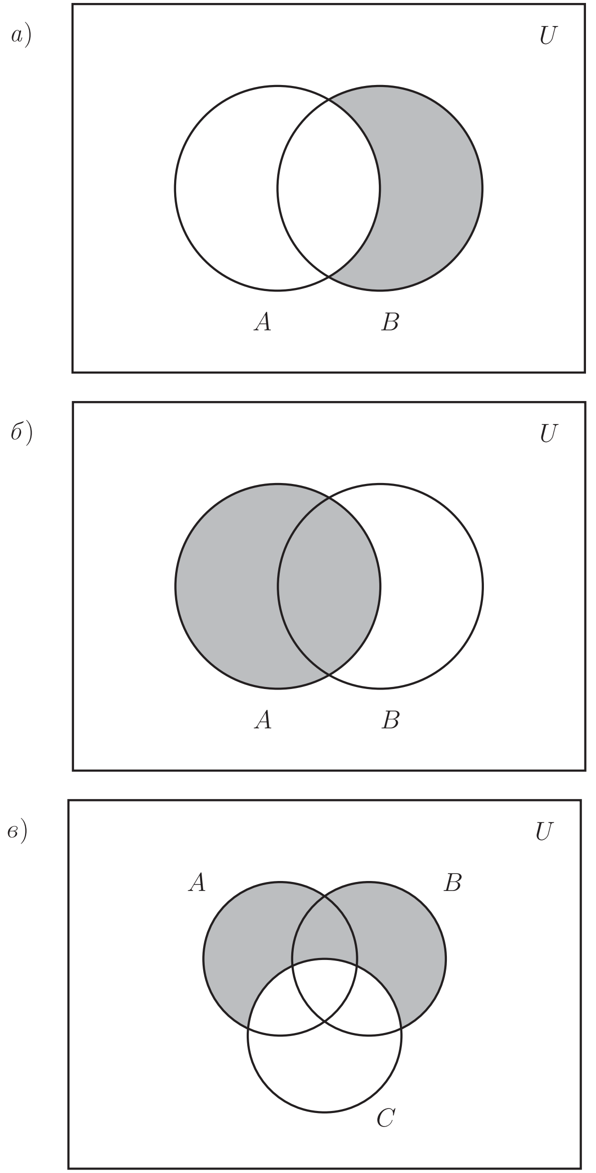


Рис. 2.4. Диаграммы Венна множеств *а*) $\overline{(A \cup \overline{B})}$, *б*) $(A \cup (A \cap \overline{B})) \cap$ $\cap\, (A \cap (A \cup B))$ и *в*) $(A \cup B) \setminus C$ к упр. **2.29**

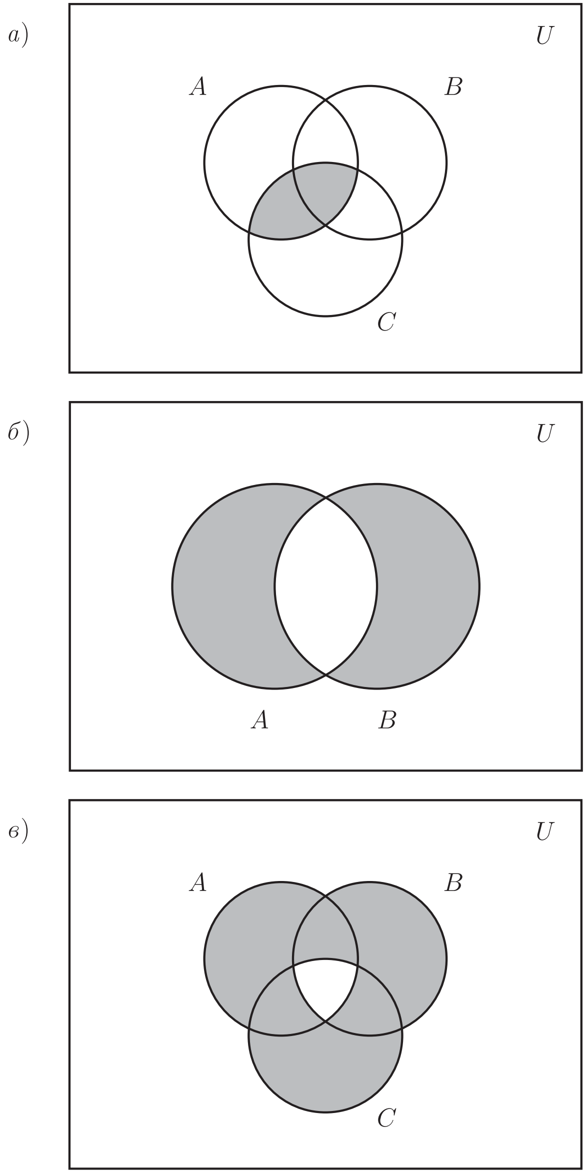


Рис. 2.5. Диаграммы Венна множеств *а*) $(A \setminus (B \setminus C)) \setminus ((A \setminus B) \setminus C)$, *б*) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus A)$ и *в*) $(A \cup B \cup C) \triangle (A \cap B \cap C)$ к упр. **2.29**

Уравнение $x^3 + 4x^2 - 17x - 60 = 0$ имеет корень $x = 4$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 17x - 60 \\ x^3 - 4x^2 \phantom{{}- 17x - 60} \end{array} & \begin{array}{l} x - 4 \\ \hline x^2 + 8x + 15 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} 8x^2 - 17x \phantom{{}-60} \\ 8x^2 - 32x \phantom{{}-60} \end{array} & \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} 15x - 60 \\ 15x - 60 \end{array} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

И, наконец, $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$.

В итоге получаем $f(x) = (x + 5)(x + 3)(x - 2)(x - 4)$, что позволяет выписать элементы искомых множеств:

$A = \{-5, -3, 2, 4\}$, $A \vartriangle U = \overline{A} = \{-4, -2, -1, 0, 1, 3, 5\}$, $A \vartriangle A = \varnothing$.

4) Подбором находим корень $x = 1$. Для определения оставшихся трех корней разделим полином $x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30$ на $x - 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30 \\ x^4 - x^3 \phantom{{}- 19x^2 - 11x + 30} \end{array} & \begin{array}{l} x - 1 \\ \hline x^3 - 19x - 30 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -19x^2 - 11x \phantom{{}+30} \\ -19x^2 + 19x \phantom{{}+30} \end{array} & \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -30x + 30 \\ -30x + 30 \end{array} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Уравнение $x^3 - 19x - 30 = 0$ имеет корень $x = -2$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 \phantom{{}+2x^2} - 19x - 30 \\ x^3 + 2x^2 \phantom{{}- 19x - 30} \end{array} & \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline x^2 - 2x - 15 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -2x^2 - 19x \phantom{{}-30} \\ -2x^2 - 4x \phantom{{}-30} \end{array} & \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -15x - 30 \\ -15x - 30 \end{array} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

И, наконец, $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$. В итоге получаем $A = \{-3, -2, 1, 5\}$, $A \vartriangle U = \overline{A} = \{-5, -4, -1, 0, 2, 3, 4\}$, $A \vartriangle A = \varnothing$.

2.31. *Решение.*

Как известно из курса аналитической геометрии [31, 115], уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

определяет на декартовой плоскости окружность радиуса R с центром в точке с координатами $x = a$, $y = b$. Следовательно, множеству A принадлежат все точки, лежащие внутри окружности радиуса $R_1 = 2$ с центром в точке $(0, 0)$. Представив свойство, определяющее множество B, в виде $x^2 - 2x + y^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$, заключаем, что множеству B принадлежат все точки плоскости, лежащие внутри окружности радиуса $R_2 = 1$ с центром в точке $(1, 0)$. Множество C образовано полуплоскостью, расположенной выше прямой $y = 1$.

Искомое множество $(A \setminus B) \cap C$ образовано элементами, принадлежащими A и не принадлежащими B, и, кроме того, принадлежащими множеству C. На рис. 2.6 соответствующая область закрашена.

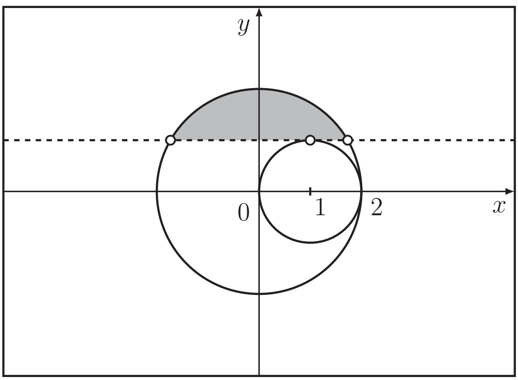


Рис. 2.6. Множество $(A \setminus B) \cap C$ к упр. **2.31**. Соответствующая область закрашена

2.32. *Ответ:*

Множество $(A \cup B) \bigtriangleup C$ в декартовой системе координат представлено на рис. 2.7, 2.8.

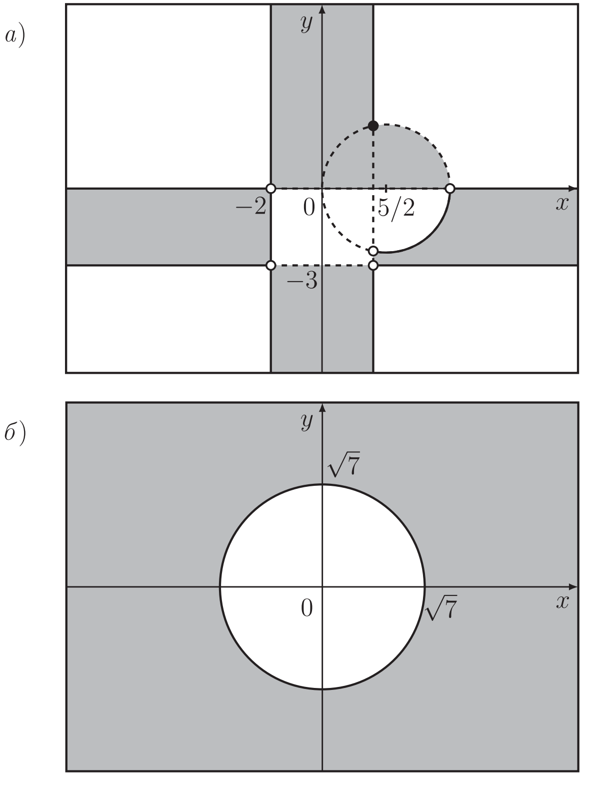
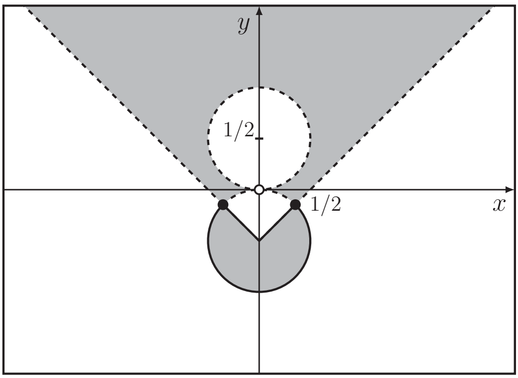


Рис. 2.7. Множество $(A \cup B) \vartriangle C$ пункта 1) — панель *а*), пункта 2) — панель *б*) к упр. **2.32**. Соответствующая область закрашена

а)



б)

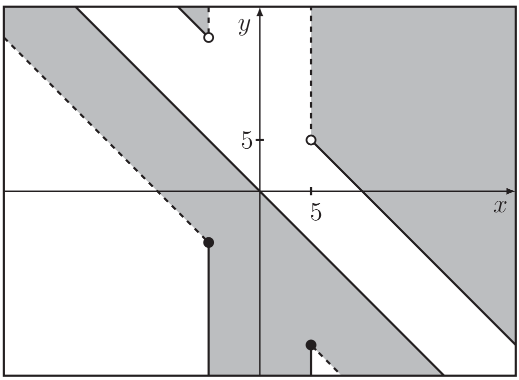


Рис. 2.8. Множество $(A \cup B) \vartriangle C$ пункта 3) — панель *а*), пункта 4) — панель *б*) к упр. **2.32**. Соответствующая область закрашена

2.33. *Ответ:*

Множество $(A \cup B) \vartriangle C$ в декартовой системе координат для случаев 1)–4) представлено на рис. 2.9, 2.10.

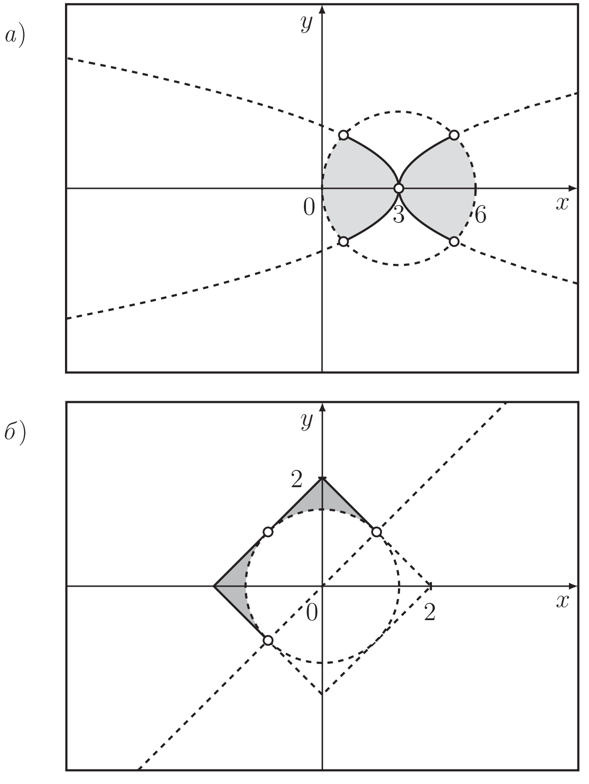


Рис. 2.9. Множество $(A \cup B) \vartriangle C$ пункта 1) — панель *а*), пункта 2) — панель *б*) к упр. **2.33**. Соответствующая область закрашена

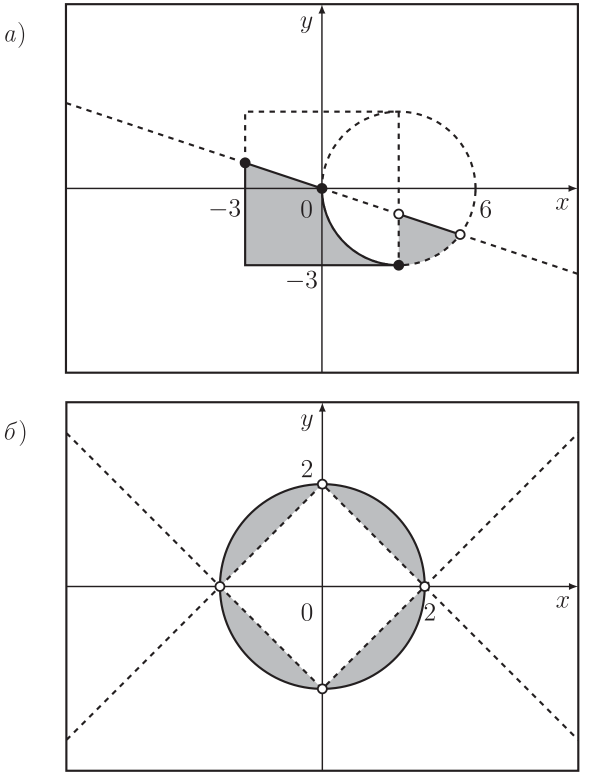


Рис. 2.10. Множество $(A \cup B) \bigtriangleup C$ пункта 3) — панель *a*), пункта 4) — панель *б*) к упр. **2.33**. Соответствующая область закрашена

2.34. *Ответ:*

Множество S в декартовой системе координат для случаев 1)–4) представлено на рис. 2.11, 2.12.

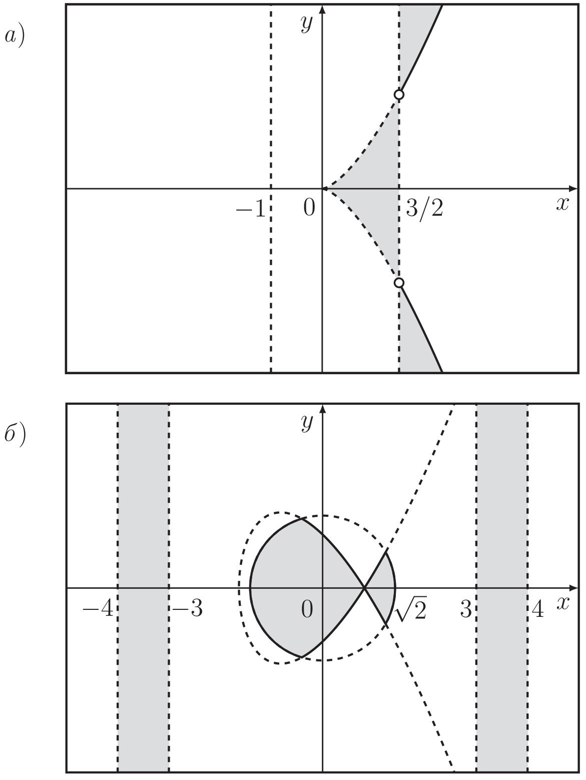


Рис. 2.11. Множество S пункта 1) — панель *а*), пункта 2) — панель *б*) к упр. **2.34**. Соответствующая область закрашена

2.35. *Доказательство.*

Поскольку $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$, то

$$|A \triangle B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| = |A| - |A \cap B| + |B| - |B \cap A| = \\ = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

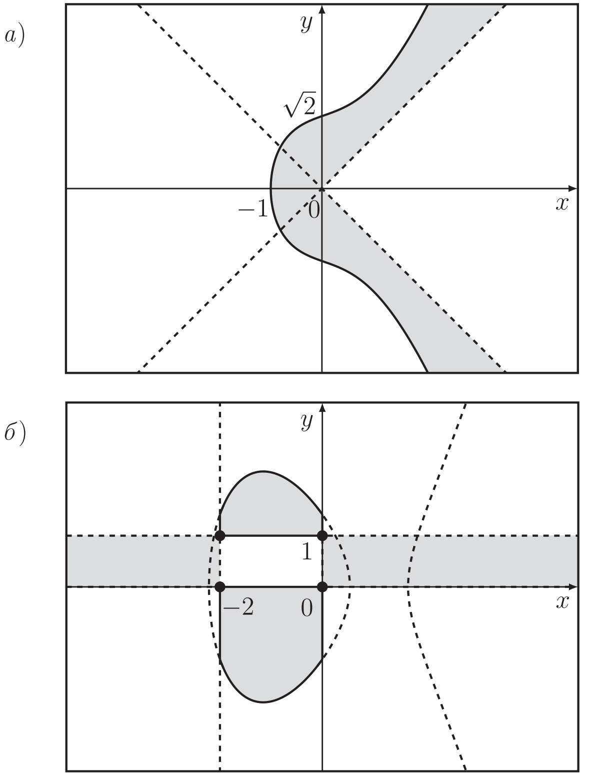


Рис. 2.12. Множество S пункта 3) — панель *а*), пункта 4) — панель *б*) к упр. **2.34**. Соответствующая область закрашена

2.36. *Указание.*

Воспользуйтесь тождеством из предыдущего упражнения и дистрибутивностью операции пересечения множеств относительно операции симметрической разности $(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C)$ [14].

2.37. *Доказательство.*

Для доказательства воспользуемся законом ассоциативности объединения множеств и формулой включений и исключений для двух множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Разложим слагаемое $|(A \cup B) \cap C|$, используя закон дистрибутивности:

$$|(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C)|.$$

Применяя еще раз формулу включений и исключений для двух множеств, получаем:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - \\ &\qquad - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Формула включений и исключений для трех множеств доказана.

2.38. *Решение.*

Обозначим через A множество учеников, посещающих спортивную секцию, через B — множество учеников, увлекающихся авиамоделированием, через C — множество учеников, занимающихся математикой. Применим формулу включений и исключений для трех множеств:

$$\begin{aligned} &|A \cup B \cup C| = \\ &\qquad = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ &\qquad = 13 + 6 + 19 - 2 - 7 - 4 = 25. \end{aligned}$$

Итак, 25 учеников посещают, по крайней мере, один факультатив, следовательно, $29 - 25 = 4$ не интересуются ими вообще.

Подсчитаем количество учеников, посещающих только одно внеклассное мероприятие:

$$|A \cup B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 2\,|A \cap B \cap C| = 25 - 2 - 7 - 4 = 12.$$

Для решения подобных задач удобно пользоваться диаграммой Венна для множеств A, B и C. На каждом из участков диаграммы можно указать число элементов соответствующего множества. Заполнение диаграммы следует начинать с центральной части $A \cap B \cap C$. Затем можно поместить на диаграмму мощности множеств $(A \cup B) \setminus C$, $(A \cup C) \setminus B$ и $(B \cup C) \setminus A$. Далее указать число элементов в множествах $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$ и $C \setminus (A \cup B)$, и, наконец, $U \setminus (A \cup B \cup C)$.

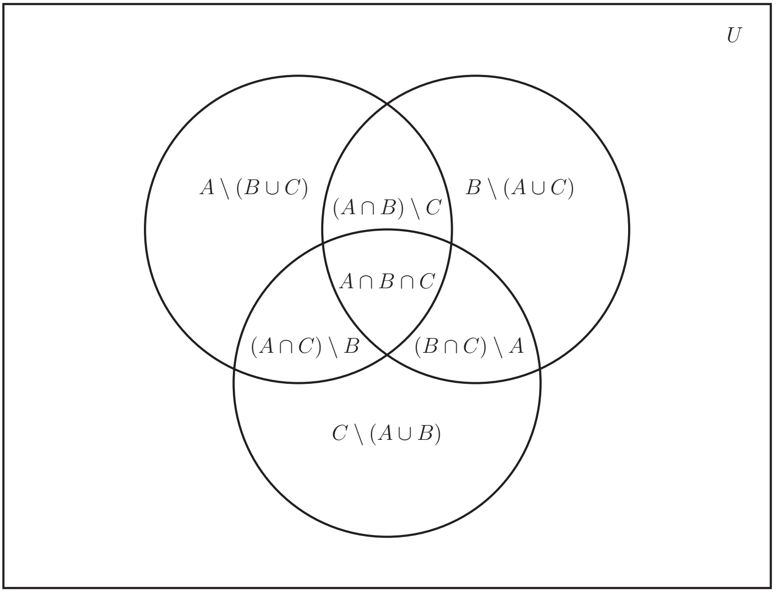


Рис. 2.13. Диаграмма Венна для множеств A, B и C к упр. **2.38**

Согласно условию задачи, $|A \cap B \cap C| = 0$ и $|A \cap B| = 2$. Значит, поскольку $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$, получаем $|(A \cap B) \setminus C| = |(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = 2$. Аналогично имеем: $|(A \cap C) \setminus B| = 7$, $|(B \cap C) \setminus A| = 4$, $|A \setminus (B \cup C)| = 4$, $|B \setminus (A \cup C)| = 0$, $|C \setminus (A \cup B)| = 8$.

Окончательный вид диаграммы Венна приведен на рис. 2.14.

В итоге получаем ответ: 12 учеников посещают только один факультатив, 4 — не интересуются ими вообще.

2.39. *Решение.*

Обозначим через A множество учениц, посещающих дополнительные занятия по вязанию, через B — множество учениц, занимающихся шитьем, через C — множество учениц, увлекающихся вышивкой.

Изобразим соответствующую диаграмму Венна (рис. 2.15).

Получаем, что дополнительные занятия посещают 25 учениц, из них только шитьем занимаются восемь девушек.

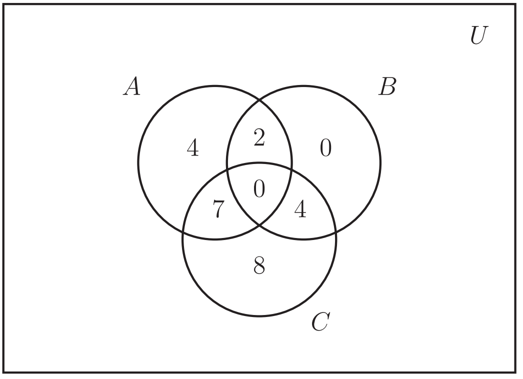


Рис. 2.14. К упр. **2.38**

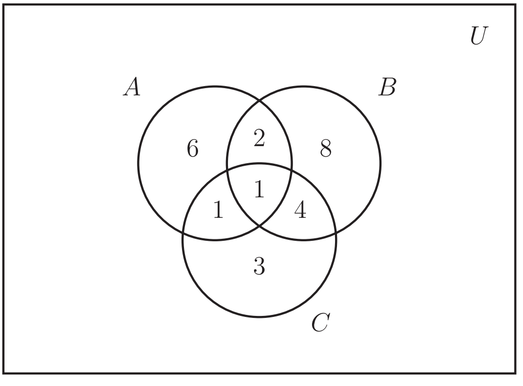


Рис. 2.15. К упр. **2.39**

2.40. *Ответ:* 22 студента.

2.41. *Решение.*

Для вычисления $|(A \triangle B) \cup C|$ воспользуемся формулой включений и исключений для двух множеств:

$$|(A \triangle B) \cup C| = |A \triangle B| + |C| - |(A \triangle B) \cap C| = \\ = |A \triangle B| + |C| - |(A \cap C) \triangle (B \cap C)|.$$

С учетом соотношения из упражнения **2.35** (см. также указание к упражнению **2.36**) имеем:

$$|(A \triangle B) \cup C| = |A| + |B| - 2|A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C|) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 2|A \cap B \cap C|.$$

Подставив численные значения, получим $|(A \triangle B) \cup C| = 25$.

2.42. *Ответ:* $|A \cup (B \triangle C)| = 49$.

2.43. *Ответ:* $|(A \triangle C) \cup B| = 46$.

2.44. *Доказательство.*

Используем метод математической индукции.
Пусть $P(n)$ — утверждение в условии задачи для $n = 1, 2, 3, \ldots$

База индукции

Для $n = 1$ получаем: $|A_1| = \sum\limits_{i=1}^{1} |A_i| = |A_1|$.

Шаг индукции

В качестве индуктивного предположения имеем $P(m)$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$, т. е.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} |A_i \cap A_j| +$$
$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|.$$

Докажем справедливость $P(m+1)$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}| -$$
$$- |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \cap A_{m+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}| -$$
$$- \underbrace{|(A_1 \cap A_{m+1}) \cup (A_2 \cap A_{m+1}) \cup \ldots \cup (A_m \cap A_{m+1})|}_{m \text{ слагаемых}}.$$

Последнее слагаемое можно переписать, воспользовавшись индуктивным предположением. Тогда получим

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}| - \\
&- \Bigg(\sum_{i=1}^{m} |A_i \cap A_{m+1}| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} |(A_i \cap A_{m+1}) \cap (A_j \cap A_{m+1})| + \\
&+ \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{m} |(A_i \cap A_{m+1}) \cap (A_j \cap A_{m+1}) \cap (A_k \cap A_{m+1})| - \ldots + \\
&+ (-1)^{m-1} |(A_1 \cap A_{m+1}) \cap (A_2 \cap A_{m+1}) \cap \ldots \cap (A_m \cap A_{m+1})| \Bigg).
\end{aligned}
$$

Раскроем скобки под знаками сумм:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}| - \\
&- \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} |A_i \cap A_{m+1}| + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_{m+1}| - \ldots + \\
&+ (-1)^m \, |A_1 \cap \ldots \cap A_{m+1}| \, .
\end{aligned}
$$

Применим индуктивное предположение и выразим первое слагаемое $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$ через $|A_i|$:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m+1}| &= \Bigg(\sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} |A_i \cap A_j| + \\
&+ \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m| \Bigg) + \\
&+ |A_{m+1}| - \sum_{i=1}^{m} |A_i \cap A_{m+1}| + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_{m+1}| - \ldots + \\
&+ (-1)^m \, |A_1 \cap \ldots \cap A_{m+1}|.
\end{aligned}
$$

Объединяя в последнем равенстве аналогичные суммы, получаем окончательный результат:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m+1} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{m+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m+1}|.$$

В силу метода математической индукции получаем справедливость формулы включений и исключений для произвольного числа множеств.

Примечание.

Альтернативный способ доказательства приведен в решении упражнения **4.60**.

2.45. *Решение.*

Полагая в формуле включений и исключений для произвольного числа множеств (см. упражнение **2.44**) значение $N = 4$, получаем ответ:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| -$$
$$- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) +$$
$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) -$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

2.46. *Решение.*

Введем обозначения:

A_1 — множество респондентов, отметивших д'Артаньяна;

A_2 — множество респондентов, отметивших Атоса;

A_3 — множество респондентов, отметивших Портоса;

A_4 — множество респондентов, отметивших Арамиса.

Число опрошенных гвардейцев, назвавших хотя бы одного мушкетера, равно мощности объединения множеств $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Восползуемся формулой включений и исключений для четырех множеств (см. упражнение **2.45**):

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \\
&- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + \\
&+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}$$

Определяя значения $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ и т. д. из табл. 2.2, получаем

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\
&= 25 + 12 + 19 + 16 - (7 + 7 + 9 + 5 + 4 + 5) + (2 + 2 + 2 + 2) - 1 = 42.
\end{aligned}$$

Диаграмма Венна приведена на рис. 2.16.

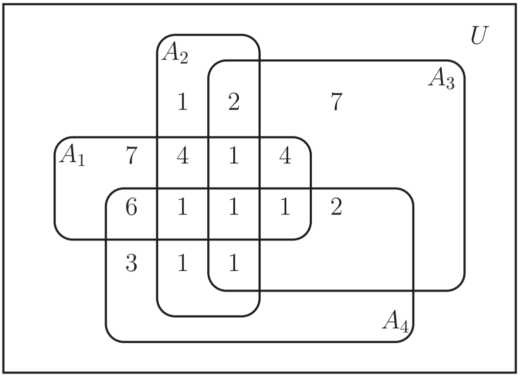


Рис. 2.16. К упр. **2.46**

2.47. *Ответ:* 33 посетителя библиотеки не назвали ни одного поэта.

2.48. *Ответ:*
Мощность, равную $\aleph_0$, имеют множества A_1, A_2 и A_4. Множество A_3 конечно.

2.49. *Доказательство.*
Определим функцию $f(n)$, которая ставит в соответствие каждому элементу множества четных неотрицательных чисел некоторое на-

туральное число $f(n) = n/2 + 1$. Данное соответствие приведено ниже:

$$\begin{aligned} 0 &\longleftrightarrow 1,\\ 2 &\longleftrightarrow 2,\\ 4 &\longleftrightarrow 3,\\ 6 &\longleftrightarrow 4,\\ 8 &\longleftrightarrow 5,\\ &\ldots \end{aligned}$$

Каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ соответствует один и только один элемент множества P, построенное взаимно однозначное соответствие доказывает, что $|P| = \aleph_0$.

2.50. *Указание.*

Расположите элементы множества $\mathbb{Z}$ в виде таблицы и пронумеруйте элементы сверху вниз и слева направо, как показано на следующей схеме.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \ldots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ -1 & & -2 & & -3 & & -4 & & -5 & & -6 & & \ldots \end{array}$$

2.51. *Доказательство.*

Пронумеруем элементы множества B числами $1, 2, \ldots, |B|$. Остальные натуральные числа $|B|, |B|+1, \ldots$ поставим во взаимно однозначное соответствие элементам счетного множества по закону

$$f(n) = n + 1 - |B|, \quad n \geqslant |B|.$$

2.52. *Указание.*

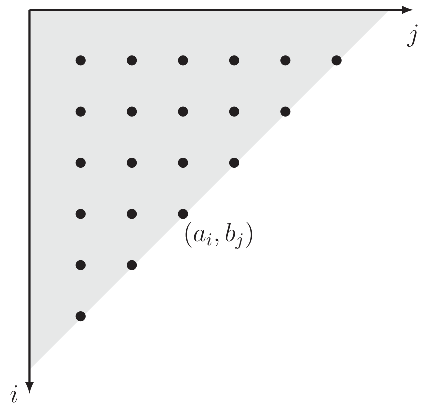
Расположите элементы множества $A \times B$ в виде матрицы

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_1, b_1) & \rightarrow & (a_1, b_2) & & (a_1, b_3) & & (a_1, b_4) & & \cdots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ (a_2, b_1) & & (a_2, b_2) & & (a_2, b_3) & & (a_2, b_4) & & \cdots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ (a_3, b_1) & & (a_3, b_2) & & (a_3, b_3) & & (a_3, b_4) & & \cdots \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

и нумерацию выполните в соответствии с предложенной схемой.

2.53. *Решение.*

Получим формулу для номера, присваиваемого паре (a_i, b_j).



Длины катетов закрашенного прямоугольного треугольника, на гипотенузе которого расположена рассматриваемая пара (a_i, b_j), равны $i + j$. На гипотенузе находятся $i + j - 2$ точек, а всего точек внутри треугольника

$$N(i, j) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (i + j - 2) = \frac{(i + j - 2)(i + j - 1)}{2}.$$

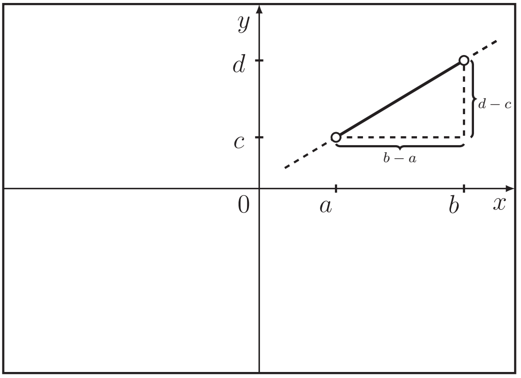
Тогда номер элемента матрицы, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца, определяется по формуле

$$N(i, j) = \frac{1}{2}[(i + j - 2)(i + j - 1)] + i.$$

2.54. *Указание.* Воспользуйтесь методом математической индукции.

2.56. *Решение.*

Взаимно однозначное соответствие между элементами множеств (a, b) и (c, d) задается линейной функцией $f(x) = \dfrac{d - c}{b - a}(x - a) + c$. Графическое представление $f(x)$ изображено на рисунке ниже.



Если положить $c = 0$, $d = 1$, то получим, что

$$|(a, b)| = |(c, d)| = |(0, 1)| = \mathfrak{c}.$$

2.57. *Решение.*
По определению прямого произведения множеств имеем:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\},$$
$$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\}.$$

Выполним операции объединения и пересечения полученных множеств:

$$(A \times B) \cup (B \times A) = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\},$$
$$(A \times B) \cap (B \times A) = \varnothing.$$

2.58. *Ответ:*
$(A \times B) \cup (B \times A) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$,
$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2, 2)\}$.

2.59. *Решение.*
Мощность прямого произведения конечных множеств равна произведению мощностей исходных множеств:

$$|A \times B| = |A| \times |B| = 10 \cdot 3 = 30.$$

2.60. *Ответ:* $|A \times B| = 4 \cdot 21 = 84$.

2.61. *Ответ:* $|A \times B \times C| = 16$.

2.62. *Ответ:* $|A \times B \times C| = 200$.

2.63. *Ответ:* $|A^3| = 729$.

2.64. *Ответ:* $|A^3| = 1000$.

2.65. *Ответ:* не выполняются.

2.66. *Решение.*
Характеристическим вектором множества A является вектор $\mathbf{a} = (1,0,1,1,0,1,0)$. Характеристический вектор множества B равен $\mathbf{b} = (0,1,1,1,1,0,1)$.
Вычислим характеристический вектор множества $\overline{A} \cap B$. Он равен

$$(\textbf{не a})\ \textbf{и b} = (0,1,0,0,1,0,1)\ \ \textbf{и}\ \ (0,1,1,1,1,0,1) = (0,1,0,0,1,0,1)\,.$$

Следовательно, $\overline{A} \cap B = \{3, 9, 13\}$.
Для определения множества $U \setminus (A \vartriangle B)$ сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} U \setminus (A \vartriangle B) &= \overline{(A \vartriangle B)} = \overline{\big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(B \cap \overline{A}\big)} = \\ &= \overline{\big(A \cap \overline{B}\big)} \cap \overline{\big(B \cap \overline{A}\big)} = (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) = \big(\overline{A} \cup B\big) \cap \big(\overline{B} \cup A\big)\,. \end{aligned}$$

Характеристический вектор множества $U \setminus (A \vartriangle B)$ равен

$$\begin{aligned} &((\textbf{не a})\ \textbf{или b})\ \textbf{и}\ ((\textbf{не b})\ \textbf{или a}) = \\ &\qquad = ((\textbf{не}\ (1,0,1,1,0,1,0))\ \textbf{или}\ (0,1,1,1,1,0,1))\ \textbf{и} \\ &\qquad\quad \textbf{и}\ ((\textbf{не}\ (0,1,1,1,1,0,1))\ \textbf{или}\ (1,0,1,1,0,1,0)) = \\ &\qquad = (0,1,1,1,1,0,1)\ \textbf{и}\ (1,0,1,1,0,1,0) = \\ &\qquad = (0,0,1,1,0,0,0). \end{aligned}$$

Таким образом, $U \setminus (A \vartriangle B) = \{5, 7\}$.

2.67. *Ответ:*
$\mathbf{a} = (1,0,1,0,1,0,1,1)$, $\mathbf{b} = (0,0,1,1,0,1,1,0)$,
$\mathbf{a}$ **или** (**не** $\mathbf{b}$) $= (1,1,1,0,1,0,1,1)$, $A \cup \overline{B} = \{1,2,3,5,7,8\}$,
(**не** $\mathbf{a}$) **или** (**не** $\mathbf{b}$) $= (1,1,0,1,1,1,0,1)$,
$U \vartriangle (A \setminus \overline{B}) = \{1,2,4,5,6,8\}$.

2.68. *Ответ:*
$\mathbf{a} = (1,0,0,1,1,1,1,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0,1,1,0,0,1)$,
$\mathbf{a}$ **и** $\mathbf{b} = (0,0,0,1,1,0,0,0)$, $A \setminus \overline{B} = \{8, 10\}$,
(**не** $\mathbf{a}$) **или** $\mathbf{b} = (0,1,1,1,1,0,0,1)$, $U \vartriangle (A \cap \overline{B}) = \{4,6,8,10,16\}$.

Глава 3

Отношения и функции

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется подмножество R прямого произведения $A \times B$. Говорят, что R — **отношение на** A, если $A = B$. Если R — некоторое бинарное отношение, то вместо записи $(x, y) \in R$ часто употребляют обозначение $x\ R\ y$ [4, 61, 78].

Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. **Логическую матрицу** отношения R на $A \times B$ определяют как матрицу M размера $n \cdot m$, элементы которой $M_{ij} = \text{И}$, если $(x_i, y_j) \in R$, и $M_{ij} = \text{Л}$, если $(x_i, y_j) \notin R$.

Бинарное отношение между элементами конечных множеств может быть представлено перечислением упорядоченных пар, при помощи подходящих предикатов, а также в виде логической матрицы или ориентированного графа (орграфа, см. главу «Графы» на стр. 222). Если хотя бы одно из множеств A или B не является конечным, то задать отношение $R \subseteq A \times B$ можно с помощью предикатов.

Пример 3.1. Пусть отношение R между элементами множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$ задано перечислением упорядоченных пар:

$$R = \{(1, b), (2, a), (2, d), (3, b)\}.$$

В этом случае логическая матрица отношения R имеет вид:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Графическое представление отношения R в виде орграфа приведено на рис. 3.1. Вершины орграфа соответствуют элементам каждого из множеств A и B, дуги вида uv соединяют вершины, представляющие компоненты пары $(u, v) \in R$. □

Заметим, что в случае $A = B$ вершины орграфа отношения $R \subseteq A^2$ изображают элементы только одного множества A, т. е. количество вершин орграфа отношения на множестве A равно $|A|$.

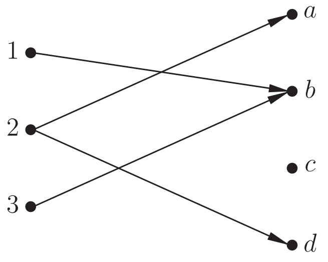


Рис. 3.1. Орграф отношения R из примера 3.1

Отношение R на множестве A называется

рефлексивным, если $\forall x \in A$ справедливо $x\,R\,x$;
симметричным, если $\forall x, y \in A$ $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$;
антисимметричным, если $\forall x, y \in A$ $(x\,R\,y$ **и** $y\,R\,x) \Rightarrow (x = y)$;
транзитивным, если $\forall x, y, z \in A$ $(x\,R\,y$ **и** $y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$.

Замыканием отношения R относительно свойства S принято называть такое отношение R^*, что [106]:

1) R^* обладает свойством S;

2) $R \subset R^*$;

3) R^* является подмножеством любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством S.

Отношением эквивалентности на множестве A называется рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение E. **Классом эквивалентности** элемента $x \in A$ является подмножество $E_x \subseteq E$:

$$E_x = \{z \in A \colon z\,E\,x\}.$$

В том случае если E — отношение эквивалентности на A, то различные классы эквивалентности образуют **разбиение** A. **Разбиением множества** A называют совокупность непустых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в A, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{ и } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

При этом подмножества A_i, где $i = 1, \ldots, n$, называются **блоками** разбиения.

Частичным порядком на множестве A называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение P. **Частично упорядоченное множество** — множество, на котором определено отношение частичного порядка.

Линейным порядком на множестве A называется частичный порядок L, при котором можно сравнить любую пару элементов, иными словами, $\forall x, y \in A\ \ (x\,L\,y)$ **или** $(y\,L\,x)$.

Если P — отношение частичного порядка на множестве A и $x\,P\,y$, причем $x \neq y$, то x называют **предшественником** y и используют обозначение $x \prec y$, в этом случае y — **последующий элемент** для x. Если не существует элемента $z \in A$ такого, что $x\,P\,z$ **и** $z\,P\,y$, то говорят, что x — **непосредственный предшественник** y (обозначается $x \prec\!\!\cdot\; y$). В любом конечном частично упорядоченном множестве можно выделить элемент, не имеющий предшественников (он называется **минимальным**), а также элемент, не имеющий последующих элементов (он называется **максимальным**).

По определению **наименьший** элемент некоторого частично упорядоченного множества P является предшественником всех других элементов данного множества. **Наибольший** элемент множества P является последующим элементом для всех других элементов P.

Диаграмма Ха́ссе[1] представляет собой ориентированный граф, чьи вершины изображают элементы частично упорядоченного множества. Вершина x располагается на один уровень ниже вершины y и соединяется с ней дугой тогда и только тогда, когда $x \prec\!\!\cdot\; y$. На дугах диаграммы Хассе стрелки не изображают.

Рассмотрим некоторое множество A с введенным на нем частичным порядком. Множество $C \subseteq A$ называется **цепью**, если все элементы C попарно сравнимы. Из данного определения следует, что элементы множества C можно линейно упорядочить. В любой конечной цепи найдется и наименьший, и наибольший элемент.

Множество $\widetilde{C} \subseteq A$ называется **антицепью**, если все элементы $\widetilde{C}$ попарно не сравнимы. Под **шириной** конечного частично упорядоченного множества понимают мощность максимальной антицепи в этом множестве.

Теорема Дилуорса[2]. *Минимальное число цепей, на которые можно разбить конечное частично упорядоченное множество, равно ширине этого множества.*

Пример 3.2. Определим минимальное число цепей, разбивающих множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ с введенным на нем отношением частичного порядка P, если логическая матрица отношения P имеет вид:

---

[1] Хассе (Helmut Hasse) (1898–1979).

[2] Дилуорс (Robert Palmer Dilworth) (1914–1993).

$$M_P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Решение.

Составим таблицу с информацией о предшественниках и непосредственных предшественниках элементов множества A (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

Предшественники и непосредственные предшественники элементов отношения $P \subset A^2$

Элемент	Предшественник	Непосредственный предшественник
a_1	нет	нет
a_2	a_1, a_6	a_1, a_6
a_3	a_1, a_2, a_6	a_2
a_4	a_1, a_2, a_3, a_6	a_3
a_5	a_1, a_2, a_3, a_6	a_3
a_6	нет	нет

С помощью табл. 3.1 построим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества A. Заметим, что элементы a_1 и a_6 не имеют предшественников и являются минимальными элементами множества A. Их следует расположить на нижнем уровне диаграммы Хассе. Следующий уровень займет элемент a_2, над ним расположим элемент a_3. Наконец, самый верхний уровень составляют элементы a_4 и a_5, которые являются максимальными элементами множества A.

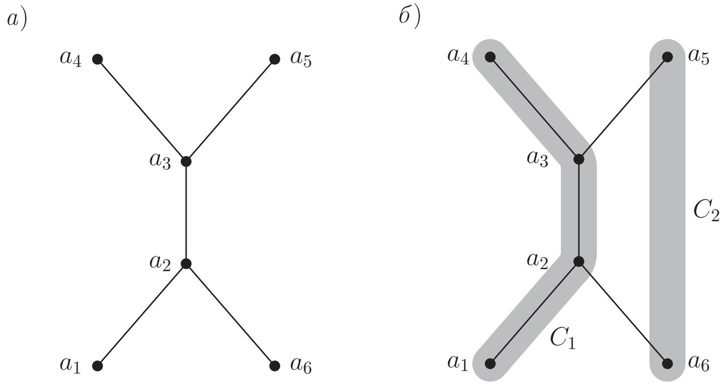


Рис. 3.2. Диаграмма Хассе частично упорядоченного множества A — панель a), разбиение A на цепи C_1 и C_2 — панель *б*)

Окончательно, сформированная диаграмма Хассе представлена на рис. 3.2, a).

Из приведенного рисунка ясно, что каждая антицепь множества A содержит не более двух элементов, следовательно, ширина A равна двум. Согласно теореме Дилуорса, минимальное число цепей, разбивающих рассматриваемое множество, равно двум. Как несложно заметить, цепи $C_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $C_2 = \{a_5, a_6\}$ содержат в совокупности все элементы множества $A = C_1 \cup C_2$, причем $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Разбиение A на цепи схематично изображено на рисунке 3.2, *б*). $\square$

Обратным отношением для отношения R между элементами множеств A и B называют отношение R^{-1} между элементами множеств B и A, которое задается следующим образом: $R^{-1} = \{(b, a)\colon (a, b) \in R\}$.

Пусть R — отношение между элементами множеств A и B, а S — отношение между элементами множества B и некоторого третьего множества C. Тогда **композицией отношений** R и S (от латинского *compōnĕre* — собирать) называется бинарное отношение $S \circ R$ между элементами множеств A и C, вычисляющееся по формуле:

$$S \circ R = \{(a, c)\colon a \in A,\ c \in C \text{ и } a\,R\,b,\ b\,S\,c \text{ для некоторого } b \in B\}.$$

Если отношения R и S заданы в виде логических матриц M_R и M_S соответственно, то логическая матрица композиции отношений R и S равна **логическому произведению** матриц $M_R M_S$ [78].

Функции

Функцией из множества A в множество B называется такое бинарное отношение f на $A \times B$, что для любого $a \in A$ существует единственная пара $(a, b) \in f$, где $b \in B$. Это определение можно представить и в другом виде: функцией из множества A в множество B называется бинарное отношение, при котором каждому элементу из A ставится в соответствие единственный элемент из множества B [4, 61, 78].

Функция из множества A в множество B обозначается $f\colon A \to B$, где множество A называется **областью определения** функции f, B — **областью значений**. Другое обозначение функции: $y = f(x)$, в этой записи $y \in B$ — **значение** функции f, соответствующее аргументу x, или **образ** x при отображении f.

Множеством значений функции f называется множество образов аргументов $x \in A$ в B: $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$.

Рассмотрим произвольное множество $A' \subseteq A$. **Образ множества** A' по определению содержит те и только те элементы $y \in B$, в которые отображаются элементы $x \in A'$:

$$f(A') = \{y \in B\colon\ \exists x\,((x \in A')\ \textbf{и}\ (y = f(x)))\}.$$

Таким образом, множество значений функции — это образ области определения этой функции.

Пусть $f\colon A \to B$ — функция, действующая из множества A в множество B. Для двух множеств A_1 и A_2 таких, что $A_1, A_2 \subseteq A$, справедливы следующие соотношения:

1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
2) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;
3) $(A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subseteq f(A_2))$.

Пример 3.3. Покажем, что образ пересечения двух множеств не обязательно совпадает с пересечением образов этих множеств.

Решение.

Рассмотрим функцию $f\colon A \to B$, определенную на множестве $A = \{-1, 0, 1\}$ и действующую по правилу $f(x) = x^2$.

Тогда для множеств $A_1 = \{-1, 0\} \subset A$ и $A_2 = \{0, 1\} \subset A$ имеем:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\},$$
$$f(A_1) \cap f(A_2) = f(\{-1, 0\}) \cap f(\{0, 1\}) = \{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}.$$

Значит, $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$, но $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. Следовательно, образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов. □

Функция $f\colon A \to B$ называется **инъективной**, или **инъекцией**, если из равенства образов произвольных элементов a_1 и a_2 множества A следует равенство этих элементов между собой, или, в символической записи, $\forall a_1, a_2 \in A\ \ (f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow (a_1 = a_2)$.

Функция $f\colon A \to B$ называется **сюръективной**, или **сюръекцией**, если $f(A) = B$, иначе говоря, если для любого элемента $b \in B$ существует некоторый элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$.

Функцию, являющуюся как инъекцией, так и сюръекцией, называют **биективной** или **биекцией**. Биективная функция устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами области определения и области значений.

Понятия инъективности и сюръективности применяют не только для функций, но и для произвольных отношений [61]. Введенные определения схематично проиллюстрированы на рис. 3.3.

Если обратное отношение к функции f тоже является функцией, то говорят, что функция f **обратима**. Функция $f\colon A \to B$ обратима тогда и только тогда, когда она биективна. Функцию, обратную к f, принято обозначать через $f^{-1} : B \to A$. Если $f(a) = b$, то $f^{-1}(b) = a$.

Композиция функций $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ определяется как

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C\colon\ \exists b \in B,\ b = f(a) \textbf{ и } c = g(b)\}.$$

Композиция двух функций — функция, действующая по правилу

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

К **основным элементарным функциям** относят следующие [42]:

$$\begin{array}{llll} y = x^a, & y = b^x, & y = \log_c x, & \\ y = \sin x, & y = \cos x, & y = \operatorname{tg} x, & y = \operatorname{ctg} x, \\ y = \arcsin x, & y = \arccos x, & y = \operatorname{arctg} x, & y = \operatorname{arcctg} x, \end{array}$$

где a, b, c — const, $b > 0$, $0 < c \neq 1$.

Элементарными функциями называют функции, полученные посредством конечного числа арифметических операций над основными элементарными функциями, а также полученные путем композиции этих функций [58].

Для наглядного представления функциональных зависимостей строят графики функций на координатной плоскости. **Графиком** функции $y = f(x)$ называется множество точек на координатной плоскости (x, y), состоящее из точек с координатами $(x, f(x))$. При построении графика функции $f : A \to B$ область определения A располагают на оси абсцисс, а область значений B — на оси ординат.

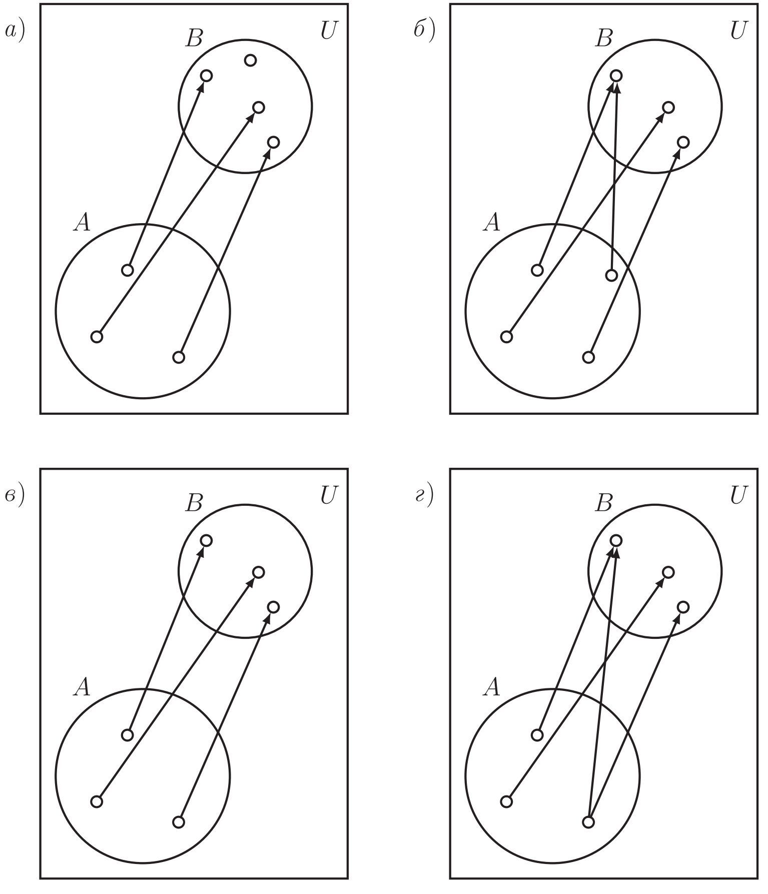


Рис. 3.3. Свойства бинарных отношений между множествами A и B: *а*) инъективное, но не сюръективное; *б*) сюръективное, но не инъективное; *в*) инъективное и сюръективное (биективное); *г*) отношение, но не функция

Пусть имеется график некоторой функции $y = f(x)$, обозначим его через Г. Тогда:

1) график $y = f(x - c)$, где $c > 0$, можно получить сдвигом Г вдоль оси абсцисс на c единиц вправо;

2) график $y = f(x) + d$, где $d > 0$, можно получить сдвигом Г вдоль оси ординат на d единиц вверх;

3) график $y = hf(x)$, где $h > 1$, можно получить растяжением Г вдоль оси ординат в h раз;

4) график $y = f(kx)$, где $k > 1$, можно получить, осуществив сжатие Г вдоль оси абсцисс в k раз;

5) графики $y = -f(x)$ и $y = f(-x)$ можно получить отражением Г относительно оси абсцисс и относительно оси ординат соответственно.

Принцип Дирихле[1]: *пусть $f\colon A \to B$, где A и B — конечные множества, если $|A| > k|B|$ для некоторого натурального k, то функция f будет принимать одинаковые значения, по крайней мере, при $k + 1$ различных аргументах* [4, 77, 78].

Примечание. Названия свойств отношений происходят от латинских слов *reflectere* — обращать назад, *trānsīre* — переходить. Слово «функция» происходит от латинского *fūnctio* — исполнение, совершение [27]. Термины *injection*, *surjection* и *bijection* предложены Бурбакѝ[2].

[1] Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) (1805–1859).

[2] Бурбаки (Nicolas Bourbaki) — коллективный псевдоним группы математиков.

Контрольные вопросы к главе «Отношения и функции»

1. Дайте определение бинарного отношения.
2. Какими способами можно задать отношение?
3. Какое отношение называется рефлексивным? Симметричным? Антисимметричным? Транзитивным?
4. Что такое замыкание отношения относительно какого-либо свойства?
5. Какое отношение называется отношением эквивалентности?
6. Дайте определение частично упорядоченного множества.
7. Для чего используют диаграмму Хассе?
8. Какое множество называют цепью? Антицепью?
9. Сформулируйте теорему Дилуорса.
10. Как определяется обратное отношение?
11. Что такое композиция отношений?
12. Дайте определение понятию функции.
13. Какие функции относят к инъективным? Сюръективным? Биективным?
14. Перечислите основные элементарные функции.
15. Для чего строят график функции?
16. Сформулируйте принцип Дирихле.

Задачи к главе «Отношения и функции»

3.1. Выпишите множество упорядоченных пар и начертите ориентированный граф отношения между элементами множеств $\{a, b, c\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$, заданного логической матрицей:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.2. Выпишите множество упорядоченных пар и начертите ориентированный граф отношения между элементами множеств $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{a, b, c\}$, заданного логической матрицей:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.3. Выпишите множество упорядоченных пар и начертите ориентированный граф отношения между элементами множеств $\{a, b, c, d\}$ и $\{1, 2, 3\}$, заданного логической матрицей:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.4. Выпишите множество упорядоченных пар и начертите ориентированный граф отношения между элементами множеств $\{1, 2, 3\}$ и $\{a, b, c, d\}$, заданного логической матрицей:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} \end{array}.$$

3.5. Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

1) $R = \{(n, m)\colon 3n + m = 16\}$;

2) $S = \{(n, m)\colon n + 2m < 7\}$.

3.6. Для каждого из следующих отношений на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

1) $R = \{(n, m)\colon n + 2m = 10\}$;

2) $S = \{(n, m)\colon 3n + m < 9\}$.

3.7. Для каждого из следующих отношений на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ опишите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям:

1) $R = \{(n, m) \colon 3n + 2m = 30\}$;

2) $S = \{(n, m) \colon n + 3m < 5\}$.

3.8. Пусть R — отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, определяемое условием: $n\,R\,m$ тогда и только тогда, когда $2n + m$ — четное число. Представьте R каждым из способов:

1) как множество упорядоченных пар;

2) в графической форме;

3) в виде логической матрицы.

3.9. Пусть R — отношение на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, определяемое условием: $n\,R\,m$ тогда и только тогда, когда $2n + m < 8$. Представьте R каждым из способов:

1) как множество упорядоченных пар;

2) в графической форме;

3) в виде логической матрицы.

3.10. Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

1) «...живет в том же населенном пункте, что и...»;

2) «...тяжелее или легче, чем...»;

3) «...не старше, чем...»;

4) «...приходится невесткой...».

3.11. Определите, какие из следующих отношений на множестве людей рефлексивны, симметричны или транзитивны:

1) «...выше или ниже, чем ...»;

2) «...приходится родственником...»;

3) «...приходится сестрой...»;

4) «...живет в том же доме, что и...».

3.12. Определите, какие из приведенных ниже отношений на $\mathbb{Z}$ являются рефлексивными, симметричными, а какие транзитивными:

1) «$n + 2m$ — нечетное число»;

2) «$n \cdot m$ — четное число».

3.13. Определите, какие из приведенных ниже отношений на $\mathbb{Z}$ являются рефлексивными, симметричными, а какие транзитивными:

1) «$n + 2m$ — четное число»;

2) «$n^2 + m$ — четное число».

3.14. Является ли отношение S рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, если:

1) $S = \{(x, y)\colon xy > 0,\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$;

2) $S = \{(x, y)\colon x + y = 0,\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$;

3) $S = \{(n, m)\colon n + m = 2,\ \ n, m \in \mathbb{Z}\}$;

4) $S = \{(n, m)\colon n \neq m + 1,\ \ n, m \in \mathbb{Z}\}$?

$*$3.15. Рассмотрим множество $A = \{a, b, c, d, e\}$. Приведите пример бинарного отношения на A, если это возможно, которое:

1) рефлексивно, но не является ни симметричным, ни транзитивным;
2) симметрично, но не является ни рефлексивным, ни транзитивным;
3) транзитивно, но не является ни рефлексивным, ни симметричным;
4) рефлексивно и симметрично, но не является транзитивным;
5) симметрично и транзитивно, но не является рефлексивным;
6) рефлексивно и транзитивно, но не является симметричным;
7) не симметрично и не антисимметрично;
8) симметрично и антисимметрично.

$*$3.16. На экзамене по курсу дискретной математики и математической логики студент утверждает, что никакое антисимметричное отношение не обладает свойством симметричности. Прав ли он?

$*$3.17. На экзамене по курсу дискретной математики и математической логики студент утверждает, что всякое симметричное и транзитивное отношение рефлексивно, и приводит такое «доказательство» [2]: «Предположим, что R — симметричное и транзитивное отношение на X. Покажем, что $a\,R\,a$ для $a \in X$. Возьмем произвольное b, такое, что $a\,R\,b$. Из симметричности получаем $b\,R\,a$. Теперь из транзитивности $a\,R\,a$».

Поясните, какая ошибка имеется в этом рассуждении.

3.18. Найдите замыкания относительно рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения

$$\{(a,a),(a,c),(a,g),(c,e),(e,a),(e,g),(g,c),(g,g)\},$$

заданного на множестве $A = \{a, c, e, g\}$.

3.19. Найдите замыкания относительно рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения

$$\{(k,n),(l,k),(l,m),(m,l),(m,m),(n,k),(n,m),(n,n)\},$$

заданного на множестве $A = \{k, l, m, n\}$.

3.20. Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям, заданным на множестве $\{n\colon\ n \in \mathbb{Z}\ \ \textbf{и}\ \ 1 \leqslant n \leqslant 10\}$:

1) $R = \{(n,m)\colon nm = 30\}$;
2) $S = \{(n,m)\colon 2n + m = 10\}$;
3) замыкание R относительно симметричности;
4) замыкание S относительно транзитивности.

3.21. Перечислите упорядоченные пары, принадлежащие отношениям, заданным на множестве $\{n\colon\ n \in \mathbb{Z}\ \ \textbf{и}\ \ 1 \leqslant n \leqslant 12\}$:

1) $R = \{(n,m)\colon nm = 12\}$;
2) $S = \{(n,m)\colon n + 2m = 10\}$;
3) замыкание R относительно транзитивности;
4) замыкание S относительно симметричности.

3.22. На экзамене по курсу дискретной математики студент утверждает, что если R_1 и R_2 являются транзитивными отношениями на некотором множестве A, то объединение этих отношений $R_1 \cup R_2$ также обладает свойством транзитивности. Прав ли студент?

3.23. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве A опишите блоки, на которые разбивается множество A:

1) A — месяцы года, а R определяется условием: $x\,R\,y$, если и только если время года x совпадает со временем года y;
2) A — множество людей, а R определяется условием: $x\,R\,y$ тогда и только тогда, когда x имеет тот же знак зодиака, что и y.

3.24. Для каждого из следующих отношений эквивалентности на данном множестве A опишите блоки, на которые разбивается множество A:

1) $A = \mathbb{Z}$, R задается условием: $x\,R\,y$ тогда и только тогда, когда $x + y$ — четное число;
2) $A = \mathbb{R}^3$, R задается правилом: $(x, y, z)\,R\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ в том случае, если и только если $x^2 + y^2 + z^2 = \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2$.

3.25. Нарисуйте диаграмму Хассе для следующего частично упорядоченного множества:

$\{n\colon\ 1 \leqslant n \leqslant 20$ **и** n кратно $2\}$ с отношением «n делит m».

3.26. Нарисуйте диаграмму Хассе для следующего частично упорядоченного множества:

$\{n\colon\ 1 \leqslant n \leqslant 30$ **и** n кратно $3\}$ с отношением «n делит m».

3.27. Нарисуйте диаграмму Хассе для следующих частично упорядоченных множеств:

1) множество всех подмножеств в $\{a,\ b,\ c\}$ с отношением «X — подмножество Y»;
2) множество всех подмножеств в $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ с отношением «X — подмножество Y».

3.28. Постройте диаграмму Хассе для частично упорядоченного множества $A = \{a, b, c, d\}$ с отношением частичного порядка $P = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$. Есть ли в этом множестве максимальные и минимальные элементы? Можно ли в A указать наибольший элемент и наименьший элемент?

3.29. Постройте диаграмму Хассе для частично упорядоченного множества $A = \{a, b, c, d\}$ с отношением частичного порядка $P = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$. Укажите максимальный элемент и минимальный элемент. Можно ли в этом множестве указать наибольший элемент и наименьший элемент?

3.30. Верно ли, что если отношение частичного порядка на некотором множестве содержит как наибольший, так и наименьший элемент, то это будет отношением линейного порядка?

3.31. Приведите пример отношения частичного порядка, в котором есть ровно один максимальный элемент, но нет наибольшего.

3.32. Пусть R — отношение между множествами $\{1,\ 2\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(1,2),(1,4),(1,5),(2,3),(2,5)\}$, а S — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и $\{1,\ 2,\ 3\}$, состоящее из пар: $S = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,3),(5,2)\}$. Вычислите $S \circ R$ и $(S \circ R)^{-1}$.

3.33. Пусть R — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и $\{1,\ 2\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(2,1),(3,2),(4,1),(5,1),(5,2)\}$, а S — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и $\{1,\ 2,\ 3\}$, состоящее из пар: $S = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,3),(5,2)\}$. Вычислите R^{-1} и $S \circ R^{-1}$.

3.34. Пусть R — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(3,4)\}$, а S — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и $\{1,2\}$, состоящее из пар: $S = \{(1,1),(2,2),(3,2),(4,1),(4,2)\}$. Вычислите $S \circ R$ и R^{-1}.

3.35. Пусть R — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(3,4)\}$, а S — отношение между множествами $\{1,\ 2\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, состоящее из пар: $S = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$. Вычислите R^{-1} и $R^{-1} \circ S$.

3.36. Пусть R — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(1,1),(2,3),(2,4),(3,2),(3,5)\}$, а S — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, состоящее из пар: $S = \{(1,2),(1,3),(2,2),(4,1),(4,4)\}$. Вычислите S^{-1} и $S \circ R$.

3.37. Пусть R — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, заданное перечислением пар: $R = \{(1,1),(2,3),(2,4),(3,2),(3,5)\}$, а S — отношение между множествами $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, состоящее из пар: $S = \{(1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1),\ (4,4)\}$. Вычислите S^{-1} и $S^{-1} \circ R$.

3.38. Пусть R — отношение «...брат...», а S — отношение «...муж...» на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание отношениям R^{-1}, S^{-1} и $S^{-1} \circ R$.

3.39. Пусть R — отношение «...брат...», а S — отношение «...муж...» на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание отношениям $R \circ S^{-1}$ и $S \circ R$.

3.40. Пусть R — отношение «...сестра...», а S — отношение «...муж...» на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание отношениям R^{-1} и $S^{-1} \circ R$.

3.41. Обозначим через R отношение «...родитель...», а через S — отношение «...муж...» на множестве всех людей. Дайте краткое словесное описание следующим отношениям: R^{-1}, S^{-1}, $S \circ R$ и $S^{-1} \circ R$.

3.42. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$. Найдите $T_2 \circ T_2$, $(T_2 \circ T_1)^{-1}$, $(T_1^{-1} \circ T_2^{-1})$, если:

1) $T_1 = \{(1, x), (1, y), (2, x), (3, z)\}$, $T_2 = \{(x, x), (y, x), (z, z)\}$;

2) $T_1 = \{(1, x), (1, y), (2, x), (3, z)\}$,
$T_2 = \{(x, y), (x, z), (y, x), (y, z), (z, x), (z, y)\}$.

3.43. Отношения R и S заданы логическими матрицами M_R и M_S соответственно, где

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_S = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

Запишите логическую матрицу отношения $S \circ R$.

3.44. Отношения R и S заданы логическими матрицами M_R и M_S соответственно, где

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_S = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

Запишите логическую матрицу отношения $S \circ R$.

3.45. Отношения R и S заданы логическими матрицами M_R и M_S соответственно, где

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_S = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Запишите логическую матрицу отношения $S \circ R$.

3.46. Пусть бинарное отношение R задано логической матрицей M_R. Выразите логическую матрицу отношения R^{-1} через M_R.

3.47. Бинарные отношения R, S и T заданы логическими матрицами M_R, M_S и M_T соответственно, где

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_T = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

Покажите, что логические матрицы отношений $R^{-1} \circ S \circ T^{-1}$ и $(T \circ S^{-1} \circ R)^{-1}$ совпадают.

3.48. Бинарные отношения R, S и T заданы логическими матрицами M_R, M_S и M_T соответственно, где

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad M_T = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

Запишите логическую матрицу следующего отношения:

$$Q = S \circ T \circ R^{-1} \circ S^{-1} \circ T^{-1}.$$

3.49. Пусть R_1 и R_2 являются рефлексивными отношениями на множестве A. Верно ли, что композиция $R_1 \circ R_2$ этих отношений также обладает свойством рефлексивности?

3.50. Пусть R_1 и R_2 являются симметричными отношениями на множестве A. Верно ли, что композиция $R_1 \circ R_2$ этих отношений также обладает свойством симметричности?

3.51. Пусть R_1 и R_2 являются антисимметричными отношениями на множестве A. Верно ли, что композиция $R_1 \circ R_2$ этих отношений также обладает свойством антисимметричности?

3.52. Пусть R_1 и R_2 являются транзитивными отношениями на множестве A. Верно ли, что композиция $R_1 \circ R_2$ этих отношений также обладает свойством транзитивности?

3.53. Определим **n-ю степень отношения** R как $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ раз}}$.

Верно ли, что если R является симметричным бинарным отношением на множестве A, то отношение R^n для $n \geqslant 1$ тоже симметрично?

3.54. Для отношения $R = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$, определенного на множестве $A = \{a, b, c, d\}$, вычислите $R^3 \vartriangle R^5$.

3.55. Для отношения

$$S = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, e), (c, b), (c, e), (d, d), (d, e), (e, b)\},$$

определенного на множестве $M = \{a, b, c, d, e\}$, вычислите $S^{-1} \vartriangle S^4$.

3.56. Проверьте выполнение теоремы Дилуорса для каждого из следующих частично упорядоченных множеств:

1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ с отношением

$$R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4)\};$$

2) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ с отношением

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_4)\};$$

3) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ с отношением

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_1, a_5), (a_1, a_6), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_3), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_3), (a_5, a_5), (a_6, a_3), (a_6, a_6)\};$$

4) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$ с отношением

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3), (a_5, a_4), (a_5, a_5)\}.$$

3.57. Проверьте выполнение теоремы Дилуорса для каждого из следующих частично упорядоченных множеств:

1) множество всех подмножеств в $\{a_1, a_2, a_3\}$ с отношением «X — подмножество Y»;

2) множество всех подмножеств в $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ с отношением «X — подмножество Y».

∗3.58. Используя метод математической индукции, докажите теорему Дилуорса (см. стр. 136).

3.59. Определите минимальное число попарно непересекающихся цепей, содержащих все элементы частично упорядоченного множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ с отношением R, логическая матрица которого равна

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} \end{array}.$$

$*$3.60. Докажите утверждение, двойственное к теореме Дилуорса: минимальное число антицепей, разбивающих конечное частично упорядоченное множество, равно мощности максимальной цепи в этом множестве.

$*$3.61. В штате компьютерной фирмы состоят 17 программистов. Про каждого из них известен стаж работы в данной фирме (s) и общий стаж работы в сфере информационных технологий (σ). Покажите, что существует такая последовательность пяти сотрудников, для которых для которых s либо увеличивается с ростом σ, либо уменьшается с ростом σ.

3.62. Пусть $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ и $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B:

1) $\{(a,4),(b,2),(b,4),(c,3),(d,1)\}$;
2) $\{(a,2),(b,1),(c,3),(d,4)\}$;
3) $\{(a,3),(b,1),(d,2)\}$;
4) $\{(a,1),(b,3),(c,4),(d,1)\}$?

Какие из этих функций инъективны, а какие сюръективны?

3.63. Пусть $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и $B = \{a,\ b,\ c,\ d\}$. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B:

1) $\{(4,b),(1,c),(2,a),(3,d)\}$;
2) $\{(2,d),(4,a),(3,c),(1,a)\}$;
3) $\{(3,a),(2,b),(1,c),(2,a),(4,d)\}$;
4) $\{(1,d),(4,a),(2,c)\}$?

Какие из этих функций инъективны, а какие сюръективны?

3.64. Пусть $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ и $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами A и B являются функциями, определенными на A со значениями в B:

1) $\{(a,1),(b,3),(c,1),(d,4)\}$;
2) $\{(a,3),(b,4),(d,1)\}$;
3) $\{(a,3),(b,2),(c,4),(d,1)\}$;
4) $\{(a,1),(b,2),(c,1),(c,4),(d,3)\}$?

Какие из этих функций инъективны, а какие сюръективны?

3.65. Для каждой из следующих функций, действующих из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, установите, являются ли они инъекциями, сюръекциями или биекциями:

1) $f(n) = -n$;

2) $\operatorname{sign}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n > 0, \\ 0, & \text{если } n = 0, \\ -1, & \text{если } n < 0. \end{cases}$

3.66. Для каждой из следующих функций, действующих из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, укажите, являются ли они инъекциями, сюръекциями или биекциями:

1) $f(n) = 3n - 2$;

2) $g(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & \text{если } n \text{ четно}, \\ 3n, & \text{если } n \text{ нечетно}; \end{cases}$

3) $h(n) = 1 - n^2$.

3.67. Для каждой из следующих функций, действующих из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, укажите, являются ли они инъекциями, сюръекциями или биекциями:

1) $h_1(n) = n - 6$;

2) $h_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{если } n \text{ кратно } 3, \\ 3n, & \text{если } n \text{ не кратно } 3; \end{cases}$

3) $h_3(n) = 1 - n^3$.

3.68. Изобразите графики функций:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$;

2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 6 - 2x, & \text{если } x \geqslant 1, \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

Определите множества значений и укажите, какие из функций инъективны, а какие сюръективны.

3.69. Функция $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задана как сумма квадратов десятичных цифр значения аргумента. Например, для $n = 124$ имеем $s(124) = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$. Определите, является ли функция $s(n)$ инъективной? Сюръективной? Биективной?

3.70. Функция $r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ определена согласно правилу

$$r(x, y) = (x + y, x - y).$$

Является ли функция $r(x, y)$ биективной?

3.71. Функция $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ определена согласно правилу

$$g(x, y, z) = (x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2,\ x^3 + y^3 + z^3).$$

Является ли функция $g(x, y, z)$ биективной?

3.72. Перечислите, какие из следующих функций обладают свойством биективности:

1) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ h(x, y) = (x + e^x, y + e^y)$;
2) $s\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^3,\ \ s(x, y, z) = (z, x, y)$;
3) $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ q(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$;
4) $t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ t(x, y, z) = (y^5, x^5, z^5)$.

3.73. **Модуль** (или **абсолютная величина**) вещественного числа $|x|$ определяется как само число x, если $x \geqslant 0$, и $-x$ при $x < 0$. Докажите, что для вещественных x, y

1) $\sqrt{x^2} = |x|$;
2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

3.74. Является ли функция $|x|$ элементарной?

3.75. Докажите неравенство, верное для всех вещественных чисел a и b:

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

3.76. Выразите максимум и минимум двух вещественных чисел a и b

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant b, \\ b, & \text{если } a < b; \end{cases}$$

$$\min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{если } a \leqslant b, \\ b, & \text{если } a > b; \end{cases}$$

через модуль их разности.

3.77. Докажите, что для произвольных вещественных чисел a и b выполняются соотношения:

1) $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$;
2) $\max(a, b) - \min(a, b) = |a - b|$.

3.78. Выразите модуль вещественного числа a через:

1) операцию max;

2) операцию min.

$*$**3.79.** Докажите неравенство

$$|\min(A, B) - \min(A', B')| \leqslant \max(|A - A'|, |B - B'|), \qquad (*)$$

справедливое для произвольных $A, A', B, B' \in \mathbb{R}$.

3.80. Изобразите графики функций:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2^x;$

2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x - |x|.$

Укажите множество значений каждой из них и скажите, какие из этих функций инъективны, а какие сюръективны.

3.81. Изобразите графики функций:

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3;$

2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \geqslant 3, \\ 2x - 3, & \text{если } x < 3. \end{cases}$

Укажите множество значений каждой из них и скажите, какие из этих функций инъективны, а какие сюръективны.

3.82. Постройте графики основных тригонометрических функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

3.83. Постройте графики следующих функций:

1) $f_1(x) = 2\sin x + 1;$

2) $f_2(x) = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2};$

3) $f_3(x) = \sin(2x);$

4) $f_4(x) = \operatorname{tg}(x/2 - \pi/2) + 1.$

$*$**3.84.** Постройте графики функций

1) $f_1(x) = \sin(3\arcsin(x));$

2) $f_2(x) = \cos(3\arccos(x)).$

∗3.85. Постройте графики функций

1) $f_1(x) = \cos(4\arccos(x))$;

2) $f_2(x) = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(x))$.

3.86. Приведите несколько примеров (если возможно) функций $f\colon [0,1] \to \to [0,1]$, которые:

1) инъективны и сюръективны;
2) инъективны, но не сюръективны;
3) сюръективны, но не инъективны;
4) не инъективны и не сюръективны.

3.87. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана формулой: $f(x) = 2x - 5$. Покажите, что f биективна, и найдите обратную к ней функцию.

3.88. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана формулой: $f(x) = \dfrac{x}{3} + 2$.

Покажите, что f биективна, и найдите обратную к ней функцию.

3.89. Функция $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ задана формулой: $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2$. Покажите, что f биективна, и найдите обратную к ней функцию.

∗3.90. Установите биекцию между множествами:

1) $[0,1]$ и $[a,b]$, где a, b — const;
2) $(0,1)$ и $\mathbb{R}$.

3.91. Функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданы следующими правилами:

$$f(x) = (x+2)^2 \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{если } x \geqslant 1, \\ -x - 1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Выразите формулами композиции $f \circ g$ и $g \circ g$.

3.92. Функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданы следующими правилами:

$$f(x) = (x-1)^2 \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{если } x \geqslant 1, \\ -x - 1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Выразите формулами композиции $f \circ f$ и $g \circ f$.

3.93. Функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданы следующими правилами:

$$f(x) = x^3 \;\text{ и }\; g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Выразите формулами композиции $f \circ f$ и $g \circ g$.

3.94. Функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданы следующими правилами:

$$f(x) = x^3 \;\text{ и }\; g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Выразите формулами композиции $f \circ g$ и $g \circ f$.

∗3.95. Рассмотрим множество $\mathcal{L}$ всех логических функций натурального аргумента вида $l\colon \mathbb{N} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$. Определите, счетным или несчетным является множество $\mathcal{L}$.

3.96. **Целая часть** вещественного числа x — функция, определяемая как наибольшее целое, меньшее или равное x:

$$\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad \lfloor x\rfloor = \max(n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x).$$

Целая часть числа называется также «**полом**». Аналогично определяется функция «**потолок**» — наименьшее целое, большее или равное x:

$$\lceil\cdot\rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad \lceil x\rceil = \min(n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant x).$$

В зарубежной литературе для $\lfloor x\rfloor$ и $\lceil x\rceil$ применяются термины **floor function** и **ceiling function** соответственно.

Докажите следующие свойства рассмотренных функций для $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$:

1) $\lfloor x + n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n,\ \lceil x + n\rceil = \lceil x\rceil + n$;
2) $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil = n$;
3) $\lfloor -x\rfloor = -\lceil x\rceil,\ \lceil -x\rceil = -\lfloor x\rfloor$;
4) $\lceil \log_2(n + 1)\rceil = \lfloor \log_2 n\rfloor + 1, \quad n \geqslant 1$.

3.97. Определите значения выражений:

1) $\lceil -\lfloor 2\rfloor\rceil$;
2) $\lfloor\lceil 5/2\rceil + 1\rfloor$;
3) $\lfloor -\lfloor 5/2\rfloor \cdot \lceil 5/2\rceil\rfloor$;
4) $\lfloor\lceil\lfloor 7/8\rfloor/8\rceil - 1\rfloor$.

3.98. Определите значения выражений:

1) $\lfloor\sqrt{\pi}\rfloor$;
2) $-\lfloor-\sqrt{\pi}\rfloor$;
3) $-\lfloor-\pi\rfloor - \lceil-\pi\rceil$;
4) $\lceil-\lfloor\pi\cdot\lfloor-\pi\rfloor\rfloor\rceil$.

3.99. Изобразите графики функций «пол» и «потолок», определенных на множестве вещественных чисел (см. упражнение **3.96**). Являются ли рассматриваемые функции инъективными, сюръективными, биективными?

3.100. Пусть заданы натуральные числа p и n. Докажите, что количество натуральных чисел, делящихся на p и не превосходящих n, равно $\left\lfloor\dfrac{n}{p}\right\rfloor$.

3.101. Определите количество натуральных чисел, не превосходящих 100, которые делятся или на 3, или на 5, или на 11.

3.102. Определите количество натуральных чисел, не превосходящих 2^{20}, которые

1) делятся или на 3, или на 4, или на 5;
2) делятся или на 3, или на 4, но не делятся на 5;
3) делятся на 3, но не делятся ни на 4, ни на 5;
4) не делятся ни на одно из чисел 3, 4, 5.

3.103. Найдите количество целых положительных чисел, не превосходящих 1024 и делящихся или на 3, или на 5, или на 7, или на 17.

∗3.104. Найдите количество целых положительных чисел, не превосходящих 1024, которые не делятся ни на одно из чисел 6, 10 и 15, но делятся на 28.

∗3.105. Определите количество целых чисел, принадлежащих каждому из следующих множеств:

1) (x_1, x_2);
2) $[x_1, x_2]$,

где x_1, x_2 — вещественные числа, $x_1 < x_2$.

3.106. Согласно **формуле Лежандра**[1] [86], в разложении числа $n!$ на простые сомножители произвольное простое число p входит с показателем

$$e = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots,$$

где количество ненулевых слагаемых в сумме равно $\lfloor \log_p n \rfloor$.

Пользуясь формулой Лежандра, определите, сколько нулей находится в конце десятичной записи числа 100!.

3.107. Определите, сколько нулей имеется в конце десятичной записи числа 700!.

3.108. Найдите наименьшее число n такое, чтобы в конце десятичной записи $n!$ находилось 257 нулей.

$*$**3.109.** Докажите, что число $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ является целым для всех $n \geqslant 0$.

3.110. Сколько абитуриентов должно поступить на один факультет, чтобы

1) по крайней мере, у двоих из них день рождения совпадал;
2) 25 из них родились в одном месяце.

3.111. Сколько раз нужно бросить три игральные кости, чтобы с гарантией можно было утверждать: сумма выпавших очков появится, по крайней мере, дважды?

3.112. Сколько фильмов должно быть в бюро видеопроката, чтобы названия каких-либо четырех фильмов начинались с одной и той же буквы?

3.113. Пусть $U = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Какое наименьшее количество нечетных чисел необходимо взять из множества U, чтобы, по крайней мере, два из них в сумме дали 20?

3.114. Пусть $U = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Какое наименьшее количество четных чисел необходимо взять из множества U, чтобы с гарантией можно было утверждать, что разность двух из них равна 8?

3.115. Отчет метеорологической службы содержит информацию о том, была ли погода в конкретные дни солнечной или пасмурной. Каждому дню соответствует один из двух вариантов погодных условий. Будем считать характеристики погоды в определенные две недели одинаковыми, если количество солнечных и пасмурных дней в них

[1] Лежандр (Adrien-Marie Legendre) (1752–1833).

совпадает. Вычислите длительность периода, в котором обязательно найдется не менее трех недель с одинаковыми погодными условиями.

3.116. Отчет метеорологической службы содержит информацию о том, была ли погода в конкретные дни солнечной или пасмурной. Каждому дню соответствует один из двух вариантов погодных условий. Будем считать характеристики погоды в определенные две недели одинаковыми, если погода в каждый день одной недели совпадает с погодой в соответствующий день другой недели. Вычислите длительность периода, в котором обязательно найдется не менее четырех недель с одинаковыми погодными условиями.

Ответы, указания, решения к главе «Отношения и функции»

3.1. *Ответ:*

Множество упорядоченных пар: $R = \{(a,1),(a,3),(b,2),(c,3),(c,4)\}$. Графическая форма отношения представлена на рис. 3.4.

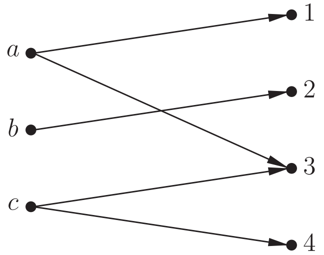


Рис. 3.4. К упр. **3.1**

3.5. *Решение.*

1) Отношению R принадлежат такие пары натуральных чисел (n,m), для которых выполняется условие $3n+m = 16$ или $m = 16-3n$. Полагая $n = 1$, $n = 2$, $\ldots$, $n = 5$, получаем соответствующие значения m. Для $n > 5$ таких натуральных m не существует. Выписываем ответ:

$R = \{(1,13),(2,10),(3,7),(4,4),(5,1)\}$.

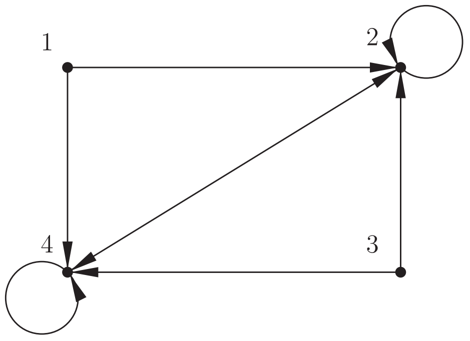


Рис. 3.5. К упр. **3.8**

2) Аналогично пункту 1) имеем:
$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$.

3.6. *Ответ:*
1) $R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$;
2) $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2)\}$.

3.7. *Ответ:*
1) $R = \{(0,15), (2,12), (4,9), (6,6), (8,3), (10,0)\}$;
2) $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (3,0)\}$.

3.8. *Ответ:*
1) Множество упорядоченных пар:
$R = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)\}$.
2) Графическая форма отношения представлена на рис. 3.5.
3) Матрица отношения R имеет вид:

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

3.10. *Ответ:*
Воспользуемся определениями рефлексивных, симметричных и транзитивных отношений:
1) рефлексивно, симметрично и транзитивно;
2) не рефлексивно, симметрично и не транзитивно;
3) рефлексивно, не симметрично и транзитивно;

4) не рефлексивно, не симметрично и не транзитивно.

3.12. *Решение.*

1) Отношение не рефлексивно, так как число $n + 2n = 3n$ будет четным, только если n четное число. Оно не симметрично, потому что сумма $n+2m$ — число нечетное только в том случае, когда n нечетно, m при этом может быть как четным, так и нечетным, сумма же $m+2n$ будет нечетной только при нечетном m. Транзитивность данного отношения следует из того, что суммы $n + 2m$ и $m + 2l$ будут нечетными, только если n и m нечетны, при этом сумма $n + 2l$ окажется нечетной.

2) Это отношение симметрично ввиду коммутативности произведения: $nm = mn$. Оно не рефлексивно, поскольку n^2 четно только при четном n, и не транзитивно, так как при нечетных n, l и четном m произведения nm и ml четны, а nl — нечетно.

3.13. *Ответ:*

1) не рефлексивно, не симметрично, транзитивно;

2) рефлексивно, симметрично и транзитивно.

3.14. *Ответ:*

1) не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно;

2) не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно;

3) не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно;

4) рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

3.16. *Ответ:* нет.

3.18. *Решение.*

Пусть $R = \{(a,a),(a,c),(a,g),(c,e),(e,a),(e,g),(g,c),(g,g)\}$.

Рефлексивным замыканием R является отношение $R \cup \{(c,c),(e,e)\}$.

$R \cup \{(a,e),(c,a),(c,g),(e,c),(g,a),(g,e)\}$ — замыкание относительно симметричности.

Замыкание относительно транзитивности строится следующим образом: $a\,R\,c$ и $c\,R\,e \Rightarrow a\,R\,e$, $c\,R\,e$ и $e\,R\,a \Rightarrow c\,R\,a$, $c\,R\,e$ и $e\,R\,g \Rightarrow c\,R\,g$, $e\,R\,a$ и $a\,R\,c \Rightarrow e\,R\,c$, $c\,R\,a$ и $a\,R\,c \Rightarrow c\,R\,c$, $e\,R\,a$ и $a\,R\,e \Rightarrow e\,R\,e$, $g\,R\,c$ и $c\,R\,a \Rightarrow g\,R\,a$, $g\,R\,c$ и $c\,R\,e \Rightarrow g\,R\,e$.

Итак, мы получили транзитивное замыкание:

$$R \cup \{(a,e),(c,a),(c,c),(c,g),(e,c),(e,e),(g,a),(g,e)\} = A \times A.$$

3.19. *Ответ:*

Рефлексивным замыканием R является отношение $R \cup \{(k,k),(l,l)\}$. Замыкание относительно симметричности $R \cup \{(k,l),(m,n)\}$. Замыкание относительно транзитивности:

$$R \cup \{(k,k),(k,l),(k,m),(l,l),(l,n),(m,k),(m,n),(n,l)\} = A \times A.$$

3.20. *Ответ:*

1) $R = \{(3, 10), (5, 6), (6, 5), (10, 3)\}$;

2) $S = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$;

3) $R^* = R$ (исходное отношение симметрично);

4) $S^* = S \cup \{(3, 2), (3, 6), (4, 6)\}$.

3.21. *Ответ:*

1) $R = \{(1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)\}$;

2) $S = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)\}$;

3) $R^* = R \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (12, 12)\}$;

4) $S^* = S \cup \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$.

3.22. *Решение.*

Нет, студент неправ. Рассмотрим, например, транзитивные отношения $R_1 = \{(1, 2)\}$ и $R_2 = \{(2, 1)\}$ на множестве $A = \{1, 2\}$. Легко видеть, что их объединение $R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ не является транзитивным отношением на A.

3.23. *Ответ:*

1) Здесь четыре класса эквивалентности, которые соответствуют временам года: {*декабрь, январь, февраль*}, {*март, апрель, май*}, {*июнь, июль, август*} и {*сентябрь, октябрь, ноябрь*}.

2) Каждый класс эквивалентности состоит из всех людей, чьи знаки зодиака совпадают.

3.25. *Решение.*

Пусть $A = \{n\colon\ 1 \leqslant n \leqslant 20\ \ \textbf{и}\ \ n \text{ кратно } 2\}$, а P — отношение «n делит m». Выпишем элементы частично упорядоченного множества A: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Диаграмму Хассе строим с учетом информации о непосредственных предшественниках элементов множества A, приведенной в табл. 3.2. Одна из возможных форм диаграммы Хассе приведена на рис. 3.6.

3.30. *Решение.*

Нет, в качестве контрпримера к утверждению можно привести отношение частичного порядка $\{(X, Y)\colon X \subseteq Y\}$ на множестве $\mathcal{P}(\{a, b\})$. В этом случае пустое множество $\varnothing$ является наименьшим элементом упорядоченного множества, а само множество $\{a, b\}$ является наибольшим элементом. В то же время элементы $\{a\}$ и $\{b\}$ между собой сравнить нельзя, следовательно, указанное отношение не является линейным порядком.

Таблица 3.2

Предшественники и непосредственные предшественники элементов отношения P

Элемент	Предшественник	Непосредственный предшественник
2	нет	нет
4	2	2
6	2	2
8	2, 4	4
10	2	2
12	2, 4, 6	4, 6
14	2	2
16	2, 4, 8	8
18	2, 6	6
20	2, 4, 10	4, 10

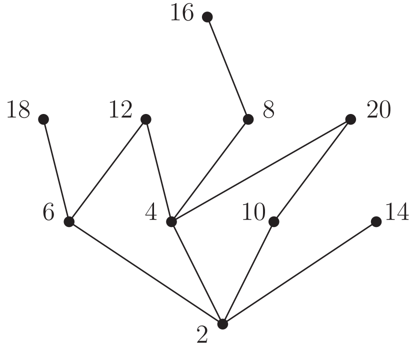


Рис. 3.6. К упр. **3.25**

3.31. *Решение.*

Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 4, 8, 16 \ldots\}$, содержащее все неотрицательные степени числа два. На множестве $A \cup \{5\}$ введем отношение $P = \{(a, b)\colon a \text{ делит } b\}$.

Как легко заметить, для P выполняются все свойства отношения частичного порядка. Из соответствующей диаграммы Хассе (см. рис. 3.7) видно, что в P имеется ровно один максимальный элемент, равный 5, но нет наибольшего.

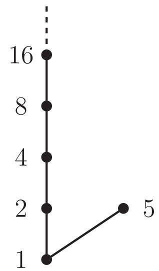


Рис. 3.7. Диаграмма Хассе множества P к упр. **3.31**

3.32. *Решение.*

Воспользовавшись определениями композиции отношений и обратного отношения, получим следующие множества:

$S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$,

$(S \circ R)^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

3.33. *Ответ:*

$R^{-1} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$,

$S \circ R^{-1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$.

3.37. *Ответ:*

$S^{-1} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (4, 1), (4, 4)\}$,

$S^{-1} \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2)\}$.

3.38. *Ответ:*

R^{-1}: «…брат или сестра…»;

S^{-1}: «…жена…»;

$S^{-1} \circ R$: «…брат жены…» или «…шурин…».

3.42. *Ответ:*

1) $T_2 \circ T_2 = \{(x, x), (y, x), (z, z)\}$,

$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} = \{(x, 1), (x, 2), (z, 3)\}$;

2) $T_2 \circ T_2 = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, x), (y, y), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z)\} = B \times B$,

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} = \{(x,1),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3),(z,1),(z,2)\}.$$

3.43. *Решение.*
Логическая матрица отношения $S \circ R$ равна произведению $M_R M_S$:

$$M_R M_S = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\text{Л}\,\textbf{и}\,\text{Л})\ \textbf{или}\ (\text{Л}\,\textbf{и}\,\text{Л})\ \textbf{или}\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{Л}) & (\text{Л}\,\textbf{и}\,\text{И})\ \textbf{или}\ (\text{Л}\,\textbf{и}\,\text{Л})\ \textbf{или}\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{И}) & \ldots \\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{Л})\ \textbf{или}\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{Л})\ \textbf{или}\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{Л}) & (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{И})\ \textbf{или}\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{Л})\ \textbf{или}\ (\text{И}\,\textbf{и}\,\text{И}) & \ldots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

3.44. *Ответ:*

$$M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

3.45. *Ответ:*

$$M_{S \circ R} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

3.46. *Ответ:*
Логическая матрица $M_{R^{-1}}$ отношения R^{-1} связана с M_R операцией транспонирования: $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$.

3.47. *Указание.* Воспользуйтесь результатом упр. **3.46**.

3.48. *Ответ:*

$$M_Q = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

3.49. *Решение.*
Да, это утверждение верно. Докажем, что для всех $a \in A$ имеет место $(a,a) \in R_1 \circ R_2$. В самом деле, вследствие рефлексивности R_1 и R_2 для произвольного элемента a выполняются принадлежности $(a,a) \in R_1$ и $(a,a) \in R_2$. Следовательно, согласно определению композиции отношений, $R_1 \circ R_2$ также обладает свойством рефлексивности.

3.50. *Решение.*

Нет, такое утверждение ложно. Для контрпримера можно взять отношения $R_1 = \{(a, b), (b, a)\}$ и $R_2 = \{(b, c), (c, b)\}$ на множестве $A = \{a, b, c\}$. Вычислим композицию этих отношений: $R_1 \circ R_2 = \{(c, a)\}$. Хотя R_1 и R_2 являются симметричными отношениями, их композиция свойством симметричности не обладает.

3.51. *Решение.*

Нет, это утверждение ложно. Для контрпримера можно взять отношения $R_1 = \{(a, a), (b, c)\}$ и $R_2 = \{(a, b), (c, a)\}$ на множестве $A = \{a, b, c\}$. Несмотря на то что R_1 и R_2 являются антисимметричными отношениями, композиция $R_1 \circ R_2 = \{(a, c), (c, a)\}$ свойством антисимметричности не обладает.

3.52. *Решение.*

Нет, это утверждение ложно. Для контрпримера можно взять отношения $R_1 = \{(b, c), (d, e)\}$ и $R_2 = \{(a, b), (c, d)\}$ на множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$. Хотя R_1 и R_2 являются транзитивными отношениями, композиция $R_1 \circ R_2 = \{(a, c), (c, e)\}$ свойством транзитивности не обладает.

3.53. *Решение.*

Если R — симметричное отношение, то для всех $n \geqslant 1$ отношение R^n тоже обладает свойством симметричности. Докажем это утверждение методом математической индукции.

Обозначим предикат $P(n) =$ «R — симметричное отношение».

Б а з а и н д у к ц и и

Поскольку $R^1 \equiv R$, то база индукции выполняется.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ предикат $P(k)$ принимает истинное значение. Докажем, что R^{k+1} — симметричное отношение.

Пусть для $a, c \in A$ выполняется принадлежность $(a, c) \in R^{k+1}$. В силу того что $R^{k+1} = R \circ R^k$, существует элемент $b \in A$ такой, что $(a, b) \in R^k$ и $(b, c) \in R$. Согласно $P(k)$ имеем: $(a, b) \in R^k \Rightarrow (b, a) \in R^k$. Далее, вследствие симметричности R выполняется $(c, b) \in R$.

Тогда $(c, a) \in (R^k \circ R) = R^{k+1}$, что означает справедливость $P(k+1)$.

Итак, методом математической индукции доказано, что R^n является симметричным отношением для всех $n \geqslant 1$.

3.54. *Решение.*

Запишем логическую матрицу отношения R:

$$M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Как известно, матрица композиции двух бинарных отношений равна логическому произведению матриц этих отношений (см. стр. 138). Таким образом, получим матрицу отношения R^2:

$$M_{R^2} = M_{R\circ R} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

Аналогично вычисляем логические матрицы третьей и пятой степеней отношения R.

$$M_{R^3} = M_{R^2\circ R} = M_R \cdot M_{R^2} = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix};$$

$$M_{R^5} = M_{R^3\circ R^2} = M_{R^2} \cdot M_{R^3} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица симметрической разности множеств R^3 и R^5 равна

$$M_{R^3 \vartriangle R^5} = \begin{bmatrix} Л & Л & Л & Л \\ Л & Л & Л & Л \\ И & Л & Л & Л \\ Л & Л & И & Л \end{bmatrix}.$$

Основываясь на определении логической матрицы бинарного отношения, выпишем элементы отношения $R^3 \vartriangle R^5$:

$$R^3 \vartriangle R^5 = \{(c, a), (d, c)\}.$$

3.55. *Ответ:* $S^{-1} \vartriangle S^4 = \{(c, c), (c, e), (d, b), (d, c), (d, e), (e, d), (e, e)\}$.

3.58. *Доказательство.*

В доказательстве будем следовать [93]. Рассмотрим конечное частично упорядоченное множество T. Согласно теореме Дилуорса, минимальное число непересекающихся цепей, на которые можно разбить T, равно ширине этого множества.

Обозначим через n мощность множества T, а через w — его ширину. Применим метод математической индукции по переменной n.

Ясно, что число непересекающихся цепей, на которые можно разбить T, не меньше w. Покажем, что множество T всегда можно разбить на w цепей. Другими словами, требуется доказать, что предикат $P(n)$=«T допускает разбиение на w непересекающихся цепей» принимает истинное значение для всех натуральных n.

Б а з а и н д у к ц и и

Множество T содержит только один элемент и имеет ширину $w = 1$. Возьмем цепь, совпадающую с T. Таким образом, предикат $P(1)$ принимает истинное значение.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ предикат $P(k)$ принимает истинное значение. Докажем, что $P(k + 1)$ истинно.

Для этого предположим, что $|T| = k + 1$. В конечном частично упорядоченном множестве всегда найдется хотя бы один минимальный элемент a. Путем удаления этого элемента получим новое множество $U = T \setminus \{a\}$, для которого выполняется равенство $|U| = k$.

Ширина U может принимать только два значения: w или $w-1$. Далее рассмотрим каждый из этих случаев более подробно.

1. Пусть ширина U равна $w - 1$. По индуктивному предположению U есть объединение $w-1$ цепи, и $T = U \cup \{a\}$ представимо как объединение w цепей.

2. Пусть ширина U равна w. Имеет место равенство $U = C_1 \cup C_2 \cup \cup \ldots \cup C_w$, где C_i для $1 \leqslant i \leqslant w$ представляют собой различные непересекающиеся цепи.

Построенное из минимальных элементов $x_i \in C_i$ множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_w\}$ образует антицепь. В то же время мощность объединения множеств $\{a\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_w\}$ равна $w + 1$, и, следовательно, оно антицепью не является.

Из этого следует, что элемент a сравним с каким-либо из минимальных элементов, например, с x_1. Кроме того, $a \prec x_1$ в силу минимальности a. Записав

$$T = (C_1 \cup \{a\}) \cup C_2 \cup \ldots \cup C_w,$$

получим разбиение множества T на w непересекающихся цепей.

Таким образом, методом математической индукции доказано: минимальное число непересекающихся цепей, на которые можно разбить конечное частично упорядоченное множество, равно ширине этого множества.

3.59. *Ответ:* минимальное число цепей, содержащих все элементы частично упорядоченного множества A с отношением R, равно 3.

3.60. *Доказательство.*

Пусть мощность максимальной цепи в частично упорядоченном множестве A равна M. Каждому элементу $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant |A|$, поставим в соответствие $C^{(i)}$ — максимальную из цепей, заканчивающихся на данном элементе. Рассмотрим множества

$$A^{(d)} = \{a_i \colon |C^{(i)}| = d\}, \text{ где } d = 1, 2, \ldots, M,$$

образованные элементами, расположенными на уровне d диаграммы Хассе частично упорядоченного множества A. Семейство множеств $A^{(d)}$ образует разбиение A на антицепи. Следовательно, минимальное число антицепей, на которые можно разбить произвольное конечное множество, равно M, т. е. мощности максимальной цепи в этом множестве.

3.61. *Указание.*

Примените результат предыдущего упражнения к частично упорядоченному множеству программистов фирмы с отношением R вида

$$a_i \, R \, a_j \;\Leftrightarrow\; (s(a_i) \leqslant s(a_j)) \textbf{ и } (\sigma(a_i) \leqslant \sigma(a_j)).$$

3.62. *Решение.*

Отношения пунктов 2) и 4) являются функциями.

Отношение пункта 1) функцией не является, поскольку элементу $b \in A$ в нем соответствуют два элемента множества B: 2 и 4.

Отношение пункта 3) тоже не функция, потому что элементу $c \in A$ не поставлено в соответствие никакого элемента множества B.

Функция пункта 4) не инъективна, так как она переводит два разных элемента множества A, а именно, a и d, в один и тот же элемент $1 \in B$. Эта функция не является и сюръективной, ввиду того что элемент $2 \in B$ не входит в ее множество значений.

Функция пункта 2) как инъективна, так и сюръективна, т. е. она является биективной.

3.63. *Ответ:*

Отношения пунктов 1) и 2) являются функциями, причем функция из 1) биективна.

Функция пункта 2) не инъективна и не сюръективна.

Отношения 3) и 4) функциями не являются.

3.64. *Ответ:*

Отношения пунктов 1) и 3) являются функциями.

Функция пункта 1) не инъективна и не сюръективна.

Функция пункта 3) является биекцией.

Отношения 2) и 4) функциями не являются.

3.65. *Решение.*

1) Если $f(a_1) = f(a_2)$, то $-a_1 = -a_2$, откуда $a_1 = a_2$. Следовательно, f — инъективная функция. Далее, так как $f(n) = -n$, где n — произвольное целое число, то множество значений этой функции совпадает со всем множеством $\mathbb{Z}$. Это означает, что функция f сюръективна. Ввиду того что функция является инъекцией и сюръекцией, f — биекция.

2) Функция $\operatorname{sign}(n)$ не инъективна, поскольку, например, при любом положительном n она равна единице. Кроме того, $\operatorname{sign}(A) = \{-1, 0, 1\}$, т. е. множество значений функции sign не совпадает с ее областью значений. Функция sign — не биекция, так как не является инъекцией и сюръекцией.

Примечание.

Название функции sign происходит от латинского *sīgnum* — знак [27].

3.66. *Решение.*

1) Проверим, является ли функция f инъективной. Условием инъективности является импликация $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ для любых a_1 и a_2 из области определения. Получаем истинное высказывание $3a_1 - 2 = 3a_2 - 2 \Rightarrow a_1 = a_2$, поэтому f инъективна.

Условие сюръективности: $\forall b \in \mathbb{Z}$ существует целое $a \in \mathbb{Z}$ такое, что $f(a) = b$. Но, например, для целого числа $b = 0$ не существует такого $a \in \mathbb{Z}$, что $3a - 2 = 0$. Следовательно, f не является сюръективной.

Функция f не является биективной, так как не выполняется условие сюръективности.

2) Проверим выполнение условия инъективности:

$g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ для $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Эта импликация ложна, поскольку значения функции g на различных аргументах $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ совпадают, например, $g(6) = g(1) = 3$. Следовательно, функция g не инъективна.

Условие сюръективности $\forall b \in \mathbb{Z} \;\; \exists a \in \mathbb{Z} : f(a) = b$ выполняется в силу равенства $g(2b) = b \;\; \forall b \in \mathbb{Z}$.

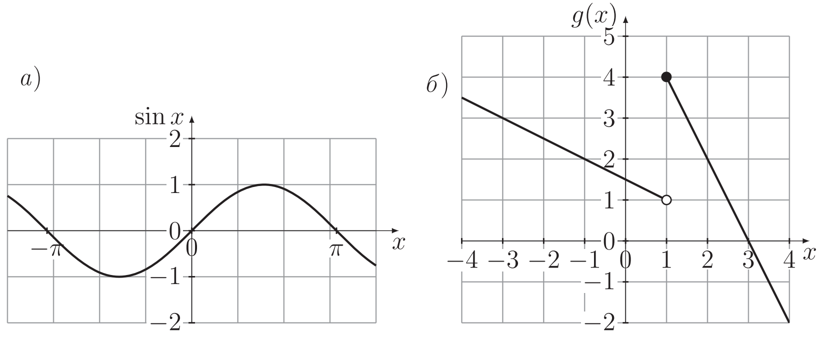


Рис. 3.8. К упр. **3.68**

Функция g не является биективной, так как не выполняется условие инъективности.

3) Условие инъективности $h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ для $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ не выполняется, поскольку функция четна и $h(a) = h(-a)$.

Проверим условие сюръективности: $\forall b \in \mathbb{Z}\ \ \exists a \in \mathbb{Z}\colon\ 1 - a^2 = b$ тоже не выполняется, так как, например, для $b > 1$ таких целых значений a не существует.

Наконец, h не является биективной, поскольку она не инъективна и не сюръективна.

3.67. *Ответ:*

1) $h_1(n)$ — биективная функция;
2) функция $h_2(n)$ сюръективна, но не инъективна;
3) функция $h_3(n)$ инъективна, но не сюръективна.

3.68. *Решение.*

Графики функций изображены на рис. 3.8.

1) Множество значений функции f — это $[-1, 1]$, оно не совпадает с областью значений $f(A) \neq B$, следовательно, функция не сюръективна. Так как функция периодическая, например, $f(-\pi) = f(\pi) = -1$, то f не является инъекцией.

2) Множество значений функции g совпадает с множеством $\mathbb{R}$, откуда следует ее сюръективность. Так как $g(2) = g(-1) = 2$, она не инъективна.

3.69. *Решение.*

Функция $s(n)$ не является инъективной. Это следует, например, из легко проверяемого равенства $s(12) = s(21)$.

Она является сюръективной, поскольку

$$s(1) = 1, \quad s(11) = 2, \quad \ldots, \quad s(\underbrace{111\ldots1}_{k\ \text{единиц}}) = k, \quad \ldots,$$

и множество образов аргументов совпадает с множеством натуральных чисел.

Поскольку $s(n)$ не является инъективной, то она не обладает свойством биективности.

3.70. *Решение.*

Проверим выполнение свойств инъективности и сюръективности.

Как легко видеть, справедлива импликация

$$((x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)) \Rightarrow ((x_1 = x_2) \textbf{ и } (y_1 = y_2)).$$

Значит, $r(x, y)$ обладает свойством инъективности.

Далее, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\colon r(x_0, y_0) = (x, y)$. В качестве пары (x_0, y_0) возьмем $\left(\dfrac{1}{2}(x + y), \dfrac{1}{2}(x - y)\right)$. Следовательно, $r(x, y)$ сюръективна.

Из инъективности и сюръективности $r(x, y)$ получаем, что эта функция является биективной.

3.71. *Решение.*

В силу того что, например, выполняются равенства

$$g(1, 0, 0) = g(0, 1, 0) = (1, 1, 1),$$

функция $g(x, y, z)$ не обладает свойством инъективности. Следовательно, она не является биективной.

3.72. *Ответ:* свойством биективности обладают функции h, s, t. Функция q не является ни инъективной, ни сюръективной и, следовательно, не обладает свойством биективности.

3.73. *Доказательство.*

1) Рассматривая по отдельности случаи неотрицательных и отрицательных значений аргумента, получаем

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} = |x|.$$

2) Как левая, так и правая части неравенства принимают только неотрицательные значения, поэтому для доказательства можно возвести обе части неравенства в квадрат.

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \Leftrightarrow |x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \leqslant x^2+2|x||y|+y^2.$$

Поскольку $x \leqslant |x|$ и $xy \leqslant |x||y|$, то доказано, что для всех вещественных x и y выполняется неравенство $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

3.74. *Решение.*

Да, поскольку $|x| = \sqrt{x^2}$ — композиция основных элементарных функций x^2 и $\sqrt{x}$.

3.75. *Доказательство.*

Положим в неравенстве $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, доказанном в упражнении **3.73**, $x = a - b$, $y = b$. Тогда

$$|a-b| + |b| \geqslant |a| \;\Leftrightarrow\; |a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

3.76. *Решение.*

Покажем, что $\max(a,b)$ можно представить в виде

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|).$$

Действительно, раскрывая правую часть последнего равенства по определению модуля, приходим к определению максимума двух чисел.

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a+b+(a-b)), & \text{если } a-b \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}(a+b-(a-b)), & \text{если } a-b < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant b, \\ b, & \text{если } a < b \end{cases} = \max(a,b).$$

Минимум двух чисел можно записать аналогичным образом, а именно, $\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a+b-(a-b)), & \text{если } a-b \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}(a+b+(a-b)), & \text{если } a-b < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} b, & \text{если } a \geqslant b, \\ a, & \text{если } a < b \end{cases} = \min(a,b).$$

Таким образом, максимум и минимум двух чисел можно представить в явном виде через элементарные функции:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|),$$
$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

3.78. *Ответ:*
1) $|x| = \max(a, -a)$;
2) $|x| = -\min(a, -a)$.

3.79. *Доказательство:*
Перейдем к новым переменным $A = x$, $A' = x + a$, $B = y$, $B' = y + b$, где x, y, a, b также принадлежат множеству вещественных чисел [102]:

$$|\min(x, y) - \min(x + a, y + b)| \leqslant \max(|a|, |b|).$$

Далее воспользуемся выражением для минимума этих чисел через функцию абсолютной величины двух чисел (см. упр. **3.76**):

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Обозначим выражение под знаком модуля в левой части неравенства $(*)$ через L:

$$L = \frac{x + y - |x - y|}{2} - \frac{x + a + y + b - |(x - y) + (a - b)|}{2} = \\ = \frac{1}{2}\big(|(x - y) + (a - b)| - |x - y| - (a + b)\big).$$

Согласно неравенству треугольника (см. упр. **3.73** и **3.75**)

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \;\; (|\xi_1| - |\xi_2| \leqslant |\xi_1 + \xi_2| \leqslant |\xi_1| + |\xi_2|)$$

имеем:

$$|x - y| - |a - b| \leqslant |(x - y) + (a - b)| \leqslant |x - y| + |a - b|.$$

Следовательно, для величины L получаем оценку

$$\frac{1}{2}(-|a - b| - (a + b)) \leqslant L \leqslant \frac{1}{2}(|a - b| - (a + b)).$$

В силу приведенной оценки справедливы неравенства $(-\max(a, b)) \leqslant$ $\leqslant L \leqslant (-\min(a, b))$, или

$$|L| \leqslant \max\left(|\min(a, b)|, |\max(a, b)|\right) \equiv \max(|a|, |b|).$$

Таким образом, неравенство $(*)$ доказано.

3.80. *Решение.*
1) Поскольку f — показательная функция, то множество ее значений $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$, т. е. все положительные вещественные числа. Далее, так как $2^{a_1} = 2^{a_2} \Rightarrow a_1 = a_2$ для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, то $f(x) = 2^x$ инъективна.

Множество значений не совпадает с областью значений, отсюда следует вывод, что f не сюръективна.

2) При построении графика функции g удобно перейти к представлению g в виде

$$g(x) = 3x - |x| = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 4x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Каждому значению $g(x)$ соответствует единственный аргумент x, следовательно, g инъективна. Множество значений $\mathbb{R}$ совпадает с областью значений, и данная функция сюръективна.

Графики функций изображены на рис. 3.9, панели *а*) и *б*), соответственно.

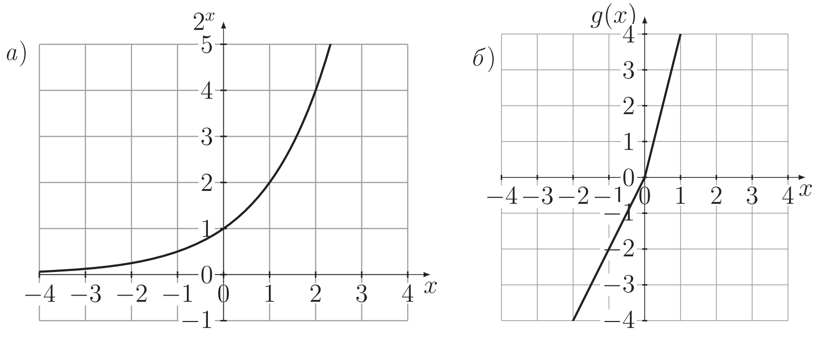


Рис. 3.9. К упр. **3.80**

3.82. *Ответ:* графики основных тригонометрических функций приведены на рис. 3.10.

3.84. *Решение.*

Функция $f_1(x)$ определена при всех $x \in [-1, 1]$. Поскольку

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

то функция $f_1(x)$ на замкнутом отрезке $[-1, 1]$ совпадает с полиномом $p_1(x) = 3x - 4x^3$.

2) Функция $f_2(x)$ определена при всех $x \in [-1, 1]$. Поскольку

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

то функция $f_1(x)$ на замкнутом отрезке $[-1, 1]$ совпадает с полиномом $p_1(x) = 4x^3 - 3x$.

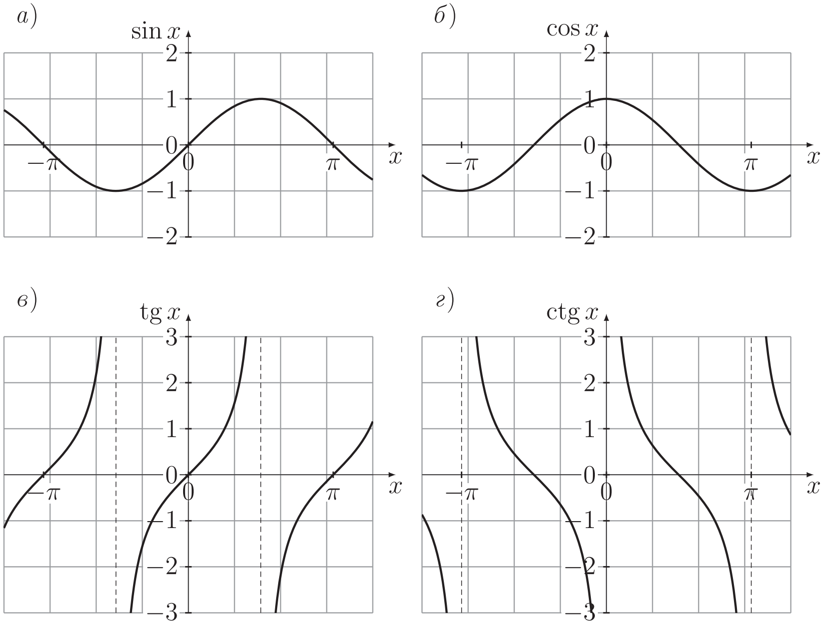


Рис. 3.10. Основные тригонометрические функции

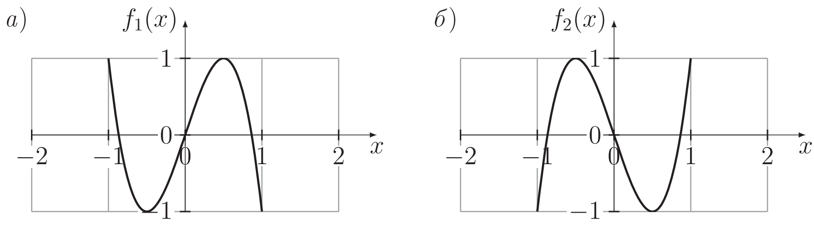


Рис. 3.11. К упр. **3.84**

Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ представлены на рис. 3.11.

3.85. *Ответ:*

1) Функция $f_1(x)$ на замкнутом отрезке $[-1, 1]$ совпадает с полиномом $p_1(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

2) Функция $f_2(x)$ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ совпадает с функцией $p_2(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$.

3.86. *Ответ:*

Условию пункта 1) удовлетворяют, например, функции $f_1(x) = 1 - x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и другие обратимые на отрезке [0,1] функции. Остальные примеры приводятся аналогично.

3.87. *Решение.*

Если $f(a) = f(b)$, то $2a - 5 = 2b - 5$, что влечет равенство $a = b$. Это означает инъективность функции f. Уравнение $f(x) = y$ представим в виде $2x - 5 = y$, откуда $x = \dfrac{y + 5}{2}$. Последнее выражение определено на всем множестве вещественных чисел, т. е. по любому элементу из множества $B = \mathbb{R}$ можно построить x, который переводится в этот элемент функцией f. Значит, f — сюръективна.

Мы показали, что f как инъективна, так и сюръективна. Таким образом, она является биекцией. Обратная к ней функция $f^{-1}\colon B \to A$ определяется формулой $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{2}$.

3.88. *Ответ:* $f^{-1}(x) = 3(x - 2)$.

3.89. *Ответ:* $f^{-1}(x) = 3(x - 2)^{-1}$.

3.90. *Ответ:*

В качестве примеров обратимых функций, удовлетворяющих условию задачи, можно привести следующие:

1) $f\colon [0, 1] \to [a, b], \quad f(x) = (b - a)x + a$;
2) $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x)$.

3.91. *Решение.*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} (2x - 4)^2, & \text{если } x \geqslant 1, \\ (1 - x)^2, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Для вычисления композиции $(g \circ g)(x)$ необходимо рассмотреть четыре возможных случая:

1) $x \geqslant 1,\ g(x) \geqslant 1$;
2) $x \geqslant 1,\ g(x) < 1$;

3) $x < 1,\ g(x) \geqslant 1$;
4) $x < 1,\ g(x) < 1$.

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\begin{cases} 2x-6, & x \geqslant 1, \\ -x-1, & x < 1 \end{cases}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2(2x-6)-6, & x \geqslant 1,\ 2x-6 \geqslant 1, \\ -(2x-6)-1, & x \geqslant 1,\ 2x-6 < 1, \\ 2(-x-1)-6, & x < 1,\ -x-1 \geqslant 1, \\ -(-x-1)-1, & x < 1,\ -x-1 < 1 \end{cases} = \begin{cases} 4x-18, & x \geqslant 7/2, \\ -2x+5, & 1 \leqslant x < 7/2, \\ -2x-8, & x \leqslant -2, \\ x, & -2 < x < 1. \end{cases}$$

Получаем окончательный ответ:

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} 4x-18, & \text{если } x \geqslant 7/2, \\ -2x+5, & \text{если } 1 \leqslant x < 7/2, \\ x, & \text{если } -2 < x < 1, \\ -2x-8, & \text{если } x \leqslant -2. \end{cases}$$

3.92. *Ответ:*

$f \circ f = ((x-1)^2-1)^2$;

$$g \circ f = \begin{cases} 2x^2-4x-4, & \text{если } x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty), \\ -x^2+2x-2, & \text{если } x \in (0, 2). \end{cases}$$

3.95. *Решение.*

Множество $\mathcal{L}$ является несчетным. Доказательство проведем методом «от противного».

Предположим, что множество всех логических функций натурального аргумента счетно. Это приведет нас к противоречию.

В самом деле, если $\mathcal{L}$ является счетным, то можно перечислить все его элементы: $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots\}$.

Введем в рассмотрение функцию $m\colon \mathbb{N} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$, определяемую как отрицание $l_k(k)$ для всех натуральных k:

$$m(k) = \textbf{не}\, l_k(k).$$

Далее заметим, что для всех k значения функций m и l_k отличаются не менее чем в одной точке.

Следовательно, $m(k)$ не входит в множество $\mathcal{L}$, хотя она является функцией вида $l\colon \mathbb{N} \to \{\text{И}, \text{Л}\}$. Полученное противоречие приводит к выводу: множество всех логических функций натурального аргумента несчетно.

3.96. *Доказательство.*
1) Определение целой части числа можно записать в виде

$$\lfloor x \rfloor = a \ \Leftrightarrow \ a \leqslant x < a+1, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Прибавив к обеим частям неравенства целое число n, получим

$$\lfloor x \rfloor + n = a+n \ \Leftrightarrow \ a+n \leqslant x+n < a+n+1,$$

$$\lfloor x \rfloor + n = a+n \ \Leftrightarrow \ \lfloor x+n \rfloor = a+n.$$

Из последнего соотношения следует равенство пункта 1) для функции «пол», равенство для функции «потолок» доказывается аналогично.

2) Рассмотрим случаи четных и нечетных аргументов n. Пусть n — четное, $n=2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil = k$,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k+k = 2k = n.$$

В случае нечетного n имеем: $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = k$, $\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil = k+1$,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k+(k+1) = 2k+1 = n.$$

Таким образом, равенство пункта 2) выполняется для всех целых n.

3) Докажем равенство $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$. Как известно, любое вещественное число x может быть представлено единственным образом в виде $x = n+\delta$, где $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \delta < 1$. Следовательно,

$$\lfloor -x \rfloor = \lfloor -(n+\delta) \rfloor = \lfloor -n-\delta \rfloor = \begin{cases} \quad -n, & \text{если } \delta = 0; \\ -n-1, & \text{если } \delta \in (0,1). \end{cases}$$

Правая часть анализируемого равенства

$$-\lceil x \rceil = -\lceil n+\delta \rceil = \begin{cases} \quad -n, & \text{если } \delta = 0; \\ -n-1, & \text{если } \delta \in (0,1). \end{cases}$$

Левая и правая части соотношения $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ совпадают при всех вещественных $x \in \mathbb{R}$. Равенство $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ доказывается аналогично.

4) Представим n в виде суммы $n = 2^k + \delta$, где $0 \leqslant \delta < 2^k$, $k, \delta \in \mathbb{Z}_0$. Преобразуем левую часть равенства:

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil = \lceil \log_2(2^k+\delta+1) \rceil = \lceil \log_2 2^k \big(1+(\delta+1)/2^k\big) \rceil =$$
$$= \lceil k + \log_2 \big(1+(\delta+1)/2^k\big) \rceil = k + \lceil \log_2 \big(1+(\delta+1)/2^k\big) \rceil.$$

Поскольку $0 < (\delta+1)/2^k \leqslant 1$, то $0 < \log_2\bigl(1+(\delta+1)/2^k\bigr) \leqslant 1$, и слагаемое $\bigl\lceil\log_2\bigl(1+(\delta+1)/2^k\bigr)\bigr\rceil$ равно единице. Тогда

$$\lceil\log_2(n+1)\rceil = k+1.$$

Теперь рассмотрим правую часть равенства пункта 4):

$$\begin{aligned}\lfloor\log_2 n\rfloor + 1 = \lfloor\log_2 n + 1\rfloor = \lfloor\log_2(2n)\rfloor = \lfloor\log_2 2(2^k+\delta)\rfloor = \\ = \lfloor\log_2 2^{k+1}(1+\delta/2^k)\rfloor = \lfloor k+1+\log_2(1+\delta/2^k)\rfloor = \\ = k+1+\lfloor\log_2(1+\delta/2^k)\rfloor.\end{aligned}$$

Так как $0 \leqslant \delta/2^k < 1$, то выполняются неравенства $1 \leqslant 1+\delta/2^k < 2$ и $0 \leqslant \log_2(1+\delta/2^k) < 1$, откуда

$$\lfloor\log_2 n\rfloor + 1 = k+1.$$

Окончательно получаем: $\lceil\log_2(n+1)\rceil = \lfloor\log_2 n\rfloor + 1$.

3.97. *Ответ:*

1) -2;
2) 4;
3) -6;
4) -1.

3.98. *Ответ:*

1) 1;
2) 2;
3) 7;
4) 13.

3.99. *Решение.*
Графики функций изображены на рис. 3.12.
Обе функции являются сюръективными, так как $\forall n \in \mathbb{Z}$ всегда найдутся вещественные x_1, x_2, такие, что $\lfloor x_1\rfloor = n$, $\lceil x_2\rceil = n$. Функции «пол» и «потолок» не инъективны, так как, например, $\lfloor 1{,}1\rfloor = \lfloor 1{,}2\rfloor = 1$, $\lceil 1{,}1\rceil = \lceil 1{,}2\rceil = 2$. Следовательно, они не биективны.

3.101. *Решение.*
Пусть множество A содержит все числа из универсального множества $U = \{1, 2, \ldots, 100\}$, которые делятся на 3. Далее, пусть множество B содержит все числа из U, которые делятся на 5, и, наконец, множество C содержит все числа из U, кратные 11. Требуется определить мощность

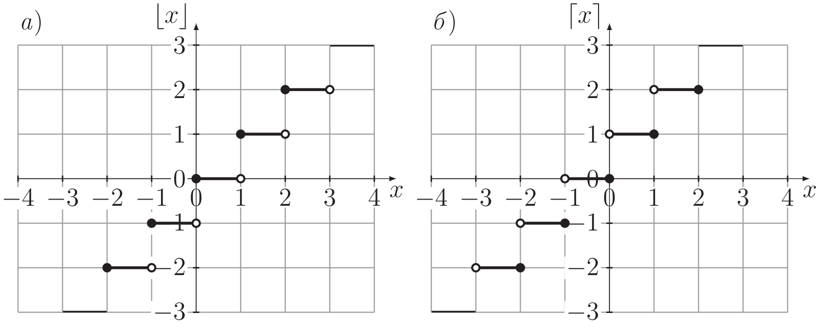


Рис. 3.12. К упр. **3.99**

множества $A \cup B \cup C$. Для вычисления $|A \cup B \cup C|$ воспользуемся формулой включений и исключений:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Мощности множеств в правой части формулы определим, применив результат упражнения **3.100**:

$$|A| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33,\ |B| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20,\ |C| = \left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor = 9.$$

Множества $A \cap B$, $A \cap C$ и $B \cap C$ образованы числами из U, делящимися на $3 \cdot 5$, $3 \cdot 11$ и $5 \cdot 11$ соответственно. Значит,

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6,\ |A \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{33} \right\rfloor = 3,\ |B \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{55} \right\rfloor = 1.$$

Множество $A \cap B \cap C$ пусто, поскольку $\left\lfloor \dfrac{100}{3 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor = 0$. Получаем количество натуральных чисел, не превосходящих 100, которые делятся или на 3, или на 5, или на 11:

$$|A \cup B \cup C| = 33 + 20 + 9 - 6 - 3 - 1 + 0 = 52.$$

Соответствующая диаграмма Венна приведена на рис. 3.13.

3.102. *Ответ:*
1) 629 146;
2) 419 431;
3) 209 715;
4) 419 430.

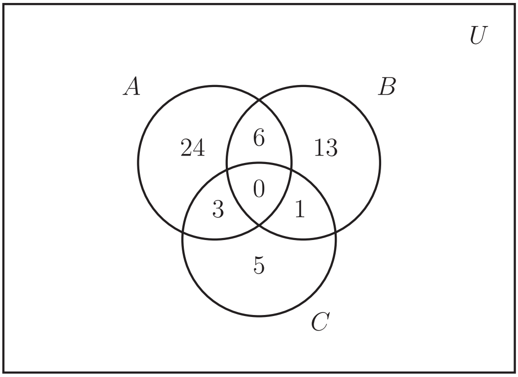


Рис. 3.13. К упр. **3.101**

3.103. *Ответ:* 582.

3.104. *Ответ:* 19.

3.105. *Ответ:*

1) $\lceil x_2 \rceil - \lfloor x_1 \rfloor - 1$;
2) $\lfloor x_2 \rfloor - \lceil x_1 \rceil + 1$.

3.106. *Решение.*

Используя формулу Лежандра, получаем, что наибольшая степень числа 5, делящая 100!, равна

$$e_5 = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 24.$$

Далее найдем, что наибольшей степенью числа 2, делящей 100!, будет

$$e_2 = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor > 24.$$

Каждая пара простых множителей 2 и 5 соответствует одному нулю в конце десятичной записи натурального числа.

Следовательно, число 100! имеет в конце такой записи $\min(e_5, e_2) = 24$ нуля.

3.107. *Ответ:* 174 нуля.

3.108. *Ответ:* $n = 1035$.

3.109. *Доказательство.*

Применим формулу Лежандра (см. упр. **3.106** на стр. 160) и покажем, что каждое простое число p входит в разложение на множители $(2n)!$ в степени не меньшей, чем в разложение $n!(n+1)!$.

Для этого следует удостовериться в справедливости неравенства

$$\left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^a} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2n}{p^a} \right\rfloor$$

для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \in \mathbb{N}$ и простых p.

Рассмотрим два случая:

1) $n+1$ не делится на p^a, тогда

$$\left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor = 2\left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2n}{p^a} \right\rfloor;$$

2) $n+1$ делится на p^a, тогда

$$\left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^a} \right\rfloor = \left(\left\lfloor \frac{n+1}{p^a} \right\rfloor - 1\right) + \left\lfloor \frac{n+1}{p^a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(n+1)}{p^a} \right\rfloor - 1 =$$
$$= \left\lfloor \frac{2(n+1)}{p^a} - \frac{2n}{p^a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n}{p^a} \right\rfloor.$$

Следовательно, для всех целых неотрицательных n имеет место неравенство

$$\left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^a} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2n}{p^a} \right\rfloor,$$

и каждое простое число p входит в разложение $(2n)!$ в степени не меньшей, чем в разложение $n!(n+1)!$.

Тем самым доказано, что $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ — целое число для всех $n \geqslant 0$.

3.110. *Ответ:*

1) 367 абитуриентов;

2) $24 \cdot 12 + 1 = 289$ абитуриентов.

3.111. *Решение.*

Сумма выпавших очков будет минимальной, если на всех гранях выпадут «1», и максимальной, если выпадут «6». В силу этого множество возможных значений суммы очков на костях $B = \{3, \ldots, 18\}$ содержит $|B| = 16$ элементов. По принципу Дирихле, если кости будут брошены 17 раз, то сумма выпавших очков повторится, по крайней мере, дважды.

Следовательно, три игральные кости нужно бросить не менее 17 раз.

3.112. *Решение.*

Обозначим через B — множество букв русского алфавита, с которых может начинаться название фильма. Мощность данного множества $|B| = 31$, поскольку буквы «твердый знак» и «мягкий знак» не могут стоять на первом месте в названии фильма.

Пусть функция $f\colon A \to B$ ставит в соответствие фильму первую букву его названия. Элементы множества A — все фильмы, доступные в видеопрокате. Тогда, по принципу Дирихле, если $|A| > k|B|$, то среди всех записей не менее $k+1$ будут начинаться на одну букву. По условию, $k = 3$, поэтому $|A| > 3 \cdot 31 = 93$.

Значит, для выполнения требования условия задачи в бюро видеопроката должно быть не менее 94 фильмов.

3.113. *Решение.*

Рассмотрим подмножество A множества нечетных чисел, которые принадлежат множеству U: $A \subset \{a \in U$ **и** a нечетно$\}$. Построим множество B, элементами которого являются неупорядоченные пары чисел вида $\{a, b\}$, где $a, b \in \{a \in U$ **и** a нечетно$\}$ и $a + b = 20$. Множество B содержит элементы

$$B = \{\{1, 19\}, \{3, 17\}, \{5, 15\}, \{7, 13\}, \{9, 11\}\}.$$

Мощность полученного множества $|B| = 5$.

Пусть функция $f\colon A \to B$ ставит в соответствие нечетному числу $a \in A$ пару $\{a, b\} \in B$, где $b = 20 - a$. Согласно принципу Дирихле, если $|A| > |B|$, то найдутся два числа $a_1, a_2 \in A$, сумма которых $a_1 + a_2 = 20$. Значит, $|A| > 5$, и если взять шесть чисел из множества U, то, по крайней мере, два из них в сумме дадут $a_1 + a_2 = 20$.

3.114. *Ответ:* 7 чисел.

3.115. *Решение.*

Число вариантов недель, отличающихся погодными условиями, равно числу сочетаний с повторениями

$$\widetilde{C}(2, 7) = \frac{(2 + 7 - 1)!}{7!(2 - 1)!} = 8.$$

Согласно принципу Дирихле, среди $2 \times 8 + 1 = 17$ недель найдутся три и более недели с одинаковыми погодными условиями. Итак, искомая длительность временно́го периода составляет 17 недель.

3.116. *Ответ:* 385 недель.

Глава 4

Комбинаторика

Комбинаторика решает задачи подсчета количества различных конфигураций (например, перестановок), образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться различные ограничения [4]. Количество конфигураций, образованных элементами множества, подсчитывается согласно правилам суммы и/или произведения [4, 78].

Правило суммы утверждает, что *если A_1, A_2, …, A_k — независимые события, и существует n_1 возможных исходов события A_1, n_2 возможных исходов события A_2, …, n_k возможных исходов события A_k, то возможное число исходов события «A_1* **или** *A_2* **или** … **или** *A_k» равно сумме $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.*

Правило произведения гласит, что *если дана последовательность k событий с n_1 возможными исходами первого, n_2 — второго и т. д., вплоть до n_k возможных исходов последнего, то общее число исходов последовательности k событий равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.*

(n, k)-**Выборкой** или **выборкой** объема k **из** n **элементов** называется любой набор элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из множества A мощности n. Если при этом порядок следования элементов имеет значение, то выборка называется **упорядоченной**, в противном случае — **неупорядоченной**. Упорядоченная (n, k)-выборка с повторяющимися элементами называется (n, k)-**размещением с повторениями**, а без повторяющихся элементов — (n, k)-**размещением без повторений**.

(n, k)-**Сочетанием с повторениями** называется неупорядоченная (n, k)-выборка, элементы в которой могут повторяться. Наконец, (n, k)-**сочетанием без повторений** называется неупорядоченная (n, k)-выборка, элементам в которой повторяться запрещено.

Число различных (n, k)-размещений без повторений равно

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

а (n, k)-сочетаний без повторений равно

$$C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Число различных (n, k)-размещений с повторениями равно

$$\widetilde{P}(n,k) = n^k,$$

а число (n, k)-сочетаний с повторениями равно

$$\widetilde{C}(n,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Все возможные варианты (n, k)-размещений и (n, k)-сочетаний, как с повторениями, так и без последних, приведены в табл. 4.1.

Пример 4.1. В компьютерной фирме работают 25 системных администраторов, четверо из которых имеют достаточный опыт и могут исполнять обязанности начальника дежурной смены. Вычислим, сколько существует вариантов формирования ночной смены, состоящей из двух дежурных системных администраторов и начальника смены. Будем считать различными варианты, при которых должность начальника смены получают разные сотрудники.

Решение.

Рассмотрим события A_1 — «выбран начальник смены» и A_2 — «выбраны два рядовых системных администратора». Первое из этих событий может быть реализовано четырьмя различными способами, поскольку выбирается один человек из четырех возможных кандидатов. После назначения начальника смены остаются 24 сотрудника, двоих из которых следует включить в список дежурных администраторов. Следовательно, событие A_2 представляет собой $(24, 2)$-сочетание без повторений. Количество способов реализации события A_2 равно, в соответствии с табл. 4.1,

$$C(24,2) = \frac{24!}{2!(24-2)!} = \frac{24!}{2!\,22!} = \frac{23 \cdot 24}{2} = 276.$$

По правилу произведения количество способов формирования ночной смены, состоящей из двух дежурных системных администраторов и начальника смены, равно $4 \cdot 276 = 1104$. □

Пример 4.2. Вычислим количество биективных функций $f\colon A \to B$, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Решение.

Рассмотрим функции вида $f\colon A \to B$, где $|A| = n$, $|B| = m$. Обозначим количество функций f, обладающих свойством биективности, через Q.

Как известно (см. главу «Отношения и функции» на стр. 140), биективная функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами области определения A и области значений B. Каждому элементу из A должен соответствовать один и только один элемент из B.

Таблица 4.1

Размещения и сочетания

Условие	Элементы повторяются	Элементы не повторяются
Порядок существенен	размещения с повторениями $\widetilde{P}(n,k) = n^k$	размещения без повторений $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
Порядок несущественен	сочетания с повторениями $\widetilde{C}(n,k) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$	сочетания без повторений $C(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Проанализируем каждый из двух случаев $m \neq n$ и $m = n$ в отдельности.

1) Пусть выполняется условие $m \neq n$. Мощности множеств A и B различаются, и свойство биективности не может быть выполнено. Следовательно, количество биективных функций в этом случае $Q = 0$.

2) Пусть $m = n$, и мощности множеств A и B совпадают. Произвольная функция $f\colon A \to B$ полностью определяется набором своих значений на области определения. $f(a_1)$ может принимать один из n возможных вариантов значений. Далее, для значения $f(a_2)$ остается $(n-1)$ вариантов, так как элемент $b_1 = f(a_1)$ не может быть выбран повторно. Для $f(a_3)$ имеем $(n-2)$ возможных вариантов и т. д. Такого рода перечисление значений функции f является (n,n)-размещением без повторений $P(n,n)$. Согласно табл. 4.1, выполняется равенство $P(n,n) = n!$.

В итоге количество биективных функций $f\colon A \to B$, где $|A| = n$, $|B| = m$, можно записать в виде

$$Q = \begin{cases} n!, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Заметим, что ответ удобно представить в более компактном виде с помощью символа Кронекера[1] δ_{ij}, зависящего от двух целочисленных аргументов i и j: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$ Другими словами, символ Кронекера равен единице в случае совпадающих индексов и равен нулю, если индексы различны.

Такое обозначение часто используется для упрощения записи формул в дискретной математике, линейной алгебре и других разделах математики.

[1] Кронекер (Leopold Kronecker) (1823–1891).

Окончательно получаем, что количество биективных функций f, действующих из множества A из n элементов в множество B из m элементов, равно $Q = n!\delta_{nm}$. □

Для всех натуральных значений n и вещественных a и b справедлива формула **бинома Ньютона**[1]:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k =$$

$$= C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n)b^n.$$

В силу этого, выражения $C(n,k)$ называют также **биномиальными коэффициентами**. Часто биномиальные коэффициенты обозначают как C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Обобщением биномиального разложения служит тождество

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 \geqslant 0,\, \ldots,\, k_m \geqslant 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, \ldots\, k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m},$$

справедливое для всех вещественных a_i, $i = 1, \ldots, m$, и натуральных n. Это тождество называется **полиномиальным разложением**. Сумма здесь берется по всем неотрицательным целым числам $k_1, k_2, \ldots, k_m$ таким, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Величины $\dfrac{n!}{k_1!\, k_2!\, \ldots\, k_m!}$ называются **полиномиальными коэффициентами** и обозначаются одним из следующих способов:

$$C(n; k_1, k_2, \ldots, k_m), \;\; C_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m} \;\text{ или }\; \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}.$$

Следует отметить, что при $m = 2$ полиномиальное разложение преобразуется в формулу бинома Ньютона.

Перестановкой элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется любой упорядоченный набор длины n из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема о перестановках гласит, что *существует* $\dfrac{n!}{k_1!\, k_2!\, \ldots\, k_m!}$ *различных перестановок* n *объектов,* k_1 *из которых относятся к первому типу,* k_2 *— ко второму и т. д., вплоть до* k_m *объектов типа* m.

[1] Ньютон (Isaac Newton) (1643–1727).

Контрольные вопросы к главе «Комбинаторика»

1. Какие задачи решает комбинаторика?
2. Сформулируйте правило суммы и правило произведения.
3. Что такое выборка объема k из n элементов?
4. В чем разница между размещением и сочетанием?
5. Запишите формулу бинома Ньютона.
6. Как определяются полиномиальные коэффициенты?
7. Дайте определение понятию перестановки.
8. Сформулируйте теорему о перестановках.

Задачи к главе «Комбинаторика»

4.1. Пусть A — множество натуральных четырехзначных чисел, в десятичной записи которых участвуют только четные цифры.

1) Сколько чисел в множестве A?
2) Сколько чисел из A превышают по величине 5000?

4.2. Палиндром — это строка символов, которая читается одинаково как слева направо, так и справа налево. Сколько существует натуральных чисел, обладающих свойством: десятичная запись числа состоит из одиннадцати символов, содержит только нечетные цифры и является палиндромом.

4.3. Вычислите количество палиндромов среди битовых строк длины n, где $n > 1$.

4.4. Пароль, открывающий доступ к файлу, состоит из 7 символов. Первые два из них — строчные буквы латинского алфавита (всего в алфавите 26 букв), последующие два — цифры, а оставшиеся три могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько разных паролей такого типа можно создать?

4.5. Сколько существует способов распределения девяти студентов на практику на предприятия, если договор о сотрудничестве заключен с шестью из них? Ограничений на число студентов, проходящих практику на одном предприятии, нет.

4.6. Определите число квадратных матриц из n строк и n столбцов с элементами из множества

1) $\mathbb{B} = \{0, 1\}$;

2) $\mathbb{T} = \{-1, 0, 1\}$.

4.7. Определите число квадратных матриц из n строк и n столбцов с элементами из множества $\mathbb{T} = \{-1, 0, 1\}$, являющихся

1) симметричными;

2) антисимметричными

относительно главной диагонали.

4.8. Чему равно количество различных бинарных отношений на некотором множестве A, обладающих свойством

1) симметричности;

2) антисимметричности?

4.9. Определите количество натуральных трехзначных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна цифра «5».

4.10. Определите количество натуральных четырехзначных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна цифра «9».

4.11. Обобщив результаты упражнений **4.9** и **4.10**, определите количество натуральных n-значных чисел, в десятичной записи которых присутствует хотя бы одна из цифр «5» или «9».

4.12. Вычислите следующие величины и поясните, каким выборкам они соответствуют:

1) $P(7, 3)$, $P(9, 6)$ и $P(5, 2)$;

2) $C(11, 6)$, $C(8, 3)$ и $C(10, 8)$;

3) $\widetilde{P}(3, 2)$, $\widetilde{P}(2, 5)$ и $\widetilde{P}(5, 5)$;

4) $\widetilde{C}(5, 1)$, $\widetilde{C}(3, 5)$ и $\widetilde{C}(4, 14)$.

4.13. Сколько существует возможностей для присуждения пяти призовых мест 20 участникам конкурса компьютерных программ?

4.14. В студенческой группе 22 человека. Сколькими способами можно избрать актив группы, который должен состоять из двух человек: старосты и его помощника?

4.15. В театре готовится постановка пьесы Лопе де Вега «Собака на сене». Актерский состав включает 18 человек, при этом лишь четыре роли женские. В кастинге принимает участие 9 женщин и 17 мужчин. Сколькими способами могут быть набраны актеры?

4.16. Резиденцию короля охраняет полк мушкетеров численностью 100 человек.

1) Сколькими способами можно выбрать отряд из 10 человек для ночного дежурства?
2) Как изменится число способов выбора по сравнению с предыдущим случаем, если в отряде обязательно должен присутствовать д'Артаньян?

4.17. Короля Франции охраняет полк мушкетеров численностью 100 человек.

1) Сколькими способами можно выбрать отряд из 25 человек для сопровождения короля в военный поход?
2) Как изменится число способов выбора по сравнению с предыдущим случаем, если в отряде обязательно должен присутствовать д'Артаньян?

4.18. Предстоит набрать команду баскетболистов (5 человек) из 10 профессионалов и 6 любителей.

1) Сколько разных команд можно составить?
2) Сколько команд будет состоять только из профессионалов или только из любителей?
3) Сколько команд баскетболистов можно набрать так, чтобы количество профессионалов и любителей в них отличалось не более чем на одного человека?

4.19. Вы покупаете тетради в магазине, который может предложить семь разных типов тетрадей.

1) Сколько разных комплектов из 14 тетрадей вы можете купить?
2) Сколько комплектов для покупки можно составить, если ограничиться только тремя типами тетрадей, но купить все равно 14 тетрадей?

4.20. Цветочница продает тюльпаны пяти разных цветов: пурпурные, кремовые, золотые, янтарные и лиловые. Сколько разных букетов можно составить из пятнадцати тюльпанов, если лиловые цветы не должны входить в букет ни с янтарными, ни с золотыми?

4.21. В магазине вы решили купить продукты на сумму от 180 до 200 руб. Магазин предлагает вам молоко: цена одного пакета — 38 руб., выбираем из семи наименований; яйца: стоимость одного десятка — 52 руб., выбираем из четырех наименований; овощную смесь: цена одной упаковки — 46 руб., выбираем из шести наименований. Сколько разных покупок вы можете совершить в указанном ценовом диапазоне?

4.22. Собираясь на праздник, вы решили купить подарок на сумму от 800 до 1000 руб. (Неважно, будет ли подарок одним предметом или набором, его общая стоимость должна входить в заданный интервал.) Розы: цена одной — 110 руб., выбираем из восьми, но при покупке их количество всегда должно быть нечетным; книги: стоимость одной — 252 руб., выбираем из шести наименований; DVD диски: цена упаковки — 640 руб., выбираем из четырех наименований. Сколько разных подарков вы можете выбрать для покупки?

4.23. Сколькими способами можно записать 10 Гб информации на диски, если в нашем распоряжении имеется 5 DVD дисков объема 4,7 Гб, 3 DVD диска объема 1,4 Гб и 3 CD диска по 700 Мб?

4.24. Для проведения выпускного вечера нужно создать оргкомитет из 4 человек, причем выбирать надо следующим образом: из 6 человек — в 11 «А» классе, из 4 — в 11 «Б», из 5 — в 11 «В» и из 4 — в 11 «Г».

1) Сколько разных по составу оргкомитетов можно создать в указанных условиях?
2) Сколько разных по составу оргкомитетов можно создать, если ученики 11 «А» и 11 «В» классов не должны быть его членами одновременно?

4.25. Для проведения выпускного вечера нужно создать оргкомитет из 4 человек, причем выбирать надо следующим образом: из 5 человек — в 11 «А» классе, из 7 — в 11 «Б», из 9 — в 11 «В» и из 4 — 11 «Г». Сколько разных по составу оргкомитетов можно создать, если в него должны войти, по крайней мере, два ученика из 11 «А» класса и хотя бы один — из 11 «Г»?

4.26. В компьютерной фирме работают 6 инженеров, 10 программистов и 8 специалистов по тестированию программного обеспечения. Для обсуждения вопроса о новогодних премиях было решено составить комиссию из 6 человек. Сколькими способами это можно сделать, если:

1) все группы сотрудников должны быть представлены в равной мере?

2) необходимо обеспечить участие в комиссии, по крайней мере, двух инженеров?

4.27. В компьютерной фирме работают 5 инженеров, 8 программистов и 7 специалистов по тестированию программного обеспечения. Для обсуждения вопроса о распределении новогодних премий было решено составить комиссию из 6 человек. Сколькими способами это можно сделать, если необходимо пригласить, по крайней мере, трех программистов?

4.28. В компьютерной фирме работают 11 инженеров, 15 программистов и 9 специалистов по тестированию программного обеспечения. Для решения вопроса о том, кому будут вручены новогодние премии, было решено составить комиссию из 8 человек. Сколькими способами это можно сделать, если необходимо обеспечить участие представителей каждой из этих трех групп сотрудников?

4.29. В съемках фильма о студенческой жизни желают принять участие 3 студента первого курса, 6 — второго, 5 — третьего и 4 — четвертого. Из них нужно отобрать 8 актеров. Сколькими способами это можно сделать, если:

1) необходимо обеспечить равное участие студентов всех курсов?
2) необходимо участие, по крайней мере, одного студента второго курса?

4.30. В съемках фильма о студенческой жизни желают принять участие 3 студента первого курса, 6 — второго, 5 — третьего и 4 — четвертого. Из них нужно отобрать 8 актеров. Сколькими способами это можно сделать, если необходимо участие представителей всех курсов, кроме первого?

4.31. В съемках фильма о студенческой жизни желают принять участие 6 студентов первого курса, 7 — второго, 5 — третьего и 4 — четвертого. Из них нужно отобрать 8 актеров. Сколькими способами это можно сделать, если студенты первого и четвертого курсов не могут сниматься в этом фильме одновременно?

4.32. Все студенты группы успешно сдали сессию из трех экзаменов. По каждому экзамену была выставлена одна из оценок: «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно». Сколько студентов должно быть в группе, чтобы можно было утверждать, что, по крайней мере, три студента сдали сессию с одинаковым неупорядоченным набором оценок.

4.33. Все студенты нескольких групп первого курса успешно сдали сессию из пяти экзаменов. По каждому экзамену была выставлена одна из оценок: «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно». Сколько студентов должно быть в этих группах, чтобы можно было утверждать, что, по крайней мере, пять студентов сдали сессию с одинаковым неупорядоченным набором оценок.

4.34. Определите, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, где $n, a \in \mathbb{N}$.

4.35. Определите, сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, где $n, a \in \mathbb{N}$.

4.36. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$ при условии, что $x_1, x_2 \geqslant 0$, $x_3, x_4 \geqslant 4$?

4.37. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 35$ при условии, что $x_i \geqslant i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 5$?

∗4.38. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = a$ при условии, что $0 \leqslant x_i \leqslant c$ для $i = 1, 2, 3$ и $a, c \in \mathbb{N}$?

∗4.39. Определите число векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ с целочисленными компонентами, удовлетворяющими равенству $x_1+x_2+x_3+x_4 = 90$, если наложены ограничения $0 \leqslant x_1 \leqslant 10$, $10 \leqslant x_2 \leqslant 20$, $20 \leqslant x_3 \leqslant 30$, $30 \leqslant x_4 \leqslant 40$.

4.40. Докажите свойство симметрии биномиальных коэффициентов:

$$C(n, k) = C(n, n - k),\ 0 \leqslant k \leqslant n,$$

для всех натуральных чисел n.

4.41. Докажите **тождество Паскаля**[1]

$$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k),$$

где $0 \leqslant k \leqslant n$, двумя способами — алгебраическим и комбинаторным.

4.42. Докажите формулу бинома Ньютона методом математической индукции.

∗4.43. Докажите следующие свойства биномиальных коэффициентов для всех натуральных чисел n [39]:

1) $C(n, k) = \dfrac{n}{k} C(n - 1, k - 1), \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$

[1] Паскаль (Blaise Pascal) (1623–1662).

2) $C(n,k)C(k,m) = C(n,m)\,C(n-m,k-m)$,
$0 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2C(n,k) = n(n+1)2^{n-2}$;

6) $\left[\sum\limits_{k=0}^{n} C(n,k)\right]^2 = \sum\limits_{k=0}^{2n} C(2n,k)$;

7) $C\,(n+m,r) = \sum\limits_{k=0}^{r} C(m,r-k)\,C(n,k)$,
$r \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $r \leqslant \min(m,n)$ (**тождество Вандермонда**[1]);

8) $\sum\limits_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$.

4.44. Покажите, что тождество Паскаля можно доказать способом, отличным от представленных в решении упражнения **4.41**, а именно, используя соотношение $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$.

∗4.45. Докажите следующую связь биномиальных коэффициентов с числами Фибоначчи [4], определенными в упражнении **1.90**:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C(n-i,i) = F_{n+1},$$

где $n \geqslant 0$, $\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a, см. упражнение **3.96**.

∗4.46. Докажите тождество, устанавливающее связь между биномиальными коэффициентами и гармоническими числами [22]:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(n,i) = H_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

∗4.47. Обобщив результаты упражнений **1.113** и **1.114**, запишите выражение для произвольной степени k-го числа Люка L_k^n, $n \in \mathbb{N}$.

[1] Вандермонд (Alexandre-Théophile Vandermonde) (1735–1796).

4.48. С помощью формулы бинома Ньютона или полиномиального разложения найдите коэффициент:

1) при a^3b^5 после раскрытия скобок в выражении $(a-b)^8$;
2) при x^6yz^2 после раскрытия скобок в выражении $(x-2y+z)^9$;
3) при xyz^2 после раскрытия скобок в выражении $(x-y+2z-2)^7$.

4.49. С помощью формулы бинома Ньютона или полиномиального разложения найдите коэффициент:

1) при a^4b^5 после раскрытия скобок в выражении $(a-b)^9$;
2) при x^4yz^4 после раскрытия скобок в выражении $(x+y-z)^9$;
3) при xyz^2 после раскрытия скобок в выражении $(x-3y+z-2)^6$.

4.50. С помощью формулы бинома Ньютона или полиномиального разложения найдите коэффициент:

1) при a^6b^3 после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^9$;
2) при x^3yz^3 после раскрытия скобок в выражении $(x-y+z)^7$;
3) при x^2yz^3 после раскрытия скобок в выражении $(2x-y+z-3)^7$.

4.51. С помощью формулы бинома Ньютона или полиномиального разложения найдите коэффициент при z^l в разложении выражений:

1) $(\sqrt[3]{z}+\sqrt[6]{z})^7, \quad l=2$;
2) $(\sqrt[4]{z^5}+z^{-1})^{10}, \quad l=8$;
3) $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}+\sqrt[5]{z})^{10}, \quad l=3$.

4.52. С помощью формулы бинома Ньютона или полиномиального разложения найдите коэффициент при z^l в разложении выражений:

1) $(\sqrt{z}+\sqrt[4]{z})^{10}, \quad l=3$;
2) $(\sqrt{z^3}+z^{-1})^9, \quad l=1$;
3) $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}+\sqrt[7]{z})^{20}, \quad l=7$.

4.53. Треугольная таблица вида, представленного в табл. 4.2, называется **треугольником Паскаля** (или **арифметическим треугольником**) [74]. Треугольник Паскаля формируется следующим образом: в первой строке находится один элемент, во второй — два, в третьей — три и т. д.; его вершину и обе стороны образуют элементы, равные единице, любой из остальных элементов равен сумме двух ближайших элементов в расположенной выше строке. Элементы

Таблица 4.2

Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

таблицы обозначим $C_p(n, k)$, где n — номер строки, k — номер элемента в строке. Нумерацию элементов треугольника Паскаля принято начинать с нуля, поэтому $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Убедитесь, что треугольник Паскаля дает представление биномиальных коэффициентов $C(n, k)$, т. е. $C_p(n, k) = C(n, k)$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C(0,0) & & & \\
 & & C(1,0) & & C(1,1) & & \\
 & C(2,0) & & C(2,1) & & C(2,2) & \\
C(3,0) & & C(3,1) & & C(3,2) & & C(3,3) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

4.54. Определите сумму элементов n-й строки треугольника Паскаля.

4.55. Докажите следующие три свойства треугольника Паскаля:

1) Треугольник симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через его центр.
2) Второе и предпоследнее число в n-й строке равно номеру n этой строки.
3) Третье число каждой строки равно сумме номеров предшествующих строк.

4.56. Пусть дан треугольник Паскаля, состоящий из n строк. Чему будет равна сумма всех его элементов?

4.57. Выберем произвольный элемент $C(n,k)$ треугольника Паскаля с индексами $1 < k < n$, $n = 2, 3, \ldots$ Рассмотрим шесть чисел, соседних с $C(n,k)$, как показано в табл. 4.3.

Таблица 4.3

*К упр. **4.57***

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \cdot & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \\
 & & & \cdot & & \bullet & & \circ & & \cdot & & & \\
 & & \cdot & & \circ & & C(n,k) & & \bullet & & \cdot & & \\
 & \cdot & & \cdot & & \bullet & & \circ & & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

Докажите, что произведение чисел, обозначенных как «●», равно произведению чисел, обозначенных как «○» [26].

4.58. Докажите, что все числа, кроме первого и последнего, образующие строку треугольника Паскаля с номером 2^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, четны.

4.59. Докажите, что все числа, образующие строку треугольника Паскаля с номером $2^n - 1$, где $n = 1, 2, \ldots$, нечетны.

∗4.60. Докажите комбинаторным методом формулу включений и исключений для произвольного числа конечных множеств:

$$
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| +
$$

$$
+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.
$$

4.61. Под «словом» будем понимать произвольную конечную последовательность букв русского алфавита. Вычислите:

1) сколько различных «слов» можно получить из всех букв слова «ОБЪЕДИНЕНИЕ»;
2) сколько из них начинаются на букву «Д»;
3) в скольких из них буквы «И» идут подряд.

4.62. Вычислите:

1) сколько различных «слов» можно получить из всех букв слова «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ»;
2) сколько из них заканчиваются на букву «Ь»;
3) в скольких из них все буквы «О» стоят рядом.

4.63. Вычислите:

1) сколько различных «слов» можно получить из всех букв слова «ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ»;
2) сколько из них заканчиваются на букву «Ф»;
3) в скольких из них все буквы «Е» стоят рядом.

Ответы, указания, решения к главе «Комбинаторика»

4.1. *Ответ:*

1) $4 \cdot 5^3 = 500$;

2) $2 \cdot 5^3 = 250$.

4.2. *Решение.*

Как известно, существует пять нечетных цифр: 1, 3, 5, 7 и 9. Следовательно, имеется $5^6 = 15625$ возможностей для выбора первых шести цифр 11-значного палиндрома. Оставшиеся его цифры однозначно определяются по первым пяти. Значит, всего существует натуральных 15 625 11-значных чисел, десятичная запись которых содержит только нечетные цифры и является палиндромом.

4.3. *Ответ:* $2^{\lceil n/2 \rceil}$.

4.4. *Ответ:* $26^2 \cdot 10^2 \cdot 36^3$.

4.5. *Ответ:* $\widetilde{C}(6,9) = 2002$.

4.6. *Ответ:*

1) 2^{n^2};

2) 3^{n^2}.

4.7. *Ответ:*

1) $3^{n(n+1)/2}$;

2) $3^{n(n-1)/2}$.

4.8. *Ответ:*

1) $2^{|A|(|A|+1)/2}$;

2) $2^{|A|} \cdot 3^{|A|(|A|-1)/2}$.

4.9. *Ответ:* 252.

4.10. *Ответ:* 3168.

4.11. *Решение.*

Обозначим искомую величину через N. Далее подсчитаем количество N^* чисел, в десятичной записи которых не встречается ни цифра «5», ни цифра «9». Поскольку существуют 7 возможных вариантов для старшего разряда и 8 вариантов для остальных, всего таких чисел согласно правилу произведения $N^* = 7 \cdot 8^{n-1}$.

Несложно заметить, что величина $N + N^*$ равна количеству всех возможных n-значных чисел, а именно, $N + N^* = 9 \cdot 10^{n-1}$. Следовательно, количество натуральных n-значных чисел, в десятичной записи которых присутствует хотя бы одна из цифр «5» или «9», равно $N = 9 \cdot 10^{n-1} - N^* = 9 \cdot 10^{n-1} - 7 \cdot 8^{n-1}$.

4.12. *Ответ:*

1) $P(7,3) = 210$, $P(9,6) = 60480$, $P(5,2) = 20$;

2) $C(11,6) = 462$, $C(8,3) = 56$, $C(10,8) = 45$.

3) $\widetilde{P}(3,2) = 9$, $\widetilde{P}(2,5) = 32$, $\widetilde{P}(5,5) = 3125$.

4) $\widetilde{C}(5,1) = 5$, $\widetilde{C}(3,5) = 21$, $\widetilde{C}(4,14) = 680$.

4.13. *Решение.*

При выборе призеров имеет значение их порядок, а повторения запрещены. В силу этого существует

$$P(20,5) = \frac{20!}{(20-5)!} = \frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$$

возможностей присуждения призовых мест.

4.14. *Ответ:* $C(22,2)$.

4.15. *Решение.*

Актрис мы можем выбрать

$$C(9,4) = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$$

способами, а актеров —

$$C(17,14) = \frac{17!}{(17-14)!\,14!} = \frac{17!}{3!\,14!} = 680$$

способами. Таким образом, по правилу произведения находим, что существует $126 \cdot 680 = 85\,680$ различных актерских составов.

4.16. *Решение.*

1) Искомое число равно количеству сочетаний без повторений десяти элементов из ста:

$$C(100,10) = \frac{100!}{10!\,90!}.$$

2) После того как д'Артаньян будет записан в отряд, останется 99 возможных кандидатов на 9 вакантных мест. Следовательно, число способов во втором случае будет равно числу сочетаний без повторений девяти элементов из 99, или $C(99,9)$.

Число способов выбора уменьшится по сравнению с предыдущим случаем в

$$\frac{C(100,10)}{C(99,9)} = \frac{100!}{10!\,90!} \cdot \frac{9!\,90!}{99!} = 10 \text{ раз.}$$

4.17. *Ответ:*

1) $C(100,25) = \dfrac{100!}{75!\,25!}$;

2) уменьшится в четыре раза.

4.18. *Ответ:*

1) $C(16,5)$;

2) $C(10,5) + C(6,5)$;

3) $C(10,2)C(6,3) + C(10,3)C(6,2)$.

4.20. *Решение.*

Каждый букет — это неупорядоченная выборка пятнадцати тюльпанов с повторениями возможных цветов. Тюльпаны лилового цвета могут входить в букет только вместе с пурпурными или кремовыми, т. е. существуют $\widetilde{C}(3,15) = \dfrac{(3+15-1)!}{15!\,(3-1)!} = \dfrac{17!}{15!\,2!} = \dfrac{16 \cdot 17}{2} = 136$ возможностей для составления букета из тюльпанов этих трех цветов. Также можно составить букеты, в которые будут входить тюльпаны четырех цветов (без лиловых): $\widetilde{C}(4,15) = \dfrac{(4+15-1)!}{15!\,(4-1)!} = \dfrac{18!}{15!\,3!} = \dfrac{16 \cdot 17 \cdot 18}{6} = 816$. Следовательно, по правилу суммы мы можем составить $136 + 816 = 952$ букета. Но следует отметить, что при таком подсчете букеты, состоящие только из кремовых и пурпурных тюльпанов, учитывались дважды. Их количество равно $\widetilde{C}(2,15) = \dfrac{(2+15-1)!}{15!\,(2-1)!} = \dfrac{16!}{15!\,1!} = 16$.

В итоге получаем окончательный ответ: существуют $952 - 16 = 936$ возможностей для составления букета.

4.21. *Решение.*

Введем обозначения: A — молоко, B — яйца, C — овощная смесь. В табл. 4.4 приведены возможные варианты выбора продуктов.

Таблица 4.4

*К упр. **4.21**. Стоимость различных вариантов покупки*

A	B	C	Стоимость покупки (руб.)
5	0	0	190
4	0	1	198
2	2	0	180
1	3	0	194
1	2	1	188
1	1	2	182
0	2	2	196
0	1	3	190
0	0	4	184

Следовательно, можно совершить

$$C(7,5) + C(7,4)\cdot C(6,1) + C(7,2)\cdot C(4,2) + C(7,1)\cdot C(4,3) + \\ + C(7,1)\cdot C(4,2)\cdot C(6,1) + C(7,1)\cdot C(4,1)\cdot C(6,2) + \\ + C(4,2)\cdot C(6,2) + C(4,1)\cdot C(6,3) + C(6,4) = 1242$$

различных покупок.

4.24. *Ответ:*

1) $C(19,4) = 3876$;

2) $C(13,4) + C(14,4) - C(8,4) = 1646$.

4.25. *Ответ:*

$$C(5,3)C(4,1) + C(5,2)C(7,1)C(4,1) + C(5,2)C(9,1)C(4,1) + \\ + C(5,2)C(4,2) = 740.$$

4.26. *Решение.*

1) Поскольку все группы сотрудников должны быть представлены в равной мере, необходимо включить в состав комиссии ровно по два человека от каждой группы. Обозначим событие «выбраны два инженера» через A_1, событие «выбраны два программиста» — через A_2, а событие «выбраны два специалиста по тестированию» — через A_3.

Количество исходов события A_1 равно числу $(6, 2)$-сочетаний без повторений, т. е. биномиальному коэффициенту $C(6, 2)$. Событиям A_2 и A_3 отвечают $(10, 2)$-сочетания без повторений и $(8, 2)$-сочетания без повторений соответственно.

Для вычисления общего числа исходов последовательности событий A_1, A_2, A_3 следует применить правило произведения:

$C(6, 2)C(10, 2)C(8, 2) = 18900$.

2) Введем в рассмотрение следующие события:

A_1 — «выбраны два инженера и четыре сотрудника других специальностей»;

A_2 — «выбраны три инженера и три сотрудника других специальностей»;

A_3 — «выбраны четыре инженера и два сотрудника других специальностей»;

A_4 — «выбраны пять инженеров и один сотрудник другой специальности»;

A_5 — «все шесть выбранных сотрудников — инженеры».

Легко видеть, что события A_1–A_5 образуют все возможные способы выбора шести сотрудников таким образом, что будут приглашены, по крайней мере, два инженера. Согласно правилу суммы получаем окончательный ответ:

$$C(6, 2)C(18, 4) + C(6, 3)C(18, 3) + C(6, 4)C(18, 2) + \\ + C(6, 5)C(18, 1) + C(6, 6) = 64624.$$

Заметим, что можно использовать другой путь решения и рассмотреть, например, следующие события:

B — «выбраны шесть сотрудников»;

B_1 — «выбраны шесть сотрудников среди программистов или специалистов по тестированию»,

B_2 — «выбран один инженер и пять сотрудников других специальностей».

В таком случае ответ можно представить в более компактном эквивалентном виде: $C(24, 6) - (C(18, 6) + C(6, 1)C(18, 5))$.

4.27. *Ответ:*

$$C(8, 6) + C(8, 5)C(12, 1) + C(8, 4)C(12, 2) + \\ + C(8, 3)C(12, 3) = 17640.$$

4.28. *Ответ:*

$$C(35,8) - (C(24,8) + C(20,8) + C(26,8)) + \\ + (C(9,8) + C(15,8) + C(11,8)) = 21\,118\,713.$$

4.29. *Ответ:*
1) $C(3,2)C(6,2)C(5,2)C(4,2) = 2700$;
2) $C(18,8) - C(12,8) = 43263$.

4.32. *Решение.*

Число способов сдать три экзамена с тремя вариантами оценок равно числу сочетаний с повторениями из $n = 3$ по $k = 3$ (см. табл. 4.1 на стр. 189):

$$\widetilde{C}(3,3) = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = 10.$$

Согласно принципу Дирихле, при наличии в группе $2 \times 10 + 1 = 21$ студента найдутся трое учащихся с одинаковым неупорядоченным набором оценок.

Следовательно, в группе должно быть не менее 21 студента.

4.33. *Ответ:* не менее 85 студентов.

4.34. *Решение.*

Расположим a единиц в ряд, разделив его на n частей символами «$\downarrow$». Типичная схема такого разделения имеет вид:

$$\overbrace{\underbrace{1111}_{x_1}\downarrow\underbrace{111}_{x_2}\downarrow 11\ldots 11\downarrow\underbrace{111111}_{x_n}}^{a \text{ единиц, } n-1 \text{ символ «}\downarrow\text{»}}$$

В результате получено некоторое решение исходного уравнения. Поскольку число возможных мест для размещения символов «$\downarrow$» равно $a-1$, то всего существует $C(a-1, n-1)$ способов разбиения числа a на n положительных слагаемых.

4.35. *Решение.*

Прибавим к обеим частям равенства величину n:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \ldots + (x_n + 1) = a + n.$$

Замена переменных $\widetilde{x}_i = x_i + 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ приводит к уравнению $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{x}_n = a + n$, причем $\forall i\ x_i \geqslant 1$, количество решений которого, согласно результату предыдущего упражнения, равно

$C(a+n-1, n-1)$. Ясно, что число решений в целых неотрицательных числах исходного уравнения равно $C(a+n-1, n-1)$, или $C(a+n-1, a)$.

4.36. *Ответ:* 10.

4.37. *Ответ:* $C(24, 4) = 10626$.

4.38. *Решение.*
Рассмотрим предикат

$$P(x_1, x_2, x_3) = \{x_1 + x_2 + x_3 = a \ \textbf{и} \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_0\}$$

и введем обозначения для следующих множеств:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \colon P(x_1, x_2, x_3)\},$$
$$A_i = \{(x_1, x_2, x_3) \colon P(x_1, x_2, x_3) \ \textbf{и} \ x_i > c\}, \ \text{где } i = 1, 2, 3.$$

В терминах теории множеств задача сводится к определению величины $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$. Поскольку $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \subset U$, то $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Далее, вычислим мощности каждого из множеств U и $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Множество U составляют решения уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = a$ в целых неотрицательных числах. В соответствии с результатом упражнения **4.35**, $|U| = C(a+2, 2)$ для всех $a \in \mathbb{N}$.

Для вычисления $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ воспользуемся формулой включений и исключений:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Множество A_1 образовано решениями уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = a$ при условии, что $x_1 > c$, $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_0$. Сделаем замену переменных

$$x_1 = \widetilde{x}_1 + c, \quad x_2 = \widetilde{x}_2 - 1, \quad x_3 = \widetilde{x}_3 - 1.$$

Уравнение в новых переменных $\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \widetilde{x}_3 = a - c + 2$, $\widetilde{x}_i \geqslant 1$ для $i = 1, 2, 3$, имеет $C(a-c+1, 2)$ решений, если $a - c + 1 \geqslant 2$, в противном случае множество его решений пусто. Значит,

$$|A_1| = \begin{cases} C(a-c+1, 2), & \text{если } c \leqslant a-1, \\ 0, & \text{если } c > a-1. \end{cases}$$

В силу симметрии задачи относительно перестановки переменных имеем $|A_1| = |A_2| = |A_3|$.

Далее, рассмотрим множество $A_1 \cap A_2$. Его элементы являются решениями уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = a$ при условии, что $x_1, x_2 > c$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $x_3 \in \mathbb{Z}_0$. Получаем

$$|A_1 \cap A_2| = \begin{cases} C(a-2c, 2), & \text{если } c \leqslant \left\lfloor \dfrac{a}{2} \right\rfloor - 1, \\ 0, & \text{если } c > \left\lfloor \dfrac{a}{2} \right\rfloor - 1. \end{cases}$$

Свойства симметрии задачи позволяют записать следующие равенства: $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$.

Наконец, последнее слагаемое $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ равно $C(a-3c-1, 2)$, если $c \leqslant \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - 1$, и нулю в противном случае.

Окончательно получаем количество целочисленных решений исходного уравнения в виде кусочно заданной функции:

$$|U \backslash A| = \begin{cases} \frac{1}{2}(a+1)(a+2), & \text{если } c > a-1, \\ \frac{1}{2}((a+1)(a+2) - 3(a-c)(a-c+1)), & \text{если } \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1 < c \leqslant a-1, \\ \frac{1}{2}(3c+2-a)(3c+1-a), & \text{если } \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - 1 < c \leqslant \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1, \\ 0, & \text{если } c \leqslant \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - 1. \end{cases}$$

Примечание. Структура функции $f(a,c) = |U \setminus A|$ становится ясной из геометрических соображений. Действительно, с точки зрения аналитической геометрии искомая величина равна количеству точек, лежащих в пересечении плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = a$ и куба $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant c$ и имеющих целочисленные координаты. Пересечение данных объектов при различных соотношениях между величинами a и c может представлять собой: равносторонний треугольник — 1-я строка формулы для $f(a,c)$, шестиугольник — 2-я строка, снова равносторонний треугольник — 3-я строка. Кроме того, плоскость и куб при $c \leqslant \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - 1$ не имеют общих точек. Таким образом, разбиение области определения $\mathbb{Z}_0^2$ функции $f(a,c)$ на четыре множества отражает четыре возможных случая пространственного расположения указанных геометрических объектов (см. рис. 4.1). Также можно показать, что при $c = \text{const}$ максимальное значение функции $f(a,c)$ равно

$$f_{\max} = f\left(\left\lfloor \frac{3c}{2} \right\rfloor, c\right) = f\left(\left\lceil \frac{3c}{2} \right\rceil, c\right) = \frac{1}{2}\left((c+1)(c+2) + 2\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil\right).$$

4.39. *Ответ:* $C(33,3) - 4C(22,3) + 6C(11,3) = 286$.

4.40. *Доказательство.*

Воспользуемся определительной формулой для биномиального коэффициента в правой части равенства:

$$C(n, n-k) = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C(n,k).$$

Примечание. Помимо чисто алгебраического доказательства, многие тождества допускают доказательство комбинаторным методом. Для доказательства предложенного тождества можно рассуждать следующим

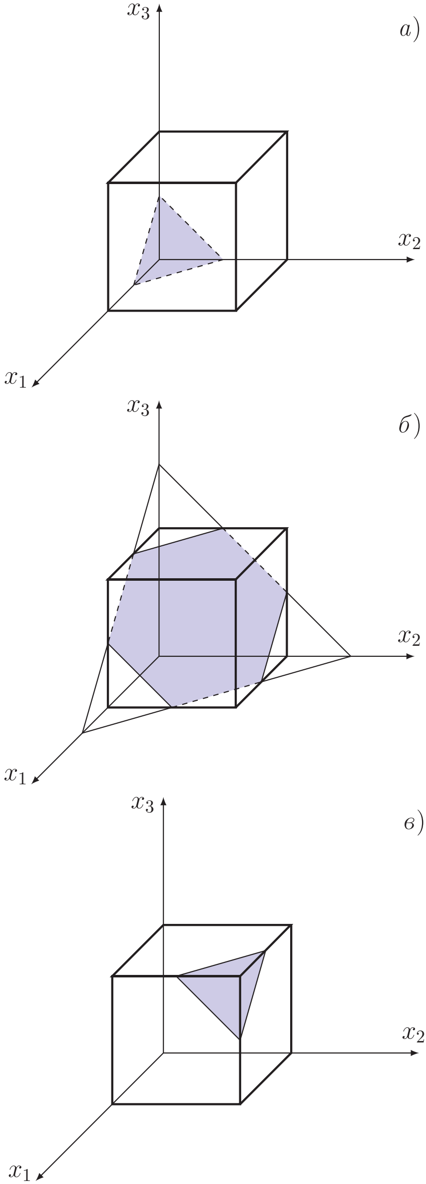


Рис. 4.1. Варианты пространственного расположения плоскости $x_1+x_2+x_3=a$ и куба $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant c$

образом. Известно, что $C(n,k)$ определяет число способов, которыми можно выбрать k различных элементов из n-элементного множества. Каждый такой способ однозначно определяет другую выборку — $(n-k)$ элементов из n-элементного множества, что влечет $C(n,n-k) = C(n,k)$.

4.41. *Доказательство.*

1) Алгебраическое доказательство.

Преобразуем сумму в правой части равенства

$$C(n-1,k-1) + C(n-1,k) = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} =$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,k!}(k+(n-k)) =$$
$$= C(n,k).$$

2) Комбинаторное доказательство.

Величина $C(n,k)$ определяет число способов выбора k различных элементов из n-элементного множества (например, множества A). Зафиксируем один из элементов множества $t \in A$. Число k-элементных подмножеств множества A, которые не содержат t, равно $C(n-1,k)$. Далее, число k-элементных подмножеств A, в которые включен t, равно $C(n-1,k-1)$, поскольку для формирования таких множеств следует добавить к изначально выбранному элементу t еще $k-1$ элементов. Полное число k-элементных подмножеств A равно сумме $C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$, что доказывает тождество Паскаля.

4.42. *Указание.* Для обоснования индукционного перехода примените тождество Паскаля.

4.43. *Доказательство.*

1) Представив $n!$ и $k!$ в виде $n! = n(n-1)!$, $k! = k(k-1)!$, по определительной формуле для $C(n,k)$ получим:

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k\,(k-1)!} = \frac{n}{k}C(n-1,k-1).$$

2) По определительной формуле для биномиальных коэффициентов имеем:

$$C(n,m)\,C(n-m,k-m) = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-k)!\,(k-m)!} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{k!}{(k-m)!\,m!} = C(n,k)\,C(k,m).$$

3) Рассмотрим выражение $(1+1)^n$. Разложим его по формуле бинома Ньютона.

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k).$$

Но, с другой стороны, $(1+1)^n \equiv 2^n$. Сравнивая полученные выражения, убеждаемся в справедливости тождества $\sum\limits_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

4) Для доказательства формулы рассмотрим вспомогательную функцию $f(x) = (1+x)^n$. Разложение $f(x)$ в ряд по степеням переменной x имеет следующий вид:

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k.$$

Продифференцируем полученное равенство по x.

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \cdot k x^{k-1}.$$

Подставляя в последнее равенство $x = 1$, получаем тождество

$$n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C(n,k).$$

5) Дифференцирование равенства $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k$ по переменной x дважды и подстановка $x = 1$ приводит к

$$n(n-1) 2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C(n,k).$$

С учетом пункта 4) данного упражнения получаем

$$n(n-1) 2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C(n,k) - n 2^{n-1},$$

откуда следует $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C(n,k) = n(n+1) 2^{n-2}$.

6) Раскрывая правую и левую части равенства $(1+1)^{2n} = [(1+1)^n]^2$, получаем тождество из условия.

7) Рассмотрим соотношение $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$. Разлагаем биномы в ряды и преобразуем суммы путем введения новой переменной $r = k_1 + k_2$ в правой части:

$$\sum_{r=0}^{m+n} C(m+n,r)x^r = \sum_{k_1=0}^{m} C(m,k_1)x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n} C(n,k_2)x^{k_2},$$

$$\sum_{r=0}^{m+n} C(m+n,r)x^r = \sum_{r=0}^{m+n} \sum_{k_2=0}^{r} C(m,r-k_2)C(n,k_2)x^r;$$

Приравнивая коэффициенты при множителях x^r и заменяя $k_2 \to k$, получаем

$$C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k).$$

8) Равенство является частным случаем тождества Вандермонда, доказанного в предыдущем пункте.

4.45. *Доказательство.*

Обозначим сумму в правой части равенства

$$a_{n+1} \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C(n-i,i), \quad n \geqslant 0.$$

Докажем, что последовательность $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, обладает определительными свойствами последовательности Фибоначчи

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Для этого рассмотрим первые два члена $\{a_n\}$:

$$a_1 = \sum_{i=0}^{\lfloor 0/2 \rfloor} C(0-i,i) = C(0,0) = 1, \quad a_2 = \sum_{i=0}^{\lfloor 1/2 \rfloor} C(1-i,i) = C(1,0) = 1.$$

Итак, первые два члена $\{a_n\}$ совпадают с соответствующими членами последовательности Фибоначчи: $a_1 = F_1, a_2 = F_2$.

Далее рассмотрим сумму последовательных членов $a_n + a_{n+1}$ и выразим ее через a_{n+2}:

$$a_n + a_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C(n-i,i) + \sum_{i=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C(n+1-i,i).$$

Отдельно рассмотрим два случая — четных и нечетных значений n.

1) Пусть n — четно. Воспользуемся очевидными равенствами

$$\lfloor n/2 \rfloor = n/2, \quad \lfloor (n+1)/2 \rfloor = n/2,$$

верными для всех четных значений n. Тогда

$$a_n + a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n/2} C(n-i,i) + \sum_{i=0}^{n/2} C(n+1-i,i).$$

В первой сумме произведем замену переменной $i \to i-1$ (обратим внимание на изменение пределов суммирования!), а во второй сумме выделим явно член с $i=0$:

$$\begin{aligned}
&a_n + a_{n+1} = \\
&= \sum_{i=1}^{n/2+1} C(n+1-i,i-1) + \left(C(n+1,0) + \sum_{i=1}^{n/2} C(n+1-i,i) \right) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n/2} C(n+1-i,i-1) + C(n/2,n/2) \right) + \\
&\qquad\qquad + \left(C(n+1,0) + \sum_{i=1}^{n/2} C(n+1-i,i) \right) = \\
&= C(n/2,n/2) + \sum_{i=1}^{n/2} \big(C(n+1-i,i-1) + C(n+1-i,i) \big) + C(n+1,0).
\end{aligned}$$

Выражение под знаком суммы преобразуем с учетом тождества Паскаля

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k),$$

которое доказано в упражнении **4.41**. Учитывая значение биномиального коэффициента $C(n/2,n/2) = 1 = C(n/2+1,n/2+1)$, получим

$$\begin{aligned}
a_n + a_{n+1} &= C(n+1,0) + \sum_{i=1}^{n/2} C(n+2-i,i) + C(n/2+1,n/2+1) = \\
&= \sum_{i=0}^{n/2+1} C(n+2-i,i) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n+2)/2 \rfloor} C(n+2-i,i) \equiv a_{n+2}.
\end{aligned}$$

2) Пусть теперь n нечетно. Тогда

$$a_n + a_{n+1} = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} C(n-i,i) + \sum_{i=0}^{(n+1)/2} C(n+1-i,i).$$

В первой сумме произведем замену $i \to i-1$, а во второй сумме выделим явно член с $i=0$:

$$a_n + a_{n+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} C(n+1-i, i-1) + \left(C(n+1,0) + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} C(n+1-i, i) \right) =$$
$$= C(n+1,0) + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} \big(C(n+1-i, i-1) + C(n+1-i, i) \big) =$$
$$= C(n+2,0) + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} C(n+2-i, i) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n+2)/2 \rfloor} C(n+2-i, i) \equiv a_{n+2}.$$

Подводя итог, заключаем, что для любых $n \geqslant 3$ каждый член последовательности $\{a_n\}$ равен сумме двух предыдущих, так что $a_n \equiv F_n$.

4.46. *Доказательство.*

Воспользуемся методом математической индукции. Обозначим через $P(n)$ предикат $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i+1}}{i} C(n,i) = H_n$.

База индукции

Для $n=1$ имеем $\dfrac{(-1)^2}{1} C(1,1) = H_1$ — верное равенство.

Шаг индукции

Предположим, что $P(k)$ принимает истинное значение для некоторого натурального $k \in \mathbb{N}$. Докажем истинность $P(k+1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(k+1,i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(k+1,i) + \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \big(C(k,i) + C(k,i-1) \big) + \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(k,i) + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(k,i-1) + \frac{(-1)^{k+2}}{k+1}.$$

Первое слагаемое в сумме равно H_k по индуктивному предположению. Второе и третье слагаемые перепишем в виде единой суммы

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(k+1,i) = H_k + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} C(k,i-1).$$

Далее воспользуемся выражением биномиального коэффициента через факториалы от аргументов:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i+1}}{i}C(k+1,i)=H_k+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\frac{k!}{i\cdot(i-1)!\,(k-i+1)!}=$$
$$=H_k+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i+1}}{k+1}\frac{(k+1)!}{i!\,(k-i+1)!}=H_k+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)=$$
$$=H_k+\frac{1}{k+1}\left[\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)-(-1)C(k+1,0)\right]=$$
$$=H_k+\frac{1}{k+1}\left[1-\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i}C(k+1,i)\right]=H_k+\frac{1}{k+1}\left[1-(1-1)^{k+1}\right]=$$
$$=H_k+\frac{1}{k+1}=H_{k+1}.$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{i}C(n,i)=H_n$ при всех $n=1,2,\ldots$

4.47. *Решение.*

Как известно, $L_k=\varphi^k+\widetilde{\varphi}^k$, где $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение, $\varphi\widetilde{\varphi}=-1$. Раскроем L_k^n по формуле бинома Ньютона, рассмотрев случаи нечетных и четных значений n.

1. Пусть n — нечетное. Тогда

$$\begin{aligned}L_k^n&=(\varphi^k+\widetilde{\varphi}^k)^n=\varphi^{nk}+C(n,1)\varphi^{(n-1)k}\widetilde{\varphi}^k+C(n,2)\varphi^{(n-2)k}\widetilde{\varphi}^{2k}+\ldots+\\&\quad+C\Big(n,\frac{n-1}{2}\Big)\varphi^{\frac{n+1}{2}k}\widetilde{\varphi}^{\frac{n-1}{2}k}+C\Big(n,\frac{n+1}{2}\Big)\varphi^{\frac{n-1}{2}k}\widetilde{\varphi}^{\frac{n+1}{2}k}+\ldots+\\&\quad+C(n,n-2)\varphi^{2k}\widetilde{\varphi}^{(n-2)k}+C(n,n-1)\varphi^{k}\widetilde{\varphi}^{(n-1)k}+\widetilde{\varphi}^{nk}=\\&\quad=(\varphi^{nk}+\widetilde{\varphi}^{nk})+C(n,1)(\varphi\widetilde{\varphi})^k(\varphi^{(n-2)k}+\widetilde{\varphi}^{(n-2)k})+\\&\quad+C(n,2)(\varphi\widetilde{\varphi})^{2k}(\varphi^{(n-4)k}+\widetilde{\varphi}^{(n-4)k})+\ldots+C\Big(n,\frac{n-1}{2}\Big)(\varphi\widetilde{\varphi})^{\frac{n-1}{2}k}(\varphi^k+\widetilde{\varphi}^k).\end{aligned}$$

Далее воспользуемся свойствами $\varphi\widetilde{\varphi}=-1$, $\varphi^k+\widetilde{\varphi}^k=L_k$:

$$\begin{aligned}L_k^n&=L_{nk}+C(n,1)(-1)^kL_{(n-2)k}+C(n,2)(-1)^{2k}L_{(n-4)k}+\ldots+\\&\qquad+C\Big(n,\frac{n-1}{2}\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}k}L_1.\end{aligned}$$

Учтем, что в последнем слагаемом $L_1=1$, и окончательно получим

$$L_k^n=L_{nk}+n(-1)^kL_{(n-2)k}+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{2k}L_{(n-4)k}+\ldots+C\Big(n,\frac{n-1}{2}\Big)(-1)^{\frac{n-1}{2}k}.$$

2. Пусть n — четное. Тогда

$$\begin{aligned}L_k^n = (\varphi^k + \widetilde{\varphi}^k)^n &= \varphi^{nk} + C(n,1)\varphi^{(n-1)k}\widetilde{\varphi}^k + C(n,2)\varphi^{(n-2)k}\widetilde{\varphi}^{2k} + \ldots + \\ &+ C(n,n/2-1)\varphi^{(n/2+1)k}\widetilde{\varphi}^{(n/2-1)k} + C(n,n/2)\varphi^{n/2k}\widetilde{\varphi}^{n/2k} + \\ &+ C(n,n/2+1)\varphi^{(n/2-1)k}\widetilde{\varphi}^{(n/2+1)k} + \ldots + C(n,n-2)\varphi^{2k}\widetilde{\varphi}^{(n-2)k} + \\ &+ C(n,n-1)\varphi^{k}\widetilde{\varphi}^{(n-1)k} + \widetilde{\varphi}^{nk}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения $\varphi\widetilde{\varphi} = -1$, $\varphi^k + \widetilde{\varphi}^k = L_k$, упростим правую часть:

$$\begin{aligned}L_k^n = L_{nk} + C(n,1)(-1)^k L_{(n-2)k} + C(n,2)(-1)^{2k} L_{(n-4)k} + \ldots + \\ + C(n,n/2-1)(-1)^{(n/2-1)k} L_{2k} + C(n,n/2)(-1)^{nk/2}.\end{aligned}$$

В итоге окончательно получим

$$L_k^n = L_{nk} + n(-1)^k L_{(n-2)k} + \frac{n(n-1)}{2} L_{(n-4)k} + \ldots + C(n,n/2)(-1)^{nk/2}.$$

4.48. *Решение.*

1) Разложим $(a-b)^8$ по степеням a и b. Искомый коэффициент с учетом знака равен $-C(8,5) = -56$.

2) Коэффициент при x^6yz^2, получающийся при раскрытии скобок в выражении $(x-2y+z)^9$, равен $-2\dfrac{9!}{6!\,1!\,2!} = -504$.

3) Коэффициент при abc^2d^3, получающийся при раскрытии скобок в выражении $(a+b+c+d)^7$, равен $\dfrac{7!}{1!\,1!\,2!\,3!} = 420$.

Другими словами, седьмая степень суммы $a+b+c+d$ содержит слагаемое $420\,abc^2d^3$. Положим $a = x$, $b = -y$, $c = 2z$ и $d = -2$.

Тогда, раскрывая скобки в выражении $(x-y+2z-2)^7$, мы получим $420\,x(-y)(2z)^2(-2)^3 = 13\,440\,xyz^2$. Следовательно, коэффициент при xyz^2 в выражении $(x-y+2z-2)^7$ равен $13\,440$.

4.49. *Ответ:*

1) -126;

2) 630;

3) -2160.

4.50. *Ответ:*
1) 84;

2) -140;

3) 5040.

4.51. *Решение.*
1) В разложении выражения $(\sqrt[3]{z}+\sqrt[6]{z})^7$ присутствуют слагаемые вида $C(7,k)(\sqrt[3]{z})^{7-k}(\sqrt[6]{z})^k$, а показатель степени $l=\dfrac{7-k}{3}+\dfrac{k}{6}$ равен двум при $k=2$. Следовательно, коэффициент при z^2 в разложении $(\sqrt[3]{z}+\sqrt[6]{z})^7$ равен $C(7,2)=\dfrac{7!}{5!\,2!}=21$.

2) В разложении выражения $(\sqrt[4]{z^5}+z^{-1})^{10}$ присутствуют слагаемые вида $C(10,k)(\sqrt[4]{z^5})^{10-k}z^{-k}$, показатель степени $l=\dfrac{5}{4}(10-k)-k$ равен восьми при $k=2$. Коэффициент при z^8 равен $C(10,2)=45$.

3) В разложении выражения $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}+\sqrt[5]{z})^{10}$ присутствуют слагаемые вида

$$\frac{10!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\left(\sqrt{z}\right)^{k_1}\left(\sqrt[3]{z}\right)^{k_2}\left(\sqrt[5]{z}\right)^{k_3},\quad k_1+k_2+k_3=10,$$

и показатель степени $l=\dfrac{k_1}{2}+\dfrac{k_2}{3}+\dfrac{k_3}{5}$ равен трем при $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=5$. В итоге коэффициент при z^3 равен $\dfrac{10!}{2!\,3!\,5!}=2520$.

4.52. *Ответ:*

1) $C(10,8)=45$;

2) $C(9,5)=126$;

3) $\dfrac{20!}{2!\,18!\,0!}+\dfrac{20!}{10!\,3!\,7!}=22\,170\,910$.

4.54. *Решение.*
Выпишем элементы, составляющие n-ю строку треугольника Паскаля: $C(n,0),C(n,1),\ldots,C(n,n)$. Искомая сумма равна

$$C(n,0)+C(n,1)+\ldots+C(n,n)=\sum_{i=0}^{n}C(n,i).$$

Согласно свойству биномиальных коэффициентов, сформулированному в пункте 3) упражнения **4.43**, величина этой суммы равна 2^n.

4.55. *Доказательство.*

1) Симметрия треугольника Паскаля относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, следует из легко проверяемого тождества $C(n,k) = C(n, n-k)$.

2) Второе число n-й строки равно $C(n,1) = \dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$. Предпоследнее число n-й строки равно $C(n, n-1) = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = C(n,1)$.

3) Запишем явное выражение для третьего числа n-й строки:

$$C(n,2) = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

С другой стороны, сумма номеров предшествующих строк также равна $1+2+\ldots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, что и доказывает третье свойство.

4.56. *Решение.*

Сумма всех чисел, входящих в состав треугольника Паскаля, определяется выражением

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} C(k,i) = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

4.57. *Доказательство.*

Элементы треугольника Паскаля, соседние с $C(n,k)$, являются биномиальными коэффициентами с индексами, отличающимися от n и k на единицу:

$C(n-1,k-1)$, $C(n,k+1)$, $C(n+1,k)$, (они обозначены «●»),
$C(n-1,k)$, $C(n+1,k+1)$, $C(n,k-1)$, (они обозначены «○»).

Утверждение задачи сводится к алгебраическому тождеству

$$C(n-1,k-1)C(n,k+1)C(n+1,k) = \\ = C(n-1,k)C(n+1,k+1)C(n,k-1).$$

После перестановки порядка сомножителей получаем требуемый результат:

$$\begin{aligned} &C(n-1,k-1)C(n,k+1)C(n+1,k) = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \\ &= C(n-1,k)C(n+1,k+1)C(n,k-1). \end{aligned}$$

4.58. *Доказательство.*

Строка треугольника Паскаля с номером 2^n образована величинами $C(2^n, 0) = 1, C(2^n, 1), \ldots, C(2^n, i), \ldots, C(2^n, 2^n - 1), C(2^n, 2^n) = 1$. Докажем, что все $C(2^n, i)$, где $i = 1, \ldots, 2^n - 1$, являются четными числами. Доказательство проведем методом математической индукции.

Обозначим предикат «$C(2^n, i)$ — четны для $i = 1, \ldots, 2^n - 1$» через $P(n)$.

База индукции

Для минимального возможного значения $n = 1$ получаем $C(2^n, i) = C(2, i)$ четно для $i = 1$, поэтому $P(1)$ — истинно.

Шаг индукции

Предположим, что $C(2^k, i)$ четно, и рассмотрим величины $C(2^{k+1}, i) = C(2 \cdot 2^k, i)$.

Для дальнейшего нам потребуется вспомогательное тождество

$$C(2n, i) = \sum_{j=0}^{n} C(n, j)C(n, i - j).$$

Данное тождество следует из $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$, где приравнены коэффициенты при x^i в правой и левой частях формулы:

$$C(2 \cdot 2^k, i) = \sum_{j=0}^{2^k} C(2^k, j)C(2^k, i - j).$$

По индуктивному предположению $C(2^k, i)$ четны. Сумма четных чисел является четным числом, значит, все величины $C(2^{k+1}, i)$ четны для $i = 1, \ldots, 2^k - 1$.

Далее, для установления истинности предиката $P(k + 1)$ в случае $i = 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$ проще всего воспользоваться свойством симметрии биномиальных коэффициентов, приведенным в упражнении **4.40**:

$$C(2 \cdot 2^k, i) = C(2 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k - i).$$

В силу этого $C(2^{k+1}, i)$ четны и для $i = 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$.

Остается только одно значение i, которое необходимо проверить, а именно, $i = 2^k$:

$$C(2^{k+1}, 2^k) = \sum_{i=0}^{2^k} C(2^k, i)C(2^k, 2^k - i) = \sum_{i=0}^{2^k} C(2^k, i)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{2^k - 1} C(2^k, i)^2 + 1.$$

Легко видеть, что полученное выражение четно, следовательно, при всех значениях $i = 1, \ldots, 2 \cdot 2^k - 1$ величины $C(2^{k+1}, i)$ четны.

4.59. *Доказательство.*

Согласно результату предыдущего упражнения, $C(2^n, i)$ четны при $i = 2, \ldots, 2^n - 1$. Рассмотрим часть треугольника Паскаля, состоящую из строк с номерами $2^n - 1$ и 2^n:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & . & & . & & . & & \ldots & \\
 & & 1 & & C(2^n-1,1) & & C(2^n-1,2) & & C(2^n-1,3) & & \ldots \\
 & 1 & & C(2^n,1) & & C(2^n,2) & & C(2^n,3) & & C(2^n,4) & & \ldots \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & & \ldots
\end{array}$$

По определительному свойству треугольника Паскаля произвольный элемент равен сумме двух вышестоящих элементов.

Поскольку $C(2^n, 1) = 1 + C(2^n - 1, 1)$ и $C(2^n, 1)$ четно, то величины $C(2^n - 1, 1)$ нечетны. Далее, так как $C(2^n, 2) = C(2^n - 1, 1) + C(2^n - 1, 2)$, и доказана нечетность $C(2^n - 1, 1)$, то $C(2^n - 1, 2)$ нечетно. Продолжая таким образом, получим, что все биномиальные коэффициенты в строке треугольника Паскаля с номером $2^n - 1$ нечетны.

4.60. *Доказательство.*

Требуется показать, что произвольный элемент объединения множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ будет подсчитан один и только один раз в правой части формулы. Пусть элемент x принадлежит множествам A_1, A_2, ..., A_k. Тогда x встречается $C(k, 1)$ раз в сумме $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$, $C(k, 2)$ раз в сумме $\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k} |A_i \cap A_j|$ и т. д. В сумме

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1\\ i_1 < i_2 < \ldots < i_m}}^{k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}|$$

элемент x встречается $C(k, m)$ раз. Получаем, что число вхождений произвольного x будет равно

$$C(k, 1) - C(k, 2) + \ldots + (-1)^{k-1} C(k, k) = 1.$$

4.61. *Решение.*

1) Предложенное слово состоит из одиннадцати букв. Число перестановок одиннадцати различных объектов равно $P(11, 11) = 11!$. Но, меняя местами одинаковые буквы, мы не получим нового «слова». Количество перестановок трех букв «Е» равно $3!$, двух «И» равно $2!$ и двух «Н» равно $2!$. Получаем, что всего можно составить $\dfrac{11!}{3!\,2!\,2!}$ «слов».

2) Зафиксируем букву «Д» на первом месте. После этого получим, что нужно определить число перестановок десяти букв, составляющих слово «ОБЪЕДИНЕНИЕ» без буквы «Д». Искомое число равно $\dfrac{10!}{3!\,2!\,2!}$.

3) Будем считать сочетание «ИИ» одной буквой. Тогда несложно определить число разных «слов», обладающих указанным свойством: $\dfrac{10!}{3!\,2!}$.

4.62. *Ответ:*
1) $\dfrac{18!}{(2!)^2\,3!\,7!}$; 2) $\dfrac{17!}{(2!)^2\,3!\,7!}$; 3) $\dfrac{12!}{(2!)^2\,3!}$.

4.63. *Ответ:*
1) $\dfrac{13!}{(2!)^3\,3!}$; 2) $\dfrac{12!}{(2!)^3\,3!}$; 3) $\dfrac{11!}{(2!)^3}$.

Глава 5

Графы

Графом называется пара $G = (V,\ E)$, где V — множество вершин, а E — множество ребер, соединяющих некоторые пары вершин [62, 141, 79, 95].

Говорят, что граф является **простым**, если он не содержит **петель** (ребер, начинающихся и заканчивающихся в одной вершине) и **кратных ребер** (кратными называются несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин), а множества V и E — конечны.

Рисунок, на котором вершины графа изображены точками, а ребра — отрезками или дугами, называется **диаграммой графа** [61].

Две вершины u и v графа **смежны**, если они соединены ребром $r = uv$. При этом говорят, что вершины u и v являются **концами** ребра r. Если вершина v является концом ребра r, то v и r **инцидентны** (от латинского *incēdere* — распространяться).

Степенью $d(v)$ вершины v считают число ребер, инцидентных данной вершине.

Минимальную степень вершин графа $G(V,E)$ обозначим через $\delta(G)$, максимальную — через $\Delta(G)$:

$$\delta(G(V,E)) = \min_{v\in V} d(v), \quad \Delta(G(V,E)) = \max_{v\in V} d(v).$$

Если степени всех вершин равны α, то такой граф называется **регулярным степени** α.

Матрица смежности M — это логическая матрица отношения на множестве вершин простого графа $G(V,E)$, которое задается его ребрами. Матрица смежности имеет размер $|V| \times |V|$, и ее элементы определяются согласно правилу

$$M(i,j) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если ребро } ij \in E, \\ \text{Л}, & \text{если ребро } ij \notin E. \end{cases}$$

Матрица инцидентности $\widetilde{M}$ простого графа $G(V, E)$ — это логическая матрица размера $|V| \times |E|$, отражающая инцидентность вершин и ребер. Элементы матрицы $\widetilde{M}$ определяются согласно правилу

$$\widetilde{M}(i,j) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ \text{Л}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Список смежности простого графа состоит из множества вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и множеств, которые для каждой вершины v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ содержат все вершины, смежные с v_i.

Пример 5.1. Рассмотрим граф $G(V, E)$, множество вершин и множество ребер которого заданы следующим образом:

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \quad E = \{ab, ac, ae, bc, bd, cd\}.$$

Граф $G(V, E)$ представлен на рис. 5.1.

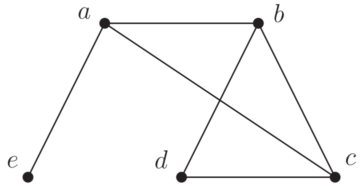


Рис. 5.1. Граф $G(V, E)$ примера 5.1

Матрица смежности M и матрица инцидентности $\widetilde{M}$ графа G имеют вид:

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \widetilde{M} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ab & ac & ae & bc & bd & cd \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Список смежности графа $G(V, E)$:

вершины графа	смежные вершины
a	$b,\ c,\ e$
b	$a,\ c,\ d$
c	$a,\ b,\ d$
d	$b,\ c$
e	$a.$

□

Подграфом графа $G = (V,\ E)$ называется граф $G' = (V',\ E')$, в котором $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$ и для каждого ребра $r \in E'$ оба его конца принадлежат V'.

Маршрутом длины k в графе G называется последовательность вершин $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_k$ такая, что $\forall i = 1, \ldots, k$ вершины v_{i-1} и v_i являются смежными. Рассматривают также **тривиальные** маршруты вида v_i, v_i.

Под **длиной** маршрута будем понимать количество ребер в нем с учетом повторений.

Циклом в графе G называется замкнутый маршрут $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_0$, у которого все вершины, кроме первой и последней, различны.

Граф **ацикличен**, если в нем нет циклов.

Граф называется **связным**, если каждая пара его вершин соединена некоторым маршрутом.

Числом связности графа $c(G)$ называется минимальное число связных подграфов графа G. О таких связных подграфах говорят как о **компонентах связности**.

Связный ацикличный граф $G = (V,\ E)$ называется **деревом**. Ацикличный граф также называют **лесом**, в связи с тем что компонентами связности леса являются деревья.

Пусть $G = (V,\ E)$ — граф с n вершинами и m ребрами. Каждое из следующих высказываний является необходимым и достаточным условием, для того чтобы граф G был деревом:

— любая пара вершин G связана единственным маршрутом;

— G связен и $m = n - 1$;

— G связен, а удаление хотя бы одного ребра нарушает это свойство;

— G ацикличен, но если добавить хотя бы одно ребро, то возникает цикл.

Часто удобно выделить одну из вершин дерева и назвать ее **корнем**.

Глубина вершины v дерева с корнем — это длина маршрута от корня к данной вершине.

Глубина дерева определяется как максимальная глубина его вершин.

Вершины одинаковой глубины образуют **уровень** дерева.

Вершина дерева, у которой степень $d = 1$, называется **листом**, а вершина степени больше первой, но не являющаяся корнем, — **внутренней вершиной**.

Остовным деревом графа G называется такой его подграф, который является деревом и содержит все вершины графа G.

В **двоичном** дереве для каждой вершины v_i $(1 \leqslant i \leqslant |V|)$ число вершин, смежных с ней и имеющих глубину на единицу больше, чем v_i, не превышает двух.

У **полного двоичного** дерева число вершин на каждом из уровней максимально и равно двум.

Граф называется **эйлеровым**[1], если в нем существует маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий по каждому ребру графа ровно один раз. Такой маршрут называется **эйлеровым**.

Связный граф с двумя и более вершинами является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень. Последнее утверждение составляет первый результат, открытый в теории графов [98].

Граф называется **гамильтоновым**[2], если в нем существует гамильтонов цикл, т. е. цикл, проходящий через каждую вершину графа, причем только один раз.

Введем еще одно важное в теории графов определение. Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными** $(G_1 \sim G_2)$, если существует взаимно однозначное отображение (биекция) вершин и ребер одного из этих графов соответственно на вершины и ребра другого, при котором сохраняется отношение инцидентности.

Изоморфные графы обладают одними и теми же свойствами, и их обычно не различают [47].

В задачах о составлении расписаний и многих других практических задачах важное значение имеют **хроматические** характеристики графов [47].

Вершинной k-раскраской называется функция, отображающая множество вершин V на множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ (множество «цветов»):

$$\varphi \colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Раскраска **правильная**, если $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ для любых смежных вершин u и v, т. е. никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета.

[1] Эйлер (Leonhard Euler) (1707–1783).

[2] Гамильтон (William Rowan Hamilton) (1805–1865).

Если возможно построить правильную k-раскраску для данного графа, то граф называется **k-раскрашиваемым**.

Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется **хроматическим числом** этого графа $\chi(G)$.

Граф является **бихроматическим** [62, 69], если $\chi(G) = 2$.

Реберной k-раскраской называется функция, отображающая множество ребер E на множество «цветов» $\{1, 2, \ldots, k\}$:

$$\psi\colon E \to \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Реберная раскраска **правильная**, если ребра, инцидентные одной вершине, получают разные цвета.

Минимальное число k, при котором граф G имеет правильную реберную раскраску, называется **хроматическим индексом** $\chi'(G)$.

Лемма о рукопожатиях утверждает, что *сумма степеней вершин произвольного графа $G = (V, E)$ равна удвоенному числу его ребер:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Ориентированные графы

Ориентированным графом или **орграфом** называется пара $D = (V, E)$, где V — конечное множество вершин, а E — отношение на V. Элементы множества E называются **направленными ребрами** или **дугами**. Дугу, соединяющую пару (u, v) вершин u и v орграфа D, обозначают через uv. В **простом** орграфе отсутствуют петли (т. е. дуги вида uu) и кратные дуги. Если $uv \in E$, то u называют **антецедентом** v (от латинского *antecēdere* — идти впереди) [4, 88].

Путем длины n в орграфе называют последовательность различных вершин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, каждая пара $v_{i-1}v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ которой образует дугу. Последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, в которой первая вершина v_0 совпадает с последней $v_0 = v_n$, а других повторяющихся вершин нет, образует **контур**. **Бесконтурный орграф** не содержит контуров.

Полустепенью исхода вершины v орграфа D называется число дуг $d^+(v)$ орграфа, исходящих из v, а **полустепенью захода** этой вершины — число дуг $d^-(v)$, входящих в нее.

Для ориентированных графов понятие связности становится не таким однозначным, как для неориентированных. **Связным** называется такой орграф, из которого получается связный граф после отказа от направления дуг. Ориентированный граф называется **сильно связным**, если для любой пары вершин $u, v \in V$ существует путь из u в v.

Матрицей достижимости M^* орграфа $D(V, E)$ называют логическую матрицу замыкания по транзитивности отношения E. В матрице достижимости хранится информация о существовании путей между вершинами орграфа: на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит «И» тогда и только тогда, когда существует путь из вершины v_i в v_j. Вычислить M^* можно по формуле с использованием логической операции **или** [78]:

$$M^* = M \textbf{ или } M^2 \textbf{ или } \dots \textbf{ или } M^n,$$

где n — число вершин ориентированного графа, $n = |V|$. Однако определение элементов M^* по приведенной формуле связано с вычислениями значительного объема, поэтому для орграфов с большим количеством вершин используют **алгоритм Уоршелла**[1]. Алгоритм Уоршелла рассмотрен в главе «Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов» на стр. 401.

Контрольные вопросы к главе «Графы»

1. Дайте определение понятию графа.
2. Какие графы относят к простым графам?
3. Что такое степень вершины?
4. Перечислите способы представления графов.
5. Дайте определения следующим понятиям теории графов: маршрут, цикл, лес, дерево.
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия того, чтобы граф являлся деревом.
7. Какие вершины дерева называются листьями?
8. Какие графы относят к эйлеровым графам? Гамильтоновым графам?
9. Дайте определение изоморфным графам.
10. Перечислите основные хроматические характеристики графов.
11. Сформулируйте лемму о рукопожатиях.
12. Что такое ориентированный граф?
13. Дайте определения понятиям полустепени исхода и полустепени захода вершины.
14. Какими способами можно построить матрицу достижимости ориентированного графа?

[1] Уоршелл (Stephen Warshall) (1935–2006).

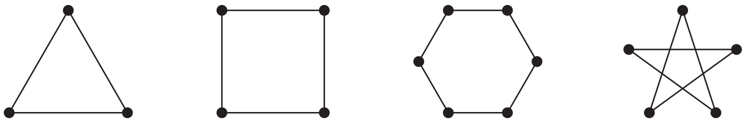


Рис. 5.2. К упр. **5.5**

Задачи к главе «Графы»

5.1. Докажите, что в любом нетривиальном графе G (т. е. графе с числом вершин $|V| > 1$) найдутся две вершины одной степени.

5.2. На приеме в посольстве некоторые гости обменялись рукопожатиями. Докажите, что число участников мероприятия, пожавших нечетное число рук, четно.

5.3. Выпишите матрицу смежности, матрицу инцидентности и список смежности графа $G(V, E)$, состоящего из множества вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множества ребер $E = \{ac, bd, be, de\}$. Начертите граф $G(V, E)$.

5.4. Выпишите матрицу смежности и список смежности графа $G(V, E)$, состоящего из множества вершин $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ и множества ребер $E = \{ab, bc, cd, de, ac, ce, ef, fc, ag, cg\}$. Начертите граф $G(V, E)$.

5.5. Изобразите граф G, матрица смежности которого имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Какие из изображенных на рис. 5.2 графов могут являться подграфами графа G?

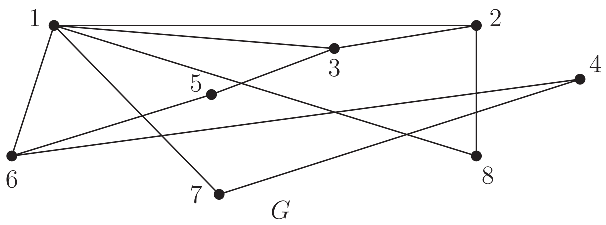


Рис. 5.3. К упр. **5.10**

5.6. Изобразите граф G, матрица смежности которого имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Какие из графов на рис. 5.2 могут являться подграфами графа G?

5.7. Какими свойствами обладает матрица смежности простого графа?

5.8. Однозначно ли определены матрица смежности и список смежности простого графа?

$*$**5.9.** Покажите, что количество различных маршрутов длины l из вершины графа с номером i в вершину с номером j равно элементу матрицы A^l_{ij}, где A — матрица, аналогичная матрице смежности графа:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } ij \in E; \\ 0, & \text{если ребро } ij \notin E, \end{cases}$$

а l — показатель степени A [46, 79].

5.10. Найдите гамильтонов цикл в графе G на рис. 5.3. Определите в нем циклы длины 3 и 4.

5.11. Являются ли графы G_1 и G_2 на рис. 5.4 гамильтоновыми? Эйлеровыми?

5.12. В **полном** графе любая пара вершин соединена ребром. Обозначим полный граф с n вершинами через K_n. Является ли полный граф K_n эйлеровым? Гамильтоновым? Рассмотрите случаи

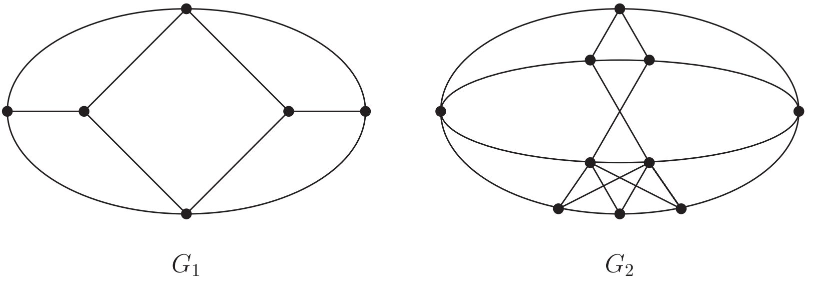


Рис. 5.4. К упр. **5.11**

1) нечетных n;
2) четных n.

5.13. Может ли полный граф иметь 20, 30 или 40 ребер?

5.14. Покажите, что в полном графе K_n при $n > 2$ имеется $\dfrac{1}{2}(n-1)!$ различных гамильтоновых циклов.

5.15. После удаления в полном графе нескольких вершин и инцидентных им ребер был получен новый полный граф с меньшим числом вершин. Известно, что было удалено 67 ребер. Определите минимально возможное число вершин в исходном графе.

5.16. После удаления в полном графе нескольких вершин и инцидентных им ребер был получен новый полный граф с меньшим числом вершин. Известно, что было удалено 106 ребер. Определите минимально возможное число вершин в исходном графе.

5.17. После удаления в полном графе нескольких вершин и инцидентных им ребер был получен новый полный граф с меньшим числом вершин. Известно, что было удалено 124 ребра. Сколько вершин было в исходном графе?

5.18. Приведите пример, если это возможно, такого графа, который одновременно:

1) эйлеров и гамильтонов;
2) эйлеров и негамильтонов;
3) неэйлеров и гамильтонов;
4) неэйлеров и негамильтонов.

∗5.19. Докажите, что отношение связности

$$\mathcal{C} = \{(v_1, v_2) \in V^2 : \text{ существует маршрут из } v_1 \text{ в } v_2\}$$

является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Чему соответствуют различные классы эквивалентности?

∗5.20. Определим отношение изоморфизма $\mathcal{I}$ на множестве всех графов U следующим образом: $G_1 \mathcal{I} G_2$ тогда и только тогда, когда графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ изоморфны. Покажите, что $\mathcal{I}$ есть отношение эквивалентности [77].

5.21. Покажите, что изоморфными будут графы G_1 и G_2, задаваемые следующими матрицами смежности:

$$M(G_1) = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}, \quad M(G_2) = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

5.22. Установите, изоморфны ли графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, задаваемые матрицами смежности:

$$M(G_1) = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}, M(G_2) = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

5.23. Определите хроматическое число χ:

1) полного графа K_n;

2) графа, полученного из полного n-вершинного графа удалением одного ребра.

5.24. Чему равны хроматическое число χ и хроматический индекс χ' **графа Петерсена**[1] P_{10} (рис. 5.5)?

[1] Петерсен (Julius Peter Christian Petersen) (1839–1910).

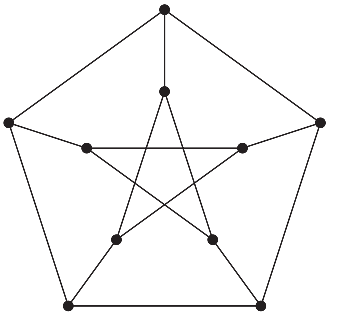


Рис. 5.5. Граф Петерсена

5.25. Докажите следующую оценку для хроматического числа:

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

5.26. **Теорема Визинга**[1] утверждает, что *для хроматического индекса произвольного простого графа $G(V, E)$ справедлива оценка* [47, 95]

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Графы, у которых $\chi'(G) = \Delta(G)$, называются **графами класса 1**, остальные относятся к **классу 2**.

Проверьте теорему Визинга для графа Петерсена и установите, к какому классу он относится.

5.27. Граф, представляющий собой цикл из n ребер при $n \geqslant 3$, называется ***n*-циклом** и обозначается C_n [77]. Проверьте теорему Визинга для C_n и установите, к какому классу относится n-цикл.

5.28. Проверьте теорему Визинга для полного графа K_n и установите, к какому классу он относится.

5.29. В частной школе в субботу запланированы семь уроков: математика, литература, риторика, природоведение, физическая культура, рисование и сольфеджио. Каждый урок занимает равно один час. Некоторые из уроков можно провести параллельно, а другие, например, такие, которые ведет один и тот же преподаватель, следует проводить последовательно. В табл. 5.1 знаком «×» отмечены занятия, которые не могут проводиться одновременно.

[1] Визинг (Вадим Георгійович Візінг) (1937–2017).

Таблица 5.1

*К упр. **5.29**. Знаками «×» отмечены пары уроков в школе, которые не могут проводиться одновременно*

Предмет	математика	литература	риторика	природоведение	физическая культура	рисование	сольфеджио
математика				×	×		
литература				×			×
риторика					×	×	×
природоведение	×	×					
физическая культура	×		×			×	×
рисование			×		×		×
сольфеджио		×	×		×	×	

Определите минимальное время, за которое можно провести все семь занятий в субботу.

5.30. Сервер базы данных обрабатывает запросы, поступающие от пользователей. В некоторый момент времени на сервер поступили девять запросов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_9$. Одновременная обработка некоторых из них невозможна, пары таких запросов отмечены в табл. 5.2 знаками «×». Предполагая, что обработка каждого запроса занимает ровно одну секунду, определите минимальное время обработки всех девяти запросов.

5.31. Изобразите деревья, задаваемые следующими матрицами смежности:

1) $\begin{bmatrix} Л & И & Л & Л \\ И & Л & И & Л \\ Л & И & Л & И \\ Л & Л & И & Л \end{bmatrix}$;

Таблица 5.2

К упр. ***5.30****. Знаками «×» отмечены пары запросов, которые не могут быть обработаны одновременно*

Запрос	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9
Z_1				×				×	×
Z_2			×	×			×		
Z_3		×					×	×	
Z_4	×	×			×		×		
Z_5				×		×	×		
Z_6					×			×	×
Z_7		×	×	×	×				
Z_8	×		×			×			×
Z_9	×					×		×	

2) $\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$

5.32. Выясните, являются ли графы, задаваемые следующими матрицами смежности, деревьями:

1) $\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix};$

2) $\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix};$

3) $\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$

5.33. Постройте все деревья с числом вершин $n \leqslant 7$.

5.34. Опираясь на принцип Дирихле, докажите, что если дерево T имеет более одной вершины, то у него найдутся, по крайней мере, две вершины одинаковой степени.

5.35. Известно, что дерево T имеет одну вершину степени 3, шесть вершин степени 2 и семь — степени 1. Остальные вершины дерева имеют степень 4. Сколько вершин степени 4 есть у дерева T?

5.36. Известно, что дерево T имеет две вершины степени 4, четыре вершины степени 3 и десять — степени 2. Остальные вершины дерева имеют степень 1. Сколько вершин степени 1 есть у дерева T?

5.37. Известно, что дерево T имеет две вершины степени 4, четыре вершины степени 3 и десять — степени 1. Остальные вершины дерева имеют степень 2. Сколько вершин степени 2 есть у дерева T?

5.38. Известно, что дерево T имеет одну вершину степени 4, семь вершин степени 2 и шесть — степени 1. Остальные вершины дерева имеют степень 3. Сколько вершин степени 3 есть у дерева T?

5.39. Сколько компонент связности имеет лес, содержащий:

1) 12 вершин и 10 ребер;
2) n вершин и m ребер $(m < n)$?

5.40. Докажите, что хроматическое число нетривиального дерева равно $\chi(T) = 2$.

5.41. Докажите, что хроматическое число леса F удовлетворяет неравенству $\chi(F) \leqslant 2$.

5.42. Начертите следующие двоичные деревья:

1) полное двоичное дерево с корнем глубины 3;
2) с корнем глубины 2, у которого количество листьев нечетно и на два превышает количество внутренних вершин;

3) дерево с корнем глубины 4; число вершин дерева равно 6, степень корня равна 2.

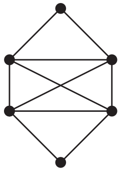
∗5.43. Докажите, что двоичное дерево с N вершинами имеет глубину не менее $\lfloor \log_2 N \rfloor$ ($\lfloor a \rfloor$ означает целую часть числа a, см. упражнение **3.96**).

5.44. Вычислительная сеть состоит из нескольких процессоров, объединенных в виде двоичного дерева. Администратор системы определил, что если увеличить количество процессоров в три раза, сохранив структуру сети прежней, то потребуется дополнительно проложить 14 линий связи. Сколько процессоров содержит данная вычислительная сеть в настоящее время?

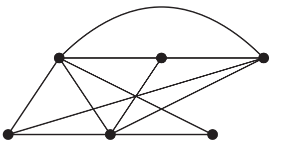
5.45. Вычислительная сеть состоит из n процессоров, объединенных в виде двоичного дерева. Если увеличить число процессоров до n^2, сохранив структуру сети прежней, то потребуется дополнительно проложить 240 линий связи. Сколько процессоров содержит данная вычислительная сеть в настоящее время?

5.46. Вычислительная сеть состоит из n процессоров, объединенных в виде двоичного дерева. Если увеличить число процессоров до n^3, сохранив структуру сети прежней, то потребуется дополнительно проложить 210 линий связи. Сколько процессоров содержит данная вычислительная сеть в настоящее время?

5.47. **Плоский** граф — это граф, расположенный на плоскости без пересечения ребер. Если данный граф можно таким образом расположить на плоскости, то он называется **планарным** (от латинского *plānārius* — равнинный) [61, 79]. Являются ли следующие графы G_1 и G_2 планарными?



G_1



G_2

5.48. Назовем область в плоском графе, ограниченную ребрами и не содержащую внутри себя вершин и ребер, **гранью**. Проверьте, что число вершин n, число ребер m и число граней r для графов G_1 и G_2 из упражнения **5.47** удовлетворяют соотношению $n-m+r=2$ (формула Эйлера).

5.49. Пусть в связном планарном графе $G(V, E)$ число вершин $|V| = n$, число ребер $|E| = m$, а число граней — r. Докажите **формулу Эйлера** [61, 79]

$$n - m + r = 2.$$

∗5.50. Покажите, что в произвольном простом планарном графе есть вершина степени не больше $d \leqslant 5$.

∗5.51. Докажите **теорему о пяти красках**: *всякий планарный граф можно раскрасить пятью красками* [47, 141].

5.52. **Гиперкуб** Q_d размерности d, где $d \in \mathbb{Z}_0$, содержит 2^d вершин и строится следующим образом. Вершинам графа Q_d приписаны битовые строки $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_t, \ldots, b_d)$, где $\forall t\ b_t \in \{0, 1\}$. Далее, вершины v_i и v_j являются смежными, если и только если $\mathbf{b}(v_i)$ и $\mathbf{b}(v_j)$ отличаются только одной компонентой. Основное свойство гиперкуба размерности d заключается в том, что он может быть получен путем соединения ребрами соответствующих вершин двух копий гиперкуба размерности $d-1$ (см. рис. 5.6, где приведены Q_d для $d \leqslant 3$).

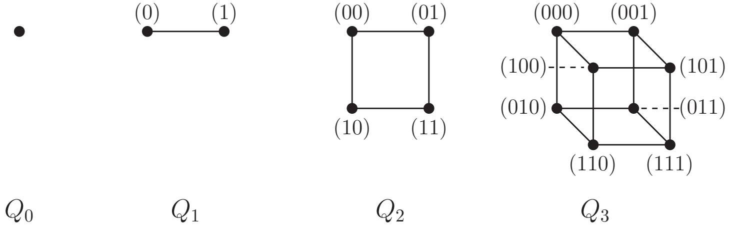


Рис. 5.6. Гиперкубы размерности $d = 0, 1, 2, 3$

Изобразите гиперкуб размерности $d = 4$.

5.53. Докажите, что гиперкуб Q_d является d-регулярным графом для всех $d \in \mathbb{Z}_0$.

5.54. Сколько ребер содержит гиперкуб Q_d?

5.55. Определите, при каких d гиперкуб Q_d является:

1) гамильтоновым;

2) эйлеровым.

∗5.56. Под k-**гранью** гиперкуба Q_d будем понимать некоторый подграф графа Q_d, обладающий свойствами гиперкуба размерности k, где $0 \leqslant k \leqslant d$.

1) Определите число k-граней гиперкуба Q_d размерности $d \geqslant 0$.

2) Чему равно общее число k-граней Q_d для всех $0 \leqslant k \leqslant d$?

5.57. Чему равны хроматическое число χ и хроматический индекс χ' гиперкуба Q_d для $d > 0$?

5.58. Изобразите орграф D, определяемый матрицей смежности

$$\begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Определите полустепени исхода и полустепени захода каждой вершины. Найдите в D направленный контур длины 4.

5.59. Выпишите матрицы смежности и списки смежности ориентированных графов D_1–D_4, которые представлены на рис. 5.7.

5.60. Какие из графов D_1–D_4, определенных в предыдущем упражнении, являются сильно связными?

5.61. Однозначно ли определена матрица смежности ориентированного графа? А список смежности?

5.62. Орграфы $D_1 = (V_1, E_1)$ и $D_2 = (V_2, E_2)$ являются изоморфными если существует биекция $H\colon V_1 \to V_2$ такая, что $(u, v) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(H(u), H(v)) \in E_2$. Установите, изоморфны ли следующие орграфы D_1 и D_2, задаваемые матрицами смежности:

$$M(D_1) = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}, \quad M(D_2) = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

5.63. Установите, изоморфны ли орграфы D_1 и D_2, которые изображены на рис. 5.8.

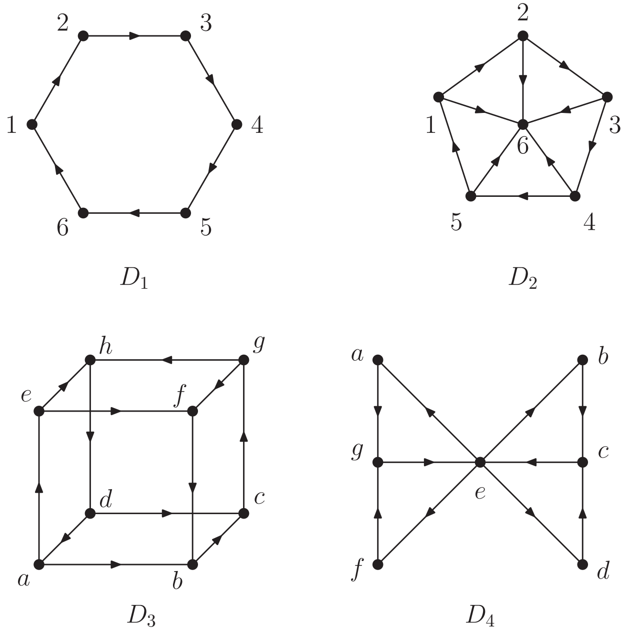


Рис. 5.7. К упр. **5.59**

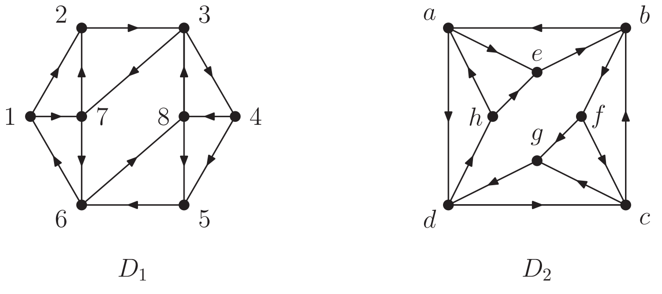


Рис. 5.8. К упр. **5.63**

∗5.64. Рассмотрим полный неориентированный граф K_n и укажем направление для каждого ребра. Полученный таким образом орграф назовем **турниром** и обозначим DK_n. Докажите следующие утверждения [81]:

1) Сумма полустепеней исхода всех вершин ориентированного графа DK_n равна сумме полустепеней захода.

2) Сумма квадратов полустепеней исхода всех вершин равна сумме квадратов полустепеней захода.

5.65. Покажите, что если орграф эйлеров, то он сильно связный.

5.66. Докажите, что если турнир DK_n сильно связный, то он гамильтонов [81, 95].

5.67. Вычислите матрицу достижимости M^* орграфа D, который изображен на рис. 5.9.

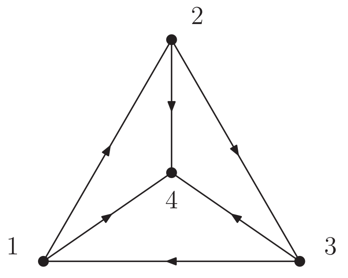


Рис. 5.9. К упр. **5.67**

5.68. Вычислите матрицу достижимости M^* орграфа D, который изображен на рис. 5.10.

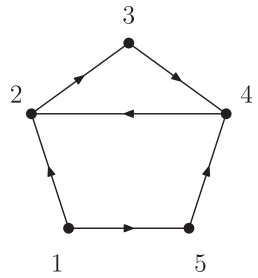


Рис. 5.10. К упр. **5.68**

Ответы, указания, решения к главе «Графы»

5.1. *Доказательство.*

В нетривиальном графе число вершин $n \geqslant 2$. Воспользуемся методом математической индукции. Пусть $P(n)$ — предикат «в любом графе с n вершинами найдутся две вершины одной степени». Для $n_0 = 2$ возможны два графа:

для которых, очевидно, $P(n_0)$ истинно.

Индуктивное предположение заключается в том, что истинно $P(k)$, $k \geqslant n_0$. Покажем, что в графе $G'(V', E')$ с $k+1$ вершинами найдутся вершины с одинаковой степенью.

Степень любой вершины $v \in V'$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant d(v) \leqslant k$. Если в G' имеется изолированная вершина, т. е. вершина с $d = 0$, то, согласно индуктивному предположению, в подграфе G', состоящем из всех вершин, кроме изолированной, обязаны присутствовать две вершины u и v, для которых $d(u) = d(v)$, и $P(k+1)$ истинно. Если изолированной вершины нет, то $\forall v \in V' \;\; 1 \leqslant d(v) \leqslant k$. Но в графе G' всего $k+1$ вершин, поэтому, по принципу Дирихле, степени, по крайней мере, двух из них совпадают, $P(k+1)$ истинно и в этом случае.

5.2. *Доказательство.*

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, вершины которого будут соответствовать участникам встречи, а ребро $uv \in E$, если и только если u и v пожали друг другу руки. $|E|$ — число ребер, другими словами — общее число всех рукопожатий. Воспользуемся леммой о рукопожатиях

$$\sum_{\text{все вершины}} d(v_i) = 2|E|,$$

где суммирование производится по всем вершинам графа G. Разобьем множество вершин на два подмножества, в зависимости от четности степени данной вершины v_i:

$$\sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{нечетной степени}}} d(v_i) + \sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{четной степени}}} d(v_i) = 2|E|,$$

$$\sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{нечетной степени}}} d(v_i) = 2|E| - \sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{четной степени}}} d(v_i).$$

Значит, сумма по всем вершинам нечетной степени четна. В сумме в левой части последнего равенства все величины $d(v_i)$ нечетные, запишем их в виде $d(v_i) = 2d_i + 1$, где $d_i = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{нечетной степени}}} d(v_i) \;=\; \sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{нечетной степени}}} 2d_i \;+\; \sum_{\substack{\text{все вершины}\\ \text{нечетной степени}}} 1.$$

Из последнего равенства следует, что число вершин нечетной степени графа G четно. Следовательно, число участников мероприятия, пожавших нечетное число рук, четно.

5.3. *Ответ:*

Матрица смежности M и матрица инцидентности $\widetilde{M}$ графа G имеют вид:

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \widetilde{M} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ac & bd & be & de \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Список смежности графа $G(V, E)$:

вершины графа	смежные вершины
a	c
b	$d,\ e$
c	a
d	$b,\ e$
e	$b,\ d$.

Граф $G(V, E)$ представлен на рис. 5.11.

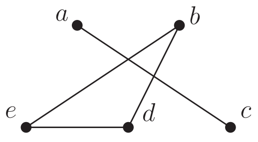


Рис. 5.11. К упр. **5.3**

5.4. *Ответ:*

Матрица смежности графа $G(V, E)$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Список смежности графа $G(V, E)$:

вершины графа	смежные вершины
a	$b,\ c,\ g$
b	$a,\ c$
c	$a,\ b,\ d,\ e,\ f,\ g$
d	$c,\ e$
e	$c,\ d,\ f$
f	$c,\ e$
g	$a,\ c.$

Граф $G(V, E)$ представлен на рис. 5.12.

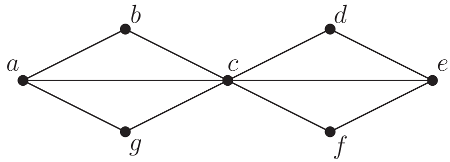


Рис. 5.12. К упр. **5.4**

5.5. *Решение.*

Пронумеруем строки и столбцы матрицы смежности числами от 1 до 6, соответственно номерам вершин графа. Изобразим граф G на рис. 5.13, *а*). На рис. 5.13, *б*) приведены те графы рис. 5.2, которые являются подграфами графа G.

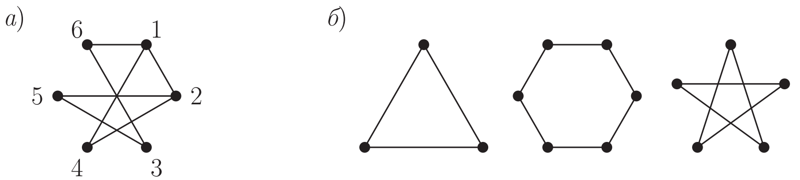


Рис. 5.13. К упр. **5.5**

5.7. *Решение.*

Пусть G — простой неориентированный граф с N вершинами. Тогда его матрица смежности имеет N строк и N столбцов, симметрична относительно главной диагонали, так как если существует ребро v_1v_2, принадлежащее множеству ребер E, то и ребро $v_2v_1 \in E$. На главной диагонали стоят «Л», ввиду отсутствия у простого графа петель. Кроме того, количество логических величин «И» в произвольной строке или столбце матрицы равно степени соответствующей вершины [69].

5.8. *Решение.*

Переобозначение вершин графа G приведет к перестановке строк и столбцов матрицы $M(G)$. Следовательно, есть неоднозначность в выборе матрицы смежности.

Список смежности графа также зависит от порядка, в котором обозначены вершины.

5.9. *Доказательство.*

Воспользуемся методом математической индукции. Обозначим утверждение задачи через $P(l)$, $l = 1, 2, \dots$

База индукции

Для $l = 1$ получаем, что $A^1_{ij} = A_{ij}$ есть просто элемент матрицы смежности. Он равен 1, если существует ребро ij, и равен 0 в противном случае. Эта величина равна числу маршрутов длины $l = 1$ из i-й вершины в j-ю.

Шаг индукции

Предположим, что утверждение $P(l)$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$ истинно. Рассмотрим элементы матрицы A^{l+1}. Поскольку $A^{l+1} = A^l \cdot A$, то имеем

$$A^{l+1}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A^l_{ik} A_{kj},$$

где n — размер матрицы A, т. е. число вершин графа.

Известно, что A^l_{ik} равняется числу маршрутов длины l из вершины графа с номером i в вершину с номером k, а величина A_{kj} равна 1, если существует ребро kj, и равна 0 в противном случае. Любой маршрут длины $l+1$ из i-й вершины в j-ю можно представить как объединение маршрута длины l вида $i, \dots, k$ и одного ребра kj. В выражении для A^{l+1}_{ik} присутствует сумма по всем вспомогательным вершинам k, поэтому утверждение $P(l+1)$ истинно.

Значит, в силу метода математической индукции величина A^l_{ij} равна числу маршрутов из вершины с номером i в вершину с номером j.

5.10. *Ответ:*

Гамильтонов цикл — 1,8,2,3,5,6,4,7,1. В качестве примеров циклов длины 3 и 4 можно привести 1,2,3,1 и 1,7,4,6,1 соответственно.

5.11. *Ответ:*

Граф G_1 является гамильтоновым, но не является эйлеровым. Граф G_2 является и гамильтоновым, и эйлеровым.

5.12. *Решение.*

В любом полном графе K_n для $n > 2$ существует гамильтонов цикл, который строится следующим образом. Выберем начальную вершину, например v_1, и перейдем в v_2, это возможно, поскольку в полном графе для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ существует ребро $v_1 v_2 \in E$. Далее включаем в маршрут вершины $v_3, v_4, \dots$ и так далее до v_n. В маршруте $v_1, \dots, v_n$

каждая вершина графа K_n встречается ровно один раз, следовательно, цикл $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ — гамильтонов.

Как известно, критерий существования эйлерова цикла следующий: каждая вершина графа должна иметь четную степень. В случае полного графа K_n все его вершины имеют одинаковую степень, равную $d(v_i) = n - 1$. Отсюда заключаем, что граф K_n эйлеров при нечетных значениях n.

5.13. *Ответ:* не может.

5.14. *Указание.*

Проведите процедуру построения гамильтонова цикла аналогично описанной в решении упражнения **5.12**.

5.15. *Решение.*

Пусть в исходном полном графе с n вершинами было удалено δ вершин, $1 \leqslant \delta \leqslant n$. Из условия задачи следует, что после удаления нескольких вершин и инцидентных им ребер граф остается полным. Поскольку в произвольном полном n-вершинном графе число ребер равно $\frac{1}{2}n(n-1)$, то имеет место равенство

$$\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-\delta)((n-\delta)-1) = 67.$$

После алгебраических преобразований получаем уравнение

$$\delta(2n - \delta - 1) = 2 \times 67.$$

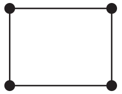
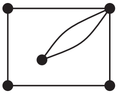
Левую часть данного уравнения образует произведение двух целых чисел. Согласно основной теореме арифметики, любое целое неотрицательное число, большее единицы, представляется единственным образом в виде произведения простых множителей $p_1^a p_2^b \ldots$ (см. упр. **1.127** на стр. 38). Учитывая, что 67 — простое число, и опираясь на основную теорему арифметики, получаем четыре возможных значения величин δ и $(2n - \delta - 1)$:

1) $\begin{cases} \delta = 1, \\ 2n - \delta - 1 = 2 \times 67; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \delta = 2, \\ 2n - \delta - 1 = 67; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \delta = 67, \\ 2n - \delta - 1 = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \delta = 2 \times 67, \\ 2n - \delta - 1 = 1. \end{cases}$

1)  2) 

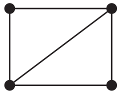
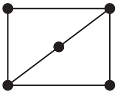
3)  4) 

Рис. 5.14. К упр. **5.18**

Системы уравнений 1) и 2) имеют решения $\delta_1 = 1$, $n_1 = 68$ и $\delta_2 = 2$, $n_2 = 35$. Системы уравнений 3) и 4) не имеют решений в натуральных числах, удовлетворяющих условию $\delta \leqslant n$.

Из двух возможных вариантов числа вершин в исходном графе минимальным является $n_2 = 35$.

Итак, наименьшее возможное число вершин в исходном графе равно 35.

5.16. *Ответ:* 29 вершин.

5.17. *Ответ:* 20 вершин или 125 вершин.

5.18. *Решение.*

В качестве примеров можно привести следующие графы, которые изображены на рис. 5.14 [59].

Обратим внимание, что предложенный в пункте 2) граф не является простым. Построение простого графа, удовлетворяющего требованиям пункта 2), оставляем для самостоятельного решения.

5.19. *Доказательство.*

Докажем рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения связности $\mathcal{C}$.

Отношение $\mathcal{C}$ рефлексивно, поскольку $\forall v \in V$ существует маршрут (тривиальный) из v в ту же вершину v.

Если $(v_1, v_2) \in \mathcal{C}$, то существует маршрут $v_1, \ldots, v_2$. Обратив этот маршрут, получим $v_2, \ldots, v_1$, что доказывает симметричность отношения связности.

Теперь докажем, что $\mathcal{C}$ транзитивно. Пусть $v_1 \,\mathcal{C}\, v_2$, $v_2 \,\mathcal{C}\, v_3$ для вершин $v_1, v_2, v_3 \in V$. Значит, существуют маршруты $v_1, \ldots, v_2$ и $v_2, \ldots, v_3$. Далее возникают две возможности, как показано на рис. 5.15:

1) В маршрутах нет общих ребер. Тогда $v_1, \ldots, v_2, \ldots, v_3$ соединяет вершины v_1 и v_3, и $v_1 \,\mathcal{C}\, v_3$.

2) Есть некоторое ребро e, общее для двух маршрутов. Всегда можно построить маршрут C с началом в v_1 и концом в v_3, как показано на рис. 5.15, 2).

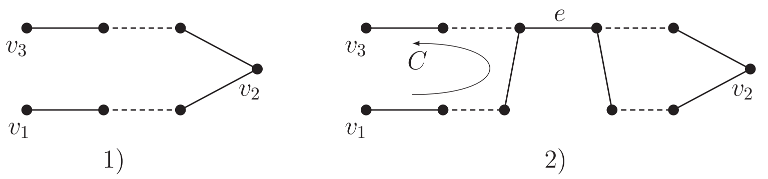


Рис. 5.15. Построение маршрута C (к упр. **5.19**)

Таким образом доказано, что отношение связности является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности образованы подмножествами множества вершин, соответствующими отдельным компонентам связности графа.

5.20. *Доказательство.*

Докажем рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения изоморфизма $\mathcal{I}$.

Для любого графа G имеет место $G \mathcal{I} G$, поскольку в качестве биекции, сохраняющей смежность, может быть выбрана тождественная функция $f = \{(v_1, v_1), \ldots, (v_n, v_n)\}$. Следовательно, $\mathcal{I}$ рефлексивно.

Пусть выполняется $G_1 \mathcal{I} G_2$ и существует биекция $f\colon V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность. Существует функция, обратная к f, $f^{-1} : V_2 \to V_1$. Это доказывает: $G_2 \mathcal{I} G_1$, и отношение $\mathcal{I}$ симметрично.

Наконец, проверим наличие свойства транзитивности. Пусть $G_1 \mathcal{I} G_2$ и $G_2 \mathcal{I} G_3$, соответствующие биекции $f_1\colon V_1 \to V_2$ и $f_2\colon V_2 \to V_3$. Построим композицию $f_2 \circ f_1\colon V_1 \to V_3$. Композиция двух биекций тоже биекция, и смежность вершин сохраняется. Значит, $G_1 \mathcal{I} G_3$, и доказана транзитивность отношения изоморфизма.

Подводя итог, заключаем, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на множестве всех графов U.

5.21. *Решение.*

Заметим, что перестановка строк или столбцов в матрице смежности приводит к изоморфному графу. Переставив местами вторую и пятую строки в $M(G_1)$, а затем второй и пятый столбцы, получим $M(G_2)$, что доказывает: $G_1 \sim G_2$. Рассмотренные графы представлены на рис. 5.16.

5.22. *Решение.*

Существует биекция $H\colon V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность: $H = \{(a, y), (b, t), (c, x), (d, u), (e, v), (f, z), (g, w)\}$. Рассмотренные графы представлены на рис. 5.17.

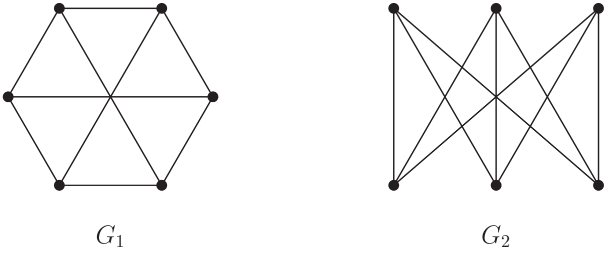


Рис. 5.16. К упр. **5.21**. Изоморфные графы

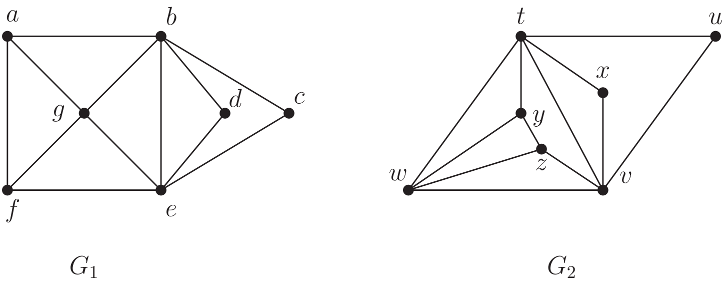


Рис. 5.17. К упр. **5.22**

5.23. *Решение.*

1) Поставим в соответствие вершине v_1 первый цвет. Вершину v_2 следует окрасить во второй цвет, так как она смежна с v_1. Для третьей вершины понадобится третий цвет и т. д. Вершина v_n получит цвет номер n, поэтому для полного графа $\chi(K_n) = n$.

2) Обозначим граф, полученный удалением из K_n одного ребра, через K'_n. Без ограничения общности можно считать, что удалено ребро v_1v_2. Вершины v_1 и v_2 не являются смежными, поэтому поставим в соответствие этим вершинам первый цвет. Вершины $v_2, \ldots, v_n$ вместе с инцидентными ребрами образуют подграф K_{n-1}, для правильной раскраски которого требуется, в соответствии с результатом предыдущего пункта, $n-1$ цвет. Следовательно, для графа K'_n хроматическое число равно $\chi(K'_n) = n-1$.

5.24. *Ответ:* $\chi(P_{10}) = 3$, $\chi'(P_{10}) = 4$ [108].

5.25. *Доказательство.*

Воспользуемся индукцией по числу вершин $|V| = n$. Обозначим через $P(n)$ предикат $\chi(G(V, E)) \leqslant \Delta(G(V, E)) + 1$.

База индукции

При $n = 1$ получаем $\chi(G) = 1$, $\Delta(G) = 0$. Значит, неравенство $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ выполняется.

Шаг индукции

Пусть для всех графов с числом вершин, не превосходящим k, предикат $P(k)$ принимает истинное значение. Рассмотрим граф $G(V, E)$ с числом вершин $|V| = k + 1$. Удалим произвольную вершину $v \in V$ вместе с инцидентными ей ребрами. Тогда для полученного графа G', согласно индуктивному предположению, $\chi(G') \leqslant \Delta(G') + 1$.

Но степень удаленной вершины v не превышает $\Delta(G)$, поэтому хотя бы один цвет в раскраске графа G' с помощью $\Delta(G') + 1$ цветов свободен для v. Покрасив вершину v в данный цвет, мы получим правильную раскраску. Таким образом, построена правильная раскраска графа $G(V, E)$, использующая $\Delta(G) + 1$ цвет.

5.26. *Ответ:* граф Петерсена относится ко второму классу.

5.27. *Решение.*

Следует рассмотреть случаи четного и нечетного количества вершин n (рис. 5.18).

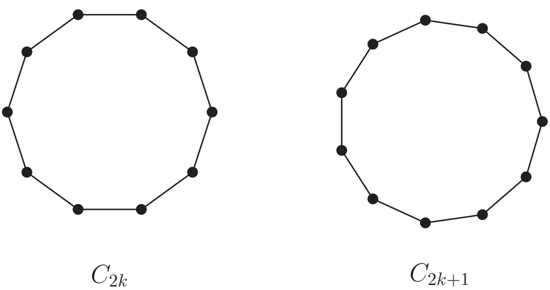


Рис. 5.18. Графы C_{2k} и C_{2k+1}, $k = 5$ (к упр. **5.27**)

Легко видеть, что ребрам C_{2k} можно приписать цвета $\psi(v_1v_2) = 1$, $\psi(v_2v_3) = 2$, $\psi(v_3v_4) = 1$, …, $\psi(v_{2k}v_1) = 2$, следовательно, $\chi'(C_{2k}) = 2$.

Рассуждая аналогичным образом, получим $\chi'(C_{2k+1}) = 3$.

На рис. 5.19 приведен один из возможных способов правильной раскраски рассмотренных графов. Штриховая, пунктирная и штрихпунктирная линии, использующиеся для обозначения ребер графов, соответствуют трем различным цветам.

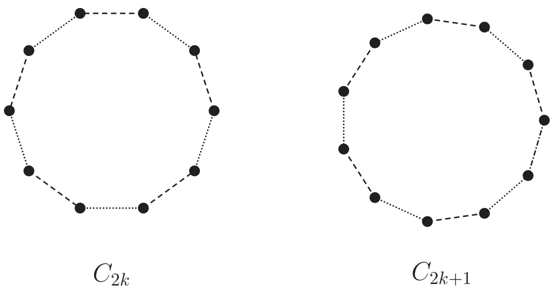


Рис. 5.19. Правильная раскраска графов C_{2k} и C_{2k+1}, $k = 5$ (к упр. **5.27**)

Поскольку независимо от четности n максимальная степень вершины n-цикла $\Delta(C_n)$ равна 2, то граф C_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, относится к первому классу, а граф C_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$, относится ко второму.

5.28. *Ответ:*
$\chi'(K_{2k+1}) = 2k + 1$, $\chi'(K_{2k}) = 2k - 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Полные графы с четным числом вершин K_{2k} относятся к классу 1, с нечетным K_{2k+1} — к классу 2.

5.29. *Решение.*
Обозначим преподаваемые в субботу дисциплины буквами латинского алфавита: математика — a, литература — b, риторика — c, природоведение — d, физическая культура — e, рисование — f, сольфеджио — g. Множество дисциплин $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Построим граф $G(V, E)$, вершины которого соответствуют урокам, и при этом две вершины G смежны, если и только если данные уроки нельзя провести одновременно (рис. 5.20).

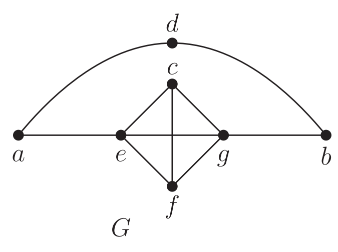


Рис. 5.20. Граф G к упр. **5.29**

Тогда любая правильная раскраска задает некоторое расписание в том смысле, что занятия, получившие одинаковые цвета, можно проводить одновременно. Получаем, что минимальное число часов, необходимых для проведения всех занятий, равно $\chi(G)$.

Так как граф G содержит полный подграф K_4, то $\chi(G) \geqslant 4$.

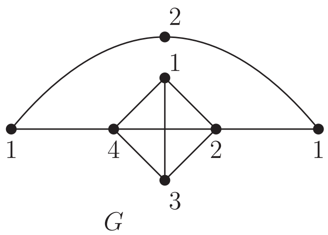
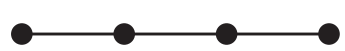


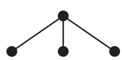
Рис. 5.21. Правильная раскраска графа G (к упр. **5.29**)

На рис. 5.21 приведена одна из допустимых правильных раскрасок. Итак, минимальное число часов, необходимое для проведения семи занятий в субботу, равно четырем.

5.30. *Ответ:* три секунды.

5.31. *Ответ:*

1) 

2) 

5.32. *Ответ:*

Только граф с матрицей смежности из пункта 1) является деревом, остальные графы содержат циклы и деревьями не являются.

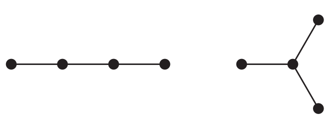
5.33. *Ответ:*

Дерево с одной вершиной единственно: •.

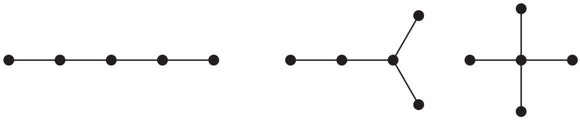
Дерево с двумя вершинами также можно изобразить лишь одним способом.

Также единственно дерево с тремя вершинами.

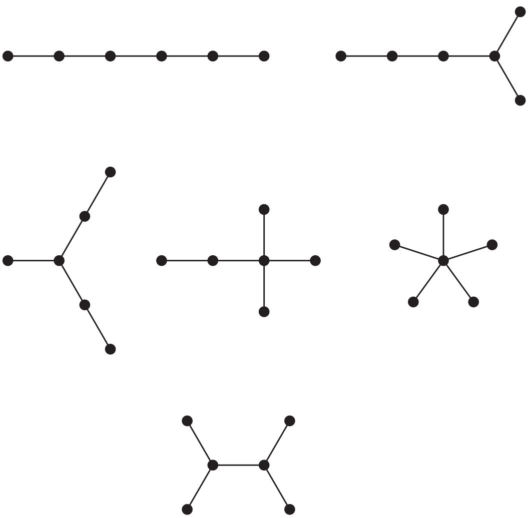
Деревья с четырьмя вершинами:



Деревья с пятью вершинами:



Деревья с шестью вершинами:



Построение всех деревьев с $n = 7$ оставляем в качестве упражнения (должно получиться 11 неизоморфных деревьев).

5.34. *Доказательство.*

Пусть $T = (V,\, E)$ — дерево с $n \geqslant 2$ вершинами. Обозначим через S множество степеней всех его вершин. Ввиду того что количество ребер в дереве $m = n - 1$, максимальная степень его вершин может быть равна $\Delta = n - 1$, а минимальная (ввиду связности) — $\delta = 1$. Следовательно, $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$ и $|S| \leqslant n - 1$.

Рассмотрим функцию $f\colon V \to S$, сопоставляющую каждой вершине графа T ее степень. Поскольку $|V| = n$, то имеет место неравенство $|V| > |S|$. Значит, по принципу Дирихле найдутся две вершины, на которых функция f принимает одно и то же значение, т.е. две вершины одинаковой степени.

5.35. *Решение.*

Пусть n — общее число вершин нашего дерева. Тогда сумма их степеней равна

$$4\,(n - 14) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 4n - 34.$$

С другой стороны, число ребер дерева T должно быть ровно на единицу меньше числа вершин, т. е. число ребер равно $n - 1$. Опираясь на лемму о рукопожатиях, получаем соотношение: $4n - 34 = 2\,(n - 1)$. Следовательно, $n = 16$, откуда получаем, что число вершин дерева T степени 4 равно двум.

5.36. *Ответ:*
У дерева T десять вершин степени $d = 1$.

5.37. *Ответ:*
У дерева T количество вершин степени $d = 2$ может быть любым.

5.38. *Ответ:*
У дерева T две вершины степени $d = 3$.

5.39. *Ответ:*
1) Количество компонент связности $c(G) = 2$;

2) $c(G) = n - m$.

5.40. *Доказательство.*
Приведем конструктивное доказательство, построив правильную раскраску произвольного дерева T. Корень дерева T окрасим в первый цвет, вершины следующего уровня — во второй и т. д., чередуя первый и второй цвета. Полученная раскраска является правильной, поскольку для любых двух смежных вершин их цвета будут разные, значит, $\chi(T) = 2$.

5.41. *Указание.* См. предыдущее упражнение.

5.43. *Доказательство.*
Из всех возможных двоичных деревьев минимальную высоту имеет полное дерево. Число вершин на первых k уровнях полного двоичного дерева равно

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Для произвольного бинарного дерева глубины h с n вершинами число уровней может только возрасти за счет дополнительных уровней, не заполненных полностью, поэтому выполняется неравенство

$$2^{h+1} - 1 \geqslant N.$$

Логарифмируя обе части неравенства, получим

$$h + 1 \geqslant \lceil \log_2(N + 1) \rceil,$$

где $\lceil a \rceil$ определяется как наименьшее целое, не меньшее a, или «округление сверху» (подробнее см. упражнение **3.96**). Воспользовавшись тождеством $\lceil \log_2(N + 1) \rceil = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ (оно доказано в решении упражнения **3.96**), получаем требуемую оценку для глубины двоичного дерева:

$$h \geqslant \lfloor \log_2 N \rfloor.$$

5.44. *Решение.*

Введем обозначения:

n — количество процессоров в вычислительной сети, это будет число вершин графа;

m — количество линий связи, т. е. число ребер в соответствующем графе.

Как известно, число ребер в произвольном дереве на единицу меньше количества вершин: $m = n - 1$. Согласно условию задачи, справедливо соотношение $m + 14 = 3n - 1$. Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} m = n - 1, \\ m + 14 = 3n - 1, \end{cases}$$

получаем $n = 7$.

Итак, вычислительная сеть содержит семь процессоров.

5.45. *Ответ:* 16 процессоров.

5.46. *Ответ:* 6 процессоров.

5.47. *Решение.*

Графы G_1 и G_2 можно перерисовать без пересечений ребер, как представлено на рис. 5.22.

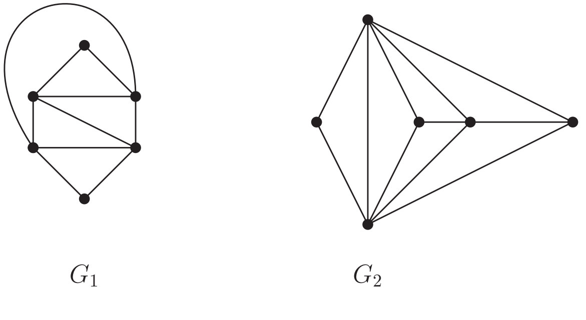


Рис. 5.22. К упр. **5.47**

По определению, G_1 и G_2 — планарные графы.

5.48. *Решение.*

Из диаграммы графа G_1 (см. решение упражнения **5.47** и рис. 5.22) заключаем, что $n = 6$, $m = 10$, $r = 6$. Следовательно, $n - m + r = 2$.

Для графа G_2 имеем $n = 6$, $m = 11$, $r = 7$, и $n - m + r = 2$.

5.49. *Доказательство.*

Каждый простой граф можно сконструировать из графа с меньшим на единицу числом ребер путем добавления одного нового ребра. В силу этого доказательство проведем индукцией по числу ребер в графе G. Если $m = 0$, то в силу связности в G есть только одна вершина $n = 1$ и одна (бесконечная) грань $r = 1$, и формула Эйлера выполняется.

Предположим теперь, что формула верна для любого графа G с m ребрами. Добавим к G новое ребро e, получим граф G' с числом вершин, числом ребер и числом граней n', m' и r' соответственно. Далее необходимо рассмотреть три случая.

1) Ребро e соединяет две различные вершины, тогда одна из граней графа G расщепляется на две, увеличивая общее число граней на единицу: $r' = r + 1$. Число вершин при этом не меняется, $n' = n$:

$$n' - m' + r' = n - (m + 1) + (r + 1) = n - m + r = 2.$$

2) Ребро e инцидентно только одной вершине в G, т. е. e соединяет существующую вершину с новой. Число граней не меняется, а число вершин и ребер следует увеличить на единицу:

$$n' - m' + r' = (n + 1) - (m + 1) + r = n - m + r = 2.$$

3) Ребро e является петлей. Образуется новая грань, а число вершин остается неизменным:

$$n' - m' + r' = n - (m + 1) + (r + 1) = n - m + r = 2.$$

Формула Эйлера остается справедливой в каждом из рассмотренных случаев.

5.50. *Доказательство.*

Без ограничения общности можно считать, что граф связный и содержит не менее трех вершин. Пусть в графе $G(V, E)$ число вершин $|V| = n$, число ребер $|E| = m$, а число граней — r.

Воспользуемся методом доказательства «от противного». Предположим, что степень каждой вершины не меньше 6. Тогда

$$\sum_{v \in V} d(v) \geqslant 6n.$$

Согласно лемме о рукопожатиях $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, значит, $6n \leqslant 2m$, $3n \leqslant m$.

Покажем, что для связного планарного графа с тремя и более вершинами число ребер не превышает $m \leqslant 3n - 6$. Для дерева $m = n - 1$, и при $n \geqslant 3$, очевидно, $m \leqslant 3n - 6$. Для произвольного простого планарного графа, не являющегося деревом, указанное неравенство следует из

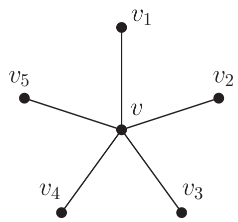


Рис. 5.23. Вершины, смежные с вершиной v

факта, что в простом графе каждая грань ограничена, по крайней мере, тремя ребрами (число вершин $n \geqslant 3$), и каждое ребро ограничивает не более двух граней. Тогда при подсчете числа ребер вокруг каждой из граней получим $3r \leqslant 2m$. С использованием формулы Эйлера получаем

$$\begin{aligned} n - m + r &= 2, \\ n - m + \frac{2}{3}m &\leqslant 2, \\ m &\leqslant 3n - 6. \end{aligned}$$

Но предположение, что $\forall v \in V \;\; d(v) \geqslant 6$, привело к неравенству $m \geqslant 3n$. Полученное противоречие доказывает: в планарном графе найдется вершина степени не больше пяти.

5.51. *Доказательство.*

Воспользуемся индукцией по числу вершин. Для планарных графов, имеющих меньше шести вершин, утверждение очевидно. Предположим, что G — планарный граф с n вершинами и что все планарные графы с $n-1$ вершинами можно раскрасить пятью красками. Согласно утверждению упражнения **5.50**, он содержит вершину v, степень которой не больше пяти, $d(v) \leqslant 5$. Удаление вершины v и всех инцидентных ей ребер приводит нас к графу с $n-1$ вершинами, который можно раскрасить пятью красками. Попробуем окрасить v в один из уже использовавшихся пяти цветов.

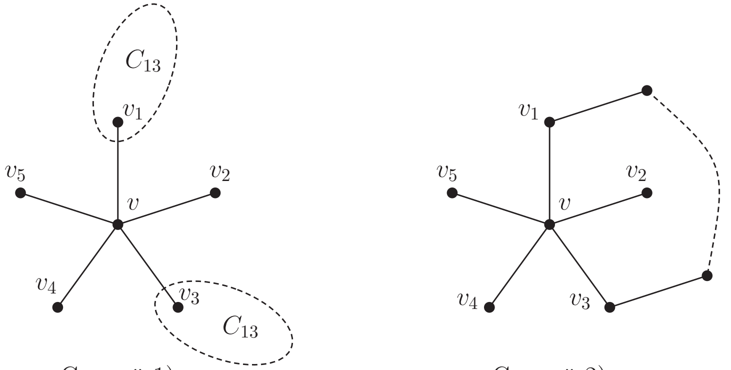
Если $d(v) < 5$, то v можно окрасить в любой цвет, не участвующий в окраске смежных вершин.

Предположим, что $d(v) = 5$ и что смежные с v вершины $v_1, \ldots, v_5$ располагаются вокруг v, как показано на рис. 5.23. Если каким-нибудь двум вершинам v_i и v_j приписан одинаковый цвет, то для v можно найти цвет, не участвующий в окраске смежных вершин.

Наконец, остается случай, когда всем смежным с v вершинам приписаны разные цвета. Пусть v_i окрашена в цвет c_i, $i = 1, \ldots, 5$. Обозначим через C_{ij} подграф графа G, вершинами которого являются все вершины цвета c_i или c_j, а ребрами — все ребра, соединяющие вершину цвета c_i с вершиной цвета c_j.

Теперь имеются две возможности.

1) Вершины v_1 и v_3 не принадлежат одной и той же компоненте графа C_{13}. В этом случае поменяем цвета всех вершин той компоненты C_{13}, которая содержит вершину v_1 (другими словами, обменяем цвета $c_1 \leftrightarrow \leftrightarrow c_3$). После этого v_1 приобретет цвет c_3, что позволит окрасить вершину v в цвет c_1 и тем самым построить требуемую раскраску.



Случай 1) Случай 2)

Рис. 5.24. Две возможности взаимного расположения вершин v_1 и v_3

2) Вершины v_1 и v_3 принадлежат одной и той же компоненте графа C_{13}. Тогда существует цикл $v, v_1, \ldots, v_3, v$, часть которого, заключенная между v_1 и v_3, целиком лежит в C_{13} (см. рис. 5.24). Так как v_2 находится внутри данного цикла, а v_4 — вне его, то не существует маршрута из v_2 в v_4, целиком лежащего в C_{24}, следовательно, мы можем поменять цвета всех вершин компоненты подграфа C_{24}, содержащей вершину v_2. При этом вершина v_2 приобретет цвет c_4, что позволит окрасить вершину v в цвет c_2. Теорема о пяти красках доказана.

5.52. *Ответ:* см. рис. 5.25.

5.53. *Указание.* Воспользуйтесь методом математической индукции.

5.54. *Решение.*

В соответствии с леммой о рукопожатиях имеем: $\sum\limits_{v_i \in V} d(v_i) = 2|E|$. Как показано в предыдущем упражнении, граф Q_d является d-регулярным, следовательно, $|E| = \dfrac{1}{2}d|V|$. В силу равенства $|V| = 2^d$ окончательно получаем число ребер гиперкуба размерности d: $|E| = d\,2^{d-1}$.

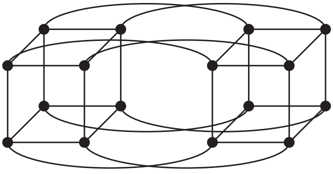


Рис. 5.25. Гиперкуб Q_4

5.55. *Ответ:*

Гиперкуб размерности d гамильтонов при всех $d \geqslant 2$, эйлеров при всех четных $d = 2k$, где $k \in \mathbb{Z}_0$.

5.56. *Решение.*

1) Заметим, что выделить некоторую k-грань гиперкуба Q_d можно путем выбора $(d - k)$ компонент вектора $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{B}^d$, причем каждая из них принимает значения из множества $\{0, 1\}$. Как известно, число $(d, d-k)$-выборок без повторений равно $C(d, d-k)$. Следовательно, по правилу произведения (см. главу «Комбинаторика» на стр. 187) число k-граней гиперкуба размерности d равно $C(d, d-k)2^{d-k}$, или $C(d, k)2^{d-k}$.

2) Общее число k-граней Q_d равно $\sum\limits_{k=0}^{d} C(d, k)2^k$. Полученное выражение представляет собой разложение бинома $(1 + 2)^d$, следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{d} C(d, k)2^k = 3^d$.

5.57. *Ответ:*

Для всех $d > 0$ имеем $\chi(Q_d) = 2$, $\chi'(Q_d) = d$.

5.58. *Решение.*

Орграф D приведен на рис. 5.26.

Воспользовавшись графическим представлением D, заключаем, что $d^+(a) = d^+(b) = 1$, $d^+(c) = 2$, $d^+(d) = 0$, $d^+(e) = 3$, $d^-(a) = d^-(c) = d^-(e) = 1$, $d^-(b) = d^-(d) = 2$.

Направленный контур длины 4 — a, b, c, e, a.

5.59. *Ответ:*

Выпишем матрицу смежности и список смежности орграфов D_1 и D_2.

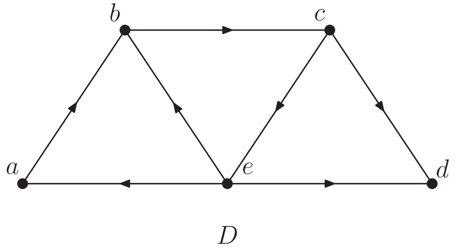


Рис. 5.26. К упр. **5.58**

$$M(D_1) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Л & И & Л & Л & Л & Л \\ Л & Л & И & Л & Л & Л \\ Л & Л & Л & И & Л & Л \\ Л & Л & Л & Л & И & Л \\ Л & Л & Л & Л & Л & И \\ И & Л & Л & Л & Л & Л \end{bmatrix} \end{array},$$

вершины орграфа D_1	смежные вершины
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	1

;

$$M(D_2) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Л & И & Л & Л & Л & И \\ Л & Л & И & Л & Л & И \\ Л & Л & Л & И & Л & И \\ Л & Л & Л & Л & И & И \\ И & Л & Л & Л & Л & И \\ Л & Л & Л & Л & Л & Л \end{bmatrix} \end{array},$$

вершины орграфа D_2	смежные вершины
1	2, 6
2	3, 6
3	4, 6
4	5, 6
5	1, 6
6	–

.

Представления орграфов D_3–D_4 записываются аналогично.

5.60. *Решение.*

В сильно связном орграфе для любых двух вершин $v_1, v_2 \in V$ существует путь $v_1, \ldots, v_2$. Легко видеть, что для D_1, D_3, D_4 это условие выполняется. Орграф D_2 не является сильно связным, так как нет ни одной дуги, исходящей из вершины 6.

5.61. *Указание.* См. решение упражнения **5.8**.

5.62. *Ответ:* орграфы изоморфны.

5.63. *Ответ:*

Представленные орграфы являются изоморфными. Соответствующая биекция $H\colon V_1 \to V_2$ такова:

$$H = \{(1,h),(2,e),(3,b),(4,f),(5,g),(6,d),(7,a),(8,c)\}.$$

5.64. *Доказательство.*

1) Для каждого узла v_i выполняется равенство

$$d^+(v_i) + d^-(v_i) = n-1, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Рассмотрим матрицу A, аналогичную матрице смежности. Элементы матрицы A определим по правилу

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } ij \in E, \\ 0, & \text{если дуга } ij \notin E. \end{cases}$$

Так как в ориентированном графе DK_n $\forall i,j \in V$ либо $A_{ij}=1$, либо $A_{ji}=1$ (но не одновременно), то $A_{ij}+A_{ji}=1$. Кроме того, для простого орграфа $A_{ii}=0$. Тогда полустепень исхода вершины v_i $d^+(v_i)$ можно выразить через элементы матрицы A

$$d^+(v_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

Далее, сумма полустепеней исхода всех вершин DK_n равна

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

Разобьем полученную сумму на три части

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n} A_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} A_{ij}.$$

В правой части равенства первая сумма равна нулю, поскольку равны нулю все ее слагаемые. В третьей сумме перейдем от A_{ij} к A_{ji} и затем переобозначим переменные суммирования $i \leftrightarrow j$:

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n} A_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} (1-A_{ji}) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n} A_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{n} (1-A_{ij}) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{n} A_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{n} 1 - \sum_{\substack{j,i=1\\ i>j}}^{n} A_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1\\ j<i}}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Проведя аналогичные преобразования для суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} d^-(v_i)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Это значит, что сумма полустепеней исхода всех вершин орграфа DK_n равна сумме полустепеней захода.

2) Выразим сумму квадратов полустепеней исхода через полустепени захода:

$$\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}\big((n-1) - d^-(v_i)\big)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(n-1)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(n-1)d^-(v_i) + \sum_{i=1}^{n}(d^-(v_i))^2.$$

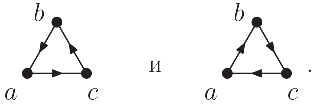
Воспользуемся результатом предыдущего пункта $\sum\limits_{i=1}^{n} d^-(v_i) = \dfrac{n(n-1)}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2 = n(n-1)^2 - 2(n-1)\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}(d^-(v_i))^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(d^-(v_i))^2.$$

Этим доказывается утверждение задачи.

5.65. *Решение.*
Выберем две вершины орграфа u и v, принадлежащие эйлеровому контуру C. Последний без ограничения общности можно представить как $C = A_1, u, A_2, v, A_3$, где A_i $(i = 1, 2, 3)$ — пути, являющиеся частями контура C. Теперь остается отметить, что путь u, A_2, v является путем из вершины u в v, а v, A_3, A_1, u — из вершины v в u. Следовательно, рассматриваемый орграф является сильно связным.

5.66. *Доказательство.*
Применим метод математической индукции. Пусть $P(n)$ — предикат «в сильно связном турнире с n вершинами существует гамильтонов контур». Сильно связным турниром с наименьшим количеством вершин является DK_3, поэтому доказательство утверждения $P(3)$ образует базу индукции. Всего возможны два сильно связных турнира с тремя вершинами, а именно,



Гамильтоновы контуры, соответственно, a, c, b, a и a, b, c, a.

Пусть $P(k)$ истинно, т. е. в сильно связном турнире с k вершинами найдется гамильтонов контур, например, $C = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. Добавим еще одну вершину вместе с инцидентными ей дугами и рассмотрим получившийся орграф DK_{k+1}.

Сильная связность турнира гарантирует существование, по крайней мере, одной дуги, исходящей из v_{k+1}, и, по крайней мере, одной дуги, входящей в эту вершину. Тогда в последовательности $C = v_1, \ldots, v_n, v_1$ всегда найдется такая вершина v_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, что существуют дуги $v_i v_{k+1}$ и $v_{k+1} v_{i+1}$ (рис. 5.27).

Последовательность $C' = v_1, \ldots, v_i, v_{k+1}, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1$ образует гамильтонов контур.

Итак, $P(k)$ влечет $P(k+1)$, и методом математической индукции доказано, что в сильно связном турнире существует гамильтонов контур.

5.67. *Решение.*

Запишем матрицу смежности орграфа:

$$M = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

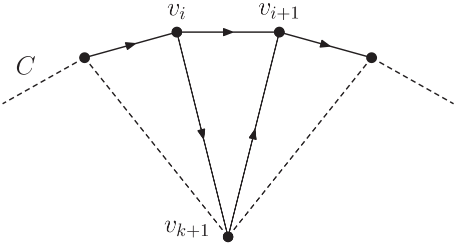


Рис. 5.27. Построение гамильтонового контура к упр. **5.66**

Последовательно вычисляем степени M^i для $i = 2, 3, 4$:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix},$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix},$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что можно использовать другие способы вычисления M^4: $M^4 = M \cdot M^3 = M^2 \cdot M^2$.

Матрицу достижимости находим по определительной формуле

$$M^* = M \textbf{ или } M^2 \textbf{ или } M^3 \textbf{ или } M^4 = \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

5.68. *Ответ:*

$$M^* = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{И} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix}.$$

Глава 6

Булева алгебра

Булева[1] **алгебра** — это множество $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ с определенными на нем операциями дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции ($\wedge$) и отрицания ($^{-}$) [82]. **Булева переменная** p может принимать значения 0 или 1 (и только их), $p \in \mathbb{B}$. Действие основных операций на булевы переменные представлено в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Отрицание, дизъюнкция и конъюнкция

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Булево выражение конструируется из булевых переменных с помощью операций $\vee$, $\wedge$, $^{-}$ и скобок. Выражения вида $x_1 \wedge x_2$ иногда записывают в виде $x_1 \,\&\, x_2$ или просто x_1x_2. Символ $\vee$ происходит от первой буквы латинского союза *vel* — «или». Обозначение & представляет собой видоизмененное написание слова *et* — «и» [3, 27].

Законы булевой алгебры приведены в табл. 6.2.

Набор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называют **булевым набором** (**вектором**). Элементы набора — **компоненты** или **координаты**. Функцию $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булево выражение, называют **булевой функцией**.

Одним из способов задания булевой функции $f(\mathbf{x})$ является таблица значений (табл. 6.3). Такую таблицу называют также **таблицей истинности**. Как несложно заметить, число строк в таблице равно 2^n [22], где n — число компонент вектора $\mathbf{x}$.

---

[1] Буль (George Boole) (1815–1864).

Таблица 6.2

Законы булевой алгебры

Законы идемпотентности

$$p \vee p = p, \qquad p \wedge p = p$$

Законы коммутативности

$$p \vee q = q \vee p, \qquad p \wedge q = q \wedge p$$

Законы ассоциативности

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r, \qquad p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$

Законы поглощения

$$(p \wedge q) \vee p = p, \qquad (p \vee q) \wedge p = p$$

Законы дистрибутивности

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r), \qquad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Свойства нуля и единицы

$$p \vee 1 = 1, \qquad p \wedge 0 = 0$$
$$p \vee 0 = p, \qquad p \wedge 1 = p$$

Свойства отрицания

$$p \vee \overline{p} = 1, \qquad p \wedge \overline{p} = 0$$
$$\overline{\overline{p}} = p$$

Законы де Моргана

$$\overline{(p \wedge q)} = \overline{p} \vee \overline{q}, \qquad \overline{(p \vee q)} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Таблица 6.3

Таблица значений функции $f(\mathbf{x})$

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0	0	$\ldots$	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
....					....
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Используется также способ задания функции вектором значений $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, где координата α_i равна значению функции на наборе переменных, расположенных в i-й строке, $0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$.

Множество всех возможных булевых функций, зависящих от n переменных, обозначается через $P_2(n)$. Количество таких булевых функций равно $|P_2(n)| = 2^{2^n}$. Например, число различных функций от одной переменной равно 4, от двух — 16.

В табл. 6.4 перечислены все функции из $P_2(2)$. Символы «$\downarrow$», «$|$», «$\oplus$», «$\leftrightarrow$» и «$\rightarrow$» являются сокращениями для комбинаций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Функции, перечисленные в табл. 6.4, широко распространены, и многие из них имеют специальные названия, приведенные в табл. 6.5.

Двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называют функцию

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}.$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ совпадает с функцией, которая двойственна ей, т. е. $f = f^*$, то функция $f(\mathbf{x})$ называется **самодвойственной**.

Элементарной конъюнкцией или **минтермом** называют конъюнкцию n различных булевых переменных или их отрицаний $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$, где $n \geqslant 1$ и

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} \overline{x}_i, & \sigma_i = 0, \\ x_i, & \sigma_i = 1. \end{cases}$$

Число переменных называется **рангом** элементарной конъюнкции. Элементарная конъюнкция называется **монотонной**, если она не содержит отрицаний переменных. Элементарная конъюнкция принимает

Таблица 6.4

Функции от двух аргументов

Обозначение		0	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{(x_1 \to x_2)}$	x_1
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
Обозначение		$\overline{(x_2 \to x_1)}$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
x_1	x_2	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
Обозначение		$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$\overline{x}_2$	$x_2 \to x_1$
x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
Обозначение		$\overline{x}_1$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \mid x_2$	1
x_1	x_2	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Таблица 6.5

Названия основных функций булевой алгебры

Обозначение	Название
0	константа нуль
1	константа единица
x_1	повторение x_1
x_2	повторение x_2
$\overline{x}_1$	отрицание x_1
$\overline{x}_2$	отрицание x_2
$x_1 \vee x_2$	дизъюнкция
$x_1 \downarrow x_2$	стрелка Пирса
$x_1 \wedge x_2$	конъюнкция
$x_1 \mid x_2$	штрих Шеффера
$x_1 \oplus x_2$	сложение по модулю два
$x_1 \leftrightarrow x_2$	эквиваленция
$x_1 \to x_2$	импликация

значение, равное 1, только на одном наборе значений аргументов. В силу этого произвольную функцию, не равную тождественно нулю, можно представить как дизъюнкцию элементарных конъюнкций. Выражение вида

$$\mathcal{D} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l,$$

где K_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ — попарно различные элементарные конъюнкции, называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ), в этом случае число l — длина ДНФ.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) составлена из элементарных конъюнкций ранга n. Такое представление определено единственным образом с точностью до перестановки элементарных конъюнкций.

Элементарной дизъюнкцией или **макстермом** называется выражение $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, $n \geqslant 1$, где все переменные, вошедшие в состав дизъюнкции, различны. Число переменных n называется **рангом** элементарной дизъюнкции.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) данной булевой функции, не равной тождественно единице, называется ее представление в виде конъюнкции некоторых элементарных дизъюнкций:

$$\mathcal{K} = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_l,$$

где D_i, $i = 1, 2, \ldots, l$ — попарно различные элементарные дизъюнкции. Число l называется длиной КНФ. **Совершенная конъюнктивная нормальная форма** (СКНФ) составлена из элементарных дизъюнкций ранга n.

Полиномом Жегалкина[1], или **алгебраической нормальной формой** (АНФ), называют сумму по модулю два нескольких элементарных конъюнкций вида

$$G = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_s,$$

где K_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, — попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над некоторым множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$, где $n = 1, 2, \ldots$ [22, 29, 82]. В качестве одного из K_i может выступать константа единица. Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином G, называется **степенью** полинома. Известно [82], что всякая булева функция единственным образом представима в виде полинома Жегалкина с точностью до порядка слагаемых в сумме и порядка сомножителей в конъюнкциях.

Существуют несколько методов построения полинома Жегалкина $G(\mathbf{x})$, выражающего заданную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [22].

1. *Метод неопределенных коэффициентов.*

Полином Жегалкина имеет вид

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_0 \wedge 1 \oplus g_1 \wedge K_1 \oplus g_2 \wedge K_2 \oplus \ldots \oplus g_{2^n-1} \wedge K_{2^n-1},$$

где K_i — монотонные элементарные конъюнкции, и коэффициенты $g_i \in \mathbb{B}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

Для определения неизвестных коэффициентов $g_0, g_1, \ldots, g_{2^n-1}$ составляем уравнения $G(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j)$ для всевозможных наборов $\mathbf{x}_j$. Получаем систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными, ее решение даст коэффициенты полинома $G(\mathbf{x})$.

2. *Метод эквивалентных преобразований.*

Запишем выражение для функции $f(\mathbf{x})$ и приведем его тождественными преобразованиями с помощью равенства $A \vee B = \overline{(\overline{A} \wedge \overline{B})}$ к эквивалентному выражению, содержащему только операции из множества $\{^{-}, \wedge\}$. Далее, исключаем операции отрицания, для чего заменим всюду выражения вида $\overline{A}$ на $A \oplus 1$. Затем раскроем скобки, пользуясь дистрибутивным законом $A \wedge (B \oplus C) = (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$ и принимая во внимание эквивалентности

$$A \wedge A = A, \quad A \wedge 1 = A,$$
$$A \oplus A = 0, \quad A \oplus 0 = A.$$

[1] Иван Иванович Жегалкин (1869–1947).

В итоге получим полином Жегалкина для функции $f(\mathbf{x})$.

Множество K функций булевой алгебры называют **замкнутым**, если произвольная суперпозиция функций из K также принадлежит данному множеству. Замкнутые множества называют **классами**.

Рассмотрим важнейшие классы булевых функций.

1. Функции, сохраняющие константы 0 и 1.

Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ **сохраняет константу** 0, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Аналогично функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ **сохраняет константу** 1, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Множество всех функций булевой алгебры от n переменных, сохраняющих константу 0, обозначается T_0^n, соответственно, функции, сохраняющие единицу, составляют множество T_1^n. Множества T_0^n и T_1^n являются замкнутыми, их мощности $|T_0^n| = |T_1^n| = 2^{2^n-1}$.

2. Самодвойственные функции.

Множество самодвойственных функций, зависящих от n переменных, является классом и обозначается S^n. Мощность множества S^n равна $|S^n| = 2^{2^{n-1}}$.

3. Линейные функции.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **линейной**, если она может быть представлена в виде полинома Жегалкина не выше первой степени:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \gamma_0 \oplus \gamma_1 x_1 \oplus \gamma_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_n x_n,$$

где $\gamma_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Множество всех линейных функций, зависящих от n переменных, обозначается L^n и является классом. Из определения L^n следует, что число всех неэквивалентных линейных функций равно $|L^n| = 2^{n+1}$.

4. Монотонные функции.

Считают, что набор $\boldsymbol{\alpha}$ предшествует набору $\boldsymbol{\beta}$, и пишут $\boldsymbol{\alpha} \preccurlyeq \boldsymbol{\beta}$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Булева функция $f(\mathbf{x})$ называется **монотонной**, если для любых двух наборов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ из $\mathbb{B}^n$ таких, что $\boldsymbol{\alpha} \preccurlyeq \boldsymbol{\beta}$, выполняется неравенство $f(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant f(\boldsymbol{\beta})$. Множество M^n монотонных функций, зависящих от n переменных, является классом.

Если из контекста известно число переменных, от которых зависит $f(\mathbf{x})$, то символ «n» в обозначении рассмотренных классов опускают: T_0, T_1 и т. д.

Система функций F называется **полной**, если любую булеву функцию можно получить суперпозицией функций из F. Известен критерий полноты, полученный Постом[1]: *система F функций из $P_2(n)$ полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, L и M.* Другими словами, для полноты системы F

[1] Пост (Emil Leon Post) (1897–1954).

необходимо и достаточно, чтобы в F имелись: хотя бы одна функция, не сохраняющая 0; хотя бы одна функция, не сохраняющая 1; хотя бы одна несамодвойственная функция; хотя бы одна нелинейная функция и хотя бы одна немонотонная функция.

Минимальное полное множество логических функций называется **базисом**. Если из базиса удалить любую функцию, то система перестанет быть полной.

Карта Карно

Для практических приложений важной задачей является упрощение булевой функции, записанной в дизъюнктивной нормальной форме. Один из методов решения данной задачи разработал Карно[1] [110].

Карта Карно — это таблица, каждый элемент которой представляет элементарную конъюнкцию. Для функции, зависящей от n булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$, существуют 2^n различных элементарных конъюнкций ранга n, поэтому карта Карно функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержит 2^n ячеек, каждая из которых соответствует одной из комбинаций вида $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$. Таблица имеет $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ строк и $2^{\lceil n/2 \rceil}$ столбцов, соседние ячейки отличаются значением одной переменной [4, 69, 130].

Карты Карно для частных случаев $n = 2$ и $n = 3$ изображены на рис. 6.1.

Для упрощения булевой функции с использованием карты Карно следует поступать таким образом:

1) для каждой элементарной конъюнкции обозначить соответствующий прямоугольник таблицы, например, символом «$*$»;

2) сформировать из помеченных ячеек прямоугольные блоки максимального размера, полностью покрывающие в совокупности все ячейки с символами «$*$»;

3) записать выражения, соответствующие сформированным блокам, и объединить их операцией дизъюнкции.

Для пояснения сформулированных правил работы с картой Карно рассмотрим несколько примеров.

[1] Карно (Maurice Karnaugh) (род. 1924).

а)

	q	$\overline{q}$
p	$p \wedge q$	$p \wedge \overline{q}$
$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$

б)

	q		$\overline{q}$	
p	$p \wedge q \wedge r$	$p \wedge q \wedge \overline{r}$	$p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$	$p \wedge \overline{q} \wedge r$
$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q \wedge r$	$\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}$	$\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$	$\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r$
	r	$\overline{r}$		r

Рис. 6.1. Карты Карно для $n = 2$ — панель *а*) и $n = 3$ — панель *б*)

Пример 6.1. Булевой функции $f(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee$ $\vee(\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$ соответствует карта Карно

	q	q	$\overline{q}$	$\overline{q}$
p	$*$		$*$	
$\overline{p}$			$*$	
	r	$\overline{r}$	$\overline{r}$	r

Элементарные конъюнкции, ячейки которых расположены рядом ($p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$ и $\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$), могут быть сведены к одной конъюнкции, содержащей только две переменные, а именно, $\overline{q} \wedge \overline{r}$:

	q	q	$\overline{q}$	$\overline{q}$
p	$*$		$*$	
$\overline{p}$			$*$	
	r	$\overline{r}$	$\overline{r}$	r

В итоге $f(p,q,r)$ можно записать в виде $f(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$. □

Пример 6.2. Булева функция

$$g(p,q,r) = (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$$

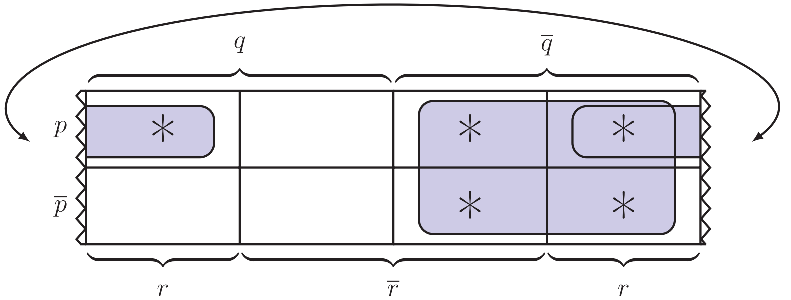
содержит в карте Карно четыре знака «$*$», расположенных рядом.

	q	q	$\overline{q}$	$\overline{q}$
p		$*$	$*$	
$\overline{p}$		$*$	$*$	
	r	$\overline{r}$	$\overline{r}$	r

Все выражение $g(p,q,r)$ сводится к $g(p,q,r) = \overline{r}$. □

Пример 6.3. Рассмотрим булеву функцию

$$h(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r).$$



Учтем, что минтермы $(p \wedge q \wedge r)$ и $(p \wedge \overline{q} \wedge r)$ можно также считать соседними, если отождествить («склеить») боковые стороны таблицы. Итак, $h(p,q,r)$ можно записать в виде $h(p,q,r) = \overline{q} \vee (p \wedge r)$. □

Функциональные схемы

Методы булевой алгебры используются при создании и анализе **функциональных схем**, позволяющих понять структуру и логику работы цифровых устройств, в том числе компьютеров. Функциональные схемы состоят из электронных устройств (называемых **функциональными элементами**) с конечным числом входов и выходов, причем на каждом входе и выходе могут появляться только два значения сигнала [70, 78].

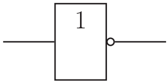
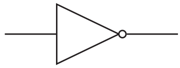
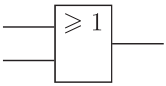
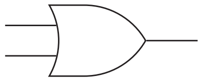
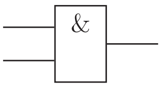
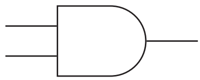
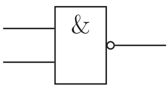
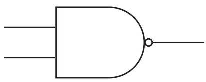
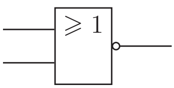
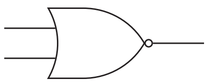
Сигналы 0 и 1 задаются разными уровнями напряжения. Сигнал логического нуля обычно представляется низким уровнем напряжения, логической единицы — высоким, такое соглашение называется **положительной логикой**. В **отрицательной логике** принято обратное отображение напряжений на логические величины.

Изображают логические схемы с помощью условных графических обозначений, указывающих на выполняемую данным элементом функцию и не затрагивающих особенностей его физической реализации, которая может быть относительно сложной. В настоящее время в литературе существует несколько общепринятых стандартов условных обозначений. Наиболее распространенным является зарубежный стандарт ANSI/IEEE Std 91-1984 «IEEE Standard Graphic Symbols for Logic Functions». В отечественной литературе условные обозначения элементов соответствуют ГОСТ 2.743-91 «Обозначения условные графические в схемах. Элементы цифровой техники».

Обозначения основных функциональных элементов в соответствии со стандартами IEEE и ГОСТ приведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6

Обозначения основных функциональных элементов

Название	ГОСТ 2.743-91	ANSI/IEEE Std 91-1984	Булева функция
НЕ			отрицание
ИЛИ			дизъюнкция
И			конъюнкция
И-НЕ			штрих Шеффера
ИЛИ-НЕ			стрелка Пирса

Известно, что с помощью рассмотренных функциональных схем можно реализовать любую булеву функцию [82].

Пример 6.4. Запишем булево выражение, соответствующее функциональной схеме S_1 на рис. 6.2.

Для этого выпишем в табл. 6.7 входы и выходы для каждого из бинарных функциональных элементов, образующих схему.

Получаем булево выражение $(p \wedge q) \vee \overline{(q \vee r)} \vee (r \wedge \overline{p})$, которое после применения закона де Моргана можно переписать в эквивалентном виде: $(p \wedge q) \vee (\overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{p})$. $\square$

В следующем примере показано, как с помощью карты Карно можно упростить функциональную схему.

Пример 6.5. Пусть задана функциональная схема S_2, представленная на рис. 6.3. С помощью карты Карно построим эквивалентную схе-

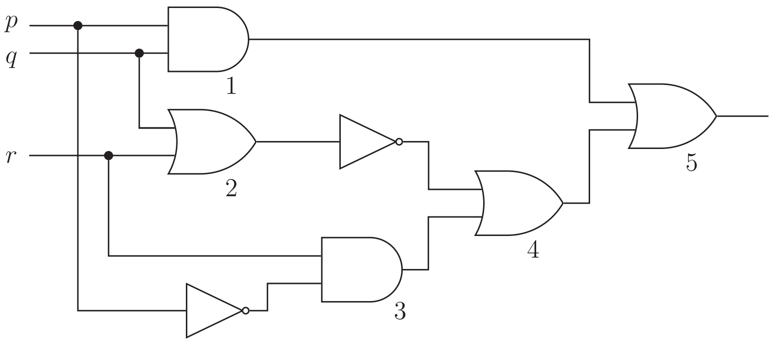


Рис. 6.2. Функциональная схема S_1 с тремя входами

Таблица 6.7

Значения на входах и выходах функциональной схемы S_1

Функциональный элемент	Входы	Выход
1	p, q	$p \wedge q$
2	q, r	$q \vee r$
3	$r, \overline{p}$	$r \wedge \overline{p}$
4	$\overline{(q \vee r)}, r \wedge \overline{p}$	$\overline{(q \vee r)} \vee (r \wedge \overline{p})$
5	$p \wedge q, \overline{(q \vee r)} \vee (r \wedge \overline{p})$	$(p \wedge q) \vee \overline{(q \vee r)} \vee (r \wedge \overline{p})$

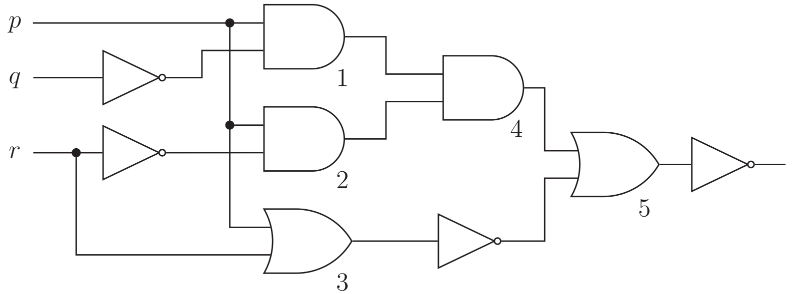


Рис. 6.3. Функциональная схема S_2

Таблица 6.8

Значения на входах и выходах функциональной схемы S_2

Функциональный элемент	Входы	Выход
1	$p, \overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$
2	$p, \overline{r}$	$p \wedge \overline{r}$
3	p, r	$p \vee r$
4	$p \wedge \overline{q}, p \wedge \overline{r}$	$(p \wedge \overline{q}) \wedge (p \wedge \overline{r}) = p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$
5	$p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}, \overline{(p \vee r)}$	$(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee \overline{(p \vee r)}$

му, состоящую из меньшего количества функциональных элементов по сравнению с исходной.

Составим таблицу, содержащую значения сигналов на входах и выходах бинарных функциональных элементов (табл. 6.8). Функция $f(p, q, r)$, генерируемая данной схемой, имеет вид

$$f(p, q, r) = \overline{((p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee \overline{(p \vee r)})}.$$

С учетом законов де Моргана и свойств отрицания получим:

$$f(p, q, r) = \overline{(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})} \wedge (p \vee r).$$

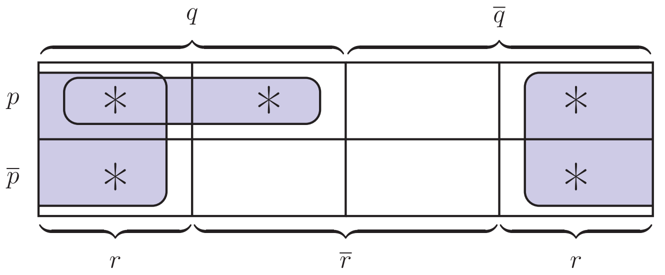
Вычислим вектор значений функции $f(p, q, r)$: $\boldsymbol{\alpha}_f = (0101\ 0111)$. Далее, найдем совершенную дизъюнктивную нормальную форму f. Для этого заметим, что функция f принимает значение, равное 1, на следующих наборах аргументов (p, q, r):

$$(0, 0, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1).$$

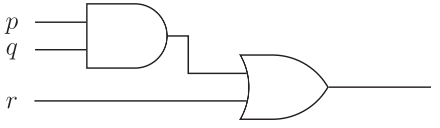
Объединяя соответствующие элементарные конъюнкции, получим совершенную дизъюнктивную нормальную форму функции f:

$$\mathcal{D}_f = (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Карту Карно формируем на основе полученной $\mathcal{D}_f$:



Помеченные ячейки образуют два блока, и для $f(p, q, r)$ получаем следующее выражение: $f(p, q, r) = (p \wedge q) \vee r$. Таким образом, функциональная схема вида



эквивалентна S_2 и содержит меньшее количество функциональных элементов по сравнению с ней. $\square$

На основе рассмотренных функциональных элементов можно сконструировать устройство, которое вычисляет сумму двух двоичных цифр $a +_2 b$, где $a, b \in \mathbb{B}$, а знаком «$+_2$» обозначена бинарная операция сложения в двоичной системе счисления. Такое устройство носит название «**полубитный сумматор**», в связи с тем что при сложении двоичных чисел с более чем одним разрядом посредством полубитного сумматора учитываются только младшие разряды [4].

Для различных двоичных цифр a и b получаем

$$\begin{gathered} 0 +_2 0 = 00, \\ 0 +_2 1 = 01, \\ 1 +_2 0 = 01, \\ 1 +_2 1 = 10. \end{gathered}$$

Следовательно, результатом операции $a +_2 b$ будет двоичное число $(cd)_2$, разряды которого определяются в соответствии с табл. 6.9.

Из приведенной табл. 6.9 следует, что булевы функции $c = c(a, b)$ и $d = d(a, b)$ имеют аналитическое представление: $c = a \wedge b$, $d = a \oplus b$.

Таблица 6.9

Операция двоичного сложения $a +_2 b = (cd)_2$

a	b	c	d
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

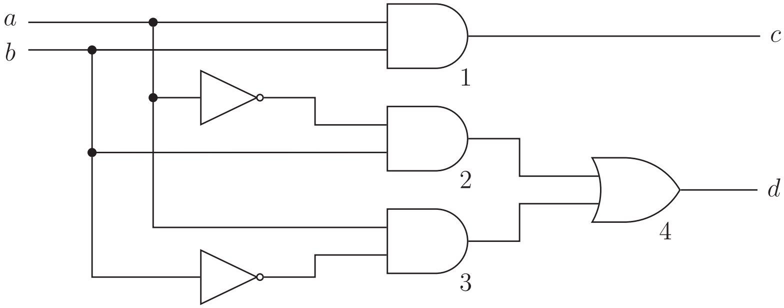


Рис. 6.4. Полубитный сумматор

Можно предложить функциональную схему для реализации полубитного сумматора, изображенную на рис. 6.4.

Аналогично конструируется устройство, вычисляющее сумму двузначных двоичных чисел (**2-битный сумматор**). Обозначим через a и b цифры первого слагаемого суммы (a — старший разряд, b — младший), а через c и d — цифры второго слагаемого (c — старший разряд, d — младший). Результат двоичного сложения имеет три цифры: $(efg)_2$.

Одна из возможных реализаций 2-битного сумматора представлена на рис. 6.5 [78].

Булева алгебра и квантовые вычисления

Булевы функции и реализующие их функциональные схемы служат, как известно, математической основой для построения цифровых вычислительных систем [70]. Кроме того, описанные выше методы булевой алгебры применяются в современной криптографии, теории сложности алгоритмов, прикладной статистике.

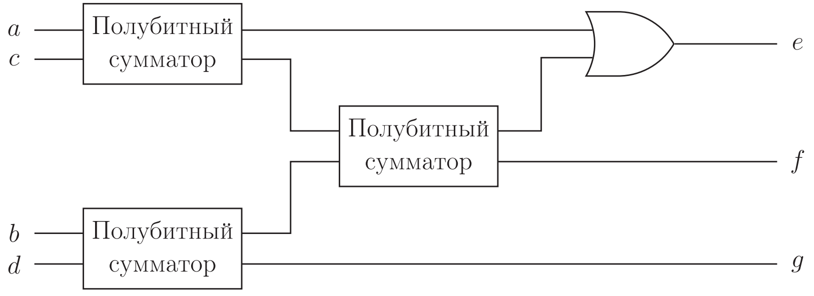


Рис. 6.5. 2-битный сумматор

В последние годы пристальное внимание исследователей всего мира привлекает **модель квантовых вычислений**, основанная на квантовой теории и принципиально отличная от широко известных и доступных классических вычислений. Доказано, что квантовомеханические способы решения задач в ряде случаев обеспечивают экспоненциальное ускорение по сравнению с традиционными алгоритмами [60]. Одним из перспективных способов выполнения квантовых вычислений является построение **квантовых схем** с помощью методов булевой алгебры, использующих понятия нормальных форм, классических функциональных элементов и их квантовых аналогов (так называемых «гейтов» или «вентилей», англ. quantum gate) [10, 111, 116].

Наименьшим элементом, выполняющим функцию хранения информации в квантовом компьютере, является **кубит** (quantum bit, qubit). Определены необходимые условия, которым должен удовлетворять полнофункциональный квантовый компьютер. В частности, такой компьютер должен быть выполнен в виде масштабируемой физической системы с набором индивидуальных кубитов, защищенных от воздействия дестабилизирующих шумов. Под масштабируемостью (англ. scalability) понимается возможность изменения числа доступных кубитов в экспериментальной установке. Для решения современных вычислительных задач необходимо иметь $\gtrsim 10^3$ взаимодействующих кубитов. Реализация защищенных от ошибок и сторонних шумов квантовых гейтов представляет собой трудную и не до конца решенную экспериментальную задачу [96].

Таким образом, теория булевых функций продолжает активно развиваться и остается математическим базисом для широкого спектра как теоретических, так и прикладных исследований.

Контрольные вопросы к главе «Булева алгебра»

1. Перечислите основные операции булевой алгебры.
2. Из чего конструируется булево выражение?
3. Перечислите законы булевой алгебры.
4. Как построить таблицу истинности булевой функции?
5. Что такое элементарная конъюнкция? Элементарная дизъюнкция?
6. Дайте определение совершенной дизъюнктивной нормальной форме и совершенной конъюнктивной нормальной форме.
7. Какие методы используются для построения полинома Жегалкина?
8. Охарактеризуйте важнейшие классы булевых функций.
9. Сформулируйте критерий Поста.
10. Дайте определение базиса системы булевых функций.
11. Какую задачу решает карта Карно?
12. Дайте определение функциональной схеме.
13. Как обозначаются основные функциональные элементы?
14. Что такое полубитный сумматор? 2-битный сумматор?

Задачи к главе «Булева алгебра»

6.1. Составьте таблицу истинности булевой функции трех переменных, заданной логическим выражением $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee \overline{x}_3) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (x_2 \oplus x_3)$. Выпишите вектор значений $\boldsymbol{\alpha}_f$ функции $f(\mathbf{x})$.

6.2. Составьте таблицу истинности булевой функции трех переменных, заданной логическим выражением $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge x_3) \rightarrow$ $\rightarrow (x_1 \oplus x_3)$. Выпишите вектор значений $\boldsymbol{\alpha}_f$ функции $f(\mathbf{x})$.

6.3. Последовательность булевых величин a_i, $i = 1, 2, \ldots$, задается рекуррентным соотношением (см. главу «Рекуррентные соотношения» на стр. 341)

$$\begin{cases} a_n = (a_{n-1} \wedge a_{n-2}) \oplus a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Вычислите a_n для всех натуральных значений n.

6.4. Последовательность булевых величин a_i, $i = 1, 2, \ldots$, задается рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} a_n = (a_{n-1} \oplus a_{n-2}) \vee a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Вычислите a_n для всех натуральных значений n.

6.5. Последовательность булевых величин a_i, $i = 1, 2, \ldots$, задается рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} a_n = (a_{n-1} \leftrightarrow a_{n-2}) \wedge a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Вычислите a_n для всех натуральных значений n.

6.6. Последовательность булевых величин a_i, $i = 1, 2, \ldots$, задается рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} a_n = (a_{n-1} \leftrightarrow a_{n-3}) \oplus a_{n-2}, \quad n > 3, \\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1. \end{cases}$$

Вычислите a_n для всех натуральных значений n.

6.7. Докажите, что булевы выражения $x_1 \leftrightarrow x_2$ и $1 \oplus x_1 \oplus x_2$ определяют одну и ту же булеву функцию.

6.8. Докажите, что булевы выражения $x_1 \mid x_2$ и $1 \oplus (x_1 \wedge x_2)$ определяют одну и ту же булеву функцию.

6.9. Установите, являются ли булевы функции f и g эквивалентными:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to x_3), \quad g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \to x_3$;

2) $f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge (\overline{x}_2 \to x_1), \quad g(x_1, x_2) = x_1$.

6.10. Используя законы булевой алгебры, покажите, что для переменных x_1, x_2, x_3 выполняется дистрибутивность импликации относительно

1) конъюнкции: $x_1 \to (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \to x_3)$;

2) дизъюнкции: $x_1 \to (x_2 \vee x_3) = (x_1 \to x_2) \vee (x_1 \to x_3)$;

3) импликации: $x_1 \to (x_2 \to x_3) = (x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3)$;

4) эквиваленции: $x_1 \to (x_2 \leftrightarrow x_3) = (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (x_1 \to x_3)$.

6.11. Постройте совершенную дизъюнктивную и совершенную конъюнктивную нормальные формы функции, заданной вектором значений $\boldsymbol{\alpha}_f = (1011\ 0011)$.

6.12. Постройте совершенную дизъюнктивную и совершенную конъюнктивную нормальные формы функций, заданных векторами значений:

1) $\boldsymbol{\alpha}_{f_1} = (0011\ 0101)$;

2) $\boldsymbol{\alpha}_{f_2} = (0111\ 0111)$.

6.13. Постройте СДНФ и СКНФ для следующих функций:

1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_3) \vee \overline{x}_2$;

2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \oplus x_3) \vee (x_1 \to x_3)$.

6.14. Постройте СДНФ и СКНФ для следующих функций:

1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \mid x_3)$;

2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2) \leftrightarrow \overline{(x_2 \mid x_3)}$.

6.15. Используя метод неопределенных коэффициентов, постройте полином Жегалкина по вектору значений функции:

1) $\boldsymbol{\alpha}_g = (0011\ 0110)$;

2) $\boldsymbol{\alpha}_h = (1100\ 1100\ 0011\ 0000)$.

6.16. Используя метод эквивалентных преобразований, постройте полином Жегалкина для каждой из следующих функций:

1) $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \downarrow x_3)$;

2) $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(x_1 \to x_2)} \to (x_3 \leftrightarrow x_4)$.

6.17. Выясните, сохраняет ли функция $f(x_1, x_2)$ константу 0, если

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$;

2) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

6.18. Выясните, сохраняет ли функция $f(x_1, x_2)$ константу 0, если

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$;

2) $f(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$.

6.19. Выясните, сохраняет ли функция $f(x_1, x_2)$ константу 1, если

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$;
2) $f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \vee (x_2 \leftrightarrow \overline{x}_1)$.

6.20. Выясните, сохраняет ли функция $f(x_1, x_2)$ константу 1, если

1) $f(x_1, x_2) = (x_1 \downarrow x_2) \leftrightarrow ((x_1 \oplus 1) \to (x_2 \oplus 1))$;
2) $f(x_1, x_2) = ((x_1 \wedge x_2) \oplus ((x_1 \oplus 1) \wedge x_2)) \to (x_1 \mid x_2)$.

6.21. Выясните, является ли функция h двойственной к функции g:

1) $g(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2, \quad h(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$;
2) $g(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee \overline{(\overline{x}_1 \to x_2)}, \quad h(x_1, x_2) = \overline{x}_1$?

6.22. Является ли функция f, задаваемая вектором значений $\boldsymbol{\alpha}_f$, самодвойственной, если

1) $\boldsymbol{\alpha}_f = (0110)$;
2) $\boldsymbol{\alpha}_f = (1011\ 0010)$?

6.23. Является ли функция f, задаваемая вектором значений $\boldsymbol{\alpha}_f$, самодвойственной, если

1) $\boldsymbol{\alpha}_f = (1000\ 0101\ 0101\ 1110)$;
2) $\boldsymbol{\alpha}_f = (0101\ 1100\ 0011\ 1010)$?

6.24. Проверьте, являются ли следующие функции самодвойственными:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$.

6.25. Докажите, что функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ является самодвойственной.

6.26. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ задана вектором своих значений

$$\boldsymbol{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-1}).$$

Выпишите вектор значений функции $f^*(\mathbf{x})$.

6.27. **Весом** $w(\boldsymbol{\alpha})$ булева набора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называют число его компонент, равных единице. Определите количество векторов длины n, обладающих весом $w(\boldsymbol{\alpha}) = k$, где $k \leqslant n$.

6.28. Вычислите вес вектора значений произвольной самодвойственной функции $s(\mathbf{x})$, зависящей от n переменных, $n \geqslant 1$.

6.29. Является ли функция f линейной, если

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x}_2$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$?

6.30. Является ли функция f линейной, если

1) $f(x_1) = \overline{(x_1 \oplus 1)}$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$?

6.31. Проверьте, является ли функция f монотонной, если

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$.

6.32. Является ли функция f монотонной, если

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$?

6.33. Является ли функция f монотонной, если

1) $f(x_1, x_2) = (x_1 \downarrow x_2) \vee x_1$;
2) $f(x_1, x_2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2)$?

6.34. Студент, проводящий опыт в химической лаборатории, случайно залил реактивом страницу конспекта по дискретной математике, на которой был записан вектор значений некоторой монотонной булевой функции $f(\mathbf{x})$. В результате оказалось невозможным прочитать часть компонент этого вектора. Если обозначить такие компоненты символом «?», то запись будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{\alpha}_f = (???0\ ?10?\ ?001\ 1???).$$

Восстановите неизвестные компоненты $\boldsymbol{\alpha}_f$ и запишите аналитическое выражение для $f(\mathbf{x})$.

6.35. При каком минимальном n число булевых функций, зависящих от n переменных, превысит миллиард?

6.36. Заполните пустые ячейки в таблице мощностей классов функций булевой алгебры:

n	$\lvert T_0^n \rvert$	$\lvert T_1^n \rvert$	$\lvert S^n \rvert$	$\lvert L^n \rvert$	$\lvert M^n \rvert$
1	2	2	2	4	3
2					
3					
4					

∗6.37. Определите число булевых функций, которые зависят от n переменных и принадлежат множеству:

1) $X = T_0 \cup T_1$;

2) $Y = T_0 \cup L$.

∗6.38. Определите число булевых функций, которые зависят от n переменных и принадлежат множеству:

1) $X = T_0 \cap S$;

2) $Y = L \setminus T_1$.

∗6.39. Определите число булевых функций, которые зависят от n переменных и принадлежат множеству:

1) $X = M \setminus T_0$;

2) $Y = L \cap M$.

∗6.40. Определите число булевых функций, которые зависят от n переменных и принадлежат множеству:

1) $T_0 \cup T_1 \cup L$;

2) $L \setminus (T_0 \setminus T_1)$;

3) $T_0 \cup T_1 \cup S$;

4) $S \setminus (T_0 \setminus T_1)$.

∗6.41. Докажите следующие оценки для числа монотонных функций от n переменных, где $n \geqslant 1$:

$$2^{C(n,\lfloor n/2 \rfloor)} \leqslant |M^n| \leqslant 2 + n^{C(n,\lfloor n/2 \rfloor)}.$$

6.42. Докажите, что система функций $\{^{-}, \vee, \wedge\}$ является полной в P_2, где P_2 — множество всех функций булевой алгебры.

6.43. Проверьте, является ли система функций $\{^{-}, \wedge\}$ полной в P_2.

6.44. Проверьте, является ли система функций $\{^{-}, \vee\}$ полной в P_2.

6.45. Проверьте, является ли полной в P_2 каждая из систем функций

1) $\{\downarrow\}$;

2) $\{|\}$.

6.46. Пользуясь критерием Поста, докажите, что система функций $\{\oplus, \wedge, 1\}$ (**базис Жегалкина**) полна в P_2.

6.47. Пользуясь критерием Поста, докажите, что каждая из следующих систем функций полна в P_2:

1) $\{0, \vee, \leftrightarrow\}$;

2) $\{0, \rightarrow\}$.

6.48. Определите, какие из следующих систем функций являются базисами в P_2:

1) $\{\rightarrow, \oplus\}$;

2) $\{\oplus, \leftrightarrow, \wedge\}$;

3) $\{\oplus, \leftrightarrow, \vee\}$;

4) $\{\leftrightarrow, \rightarrow, ^{-}\}$.

$*$**6.49.** Докажите методом «от противного», что базис не может содержать более четырех функций [69].

$*$**6.50.** Какое минимальное количество функций может содержать базис?

6.51. Упростите булево выражение, представленное картой Карно

	q	q	$\overline{q}$	$\overline{q}$
p	$*$		$*$	
$\overline{p}$	$*$		$*$	
	r	$\overline{r}$	$\overline{r}$	r

6.52. Упростите булево выражение, представленное картой Карно

	q	q	$\overline{q}$	$\overline{q}$
p	$\ast$			$\ast$
$\overline{p}$		$\ast$	$\ast$	
	r	$\overline{r}$	$\overline{r}$	r

6.53. Упростите следующие выражения, используя карты Карно:

1) $S_1 = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r)$;

2) $S_2 = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$.

6.54. Упростите следующие выражения, используя карты Карно:

1) $S_1 = (p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$;

2) $S_2 = (p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$.

6.55. Постройте карту Карно для булевой функции $t(p, q, r, s)$ от четырех переменных и упростите $t(p, q, r, s)$:

$$\begin{aligned} t(p,q,r,s) = (p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}) \vee \\ \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r \wedge \overline{s}). \end{aligned}$$

6.56. Постройте карту Карно для булевой функции $g(p, q, r, s)$ и упростите $g(p, q, r, s)$:

$$\begin{aligned} g(p,q,r,s) = (p \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r \wedge s) \vee \\ \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r} \wedge s) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge s) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r \wedge s). \end{aligned}$$

6.57. Постройте карту Карно для булевой функции $h(p, q, r, s)$ и упростите $h(p, q, r, s)$:

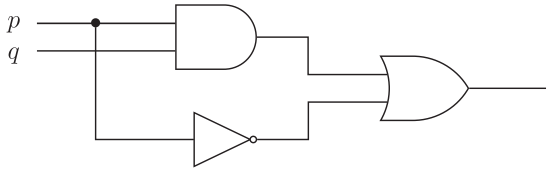
$$\begin{aligned} h(p,q,r,s) = \quad & (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge s) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee \\ & \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee \\ & \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r} \wedge s) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge s). \end{aligned}$$

6.58. Запишите вектор значений функции $f(\mathbf{x})$, постройте карту Карно и упростите $f(\mathbf{x})$:

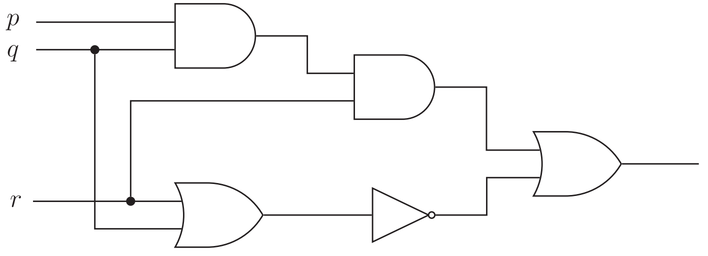
1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \oplus x_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_4)$;

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_2 \to x_4)$.

6.59. Запишите булеву функцию, генерируемую функциональной схемой



6.60. Запишите булеву функцию, генерируемую функциональной схемой



6.61. Постройте функциональные схемы, соответствующие следующим булевым выражениям:

1) $\overline{((p \vee q) \wedge r)}$;

2) $\overline{((p \wedge q) \vee (q \wedge \overline{r}))} \wedge (q \vee r)$.

6.62. Постройте функциональную схему, реализующую импликацию $p \to q$, используя только функциональные элементы:

1) **И-НЕ**;

2) **ИЛИ-НЕ**.

6.63. Постройте функциональную схему, реализующую функцию эквивалентности $p \leftrightarrow q$, используя только функциональные элементы:

1) **И-НЕ**;

2) **ИЛИ-НЕ**.

∗6.64. Постройте с помощью функциональных элементов **И-НЕ** функциональную схему, эквивалентную элементу **ИЛИ-НЕ**.

∗6.65. Постройте с помощью функциональных элементов **ИЛИ-НЕ** функциональную схему, эквивалентную элементу **И-НЕ**.

6.66. На вход функциональной схемы подаются три сигнала: s_1, s_2 и s_3. Величина сигнала на выходе равна величине большинства из переменных s_1, s_2, s_3. Начертите функциональную схему, удовлетворяющую данным условиям.

$*$**6.67.** На вход функциональной схемы подаются сигналы $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Величина сигнала на выходе равна 1, если количество ненулевых сигналов среди s_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, четно, и равна 0 в противном случае. Начертите функциональную схему, удовлетворяющую данным условиям.

6.68. Проверьте, что 2-битный сумматор, изображенный на рис. 6.5, правильно вычисляет сумму $01 +_2 10 = 011$.

6.69. Проверьте, что 2-битный сумматор, изображенный на рис. 6.5, правильно вычисляет сумму $10 +_2 10 = 100$.

6.70. Сконструируйте **3-битный сумматор**, вычисляющий двоичную сумму 3-битных чисел $(abc)_2$ и $(def)_2$ [78, 130].

$*$**6.71.** Сконструируйте **полный сумматор**, вычисляющий сумму двух чисел, записанных в двоичной системе счисления.

Ответы, указания, решения к главе «Булева алгебра»

6.1. *Решение.*

Для построения таблицы истинности функции $f(x_1, x_2, x_3)$ вычислим ее значения на всевозможных наборах значений вектора аргументов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge \overline{x}_2$	$(x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee \overline{x}_3$	$x_2 \oplus x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Вектор значений функции $f(\mathbf{x})$ равен $\boldsymbol{\alpha}_f = (0011\ 0111)$.

6.2. *Решение.*

Обычным образом составляя таблицу значений, получаем

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee \overline{x}_2$	$(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge x_3$	$x_1 \oplus x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Вектор значений функции $f(\mathbf{x})$ равен $\boldsymbol{\alpha}_f = (1111\ 1010)$.

6.3. *Решение.*

Выпишем несколько первых членов последовательности $\{a_n\}$:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0

Докажем методом математической индукции, что для всех натуральных значений n

$$\begin{cases} a_n = 1, \text{ если } n = 4k-3, 4k-1, 4k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ a_n = 0, \text{ если } n = 4k-2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Обозначим через $P(k)$ предикат, соответствующий приведенному выше соотношению для a_n.

База индукции

Проверим истинность $P(1)$. Имеем $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$ в соответствии с условием.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$ истинно для некоторого натурального значения k. Покажем истинность $P(k+1)$, для этого вычислим a_{k+1}.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1) $k = 4k'$, $k' \in \mathbb{N}$,

$$a_{4k'+1} = (a_{4k'} \wedge a_{4k'-1}) \oplus a_{4k'-2} = (1 \wedge 1) \oplus 0 = 1.$$

2) $k = 4k' + 1$, $k' \in \mathbb{N}$,

$$a_{4k'+2} = (a_{4k'+1} \wedge a_{4k'}) \oplus a_{4k'-1} = (1 \wedge 1) \oplus 1 = 0.$$

3) $k = 4k' + 2$, $k' \in \mathbb{N}$,

$$a_{4k'+3} = (a_{4k'+2} \wedge a_{4k'+1}) \oplus a_{4k'} = (0 \wedge 1) \oplus 1 = 1.$$

4) $k = 4k' + 3$, $k' \in \mathbb{N}$,

$$a_{4k'+4} = (a_{4k'+3} \wedge a_{4k'+2}) \oplus a_{4k'+1} = (1 \wedge 0) \oplus 1 = 1.$$

Таким образом, доказана истинность $P(k+1)$. Значит,

$$\begin{cases} a_n = 1, \text{ если } n = 4k-3, 4k-1, 4k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ a_n = 0, \text{ если } n = 4k-2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

6.4. *Ответ:*

$$\begin{cases} a_n = 1, \text{ если } n = 3k-1, 3k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ a_n = 0, \text{ если } n = 3k-2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

6.5. *Ответ:* $a_n = 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

6.6. *Ответ:*

$$\begin{cases} a_n = 1, \text{ если } n = 4k-2, 4k-1, 4k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ a_n = 0, \text{ если } n = 4k-3, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

6.7. *Доказательство.*

Построением таблицы истинности найдем векторы значений функций $f_1 = x_1 \leftrightarrow x_2$ и $f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$: $\boldsymbol{\alpha}_{f_1} = (1001)$, $\boldsymbol{\alpha}_{f_2} = (1001)$. Значит, $f_1 = f_2$.

6.9. *Решение.*

1) Выразив импликацию через дизъюнкцию и отрицание, получим

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to x_3) = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3,$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \to x_3 = \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee x_3 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3.$$

Поскольку функции f и g заданы эквивалентными булевыми выражениями, то $f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$.

2) $f(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge (\overline{x}_2 \to x_1) = x_2 \vee (\overline{x}_1 \wedge x_1) = x_2$.
Следовательно, функции f и g не являются эквивалентными.

6.11. *Решение.*
Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ принимает значение, равное 1, на следующих наборах аргументов (x_1, x_2, x_3):

$$(0, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1).$$

Объединим соответствующие элементарные конъюнкции и получим совершенную дизъюнктивную нормальную форму:

$$\mathcal{D}_f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Значение, равное 0, функция f принимает на наборах

$$(0, 0, 1),\ (1, 0, 0),\ (1, 0, 1).$$

Конъюнкция соответствующих элементарных дизъюнкций приводит к совершенной конъюнктивной нормальной форме:

$$\mathcal{K}_f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3).$$

6.12. *Ответ:*

1) $\mathcal{D}_{f_1} = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$,
$\mathcal{K}_{f_1} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$;

2) $\mathcal{D}_{f_2} = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$,
$\mathcal{K}_{f_2} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

6.13. *Ответ:*
1) $\mathcal{D}_{f_1} = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3$,
$\mathcal{K}_{f_1} = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

2) $\mathcal{D}_{f_2} = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$,
$\mathcal{K}_{f_2} = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$.

6.15. *Ответ:*
1) $g(x_1, x_2, x_3) = x_2 \oplus (x_1 \wedge x_3)$;
2) $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

6.16. *Ответ:*
1) $g(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3)$;
2) $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus (x_1 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_4) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \oplus (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4)$.

6.17. *Ответ:*
1) $f(x_1, x_2) \notin T_0$;
2) $f(x_1, x_2) \in T_0$.

6.18. *Ответ:*
1) $f(x_1, x_2) \notin T_0$;
2) $f(x_1, x_2) \notin T_0$.

6.19. *Ответ:*
1) $f(x_1, x_2) \in T_1$;
2) $f(x_1, x_2) \in T_1$.

6.20. *Ответ:*
1) $f(x_1, x_2) \notin T_1$;
2) $f(x_1, x_2) \notin T_1$.

6.21. *Решение.*
1) Проверим выполнение равенства $h = g^*$:

$$(g(x_1, x_2))^* = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = x_1 \wedge x_2 = h(x_1, x_2).$$

Следовательно, $h(x_1, x_2)$ является двойственной к $g(x_1, x_2)$.
2) Вычислим g^*:

$$\begin{aligned}(g(x_1, x_2))^* &= \overline{\overline{(\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee \overline{(x_1 \to \overline{x}_2)}}} = \overline{(\overline{x}_1 \wedge x_2)} \wedge (x_1 \to \overline{x}_2) = \\ &= (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) = (x_1 \wedge \overline{x}_1) \vee \overline{x}_2 = \overline{x}_2.\end{aligned}$$

Из соотношения $h \neq g^*$ следует, что функция $h(x_1, x_2)$ не является двойственной к $g(x_1, x_2)$.

6.22. *Ответ:*

1) f не является самодвойственной;
2) f самодвойственна.

6.23. *Ответ:*

1) f самодвойственна;
2) f не является самодвойственной.

6.24. *Решение.*
1) Вычислим функцию f^*:

$$f^* = (x_1 \oplus x_2)^* = \overline{(\overline{x}_1 \oplus \overline{x}_2)}.$$

Из определения операции «сумма по модулю два» следует равенство $\overline{p} \oplus \overline{q} = p \oplus q$. В силу этого

$$f^* = \overline{(\overline{x}_1 \oplus \overline{x}_2)} = \overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 \leftrightarrow x_2.$$

Поскольку $f^* \neq f$, то функция $f(x_1, x_2)$ не является самодвойственной.

2) Как показано в предыдущем пункте, $(x_1 \oplus x_2)^* = x_1 \leftrightarrow x_2$, поэтому $(x_1 \leftrightarrow x_2)^* = x_1 \oplus x_2$. Функция $f(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ не является самодвойственной.

6.25. *Доказательство.*

Одним из самых простых методов доказательства самодвойственности $f(x_1, x_2, x_3)$ является применение тождества $\overline{x} = x \oplus 1$:

$$f^*(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x}_1 \oplus \overline{x}_2 \oplus \overline{x}_3} = ((x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) \oplus (x_3 \oplus 1)) \oplus 1 =$$
$$= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = f(x_1, x_2, x_3).$$

Значит, функция $f(\mathbf{x})$ самодвойственна.

6.26. *Ответ:* $\boldsymbol{\alpha}_{f^*} = (\overline{\alpha}_{2^n-1}, \overline{\alpha}_{2^n-2}, \ldots, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0)$.

6.27. *Ответ:*

Искомое количество равно числу k-сочетаний без повторений из n элементов, а именно, $C(n, k)$.

6.28. *Ответ:* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{B}^n \;\; w(s(\mathbf{x})) = 2^{n-1}$.

6.29. *Решение.*

1) Представим функцию f в виде полинома Жегалкина. Для этого воспользуемся методом эквивалентных логических преобразований:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x}_2 = \overline{(\overline{x}_1 \wedge x_2)} = (\overline{x}_1 \wedge x_2) \oplus 1 = ((x_1 \oplus 1) \wedge x_2) \oplus 1 =$$
$$= ((x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2).$$

Степень полученного полинома больше единицы, поэтому $f(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x}_2$ не является линейной функцией.

2) Записав функцию f в виде полинома Жегалкина

$$f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \overline{(x_1 \wedge x_2)} = (x_1 \wedge x_2) \oplus 1,$$

приходим к выводу, что $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ не является линейной функцией.

6.30. *Ответ:*

1) $f(x_1)$ — линейная функция;

2) $f(x_1, x_2)$ не является линейной.

6.31. *Ответ:*

1) $f(x_1, x_2)$ — монотонная функция;

2) $f(x_1, x_2)$ — монотонная функция.

6.32. *Ответ:*

1) $f(x_1, x_2)$ не является монотонной;
2) $f(x_1, x_2)$ не является монотонной.

6.33. *Ответ:*

1) $f(x_1, x_2)$ не является монотонной;
2) $f(x_1, x_2)$ не является монотонной.

6.34. *Ответ:*
$\boldsymbol{\alpha}_f = (0000\ 0101\ 0001\ 1111)$, $f(\mathbf{x}) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x_4)$.

6.35. *Решение.*

Как известно, число всех булевых функций от n аргументов равно $|P_2(n)| = 2^{2^n}$. Минимальное значение n, удовлетворяющее неравенству $2^{2^n} > 10^9$, равно $n_{\min} = \lceil \log_2 \log_2 10^9 \rceil = \lceil 4{,}90\ldots \rceil = 5$.

6.36. *Указание.*

Мощности всех указанных множеств, кроме M^n, удобно вычислять с помощью аналитических формул, приведенных в тексте настоящей главы. Для определения количества монотонных функций $|M^n|$ следует использовать полный перебор функций из $P_2(n)$, в частности, можно получить $|M^4| = 168$. Некоторые оценки для величины $|M^n|$ приведены в упражнении **6.41**.

6.37. *Решение.*

1) Поскольку $T_0 \cap T_1 \neq \varnothing$, то следует воспользоваться формулой включений и исключений (см. главу «Теория множеств»):

$$|X| = |T_0 \cup T_1| = |T_0| + |T_1| - |T_0 \cap T_1|.$$

Как известно, $|T_0| = |T_1| = 2^{2^n-1}$. Число функций, сохраняющих и 0, и 1, равно $|T_0 \cap T_1| = 2^{2^n-2}$, так как в таблице значений первая и последняя строки, соответствующие векторам $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$, определены условием сохранения константы. Значит,

$$|X| = 2^{2^n-1} + 2^{2^n-1} - 2^{2^n-2} = (2 + 2 - 1) \cdot 2^{2^n-2} = 3 \cdot 2^{2^n-2}.$$

2) Вычислим мощность множества $T_0 \cap L$. Пусть f — произвольная линейная функция, тогда $f = \gamma_0 \oplus \gamma_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n x_n$ для некоторых $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \{0, 1\}$. Получаем $f(0, 0, \ldots, 0) = \gamma_0$, поэтому линейная функция сохраняет 0 тогда и только тогда, когда свободный член $\gamma_0 = 0$. Значит, $|T_0 \cap L| = \dfrac{1}{2} 2^{n+1} = 2^n$. Окончательно,

$$|Y| = |T_0 \cup L| = |T_0| + |L| - |T_0 \cap L| = 2^{2^n-1} + 2^{n+1} - 2^n = 2^{2^n-1} + 2^n.$$

6.38. *Ответ:*

1) $|X| = 2^{2^{n-1}-1}$;
2) $|Y| = 2^n$.

6.39. *Решение.*

1) Множество $X = M \setminus T_0$ образовано монотонными функциями $f(\mathbf{x})$, не сохраняющими нуль. Условие $f \notin T_0$ запишем в виде $f(\boldsymbol{\alpha}_0) = 1$, где $\boldsymbol{\alpha}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Поскольку вектор $\boldsymbol{\alpha}_0$ предшествует всем возможным наборам $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$, то по свойству монотонности $\forall \mathbf{x}\ f(\boldsymbol{\alpha}_0) \leqslant f(\mathbf{x})$, или $f(\mathbf{x}) \geqslant 1$. Этому условию удовлетворяет только одна функция, а именно, $f(\mathbf{x}) \equiv 1$, поэтому $|M \setminus T_0| = 1$.

2) Разобьем множество L на непересекающиеся подмножества $\mathcal{L}^{(0)}$, $\mathcal{L}^{(1)}, \ldots, \mathcal{L}^{(n)}$ по следующему правилу: множество $\mathcal{L}^{(k)}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$, состоит из всех функций, задаваемых булевыми выражениями, которые содержат ровно k операций сложения по модулю два. Заметим, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $i \neq j$ выполняется соотношение $\mathcal{L}^{(i)} \cap \mathcal{L}^{(j)} = \varnothing$ в силу единственности представления $f(\mathbf{x})$ в виде полинома Жегалкина.

Как легко проверить, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ множество $\mathcal{L}^{(k)}$ не содержит ни одной монотонной функции. В самом деле,

$$f(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^{(k)} \ \Leftrightarrow\ f(\mathbf{x}) = \underbrace{x_i \oplus x_j \oplus \ldots \oplus x_s}_{k \text{ операций } \oplus}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $i = 1, j = 2, \ldots, s = k+1$. Функция $f(\mathbf{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k \oplus x_{k+1}$ не обладает свойством монотонности. Это следует, например, из рассмотрения векторов

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0, \ldots, 0), \ \ \boldsymbol{\beta} = (1, 1, 0, \ldots, 0),$$

для которых выполняются соотношения $\boldsymbol{\alpha} \preccurlyeq \boldsymbol{\beta}$ и $f(\boldsymbol{\alpha}) > f(\boldsymbol{\beta})$.

Следовательно, $|L \cap M| = |\mathcal{L}^{(0)}|$. Множество $\mathcal{L}^{(0)}$ образовано следующими функциями: $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ и $f(\mathbf{x}) = x_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Окончательно получаем $|L \cap M| = n + 2$.

6.40. *Ответ:*
1) $3 \cdot 2^{2^n-2} + 2^{n-1}$;
2) $3 \cdot 2^{n-1}$;
3) $3 \cdot 2^{2^n-2} + 2^{2^{n-1}-1}$;
4) $2^{2^{n-1}}$.

6.41. *Доказательство.*

Рассмотрим всевозможные наборы $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{B}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, с весом, равным $w(\boldsymbol{\xi}_i) = \lfloor n/2 \rfloor$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Можно показать [22], что указанные наборы попарно не сравнимы, и мощность любого подмножества попарно несравнимых наборов в $\mathbb{B}^n$ не превышает $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$.

Далее, пусть некоторая булева функция $f(\mathbf{x}) \in P_2(n)$ такова, что:

1) на наборах с весами $w < \lfloor n/2 \rfloor$ выполняется равенство $f(\mathbf{x}) = 0$;

2) на наборах с весами $w > \lfloor n/2 \rfloor$ выполняется равенство $f(\mathbf{x}) = 1$.

Тогда $f(\mathbf{x})$ обладает свойством монотонности, причем на каждом из $\boldsymbol{\xi}_i$ она может принимать значение либо 0, либо 1. По правилу произведения получаем нижнюю оценку для $|M^n|$: $|M^n| \geqslant 2^{C(n, \lfloor n/2 \rfloor)}$.

Для установления верхней оценки применим теорему Дилуорса (см. главу «Отношения и функции»), из которой следует утверждение: минимальное число цепей, содержащих все вершины конечного частично упорядоченного множества $\mathbb{B}^n$, равно $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$. Далее рассмотрим одну из таких цепей: $C^{(k)} = \{\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)}, \boldsymbol{\alpha}_2^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p^{(k)}\}$, где $p \leqslant n+1$. Заметим, что мощность цепи $p = |C^{(k)}| \leqslant n+1$ и значения монотонной функции $f(\mathbf{x})$, не равной тождественно константе, на элементах $\boldsymbol{\alpha}_i^{(k)} \in C^{(k)}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, образуют вектор

$$\big(f(\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)}), f(\boldsymbol{\alpha}_2^{(k)}), \ldots, f(\boldsymbol{\alpha}_p^{(k)})\big) = (\underbrace{00\ldots00}_{p' \text{ нулей}}\,\underbrace{11\ldots11}_{p-p' \text{ единиц}})$$

для некоторого $p' = 1, 2, \ldots, p-1$.

По правилу произведения существует не более $(p-1)^{C(n, \lfloor n/2 \rfloor)}$ возможностей для присвоения значений функции $f(\mathbf{x})$ на элементах всех цепей $C^{(k)}$. В общее число всех монотонных функций M^n следует внести еще тождественный 0 и тождественную 1. В итоге $|M^n| \leqslant 2 + n^{C(n, \lfloor n/2 \rfloor)}$.

6.42. *Доказательство.*

Любую функцию булевой алгебры, кроме $f_0 \equiv 0$, можно представить в дизъюнктивной нормальной форме, построенной с помощью операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Далее, $f_0(\mathbf{x})$ можно записать, например, так: $f_0(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \wedge \overline{x}_1$. Следовательно, операциями из $\{\overline{\ }, \vee, \wedge\}$ можно записать любую булеву функцию.

6.43. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}$.

6.44. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$.

6.45. *Решение.*

1) Выразим через штрих Шеффера операции конъюнкции и отрицания:

$$\overline{x} = \overline{x} \vee \overline{x} = x \mid x;$$
$$x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = \overline{(x_1 \mid x_2)} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2).$$

Согласно результату упражнения **6.43**, система $\{^{-}, \wedge\}$ полна. Значит, с помощью штриха Шеффера можно выразить любую функцию булевой алгебры.

2) Выразим через стрелку Пирса операции дизъюнкции и отрицания:

$$\overline{x} = \overline{x} \wedge \overline{x} = x \downarrow x;$$
$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2} = \overline{(x_1 \downarrow x_2)} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2).$$

Согласно результату упражнения **6.44**, система $\{^{-}, \vee\}$ полна. Следовательно, полной является и система $\{\downarrow\}$.

6.46. *Решение.*

Для применения критерия Поста удобно использовать таблицу, в которой знаком «—» отмечены свойства, отсутствующие у данной функции исследуемой системы. Если хотя бы один знак «—» стоит в каждой из колонок, то система полна.

Функция	$f \in T_0$	$f \in T_1$	$f \in S$	$f \in L$	$f \in M$
$x_1 \oplus x_2$		—	—		—
$x_1 \wedge x_2$			—	—	
1	—		—		

Как следует из анализа таблицы, система функций $\{\oplus, \wedge, 1\}$ полна.

6.48. *Ответ:*

Каждая из систем функций 1)–3) образует базис. Система пункта 4) $\{\leftrightarrow, \rightarrow, ^{-}\}$ остается полной после удаления функции $\leftrightarrow$ и, следовательно, базисом не является.

6.49. *Доказательство.*

Предположим, что некоторый базис $\mathcal{B}$ содержит более четырех функций. Из критерия Поста следует утверждение: $\mathcal{B}$ состоит из пяти функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, в противном случае удаление одной из функций не приводило бы к потере полноты системой.

Каждая из функций f_i, $i = 1, \ldots, 5$, не принадлежит ровно одному из классов T_0, T_1, S, M, L. Рассмотрим функцию $f_k \notin T_0$, т. е. $f_k(0, 0, \ldots, 0) = 1$. Так как $f_k \in T_1$, то $f_k(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Но последнее равенство противоречит тому, что $f_k \in S$. Полученное противоречие доказывает: базис $\mathcal{B}$ содержит не более четырех функций.

6.50. *Ответ:* одну функцию.

6.51. *Ответ:* $(q \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$.

6.52. *Ответ:* $(p \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{r})$.

6.53. *Ответ:*
1) $S_1 = p$;
2) $S_2 = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$.

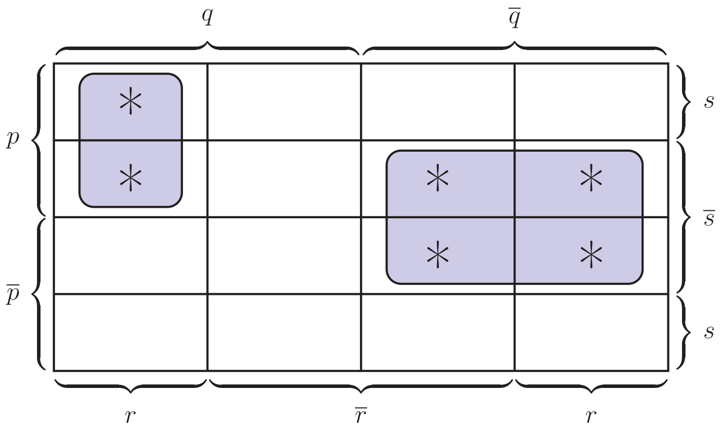
6.54. *Ответ:*
1) $S_1 = r$;
2) $S_2 = r \vee (\overline{p} \wedge q)$.

6.55. *Решение.*
Карта Карно для функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ содержит 16 ячеек.

Блок из восьми ячеек описывается одной переменной x_i или ее отрицанием $\overline{x}_i$, где $1 \leqslant i \leqslant 4$.

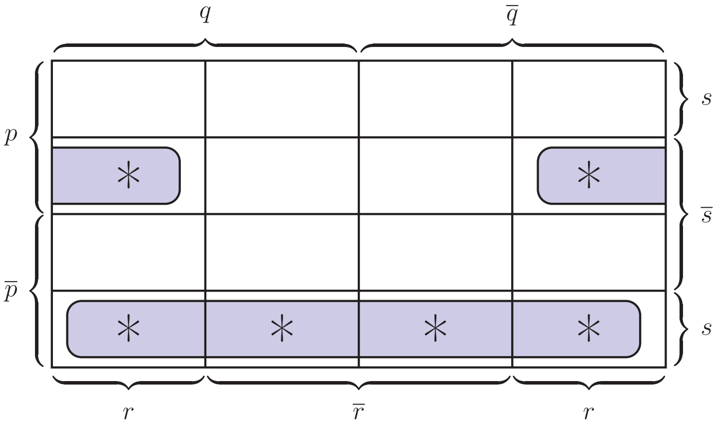
Блок из четырех ячеек описывается элементарной конъюнкцией ранга 2: $x_i^{\sigma_i} \wedge x_j^{\sigma_j}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, причем $i \neq j$.

Блок из двух ячеек описывается элементарной конъюнкцией ранга 3: $x_i^{\sigma_i} \wedge x_j^{\sigma_j} \wedge x_k^{\sigma_k}$, где $1 \leqslant i, j, k \leqslant 4$, причем $i \neq j \neq k$.



Объединяя помеченные ячейки в два блока, получаем $t(p, q, r, s) = (p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{s})$.

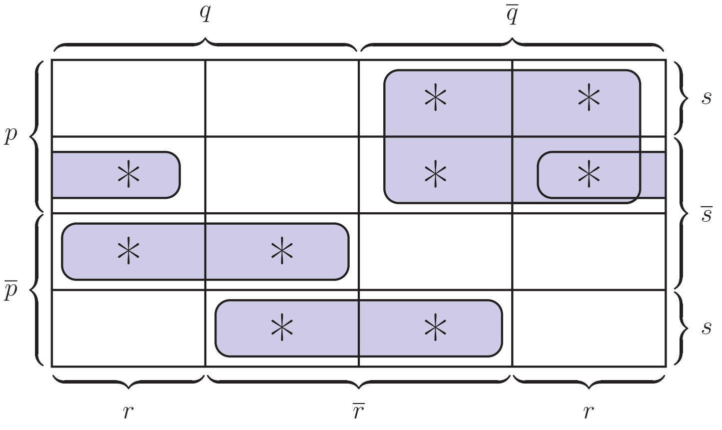
6.56. *Ответ:*
Карта Карно имеет вид



Функция после упрощения может быть записана в виде

$$g(p, q, r, s) = (\overline{p} \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge \overline{s}).$$

6.57. *Ответ:*
Карта Карно имеет вид



Функция после упрощения принимает вид

$$h(p, q, r, s) = (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{r} \wedge s).$$

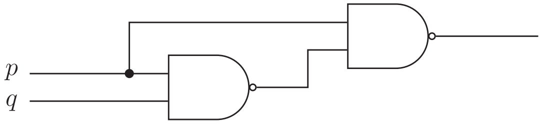
6.58. *Ответ:*
1) $\boldsymbol{\alpha}_f = (0111\ 0011\ 1101\ 1100)$, $f(\mathbf{x}) = (x_1 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_4)$;
2) $\boldsymbol{\alpha}_f = (0101\ 1111\ 0111\ 1111)$, $f(\mathbf{x}) = (x_1 \wedge x_3) \vee x_2 \vee x_4$.

6.59. *Ответ:* $f(p,q) = \overline{p} \vee q$.

6.60. *Ответ:* $f(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$.

6.62. *Ответ:*
Функциональные схемы, удовлетворяющие условиям пунктов 1) и 2), представлены на рис. 6.6, *а*) и 6.6, *б*) соответственно.

а)



б)

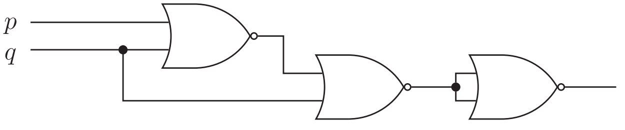


Рис. 6.6. К упр. **6.62**

6.66. *Решение.*
Обозначим функцию, принимающую значение большинства своих переменных s_1, s_2 и s_3, через $m(s_1,s_2,s_3)$. Воспользовавшись таблицей истинности этой функции и построив карту Карно, представим $m(s_1,s_2,s_3)$ в виде дизъюнктивной нормальной формы:

$$m(s_1,s_2,s_3) = (s_1 \wedge s_2) \vee (s_1 \wedge s_3) \vee (s_2 \wedge s_3).$$

С целью уменьшения количества требуемых функциональных элементов вынесем общий множитель за скобки:

$$m(s_1,s_2,s_3) = (s_1 \wedge (s_2 \vee s_3)) \vee (s_2 \wedge s_3).$$

Функциональная схема, реализующая булеву функцию $m(s_1,s_2,s_3)$, изображена на рис. 6.7.

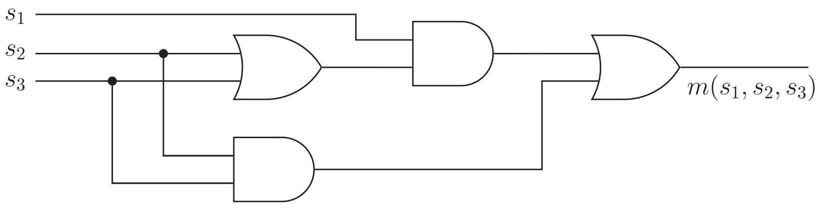


Рис. 6.7. Функциональная схема, сигнал на выходе которой равен величине большинства из переменных s_1, s_2, s_3

6.71. *Решение.*

Пусть требуется сложить числа $a = (a_n a_{n-1} \ldots a_0)_2$ и $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_0)_2$. Построим функциональную схему, на выходах которой будем иметь величины разрядов суммы $c = a +_2 b$, $c = (c_{n+1} c_n \ldots c_0)_2$.

По известному из алгебры правилу сложения двух чисел

$$c_i = a_i \oplus b_i \oplus t_i,$$

где $0 \leqslant i \leqslant n$, а через t_i обозначен результат переноса из предшествующих разрядов, причем $t_0 = 0$. Старший разряд результата сложения c_{n+1}, как легко видеть, равен $c_{n+1} = t_{n+1}$.

Учитывая, что перенос в $i+1$ разряд происходит в том и только том случае, когда, по крайней мере, две из трех величин a_i, b_i, t_i равны единице, запишем бит переноса t_{i+1} в форме, удобной для конструирования функциональной схемы:

$$t_{i+1} = (a_i \wedge b_i) \vee (a_i \wedge t_i) \vee (b_i \wedge t_i), \ \ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Функцию $c_i(a_i, b_i, t_i) = a_i \oplus b_i \oplus t_i$ также легко построить с помощью функциональных элементов, а именно, **И**, **ИЛИ**, **НЕ**, применяя тождество [82]

$$a_i \oplus b_i \oplus t_i = \Big(\overline{((a_i \wedge b_i) \vee (a_i \wedge t_i) \vee (b_i \wedge t_i))} \wedge (a_i \vee b_i \vee c_i)\Big) \vee (a_i \wedge b_i \wedge c_i)$$

или принимая во внимание СДНФ функции $c_i(a_i, b_i, t_i)$,

$$a_i \oplus b_i \oplus t_i = (a_i \wedge b_i \wedge t_i) \vee (a_i \wedge \overline{b}_i \wedge \overline{t}_i) \vee (\overline{a}_i \wedge \overline{b}_i \wedge t_i) \vee (\overline{a}_i \wedge b_i \wedge \overline{t}_i).$$

Обозначим функциональную схему

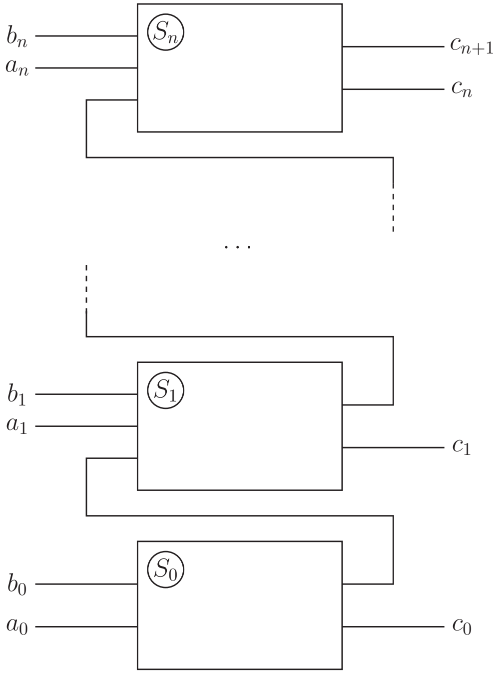


Рис. 6.8. Полный сумматор $\mathcal{S}$

реализующую рассмотренные функции при $i = 1, \ldots, n$, через S_i. Кроме того, полубитный сумматор S_0 реализует соотношения

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \oplus b_0 = (a_0 \wedge \overline{b}_0) \vee (\overline{a}_0 \wedge b_0), \\ t_1 = a_0 \wedge b_0. \end{cases}$$

Полный сумматор $\mathcal{S}$ получается в результате комбинации функциональных схем S_i, $i = 0, \ldots, n$ и представлен на рис. 6.8.

Глава 7

Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара вещественных чисел (a, b), где $a, b \in \mathbb{R}$. Первое число a называется **вещественной частью** комплексного числа $z = (a, b)$ и обозначается символом $\operatorname{Re} z$, второе число пары b называется **мнимой частью** z и обозначается $\operatorname{Im} z$ [64, 101].

Комплексное число вида $(a, 0)$, у которого мнимая часть равна нулю, отождествляют с вещественным числом a, т. е. $(a, 0) \equiv a$. Это позволяет рассматривать множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ как подмножество множества комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ считают равными тогда и только тогда, когда их вещественные и мнимые части попарно равны: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

На множестве $\mathbb{C}$ определяются операции сложения и умножения комплексных чисел. **Суммой** комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число z, равное $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. **Произведением** чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется такое комплексное число $z = (a, b)$, что $a = a_1 a_2 - b_1 b_2$, $b = a_1 b_2 + a_2 b_1$.

Пара $(0, 1)$ имеет важнейшее значение в операциях с комплексными числами, обозначается $(0, 1) \equiv i$ и носит название **мнимой единицы**. Основное свойство мнимой единицы заключается в том, что $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, или $i^2 = -1$.

Комплексное число вида $z = (0, b)$ называется **чисто мнимым**. Так как $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$, то чисто мнимое число z представимо в виде произведения $z = bi$.

Любое комплексное число можно представить в виде

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + ib.$$

Такая запись называется **алгебраической формой** комплексного числа. Это позволяет рассматривать i в качестве множителя, квадрат которого равен -1, и производить операции с комплексными числами так же, как они производятся с алгебраическими полиномами, полагая в промежуточных выкладках $i^2 = -1$.

Пример 7.1. Пусть $z_1 = 3-7i$, $z_2 = 1+4i$. Тогда результатом сложения этих чисел будет комплексное число

$$z_1 + z_2 = (3-7i) + (1+4i) = (3+1) + (-7+4)i = 4 - 3i.$$

Произведение чисел z_1 и z_2 вычисляется перемножением выражений $(3-7i)$ и $(1+4i)$ как полиномов с учетом равенства $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (3-7i)(1+4i) = 3\cdot 1 + 3(4i) - (7i)\cdot 1 - (7i)(4i) =$$
$$= 3 + 12i - 7i - 28i^2 = 3 + (12-7)i + 28 = 31 + 5i.$$

□

Комплексное число $z^* = (a, -b) = a - ib$ носит название **сопряженного** по отношению к комплексному числу $z = (a, b) = a+ib$. Существует еще одно часто встречающееся обозначение сопряженного числа — $\overline{z}$. Если коэффициенты полинома $p(z)$ вещественны, то справедливо равенство $(p(z))^* = p(z^*)$.

Удобно изображать число $z = a + ib$ точкой (x, y) плоскости с декартовыми координатами $x = a$ и $y = b$. Каждому комплексному числу z сопоставим точку плоскости с координатами (x, y) (а также радиус-вектор, соединяющий начало координат с этой точкой). Такая плоскость обозначается через z и называется **комплексной** (рис. 7.1). Отметим, что геометрическую интерпретацию комплексных чисел иногда называют **диаграммой Арга́на**[1].

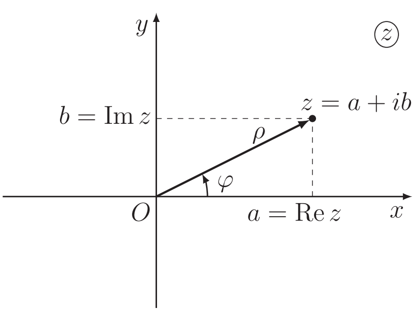


Рис. 7.1. Изображение числа z на комплексной плоскости

Во многих приложениях широко используется **тригонометрическая форма** комплексного числа z. Введем полярную систему координат так, чтобы полюс находился в начале декартовой системы (x, y). Ось полярной системы направим вдоль положительного направления оси Ox.

[1] Арган (Jean-Robert Argand) (1768–1822).

В таком случае декартовы и полярные координаты произвольной точки, отличной от начала координат, связаны формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0,\ y \geqslant 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign} y, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В итоге получаем тригонометрическую форму числа z

$$z = (x, y) = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Величину ρ называют **модулем**, а φ — **аргументом** комплексного числа z и обозначают $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$. Следует обратить внимание на то, что аргумент φ определен неоднозначно: вместо значения φ можно взять значение $\varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Если $\arg z$ выбран таким образом, что $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то такое значение называется **главным** значением аргумента.

Для чисел $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме, выполняются соотношения:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad \text{если} \quad \rho_2 \neq 0.$$

Геометрическая иллюстрация суммы и произведения комплексных чисел представлена на рис. 7.2. Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ радиус-вектор суммы $z_1 + z_2$ равен сумме радиус-векторов слагаемых z_1 и z_2. Радиус-вектор произведения $z_1 z_2$ получается поворотом радиус-вектора числа z_1 на угол $\arg z_2$ против часовой стрелки и растяжением в $|z_2|$ раз.

Формула Эйлера связывает показательную функцию мнимого аргумента с тригонометрическими функциями мнимой части аргумента [64]:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

В силу этого можно ввести еще одну форму записи комплексного числа, а именно, **показательную**: $z = \rho e^{i\varphi}$. Показательную форму записи удобно использовать при операциях умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Например, n-ю степень числа z можно представить в виде

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

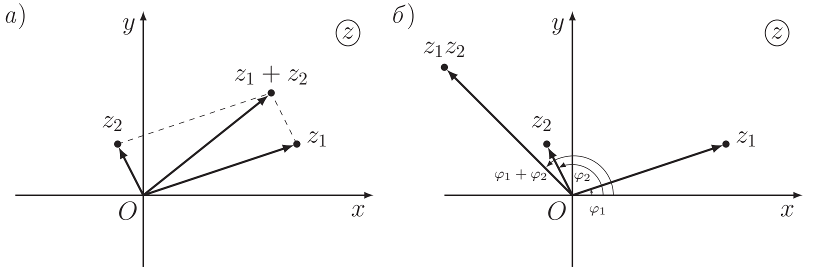


Рис. 7.2. Сумма — панель *а*) и произведение — панель *б*) комплексных чисел z_1 и z_2

для всех целых значений n. Важное следствие из полученной формулы

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

связывают с именем **Муавра**[1].

Корень n-й степени из $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно вычислить как

$$\sqrt[n]{z} \equiv z^{1/n} = \left[\rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))\right]^{1/n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или, после применения формулы Эйлера,

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n}\Big(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь получается n возможных значений корня n-й степени при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Остальные допустимые k не приводят к новым значениям $\sqrt[n]{z}$. Например, при $k = n$ аргумент равен $\arg z = \varphi/n + 2\pi$ и отличается от случая $k = 0$ на величину 2π, что соответствует равному ему комплексному числу.

Основная теорема алгебры гласит, что *любой полином ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень* [44]. Из этого следует, что произвольный полином с вещественными (или комплексными) коэффициентами всегда имеет некоторый корень $z \in \mathbb{C}$.

Каждый полином степени n

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C} \text{ для } i = 0, 1, \ldots, n,\ c_n \neq 0,$$

можно единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разложить в произведение

$$p(z) = c_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_k)^{m_k},$$

где z_i — корень полинома $p(z)$ кратности m_i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

[1] Муавр (Abraham de Moivre) (1667–1754).

Для полиномов со степенью меньшей, чем пятая, всегда можно получить корни, выразив их через арифметические операции и арифметические корни произвольной степени, или **радикалы**. Метод для вычисления корней кубического полинома был предложен **Кардано**[1], полинома четвертой степени — **Феррари**[2]. Однако для отыскания корней полиномов более высоких степеней общих методов не существует: согласно **теореме Абеля**[3]**–Руффини**[4] *произвольное уравнение степени* n *при* $n \geqslant 5$ *неразрешимо в радикалах.*

Контрольные вопросы к главе «Комплексные числа»

1. Что такое комплексное число?
2. Перечислите арифметические операции над комплексными числами.
3. Как найти число, сопряженное по отношению к данному комплексному числу?
4. Каким образом можно геометрически представить комплексное число?
5. Расскажите, в чем заключаются отличия между следующими формами комплексных чисел: алгебраической, тригонометрической, показательной.
6. Запишите формулу Эйлера.
7. Как найти корень n-й степени из комплексного числа? Сколько значений он принимает?
8. Сформулируйте основную теорему алгебры.
9. Для чего применяют формулу Кардано?
10. Как формулируется теорема Абеля–Руффини?

[1] Кардано (Hieronymus Cardanus) (1501–1576).
[2] Феррари (Lodovico Ferrari) (1522–1565).
[3] Абель (Niels Henrik Abel) (1802–1829).
[4] Руффини (Paolo Ruffini) (1765–1822).

Задачи к главе «Комплексные числа»

7.1. Выполнив арифметические действия, представьте заданное комплексное число z в алгебраической форме $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$:

1) $(2+3i)(5-4i)$;
2) $(2-i)(2+i)$;
3) $(1+i)^4 + (1-i)^4$;
4) $1+i^3$.

7.2. Выполнив арифметические действия, представьте заданное комплексное число z в алгебраической форме $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$:

1) $(3-i)(4+i)$;
2) $(7+10i)(7+5i)$;
3) $(2+3i)^2 + (1-i)^2$;
4) $i^3 - i^4$.

7.3. Даны комплексные числа $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 3+i$, $z_3 = -5+i$. Найдите $z_1 z_2 + z_3^2$.

7.4. Даны комплексные числа $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1-5i$, $z_3 = 3+4i$. Найдите $z_1(z_2^3 - z_3^3)$.

7.5. Выполните действия:

1) $(2+3i)^3 + (2-3i)^3$;
2) $(5-2i)^4 - (5+2i)^4$.

7.6. Выполнив деление, представьте комплексное число $z = \dfrac{a+ib}{c+id}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, в алгебраической форме.

7.7. Упростите выражения:

1) $\dfrac{1+i}{1-i}$;
2) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$;
3) $\dfrac{i^3}{1+i^3}$;
4) $\dfrac{i}{5+4i} + \dfrac{i}{5-4i}$.

7.8. Даны комплексные числа $z_1 = 1+i$, $z_2 = z_1^*$, $z_3 = z_1 + 2z_2$. Найдите $z_1 + (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)/z_2$.

7.9. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - z_1$, $z_3 = 1 - 3z_1$. Найдите $(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)/(z_1 z_2 z_3)$.

7.10. Найдите число, сопряженное с числом z, если:

1) $z = \dfrac{5-3i}{5+3i}$;

2) $z = 1 + i + \dfrac{1}{1+i}$.

7.11. Найдите z, если $z + 2z^* = 9 + i$.

7.12. Найдите z, если $z^* - 5z = 4 - i$.

7.13. Докажите, что для произвольных $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняются равенства:

1) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$;
2) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

7.14. Докажите, что если $|z| = 1$, то $z^{-1} = z^*$.

$*$**7.15.** Докажите, что для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняются **неравенства треугольника**:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

7.16. Докажите **обобщенное неравенство треугольника**:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j| \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad z_j \in \mathbb{C}.$$

$*$**7.17.** Докажите **неравенство Коши–Шварца для комплексных чисел**:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right),$$

где a_i, b_i — произвольные комплексные числа, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$*$**7.18.** Вычислите суммы:

1) $\sum\limits_{k=1}^{100} i^k$;

2) $\sum\limits_{k=-99}^{99} i^k$.

7.19. Упростите выражение i^m для произвольного $m \in \mathbb{Z}$.

7.20. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

1) $1 + i$;
2) $-3 + 4i$;
3) $-4i$;
4) $\dfrac{5 - i}{5 + i}$.

7.21. Представьте следующие комплексные числа в алгебраической форме $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$:

1) $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;
2) $z = \sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right)$;
3) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}}$;
4) $z = \dfrac{2i}{\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{3\pi}{4})}$.

7.22. Докажите, что комплексное число вида $u = \dfrac{a + ib}{a - ib}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, можно представить в виде экспоненты с чисто мнимым показателем, т. е. в виде
$$u = e^{i\delta}, \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

7.23. Вычислите i^i.

7.24. На комплексной плоскости z изобразите множество точек, удовлетворяющих заданным условиям:

1) $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$;
2) $\operatorname{Im} z < -2$;
3) $|z| \leqslant \sqrt{2}$;
4) $\dfrac{\pi}{8} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.

7.25. На комплексной плоскости $\textcircled{z}$ изобразите множество точек, удовлетворяющих заданным условиям:

1) $\dfrac{1}{2} \leqslant |z+i| < 1$;
2) $z^{-1} = z^*$;
3) $|z-1| + |z+1| \leqslant 2\sqrt{2}$;
4) $|z+1| = |z-2+i|$.

7.26. Вычислите:

1) $\sqrt{1+i}$;
2) $\sqrt[3]{-1}$.

7.27. Вычислите:

1) $\sqrt{8i}$;
2) $\sqrt[6]{64}$.

***7.28.** Обозначим корни уравнения $z^n = 1$, где n — натуральное число, через ω_k, $k = 0, \ldots, n-1$. Докажите, что верны следующие утверждения [101]:

1) на комплексной плоскости точки, соответствующие величинам ω_k, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, центр которой расположен в начале координат;
2) $\omega_{k+n/2} = -\omega_k$ для четных n и $0 \leqslant k \leqslant n/2 - 1$;
3) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ для $n > 1$;
4) $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n-1}$.

***7.29.** Докажите справедливость тождеств для корней из единицы ω_k, где $0 \leqslant k \leqslant n-1$, для всех натуральных значений n:

1) $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k) = z^n - 1$;
2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\omega_k)^d = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant d \leqslant n-1; \\ n, & d = n. \end{cases}$

∗7.30. Докажите справедливость тождеств для корней n-й степени из единицы ω_k, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, для всех значений $n > 2$:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n-2} \omega_k \omega_{k+1} = -\omega_{n-1}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n-2} \dfrac{\omega_{k-1}\omega_{k+1}}{\omega_k} = -(1 + \omega_{n-1})$;

3) $\sum\limits_{\substack{k,k'=0 \\ k<k'}}^{n-1} \omega_k \omega_{k'} = 0$;

4) $\sum\limits_{\substack{k,k'=0 \\ k<k'}}^{n-1} \dfrac{\omega_k \omega_{k'}}{\omega_{k'-k}} = \dfrac{n}{1 - \omega_2}$.

7.31. Докажите справедливость следующих тождеств:

1) $\sum\limits_{k=0}^{N-1} |1 - \omega_k| = 2 \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2N}$;

2) $\prod\limits_{k=1}^{N-1} |1 - \omega_k| = N$.

∗7.32. Пусть ω_k, где $0 \leqslant k \leqslant n-1$, — корни n-й степени из единицы, x — произвольное комплексное число, причем $x \neq \omega_k$ ни для какого k. Вычислите сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega_k}{x - \omega_k}$.

∗7.33. Докажите, что для всех натуральных $n \in \mathbb{N}$ и комплексных $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, выполняются **тождества Лагранжа**[1]:

1) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \cos[(n+1)\alpha/2]$;

2) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \sin[(n+1)\alpha/2]$.

7.34. Докажите формулу Муавра для натуральных значений показателя степени n, используя метод математической индукции.

∗7.35. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Рассмотрите случаи:

1) $n = 3$;

[1] Лагранж (Joseph-Louis Lagrange) (1736–1813).

2) $n = 4$.

∗7.36. Вычислите среднее значение на сегменте $[0, 2\pi]$ от сотой степени синуса [6].

∗7.37. Вычислите среднее по периоду от двухсотой степени косинуса.

∗7.38. Вычислите среднее по периоду от двадцатой степени функции

$f(x) = \sin x + \cos x$.

∗7.39. Вычислите среднее по периоду от двадцатой степени функции

$f(x) = a \sin x + b \cos x$, где a, b — const, $a, b \in \mathbb{R}$.

∗7.40. Существуют соотношения, выражающие коэффициенты полинома через его корни (**формулы Виета**[1]). Если α_1, α_2, …, α_n — корни полинома $p(z) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, причем каждый корень взят соответствующее его кратности число раз, то выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= \quad - a_1, \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= \quad a_2, \\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= \quad - a_3, \\
&\ldots \\
\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n &= (-1)^{n-1}a_{n-1}, \\
\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n &= \quad (-1)^n a_n.
\end{aligned}$$

Докажите справедливость формул Виета.

7.41. Пусть z_1, z_2 — корни квадратного трехчлена $p(z) = z^2 + pz + q$. Выразите следующие величины через коэффициенты p и q:

1) $z_1^2 + z_2^2$;

2) $z_1^{-2} + z_2^{-2}$.

7.42. Пусть z_1, z_2 — корни квадратного трехчлена $p(z) = z^2 + pz + q$. Выразите следующие величины через коэффициенты p и q:

1) $z_1^4 + z_2^4$;

2) $z_1^{-4} + z_2^{-4}$.

[1] Виет (François Viète, seigneur de la Bigotière) (1540–1603).

7.43. Определите сумму и произведение всех корней для каждого уравнения:

1) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;

2) $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$.

7.44. Определите сумму и произведение всех корней для каждого уравнения:

1) $z^4 - 2z = 0$;

2) $z^5 + z^4 + z^3 = 0$.

$*$**7.45.** Найдите сумму квадратов корней уравнения $(x^2 - 2x)^2 - 17(x^2 - - 2x) + 35 = 0$.

$*$**7.46.** Найдите сумму квадратов корней уравнения $(x^2 - 3x)^2 + (x^2 - 3x) - - 2000 = 0$.

7.47. Вычислите сумму квадратов корней уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$.

7.48. Вычислите сумму квадратов корней уравнения $x^3 - 10x^2 - 20x + + 6 = 0$.

7.49. Определите, при каких значениях n каждый из корней полинома

$$q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

является также корнем полинома

$$p(z) = z^n + z^{11} + z^9 + z^7 + z^5.$$

7.50. Определите, при каких значениях n каждый из корней полинома

$$q(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

является также корнем полинома

$$p(z) = z^n + z^{20} + z^{15} + z^{10} + z^5 + 1.$$

$*$**7.51.** Для определения корней кубического уравнения

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

поступают следующим образом. При помощи замены переменной $z = y - \dfrac{b}{3a}$ уравнение приводят к **канонической форме**

$$y^3 + py + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

По **формуле Кардано** корни кубического уравнения y_1, y_2, y_3 в канонической форме равны [55]

$$\begin{aligned} y_1 &= \quad \alpha+\beta, \\ y_2 &= -\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ y_3 &= -\frac{\alpha+\beta}{2} - i\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}},$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Применяя эти соотношения, нужно для каждого из трех значений кубического корня α брать то значение корня β, для которого выполняется равенство $\alpha\beta = -p/3$.

Пользуясь формулой Кардано, решите уравнение $z^3 - 3z + 2 = 0$.

∗7.52. Решите уравнение $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$, пользуясь формулой Кардано.

∗7.53. Решите уравнение $2z^3 - 13z^2 - 17z + 70 = 0$, пользуясь формулой Кардано.

Ответы, указания, решения к главе «Комплексные числа»

7.1. *Решение.*

1) Операции с комплексными числами следует производить аналогично соответствующим операциям с алгебраическими полиномами, используя свойство $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} (2+3i)(5-4i) &= 2\cdot5 + 2\cdot(-4i) + 3i\cdot5 + 3i\cdot(-4i) = \\ &= 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 10 + (-8+15)i - 12(-1) = 22 + 7i; \end{aligned}$$

2) $(2-i)(2+i) = 2^2 - i^2 = 5$;

3) $(1+i)^4 + (1-i)^4 = (1+4i+6i^2+4i^3+i^4) + (1-4i+6i^2-4i^3+i^4) =$

$$= 2\left(1 + 6i^2 + (i^2)^2\right) = 2\left(1 + 6(-1) + (-1)^2\right) = -8;$$

4) $1 + i^3 = 1 + i \cdot i^2 = 1 - i$.

7.2. *Ответ:*
1) $13 - i$;

2) $-1 + 105i$;

3) $-5 + 10i$;

4) $-1 - i$.

7.3. *Ответ:* $z_1 z_2 + z_3^2 = 29 - 15i$.

7.4. *Ответ:* $z_1(z_2^3 - z_3^3) = 125 + 257i$.

7.5. *Ответ:*
1) -92;

2) $-1680i$.

7.6. *Решение.*
Обозначим $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Дробь вида $\dfrac{z_1}{z_2}$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, удобно преобразовать, умножив ее на $1 \equiv \dfrac{z_2^*}{z_2^*}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot 1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}.$$

Следовательно, результатом деления двух комплексных чисел z_1/z_2, причем $z_2 \neq 0$, будет число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

7.7. *Решение.*
Воспользовавшись приемом, предложенным в предыдущем упражнении, получим:

1) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{(1+i)^2}{1-i^2} = \dfrac{1}{2}(1 + 2i + i^2) = i$;

2) $\dfrac{2+3i}{2-3i} = \dfrac{2+3i}{2-3i} \cdot \dfrac{2+3i}{2+3i} = \dfrac{4 + 12i + 9i^2}{4+9} = \dfrac{1}{13}(-5 + 12i)$;

3) $\dfrac{i^3}{1+i^3} = \dfrac{i \cdot i^2}{1 + i \cdot i^2} = \dfrac{-i}{1-i} = \dfrac{-i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} =$

$$= -\frac{1}{2}(i + i^2) = \frac{1}{2}(1 - i);$$

4) $\dfrac{i}{5+4i}+\dfrac{i}{5-4i}=i\left(\dfrac{1}{5+4i}+\dfrac{1}{5-4i}\right)=i\dfrac{5-4i+5+4i}{(5+4i)(5-4i)}=$

$$=\frac{10i}{25+16}=\frac{10}{41}i.$$

7.8. *Ответ:* $z_1+(z_1-z_3)(z_2-z_3)/z_2=5+i$.

7.9. *Ответ:* $(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)/(z_1z_2z_3)=\dfrac{1}{85}(-21+33i)$.

7.10. *Ответ:*

1) $z=\dfrac{1}{17}(8+15i)$;

2) $z=\dfrac{1}{2}(3-i)$.

7.11. *Решение.*

Пусть $z=a+ib$, тогда $z+2z^*=(a+ib)+2(a-ib)=3a-ib$. Поскольку комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases}3a=9,\\-b=1;\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a=3,\\b=-1,\end{cases}$$

откуда $z=3-i$.

7.12. *Ответ:* $z=-1+i/6$.

7.13. *Доказательство.*

Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, где $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

1) Выразим левую часть равенства через x_1, x_2, y_1 и y_2:

$$(z_1+z_2)^*=[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]^*=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2).$$

Теперь преобразуем его правую часть

$$z_1^*+z_2^*=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2).$$

Следовательно, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\ \ (z_1+z_2)^*=z_1^*+z_2^*$.

2) Левая часть равенства

$$(z_1z_2)^*=[(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)]^*=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Правая часть совпадает с левой:

$$z_1^* z_2^* = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (z_1z_2)^*.$$

7.14. *Доказательство.*

Представим число с модулем, равным единице, в показательной форме: $z = e^{i\varphi}$. После алгебраических преобразований

$$z^{-1} = (e^{i\varphi})^{-1} = e^{-i\varphi} = (e^{i\varphi})^* = z^*$$

получаем равенство $z^{-1} = z^*$.

7.15. *Указание.*

Воспользуйтесь геометрической интерпретацией комплексных чисел z_1 и z_2. Длина стороны произвольного треугольника не больше суммы длин двух других сторон и не меньше абсолютной величины их разности.

7.16. *Доказательство.*

Обозначим предикат «$\left|\sum\limits_{j=1}^{n} z_j\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|$» через $P(n)$.

База индукции

Для $n = 1$ неравенство принимает вид $|z_1| \leqslant |z_1|$, и это истинное высказывание.

Для $n = 2$ имеем $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Истинность этого утверждения для произвольных комплексных z_1 и z_2 доказана в упр. **7.15**.

Шаг индукции

Пусть $P(k)$ принимает истинное значение, т. е. $\left|\sum\limits_{j=1}^{k} z_j\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} |z_j|$ для некоторого натурального k. Проверим истинность предиката $P(k+1)$:

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k+1} |z_j|\,.$$

Для этого представим левую часть в виде:

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} z_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} z_j + z_{k+1}\right| = |\mathcal{Z} + z_{k+1}|\,,$$

где введено обозначение $\mathcal{Z} = \sum\limits_{j=1}^{k} z_j$.

В соответствии с базой индукции для $n = 2$ имеем:

$$|\mathcal{Z} + z_{k+1}| \leqslant |\mathcal{Z}| + |z_{k+1}|\,.$$

Учитывая индуктивное предположение, получим:

$$\left|\sum_{j=1}^{k+1} z_j\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{k} z_j\right| + |z_{k+1}| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |z_j| + |z_{k+1}| = \sum_{j=1}^{k+1} |z_j|\,.$$

Методом математической индукции доказано, что обобщенное неравенство треугольника справедливо для всех натуральных n.

7.17. *Указание.* См. упр. **1.70**.

7.18. *Решение.*

Воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии (доказанной в упражнении **1.55**):

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

1) $\sum\limits_{k=1}^{100} i^k = \dfrac{i^{101} - i}{i - 1} = \dfrac{i^{100} \cdot i - i}{i - 1} = 0.$

2) $\sum\limits_{k=-99}^{99} i^k = \dfrac{1}{i^{99}} \sum\limits_{k=-99}^{99} i^{(k+99)}.$

В последней сумме проведем замену индекса суммирования $k' = k + 99$. Тогда искомая сумма примет следующий вид:

$$\sum_{k=-99}^{99} i^k = i^{-99} \sum_{k'=0}^{198} i^{k'} = i^{-100+1} \frac{i^{199} - 1}{i - 1} = i \cdot \frac{i^{199} - 1}{i - 1} =$$

$$= i \cdot \frac{i^{196} \cdot i^3 - 1}{i - 1} = i \cdot \frac{i^3 - 1}{i - 1} = \frac{i^4 - i}{i - 1} = \frac{1 - i}{i - 1} = -1.$$

7.19. *Решение.*

Мнимая единица обладает свойством $i^4 = 1$. Рассмотрим четыре случая в зависимости от остатка деления m на 4:

1) $m = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$i^m = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1;$$

2) $m = 4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$i^m = i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i;$$

3) $m = 4k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$i^m = i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = i^2 = -1;$$

4) $m = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$i^m = i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$i^m = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 4k,\ k \in \mathbb{Z}; \\ i, & \text{если } m = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}; \\ -1, & \text{если } m = 4k+2,\ k \in \mathbb{Z}; \\ -i, & \text{если } m = 4k+3,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

7.20. *Решение.*

1) Для перехода к тригонометрической форме комплексного числа необходимо определить модуль $\rho = |z|$ и аргумент $\varphi = \arg z$. Воспользовавшись формулами для ρ и φ, получим

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k = \operatorname{arctg} 1 + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i \sin(\frac{\pi}{4} + 2\pi k) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2)
$$\rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) + \pi + 2\pi k = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$-3+4i = 5\left[\cos\left(\pi(2k+1) - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\pi(2k+1) - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right], k \in \mathbb{Z}.$$

3) $\rho = 4$, $\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sign}(-4) + 2\pi k = 2\pi k - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}(4k-1)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$-4i = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(4k-1)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}(4k-1)\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4) Преобразуем дробь путем умножения числителя и знаменателя на число $(5+i)^*$:

$$\frac{5-i}{5+i} = \frac{(5-i)^2}{5^2 - i^2} = \frac{1}{26}\left(25 - 10i + i^2\right) = \frac{12-5i}{13},$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = 1,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right) + 2\pi k = -\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$\frac{5-i}{5+i} = \cos\left(2\pi k - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right) + i\sin\left(2\pi k - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7.21. *Ответ:*
1) $z = 3\sqrt{3}/2 + 3i/2$;
2) $z = \sqrt{6}/2 - i/\sqrt{2}$;
3) $z = 1 - i$;
4) $z = -\sqrt{2}(1 + i)$.

7.22. *Доказательство.*
Перейдем к экспоненциальной форме числа u. Пусть $a + ib = \rho e^{i\varphi}$, тогда $a - ib = \rho e^{-i\varphi}$ и

$$u = \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} = e^{2i\varphi}.$$

В силу этого $u = e^{i\delta}$, где $\delta = 2\varphi$.

7.23. *Решение.*
Показательная форма записи мнимой единицы имеет вид $i = e^{i\pi/2+2\pi ik}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Записав мнимую единицу в основании в форме экспоненты и используя тождество $(e^a)^b = e^{ab}$ [64], получим

$$i^i = (e^{i\pi/2+2\pi ik})^i = e^{i^2(\pi/2+2\pi k)} = e^{-\pi/2+2\pi k'}, \text{ где } k, k' \in \mathbb{Z}.$$

Как видно из рассмотренного примера, показательная функция является многозначной функцией на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$.

7.24. *Решение.*
1) Комплексному числу $z = x + iy$ на плоскости z соответствует точка с декартовыми координатами (x, y). Условие $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$ равносильно $-1 \leqslant x \leqslant 1$, которому удовлетворяют все точки с абсциссами, не превосходящими по абсолютному значению единицы.

2) $\operatorname{Im} z < -2 \Leftrightarrow y < -2$. Данному условию удовлетворяют точки комплексной плоскости с ординатами, меньшими -2.

3) $|z| \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}$, или $x^2+y^2 \leqslant 2$. Этому неравенству удовлетворяют точки, лежащие на расстоянии, не превышающем $\sqrt{2}$ от начала координат.

4) Аргумент числа z лежит в интервале $(\pi/8, \pi/4)$. На плоскости $ⓩ$ таким числам соответствует внутренняя часть угла, образованная лучами $\varphi = \pi/8$ и $\varphi = \pi/4$.

Множества точек, удовлетворяющих условиям пунктов 1)–4), изображены на рис. 7.3, панели *а*)–*г*) соответственно.

7.25. *Ответ:*

Множества точек, удовлетворяющих условиям пунктов 1)–4), изображены на рис. 7.4, панели *а*)–*г*) соответственно.

7.26. *Решение.*

1) Тригонометрическая форма числа $z = 1+i$ была найдена в упражнении **7.20**, 1):

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{4}+2\pi k)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Квадратный корень можно рассматривать как возведение в степень, равную $\dfrac{1}{2}$: $\sqrt{z} \equiv z^{1/2}$. Воспользовавшись формулой Муавра, получим

$$\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2} = \left[\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{4}+2\pi k)\right)\right]^{1/2} = \\ = 2^{1/4}\left(\cos(\frac{\pi}{8}+\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{8}+\pi k)\right),\ k = 0, 1.$$

Заметим, что достаточно оставить только два значения $k = 0, 1$. Значения квадратного корня при остальных целых значениях k совпадают с соответствующими значениями при указанных k. Например, при $k = 3$ получим $\cos(\dfrac{\pi}{8}+3\cdot\pi) = \cos(\dfrac{\pi}{8}+\pi+2\pi) = \cos(\dfrac{\pi}{8}+1\cdot\pi)$, что соответствует случаю $k = 1$.

Для вычисления $\cos(\dfrac{\pi}{8}+\pi k)$ и $\sin(\dfrac{\pi}{8}+\pi k)$ применим тригонометрические формулы половинных углов. Как известно (см. раздел «Справочные материалы», соотношения (А.8)),

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

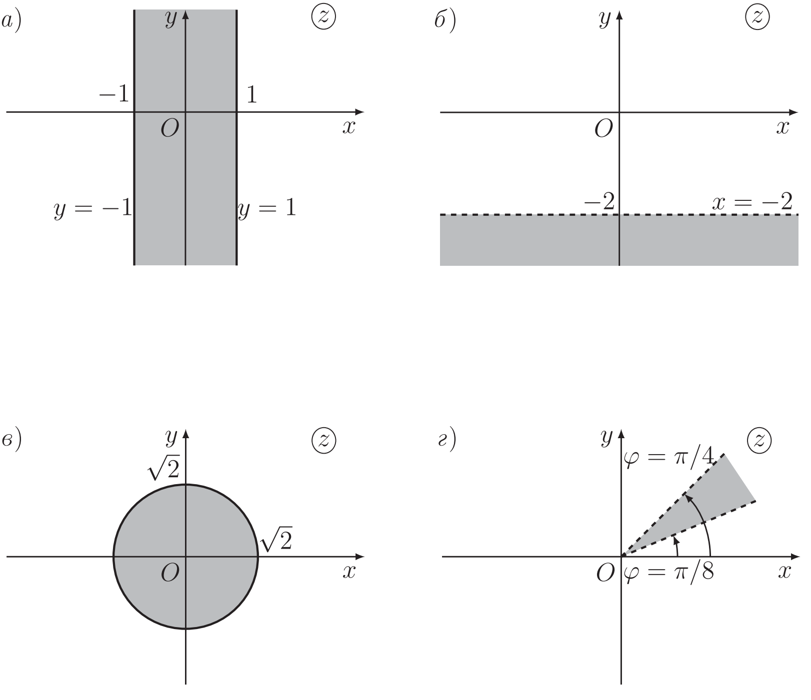


Рис. 7.3. К упр. **7.24**

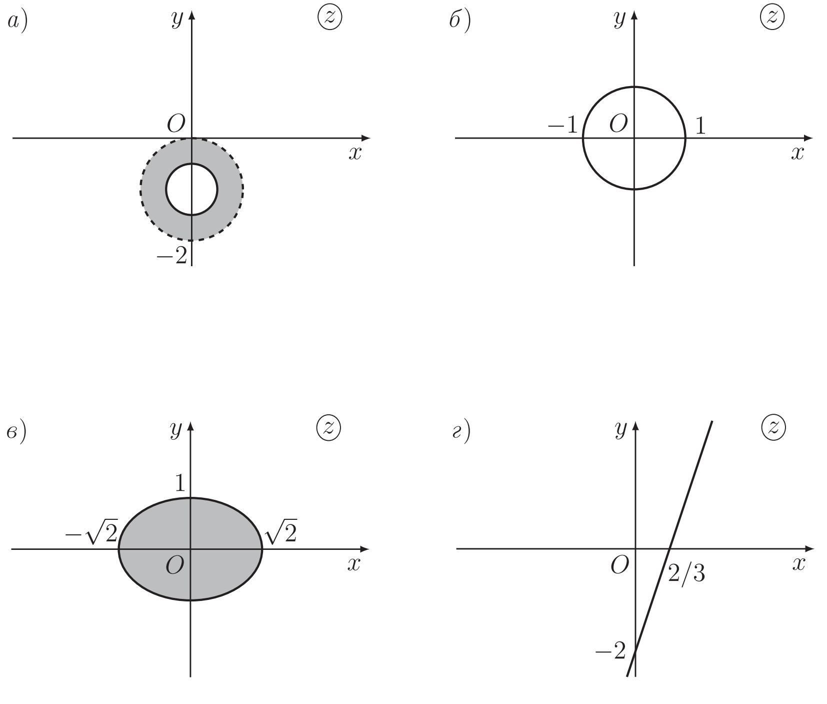


Рис. 7.4. К упр. **7.25**

Значит, для $k = 0$ имеем

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

и первое значение квадратного корня $\sqrt{z}$ равно

$$\sqrt{1+i} = 2^{1/4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Для $k = 1$ получим $\cos(\frac{\pi}{8}+\pi) = -\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin(\frac{\pi}{8}+\pi) = -\sin\frac{\pi}{8}$, и второе значение квадратного корня $\sqrt{z}$ равно

$$\sqrt{1+i} = 2^{1/4}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Окончательный ответ представим в виде

$$\sqrt{1+i} = \pm 2^{1/4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

2) Представим число -1 в тригонометрической форме:

$$\rho = 1, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{0}{1}\right) + \pi = \pi;$$

$$-1 = \cos(\pi(2k+1)) + i\sin(\pi(2k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

По формуле Муавра получим

$$\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}(2k+1)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}(2k+1)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Оставляем только три значения $k = 0, 1, 2$, поскольку все остальные целые значения k не приведут к новым значениям корня.

Рассмотрим случай $k = 0$. Подставляя известные значения $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получим первое значение кубического корня

$$\sqrt[3]{-1} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Далее, для $k = 1$ имеем

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

И, наконец, при $k = 2$ получим

$$\sqrt[3]{-1} = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, все значения кубического корня $\sqrt[3]{-1}$ принадлежат множеству $\{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

7.27. *Ответ:*

1) $\sqrt{8i} = \pm 2(1+i)$;

2) $\sqrt[6]{64} \in \{\pm 2, \pm 1 \pm i\sqrt{3}, \pm 1 \mp i\sqrt{3}\}$.

7.28. *Доказательство.*

1) Согласно введенному определению,

$$\omega_k = (e^{2\pi i})^{k/n} = e^{2\pi ik/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Модуль комплексного числа $\omega_k = e^{2\pi ik/n}$ равен единице для всех значений переменной k, а аргумент равен $\arg\omega_k = 2\pi k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. В силу этого можно сделать вывод, что корни n-й степени из единицы расположены на единичной окружности C, причем первый корень ω_0, соответствующий $k = 0$, лежит на вещественной оси, и ω_k делят окружность на n дуг одинаковой длины (см. пример для частного случая $n = 9$ на рис. 7.5).

2) Преобразуем показательную форму записи числа $\omega_{k+n/2}$:

$$\omega_{k+n/2} = e^{\frac{2\pi i(k+n/2)}{n}} = e^{\frac{2\pi ik}{n}}e^{\pi i} = \omega_k e^{\pi i}.$$

Используя равенство $e^{\pi i} = -1$, получаем: $\omega_{k+n/2} = -\omega_k$ для четных n и $k = 0, 1, \ldots, n/2-1$.

3) Величины ω_k образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен $\omega_1 = e^{2\pi i/n}$. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии (см. упражнение **1.55**), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik/n} = \frac{(e^{2\pi i/n})^n - 1}{e^{2\pi i/n} - 1} = 0.$$

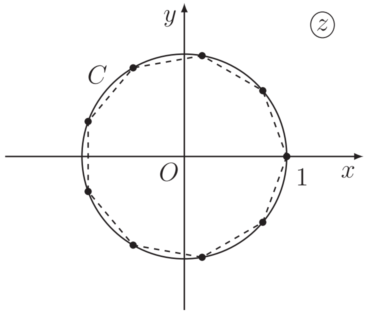


Рис. 7.5. К упр. **7.28**. Расположение корней n-й степени из единицы на единичной окружности для $n = 9$

4)
$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik/n} = e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2\pi ik/n} = e^{(2\pi i \sum\limits_{k=0}^{n-1} k)/n}.$$

Сумма в показателе экспоненты равна $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$, значит,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = e^{\pi i(n-1)} = \cos \pi(n-1) + i \sin \pi(n-1) = (-1)^{n-1}.$$

7.31. *Доказательство.*

1) Воспользовавшись формулой $\omega_k = \cos \dfrac{2\pi k}{N} + i \sin \dfrac{2\pi k}{N}$, представим слагаемые $|1 - \omega_k|$ в виде

$$\begin{aligned} |1 - \omega_k| &= \left| \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}\right) + i \sin \frac{2\pi k}{N} \right| = \\ &= \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}\right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi k}{N}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}\right)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание тождество (A.8), приведенное в разделе «Справочные материалы» на стр. 565, имеем:

$$|1 - \omega_k| = \sqrt{2 \times 2\left(\sin \frac{\pi k}{N}\right)^2} = 2\left|\sin \frac{\pi k}{N}\right|.$$

Для всех $0 \leqslant k \leqslant N-1$ выполняется неравенство $\sin\dfrac{\pi k}{N} \geqslant 0$, следовательно, $\left|\sin\dfrac{\pi k}{N}\right| = \sin\dfrac{\pi k}{N}$. Таким образом, задача свелась к вычислению суммы $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left(2\sin\dfrac{\pi k}{N}\right) = 2\sum\limits_{k=0}^{N-1}\sin\dfrac{\pi k}{N}$.

Воспользуемся тождеством Лагранжа (см. упр. **7.33** на стр. 315):

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\frac{\pi k}{N} = \frac{\sin(\pi(N-1)/(2N))}{\sin(\pi/(2N))}\sin\frac{\pi N}{2N} = $$
$$= \frac{\cos\left(\pi/(2N)\right)}{\sin\left(\pi/(2N)\right)} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N}.$$

Итак, для всех натуральных чисел $N > 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{N-1}|1-\omega_k| = 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2N}.$$

2) Как известно, произведение модулей комплексных чисел равно модулю их произведения:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ (|z_1||z_2| = |z_1 z_2|).$$

В нашем случае это позволяет написать равенство

$$\prod_{k=1}^{N-1}|1-\omega_k| = \Big|\prod_{k=1}^{N-1}(1-\omega_k)\Big|.$$

Рассмотрим произведение $\prod_{k=0}^{N-1}(z-\omega_k)$, где z — некоторое комплексное число. Так как величины $\omega_k = e^{2\pi ik/N}$ для $k = 0, 1, \ldots, N-1$ являются корнями уравнения $z^N - 1 = 0$, то произведение $\prod_{k=0}^{N-1}(z-\omega_k)$ можно трактовать как разложение полинома $z^N - 1$ на линейные множители. Следовательно, имеет место равенство $\prod_{k=0}^{N-1}(z-\omega_k) = z^N - 1$. Поскольку $\omega_0 = 1$, то для всех $z \neq 1$ получаем: $\prod_{k=1}^{N-1}(z-\omega_k) = \dfrac{z^N-1}{z-1}$, что влечет $\left|\prod_{k=1}^{N-1}(z-\omega_k)\right| = \left|\dfrac{z^N-1}{z-1}\right|$.

В пределе $z \to 1$ дробь $\dfrac{z^N-1}{z-1}$ стремится к N, значит, для всех $N = 2, 3, \ldots$ выполняется равенство

$$\prod_{k=1}^{N-1}|1-\omega_k| = N.$$

7.32. *Ответ:* $\dfrac{n}{x^n - 1}$.

7.33. *Доказательство.*

Рассмотрим сумму $\mathcal{Z} = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{i\alpha k}$. Легко видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \operatorname{Re}\mathcal{Z},$$
$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \operatorname{Im}\mathcal{Z}.$$

Вычислим $\mathcal{Z}$, используя формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$\mathcal{Z} = \sum_{k=1}^{n} e^{i\alpha k} = \frac{e^{i\alpha(n+1)} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1}.$$

Упростим полученное выражение, домножив дробь на $1 = \dfrac{e^{-i\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}}$ и выполнив простые преобразования:

$$\mathcal{Z} = \frac{e^{i\alpha(n+1)} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1} \cdot \frac{e^{-i\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}} = \frac{e^{i\alpha(n+1/2)} - e^{i\alpha/2}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}}.$$

Знаменатель полученной дроби равен $e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2} = 2i\sin\alpha/2$. Перепишем экспоненты в числителе, используя формулу Эйлера:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2i\sin\alpha/2}\Big[\cos[(n+1/2)\alpha] + i\sin[(n+1/2)\alpha] - (\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2)\Big] =$$
$$= \frac{\sin[(n+1/2)\alpha] - \sin\alpha/2}{2\sin\alpha/2} + \frac{\cos[(n+1/2)\alpha] - \cos\alpha/2}{2i\sin\alpha/2}.$$

Далее воспользуемся известными тригонометрическими формулами (см. раздел «Справочные материалы», формулы (А.16) и (А.18))

$$\sin a - \sin b = \quad 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

Получаем

$$\mathcal{Z} = \frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\cos[(n+1)\alpha/2] + i\,\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\sin[(n+1)\alpha/2],$$

откуда непосредственно следуют выражения для сумм из условия.

7.34. *Доказательство.*

Обозначим предикат «$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$» через $P(n)$ и докажем утверждение $\forall n\, P(n)$ методом математической индукции.

База индукции

Для $n = 1$ получаем верное тождество $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$, поэтому $P(1)$ — истинно.

Шаг индукции

Предположим, что $P(k)$, $k \in \mathbb{N}$ истинно. Докажем истинность высказывания $P(k+1)$. Требуется доказать, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = \cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi.$$

Рассмотрим выражение $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1}$ и представим его в виде

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По индуктивному предположению первый множитель равен

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos\, k\varphi + i\sin\, k\varphi.$$

Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = (\cos\, k\varphi + i\sin\, k\varphi) \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Раскроем скобки в полученном выражении, воспользовавшись известными тождествами для тригонометрических функций, приведенными в разделе «Справочные материалы», формулы (A.11) и (A.9):

$$\begin{gathered}\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,\\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b,\end{gathered}$$

полагая $a = k\varphi$, $b = \varphi$. Получаем

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = \underbrace{(\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi)}_{\cos(k+1)\varphi} +{}&\\ + i\,\underbrace{(\sin k\varphi\cos\varphi + \cos k\varphi\sin\varphi)}_{\sin(k+1)\varphi}&.\end{aligned}$$

Значит, по принципу математической индукции формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

справедлива для любых натуральных значений $n \in \mathbb{N}$.

7.35. *Решение.*

В левой части формулы Муавра стоит выражение, которое можно раскрыть по формуле бинома Ньютона (см. стр. 190). Таким образом, представим левую часть в виде

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)(\cos^{n-j}\varphi)(i\sin\varphi)^j =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} i^j\, C(n,j)\cos^{n-j}\varphi\, \sin^j\varphi.$$

Удобно разбить данную сумму на две суммы — по четным ($j = 2k$) и нечетным ($j = 2k+1$) значениям j и ввести новую переменную суммирования $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n &= \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} i^{2k} C(n,2k)\cos^{n-2k}\varphi\, \sin^{2k}\varphi + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} i^{2k+1} C(n,2k+1)\cos^{n-2k-1}\varphi\, \sin^{2k+1}\varphi = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k C(n,2k)\cos^{n-2k}\varphi\, \sin^{2k}\varphi + \\ &\quad + i\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} (-1)^k C(n,2k+1)\cos^{n-2k-1}\varphi\, \sin^{2k+1}\varphi.\end{aligned}$$

Теперь осталось воспользоваться тем, что $\cos n\varphi = \mathrm{Re}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$, $\sin n\varphi = \mathrm{Im}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$. Получаем формулы для косинуса и синуса кратного аргумента:

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k C(n,2k)\cos^{n-2k}\varphi\, \sin^{2k}\varphi,$$
$$\sin n\varphi = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} (-1)^k C(n,2k+1)\cos^{n-2k-1}\varphi\, \sin^{2k+1}\varphi.$$

Рассмотрим частные случаи небольших значений n.

1) Для $n = 3$ полученные формулы принимают вид

$$\cos 3\varphi = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C(3, 2k) \cos^{3-2k}\varphi\, \sin^{2k}\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C(3, 2k+1) \cos^{3-2k-1}\varphi\, \sin^{2k+1}\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

2) Для $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} \cos 4\varphi &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^k C(4, 2k) \cos^{4-2k}\varphi\, \sin^{2k}\varphi = \\ &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 4\varphi &= \sum_{k=0}^{1} (-1)^k C(4, 2k+1) \cos^{4-2k-1}\varphi\, \sin^{2k+1}\varphi = \\ &= 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi. \end{aligned}$$

7.36. *Решение.*

Требуется вычислить $\langle \sin^{100} x\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^{100} x\, dx$. Выразим синус через экспоненциальную функцию:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Тогда сотую степень синуса можно представить в виде

$$\sin^{100} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{100} = 2^{-100}(e^{ix} - e^{-ix})^{100}.$$

Среднее значение функции равно

$$\langle \sin^{100} x\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^{100} x\, dx = \frac{2^{-100}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (e^{ix} - e^{-ix})^{100}\, dx.$$

Подынтегральное выражение разложим по формуле бинома Ньютона:

$$\langle \sin^{100} x \rangle = \frac{2^{-100}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} dx \sum_{k=0}^{100} C(100, k) (e^{ix})^{100-k} (-e^{-ix})^k =$$

$$= \frac{2^{-100}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} dx \sum_{k=0}^{100} C(100, k) (-1)^k e^{i(100-2k)x}.$$

Поменяем местами знаки суммирования и интегрирования:

$$\langle \sin^{100} x \rangle = \frac{2^{-100}}{2\pi} \sum_{k=0}^{100} C(100, k) (-1)^k \int\limits_0^{2\pi} e^{i(100-2k)x}\, dx.$$

Поскольку для всех целых n, кроме $n = 0$, выполняется равенство $\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}\, dx = 0$, в последней сумме только одно слагаемое отлично от нуля, а именно, слагаемое с $100 - 2k = 0$, $k = 50$. Окончательно получаем:

$$\langle \sin^{100} x \rangle = \frac{2^{-100}}{2\pi} C(100, 50) \int\limits_0^{2\pi} dx = 2^{-100} C(100, 50) = \frac{100!}{2^{100}(50!)^2}.$$

Примечание. Альтернативный способ вычисления аналогичного интеграла с другим верхним пределом интегрирования $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ методом, основанным на анализе рекуррентного соотношения, приведен в упражнении **8.129**. По поводу оценки значения I_n для больших n см. также упражнение **11.18**.

7.37. *Ответ:* $\langle \cos^{200} x \rangle = \dfrac{200!}{2^{200}(100!)^2}$.

7.38. *Указание.* $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$.

7.39. *Ответ:* $\langle f(x) \rangle = (a^2 + b^2)^{10} \dfrac{20!}{2^{20}(10!)^2}$.

7.40. *Указание.*

Перемножьте скобки в правой части факторизации полинома $p(z)$ и сравните полученные коэффициенты при одинаковых степенях с коэффициентами $p(z)$.

7.41. *Решение.*

1) Представим $z_1^2 + z_2^2$ в виде

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2$$

и выразим сумму и произведение корней $p(z)$ по формулам Виета, доказанным в предыдущем упражнении:

$$z_1^2 + z_2^2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

2) $\dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2} = \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_1^2 z_2^2} = \dfrac{p^2 - 2q}{q^2}.$

7.42. *Ответ:*

1) $z_1^4 + z_2^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2;$

2) $\dfrac{1}{z_1^4} + \dfrac{1}{z_2^4} = \dfrac{(p^2 - 2q)^2 - 2q^2}{q^4}.$

7.43. *Ответ:*

1) $\sum\limits_{k=1}^{3} z_k = \prod\limits_{k=1}^{3} z_k = -1;$

2) $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k = 0, \ \prod\limits_{k=1}^{4} z_k = 4.$

7.44. *Ответ:*

1) $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k = \prod\limits_{k=1}^{4} z_k = 0;$

2) $\sum\limits_{k=1}^{5} z_k = -1, \ \prod\limits_{k=1}^{5} z_k = 0.$

7.45. *Решение.*

Сделаем замену переменной $y = x^2 - 2x$. Полученное квадратное уравнение $y^2 - 17y + 35 = 0$ имеет два корня, которые являются решениями системы

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 17, \\ \quad y_1 y_2 = 35. \end{cases}$$

Пусть уравнение $x^2 - 2x = y_1$ имеет корни x_1 и x_2, а уравнение $x^2 - 2x = y_2$ — корни x_3 и x_4. Множество $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ совпадает с множеством решений исходного уравнения.

Вычислим сумму квадратов корней уравнений $x^2-2x=y_1$ и $x^2-2x=$ $=y_2$, используя формулы Виета:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = [(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] + [(x_3+x_4)^2 - 2x_3x_4] =$$
$$= (2^2+2y_1) + (2^2+2y_2) = 8 + 2(y_1+y_2).$$

В итоге получаем $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 = 8 + 2\cdot 17 = 42$.

7.46. *Ответ:* $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 = 16$.

7.47. *Решение.*

Воспользуемся соотношениями

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

Согласно формулам Виета, $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-7$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = 0^2 - 2(-7) = 14$.

7.48. *Ответ:* $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = 140$.

7.49. *Решение.*

При всех комплексных z, таких, что $z\neq 1$, выполняется равенство

$$z^4+z^3+z^2+z+1 = \frac{z^5-1}{z-1}.$$

Следовательно, четыре корня $z_1,\ldots,z_4$ полинома $q(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$ являются корнями из единицы $\sqrt[5]{1}$, за исключением $z_0=1$. Используя формулу Муавра (см. стр. 309), можно заметить, что

$$z_1=e^{2\pi i/5},\; z_2=e^{4\pi i/5},\; z_3=e^{6\pi i/5},\; z_4=e^{8\pi i/5}.$$

Согласно условию задачи, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} p(z_1)=0, \\ p(z_2)=0, \\ p(z_3)=0, \\ p(z_4)=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Проанализируем первое уравнение полученной системы. Запишем z_1 в экспоненциальной форме и подставим в $p(z)$:

$$p(z_1) = z_1^n + z_1^{11} + z_1^9 + z_1^7 + z_1^5 = \\ = e^{2\pi i n/5} + e^{22\pi i/5} + e^{18\pi i/5} + e^{14\pi i/5} + e^{10\pi i/5} = \\ = e^{2\pi i n/5} + e^{2\pi i/5} + e^{8\pi i/5} + e^{4\pi i/5} + 1.$$

Заметим, что согласно формулам Виета (см. стр. (**7.40**)) сумма корней уравнения $z^5 = 1$ равна 0. В силу этого справедливо равенство

$$1 + e^{2\pi i/5} + e^{4\pi i/5} + e^{6\pi i/5} + e^{8\pi i/5} = 0,$$

следовательно,

$$1 + e^{2\pi i/5} + e^{4\pi i/5} + e^{8\pi i/5} = -e^{6\pi i/5}.$$

Таким образом,

$$p(z_1) = e^{2\pi i n/5} - e^{6\pi i/5}.$$

Найдем решение уравнения $p(z_1) = 0$:

$$e^{2\pi i n/5} = e^{6\pi i/5} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi i n}{5} = \frac{6\pi i}{5} + 2\pi i k_1 \Rightarrow$$

$$n = 3 + 5k_1, \text{ где } k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично получаем решения остальных уравнений системы $(*)$:

$$p(z_2) = 0 \Leftrightarrow n = (1 + 5k_2)/2, \; k_2 \in \mathbb{Z}, \\ p(z_3) = 0 \Leftrightarrow n = (4 + 5k_3)/3, \; k_3 \in \mathbb{Z}, \\ p(z_4) = 0 \Leftrightarrow n = (2 + 5k_4)/4, \; k_4 \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, искомые значения n могут быть представлены в виде $n = 3 + 5k_1$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, при этом условия $p(z_i) = 0$, $i = 2, 3, 4$, удовлетворяются.

По смыслу задачи, n принадлежит множеству натуральных чисел. Получаем окончательный ответ:

$$n = 3 + 5m, \text{ где } m = 0, 1, 2, \ldots$$

7.50. *Ответ:* $n = 1 + 6m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$

7.51. *Ответ:* $z_1 = -2$, $z_2 = z_3 = 1$.

7.52. *Решение.*

Сделаем замену переменной $z = y + \dfrac{5}{3}$. Получим кубическое уравнение в канонической форме

$$y^3 + \frac{2}{3}y + \frac{20}{27} = 0,$$

здесь $p = \dfrac{2}{3}$, $q = \dfrac{20}{27}$. Далее используем формулу Кардано:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{4}{27},$$

$$\alpha, \beta = \sqrt[3]{-\frac{10}{27} \pm \sqrt{\frac{4}{27}}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-10 \pm 6\sqrt{3}}.$$

Пусть $\alpha = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$, тогда, чтобы выполнялось условие $\alpha\beta = -p/3$, выбираем $\beta = -\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}$. Корни уравнения будут иметь вид

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}\right);$$
$$y_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} + \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}\right);$$
$$y_3 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}\right) - \frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} + \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}\right).$$

Полученные выражения можно упростить, если заметить, что выполняется равенство $6\sqrt{3} \pm 10 = (\sqrt{3} \pm 1)^3$. Тогда $\sqrt[3]{6\sqrt{3} \pm 10} = \sqrt{3} \pm 1$, и, следовательно,

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)\right) = -\frac{2}{3};$$
$$y_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)\right) + \frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1\right) = \frac{1}{3} + i;$$
$$y_3 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)\right) - \frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1\right) = \frac{1}{3} - i.$$

Возвращаясь к исходной переменной $z = y + \dfrac{5}{3}$, получаем $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 2 - i$.

7.53. *Ответ:* $z_1 = 7$, $z_2 = -\dfrac{5}{2}$, $z_3 = 2$.

Глава 8

Рекуррентные соотношения

Рекуррентным соотношением (от латинского *recurrere* — возвращаться) называют способ задания функции $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, при котором [22, 53]:

1) значения функции $f(n)$ для некоторого подмножества

$$N_m = \{1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{N}$$

задаются в явном виде:

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots,\ f(m) = a_m;$$

2) значения функции для аргументов $k \in \mathbb{N} \setminus N_m$ выражаются через значения $f(i)$, где $i = 1, 2, \ldots, k-1$, по заданному правилу.

Построенная таким образом функция называется **рекурсивной** или **рекурсивно заданной**, и она является **решением** рекуррентного соотношения. Множество значений функции $f(n)$ называют также **рекурсивной последовательностью**.

Пусть задана рекурсивная последовательность $\{a_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется **последовательностью с частичной предысторией**, если каждый последующий член последовательности зависит явно от некоторого фиксированного числа предыдущих членов. Если a_n зависит от всех a_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то говорят о **последовательности с полной предысторией**.

При анализе алгоритмов довольно часто требуется исследовать рекурсивно заданные последовательности. Рассмотрим основные методы анализа рекуррентных соотношений [97]:

1) *метод подстановки;*

2) *метод, основанный на решении характеристического уравнения;*

3) *метод производящих функций.*

Метод подстановки заключается в установлении явного выражения для величины a_n и последующем доказательстве для всех n, которое осуществляется следующим образом. В правой части рекуррентного соотношения для a_n присутствуют величины $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ Выражаем их через $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots$, затем через $a_{n-3}, a_{n-4}, \ldots$, пока не станет возможным установить формулу для a_n. Полученную формулу следует доказать, например, с использованием математической индукции.

Метод, основанный на решении **характеристического уравнения**, применяется для решения линейных рекуррентных соотношений.

Линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами первого порядка называется соотношение вида

$$a_n = ca_{n-1}, \quad c \neq 0.$$

Его решением будет $a_n = Ac^{n-1}$, где величина A определяется из начального условия $a_1 = A$.

Линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами порядка l называется соотношение вида

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_l a_{n-l}, \quad c_l \neq 0.$$

Для решения данного соотношения следует выписать характеристическое уравнение

$$z^l = c_1 z^{l-1} + c_2 z^{l-2} + \ldots + c_l.$$

Если величины $z_1, z_2, \ldots$ являются корнями характеристического уравнения кратностей m_1, $m_2, \ldots$, то

$$\begin{aligned} a_n = {} & A_1 z_1^n + A_2 n z_1^n + \ldots + A_n n^{m_1 - 1} z_1^n + \\ & + B_1 z_2^n + B_2 n z_2^n + \ldots + B_n n^{m_2 - 1} z_2^n + \ldots \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее важный в практическом отношении случай рекуррентного соотношения второго порядка, $l = 2$, с вещественными коэффициентами $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Характеристическое уравнение принимает вид

$$z^2 = c_1 z + c_2,$$

для записи решения которого рассмотрим три возможных случая.

1. Характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, тогда

$$a_n = Az_1^n + Bz_2^n.$$

2. Характеристическое уравнение имеет два равных вещественных корня $z_1 = z_2$, другими словами, один корень z_0 кратности $m = 2$. В этом случае

$$a_n = Az_0^n + Bnz_0^n.$$

3. Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Если $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, то корни z_1 и z_2 будут комплексно сопряженными: $z_2 = z_1^*$, другими словами, $z_1 = a + ib$, $z_2 = a - ib$ для некоторых

вещественных a и b. Общее решение $a_n = A'(a+ib)^n + B'(a-ib)^n$ можно переписать в следующем виде:

$$a_n = A\rho^n \cos n\varphi + B\rho^n \sin n\varphi,$$

где ρ и φ — полярные координаты точки (a, b) декартовой плоскости (см. главу «Комплексные числа», стр. 308).

Неоднородные рекуррентные соотношения содержат в правой части дополнительное слагаемое $d(n)$:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_l a_{n-l} + d(n).$$

Решение такого рода соотношений представляют в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (с $d(n) \equiv 0$) и какого-либо частного решения неоднородного

$$a_n = (a_n)_{\text{о.о.}} + (a_n)_{\text{ч.н.}}.$$

В часто встречающемся на практике случае, когда $d(n)$ имеет вид

$$d(n) = P_m(n) \cdot t^n,$$

где P_m — полином степени m, а $t = \text{const}$, частное решение следует искать в виде

$$(a_n)_{\text{ч.н.}} = n^s Q_m(n) \cdot t^n,$$

где Q_m — некоторый полином степени m, s — кратность корня $z = t$ [97].

Пример 8.1. Найдем решение линейного рекуррентного соотношения третьего порядка

$$\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3} + 18n - 33, \quad n > 3, \\ a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 10. \end{cases}$$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид $z^3 = -3z^2 + 4$. Определив корни этого уравнения $z_1 = 1$ и $z_2 = z_3 = -2$, запишем общее решение однородного соотношения:

$$(a_n)_{\text{о.о.}} = A \cdot 1^n + B(-2)^n + Cn(-2)^n,$$

где A, B и C — подлежащие определению вещественные коэффициенты. Функция $d(n) = 18n - 33$ в правой части рекуррентного соотношения представляет собой полином первой степени, следовательно, частное решение имеет следующий вид:

$$(a_n)_{\text{ч.н.}} = n(Dn + E) = Dn^2 + En,$$

где D и E — const.

Подставив $(a_n)_{\text{ч.н.}}$ в уравнение $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3} + 18n - 33$, найдем значения постоянных D и E:

$$\begin{aligned} Dn^2 + En = & -3(D(n-1)^2 + E(n-1)) + 4(D(n-3)^2 + E(n-3)) + \\ & + 18n - 33, \ \Rightarrow \ D = 1, \ E = 0. \end{aligned}$$

Итак, решение исходного рекуррентного соотношения может быть представлено в виде:

$$a_n = (a_n)_{\text{о.о.}} + (a_n)_{\text{ч.н.}} = A + B(-2)^n + Cn(-2)^n + n^2,$$

причем значения констант A, B и C должны быть определены из начальных условий $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$. Полагая $n = 1, 2, 3$ в формуле для a_n, выпишем соотношения, связывающие A, B и C:

$$\begin{cases} A - 2B - \ \ 2C + 1 = \ \ 2, \\ A + 4B + \ \ 8C + 4 = \ \ 5, \\ A - 8B - 24C + 9 = 10. \end{cases}$$

Данной линейной системе относительно величин A, B и C удовлетворяют, как легко видеть, значения $A = 1$, $B = C = 0$.

Окончательно получаем, что $a_n = n^2 + 1$ для $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Перейдем к рассмотрению метода, основанного на использовании производящих функций. В рамках данного метода удобно нумеровать члены анализируемой числовой последовательности, начиная с нуля:

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots$$

Будем полагать, что величины a_n принимают комплексные значения.

Производящей функцией для числовой последовательности $\{a_n\}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется ряд

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

или, в сокращенной записи, $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Такого рода разложение рассматривается как формальный ряд по целым неотрицательным степеням комплексной переменной z. Использование данного метода не предполагает вычисления значений $G(z)$ в конкретных точках, поэтому вопрос о сходимости ряда при различных z в теории рекуррентных соотношений не рассматривается. Другими словами, $G(z)$ не обязательно имеет смысл при каждом значении $z \in \mathbb{C}$ [45].

Числовая последовательность полностью определяется своей производящей функцией. Ссылки на строгое обоснование метода производящих функций приведены в [36].

Введем определения суммы и произведения производящих функций.

Пусть числовым последовательностям $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, поставлены в соответствие производящие функции $G_a(z)$ и $G_b(z)$ соответственно. Тогда **сумма** и **произведение** этих функций представляются в виде

$$G_a(z) + G_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n,$$

$$G_a(z)G_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\Big)z^n.$$

Обратим внимание на то, что введенные определения являются обобщениями известных из алгебры определений для операций с полиномами. Как несложно убедиться, операции сложения и умножения производящих функций являются коммутативными и ассоциативными.

Заметим, что последовательность $\Big\{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\Big\}$ называется **сверткой** последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

В табл. 8.1 перечислены производящие функции последовательностей, часто встречающихся при решении задач.

Метод производящих функций решения рекуррентных соотношений основан на нахождении производящей функции для рекурсивной последовательности, удовлетворяющей условию задачи.

Для нахождения решения $\{a_n\}$ рекуррентного соотношения l-го порядка методом производящих функций следует выполнить такие действия [106]:

1) умножить левую и правую части рекуррентного соотношения на z^n и просуммировать полученные равенства по переменной n от $n = l$ до бесконечности;

2) алгебраическими преобразованиями привести суммы к виду $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и решить полученное функциональное уравнение относительно неизвестной функции $G(z)$;

3) разложить $G(z)$ по целым неотрицательным степеням переменной z и получить тем самым искомые коэффициенты a_n для $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пример 8.2. Найдем решение линейного рекуррентного соотношения первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 6 \cdot 10^{n-1}, \quad n > 1,\\ a_1 = 14 \end{cases}$$

с помощью метода производящих функций.

Таблица 8.1

Основные производящие функции. Параметр N принимает значения из натурального ряда, c — произвольная комплексная постоянная

Порядковый номер	Производящая функция $G(z)$	Рекурсивная последовательность $\{a_n\}$
1.	$\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$	$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$
2.	$\dfrac{1}{1-cz} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n z^n$	$1,\ c,\ c^2,\ c^3,\ \ldots$
3.	$\dfrac{1-z^{N+1}}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{N} z^n$	$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{N \text{ единиц}},\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots$
4.	$(1+z)^N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C(N,n) z^n$	$C(N,0),\ C(N,1),\ C(N,2),\ C(N,3),\ \ldots$
5.	$(1+cz)^N = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C(N,n) c^n z^n$	$C(N,0),\ C(N,1)c,\ C(N,2)c^2,\ C(N,3)c^3,\ \ldots$
6.	$\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$	$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$
7.	$\dfrac{1}{(1-z)^N} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C(N+n-1,n) z^n$	$C(N-1,0),\ C(N,1),\ C(N+1,2),\ C(N+2,3),\ \ldots$
8.	$\dfrac{1}{(1-cz)^N} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C(N+n-1,n) c^n z^n$	$C(N-1,0),\ C(N,1)c,\ C(N+1,2)c^2,\ C(N+2,3)c^3,\ \ldots$
9.	$\dfrac{1}{1-z^N} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{N\cdot n}$	$\underbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}_{N \text{ членов}},\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots$
10.	$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$	$1,\ 1,\ \dfrac{1}{2!},\ \dfrac{1}{3!},\ \dfrac{1}{4!},\ \ldots$
11.	$\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$	$0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \ldots$

Решение.

Дополним искомую числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ членом a_0 так, чтобы рекуррентное соотношение выполнялось и для $n = 0$:

$$a_1 = 4a_0 + 6 \cdot 10^0.$$

Этому равенству удовлетворяет значение $a_0 = 2$, следовательно, можно преобразовать условие задачи к следующему виду:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 6 \cdot 10^{n-1}, \quad n > 0, \\ a_0 = 2. \end{cases}$$

Вычислим величины $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Для этого умножим равенство $a_n = 4a_{n-1} + 6 \cdot 10^{n-1}$ на z^n и просуммируем по переменной n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (4a_{n-1} + 6 \cdot 10^{n-1}) z^n.$$

В полученном формальном равенстве выполним операции суммирования по n, записав их через производящую функцию $G(z)$ для последовательности $\{a_n\}$, где $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Для этого проведем алгебраические преобразования:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n + 6 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} z^n.$$

Суммы в правой части равенства перепишем с помощью замены $n \to n + 1$. Обратим внимание на связанное с данной операцией изменение пределов суммирования.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} 10^n z^{n+1}, \quad \text{или}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 4z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + 6z \sum_{n=0}^{\infty} 10^n z^n.$$

По определению $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ является производящей функцией для последовательности $\{a_n\}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, можно записать функциональное уравнение, в котором в качестве неизвестной функции выступает $G(z)$:

$$G(z) - a_0 = 4zG(z) + 6z \sum_{n=0}^{\infty} 10^n z^n.$$

Далее учтем, что $a_0 = 2$, и применим вторую формулу из табл. 8.1:

$$G(z) - 2 = 4zG(z) + \frac{6z}{1-10z}, \quad \text{или}$$

$$(1-4z)G(z) = \frac{2-14z}{1-10z}.$$

Разделим обе части равенства на величину $(1-4z) \neq 0$:

$$G(z) = \frac{2-14z}{(1-4z)(1-10z)}.$$

Воспользуемся разложением полученной рациональной функции на элементарные дроби:

$$G(z) = \frac{1}{1-4z} + \frac{1}{1-10z}.$$

Принимая во внимание вторую формулу из табл. 8.1, получим:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (4^n + 10^n) z^n.$$

В разложении $G(z)$ по степеням z коэффициенты при z^n соответствуют членам искомой рекурсивной последовательности. Следовательно, решение имеет вид $a_n = 4^n + 10^n$ для всех $n \geqslant 1$. $\square$

Рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = f(n)a_{n-1} + d(n), \quad n > 1, \\ a_1 = \text{const} \end{cases}$$

приводится к линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами умножением обеих частей равенства $a_n = f(n)a_{n-1} + d(n)$ на **суммирующий множитель** [26, 78]

$$F(n) = \left[\prod_{i=2}^{n} f(i)\right]^{-1}$$

и последующей заменой $b_n = f(n+1)F(n+1)a_n$, причем $b_1 = a_1$. Получившееся уравнение $b_n = b_{n-1} + F(n)d(n)$ решим методом подстановки:

$$\begin{aligned}
&b_2 = b_1 + F(2)d(2), \\
&b_3 = b_2 + F(3)d(3) = b_1 + F(2)d(2) + F(3)d(3), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&b_n = b_1 + \sum_{i=2}^{n} F(i)d(i).
\end{aligned}$$

Следовательно, решение исходного рекуррентного соотношения с переменными коэффициентами имеет вид

$$a_n = [f(n+1)F(n+1)]^{-1}\left[a_1 + \sum_{i=2}^{n} F(i)d(i)\right],$$

или, после упрощения первого сомножителя,

$$a_n = [F(n)]^{-1}\left[a_1 + \sum_{i=2}^{n} F(i)d(i)\right], \quad n > 1.$$

Отметим, что числовые последовательности, удовлетворяющие линейным рекуррентным соотношениям, называются также **возвратными последовательностями** [54].

Пример 8.3. **Корневое строго двоичное дерево** определим как корневое дерево, корень которого имеет степень 0 или 2, а степень остальных вершин принимает значения 1 или 3 [99]. Для произвольной вершины смежные с ней вершины, имеющие глубину на единицу больше данной, будем считать различными.

Обозначим через t_n количество корневых строго двоичных деревьев, высота которых не превышает n, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

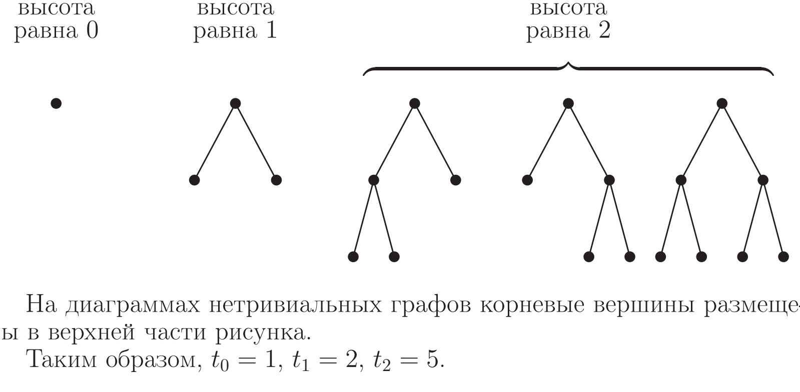
Докажем, что величины t_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1}^2 + 1, & n \geqslant 1, \\ t_0 = 1 \end{cases}$$

и получим аналитическое представление для t_n.

Решение.

В доказательстве и дальнейшем анализе будем следовать работе [84]. Изобразим на рисунке все корневые строго двоичные деревья высоты 0, 1 и 2:



На диаграммах нетривиальных графов корневые вершины размещены в верхней части рисунка.

Таким образом, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 5$.

Рассмотрим множество A_n корневых строго двоичных деревьев, высота которых не превышает n, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Требуется доказать, что количество таких деревьев $t_n = |A_n|$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1}^2 + 1, & n \geqslant 1, \\ t_0 = 1. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольное дерево из A_n, состоящее более чем из одной вершины.

Если удалить корень такого дерева вместе с инцидентными ребрами, то на диаграмме останутся два дерева высоты, не превышающей $n-1$. По комбинаторному правилу произведения (см. главу «Комбинаторика» на стр. 187) количество пар соответствующих деревьев равно $t_{n-1} \cdot t_{n-1}$. К данной величине для получения $|A_n|$ следует прибавить единицу, отвечающую тривиальному дереву, состоящему из одной вершины. Следовательно, для $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $t_n = t_{n-1}^2 + 1$.

Заметим, что полученное рекуррентное соотношение является нелинейным. Тем не менее оказывается возможным найти аналитическое представление для t_n.

Для этого прологарифмируем равенство $t_n = t_{n-1}^2 + 1$:

$$\log_2 t_n = 2 \log_2 t_{n-1} + \log_2 \Big(1 + \frac{1}{t_{n-1}^2}\Big).$$

Обозначим $a_{n-1} = \log_2 \Big(1 + \dfrac{1}{t_{n-1}^2}\Big)$ и сделаем замену $u_n = \log_2 t_n$ [84].

После указанных преобразований получим:

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + a_{n-1}, & n \geqslant 1, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Методом подстановки находим u_n для $n \geqslant 1$:

$$u_n = 2^n \big(u_0 + \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{8} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^n}\big).$$

Запишем полученное выражение как разность рядов:

$$u_n = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n-1-i} a_i - \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-1-i} a_i.$$

Легко видеть, что $\forall n \in \mathbb{N}\ (a_{n-1} > a_n)$, а это, в свою очередь, приводит к тому, что величина $\varepsilon_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} 2^{n-1-i} a_i$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \varepsilon_n < a_n \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-1-i} = a_n.$$

Следовательно, $u_n = 2^n \sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} a_i - \varepsilon_n$. После потенциирования данного равенства получим:

$$t_n = 2^{u_n} = \alpha^{2^n} 2^{-\varepsilon_n} = T_n 2^{-\varepsilon_n},$$

где $\alpha = 2^{\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1} a_i}$, $T_n = \alpha^{2^n}$.

Как было отмечено выше, для всех натуральных n выполняются неравенства $0 < \varepsilon_n < a_n$. В силу этого приведем оценки

$$\begin{aligned} &T_n = t_n 2^{\varepsilon_n} \leqslant t_n 2^{a_n} = t_n \left(1 + \frac{1}{t_n^2}\right) = t_n + \frac{1}{t_n}, \quad \text{и} \\ &T_n = t_n 2^{\varepsilon_n} \geqslant t_n, \end{aligned}$$

следовательно, $T_n \in \left[t_n, t_n + \dfrac{1}{t_n}\right]$.

При $n \geqslant 2$ полученное включение позволяет сделать вывод, что величина t_n равна целой части числа T_n.

В результате, ответ будет иметь вид $t_n = \lfloor T_n \rfloor = \lfloor \alpha^{2^n} \rfloor$.

Численный расчет дает для постоянной α значение $\alpha = 1{,}502\,836\,801\ldots$ Для $n = 0$ и $n = 1$ равенство $t_n = \lfloor \alpha^{2^n} \rfloor$ проверяется непосредственным вычислением. Итак, количество корневых строго двоичных деревьев, высота которых не превышает n, равно $t_n = \lfloor \alpha^{2^n} \rfloor$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\square$

Контрольные вопросы к главе «Рекуррентные соотношения»

1. Дайте определение рекуррентному соотношению.
2. Что понимают под решением рекуррентного соотношения?
3. Чем отличается рекурсивная последовательность с полной предысторией от последовательности с частичной предысторией?
4. Перечислите основные методы анализа рекуррентных соотношений.
5. В чем заключается отличие неоднородных рекуррентных соотношений от однородных?
6. Как определяется производящая функция для числовой последовательности?
7. Что такое свертка числовых последовательностей?
8. Каким методом получают решение рекуррентных соотношений первого порядка с переменными коэффициентами?

Задачи к главе «Рекуррентные соотношения»

8.1. Члены последовательности $\{a_n\}$ заданы рекурсивно следующим образом:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, & n > 2, \\ a_1 = 2,\ a_2 = 6. \end{cases}$$

1) Выпишите первые восемь членов последовательности $\{a_n\}$.

2) Докажите, что явный вид n-го члена последовательности задается формулой $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

8.2. Члены последовательности $\{a_n\}$ заданы рекурсивно следующим образом:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}, & n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 2. \end{cases}$$

1) Выпишите первые восемь членов последовательности $\{a_n\}$.

2) Докажите, что явный вид n-го члена последовательности задается формулой $a_n = (-1)^n(3n-4)$, $n \geqslant 1$.

8.3. Члены последовательности $\{a_n\}$ заданы рекурсивно следующим образом:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 1, & n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

1) Выпишите первые восемь членов последовательности $\{a_n\}$.

2) Докажите, что явный вид n-го члена последовательности задается формулой $a_n = \frac{1}{2}(3^n + 1)$, $n \geqslant 1$.

8.4. Члены последовательности $\{a_n\}$ заданы рекурсивно следующим образом:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2, & n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4. \end{cases}$$

1) Выпишите первые восемь членов последовательности $\{a_n\}$.

2) Докажите, что явный вид n-го члена последовательности задается формулой $a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, $n \geqslant 1$.

8.5. Выпишите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют гармонические числа $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ (см. упражнение **1.85**).

8.6. В основу теории **фрактала Мандельброта**[1] (от латинского *frāctus* — изломанный) положено рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} z_n = z_{n-1}^2 + c, \quad n \geqslant 1, \\ z_0 = 0, \end{cases}$$

где $c \in \mathbb{C}$ — некоторое комплексное число [50].

Выпишите первые семь членов последовательности $\{z_n\}$, если параметр c принимает значения:

1) $c = 1$;

2) $c = -1$;

3) $c = 1 + i$;

4) $c = -i$.

8.7. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + f_n, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.8. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = f_n a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.9. Решите неоднородное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \cdot n!, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

∗8.10. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1} + c}, \quad n > 1,\ c = \mathrm{const}, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.11. Методом подстановки решите линейное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

[1] Мандельброт (Benoît Mandelbrot) (1924–2010).

8.12. Решите рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

8.13. Решите рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1/2. \end{cases}$$

8.14. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 4,\ a_2 = 8. \end{cases}$$

8.15. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 7. \end{cases}$$

8.16. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 12a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 17,\ a_2 = -5. \end{cases}$$

8.17. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 5,\ a_2 = 10. \end{cases}$$

8.18. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = -6,\ a_2 = 27. \end{cases}$$

8.19. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{2}a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = 1. \end{cases}$$

8.20. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 1, \ a_2 = 2. \end{cases}$$

8.21. Решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = -2\sqrt{2}a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 0, \ a_2 = 2. \end{cases}$$

8.22. Найдите явное выражение для чисел Фибоначчи, определяемых рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2, \\ F_1 = 1, \ F_2 = 1. \end{cases}$$

8.23. Найдите явное выражение для чисел Люка, определяемых рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n > 1, \\ L_0 = 2, \ L_1 = 1. \end{cases}$$

8.24. Докажите следующее соотношение для чисел Фибоначчи:

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \text{ для } n = 2, 3, \ldots$$

8.25. Докажите следующее соотношение для чисел Фибоначчи и чисел Люка: $F_{2n} = F_n L_n$ для $n = 2, 3, \ldots$

8.26. Докажите, что для $n > 1$ выполняется равенство $F_{n+3} = 2F_n + L_n$.

8.27. Докажите, что для $n \geqslant 4$ выполняется равенство $F_{n-3} = -2F_n + L_n$.

8.28. Докажите, что $F_{n+3} - F_{n-3} = 4F_n$ для всех $n \geqslant 4$.

8.29. Докажите равенства для $n > 4$:

1) $F_{n-4} = \dfrac{1}{2}(7F_n - 3L_n)$;

2) $F_{n+4} = \dfrac{1}{2}(7F_n + 3L_n)$.

8.30. Докажите, что $F_{n+4} + F_{n-4} = 7F_n$ для $n = 5, 6, \ldots$

8.31. Решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, \quad n > 2, \\ a_1 = 0,\ a_2 = 0. \end{cases}$$

8.32. Решите однородное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + 3a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -3. \end{cases}$$

8.33. Решите однородное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 9a_{n-2} - 27a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 7\frac{1}{2},\ a_2 = 40\frac{1}{2},\ a_3 = 121\frac{1}{2}. \end{cases}$$

8.34. Решите однородное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3. \end{cases}$$

8.35. Решите однородное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad n > 3, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4. \end{cases}$$

8.36. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3^n + 4, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.37. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} + 10^n - 5, \quad n > 1, \\ a_1 = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

8.38. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + (-2)^{n+1} + 1, \quad n > 1, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

8.39. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + (-1)^n - 2, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.40. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 4^n, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.41. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 16a_{n-1} + 4^n, \quad n > 1, \\ a_1 = 4. \end{cases}$$

8.42. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2^n + (-2)^n + 1, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.43. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + (-1)^n + 3^n + 1, \quad n > 1, \\ a_1 = 5. \end{cases}$$

8.44. Решите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$a_n = -2a_{n-1} + (-7)^n, \quad n > 1,$$

при различных значениях начальных условий:
1) $a_1 = 0$;
2) $a_1 = 1$;
3) $a_1 = 3$.

8.45. Решите неоднородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 1, \quad n > 2, \\ a_1 = 1, \ a_2 = 1. \end{cases}$$

8.46. Решите неоднородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} + 11, \quad n > 2, \\ a_1 = 1, \ a_2 = 5. \end{cases}$$

8.47. Решите неоднородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 12, \quad n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 2. \end{cases}$$

8.48. Найдите решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + 1 + 2^n, \quad n > 3, \\ a_1 = 0,\ a_2 = 19,\ a_3 = 88. \end{cases}$$

8.49. Найдите решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + 1 + 2^n, \quad n > 3$$

при различных значениях начальных условий:

1) $a_1 = -2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3;$

2) $a_1 = 0,\ a_2 = 95,\ a_3 = 448;$

3) $a_1 = 4,\ a_2 = 32,\ a_3 = 110.$

8.50. Найдите решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = a_{n-3} + 2, \quad n > 3, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3. \end{cases}$$

8.51. Найдите решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = a_{n-3} + 9, \quad n > 3, \\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9. \end{cases}$$

8.52. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n/2} + 2n - 1 \quad \text{для } n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

для всех n, являющихся степенями 2.

8.53. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n/2} + n^3 \quad \text{для } n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

для всех n, являющихся степенями 2.

8.54. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n/3} + 2n + 1 \quad \text{для } n = 3^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

для всех n, являющихся степенями 3.

8.55. Методом подстановки решите рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n/3} + n^2 - n \quad \text{для } n = 3^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

для всех n, являющихся степенями 3.

$*$8.56. Докажите, что решением рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = ca_{n/d} + f(n) \quad \text{для } n = d^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ a_1 = f(1), \quad c, d \text{ — const} \end{cases}$$

является последовательность $a_n = \sum\limits_{i=0}^{k} c^i f\left(\dfrac{n}{d^i}\right)$.

8.57. Найдите производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, $n \geqslant 0$, заданной соотношением:

1) $a_n = 2$;

2) $a_n = (-1)^n$;

3) $a_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$;

4) $a_n = 1 + i^n$, где i — мнимая единица.

8.58. Определите производящую функцию для числовой последовательности:

1) $0, 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$;

2) $0, 1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$

8.59. Известно, что $G(z)$ является производящей функцией для последовательности $\{a_n\}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Выразите через $G(z)$ производящую функцию $\widetilde{G}(z)$ для последовательности:

1) $0, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$;

2) $a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$;

3) $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots$;

4) $a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

8.60. Известно, что $G(z)$ является производящей функцией для последовательности $\{a_n\}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Выразите через $G(z)$ производящую функцию $\widetilde{G}(z)$ для последовательности:

1) a_0, $2a_1$, $3a_2$, $4a_3$, $\ldots$;

2) 0, a_0, $a_1/2$, $a_2/3$, $a_3/4$, $\ldots$;

3) a_0, a_2, a_4, a_6, $\ldots$;

4) a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$

8.61. Покажите, что операция умножения производящих функций обладает свойством ассоциативности [45].

8.62. Вычислите свертку последовательностей $1, 2, 3, 4, \ldots$ и $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

8.63. Вычислите свертку $\{c_n\}$ последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, заданных общими членами $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ и $b_n = \dfrac{\beta^n}{n!}$, где $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, α и β — комплексные постоянные.

8.64. Вычислите свертку $\{c_n\}$ последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, заданных общими членами $a_n = \cos n\varphi$ и $b_n = \sin n\varphi$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, φ — вещественная постоянная.

8.65. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 2, \quad n > 1, \\ a_1 = 5. \end{cases}$$

8.66. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = -5a_{n-1} + (-5)^n, \quad n > 1, \\ a_1 = 7. \end{cases}$$

8.67. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + (n+1)3^{-n}, \quad n > 1, \\ a_1 = -1. \end{cases}$$

8.68. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение первого порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2^n + 3^n, \quad n > 1, \\ a_1 = 7. \end{cases}$$

8.69. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 2,\ a_2 = 22. \end{cases}$$

8.70. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 6n - 6, \quad n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 8. \end{cases}$$

8.71. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} - 6n + 23, \quad n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 0. \end{cases}$$

8.72. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} a_n = -9a_{n-2} + 10, \quad n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 10. \end{cases}$$

8.73. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение третьего порядка

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-3} - 7n + 24, \quad n > 3, \\ a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 11. \end{cases}$$

8.74. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение третьего порядка

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2, \quad n > 3, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3. \end{cases}$$

8.75. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение третьего порядка

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3} + 10 \cdot 3^{n-2}, \quad n > 3, \\ a_1 = 3,\ a_2 = 18,\ a_3 = 81. \end{cases}$$

8.76. Методом производящих функций решите рекуррентное соотношение третьего порядка

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{2}a_{n-1} - \dfrac{1}{2}a_{n-3} + 3, \quad n > 3, \\ a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{17}{4},\ a_3 = \dfrac{71}{8}. \end{cases}$$

8.77. Покажите, что производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи F_n и последовательности чисел Люка L_n определяются выражениями $G_F(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$ и $G_L(z) = \dfrac{2-z}{1-z-z^2}$.

8.78. Найдите производящую функцию $G_H(z)$ для последовательности гармонических чисел $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$ с учетом начального условия $H_0 = 0$.

8.79. Составьте однородное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $a_n = 3^n + 4^n,\ n \geqslant 1$.

8.80. Составьте однородное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $a_n = 2^n - (-5)^{n-1},\ n \geqslant 1$.

8.81. Составьте однородное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $a_n = 6^n - 1,\ n \geqslant 1$.

8.82. Составьте однородное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $a_n = \dfrac{2^n}{3}(1 + (-1)^n),\ n \geqslant 1$.

8.83. Предложите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка, которому удовлетворяет последовательность $a_n = 2^n(n^2 + n + 1),\ n \geqslant 1$.

8.84. Предложите неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка, которому удовлетворяет последовательность $a_n = 3^n(n+1)^2$, $n \geqslant 1$.

8.85. Предложите неоднородное рекуррентное соотношение второго порядка, которому удовлетворяет последовательность $a_n = (n-1)^2 2^n - 1 - (-1)^n,\ n \geqslant 1$.

8.86. Предложите неоднородное рекуррентное соотношение второго порядка, которому удовлетворяет последовательность $a_n = n4^n, n \geqslant 1$.

8.87. Докажите, что решением рекуррентного соотношения
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{a_{n-1}} + 1, \quad n > 1, \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
является последовательность $a_n = \dfrac{2^{n+2} - (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^n}$.

8.88. Докажите, что решением рекуррентного соотношения
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1} + 5}{4a_{n-1}}, \quad n > 1, \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
является последовательность $a_n = \dfrac{5^{1-n}(-5(-4)^n + 8 \cdot 5^n)}{32 + (-4)^n 5^{2-n}}$.

8.89. Докажите, что решением рекуррентного соотношения
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{4a_{n-1} + 9}{a_{n-1} + 4}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$
является последовательность $a_n = 3 \cdot \dfrac{2 - 7^{1-n}}{2 + 7^{1-n}}$.

8.90. Решите нелинейное рекуррентное соотношение
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1} + 1}{a_{n-1}}, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.91. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения
$$\begin{cases} a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2, \quad n > 1, \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

8.92. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения
$$\begin{cases} a_n^3 - a_{n-1}^3 = 6, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.93. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения
$$\begin{cases} (2a_n + 1)^2 = (2a_{n-1} + 1)^2 + 5, \quad n > 1, \\ a_1 = 7. \end{cases}$$

8.94. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} (3a_n - 5)^3 - (3a_{n-1} - 5)^3 = 1, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.95. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

путем логарифмирования рекуррентного соотношения.

8.96. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n^3 = -a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

путем логарифмирования рекуррентного соотношения.

8.97. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n^2 = 4a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

путем логарифмирования рекуррентного соотношения.

8.98. Найдите решение нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n^2 = 3a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

путем логарифмирования рекуррентного соотношения.

8.99. Последовательность $\{a_n\}$ обладает следующим свойством: каждый член последовательности, кроме первого, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, т. е. $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2$ для $n > 1$. Запишите явное выражение для a_n, если:

1) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

2) $a_1 = 2$, $a_2 = 10$.

8.100. Последовательность $\{a_n\}$ обладает следующим свойством: каждый член последовательности, кроме первого, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов, т. е. $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ для $n > 1$. Запишите явное выражение для a_n, если:

1) $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$;

2) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$.

8.101. Последовательность $\{a_n\}$ обладает следующим свойством: каждый член последовательности, кроме первого, равен среднему гармоническому двух соседних с ним членов, т. е. $a_n = \dfrac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ для $n > 1$. Запишите явное выражение для a_n, если:

1) $a_1 = 10$, $a_2 = 5$;

2) $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{3}$.

8.102. Покажите, что решение дискретного аналога **логистического уравнения**

$$\begin{cases} a_n = \lambda a_{n-1}(1 - a_{n-1}), \quad n > 1, \\ a_1 \in [0, 1], \quad \lambda \in [0, 4], \end{cases}$$

остается ограниченным: $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Запишите его решение $\{a_n\}$ для частных случаев параметра λ:

1) $\lambda = 2$;

2) $\lambda = 4$.

Примечание. Логистическое уравнение является основой одной из простейших математических моделей, применяемых для описания динамики сложных систем. Нелинейность отображения $x \to \lambda x(1-x)$ приводит к возникновению бифуркаций решений (от латинского *bifurcum* — точка раздвоения) и переходу к хаотическому режиму поведения решений при определенных значениях параметра λ. Аналитический вид решений логистического уравнения, за исключением случаев $\lambda = 2$ и $\lambda = 4$, неизвестен, и это уравнение исследуется методами вычислительной математики [49].

∗8.103. Согласно известной из курса математического анализа **теореме Вейерштрасса**[1], *монотонная и ограниченная числовая последовательность имеет предел* [33]. Используя теорему Вейерштрасса, докажите, что последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая нелинейному рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{x}{a_{n-1}}\right), \quad n > 1, \\ a_1 = \text{const}, \ a_1 > 0, \end{cases}$$

при положительных значениях параметра x имеет предел. Найдите величину предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

[1] Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass) (1815–1897).

∗8.104. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет нелинейному рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}\Big(2a_{n-1} + \dfrac{x}{a_{n-1}^2}\Big), \quad n > 1, \\ a_1 = \text{const},\ a_1 > 0, \end{cases}$$

и значение параметра x положительно.

8.105. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$, заданная нелинейным рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}, \quad n > 1, \\ a_1 = \sqrt{3}, \end{cases}$$

имеет предел, равный $\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$.

8.106. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$, заданная нелинейным рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{a_{n-1} + 12}, \quad n > 1, \\ a_1 = 3, \end{cases}$$

имеет предел, равный 4.

8.107. Решите рекуррентное соотношение с полной предысторией

$$\begin{cases} a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + 2, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.108. Решите рекуррентное соотношение с полной предысторией

$$\begin{cases} a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + 10, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.109. На экзамене по курсу дискретной математики и математической логики студенту предложено решить рекуррентное соотношение с полной предысторией

$$\begin{cases} a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + 2, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Студент решил воспользоваться тем, что

$$a_n - a_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i + 2\right) = a_{n-1},$$

и свел уравнение к следующему:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Однако в итоге получился неверный ответ $a_n = 2^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

В чем ошибка студента?

8.110. **Числа Каталана**[1] удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению с полной предысторией:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathcal{C}_k \mathcal{C}_{n-k-1}, \quad n > 1, \\ \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = 1. \end{cases}$$

Выпишите первые восемь чисел Каталана.

8.111. Покажите, что производящая функция для последовательности чисел Каталана $\mathcal{C}_n$ равна $G_{\mathcal{C}}(z) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$.

∗8.112. Запишите явное выражение для n-го числа Каталана.

8.113. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} + n!, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.114. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} + n!, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

[1] Каталан (Eugène Charles Catalan) (1814–1894).

8.115. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{n+1}{n} a_{n-1} + 2, \quad n > 1, \\ a_1 = 0, \ a_2 = 3, \end{cases}$$

возникающее при анализе алгоритма быстрой сортировки (см. главу «Базовые алгоритмы» на стр. 473).

8.116. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a_{n-1} + n, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.117. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{n+5}{n+4} a_{n-1} + 2n + 10, \quad n > 1, \\ a_1 = 12. \end{cases}$$

8.118. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}/n + n, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.119. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n-1} + n^2, \quad n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

8.120. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = e^{2n} a_{n-1} + e^{n^2+n-2}, \quad n > 1, \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

8.121. Решите рекуррентное соотношение первого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n = e^{-2n}a_{n-1} + e^{-n^2-n+2}, \quad n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

∗8.122. Решите однородную систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - b_{n-1}, \quad n > 1, \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 7,\ b_1 = 11. \end{cases}$$

∗8.123. Решите однородную систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, \quad n > 1, \\ b_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 5,\ b_1 = \dfrac{5}{2}(\sqrt{5} - 1). \end{cases}$$

∗8.124. Методом производящих функций решите систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1}, \quad n > 1, \\ b_n = 3a_{n-1} + 6b_{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 8,\ b_1 = 2. \end{cases}$$

∗8.125. Методом производящих функций решите систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_n = \ 3a_{n-1} + b_{n-1} - 3n + 3, \quad n > 1, \\ b_n = -a_{n-1} + b_{n-1} + n + 1, \quad n > 1, \\ a_1 = 4,\ b_1 = -2. \end{cases}$$

∗8.126. Методом производящих функций решите систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_n = \ \ a_{n-1} + 3b_{n-1} + 8n - 7, \quad n > 1, \\ b_n = 8a_{n-1} - 4b_{n-1} - 8n^2 + 6n, \quad n > 1, \\ a_1 = 5,\ b_1 = 2. \end{cases}$$

∗8.127. Методом производящих функций решите систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + \ \ b_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}, \quad n > 1, \\ b_n = -4a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n+1}, \quad n > 1, \\ a_1 = 0,\ b_1 = 2. \end{cases}$$

∗8.128. **Гамма-функция** $\Gamma(x)$ определена для всех x, $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ Для положительных значений аргумента имеет место интегральное представление [33, 126]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Докажите рекуррентное соотношение для значений гамма-функции $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, а также вычислите $\Gamma(n)$ для натуральных n.

∗8.129. Получите рекуррентное соотношение для интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $n \geqslant 1$, и определите значение интеграла, выразив его через **кофакториал** числа n — произведение натуральных чисел до n включительно одинаковой с n четности.

∗8.130. Получите рекуррентное соотношение для интеграла $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, $n \geqslant 1$, и определите значение интеграла.

∗8.131. Получите рекуррентное соотношение для интеграла $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx$, $n \geqslant 1$, и определите значение интеграла.

∗8.132. Получите рекуррентное соотношение для интеграла

$I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\, dx$, $n \geqslant 0$, и определите значение интеграла.

∗8.133. Получите рекуррентное соотношение для интеграла $I_n = \int\limits_0^1 x^c \ln^n x\, dx$, $n \geqslant 0$, $c \in (-1, \infty)$, и определите значение интеграла.

∗8.134. Выведите рекуррентное соотношение для объема n-мерного шара единичного радиуса $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$, где $n \in \mathbb{N}$.

∗8.135. Выведите рекуррентное соотношение для объема n-мерного симплекса (от латинского *simplex* — простой) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1$, $x_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, где $n \in \mathbb{N}$.

∗8.136. Воспользовавшись методом, описанным в примере на стр. 349, решите нелинейное рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 - 1, & n \geqslant 1, \\ a_0 = 2. \end{cases}$$

$*$8.137. Задача о минимизации числа регистров процессора, используемых при вычислении арифметических выражений на компьютере, имеет важное значение для теоретической информатики. Эта задача сводится к необходимости получить решение следующего нелинейного рекуррентного соотношения [100]:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}^2 - 2, & n \geqslant 1, \\ a_0 = u, \end{cases}$$

где u — const. Найдите a_n для $n = 1, 2, \ldots$

Ответы, указания, решения к главе «Рекуррентные соотношения»

8.1. *Решение.*

1) Подставляя заданные начальные условия в рекуррентное соотношение $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, последовательно получаем первые восемь членов $\{a_n\}$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
2	6	18	54	162	486	1458	4374

2) Воспользуемся методом математической индукции в полной форме. Пусть $P(n)$ — предикат $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Докажем, что $P(n)$ истинно для всех n, принимающих значения из множества натуральных чисел.

База индукции

Для $n = 1$ и $n = 2$ имеем $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$ и $a_2 = 2 \cdot 3^1 = 6$ — верные равенства.

Шаг индукции

Пусть $P(i)$ истинно для всех $i \leqslant k$. Докажем, что это влечет истинность $P(k+1)$:

$$a_{k+1} = 2a_k + 3a_{k-1}.$$

По индуктивному предположению

$$a_k = 2 \cdot 3^{k-1}, \quad a_{k-1} = 2 \cdot 3^{k-2}.$$

Получаем

$$a_{k+1} = 2(2 \cdot 3^{k-1}) + 3(2 \cdot 3^{k-2}) = \\ = 4 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} = 6 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{(k-1)+1}.$$

Значит, предикат $P(n)$ принимает истинное значение для всех натуральных n, и $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

8.2. *Ответ:*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	-5	8	-11	14	-17	20

8.3. *Ответ:*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
2	5	14	41	122	365	1094	3281

8.4. *Ответ:*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	4	10	20	35	56	84	120

8.5. *Ответ:* $\begin{cases} H_n = H_{n-1} + \dfrac{1}{n}, & n > 1, \\ H_1 = 1. \end{cases}$

8.6. *Ответ:*

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
$c = 1$	0	1	2	5	26	677	458 330
$c = -1$	0	-1	0	-1	0	-1	0
$c = 1 + i$	0	$1 + i$	$1 + 3i$	$-7 + 7i$	$1 - 97i$	$-9407 -$ $-193i$	$88\,454\,401 +$ $+ 3\,631\,103i$
$c = -i$	0	$-i$	$-1 - i$	i	$-1 - i$	i	$-1 - i$

8.7. *Ответ:* $a_n = 1 + \sum\limits_{i=2}^{n} f_i,\ n \geqslant 1.$

8.8. *Ответ:* $a_n = \prod\limits_{i=2}^{n} f_i,\ n > 1.$

8.9. *Решение.*
Выпишем первые члены последовательности $\{a_n\}$:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	5	23	119	719	5039

Анализ таблицы приводит к предположению $a_n = (n+1)! - 1$, $n \geqslant 1$.

Для доказательства применим метод математической индукции. Пусть $P(n)$ — предикат $a_n = (n+1)! - 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$.

База индукции

Для $n = 1$ получаем $a_1 = 2! - 1 = 1$ — верно.

Шаг индукции

Предположим, что $a_k = (k+1)! - 1$. Докажем истинность $P(k+1)$:

$$a_{k+1} = a_k + (k+1)(k+1)!.$$

Далее запишем a_k, пользуясь индуктивным предположением:

$$a_{k+1} = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = \\ = (k+1)![1 + (k+1)] - 1 = (k+2)! - 1.$$

Доказано, что $a_n = (n+1)! - 1$ для всех $n \geqslant 1$.

8.10. *Решение.*

Определим первые члены последовательности a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{1+c}, \\ a_3 &= \frac{1/(1+c)}{1/(1+c)+c} = \frac{1}{1+c+c^2}, \\ a_4 &= \frac{1/(1+c+c^2)}{1/(1+c+c^2)+c} = \frac{1}{1+c+c^2+c^3}. \end{aligned}$$

Приходим к предположению

$$a_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} c^i\right)^{-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Для доказательства применим метод математической индукции. Пусть $P(n)$ — предикат $a_n = \left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} c^i\right)^{-1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$.

База индукции
Если $n = 1$, то $a_1 = c^0 = 1$ — верное равенство.

Шаг индукции
Пусть $a_k = \left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} c^i\right)^{-1}$. Докажем, что $a_{k+1} = \left(\sum\limits_{i=0}^{k} c^i\right)^{-1}$. По определительному свойству для $\{a_n\}$

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + c}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Значит,

$$a_{k+1} = \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} c^i\right)^{-1}}{\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} c^i\right)^{-1} + c} = \frac{1}{1 + c\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} c^i\right)} = \left(\sum_{i=0}^{k} c^i\right)^{-1}.$$

Таким образом, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, и $a_n = \left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} c^i\right)^{-1}$ для всех $n \geqslant 1$.
Полученное выражение можно упростить.
Если $c \neq 1$, то $a_n = \dfrac{c-1}{c^n - 1}$, $n \geqslant 1$.
Если же $c = 1$, то $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

8.11. *Решение.*
Если n достаточно велико, то

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 3, \\ a_{n-1} &= 3a_{n-2} + 3, \\ a_{n-2} &= 3a_{n-3} + 3, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Подставляем в исходное соотношение a_{n-1}, выраженное через a_{n-2}, затем a_{n-2} выражаем через a_{n-3} и т. д.

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 3 = \\ &= 3(3a_{n-2} + 3) + 3 = \\ &= 9a_{n-2} + 3 \cdot 3 + 3 = \\ &= 9(3a_{n-3} + 3) + 3 \cdot 3 + 3 = \\ &= 27a_{n-3} + 3^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 = \\ &= 27(3a_{n-4} + 3) + 3^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 = \\ &= 81a_{n-4} + 3^3 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3. \end{aligned}$$

После k-й подстановки будем иметь

$$a_n = 3^j a_{n-j} + 3 \cdot \sum_{i=0}^{j-1} 3^i, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Строго доказать полученное соотношение можно по индукции. Пусть $P(j)$ — предикат $a_n = 3^j a_{n-j} + 3 \cdot \sum\limits_{i=0}^{j-1} 3^i$ для некоторого натурального j. Докажем, что $P(j)$ истинно для всех $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Б а з а и н д у к ц и и

Если $j = 1$, то $a_n = 3a_{n-1} + 3$ — верное равенство.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что $a_n = 3^k a_{n-k} + 3 \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} 3^i$, где переменная k может принимать значения $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Докажем, что $a_n = 3^{k+1} a_{n-(k+1)} + 3 \cdot \sum\limits_{i=0}^{k} 3^i$. Для этого сделаем подстановку $a_{n-k} = 3a_{n-k-1} + 3$. Получим

$$a_n = 3^{k+1} a_{n-(k+1)} + 3 \cdot \sum_{i=0}^{k} 3^i.$$

В доказанном равенстве $a_n = 3^k a_{n-k} + 3 \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} 3^i$ положим $k = n-1$. Тогда окончательно получаем

$$a_n = 3^{n-1} a_1 + 3 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 3^i = \frac{1}{2}(7 \cdot 3^{n-1} - 3), \ \ n \geqslant 1.$$

8.12. *Решение.*

Приведено однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами первого порядка вида $a_n = ca_{n-1}$, $c = 2$. Его решением является $a_n = A \cdot 2^n$, где постоянная A определяется из начального условия $a_1 = 2A$. В итоге получаем $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

8.13. *Ответ:* $a_n = \dfrac{7^{n-1}}{2}$, $n \geqslant 1$.

8.14. *Решение.*

Характеристическое уравнение имеет вид $z^2 = 2z + 3$, его корни равны $z_1 = 3$, $z_2 = -1$. Получаем общее решение $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$, где A, B — const. Для определения постоянных A и B воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} a_1 = A \cdot 3 + B \cdot (-1) = 4, \\ a_2 = A \cdot 3^2 + B \cdot (-1)^2 = 8. \end{cases}$$

Приходим к системе уравнений относительно коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 3A - B = 4, \\ 9A + B = 8. \end{cases}$$

Решая записанную систему, получим $A = 1$, $B = -1$, и, окончательно, $a_n = 3^n + (-1)^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

8.15. *Ответ:* $a_n = 4^n - 3^n$, $n \geqslant 1$.

8.16. *Ответ:* $a_n = 3^{n+1} - 2(-4)^n$, $n \geqslant 1$.

8.17. *Решение.*
Характеристическое уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$ имеет корень $z = 1$ кратности $m = 2$. Следовательно, решение представимо в виде:

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n = A + Bn.$$

Для определения постоянных A и B воспользуемся начальными условиями. Система уравнений на коэффициенты A и B имеет вид

$$\begin{cases} A + B = 5, \\ A + 2B = 10. \end{cases}$$

Получаем $A = 0$, $B = 5$, и, окончательно, $a_n = 5n$, $n \geqslant 1$.

8.18. *Ответ:* $a_n = (-3)^n(n + 1)$, $n \geqslant 1$.

8.19. *Решение.*
Характеристическое уравнение $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ имеет корни $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. Представим z_1, z_2 в тригонометрической форме

$$z_1 = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}), \quad z_2 = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}).$$

Тогда общее решение рекуррентного соотношения примет вид:

$$a_n = A \cdot 1^n \cos(\frac{\pi n}{4}) + B \cdot 1^n \sin(\frac{\pi n}{4}) = A\cos(\frac{\pi n}{4}) + B\sin(\frac{\pi n}{4}).$$

Постоянные A и B определяются из начальных условий:

$$\begin{cases} (A + B)\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \\ A + B = 2. \end{cases}$$

Получаем $a_n = \cos(\dfrac{\pi n}{4}) + \sin(\dfrac{\pi n}{4})$, $n \geqslant 1$.

8.20. *Ответ:* $a_n = \sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi n}{3}) - \cos(\dfrac{\pi n}{3})$, $n \geqslant 1$.

8.21. *Ответ:* $a_n = -2^{n-1}\big(\cos(\dfrac{3\pi n}{4}) - \sin(\dfrac{3\pi n}{4})\big)$, $n \geqslant 1$.

8.22. *Решение.*

Характеристическое уравнение $z^2 = z + 1$, его корни $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Общее решение запишем в виде:

$$a_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Определяем A и B из начальных условий:

$$\begin{cases} A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ A \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Решением данной системы будет $A = 1/\sqrt{5}$, $B = -1/\sqrt{5}$.

В итоге получаем явное выражение для чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geqslant 1,$$

(см. также решение упражнения **1.103**).

8.23. *Решение.*

Воспользуемся подходом, предложенным в предыдущем упражнении. Учитывая, что $\cos(\pi n) = (-1)^n$ для целых значений n, получим

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \cos(\pi n)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}, \quad n \geqslant 1.$$

8.24. *Доказательство.*

Воспользуемся известной формулой для разности квадратов двух величин $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Поскольку $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$, то имеем

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1}.$$

Получаем частный случай формулы, доказанной в упражнении **1.101**, для значения индекса $m = n$.

8.25. *Доказательство.*

Преобразуем правую часть предложенного равенства, представив число Люка L_n в виде $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ (см. упражнение **1.108**):

$$F_n L_n = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n F_{n-1} + F_n F_{n+1}.$$

Приходим к частному случаю формулы, доказанной в упражнении **1.101**, для значения индекса $m = n$:

$$F_{2n} = F_n F_{n-1} + F_n F_{n+1}.$$

Значит, для всех $n > 1$ верно равенство $F_{2n} = F_n L_n$.

8.26. *Доказательство.*

Запишем правую часть равенства, используя выражение числа Люка L_n через члены последовательности Фибоначчи $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$:

$$2F_n + L_n = 2F_n + (F_{n-1} + F_{n+1}) = \underbrace{(F_n + F_{n+1})}_{F_{n+2}} + \underbrace{(F_{n-1} + F_n)}_{F_{n+1}} =$$
$$= F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}.$$

8.27. *Доказательство.*

Преобразуем правую часть равенства:

$$-2F_n + L_n = -2F_n + (F_{n-1} + F_{n+1}) = \underbrace{(F_{n+1} - F_n)}_{F_{n-1}} + \underbrace{(F_{n-1} - F_n)}_{-F_{n-2}} =$$
$$= F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3}.$$

Поскольку $F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3}$, то получили верное равенство.

8.28. *Доказательство.*

Почленным суммированием тождеств упражнений **8.26** и **8.27** приходим к требуемому равенству.

8.29. *Указание.* Выразите числа Люка L_n через члены последовательности Фибоначчи.

8.30. *Указание.* Используйте тождества, доказанные в предыдущем упражнении.

8.31. *Решение.*

Наиболее простой подход к решению данного упражнения заключается в использовании замены $b_n = a_n + 1$. Тогда приходим к соотношению

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + b_{n-2}, & n > 2, \\ b_1 = 1, \ b_2 = 1, \end{cases}$$

которому, как известно, удовлетворяют члены последовательности Фибоначчи, $b_n = F_n$. Окончательно получаем $a_n = F_n - 1$, $n \geqslant 1$.

8.32. *Решение.*

Характеристическое уравнение имеет вид $z^3 = z^2 + 5z + 3$, или $z^3 - z^2 - 5z - 3 = 0$. Корни данного уравнения $z_1 = 3$, $z_2 = z_3 = -1$. В соответствии с общим правилом нахождения решения линейных рекуррентных соотношений представляем решение в виде

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot n \cdot (-1)^n = A \cdot 3^n + (B + Cn) \cdot (-1)^n.$$

Используя начальные условия, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3A - B - \ \ C = \ \ 1, \\ 9A + B + 2C = \ \ 1, \\ 27A - B - 3C = -3, \end{cases}$$

решениями которой будут значения $A = 0$, $B = -3$, $C = 2$. Таким образом, решение исходного рекуррентного соотношения $a_n = (-1)^n(2n - 3)$, $n \geqslant 1$.

8.33. *Ответ:* $a_n = 3^n \left(n + 2 + \dfrac{(-1)^n}{2} \right)$, $n \geqslant 1$.

8.34. *Ответ:* $a_n = 3(-1)^{n+1} + 3 \cdot 2^{n/2-1}\,(1 + (-1)^n)$, $n \geqslant 1$.

8.35. *Ответ:* $a_n = (-2)^{n-1} + 2 \cdot 3^{n/2-1}\,(1 + (-1)^n)$, $n \geqslant 1$.

8.36. *Решение.*

Характеристическое уравнение имеет вид $z = 2$, и общее решение однородного уравнения $a_n = 2a_{n-1}$ запишем как $a_n = A \cdot 2^n$. Функция $d(n) = 3^n + 4$, стоящая в правой части, есть сумма двух слагаемых $d_1(n) = 3^n$ и $d_2(n) = 4$.

Найдем частные решения соотношений

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n \quad \text{и} \quad a_n = 2a_{n-1} + 4,$$

тогда частное решение исходного соотношения будет (в силу линейности уравнения) искомым частным решением. Поскольку $t = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$(a_n)_{\text{ч.н.1}} = B \cdot 3^n, \ \text{ где } B = \text{const}.$$

Подставляя в уравнение $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$, получаем значение постоянной B:

$$B \cdot 3^n = 2B \cdot 3^{n-1} + 3^n \Rightarrow B = 3, \text{ и } (a_n)_{\text{ч.н.1}} = 3^{n+1}.$$

Теперь определяем $(a_n)_{\text{ч.н.2}}$, $(a_n)_{\text{ч.н.2}} = C$, где $C = \text{const}$. Подставляя в уравнение $a_n = 2a_{n-1} + 4$, получаем значение постоянной C:

$$C = 2C + 4 \Rightarrow C = -4, \text{ и } (a_n)_{\text{ч.н.2}} = -4.$$

В итоге общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$a_n = A \cdot 2^n + 3^{n+1} - 4.$$

Поскольку $a_1 = 1$, то $2A + 3^2 - 4 = 1 \Rightarrow A = -2$. Окончательно имеем

$$a_n = (-2) \cdot 2^n + 3^{n+1} - 4, \quad \text{или} \quad a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1} - 4, \ n \geqslant 1.$$

8.37. *Ответ:* $a_n = \dfrac{5}{6}\left(10^n - 2 + (-1)^n 2^{n+1}\right), \ n \geqslant 1.$

8.38. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{20}(5 - 2^{n+4} - 29(-1)^n 3^n), \ n \geqslant 1.$

8.39. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{4}(3^{n-1} + (-1)^n) + 1, \ n \geqslant 1.$

8.40. *Ответ:* $a_n = 2^n(2^{n+1} - 3), \ n \geqslant 1.$

8.41. *Ответ:* $a_n = \dfrac{4^n}{3}(4^n - 1), \ n \geqslant 1.$

8.42. *Ответ:* $a_n = 4^n - 2^n + \dfrac{1}{3}((-2)^n - 1), \ n \geqslant 1.$

8.43. *Ответ:* $a_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{(-1)^n}{5} - 3^{n+1} + \dfrac{109}{30} \cdot 4^n, \ n \geqslant 1.$

8.44. *Ответ:*

1) $a_n = \dfrac{7}{10}(-1)^{n+1}(7 \cdot 2^n - 2 \cdot 7^n), \ n \geqslant 1;$

2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{5}(27 \cdot 2^n - 7^{n+1}), \ n \geqslant 1;$

3) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{5}(2^{n+5} - 7^{n+1}),\ \ n \geqslant 1.$

8.45. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{60}(-10 - 42(-1)^n + 7 \cdot 4^n),\ \ n \geqslant 1.$

8.46. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{4}(11 + (-1)^n(2n+5)),\ \ n \geqslant 1.$

8.47. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{36}(27 + (-3)^n(8n-11)),\ \ n \geqslant 1.$

8.48. *Решение.*

Корни характеристического уравнения $z_1 = 1$, $z_2 = z_3 = 2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения записываем в виде

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot n2^n.$$

Функцию $d(n)$ в правой части представим как $d(n) = d_1(n) + d_2(n)$, где $d_1(n) = 1$, $d_2(n) = 2^n$.

Найдем частное решение $(a_n)_{\text{ч.н.1}}$ уравнения

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + d_1(n).$$

Имеем $d_1(n) = P_m(n) \cdot t^n$, где $t = 1$, $m = 0$. Кратность корня $t = 1$ характеристического уравнения равна $s = 1$, следовательно,

$$(a_n)_{\text{ч.н.1}} = nP_0(n) \cdot 1^n = Dn, \ \text{ где } D = \text{const}.$$

Подставив в уравнение с неоднородным членом $d_1(n)$, найдем значение постоянной D:

$$Dn = 5D(n-1) - 8D(n-2) + 4D(n-3) + 1 \ \Rightarrow\ D = 1.$$

Значит, $(a_n)_{\text{ч.н.1}} = n$.

Найдем частное решение $(a_n)_{\text{ч.н.2}}$ уравнения

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + d_2(n).$$

Имеем $d_2(n) = P_m(n) \cdot t^n$, где $t = 2$, $m = 0$. Кратность корня $t = 2$ характеристического уравнения равна $s = 2$, следовательно,

$$(a_n)_{\text{ч.н.2}} = n^2 P_0(n) \cdot 2^n = E \cdot n^2 2^n, \quad \text{где } E = \text{const}.$$

Для определения значения постоянной E подставляем $(a_n)_{\text{ч.н.2}}$ в уравнение с $d_2(n)$:

$$\begin{gathered} E \cdot n^2 2^n = 5E \cdot (n-1)^2 2^{n-1} - 8E(n-2)^2 2^{n-2} + 4E(n-3)^2 2^{n-3} + 2^n = \\ = E \cdot 2^{n-3}(8n^2 - 8) + 2^n \ \Rightarrow\ E = 1, \ \text{ и } \ (a_n)_{\text{ч.н.2}} = n^2 2^n. \end{gathered}$$

Теперь можно выписать полученное решение, в котором еще не определены постоянные A, B и C:

$$a_n = (a_n)_{\text{о.о.}} + (a_n)_{\text{ч.н.1}} + (a_n)_{\text{ч.н.2}} = A + (B + Cn)2^n + n + n^2 2^n.$$

Подстановка в исходное уравнение приводит к системе линейных уравнений относительно A, B и C:

$$\begin{cases} A + 2(B + C) + 1 + 2 = 0, \\ A + 4(B + 2C) + 2 + 16 = 19, \\ A + 8(B + 3C) + 3 + 72 = 88. \end{cases}$$

Решениями данной системы будут значения $A = -3$, $B = -1$, $C = 1$. В итоге получаем $a_n = 2^n(n^2 + n - 1) + n - 3,\ n \geqslant 1$.

8.49. *Ответ:*
1) $a_n = 2^{n-1}(2n^2 - 17n + 40) + n - 28,\ n \geqslant 1$;
2) $a_n = 2^n(n^2 + 34n - 62) + n + 53,\ n \geqslant 1$;
3) $a_n = 2^{n-2}(4n^2 - 5n + 41) + n - 17,\ n \geqslant 1$.

8.50. *Ответ:* $a_n = \dfrac{2}{3}(n+1) + \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2\pi n}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\sin\dfrac{2\pi n}{3},\ n \geqslant 1$.

8.51. *Ответ:* $a_n = 3n - 1 + \cos\dfrac{2\pi n}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2\pi n}{3},\ n \geqslant 1$.

8.52. *Решение.*

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n/2} + 2n - 1 = \\ &= 2(2a_{n/4} + 2\frac{n}{2} - 1) + 2n - 1 = 4a_{n/4} + 2n - 2 + 2n - 1 = \\ &= 4(2a_{n/8} + 2\frac{n}{4} - 1) + 2n - 2 + 2n - 1 = 8a_{n/8} + 2n - 4 + 2n - 2 + 2n - 1. \end{aligned}$$

После k-й подстановки получим

$$a_n = 2^k a_{n/2^k} + 2nk - \sum_{i=0}^{k-1} 2^i.$$

Данная формула может быть доказана методом математической индукции. Подставим в полученное выражение значение $k = \log_2 n$:

$$a_n = 2^{\log_2 n} a_1 + 2n\log_2 n - \frac{2^{\log_2 n} - 1}{2 - 1}.$$

В итоге приходим к явному выражению для n-го члена последовательности

$$a_n = 2n\log_2 n + 1,\ n \geqslant 1.$$

8.53. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{3}(8n^3 - 5n^{\log_2 5}),\ \ n \geqslant 1.$

8.54. *Ответ:* $a_n = \dfrac{22}{3}n^{\log_3 4} - 6n - \dfrac{1}{3},\ \ n \geqslant 1.$

8.55. *Ответ:* $a_n = -n\log_3 n + \dfrac{n}{2}(3n-1),\ \ n \geqslant 1.$

8.56. *Указание.* Воспользуйтесь индукцией по переменной k.

8.57. *Ответ:*

1) $G(z) = \dfrac{2}{1-z}$;

2) $G(z) = \dfrac{1}{1+z}$;

3) $G(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$;

4) $G(z) = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{1-iz}$.

8.58. *Решение:*

1) Введем обозначение $a_n = n^2$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Общий член последовательности $\{a_n\}$ представим в виде $n^2 = n(n-1)+n$. По определению производящей функции имеем:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nz^n.$$

Преобразуем первую из полученных сумм:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}.$$

Как известно, при дифференцировании степенной функции z^n показатель степени понижается на единицу и выносится мультипликативный множитель n: $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$. В силу этого сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$ можно рассматривать как вторую производную от функции $1 + z + z^2 + \ldots =$ $= \dfrac{1}{1-z}$.

Выражение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$ представим аналогичным образом с помощью первой производной от указанной функции.

В итоге для $G(z)$ получим:

$$G(z) = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + z\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

2) Обозначим $a_n = n^3$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Принимая во внимание тождество $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$, получим:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)z^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nz^n =$$
$$= z^3 \frac{d^3}{dz^3}\frac{1}{1-z} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1-z} + z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}.$$

Выполним операции дифференцирования и последующие алгебраические преобразования:

$$G(z) = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}.$$

Итак, производящей функцией для последовательности кубов целых неотрицательных чисел $a_n = n^3$ является $G(z) = \dfrac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}$.

8.59. *Ответ:*

1) $\widetilde{G}(z) = zG(z)$;

2) $\widetilde{G}(z) = (1+z)G(z)$;

3) $\widetilde{G}(z) = G(z^2)$;

4) $\widetilde{G}(z) = z^{-3}(G(z) - a_2z^2 - a_1z - a_0)$.

8.60. *Ответ:*

1) $\widetilde{G}(z) = \dfrac{d}{dz}(zG(z))$;

2) $\widetilde{G}(z) = \int\limits_0^z G(\xi)\,d\xi$;

3) $\widetilde{G}(z) = \dfrac{1}{2}\big(G(\sqrt{z}) + G(-\sqrt{z})\big)$;

4) $\widetilde{G}(z) = \dfrac{G(z)}{1-z}$.

8.61. *Доказательство.*

Напомним определение свойства ассоциативности (см. упр. **2.26**):

$$\big(G_a(z) \cdot C_b(z)\big) \cdot G_c(z) = G_a(z) \cdot \big(C_b(z) \cdot G_c(z)\big),$$

где $G_a(z)$, $G_b(z)$, $G_c(z)$ — производящие функции для произвольных числовых последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, соответственно.

Докажем, что свойство ассоциативности, записанное для любых числовых последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, приводит к алгебраическому тождеству.

Для этого воспользуемся определительными формулами, отвечающим произведениям $\big(G_a(z)\cdot C_b(z)\big)\cdot G_c(z)$ и $G_a(z)\cdot\big(C_b(z)\cdot G_c(z)\big)$ с учетом порядка расстановки скобок:

$$\big(G_a(z)\cdot C_b(z)\big)\cdot G_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n}\big(\sum_{k=0}^{i}(a_k b_{i-k})\cdot c_{n-i}\big)\Big)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n,$$

$$G_a(z)\cdot\big(C_b(z)\cdot G_c(z)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n}\big(a_i\sum_{k=0}^{n-i}(b_k c_{n-i-k})\big)\Big)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} W_n z^n.$$

В предыдущих формулах были введены обозначения

$$V_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} c_{n-i}, \quad W_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i} a_i b_k c_{n-i-k}.$$

Докажем, что для всех $n \geqslant 0$ выполняется равенство $V_n = W_n$. Преобразуем выражение для W_n, выполнив замену переменной $j = i + k$:

$$W_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_i b_{j-i} c_{n-j}.$$

Далее в полученном выражении изменим порядок суммирования согласно тождеству $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{j} a_{ij}$, справедливому для любых коэффициентов a_{ij}. Смысл примененного тождества заключается в том, что сумму элементов произвольной верхнетреугольной матрицы можно вычислить двумя способами, приводящими, конечно, к одному результату, — либо по строкам, либо по столбцам. С точностью до переобозначения переменных $i \to k$, $j \to i$ полученная двойная сумма

$$W_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} c_{n-j}.$$

совпадает с суммой, определяющей величину V_n, т. е. $V_n = W_n$ для всех $n \geqslant 0$.

Таким образом доказано, что для операции умножения производящих функций справедливо свойство ассоциативности.

8.62. *Ответ:*

Сверткой последовательностей $1, 2, 3, 4, \ldots$ и $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ является последовательность $\{c_n\}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, с общим членом

$$c_n = (n+2)H_{n+1} - (n+1),$$

где $H_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$ — гармоническое число.

8.63. *Ответ:* $c_n = \dfrac{(\alpha+\beta)^n}{n!}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

8.64. *Решение.*

Последовательностям $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответствуют производящие функции $G_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi\, z^n$ и $G_b(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin n\varphi\, z^n$.

Записав тригонометрические функции $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через экспоненту с комплексным показателем, получим

$$G_a(z) = \frac{1}{2}\big((1 - e^{i\varphi}z)^{-1} + (1 - e^{-i\varphi}z)^{-1}\big),$$

$$G_b(z) = \frac{1}{2i}\big((1 - e^{i\varphi}z)^{-1} - (1 - e^{-i\varphi}z)^{-1}\big).$$

Как известно, свертке последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ отвечает производящая функция $G_c(z) = G_a(z)G_b(z)$. Применив к данному произведению восьмую формулу из табл. 8.1 для случая $N = 2$

$$\frac{1}{(1-cz)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C(n+1, n)\, c^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c^n z^n,$$

получим $G_c(z) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \sin n\varphi\, z^n$.

Окончательно, $c_n = \frac{1}{2}(n+1)\sin n\varphi$ для всех $n \geqslant 0$.

8.65. *Ответ:* $a_n = 1 - 4(-1)^n$, $n \geqslant 1$.

8.66. *Ответ:* $a_n = (12 - 5n)(-5)^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

8.67. *Ответ:* $a_n = \frac{3^{-n}}{2}(n^2 + 3n - 10)$, $n \geqslant 1$.

8.68. *Ответ:* $a_n = (n-2)2^n + 3^{n+1}$, $n \geqslant 1$.

8.69. *Ответ:* $a_n = (2\sqrt{8} - 5)(3 + \sqrt{8})^n - (2\sqrt{8} + 5)(3 - \sqrt{8})^n$, $n \geqslant 1$.

8.70. *Ответ:* $a_n = n^3$, $n \geqslant 1$.

8.71. *Ответ:* $a_n = (n-2)^2$, $n \geqslant 1$.

8.72. *Ответ:* $a_n = 1 - 3^n \cos\frac{\pi n}{2}$, $n \geqslant 1$.

8.73. *Ответ:* $a_n = 2^n + n$, $n \geqslant 1$.

8.74. *Ответ:* $a_n = \frac{1}{5}\big(3 \cdot 2^n - 3\cos\frac{\pi n}{2} + 4\sin\frac{\pi n}{2}\big) - 1$, $n \geqslant 1$.

8.75. *Ответ:* $a_n = n \cdot 3^n$, $n \geqslant 1$.

8.76. *Ответ:* $a_n = (-2)^{-n} + n^2$, $n \geqslant 1$.

8.77. *Доказательство.*

Как известно, последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяется рекуррентным соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n \geqslant 2$ с начальными условиями $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$ (см. упр. **1.90** и **1.109** на стр. 33 и 36).

Умножим правую и левую части определительной формулы для F_n на z^n и просуммируем по n:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^n.$$

Далее выполним алгебраические преобразования:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n - F_1 z - F_0 = z\Big(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n - F_0\Big) + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

С учетом формулы для производящей функции чисел Фибоначчи $G_F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ получим уравнение

$$G_F(z) - z = zG_F(z) + z^2 G_F(z),$$

его решение $G_F(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$. Производящая функция для последовательности чисел Люка $G_L(z) = \dfrac{2-z}{1-z-z^2}$ выводится аналогичным образом.

8.78. *Ответ:* $G_H(z) = \dfrac{1}{1-z}\ln\dfrac{1}{1-z}$.

8.79. *Решение.*

Выражение для произвольного члена последовательности $\{a_n\}$ имеет вид $a_n = Az_1^n + Bz_2^n$, где $z_1 = 3$, $z_2 = 4$. Рекуррентное соотношение второго порядка с характеристическим уравнением $(z-3)(z-4) = 0$ имеет своим решением $a_n = 3^n + 4^n$.

Следовательно, решением $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$ будет $a_n = A\cdot 3^n + B\cdot 4^n$. В нашем случае $a_1 = 3+4 = 7$, $a_2 = 3^2+4^2 = 25$. В итоге получаем, что $a_n = 3^n + 4^n$ является решением рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 7,\ a_2 = 25. \end{cases}$$

8.80. *Ответ:* $\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 1,\ a_2 = 9. \end{cases}$

8.81. *Ответ:* $\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 5,\ a_2 = 35. \end{cases}$

8.82. *Ответ:* $\begin{cases} a_n = 4a_{n-2}, \quad n > 2, \\ a_1 = 0,\ a_2 = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$

8.83. *Решение.*

Выражение для произвольного члена последовательности $\{a_n\}$ имеет вид $a_n = Q_m(n)t^n$, где $t = 2$, степень полинома Q_m равна $m = 2$. Запишем соответствующее рекуррентное соотношение: $a_n = a_{n-1} + d(n)$, где $d(n) = (An^2 + Bn + C)2^n$, A, B и C — const.

Вычислим значения констант A, B и C. Для этого подставим a_n в рекуррентное соотношение:

$$2^n(n^2+n+1) = 2^{n-1}((n-1)^2 + (n-1) + 1) + (An^2 + Bn + C)2^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, вычисляем значения A, B и C: $A = C = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{3}{2}$.

В итоге получаем $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}(n^2 + 3n + 1), \quad n > 1, \\ a_1 = 6. \end{cases}$

8.84. *Ответ:* $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}(2n^2 + 6n + 3), \quad n > 1, \\ a_1 = 12. \end{cases}$

8.85. *Ответ:* $\begin{cases} a_n = a_{n-2} + 2^{n-2}(3n^2 - 2n - 5), \quad n > 2, \\ a_1 = 0,\ a_2 = 2. \end{cases}$

8.86. *Ответ:* $\begin{cases} a_n = a_{n-2} + 4^{n-2}(15n + 2), \quad n > 2, \\ a_1 = 4,\ a_2 = 32. \end{cases}$

8.90. *Ответ:* $a_n = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ для всех $n \geqslant 1$, где F_{n+1} и F_{n+2} — числа Фибоначчи.

8.91. *Решение.*

Введем новую переменную $b_n = a_n^2$. Нелинейное соотношение преобразуется к виду:

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2, \quad n > 1, \\ b_1 = 0. \end{cases}$$

Его решением является последовательность, определяемая соотношением $b_n = 2(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots,$ и поэтому $a_n = \sqrt{2(n-1)}$, $n = 1, 2, \ldots$

8.92. *Ответ:* $a_n = (6n - 5)^{1/3}$, $n \geqslant 1$.

8.93. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5n + 220} - 1)$, $n \geqslant 1$.

8.94. *Ответ:* $a_n = \dfrac{1}{3}(\sqrt[3]{n} + 5)$, $n \geqslant 1$.

8.95. *Решение.*

Прологарифмировав обе части соотношения, получим

$$2 \ln a_n = \ln a_{n-1} + \ln 2.$$

Обозначим $b_n = \ln a_n$, соответствующее рекуррентное соотношение является линейным:

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{1}{2}(b_{n-1} + \ln 2), \quad n > 1, \\ b_1 = 0. \end{cases}$$

Его решение $b_n = \ln 2(1 - 2^{-n+1})$, $n \geqslant 1$. Возвращаясь к исходной величине a_n, получим $a_n = 2^{1-2^{1-n}}$, $n \geqslant 1$.

Примечание. Если a_n могут принимать комплексные значения, то решение будет иметь вид $a_n = 2^{1-2^{1-n}} e^{2^{2-n}\pi k i}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$.

8.96. *Ответ:* $a_n = i^{\pm(1-3^{1-n})}$, $n \geqslant 1$.

8.97. *Ответ:* $a_n = 4$, $n \geqslant 1$. Если a_n могут принимать комплексные значения, то решение будет иметь вид $a_n = 4e^{2^{2-n}\pi k i}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$.

8.98. *Ответ:* $a_n = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^{1-n}}$, $n \geqslant 1$. Если a_n могут принимать комплексные значения, то решение будет иметь вид $a_n = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2^{1-n}} e^{2^{2-n}\pi k i}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$.

8.99. *Ответ:*
1) $a_n = n$, $n \geqslant 1$;
2) $a_n = 8n - 6$, $n \geqslant 1$.

8.100. *Ответ:*
1) $a_n = 2^{(n-1)/2}$, $n \geqslant 1$;
2) $a_n = 3^{2-n}$, $n \geqslant 1$.

8.101. *Ответ:*
1) $a_n = \dfrac{10}{n}$, $n \geqslant 1$;
2) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \geqslant 1$.

8.102. *Решение.*

Ограниченность последовательности $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, следует из свойств функции $f(x) = \lambda x(1-x)$. Вычислим производную $f'(x) = \lambda(1-2x)$ и определим точки возможного экстремума $f(x)$: $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$. Минимальное и максимальное значения функции на замкнутом отрезке $[0,1]$ равны $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = \dfrac{\lambda}{4}$.

Принимая во внимание, что $\lambda \leqslant 4$, получаем: $a_2 = f(a_1)$ и лежит в промежутке $[0,1]$, $a_3 = f(a_2)$ и также принадлежит промежутку $[0,1]$, и т. д., значит, $a_n \in [0,1]$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Метод решения уравнения состоит в применении подходящих замен переменной.

Рассмотрим случай $\lambda = 2$. Замена $b_n = \dfrac{1}{2} - a_n$ приводит к рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} b_n = 2b_{n-1}^2, \quad n > 1, \\ b_1 = \dfrac{1}{2} - a_1. \end{cases}$$

Взяв логарифм по основанию 2 от обеих частей равенства $b_n = 2b_{n-1}^2$ и обозначив $\widetilde{b}_n = \log_2 b_n$, получим линейное уравнение, его решением будет $\widetilde{b}_n = A \cdot 2^n - 1$, где $A = \dfrac{1}{2}\log_2(1 - 2a_1)$. Возвращаясь к переменной a_n, имеем $a_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(1 - 2a_1)^{2^{n-1}}$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим случай $\lambda = 4$. Замена переменной $a_n = \sin^2 b_n$, $b_n \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \sin^2 b_n = \sin^2(2b_{n-1}), \quad n > 1, \\ b_1 = \arcsin\sqrt{a_1}. \end{cases}$$

Учитывая неотрицательность величин b_n, определяем явное выражение для b_n: $b_n = A \cdot 2^n - 2\pi k$, где $A = \dfrac{1}{2}(\arcsin\sqrt{a_1} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Окончательно, для случая $\lambda = 4$ решение уравнения имеет вид $a_n = \sin^2(2^{n-1}(\arcsin\sqrt{a_1} + 2\pi k))$, или $a_n = \sin^2(2^{n-1}\arcsin\sqrt{a_1})$, $n \geqslant 1$.

8.103. *Решение.*

Рассмотрим три случая в зависимости от соотношения величин a_1 и $\sqrt{x}$.

1) Если $a_1 = \sqrt{x}$, то $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{x}{a_1}\right) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{x}) = \sqrt{x}$. Вычисляя значения величин a_3, a_4 и т. д., получаем, что для всех членов последовательности выполняется $a_n = \sqrt{x}$, $n = 1, 2, \ldots$

2) Если $a_1 > \sqrt{x}$, то последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу величиной $\sqrt{x}$. Докажем это.

Запишем условие монотонности: $a_{n+1} < a_n$. Из соотношения $a_n > \sqrt{x}$ следует, что

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - a_n = \frac{x - a_n^2}{2a_n} < 0.$$

Ограниченность последовательности $\{a_n\}$ вытекает из сравнения

$$a_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) - \sqrt{x} = \frac{(a_n - \sqrt{x})^2}{2a_n} > 0,$$

верного для всех $n = 1, 2, \ldots$

По теореме Вейерштрасса существует предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, а из рекуррентного соотношения следует, что $A = \dfrac{1}{2}\Big(A + \dfrac{x}{A}\Big)$ или $A = \sqrt{x}$.

3) В случае $a_1 < \sqrt{x}$ следующий член последовательности $a_2 > \sqrt{x}$:

$$a_2 - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\Big(a_1 + \frac{x}{a_1}\Big) - \sqrt{x} = \frac{(a_1 - \sqrt{x})^2}{2a_1} > 0,$$

и для последовательности $\{a_n\}$, $n = 2, 3, 4\ldots$ условия теоремы Вейерштрасса проверяются аналогично пункту 2).

Таким образом, для всех возможных значений первого элемента a_1 последовательность $\{a_n\}$ сходится к $A = \sqrt{x}$.

8.104. *Ответ:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{x}$.

8.105. *Указание.*
Последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху.

8.106. *Указание.*
Последовательность $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху.

8.107. *Решение.*
Вычислим величину $a_n - a_{n-1}$:

$$a_n - a_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + 2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i + 2\right) = a_{n-1},$$

откуда следует, что исходное соотношение с полной предысторией равносильно следующему линейному соотношению

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, & n > 1, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

Осталось выписать ответ: $a_n = 2^n$, $n \geqslant 1$.

8.108. *Ответ:* $a_n = \begin{cases} 12 \cdot 2^{n-2}, & n > 1, \\ 2, & n = 1. \end{cases}$

8.109. *Указание.*
Исходное рекуррентное соотношение равносильно следующему:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, & n > 2, \\ a_2 = a_1 + 2, \\ a_1 = 1, \end{cases} \qquad \text{и его решение} \qquad \begin{cases} a_n = 3 \cdot 2^{n-2}, & n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

8.110. *Ответ:*

$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_7$
1	1	2	5	14	42	132	429

8.111. *Указание.*

Из соотношения для чисел Каталана (см. упр. **8.110**) следует, что производящая функция $G_{\mathcal{C}}(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $zG^2_{\mathcal{C}}(z) = G_{\mathcal{C}}(z) - \mathcal{C}_0$.

8.112. *Ответ:* $\mathcal{C}_n = \dfrac{1}{n+1}C(2n, n)$ для всех $n \geqslant 0$, $C(2n, n)$ — биномиальный коэффициент.

8.113. *Решение.*

Определим суммирующий множитель. Поскольку $f(n) = n$, то

$$F(n) = \left[\prod_{i=2}^{n} f(i)\right]^{-1} = (n!)^{-1}.$$

Произведем замену $b_n = f(n+1)F(n+1)a_n$, или

$$b_n = (n+1)\frac{1}{(n+1)!}a_n = \frac{a_n}{n!}.$$

Получаем возвратное уравнение $b_n = b_{n-1} + 1$, причем $b_1 = 1$. Отсюда следует, что $b_n = n$, и $a_n = n \cdot n!$ для всех $n \geqslant 1$.

8.114. *Ответ:* $a_n = (n+1)!$, $n \geqslant 1$.

8.115. *Решение.*

Суммирующий множитель равен $F(n) = \dfrac{2}{n+1}$. После замены $b_n = \dfrac{2}{n+1}a_n$ приходим к соотношению

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + \dfrac{4}{n+1}, & n > 1, \\ b_1 = 0,\ b_2 = 2, \end{cases}$$

которому при $n > 1$ удовлетворяет последовательность $b_n = \dfrac{4}{3}\,(3H_{n+1} - 4)$.

Окончательно получаем: $a_n = 2(n+1)\left(H_{n+1} - \dfrac{4}{3}\right)$, $n > 1$.

8.116. *Ответ:* $a_n = (n+1)^2 - (n+1)H_n$, $n \geqslant 1$.

8.117. *Ответ:* $a_n = 2n(n+5)$, $n \geqslant 1$.

8.118. *Решение.*

Суммирующий множитель равен

$$F(n) = \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right)^{-1} = n!,$$

и явное выражение для a_n имеет вид

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^{-1}(n+1)!}\left(a_1 + \sum_{i=2}^{n} i \cdot i!\right) = \frac{1}{n!}\left(a_1 - 1 + \sum_{i=1}^{n} i \cdot i!\right).$$

В решении упражнения **8.9** показано, что $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ для всех $n \geqslant 1$.

В силу этого выражение для произвольного члена последовательности $\{a_n\}$ упрощается: $a_n = n+1$, $n \geqslant 1$.

8.119. *Ответ:* $a_n = n(n+1)$, $n \geqslant 1$.

8.120. *Ответ:* $a_n = (n-1)e^{n^2+n-2}$, $n \geqslant 1$.

8.121. *Ответ:* $a_n = ne^{-n^2-n+2}$, $n \geqslant 1$.

8.122. *Решение.*

Выразим b_n из первого уравнения системы: $b_n = 4a_n - a_{n+1}$ для $n \geqslant 1$. Подставив полученные соотношения во второе уравнение системы, получим рекуррентное соотношение, связывающее a_{n-1}, a_n и a_{n+1}:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

Решением получившегося уравнения будет $a_n = A_1 2^n + B_1 3^n$, где A_1 и B_1 — const.

Выражая a_{n-1} из второго уравнения системы и подставляя полученное соотношение в первое уравнение, найдем рекуррентное соотношение для b_n:

$$b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}.$$

Решением данного уравнения является $b_n = A_2 2^n + B_2 3^n$.

Для определения значений постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 подставим выражения для a_n и b_n в исходную систему.

$$\begin{cases} -2A_1 + A_2 = 0, \\ -B_1 + B_2 = 0, \\ 2A_1 + 3B_1 = 7, \\ 2A_2 + 3B_2 = 11. \end{cases}$$

Решая полученную неоднородную систему линейных уравнений, находим $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $B_1 = B_2 = 1$. Окончательно получаем $a_n = 2^{n+1} + 3^n$, $b_n = 2^{n+2} + 3^n$, $n \geqslant 1$.

8.123. *Ответ:* $a_n = 5^{(n+1)/2}$, $b_n = \dfrac{1}{2}(5^{n/2+1} - 5^{(n+1)/2})$, $n \geqslant 1$.

8.124. *Решение.*

Дополним искомые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, членами a_0 и b_0. Подставив $n = 1$ в систему, найдем $a_0 = 2$, $b_0 = 0$.

Введем в рассмотрение производящие функции $G_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $G_b(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Далее умножим левые и правые части уравнений системы на z^n и просуммируем по n. В результате получим систему уравнений на функции $G_a(z)$ и $G_b(z)$:

$$\begin{cases} (1-2z)G_a(z) - 3zG_b(z) = a_0 + \dfrac{4z}{1-3z}, \\ -3zG_a(z) + (1-6z)G_b(z) = b_0 - \dfrac{4z}{1-5z}. \end{cases}$$

Решение этой системы с учетом начальных условий $a_0 = 2$ и $b_0 = 0$ имеет вид: $G_a(z) = \dfrac{2-8z}{(1-3z)(1-5z)} = \dfrac{1}{1-5z} + \dfrac{1}{1-3z}$, $G_b(z) = \dfrac{2z}{(1-3z)(1-5z)} = \dfrac{1}{1-5z} - \dfrac{1}{1-3z}$. Используя табл. 8.1, получаем окончательный ответ: $a_n = 5^n + 3^n$, $b_n = 5^n - 3^n$ для $n = 1, 2, \ldots$

8.125. *Ответ:* $a_n = n + 1 + 2^n$, $b_n = n - 1 - 2^n$ для $n = 1, 2, \ldots$

8.126. *Ответ:* $a_n = 4^n + n^2$, $b_n = 4^n - 2n$ для $n \geqslant 1$.

8.127. *Ответ:* $a_n = (-2)^n + 2^n$, $b_n = (-2)^n + 2^{n+1}$ для $n \geqslant 1$.

8.128. *Ответ:* $\Gamma(n) = (n-1)!$ для $n \in \mathbb{N}$.

8.129. *Решение.*

Обозначим $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ и проведем интегрирование по частям (см. раздел «Справочные материалы», соотношение (A.38)), полагая $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) = \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,d\sin^{n-1} x = \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.
\end{aligned}$$

Разрешая полученное равенство относительно I_n, получим рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Вычислим I_n для значений $n = 1$ и $n = 2$:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Используя начальные значения I_1, I_2 и формулу $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, приходим к соотношениям

$$I_{2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}, \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

в которых $n!!$ — кофакториал числа n. Единое выражение для I_n, где $n \in \mathbb{N}$, может быть записано с использованием гамма-функции:

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}.$$

8.130. *Ответ:*

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2},\ n > 2, \\ I_1 = 1,\ I_2 = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad I_{2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\ I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ n \geqslant 1.$$

8.131. *Решение.*

Обозначим $I_{2n} = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$ и проведем интегрирование по частям, полагая $n \geqslant 1$:

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x\,d\operatorname{tg} x - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x\,dx =$$
$$= \left.\frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1}\right|_0^{\pi/4} - I_{2n-2} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}.$$

Вычислим I_{2n} для значений $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$I_0 = \frac{\pi}{4},\quad I_2 = 1 - \frac{\pi}{4},\quad I_4 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4},\quad \ldots,$$
$$I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n-1}\right).$$

Окончательно, $I_{2n} = (-1)^n \left(\dfrac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{1}{2k-1}\right)$, $n \geqslant 1$.

8.132. *Ответ:* $\begin{cases} I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}, & n \geqslant 1, \\ I_0 = 1; \end{cases}$ $\qquad I_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\ n \geqslant 0.$

8.133. *Ответ:*

$$\begin{cases} I_n = -\dfrac{n}{c+1} I_{n-1}, & n \geqslant 1, \\ I_0 = \dfrac{1}{c+1}; \end{cases} \qquad I_n = (-1)^n \frac{n!}{(c+1)^{n+1}},\ n \geqslant 0.$$

8.134. *Решение.*

Обозначим объем единичного n-мерного шара через v_n. По определению имеем [34, 76]

$$v_n = \int \cdots \int\limits_{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Выбрав одну из координат, например, x_n, запишем v_n в виде

$$v_n = \int_{-1}^{1} dx_n \int \cdots \int\limits_{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leqslant 1 - x_n^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

Внутренний интеграл равен объему шара радиуса $r = (1 - x_n^2)^{1/2}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ и может быть представлен как

$$\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}\cdots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} = v_{n-1} r^{n-1} = v_{n-1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}.$$

Для объема единичного n-мерного шара получаем

$$v_n = v_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}dx_n.$$

Замена переменной $x_n = \cos\varphi$ приводит к

$$v_n = 2v_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi\, d\varphi.$$

Значение интеграла $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n\varphi\, d\varphi$ для $n = 1, 2, \ldots$ равно

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция (см. упражнения **8.128** и **8.129**). Учитывая, что объем одномерного шара единичного радиуса равен $v_1 = \int\limits_{-1}^{1} dx_1 = 2$, запишем рекуррентное соотношение для v_n:

$$\begin{cases} v_n = \sqrt{\pi}\,\dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}\,v_{n-1}, & n > 1,\\ v_1 = 2. \end{cases}$$

Полученное соотношение легко решается методом подстановки:

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что с ростом размерности пространства n объем шара единичного радиуса стремится к нулю. Кроме того, поскольку выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n - (r-\varepsilon r)^n}{r^n} = 1$ при любом сколь угодно малом положительном $\varepsilon < 1$, почти весь объем шара радиуса r сосредоточен в узком шаровом слое ширины εr, прилегающем к поверхности шара.

8.135. *Ответ:*

Рекуррентное соотношение для объема n-мерного симплекса v_n имеет вид

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{1}{n}\, v_{n-1}, & n > 1, \\ v_1 = 1. \end{cases}$$

Его решение $v_n = (n!)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

8.136. *Ответ:* $a_n = \lceil \beta^{2^n} \rceil$, где $\beta = 1{,}678\,458\,965\ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

8.137. *Решение.*

С помощью замены величин a_n разными способами (см. ниже) приведем исходное рекуррентное соотношение к более простому виду. В зависимости от значения величины u потребуются различные замены a_n. Рассмотрим далее три случая: 1) $u > 2$, 2) $|u| \leqslant 2$, 3) $u < -2$.

1) Пусть выполняется неравенство $u > 2$. Введем новую числовую последовательность $\{b_n\}$, определенную согласно соотношению $a_n = 2\operatorname{ch} b_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $\operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2$ — гиперболический косинус.

Подстановка величин b_n в уравнение $a_n = a_{n-1}^2 - 2$ с учетом справедливого для всех вещественных z тождества $\operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{ch}^2 z - 1$ приводит к равенству

$$\operatorname{ch} b_n = \operatorname{ch} 2b_{n-1}, \text{ где } n \geqslant 0.$$

Следовательно, либо $b_n = 2b_{n-1}$ и $b_n = 2^n b_0$, либо $b_n = -2b_{n-1}$ и $b_n = (-2)^n b_0$ для всех целых положительных n.

Условие $a_n = 2\operatorname{ch} b_n$ в каждом из рассмотренных случаев приводит к зависимости вида $a_n = 2\operatorname{ch}(2^n b_0)$, где b_0 определяется из соотношения $2\operatorname{ch} b_0 = u$. Это позволяет записать явную формулу для величин a_n:

$$a_n = 2\operatorname{ch}\Bigl(2^n \operatorname{Arch}\frac{u}{2}\Bigr), \quad n \geqslant 0.$$

Здесь $\operatorname{Arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ — положительная ветвь обратного гиперболического косинуса.

2) Пусть выполняется неравенство $|u| \leqslant 2$. Воспользуемся заменой $a_n = 2\cos b_n$, $n \geqslant 0$. Применяя формулу косинуса двойного аргумента, придем к соотношению $\cos b_n = \cos(2b_{n-1})$. Из данного равенства следует, что

$$b_n = \sigma_{n-1} \cdot 2b_n + 2\pi k_{n-1},$$

где $\sigma_{n-1} = \pm 1$, $k_{n-1} \in \mathbb{Z}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Методом подстановки получим явное выражение для величин b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\ldots\sigma_0 \cdot 2^n b_0 + \\ &\quad + 2\pi(\sigma_n\sigma_{n-1}\ldots\sigma_1 \cdot 2^{n-1}k_0 + \sigma_n\sigma_{n-1}\ldots\sigma_2 \cdot 2^{n-2}k_1 + \ldots + \\ &\quad + \sigma_n \cdot 2k_{n-2} + k_{n-1}) = \pm 2^n b_0 + 2\pi k', \text{ где } k' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Возвратимся к последовательности $\{a_n\}$:

$$a_n = 2\cos b_n = 2\cos(2^n b_0) = 2\cos\left(2^n \arccos\frac{u}{2}\right), \quad n \geqslant 0.$$

3) Наконец, рассмотрим случай $u < -2$. Поскольку $a_1 = a_0^2 - 2 = u^2 - 2 > 2$, то этот случай сводится к уже исследованному пункту 1), если в качестве начального члена последовательности взять $u^2 - 2$:

$$a_n = 2\operatorname{ch}\left(2^{n-1}\operatorname{Arch}\frac{u^2-2}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

Аналитические выражения для величин a_n, полученные в пунктах 1)–3), можно объединить в единую формулу для произвольных значений u. Используя равенства $\operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2$ и $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$, справедливые для всех $z \in \mathbb{R}$, окончательный ответ представим в виде

$$a_n = \left(\frac{u + \sqrt{u^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{u - \sqrt{u^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

где $u \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Важно отметить, что в рассмотренном выражении для a_n квадратный корень понимается как функция комплексного аргумента (см. стр. 309). Формула, определяющая величины a_n, остается корректной даже для комплексных значений параметра u.

Глава 9

Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов

Алгоритм — это точное предписание, определяющее вычислительный процесс, ведущий от варьируемых исходных данных к искомому результату (данные — упорядоченный набор символов) [52]. Другими словами, алгоритм описывает конкретную вычислительную процедуру, с помощью которой решается вычислительная задача. Как правило, алгоритм используется для решения некоторого класса задач, а не одной конкретной задачи [2, 71]. Термин «алгоритм» происходит от имени средневекового математика аль-Хорезми́[1].

Понятие алгоритма относится к базовым, фундаментальным понятиям математики. Многие исследователи пользуются разными формулировками определения понятия алгоритма, отличающимися друг от друга. Однако во всех формулировках явно или неявно подразумеваются следующие **свойства алгоритма** [41].

1. *Дискретность*. Алгоритм должен представлять процесс решения задачи как последовательное выполнение отдельных шагов. Выполнение каждого шага алгоритма требует некоторого времени, и каждая операция осуществляется только целиком и не может осуществляться частично.

2. *Элементарность шагов*. Способ исполнения каждой команды должен быть известен и достаточно прост.

3. *Детерминированность* (от латинского *dētermin况āre* — определять). Каждый следующий шаг работы алгоритма однозначно определен. Для одних и тех же исходных данных результат должен быть одним и тем же.

4. *Направленность*. Должно быть известно, что считать результатом работы алгоритма.

5. *Массовость*. Требуется, чтобы была возможность применить алгоритм ко всем наборам исходных данных из определенного, заранее фиксированного множества.

[1] аль-Хорезми (Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī) (ок. 780 — ок. 850).

Рассмотрим алгоритм $\mathcal{A}$, решающий конкретную вычислительную задачу. Возможность применения данного алгоритма в компьютерной программе требует обоснования правильного решения задачи для всех входных данных, т. е. следует провести **доказательство корректности алгоритма** $\mathcal{A}$. Для этого необходимо проследить все изменения значений переменных, которые происходят в результате работы алгоритма. С математической точки зрения речь идет об установлении истинностных значений некоторых предикатов, описывающих переменные величины.

Пусть P — предикат, истинный для входных данных алгоритма $\mathcal{A}$, Q — предикат, принимающий истинное значение после завершения работы $\mathcal{A}$. Введенные предикаты называются **предусловием** и **постусловием** соответственно.

Высказывание $\{P\}\mathcal{A}\{Q\}$ означает следующее: «если работа алгоритма $\mathcal{A}$ начинается с истинного значения предиката P, то она закончится при истинном значении Q». Получаем, что доказательство корректности алгоритма $\mathcal{A}$ равносильно доказательству истинности $\{P\}\mathcal{A}\{Q\}$. Пред- и постусловие в совокупности с самим алгоритмом называют **тройкой Хоара**[1]. Тройка Хоара описывает, как выполнение данного фрагмента компьютерной программы изменяет состояние вычисления [130].

В качестве примера рассмотрим один из важных алгоритмов теории графов — алгоритм Уоршелла, который используется для вычисления матрицы достижимости заданного ориентированного графа $D(V, E)$.

Ниже в описаниях алгоритмов индексы элементов массивов, как правило, начинаются с единицы. В языке Python такую нумерацию принято начинать с нуля. В связи с этим при изучении реализаций алгоритмов следует учитывать, что индексы массивов (а также номера строк и столбцов матриц) отличаются на единицу от описания, приведенного в тексте.

Алгоритм Уоршелла основан на формировании последовательности вспомогательных логических матриц $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, ..., $W^{(N)}$, где $N = |V|$. Начальную матрицу полагают равной матрице смежности M орграфа. Элементы $W_{ij}^{(k)}$, где $1 \leqslant i, j, k \leqslant N$, вычисляются по правилу: $W_{ij}^{(k)} = \text{И}$, если существует путь, соединяющий вершины v_i и v_j такой, что все внутренние вершины принадлежат множеству $V_k = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, и $W_{ij}^{(k)} = \text{Л}$ в противном случае. Отметим, что внутренней вершиной пути $P = v_i, \ldots, v_l, \ldots, v_j$ называют любую вершину v_l, $1 \leqslant l \leqslant N$, принадлежащую P, за исключением первой v_i и последней v_j. Результирующая матрица $W^{(N)}$ оказывается равной $W^{(N)} = M^*$, поскольку $M_{ij}^* = \text{И}$ тогда и только тогда, когда существует путь $v_i, \ldots, v_j$, все внутренние вершины которого содержатся в $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$.

---

[1] Хоар (Charles Antony Richard Hoare) (род. 1934).

Принципиальным моментом является то, что матрицу $W^{(k)}$ можно получить из $W^{(k-1)}$ следующим образом. Путь $v_i, \ldots, v_j$, содержащий внутренние вершины только из множества V_k, существует тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) существует путь $v_i, \ldots, v_j$ с внутренними вершинами только из $V_{k-1} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$;

2) найдутся пути $v_1, \ldots, v_k$ и $v_k, \ldots, v_j$, также содержащие внутренние вершины только из V_{k-1}.

Получаем два случая: либо $W_{ij}^{(k-1)} = \text{И}$, если v_k входит в множество разрешенных на данном этапе вершин, либо $W_{ik}^{(k-1)} = \text{И}$ и $W_{kj}^{(k-1)} = \text{И}$. Следовательно,

$$W_{ij}^{(k)} = W_{ij}^{(k-1)} \textbf{ или } \left(W_{ik}^{(k-1)} \textbf{ и } W_{kj}^{(k-1)}\right).$$

Приведем соответствующий алгоритм для построения M^* по заданной матрице смежности M размера $N \times N$, где $N > 1$. Промежуточные матрицы $W^{(k)}$, где $0 \leqslant k \leqslant N-1$, не обязательно хранить в памяти до окончания работы алгоритма, поэтому в предлагаемой реализации элементы $W^{(k-1)}$ заменяются элементами последующей матрицы $W^{(k)}$.

Листинг 9.1

```
def WarshallAlgo(M):
    n = len(M)

    W = [[False for j in range(n)] \
         for i in range(n)]

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            W[i][j] = M[i][j]

    for k in range(n):
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                W[i][j] = W[i][j] or \
                          (W[i][k] and W[k][j])

    return W
```

Корректность алгоритма WarshallAlgo можно доказать методом математической индукции [65]. Другие усовершенствования решения задачи о нахождении M^* или, другими словами, транзитивного замыкания отношения E см. в упражнении **9.14** и в [65].

Пример 9.1. Пусть задан орграф D (рис. 9.1). Построим матрицу достижимости M^*, воспользовавшись алгоритмом Уоршелла.

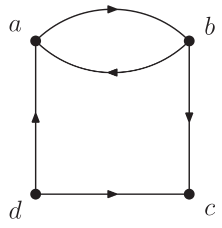


Рис. 9.1. Ориентированный граф D

Решение.

Матрица $W^{(0)}$ совпадает с матрицей смежности орграфа и имеет вид

$$W^{(0)} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Вычислим $W^{(1)}$. Если $W_{ij}^{(0)} = \text{И}$, то соответствующий элемент $W_{ij}^{(1)}$ также равен И: $W_{ij}^{(1)} = \text{И}$. Если $W_{ij}^{(0)} = \text{Л}$, то следует обратить внимание на элементы первой строки и первого столбца, стоящие на пересечении с j-м столбцом и i-й строкой: если $W_{1j}^{(0)} = W_{i1}^{(0)} = \text{И}$, то $W_{ij}^{(1)} = \text{И}$. Условие $W_{1j}^{(0)} = W_{i1}^{(0)} = \text{И}$ выполняется для двух пар (i, j), а именно для $i = j = 2$ и $i = 4$, $j = 2$. Значит, $W_{22}^{(1)} = W_{42}^{(1)} = \text{И}$, а все остальные элементы $W^{(1)}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы $W^{(0)}$. Для наглядности в записи матрицы выделим полужирным шрифтом и подчеркиванием элементы $W^{(1)}$, изменившие значение на данном шаге:

$$W^{(1)} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \underline{\textbf{И}} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \underline{\textbf{И}} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Далее вычислим $W^{(2)}$. Рассмотрим вторую строку и второй столбец матрицы $W^{(1)}$. Те элементы $W^{(1)}$, которые расположены в одной строке с элементами $W_{i2}^{(1)} = \text{И}$ из второго столбца и в одном столбце с элементами $W_{2j}^{(1)} = \text{И}$ из второй строки, изменят свое значение в $W^{(1)}$ на И.

Таковы элементы $W_{11}^{(1)}$ и $W_{13}^{(1)}$. Остальные элементы $W^{(2)}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы $W^{(1)}$.

$$W^{(2)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{И}} & \text{И} & \underline{\mathbf{И}} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

На следующем шаге в множество возможных вершин добавляется вершина c. Это не приводит к новым элементам со значением И.

$$W^{(3)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

На заключительном шаге получаем $W^{(4)} = W^{(3)}$, и матрица достижимости орграфа D будет равна

$$M^{*} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{И} & \text{И} & \text{И} & \text{Л} \end{bmatrix} \end{array}.$$

$\square$

Контрольные вопросы к главе «Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов»

1. Дайте определение понятию алгоритма.

2. Перечислите основные свойства алгоритмов.

3. Каким методом производят доказательство корректности алгоритмов?

4. Что такое тройка Хоара?

5. Для решения какой задачи используют алгоритм Уоршелла? Опишите, как работает этот алгоритм.

Задачи к главе «Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов»

9.1. Докажите корректность алгоритма обмена значений двух величин.

Листинг 9.2

```
# Exchanging of values of variables a and b
temp = a
a = b
b = temp
```

9.2. Докажите корректность алгоритма обмена значений двух величин без использования вспомогательной переменной.

Листинг 9.3

```
# Exchanging of values of variables a and b
# without using the auxiliary variable
a = a + b
b = a - b
a = a - b
```

9.3. Докажите корректность алгоритма сложения квадратных матриц.

Листинг 9.4

```
# Addition of matrices a and b
def matrix_add(a, b):
    c = [[0 for j in range(len(a[0]))] \
         for i in range(len(a))]

    for i in range(len(a)):
        for j in range(len(a[0])):
            c[i][j] = a[i][j] + b[i][j]

    return c
```

9.4. Докажите корректность алгоритма умножения квадратных матриц.

Листинг 9.5

```
# Multiplication of matrices a and b
def matrix_mult(a, b):
    c = [[0 for j in range(len(b[0]))] \
         for i in range(len(a))]
```

```

    for i in range(len(a)):
        for j in range(len(b[0])):
            s = 0

            for k in range(len(b)):
                s += a[i][k] * b[k][j]

            c[i][j] = s

    return c
```

9.5. Докажите корректность оптимизированного алгоритма умножения матриц.

Листинг 9.6

```
# Optimized multiplication
# of matrices a and b
def matrix_mult2(a, b):
    N = len(a)

    c = [[0 for i in range(N)] \
         for j in range(N)]

    d = [0 for i in range(N)]

    for i in range(N):
        for j in range(N):
            s = 0

            for k in range(N):
                d[k] = b[k][j]

            for k in range(N):
                s += a[i][k] * d[k]

            c[i][j] = s

    return c
```

Примечание. Рассмотренный вариант умножения матриц оптимизирован таким образом, чтобы предварительно выбирать элементы столбца $b(k, j)$ в промежуточный массив d, который можно целиком разместить в быстрой кэш-памяти [13].

9.6. Определите количество операций сложения двух чисел, выполняемых алгоритмом matrix_add(a, b, c) для матриц размера $N \times N$.

9.7. Определите количество операций сложения и умножения, выполняемых алгоритмом matrix_mult(a,b,c) для матриц размера $N \times N$.

∗9.8. Предложите способ уменьшить число операций сложения, выполняемых алгоритмом matrix_mult(a, b, c).

9.9. Пусть A_1, A_2 и A_3 — числовые матрицы размера 50×25, 25×30 и 30×10 соответственно. Определите минимальное число операций умножения, необходимых для вычисления произведения $A_1 A_2 A_3$ стандартным алгоритмом matrix_mult (реализация которого для квадратных матриц представлена в упражнении **9.4**).

9.10. Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 — числовые матрицы размера 25×10, 10×50, 50×5 и 5×30 соответственно. Определите минимальное число операций умножения, необходимых для вычисления произведения $A_1 A_2 A_3 A_4$ стандартным алгоритмом matrix_mult.

9.11. Докажите, что число способов вычисления произведения матриц $A_1 A_2 \ldots A_{m+1}$, $m \geqslant 1$, или, другими словами, число способов расстановки скобок в данном произведении, где A_1, A_2, $\ldots$, A_{m+1} — числовые матрицы размера $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_3$, $\ldots$, $n_{m+1} \times n_{m+2}$ соответственно, равно числу Каталана $\mathcal{C}_m$ (определительное соотношение для последовательности Каталана и явное выражение для $\mathcal{C}_m$ см. в упражнениях **8.110** и **8.112**).

9.12. Оцените число операций, совершаемых алгоритмом Уоршелла для получения матрицы достижимости орграфа.

9.13. С помощью алгоритма Уоршелла вычислите матрицу достижимости орграфа D, представленного на рис. 5.10.

9.14. Один из путей модификации алгоритма Уоршелла заключается в представлении строк логических матриц как битовых строк. В этом случае для вычисления элементов матриц $W^{(k)}$ для $1 \leqslant k \leqslant N$ используется побитовая операция **or**. Определите число операций на битовых строках, совершаемых данной реализацией алгоритма Уоршелла.

∗9.15. Запишите аналитическое выражение для функции $f(N)$.

Листинг 9.7

```
def f(N):
    temp = 0

```

```
    for i in range(1, N + 1):
        for j in range(1, N + 1):
            for k in range(j, N + 1):
                temp += 1

    return temp
```

∗9.16. Запишите аналитическое выражение для функции $g(N)$.

Листинг 9.8

```
def g(N):
    temp = 0

    for i in range(1, N + 1):
        for j in range(N, i - 1, -1):
            for k in range(1, j + 1):
                temp += 1

    return temp
```

∗9.17. Запишите аналитическое выражение для функции $h(N)$.

Листинг 9.9

```
def h(N):
    temp = 0

    for i in range(1, N + 1):
        for j in range(1, i + 1):
            for k in range(1, j + 1):
                for l in range(1, k + 1):
                    temp += 1

    return temp
```

Ответы, указания, решения к главе «Понятие алгоритма. Корректность алгоритмов»

9.1. *Решение.*

Пусть переменные a и b принимают следующие значения: $a = a_0$, $b = b_0$.

Предусловие: $P = \{a = a_0, b = b_0\}$, постусловие: $Q = \{a = b_0, b = a_0\}$.

Подставим значения переменных a и b в тело алгоритма $\mathcal{A}$, что приведет к следующим значениям: $temp = a_0$, $a = b_0$, $b = a_0$. В силу этого предикат $\{P\}\mathcal{A}\{Q\}$ принимает истинное значение, и тем самым доказана корректность алгоритма $swap(a, b)$.

9.6. *Ответ:* для вычисления суммы двух матриц A и B потребуются N^2 сложений для определения каждого из N^2 элементов $A + B$.

9.7. *Решение.*

Каждый из N^2 элементов матрицы $A \cdot B$ вычисляется как скалярное произведение двух векторов размера N и, соответственно, требует N сложений и N умножений. Общее число как сложений, так и умножений получается равным $N \cdot N^2 = N^3$.

9.8. *Решение.*

Тело цикла по переменной k можно переписать в виде

```
C[i][j] = A[i][0] * B[0][j]

for k in range(1, len(B)):
    C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j]
```

Число сложений уменьшится до $N^3 - N^2$, число умножений не изменится.

9.9. *Решение.*

Как известно, число операций умножения, необходимых для вычисления произведения матриц размера $n_1 \times n_2$ и $n_2 \times n_3$, равно $n_1 n_2 n_3$. (Напомним, что произведение двух матриц определено, если количество столбцов первой из них совпадает с количеством строк второй.) В силу ассоциативности операции умножения произведение $A_1 A_2 A_3$ может быть вычислено двумя способами: $(A_1 A_2) A_3$ и $A_1 (A_2 A_3)$.

В первом случае потребуется $50 \cdot 25 \cdot 30 + 50 \cdot 30 \cdot 10 = 52\,500$ умножений, во втором — $25 \cdot 30 \cdot 10 + 50 \cdot 25 \cdot 10 = 20\,000$. Итак, минимальное число операций умножения, необходимых для вычисления элементов матрицы $A_1 A_2 A_3$ стандартным алгоритмом, равно $20\,000$.

Примечание. Существует эффективный алгоритм определения порядка умножений в произведении $A_1 A_2 \dots A_n$, $n > 2$, с минимальным числом операций [2].

9.10. *Ответ:* 7 500.

9.12. *Решение.*

Для вычисления $W[i,j]$ в строке с номером 14 (см. Листинг 9.1 на стр. 403) требуются две логические операции. Поскольку данная строка выполняется $N \times N \times N = N^3$ раз, где N — размер матрицы смежности орграфа, то полное число операций для получения M^* равно $2N^3$.

9.13. *Ответ:* см. ответ к упражнению **5.68**.

9.15. *Ответ:* $f(N) = \dfrac{N^2(N+1)}{2}$.

9.16. *Ответ:* $g(N) = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

9.17. *Ответ:* $h(N) = \dfrac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{24}$.

Глава 10

Машина Тьюринга

Для формализации понятия алгоритма Тьюрингом[1] была предложена математическая модель вычислительной машины [16]. **Машина Тьюринга** — абстрактное вычислительное устройство, состоящее из ленты, считывающей и печатающей головки и управляющего устройства.

Рассмотрим более подробно отдельные элементы машины Тьюринга [22].

1. **Лента** разделена на одинаковые ячейки и предполагается неограниченной в обе стороны. Другими словами, число ячеек в каждый конкретный момент времени конечно, но при необходимости их число можно увеличить.

В каждую ячейку в текущий момент времени записан один символ из конечного множества $\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, $m \geqslant 1$. Данное множество называется **алфавитом**, или, более точно, **внешним алфавитом**, а его элементы называются **символами**. Один из элементов множества Σ, например, a_0, называется **пустым** символом.

2. **Считывающая и печатающая головка** перемещается вдоль ленты и в каждый момент времени обозревает одну ячейку ленты. При этом головка считывает содержимое данной ячейки и записывает в нее некоторый символ из алфавита Σ.

3. **Управляющее устройство** в каждый момент времени находится в некотором состоянии q_i, множество всех состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, $n \geqslant 1$, называется **внутренним алфавитом**. Среди всех q_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, выделяют начальные и конечные состояния. Обычно принимают, что существует одно начальное состояние, q_1, и одно конечное, q_0. В начале работы машина Тьюринга T находится в состоянии q_1, после перехода в конечное состояние q_0 машина T завершает работу.

Элементы машины Тьюринга схематически представлены на рис. 10.1.

В зависимости от текущего состояния и символа, обозреваемого головкой, управляющее устройство изменяет свое внутреннее состояние (или остается в прежнем), выдает приказ головке напечатать в ячейке

[1] Тьюринг (Alan Mathison Turing) (1912–1954).

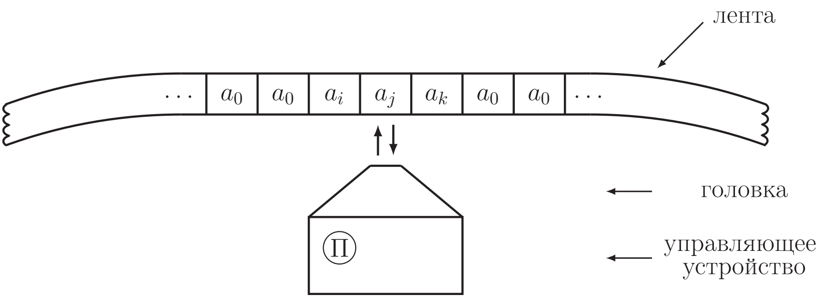


Рис. 10.1. Элементы машины Тьюринга

некоторый символ и перемещает головку на одну ячейку направо, налево или дает команду остаться на месте.

Работа управляющего устройства описывается списком пятерок вида

$$q_i a_j q_{ij} a_{ij} d_{ij}, \quad q_i, q_{ij} \in Q,\ a_j, a_{ij} \in \Sigma,\ d_{ij} \in \{L, R, S\},$$

которые называются **командами**.

Запись $q_i a_j q_{ij} a_{ij} d_{ij}$ или $q_i a_j \to q_{ij} a_{ij} d_{ij}$ означает следующее. Если машина Тьюринга T находится в состоянии q_i и обозревает ячейку, в которой записан символ a_j, то управляющее устройство меняет состояние на q_{ij}, в текущей ячейке помещает символ $a_{ij} \in \Sigma$, и отдает команду считывающей головке переместиться влево на одну ячейку ($d_{ij} = L$), вправо на одну ячейку ($d_{ij} = R$) или остаться на месте ($d_{ij} = S$). Список всех команд называется **программой** машины Тьюринга и обозначается через П. Программу удобно представлять в виде таблицы (табл. 10.1).

В верхней ее строке перечислены все состояния, в которых может находиться машина T, слева — все символы, которые могут встретиться на ленте. На пересечении строк и столбцов в ячейках таблицы указаны соответствующие команды. Вообще говоря, не для всякой пары (q_i, a_j) определена команда $q_i a_j \to q_{ij} a_{ij} d_{ij}$. Если команда, предназначенная для пары (q_i, a_j), отсутствует, то на пересечении столбца q_i и строки a_j ставится знак «—». В этом случае машина Тьюринга, находясь в состоянии q_i и обозревая символ a_j, завершает работу.

Пример 10.1. Рассмотрим машину Тьюринга T с $n + 1$ состояниями, где $n \geqslant 1$, ровно одно из которых, q_0, является конечным. Определим количество программ для T, отличающихся, по крайней мере, одной командой.

Решение.

В табл. 10.1 представлена программа П некоторой машины Тьюринга с числом состояний, равным $n + 1$. Произвольная команда машины T имеет вид:

Таблица 10.1

Программа машины Тьюринга

Π	q_1	$\ldots$	q_i	$\ldots$	q_n
a_0	$q_{10}a_{10}d_{10}$		$q_{i0}a_{i0}d_{i0}$		$q_{n0}a_{n0}d_{n0}$
$\ldots$					
a_j	$q_{1j}a_{1j}d_{1j}$		$q_{ij}a_{ij}d_{ij}$		$q_{nj}a_{nj}d_{nj}$
$\ldots$					
a_m	$q_{1m}a_{1m}d_{1m}$		$q_{im}a_{im}d_{im}$		$q_{nm}a_{nm}d_{nm}$

$$q_ia_j \to q_{ij}a_{ij}d_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant |\Sigma| - 1,$$

где $|\Sigma|$ — мощность внешнего алфавита. По правилу произведения программа Π содержит $n|\Sigma|$ команд. В каждой из них записано одно из очередных состояний $q_{ij} \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, некоторый символ внешнего алфавита a_{ij} и указание для следующего положения головки $d_{ij} \in \{L, R, S\}$, что составляет $3(n+1)|\Sigma|$ различных вариантов. Кроме того, на месте команды в таблице может стоять прочерк, что соответствует отсутствию команды. Следовательно, число программ для T равно числу размещений с повторениями $n|\Sigma|$ элементов из $3(n+1)|\Sigma| + 1$, или $(3(n+1)|\Sigma| + 1)^{n|\Sigma|}$. $\square$

Если в какой-то момент времени самая левая непустая ячейка ленты содержит символ a_i, а самая правая непустая ячейка — символ a_s, то говорят, что на ленте записано **слово** $P = a_i \ldots a_k a_l \ldots a_s$.

Далее, если в данный момент времени управляющее устройство находится в состоянии q_t и считывающая головка обозревает символ a_l слова P, то последовательность $a_i \ldots a_k q_t a_l \ldots a_s$ называют **конфигурацией** машины.

Если P — исходное слово на ленте, то в процессе работы машины Тьюринга с заданной программой Π появляются две возможности.

1. Машина T останавливается после конечного числа шагов, и на ленте окажется слово $P' = T(P)$. Тогда говорят, что машина T **применима** к слову P.

2. Машина T никогда не остановится («зациклится»). В этом случае говорят, что T к слову P **не применима**.

Пример 10.2. Рассмотрим машину Тьюринга T, которая имеет следующие состояния: q_1 (начальное), q_2, q_3 и q_0 (конечное). Пусть T работает с символами внешнего алфавита $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ согласно программе Π

П	q_1	q_2	q_3
0	$q_2 0 L$	$q_1 0 R$	$q_0 1 L$
1	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_1 0 R$

Выясним, применима ли машина T к словам $P_1 = 11$ и $P_2 = 111$. Будем считать, что считывающая и печатающая головка в начальный момент времени обозревает самую левую ячейку слова P_i, $i = 1, 2$.

Решение.

Так как первоначально T находится в состоянии q_1 и обозревает ячейку с символом «1», то выполнение первой команды $q_1 1 \to q_2 1 R$ приведет к записи в текущую ячейку символа «1», переходу T в состояние q_2 и сдвигу головки на одну ячейку вправо. После этого будет выполнена очередная команда $q_2 1 \to q_3 1 R$, затем команда $q_3 0 \to q_0 1 L$. Запишем формируемую последовательность конфигураций машины Тьюринга T:

$$q_1 11, \;\; 1q_2 1, \;\; 11q_3 0, \;\; 1q_0 11.$$

Поскольку состояние q_0 является конечным, то машина T по достижении конфигурации $1q_0 11$ закончит работу. Следовательно, машина Тьюринга T к слову $P_1 = 11$ применима.

Далее, рассмотрим ленту с записанным на ней словом P_2. Последовательность конфигураций в этом случае будет иметь вид:

$$q_1 111, \;\; 1q_2 11, \;\; 11q_3 1, \;\; 110q_1 0, \;\; 11q_2 00, \;\; 110q_1 0, \;\; 11q_2 00, \;\; \ldots$$

Ясно, что две конфигурации, а именно $110q_1 0$ и $11q_2 00$, переходят одна в другую, и за конечное число шагов машина T не закончит свою работу. В силу этого машина Тьюринга T к слову $P_2 = 111$ не применима. $\square$

Выбор представления информации на ленте обусловлен спецификой задачи. Однако представление чисел в двоичной (и, тем более, десятичной) системе счисления обычно приводит к громоздким программам. Поэтому часто натуральное число k кодируется набором из $k + 1$ единиц (**унарная система**), обозначают такую последовательность как 1^{k+1}. Число 0 кодируется одним символом «1». Последовательность нескольких чисел кодируется следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, причем $n \geqslant 1$, — некоторый вектор целых неотрицательных чисел. Слово

$$C(\boldsymbol{\alpha}) = 1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0\ldots01^{\alpha_n+1}$$

называется **кодом** вектора $\boldsymbol{\alpha}$ в алфавите $\{0, 1\}$. Другими словами, код некоторого вектора состоит из кодов его компонент, разделенных символом «0».

Будем рассматривать функции вида $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, где аргументы x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, принимают значения из $\mathbb{Z}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$:

$$f\colon \underbrace{\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0 \times \ldots \times \mathbb{Z}_0}_{n\ \text{раз}} \to \mathbb{Z}_0.$$

Машина Тьюринга T_f **вычисляет функцию** $f(\mathbf{x})$, если выполняются два свойства:

1) при условии, что $f(\mathbf{x})$ определена, выполняется равенство

$$T_f(C(\mathbf{x})) = C(f(\mathbf{x}));$$

2) при условии, что $f(\mathbf{x})$ не определена, либо $T_f(C(\mathbf{x}))$ не является кодом какого-нибудь числа из $\mathbb{Z}_0$, или же машина T_f не применима к слову $C(\mathbf{x})$.

Машина Тьюринга T_f **правильно вычисляет функцию** $f(\mathbf{x})$, если выполняются следующие свойства:

1) T_f вычисляет функцию $f(\mathbf{x})$;

2) если $f(\mathbf{x})$ не определена, машина T_f не применима к слову $C(\mathbf{x})$;

3) в начальный момент времени считывающая головка обозревает самую левую ячейку слова $C(\mathbf{x})$, а после остановки обозревает самую левую ячейку $C(f(\mathbf{x}))$.

Тезис Чёрча[1]–Тьюринга: *всякий алгоритм может быть реализован с помощью некоторой машины Тьюринга.* Как показывает опыт, любые вычислительные действия, которые может выполнить человек, могут быть представлены последовательностью действий некоторой машины Тьюринга [106, 130]. Тезис Чёрча–Тьюринга нельзя доказать, поскольку он устанавливает эквивалентность между строго определенным классом задач, решаемых машиной Тьюринга, и неформальным понятием алгоритма.

Машина Тьюринга не является единственным способом формализации понятия алгоритма. Известны аналогичные подходы, приводящие к эквивалентным результатам, среди них следует выделить **машину Поста** [73] и **нормальный алгорифм Маркова[2]** [52]. Машина Поста — абстрактная вычислительная машина, главное отличие которой от машины Тьюринга заключается в иной системе команд. Нормальный алгорифм описывает метод преобразования строк символов некоторого алфавита Σ с помощью **формул подстановки** вида $U \to V$ или $U \to \cdot V$, где U и V — два произвольных слова в Σ, называемые левой и правой частями формулы подстановки соответственно, а символ «$\cdot$» указывает на окончание работы алгорифма.

[1] Чёрч (Alonzo Church) (1903–1995).

[2] Андрей Андреевич Марков-мл. (1903–1979).

Контрольные вопросы к главе «Машина Тьюринга»

1. Дайте определение машине Тьюринга.
2. Из каких элементов состоит машина Тьюринга?
3. Дайте определения следующим терминам: внешний алфавит, внутренний алфавит, символ алфавита, пустой символ.
4. Как записать команду для машины Тьюринга?
5. Что означает высказывание «машина T применима к слову P»?
6. Опишите, как кодируется последовательность целых неотрицательных чисел в унарной системе.
7. В чем отличие между высказываниями «машина T вычисляет функцию $f(\mathbf{x})$» и «машина T правильно вычисляет функцию $f(\mathbf{x})$?
8. Сформулируйте тезис Чёрча–Тьюринга.
9. Перечислите известные альтернативные способы формализации понятия алгоритма.

Задачи к главе «Машина Тьюринга»

10.1. Пусть машина Тьюринга T задается программой П.

П	q_1	q_2
0	$q_2 0 R$	$q_1 0 R$
1	$q_2 1 R$	—

Выясните, применима ли машина T к слову P. Если да, то определите заключительную конфигурацию. Головка в начальный момент времени обозревает самую левую единицу слова P. Рассмотрите случаи:

1) $P = 1^3$;

2) $P = 1001$;

3) $P = 10001$;

4) $P = 1^4 0 1^4$.

10.2. Пусть машина Тьюринга T задается программой П.

П	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 1 S$	$q_1 1 R$	$q_0 1 L$
1	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_3 1 S$

Выясните, применима ли машина T к слову P. Если да, то определите заключительную конфигурацию. Головка в начальный момент времени обозревает самую левую единицу слова P. Рассмотрите случаи:

1) $P = 1^2$;

2) $P = 1^3$;

3) $P = 1011$;

4) $P = 1001$.

10.3. Постройте в алфавите $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ машину Тьюринга, которая применима к любому слову.

10.4. Постройте в алфавите $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ машину Тьюринга, которая не применима ни к какому слову из $\mathbb{B}$.

10.5. Постройте машину Тьюринга, которая:

1) вычисляет функцию $O(x)$, равную нулю для всех неотрицательных целочисленных значений аргумента: $O(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{Z}_0$, головка машины в начальный момент времени расположена над самой левой единицей унарного кода аргумента;

2) правильно вычисляет функцию $O(x)$.

10.6. Постройте машину Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x) = x + 1$. Головка машины в начальный момент времени расположена левее унарного кода аргумента.

10.7. Постройте машину Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x,y) = x + y$. Головка машины в начальный момент времени расположена левее унарного кода вектора аргументов.

10.8. Постройте машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — четное,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

10.9. Постройте машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ делится на } 3, \\ 1, & \text{если } x \text{ не делится на } 3. \end{cases}$$

10.10. Постройте машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \geqslant 2, \\ \text{не определено, если } x = 0 \text{ или } x = 1. \end{cases}$$

10.11. Постройте машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

10.12. Постройте машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию

$$f(x) = \overline{\operatorname{sign}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

10.13. Постройте машину Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$. Головка машины расположена левее слова, кодирующего аргумент x.

10.14. Постройте машину Тьюринга, которая вычисляет функцию $f(x) = \lceil x/2 \rceil$. Головка машины расположена левее слова, кодирующего аргумент x.

10.15. Постройте машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию $f(x) = 2x$.

$*$10.16. В алфавите $A_{10} = \{a_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ постройте машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $f(\alpha) = \alpha + 5$, которая определена на множестве целых неотрицательных чисел. Функция $f(\alpha)$ сопоставляет десятичной записи $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ числа α десятичную запись числа $\alpha + 5$.

$*$10.17. В алфавите $A_{10} = \{a_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ постройте машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $f(\alpha) = 5\alpha$, которая определена на множестве целых неотрицательных чисел. Функция $f(\alpha)$ сопоставляет десятичной записи $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ числа α десятичную запись числа 5α.

Ответы, указания, решения к главе «Машина Тьюринга»

10.1. *Ответ:*
1) применима, заключительная конфигурация $1q_2 11$;
2) применима, заключительная конфигурация $100q_2 1$;
3) не применима;
4) применима, заключительная конфигурация $1q_2 1^3 01^4$.

10.2. *Ответ:*
1) применима, заключительная конфигурация $1q_0 1^2$;
2) не применима;
3) применима, заключительная конфигурация $1^3 q_0 1^2$;
4) применима, заключительная конфигурация $1^2 q_0 1^2$.

10.3. *Решение.*

Ясно, что существует бесконечное число программ, удовлетворяющих условию задачи. Можно, например, предложить программу, останавливающую машину на первом прочтенном символе:

П	q_1
0	$q_0 1S$
1	$q_0 1S$

10.4. *Ответ:*

Требуемому свойству удовлетворяет, например, машина с программой

П	q_1
0	$q_1 0R$
1	$q_1 1R$

10.5. *Решение.*

1) Требуемый результат можно получить, если перемещать считывающую и печатающую головку вправо, стирая все единицы, и последним действием записать «1» и остановиться. Получаем следующую программу П:

П	q_1
0	$q_0 1S$
1	$q_1 0R$

2) Машина Тьюринга, работающая по программе П из предыдущего пункта, вычисляет $O(x)$ правильно.

10.7. *Решение.*

На ленте входные данные будут записаны в виде слова $1^{x+1}01^{y+1}$. Получить представление числа $x + y$, а именно, 1^{x+y+1}, можно таким образом: стереть первую единицу, заменить «0» между кодами аргументов x и y на «1» и в полученной последовательности стереть еще одну единицу.

П	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_1 0R$	$q_3 1L$	$q_4 0R$	—
1	$q_2 0R$	$q_2 1R$	$q_3 1L$	$q_0 0R$

10.8. *Решение.*

В начальный момент времени головка находится над самой левой единицей кода числа x. Будем перемещать головку слева направо и помещать на место «1» символы «0», чередуя состояния q_1 и q_2.

Если после исчерпания всех символов «1» управляющее устройство перешло в состояние q_1, то исходное число нечетно, и нужно поместить на ленту слово «11». Если устройство оказалось в состоянии q_2, то ставим на ленте символ «1», и на этом машина завершает работу. Программа П машины Тьюринга, правильно вычисляющей $f(x)$, приведена ниже.

П	q_1	q_2
0	$q_2 1L$	$q_0 1S$
1	$q_2 0R$	$q_1 0R$

10.9. *Указание.* См. предыдущее упражнение.

10.10. *Ответ:*

П	q_1	q_2	q_3
0	—	$q_2 0S$	$q_3 0S$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_0 1S$

10.11. *Решение.*

Будем конструировать машину Тьюринга в соответствии со следующими соображениями. Если на ленте записано слово «1», то его следует оставить без изменения, для чего введем команды

$$q_1 1 \to q_2 1R, \quad q_2 0 \to q_0 0L.$$

Если же на ленте записано слово «1^n», $n \geqslant 2$, то следует стереть все единицы до конца слова, кроме самой первой, возвратиться к первой единице и поставить еще один символ «1», чтобы получить «1^2».

Введем еще два состояния: q_3 и q_4. Находясь в состоянии q_3, машина перемещает головку до конца слова, встречает «0», переходит в состояние q_4 и возвращается к началу исходного слова. Команда $q_1 0 \to q_0 1S$ записывает последнюю единицу и останавливает машину. Полная программа машины Тьюринга, правильно вычисляющей функцию $\mathrm{sign}(x)$, приведена в таблице:

П	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_0 1S$	$q_0 0L$	$q_4 0L$	$q_4 0L$
1	$q_2 1R$	$q_3 0R$	$q_3 0R$	$q_1 1L$

10.12. *Ответ:*

П	q_1	q_2	q_3	q_4
0	—	$q_0 1L$	$q_4 0L$	$q_4 0L$
1	$q_2 1R$	$q_3 0R$	$q_3 0R$	$q_0 1S$

10.13. *Решение.*

Командой $q_1 0 \to q_1 0R$ перемещаем головку в положение над самой левой единицей кода числа x. Стираем две единицы слева, переходим в конец слова и через «барьер» в виде символа «0» ставим единицу в код формирующегося ответа. Возвращаемся влево и повторяем описанные действия до тех пор, пока все единицы кода аргумента не будут исчерпаны.

П	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
0	$q_1 0R$	$q_0 0R$	$q_0 1S$	$q_5 0R$	$q_6 1L$	$q_7 0L$	$q_2 0R$
1	$q_2 1S$	$q_3 0R$	$q_4 0R$	$q_4 1R$	$q_5 1R$	$q_6 1L$	$q_7 1L$

10.14. *Указание.* См. предыдущее упражнение.

10.15. *Решение.*

Можно предложить следующий способ решения задачи. Если аргумент x отличен от нуля, $x \neq 0$, организуем цикл по единицам, составляющим код аргумента, от самой левой до предпоследней справа. Стирая единицы, в код формирующегося ответа дописываем каждый раз по две единицы. После выхода из цикла исчерпаются все единицы кода аргумента, кроме самой левой, стираем данную последнюю единицу и приписываем одну единицу к слову на ленте.

Соответствующую программу П организуем следующим образом. В начальный момент времени головка находится над самой левой единицей кода числа x. Команда $q_1 1 \to q_2 0R$ стирает самую левую единицу и перемещает головку на одну позицию вправо. Если в обозреваемой ячейке записан символ «0», то $x = 0$, и работа заканчивается командой $q_2 0 \to q_0 1S$.

Если же в обозреваемой ячейке записан символ «1», то управляющее устройство переходит в состояние q_3 и передвигает головку до символа «0», который разделяет код аргумента и код формируемого ответа. Далее головка переходит через «барьер», и в конце кода ответа командами

$$q_4 0 \to q_5 1R, \quad q_5 0 \to q_6 1L$$

помещаем на ленту две единицы.

Возвращаем головку назад влево, переводим управляющее устройство в состояние q_1 и повторяем описанные операции до тех пор, пока в коде, расположенном слева от «барьера», не останется один символ «1». Стираем его и на место барьера помещаем «1», это осуществляется с помощью состояний q_8 и q_9.

В итоге на ленте получим код «1^{2n+1}», соответствующий числу $2n$.

П	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
0	$q_0 1S$	$q_0 1S$	$q_4 0R$	$q_5 1R$	$q_6 1L$	$q_7 0L$	$q_1 0R$	$q_5 0R$	$q_1 0R$
1	$q_2 0R$	$q_3 1R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_1 0R$	$q_6 1L$	$q_8 1L$	$q_9 1L$	$q_9 1L$

10.16. *Решение.*

В начальный момент времени машина Тьюринга T находится в конфигурации $q_1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Переместим головку вправо, для этого введем команды

$$q_1 k \to q_1 kR, \quad k = 0, \ldots, 9.$$

Машина должна остановиться над последним символом:

$$q_1 a_0 \to q_2 a_0 L.$$

Теперь осуществляем сложение. Если α оканчивается на одну из цифр $0, 1, 2, 3, 4$, то команды выглядят следующим образом:

$$q_2 k \to q_3(k+5)L, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Осталось возвратить головку в положение над первой цифрой числа:

$$q_3 k \to q_3 kL, \quad k = 0, \ldots, 9, \quad q_3 a_0 \to q_0 a_0 R.$$

Далее рассмотрим случаи, когда последняя цифра α_n числа равна 5, 6, 7, 8 или 9. Так как $5+5=10$, $6+5=11$, $7+5=12$, $8+5=13$ и $9+5=14$, то записываем команды

$$\begin{aligned}
&q_2 5 \to q_4 0L,\\
&q_2 6 \to q_4 1L,\\
&q_2 7 \to q_4 2L,\\
&q_2 8 \to q_4 3L,\\
&q_2 9 \to q_4 4L.
\end{aligned}$$

Но в этом случае необходимо к α_{n-1} прибавить единицу:

$$q_4 k \to q_3(k+1)L,\ k=0,\ldots,8, \quad q_4 9 \to q_4 0L, \quad q_4 a_0 \to q_0 1S.$$

Последняя команда обеспечивает выход из образовавшегося цикла.

Полностью программа машины Тьюринга, правильно вычисляющей функцию $f(\alpha)$, приведена в таблице:

П	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	q_2a_0L	q_30L	q_0a_0R	q_01S
0	q_10R	q_35L	q_30L	q_31L
1	q_11R	q_36L	q_31L	q_32L
2	q_12R	q_37L	q_32L	q_33L
3	q_13R	q_38L	q_33L	q_34L
4	q_14R	q_39L	q_34L	q_35L
5	q_15R	q_40L	q_35L	q_36L
6	q_16R	q_41L	q_36L	q_37L
7	q_17R	q_42L	q_37L	q_38L
8	q_18R	q_43L	q_38L	q_39L
9	q_19R	q_44L	q_39L	q_40L

10.17. *Ответ:*

Приведенная ниже программа реализует стандартный алгоритм умножения. С помощью состояния q_1 считывающая и печатающая головка машины Тьюринга переводится в положение над крайним правым символом десятичного кода числа α. Состояния q_i, где $2 \leqslant i \leqslant 6$, изменяют содержимое ячеек ленты в соответствии с таблицей умножения на 5. При этом состояния q_3, q_4, q_5 и q_6 введены для контроля за переносом из предыдущих разрядов десятичной записи аргумента α.

П	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a_0	q_2a_0L	q_0a_0R	q_01S	q_02S	q_03S	q_04S
0	q_10R	q_20L	q_21L	q_22L	q_23L	q_24L
1	q_11R	q_25L	q_26L	q_27L	q_28L	q_29L
2	q_12R	q_30L	q_31L	q_32L	q_33L	q_34L
3	q_13R	q_35L	q_36L	q_37L	q_38L	q_39L
4	q_14R	q_40L	q_41L	q_42L	q_43L	q_44L
5	q_15R	q_45L	q_46L	q_47L	q_48L	q_49L
6	q_16R	q_50L	q_51L	q_52L	q_53L	q_54L
7	q_17R	q_55L	q_56L	q_57L	q_58L	q_59L
8	q_18R	q_60L	q_61L	q_62L	q_63L	q_64L
9	q_19R	q_65L	q_66L	q_67L	q_68L	q_69L

Глава 11

Асимптотический анализ

Важной задачей анализа алгоритмов является оценка числа операций, выполняемых алгоритмом на определенном классе входных данных. Точное значение количества элементарных операций здесь не играет существенной роли, так как оно зависит от программной реализации алгоритма, архитектуры компьютера и других факторов. Показателем эффективности алгоритма считается скорость роста этой величины при возрастании объема входных данных [2, 48].

Для анализа эффективности алгоритмов необходимо оценивать время работы компьютера, решающего поставленную задачу, а также объем используемой при этом памяти. Оценку времени работы вычислительной системы получают обычно путем подсчета элементарных операций, выполняемых при вычислениях (такие операции называют **базовыми**). В предположении, что одна элементарная операция совершается за строго определенное время, функцию $f(n)$, определяемую как число операций при вычислениях на входных данных размера n, называют **функцией временно́й сложности** [48].

Введем обозначение для множества положительных вещественных чисел $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ и рассмотрим функции $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

Выделяют три класса функций по отношению к скорости роста $g(n)$.

1. *Класс функций, растущих не быстрее* $g(n)$, обозначается через $O(g(n))$ и определяется как

$$O(g(n)) = \{f(n)\colon \exists c \in \mathbb{R}^+,\, n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ такие, что для всех } \ n \geqslant n_0 \ \text{выполняется } f(n) \leqslant cg(n)\}.$$

Говорят, что функция $f(n)$ принадлежит классу $O(g(n))$ (читается «о большое от g»), если для всех значений аргумента n, начиная с порогового значения $n = n_0$, выполняется неравенство $f(n) \leqslant cg(n)$ для некоторого положительного c.

Запись $f(n) \in O(g(n))$ можно прочитать как «функция g **мажорирует** функцию f».

2. *Класс функций, растущих, по крайней мере, так же быстро, как* $g(n)$, обозначается через $\Omega(g(n))$ и определяется как

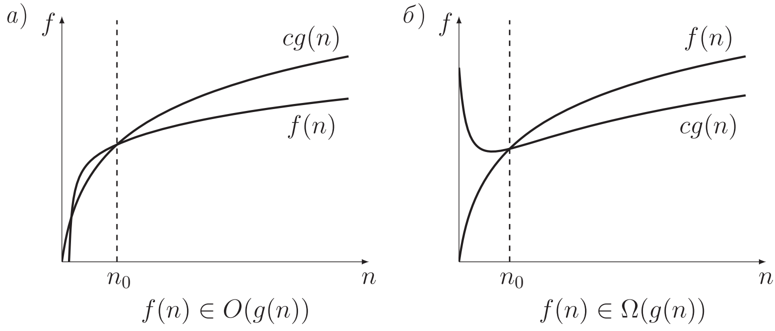


Рис. 11.1. Иллюстрация обозначений $f \in O(g(n))$ и $f \in \Omega(g(n))$

$$\Omega(g(n)) = \{f(n)\colon \exists c \in \mathbb{R}^+,\, n_0 \in \mathbb{N} \;\text{ такие, что для всех }\; n \geqslant n_0 \\ \text{выполняется } f(n) \geqslant cg(n)\}.$$

Говорят, что $f(n)$ принадлежит классу $\Omega(g(n))$ (читается «омега большое от g»), если для всех значений аргумента n, начиная с порогового значения $n = n_0$, выполняется неравенство $f(n) \geqslant cg(n)$ для некоторого положительного c.

3. *Класс функций, растущих с той же скоростью, что и* $g(n)$, обозначается через $\Theta(g(n))$ и определяется как пересечение $O(g(n))$ и $\Omega(g(n))$.

Говорят, что $f(n)$ принадлежит классу $\Theta(g(n))$ (читается «тета большое от g»), если

$$f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n)).$$

Введенные определения проиллюстрированы на рис. 11.1 и 11.2, где для наглядности аргумент n принят вещественным.

Поскольку $O(g(n))$ обозначает множество функций, растущих не быстрее функции $g(n)$, то для указания принадлежности данному множеству используют запись $f(n) \in O(g(n))$. Нередко в литературе встречается другое обозначение: $f(n) = O(g(n))$, знак равенства в котором понимается условно, а именно, в смысле принадлежности множеству. На вышеперечисленные классы множеств ссылаются как на **«O-символику»**.

Укажем некоторые важные свойства асимптотических соотношений [2, 46].

Пусть $f_1,\, f_2,\, g_1,\, g_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Тогда если $f_1(n) = O(g_1(n))$ и $f_2(n) = O(g_2(n))$, то

1) $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$;

2) $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n)g_2(n))$.

Свойства классов $O(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$ обобщены в табл. 11.1.

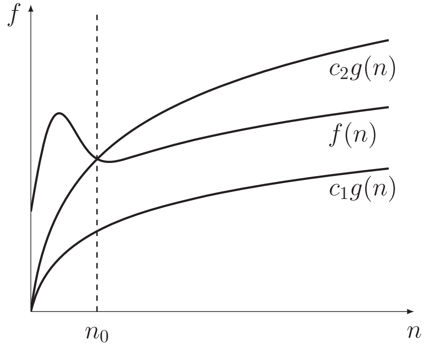


Рис. 11.2. Иллюстрация обозначения $f \in \Theta(g(n))$

Лемма (о скорости роста полинома). *Полином вида*

$$p(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_d > 0$, *принадлежит множеству* $\Theta(n^d)$.

Согласно приведенной лемме, асимптотическое поведение полиномиальной функции полностью определяется степенью полинома.

При анализе алгоритмов часто возникает задача получить приближение для функции «факториал», в таких случаях удобно применять **формулу Стирлинга**[1]:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $e = 2{,}718281828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

При сравнении скорости роста двух заданных функций удобно пользоваться не определениями множеств O, Ω и Θ, а следствием определений, основанным на вычислении предела рассматриваемых функций при бесконечно больших значениях аргумента [46].

Пусть требуется сравнить скорости асимптотического роста функций f и g, $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Для этого вычислим предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$.

Возможны четыре случая:

1. $L = 0$. Тогда $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) \neq \Theta(g(n))$.

[1] Стирлинг (James Stirling) (1692–1770).

Таблица 11.1

Свойства классов $O(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$

Рефлексивность
$f(n) = O(f(n))$ $f(n) = \Theta(f(n))$ $f(n) = \Omega(f(n))$
Симметричность
$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \Theta(f(n))$
Транзитивность
$f(n) = O(g(n))$ **и** $g(n) = O(h(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(h(n))$ $f(n) = \Theta(g(n))$ **и** $g(n) = \Theta(h(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = \Theta(h(n))$ $f(n) = \Omega(g(n))$ **и** $g(n) = \Omega(h(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = \Omega(h(n))$
Перестановка f и g
$f(n) = O(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \Omega(f(n))$

2. $L = c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}^+$. Тогда $f(n) = \Theta(g(n))$.

3. $L = \infty$. Тогда $f(n) = \Omega(g(n))$ и $f(n) \neq \Theta(g(n))$.

4. Предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ не существует. В этом случае данным методом сравнить порядок роста функций $f(n)$ и $g(n)$ нельзя.

При вычислении пределов можно пользоваться **правилом Лопиталя**[1], согласно которому *предел отношения бесконечно больших при $n \to \infty$ функций (если рассматривать в качестве области определения множество $\mathbb{R}^+$) сводится к пределу отношения их производных:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Данное соотношение справедливо, если функции $f(n)$ и $g(n)$ дифференцируемы на интервале (c, ∞) для некоторого c, $g'(x) \neq 0$ для всех

[1] Лопиталь (Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital) (1661–1704).

точек $x \in (c, \infty)$ и существует предел производных $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(n)}{g'(n)}$ (конечный или бесконечный).

Обоснование правила Лопиталя приводится во всех достаточно полных курсах математического анализа, например [33, 75].

Для широкого и важного в практическом отношении класса рекуррентных соотношений вида $T(n) = aT\left(\dfrac{n}{b}\right) + f(n)$, где a, b — const и $f(n)$ — произвольная положительная функция, асимптотическую оценку скорости роста их решения $T(n)$ можно получить универсальным методом, основанным на следующей теореме.

Основная теорема о рекуррентных соотношениях (Бентли, Хакен, Сакс[1]). *Пусть* $T(n) = aT\left(\dfrac{n}{b}\right) + f(n)$, *где под* $\dfrac{n}{b}$ *понимается либо* $\left\lfloor \dfrac{n}{b} \right\rfloor$, *либо* $\left\lceil \dfrac{n}{b} \right\rceil$, $a \geqslant 1$, $b > 1$. *Тогда:*

1) *если* $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$, *то* $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;

2) *если* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, *то* $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$;

3) *если* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и* $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leqslant cf(n)$ *для некоторого* $c < 1$ *и больших* n (**условие регулярности**), *то* $T(n) = \Theta(f(n))$.

Эта теорема была сформулирована в работе [89], доступное изложение доказательства можно найти в фундаментальном руководстве [2].

Следует отметить, что существуют рекуррентные соотношения вида $T(n) = aT\left(\dfrac{n}{b}\right) + f(n)$, для которых рассмотренный универсальный метод оказывается неприменим, в этом случае следует искать другой способ оценки скорости роста функции $T(n)$.

Примечание. Обозначение «$O(f)$» было введено Бахманном[2] в учебнике [87] по теории чисел. Заметим, что иногда, особенно в иностранной литературе, символы «$O(f)$» называют **символами Ландау**[3] [105]. Современное использование O-символики в анализе алгоритмов приписывается Кнуту[4] [2].

Методы асимптотического анализа применяют для математически корректной оценки времени выполнения алгоритма и используемой памяти в зависимости от размерности задачи.

---

[1] Бентли (Jon Louis Bentley) (род. 1953), Хакен (Dorothea Haken), Сакс (James Benjamin Saxe).

[2] Бахманн (Paul Gustav Heinrich Bachmann) (1837–1920).

[3] Ландау (Edmund Georg Hermann Landau) (1877–1938).

[4] Кнут (Donald Ervin Knuth) (род. 1938).

При анализе алгоритмов оценивают число **базовых операций** и принимают, что для выполнения каждой из указанных ниже операций требуется время $\Theta(1)$ [123].

1. Бинарные арифметические операции ($+$, $-$, $*$, $/$) и операции сравнения вещественных чисел ($<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, $=$, $\neq$).
2. Логические операции ($\vee$, $\wedge$, $\bar{}$, $\oplus$).
3. Операции ветвления.
4. Вычисление значений элементарных функций при относительно небольших значениях аргументов.

Для различных входных данных время работы алгоритма, вообще говоря, может отличаться. Выделяют три случая, позволяющих судить об эффективности алгоритма в целом.

1. Наилучший случай

Наилучшим случаем для алгоритма является такой набор входных данных, на котором время выполнения минимально. На таком наборе число базовых операций $B(n)$ определяется по формуле

$$B(n) = \min_{\substack{\text{входные}\\ \text{данные}}} T(n).$$

2. Наихудший случай

Наихудшим случаем для алгоритма является такой набор входных данных, на котором время выполнения максимально:

$$W(n) = \max_{\substack{\text{входные}\\ \text{данные}}} T(n).$$

3. Средний случай

Анализ среднего случая предполагает разбиение множества всех возможных входных данных на непересекающиеся классы таким образом, чтобы для каждого из полученных классов число базовых операций было одним и тем же. Затем вычисляется математическое ожидание числа операций на основе распределения вероятностей для входных данных:

$$A(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) t_i(n),$$

где n — размер входных данных, k — число классов разбиения, $p_i(n)$ — вероятность того, что входные данные принадлежат классу с номером i, $t_i(n)$ — количество базовых операций, выполняемых алгоритмом на входных данных из класса с номером i.

Напомним, что **вероятность** p некоторого события есть вещественное число $0 \leqslant p \leqslant 1$. Если общее число исходов равно N и все исходы равновероятны, то вероятность реализации каждого равна $p = \dfrac{1}{N}$ [54].

Примечание. Обозначения эффективности в описанных трех случаях взяты от первых букв английских слов *best* (наилучший), *worse* (наихудший) и *average* (средний) соответственно.

В табл. 11.2 приведены наиболее часто встречающиеся на практике значения асимптотических сложностей с указанием примеров алгоритмов, имеющих соответствующую сложность в среднем случае.

Таблица 11.2

Асимптотическая сложность алгоритмов

Асимптотическая сложность	Скорость роста	Примеры алгоритмов
$O(1)$	Константа, не зависящая от размера входных данных	Поиск в хеш-таблице
$O(\log_2 n)$	Логарифмическая	Двоичный поиск
$O(n)$	Линейная	Последовательный поиск
$O(n \log_2 n)$	*Общепринятого названия нет*	Сортировка слиянием
$O(n^2)$	Квадратичная	Сортировка вставками
$O(n^3)$	Кубическая	Стандартное умножение матриц
$O(2^n)$	Экспоненциальная	Полный перебор
$O(n!)$	Факториальная	Генерация всех перестановок

Контрольные вопросы к главе «Асимптотический анализ»

1. Какие операции используют для оценки времени работы вычислительной системы?

2. Дайте определение функции временно́й сложности.

3. Поясните смысл асимптотических обозначений $O(f(n))$, $\Theta(f(n))$, $\Omega(f(n))$.

4. Сформулируйте лемму о скорости роста полинома.

5. Запишите формулу Стирлинга.

6. Перечислите основные свойства классов $O(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$.

7. Как применяют правило Лопиталя для сравнения скорости роста функций?
8. Сформулируйте основную теорему о рекуррентных соотношениях.
9. Поясните, что означает высказывание: «для выполнения операции требуется время $\Theta(1)$».
10. Какие три случая позволяют судить об эффективности алгоритма в целом?
11. Расскажите об асимптотической сложности основных алгоритмов.

Задачи к главе «Асимптотический анализ»

11.1. Докажите, что $n + 1 \in O(n)$.

11.2. Докажите, что $5n^3 + 7n^2 - n + 7 \in O(n^3)$.

11.3. Пусть $f(n) = \cos n + 3$. Докажите, что $f(n) \in \Theta(1)$.

11.4. Пусть $f(n) = \sin 3n + 2$. Докажите, что $f(n) \in O(1)$.

11.5. Пусть $f(n) = \dfrac{\sin^2 3n + 2}{2}$. Докажите, что $f(n) \in \Omega(1)$.

11.6. Пусть $f(n) = \sin^4 n + \cos^4 n$. Докажите, что $f(n) \in \Theta(1)$.

11.7. Для заданных функций f и g проверьте, выполняется ли $f \in O(g)$:
1) $f(n) = 3n^2 + 2n + 10, \quad g(n) = n^3 + 5$;
2) $f(n) = n^3 + \sqrt{n}, \quad g(n) = n^2 - \sqrt{n}$;
3) $f(n) = \sqrt{3n}, \quad g(n) = \sqrt{n^3}$;
4) $f(n) = n^{7/5} + 3n, \quad g(n) = \sqrt{n^7}$.

11.8. Для заданных функций f и g проверьте, выполняется ли $f \in \Omega(g)$:
1) $f(n) = 3n^2 - 5, \quad g(n) = n(n + 2)$;
2) $f(n) = n^3 + \sqrt{n}, \quad g(n) = n(1 + n)$;
3) $f(n) = n^{1/3}, \quad g(n) = \sqrt{n^3}$;
4) $f(n) = n^2(1 + \sqrt{n}), \quad g(n) = n^2 - n$.

$*$11.9. Поясните, что означают записи

1) $f \notin O(g)$;

2) $f \notin \Omega(g)$.

$*$11.10. Докажите, что отношение $R_O = \{(f, g)\colon O(f) = O(g)\}$ на множестве вещественнозначных функций от натурального аргумента $\{f\colon f \in O(F)\}$, где $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ — некоторая функция, является отношением эквивалентности.

$*$11.11. На экзамене по курсу дискретной математики и математической логики студент утверждает, что для двух произвольно взятых функций $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ и $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ либо $f \in O(g)$, либо $g \in O(f)$. Прав ли он?

11.12. Рассмотрим произвольные функции $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Верно ли, что $(f \circ g)(n) \in \Theta\left((g \circ f)(n)\right)$?

11.13. Оцените асимптотическое поведение следующих сумм:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} i$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$.

$*$11.14. Получите асимптотическую оценку $\sum\limits_{i=1}^{n} i^d$, где $d = \text{const}$, $d > -1$.

$*$11.15. Оцените асимптотическое поведение суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$.

11.16. Оцените асимптотическое поведение биномиальных коэффициентов $(n > 1)$:

1) $C(n, 1)$;

2) $C(n, 2)$.

11.17. Используя формулу Стирлинга, докажите следующую оценку:

$$C(2n, n) = \Theta(4^n n^{-1/2}).$$

11.18. Используя формулу Стирлинга, оцените значение выражения

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ n \in \mathbb{N},$$

при больших n.

11.19. Получите асимптотическую оценку для чисел Каталана $\mathcal{C}_n$ $(n \geqslant 0)$.

11.20. Оцените асимптотическую скорость роста функции $q\colon \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \to \mathbb{R}^+$, определяемой формулой $q(N) = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{N}$.

11.21. Оцените асимптотическую скорость роста биномиального коэффициента $C(n, \varepsilon n)$, где $0 < \varepsilon < 1$, εn — целое, выразив ответ через функцию $H(\varepsilon) = -\varepsilon \log_2 \varepsilon - (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)$. (Функция $H(\varepsilon)$ называется двоичной энтропией, binary entropy function, и имеет важное значение в теории информации [94].)

11.22. Получите асимптотическую оценку решения нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = 1 + \dfrac{n-1}{a_{n-1}}, & n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

$*$**11.23.** Получите асимптотическую оценку решения нелинейного рекуррентного соотношения

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}, & n > 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

11.24. Докажите, что любая положительная полиномиальная функция возрастает быстрее, чем любая степень логарифма, или, другими словами, что

$$\log^k n = O(f(n)) \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{R}^+,$$

где $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, $a_d > 0$, $a_i = \text{const}$, $i = 0, 1, \ldots, d$, $d \in \mathbb{N}$.

11.25. Докажите, что любая показательная функция с основанием $c > 1$ возрастает быстрее, чем полиномиальная функция, или, другими словами, что

$$c^n = \Omega(f(n)) \quad \text{для всех} \quad c \in \mathbb{R}^+,\ c > 1,$$

где $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, $a_d > 0$, $a_i = \text{const}$, $i = 0, 1, \ldots, d$, $d \in \mathbb{N}$.

11.26. Верно ли, что $\lfloor \log_2 \log_2(n) \rfloor! \in \Omega(\log_2^k n)$ для любого $k \in \mathbb{N}$?

11.27. Расположите функции в порядке увеличения скорости роста:

$$n^3 + \log_2 n;\ \ 2^{n-1};\ \ n \log_2 n;\ \ 6;\ \ \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

11.28. Расположите функции

$$\sqrt{n};\ \ 7n - 2n^2 + \frac{1}{10}n^4;\ \ \sqrt{n} + \log_2(n);\ \ n^2/\log_2 n;\ \ e^{4\ln n}$$

в порядке увеличения скорости роста. Отдельно выделите группы функций, растущих с одинаковой скоростью.

11.29. Расположите функции

$$2^{2^n-1};\quad 2^{2n};\quad 2^{n^2};\quad 2^{2^{n-1}};\quad 2^{2^n-1/n};\quad 2^{2^{\log_2 n+1}}$$

в порядке увеличения скорости роста. Отдельно выделите группы функций, растущих с одинаковой скоростью.

11.30. Сравнение скоростей роста функций

Расположите функции

$$\begin{array}{cccccc}
(\sqrt{2})^{\log_2 n}; & n^2; & n!; & \lfloor \log_2 n \rfloor !; & \left(\dfrac{3}{4}\right)^n; & n^3; \\
(\log_2 n)^2; & \log_2(n!); & 2^{2^n}; & n^{1/\log_2 n}; & \ln\ln n; & n^3 2^n; \\
n^{\log_2\log_2 n}; & \ln n; & 2; & 2^{\log_2 n}; & (\log_2 n)^{\log_2 n}; & e^n; \\
4^{\lfloor \log_2 n \rfloor}; & \sqrt{\log_2 n}; & 2^{\sqrt{2\log_2 n}}; & n\log_2 n; & 2^n; & n
\end{array}$$

в порядке увеличения скорости их асимптотического роста. Отдельно выделите группы функций, растущих с одинаковой скоростью.

11.31. Найдите асимптотическую оценку скорости роста решений следующих рекуррентных соотношений:

1) $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + \sqrt{n}$;

2) $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n$;

3) $T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^2$.

11.32. Найдите асимптотическую оценку скорости роста решений следующих рекуррентных соотношений:

1) $T(n) = 3T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n$;

2) $T(n) = 3T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^{\log_2 3}$;

3) $T(n) = 3T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^3$.

11.33. Найдите асимптотическую оценку скорости роста решений следующих рекуррентных соотношений:

1) $T(n) = 5T\left(\dfrac{n}{8}\right) + \sqrt[3]{n}$;

2) $T(n) = 5T\left(\dfrac{n}{8}\right) + n^{\log_8 5}$;

3) $T(n) = 5T\left(\dfrac{n}{8}\right) + n^4 \log_2^4 n$.

11.34. Время работы алгоритма умножения матриц размера $n \times n$, разработанного **Штрассеном**[1], определяется рекуррентным соотношением [135]

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2).$$

Оцените время работы алгоритма Штрассена.

11.35. Существует более общая формулировка основной теоремы, применимая для несколько более широкого класса рекуррентных соотношений [2].

Основная теорема (вторая форма). *Пусть* $T(n) = aT\left(\dfrac{n}{b}\right) + f(n)$, *где под* $\dfrac{n}{b}$ *понимается либо* $\left\lfloor\dfrac{n}{b}\right\rfloor$, *либо* $\left\lceil\dfrac{n}{b}\right\rceil$, $a \geqslant 1$, $b > 1$. *Тогда:*

1) *если* $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ *для* $\varepsilon > 0$, *то* $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$;

2) *если* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2^k n)$ *для некоторого неотрицательного* $k \geqslant 0$, *то* $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log_2^{k+1} n\right)$;

3) *если* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ *для* $\varepsilon > 0$ *и для функции* $f(n)$ *выполняется условие регулярности, то* $T(n) = \Theta\left(f(n)\right)$.

Пользуясь приведенной формулировкой теоремы, найдите асимптотическую оценку скорости роста решений следующих рекуррентных соотношений.

1) $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{4}\right) + n\log_2 n$;

2) $T(n) = 5T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^{\log_2 5} \log_2^5 n$;

3) $T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^2 \log_2^2 n$.

---

[1] Штрассен (Volker Strassen) (род. 1936).

∗11.36. Расположите функции $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, $f_4(n)$, заданные следующими рекуррентными соотношениями:

$$f_1(n) = 2f_1\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n\log_2 n, \quad f_1(1) = 1;$$

$$f_2(n) = f_2(n-2) + 2\log_2 n, \quad f_2(1) = f_2(2) = 1;$$

$$f_3(n) = 3f_3\left(\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right), \quad f_3(1) = 1;$$

$$f_4(n) = f_4\left(\left\lfloor \frac{n}{2} + \sqrt{n} - 1 \right\rfloor\right) + 1, \quad f_4(1) = 1,$$

в порядке увеличения скорости их асимптотического роста.

Ответы, указания, решения к главе «Асимптотический анализ»

11.1. *Доказательство.*

Необходимо доказать, что существует положительная постоянная c такая, что, начиная с некоторого номера n_0, выполняется неравенство $n+1 \leqslant cn$, или $(c-1)n - 1 \geqslant 0$.

Положим $c = 2$, тогда, начиная с $n_0 = 1$, последнее неравенство верно. Значит, $n + 1 \in O(n)$.

11.2. *Доказательство.*

Докажем, что существует постоянная c такая, что, начиная с некоторого номера n_0, выполняется неравенство $5n^3 + 7n^2 - n + 7 \leqslant cn^3$, или $(c-5)n^3 - 7n^2 + n - 7 \geqslant 0$.

Пусть $c = 6$, тогда неравенство $(c-5)n^3 - 7n^2 + n - 7 \geqslant 0$ перепишем в виде

$$n^3 - 7n^2 + n - 7 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (n^2+1)(n-7) \geqslant 0.$$

Полученное неравенство выполняется для всех $n \geqslant n_0$, $n_0 = 7$. Значит, $5n^3 + 7n^2 - n + 7 \in O(n^3)$.

11.3. *Доказательство.*

На всей области определения функции $f(n) = \cos n + 3$ выполняется неравенство

$$2 \cdot 1 \leqslant \cos n + 3 \leqslant 4 \cdot 1 \;\Rightarrow\; f(n) \in \Theta(1).$$

11.7. *Ответ:* принадлежность $f \in O(g)$ выполняется для функций из пунктов 1), 3) и 4).

11.8. *Ответ:* принадлежность $f \in \Omega(g)$ выполняется для функций из пунктов 1), 2) и 4).

11.10. *Доказательство.*

Отношение R_O будет отношением эквивалентности, если оно удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Проверим выполнение перечисленных условий.

1. Рефлексивность.

Если $f = g$, то выполняется равенство $O(f) = O(g)$, и пара (f, f) принадлежит R_O.

2. Симметричность.

Если $(f, g) \in R_O$, то $O(g) = O(f)$, следовательно, $(g, f) \in R_O$.

3. Транзитивность.

Пусть $(f, g) \in R_O$ и $(g, h) \in R_O$. Проверим, выполняется ли условие $(f, h) \in R_O$:

$$\begin{cases} (f, g) \in R_O \Rightarrow O(f) = O(g), \\ (g, h) \in R_O \Rightarrow O(g) = O(h) \end{cases} \Rightarrow \ O(f) = O(h).$$

Значит, $(f, h) \in R_O$. Отношение R_O рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

11.11. *Указание.*

Рассмотрите функции

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно}, \\ n, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases} \quad \text{и} \quad g(n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ четно}, \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

11.12. *Решение.*

Контрпример вида $f(n) = n^2$, $g(n) = 2^n$ демонстрирует, что $(f \circ g)(n) = (2^n)^2$, $(g \circ f)(n) = 2^{n^2}$, и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^2}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n-n^2} = 0.$$

Следовательно, утверждение $(f \circ g)(n) \in \Theta\left((g \circ f)(n)\right)$ в общем случае неверно.

11.13. *Ответ:*

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$.

11.14. *Решение.*

Рассмотрим оценку сверху. Сумма содержит n слагаемых, не превосходящих n^d. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} i^d \leqslant n \cdot n^d = n^{d+1},$$

что влечет

$$\sum_{i=1}^{n} i^d = O(n^{d+1}).$$

Далее необходимо осуществить оценку снизу:

$$\sum_{i=1}^{n} i^d = \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} i^d + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} i^d \geqslant \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} i^d.$$

Последняя сумма $\sum\limits_{i=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} i^d$ содержит $n - \lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$ слагаемых, каждое из которых не меньше величины $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)^d$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} i^d \geqslant \lceil n/2 \rceil (\lfloor n/2 \rfloor + 1)^d \geqslant \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^d = \frac{n^{d+1}}{2^{d+1}},$$

откуда следует равенство

$$\sum_{i=1}^{n} i^d = \Omega(n^{d+1}).$$

Окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} i^d = O(n^{d+1}),\ \ \sum_{i=1}^{n} i^d = \Omega(n^{d+1}) \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} i^d = \Theta(n^{d+1}).$$

11.15. *Решение.*
Для невозрастающей функции $f(n)$ верно неравенство

$$\sum_{i=a+1}^{b} f(i) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=a}^{b-1} f(i),$$

которое непосредственно следует из геометрического смысла определения интеграла кусочно-гладкой функции как площади соответствующей криволинейной трапеции. В нашем случае $f(n) = 1/n$.

Пусть $a = 1$, $b = n + 1$. Тогда

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

или

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Чтобы найти верхнюю оценку, положим $a = 1$, $b = n$ (непосредственно подставить $a = 0$ нельзя, поскольку соответствующий интеграл расходится):

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx.$$

Из последнего неравенства следует

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leqslant 1 + \ln n \leqslant 2\ln n.$$

В итоге получаем требуемую оценку $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} = \Theta(\ln n)$.

Примечание. Приведем более точную оценку для асимптотического поведения гармонических чисел:

$$H_n = \ln n + \gamma + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

где $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$ — **постоянная Эйлера** [26].

11.16. *Ответ:*

1) $C(n,1) = \Theta(n)$;
2) $C(n,2) = \Theta(n^2)$.

11.17. *Доказательство.*
По определению биномиального коэффициента $C(2n,n)$ получим:

$$C(2n,n) = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}e^{-2n}\left(1+\Theta(\frac{1}{n})\right)}{\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}(1+\Theta(\frac{1}{n}))\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi n}} \cdot 2^{2n} \cdot \frac{1+\Theta(\frac{1}{n})}{\left(1+\Theta(\frac{1}{n})\right)^2}.$$

Найдется такое $c \in \mathbb{R}^+$, что $1+\Theta(\frac{1}{n}) \leqslant 1 + c/n$, начиная с некоторого n_0. Знаменатель также легко оценить: $\left(1+\Theta(\frac{1}{n})\right)^2 > 1$. Следовательно, имеет место сравнение

$$\frac{1+\Theta(\frac{1}{n})}{\left(1+\Theta(\frac{1}{n})\right)^2} \leqslant \frac{1+c/n}{1} = 1 + \Theta\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Окончательно получаем

$$C(2n,n) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot 2^{2n} \cdot \left(1 + \Theta\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = \Theta(4^n n^{-1/2}).$$

11.18. *Ответ:*

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1 + \Theta\Big(\frac{1}{n}\Big)\right).$$

11.19. *Ответ:* $\mathcal{C}_n = \Theta(n^{-3/2}4^n)$.

11.20. *Решение.*

Функция $q(N)$ при $N > 1$ равна $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{N} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(\pi/N)}$ и, следовательно, монотонно возрастает при $N \to \infty$.

Путем вычисления предела отношения функций сравним асимптотическую скорость роста функций $q(N)$ и $f(N) = N$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{q(N)}{f(N)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\operatorname{tg}(\pi/N)} = \lim_{N\to\infty}\frac{N^{-1}}{\operatorname{tg}(\pi/N)}.$$

Далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{q(N)}{f(N)} = \lim_{N\to\infty}\frac{N^{-1}}{\operatorname{tg}(\pi/N)} = \lim_{N\to\infty}\frac{(N^{-1})'}{(\operatorname{tg}(\pi/N))'} =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\frac{-N^{-2}}{\cos^{-2}(\pi/N)(-\pi/N^2)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\cos^2(\pi/N) = \frac{1}{\pi}.$$

Предел отношения функций $q(N)$ и $f(N) = N$ равен положительной постоянной $1/\pi$. В силу этого имеет место асимптотическое соотношение $q(N) = O(N)$.

11.21. *Решение.*

Для получения асимптотической оценки величины $C(n, \varepsilon n)$ воспользуемся формулой Стирлинга:

$$C(n,\varepsilon n) = \frac{n!}{(\varepsilon n)!((1-\varepsilon)n)!} =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n\Big(1+\Theta\big(\frac{1}{n}\big)\Big)}{\sqrt{2\pi\varepsilon n}\big(\frac{\varepsilon n}{e}\big)^{\varepsilon n}\Big(1+\Theta\big(\frac{1}{n}\big)\Big)\sqrt{2\pi(1-\varepsilon)n}\Big(\frac{(1-\varepsilon)n}{e}\Big)^{(1-\varepsilon)n}\Big(1+\Theta\big(\frac{1}{n}\big)\Big)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\varepsilon)n}}\big(\varepsilon^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)^{-(1-\varepsilon)}\big)^n\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

В преобразованиях учтено, что $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1+a/n}{1+b/n} = \Big(1+\frac{a}{n}\Big)\Big(1-\frac{b}{n}+\frac{b^2}{n^2}-\ldots\Big) = \\ = 1+\frac{a-b}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Представим выражение $\big(\varepsilon^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)^{-(1-\varepsilon)}\big)^n$ в виде

$$\big(\varepsilon^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)^{-(1-\varepsilon)}\big)^n = 2^{nH(\varepsilon)},$$

где $H(\varepsilon) = -\varepsilon\log_2\varepsilon - (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)$.

В итоге получена асимптотическая оценка биномиального коэффициента $C(n, \varepsilon n)$:

$$C(n,\varepsilon n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\varepsilon)n}}2^{nH(\varepsilon)}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

11.22. *Решение.*

Для оценки скорости роста величин a_n в зависимости от параметра n выпишем первые шесть членов последовательности $\{a_n\}$:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	2	2	5/2	13/5	38/13

Далее докажем, что для всех $n \geqslant 1$ выполняются неравенства $\sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n}+1$. Для этого воспользуемся методом математической индукции.

Обозначим предикат «$\sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n}+1$» через $P(n)$.

Б а з а и н д у к ц и и

Рассмотрим случай $n = 1$. Неравенства принимают вид $1 \leqslant 1 \leqslant 2$, что является истинным утверждением.

Ш а г и н д у к ц и и

Пусть для некоторого $k \geqslant 1$ справедливы оценки $\sqrt{k} \leqslant a_k \leqslant \sqrt{k}+1$. Докажем, что это влечет $\sqrt{k+1} \leqslant a_{k+1} \leqslant \sqrt{k+1}+1$.

Используя неравенство $a_k \leqslant \sqrt{k}+1$, получим:

$$a_{k+1} = 1+\frac{k}{a_k} \geqslant 1+\frac{k}{\sqrt{k}+1} > \\ > 1+\frac{(k+1)-1}{\sqrt{k+1}+1} = \sqrt{k+1},$$

т. е. $a_{k+1} \geqslant \sqrt{k+1}$.

Неравенство $a_{k+1} \leqslant \sqrt{k+1} + 1$ доказывается аналогично.

Итак, методом математической индукции доказано, что $\sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n} + 1$. Следовательно, справедлива асимптотическая оценка $a_n = \sqrt{n} + \Theta(1)$.

11.23. *Решение.*

Сделаем замену $b_n = a_n^2 - 2n$. Рекуррентное соотношение в этом случае примет вид [125]:

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + \dfrac{1}{b_{n-1} + 2(n-1)}, & n > 1, \\ b_1 = -1. \end{cases}$$

Заметим, что все члены последовательности $\{b_n\}$ при $n \geqslant 2$ положительны и удовлетворяют неравенствам

$$b_{n-1} \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}.$$

Следовательно, $0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{1}{2}H_{n-1}$, или $2n \leqslant a_n^2 \leqslant 2n + \dfrac{1}{2}H_{n-1}$, где H_{n-1} — гармоническое число (см. стр. 33). Используя (A.62) (см. также упражнение **11.15**), получим окончательный ответ:

$$a_n = \sqrt{2n} + \Theta\left(\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}\right).$$

11.24. *Указание.*

Утверждение упражнения непосредственно следует из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^k n}{n^d} = 0 \ \text{ для } \ k \in \mathbb{R}^+,\ d \in \mathbb{N},$$

которое можно доказать, например, применяя $\lceil k \rceil$ раз правило Лопиталя.

11.25. *Указание.*

Воспользуйтесь известным пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^d}{c^n} = 0$ для произвольных постоянных $c \in (1, \infty)$ и $d \in \mathbb{N}$.

11.26. *Ответ:* да, включение $\lfloor \log_2 \log_2(n) \rfloor! \in \Omega(\log_2^k n)$ выполняется для любого натурального k.

11.27. *Решение.*

Введем обозначения $f_1(n) = n^3 + \log_2 n$, $f_2(n) = 2^{n-1}$, $f_3(n) = n \log_2 n$,

$f_4(n) = 6$, $f_5(n) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Функция $f_4(n)$ не зависит от аргумента, и поэтому скорость роста будет наименьшей из всех предложенных функций, в итоговом списке $f_4(n) = 6$ займет первое место.

Как известно, скорость роста полиномиальных функций меньше скорости роста показательных, значит, на втором месте окажется либо $f_1(n)$, либо $f_3(n)$. Найдем предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_3(n)}{f_1(n)}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log_2 n}{n^3 + \log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2/\log_2 n + 1/n} = 0.$$

На основании полученного значения предела $L = 0$ делаем заключение, что на втором месте в списке стоит функция $f_3(n)$, а на третьем находится $f_1(n)$, поскольку $f_1(n) = O(f_2(n))$ и $f_1(n) = O(f_5(n))$.

Далее, сравним скорости роста $f_2(n)$ и $f_5(n)$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f_5(n)}{f_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \Big/ 2^{n-1} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Окончательно получаем список функций в порядке увеличения скорости роста:

$$6;\ \ n\log_2 n;\ \ n^3 + \log_2 n;\ \ \left(\frac{3}{2}\right)^n;\ \ 2^{n-1}.$$

11.28. *Ответ:*

Список функций в порядке увеличения скорости роста:

$$\boxed{\sqrt{n};\ \sqrt{n} + \log_2(n);}\quad n^2/\log_2 n;\quad \boxed{e^{4\ln n};\ 7n - 2n^2 + \frac{1}{10}n^4.}$$

Овалами выделены группы функций с одинаковой скоростью асимптотического роста.

11.29. *Ответ:*

Список функций в порядке увеличения скорости роста:

$$\boxed{2^{2n};\quad 2^{2^{\log_2 n+1}};}\quad 2^{n^2};\quad 2^{2^{n-1}};\quad \boxed{2^{2^n - 1/n};\quad 2^{2^n - 1}.}$$

Овалами выделены группы функций с одинаковой скоростью асимптотического роста.

11.31. *Решение.*

1) Применим метод, базирующийся на основной теореме о рекуррентных соотношениях. В данном случае $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n^{1/2}$. Тогда $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = \Theta(n)$. Сравнивая порядок роста функций $n^{\log_b a}$ и $f(n)$, имеем $f(n) = O\bigl(n^{\log_2 2-\varepsilon}\bigr)$, где в качестве ε можно взять $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$.

Решение данного соотношения выражается по первому случаю основной теоремы:

$$T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_2 2}\bigr) = \Theta(n).$$

2) В данном случае $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n$. Тогда $n^{\log_b a} = \Theta(n)$, $f(n) = \Theta\bigl(n^{\log_b a}\bigr)$, значит, по второму случаю основной теоремы

$$T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_2 2}\log_2 n\bigr) = \Theta(n\log_2 n).$$

3) Значения величин a и b равны $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n^2$. Имеем $f(n) = \Omega\bigl(n^{\log_b a+\varepsilon}\bigr)$, где в качестве ε можно взять $\varepsilon = 1 > 0$.

Проверим выполнение условия регулярности для функции $f(n)$. Для достаточно больших n условие $af\left(\dfrac{n}{b}\right) \leqslant cf(n)$ выполняется при $c = \dfrac{1}{2} < 1$. Значит, согласно третьему случаю, $T(n) = \Theta(n^2)$.

11.32. *Ответ:*

1) $T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_2 3}\bigr)$;

2) $T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_2 3}\log_2 n\bigr)$;

3) $T(n) = \Theta(n^3)$.

11.33. *Ответ:*

1) $T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_8 5}\bigr)$;

2) $T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_8 5}\log_2 n\bigr)$;

3) $T(n) = \Theta(n^4\log_2^4 n)$.

11.34. *Ответ:*

Временная сложность $T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_2 7}\bigr)$.

Поскольку $\log_2 7 = 2{,}807\ldots < 3$, то алгоритм Штрассена при достаточно больших n имеет меньшую асимптотическую сложность по сравнению со стандартным методом умножения матриц (см. упражнение **9.4**).

11.35. *Ответ:*

1) $T(n) = \Theta(n\log_2^2 n)$;

2) $T(n) = \Theta\bigl(n^{\log_2 5}\log_2^6 n\bigr)$;

3) $T(n) = \Theta(n^2\log_2^3 n)$.

11.36. *Ответ:* $f_4(n)$, $f_3(n)$, $f_2(n)$, $f_1(n)$.

Глава 12

Базовые алгоритмы

Рекурсивные алгоритмы

Рекурсивным называется алгоритм, который обращается к самому себе [66]. Такие алгоритмы обычно просты для понимания и удобны в практической реализации.

Наиболее известным примером рекурсивного алгоритма является алгоритм вычисления факториала числа, основанный на свойстве $n! = n \cdot (n-1)!$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Листинг 12.1

```
def factorial(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return n * factorial(n - 1)
```

Вычислительная сложность данного алгоритма равна $O(n)$.

Еще один пример рекурсии дает вычисление определителя матрицы [8, 32]. **Определитель** квадратной матрицы A размера $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

где $n = 1, 2, \ldots$, обозначается через $\det A$ и вычисляется рекурсивно следующим образом («разложение по i-й строке»):

$$\text{если } n = 1, \text{ то } \det A = a_{11},$$

$$\text{если } n > 1, \text{ то } \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \widetilde{A}_{ij},$$

где a_{ij} — элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы A, а $\widetilde{A}_{ij}$ — матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, получаемая из A удалением i-й строки и j-го столбца. Величина $(-1)^{i+j}\det\widetilde{A}_{ij}$ называется **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij}. Определитель $\det A$ не зависит от выбора строки, по которой ведется разложение, поэтому обычно принимают $i=1$.

Отметим, что в линейной алгебре известны альтернативные способы определения величины $\det A$, в частности, аксиоматическое определение [40] и определение на основе понятия о перестановках [44].

Выпишем явные выражения для $\det A$ в наиболее важных в практическом отношении случаях $n=2$ и $n=3$. Для квадратной матрицы размера 2×2 из приведенного выше определения непосредственно следует

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\det[a_{22}] - a_{12}\det[a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. определитель матрицы $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ равен разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях.

Для матрицы размера 3×3 имеем

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Полученное соотношение называют иногда **правилом Саррюса**[1].

Использование рекурсивного определения для вычисления определителя приводит к сумме, состоящей из $n!$ слагаемых, что соответствует вычислительной сложности $O(n!)$.

В методических целях в одной из задач к настоящей главе требуется написать программу для вычисления $\det A$ рекурсивным методом.

Важно отметить, что существуют эффективные методы решения данной задачи. Известный **метод исключения Гаусса**[2] позволяет найти

[1] Саррюс (Pierre Frédéric Sarrus) (1798–1861).
[2] Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauss) (1777–1855).

определитель матрицы размера $n \times n$ за время $O(n^3)$. Идея метода Гаусса заключается в преобразовании матрицы $A = [a_{ij}]$ в верхнетреугольную матрицу $A' = [a'_{ij}]$, имеющую тот же определитель $\det A' = \det A$, а величина $\det A'$ равна произведению элементов ее главной диагонали $\det A' = \prod\limits_{i=1}^{n} a'_{ii}$.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на ясность и простоту рекурсивных алгоритмов, использование рекурсии в программе требует со стороны программиста повышенного внимания к расходованию системных ресурсов, в частности, осуществлению контроля переполнения системного стека.

Алгоритмы поиска

Поиск информации в некоторой структуре данных представляет собой важную задачу программирования. Мы будем рассматривать простую структуру данных — массив с целочисленными элементами. Обобщение алгоритмов поиска на более сложные структуры, как правило, не вызывает затруднений [48].

Алгоритм последовательного поиска

Пусть поставлена задача определить номер элемента массива, равного по величине данному конкретному значению, которое называется **целевым**. **Алгоритм последовательного поиска** применяется для работы с неупорядоченным массивом и действует следующим образом: последовательно просматривает элементы массива, начиная с первого, и сравнивает их с целевым. Если искомый элемент найден, то возвращается номер данного элемента, в противном случае результат должен быть числом, не соответствующим никакому элементу, например, числом -1.

Листинг 12.2

```
def SequentialSearch(arr, target):
    result = -1

    for i in range(len(arr)):
        if arr[i] == target:
            result = i
            break

    return result
```

Проведем анализ алгоритма последовательного поиска. Напомним (см. стр. 402), что в реализациях алгоритмов на языке Python индексы массивов отличаются на единицу от описания, приведенного в тексте.

Базовой операцией является сравнение значений $target$ и $arr[i]$ в строке с номером 5. Если искомый элемент находится в массиве на последнем месте или отсутствует, то алгоритм проведет N сравнений, где N — число элементов в массиве arr: $W(N) = N$.

Не составляет труда показать, что $B(N) = 1$.

Для анализа среднего случая предположим, что целевое значение заведомо содержится в массиве и с равной вероятностью занимает любое возможное положение. Тогда вероятность встретить целевое значение на месте с номером i, $1 \leqslant i \leqslant N$, равна $p = \dfrac{1}{N}$.

Для сложности алгоритма в среднем случае получаем

$$A(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2} = O(N).$$

Даже если целевой элемент в массиве отсутствует, то результат для $A(N)$ не изменится: $A(N) = O(N)$.

Алгоритм двоичного поиска

Для поиска в упорядоченных массивах применяется алгоритм **двоичного поиска**. Отметим, что данный алгоритм известен также под названием **бинарный поиск** [2, 46].

Листинг 12.3

```
def BinarySearch(arr, target):
    left = 0
    right = len(arr) - 1

    result = -1

    while left <= right:
        middle = (left + right) // 2

        compare_result = \
            compare(arr[middle], target)

        if compare_result == -1:
            left = middle + 1
        elif compare_result == 1:
            right = middle - 1
        else:
```

```
18              result = middle
19              break
20
21      return result
```

Базовой операцией является сравнение значений $arr[middle]$ и $target$ в строке с номером 11.

Вспомогательная функция $\mathrm{compare}(a, b)$ сравнивает целочисленные аргументы a и b и возвращает значение

$$\mathrm{compare}(a, b) = \begin{cases} +1, & \text{если } a > b, \\ 0, & \text{если } a = b, \\ -1, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

Рассмотрим работу алгоритма двоичного поиска на примере поиска ключевого значения $target = 5$ в упорядоченном массиве $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$ (рис. 12.1).

Первое сравнение производится с элементом, расположенном в середине массива $arr[(left + right)\,//\,2] = arr[4]$. Поскольку $target > arr[4]$, искомый элемент содержится в правой части массива $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$. Далее следует сравнение $(target \ ? \ arr[6])$ и, наконец, проверяется равенство $target = arr[5]$.

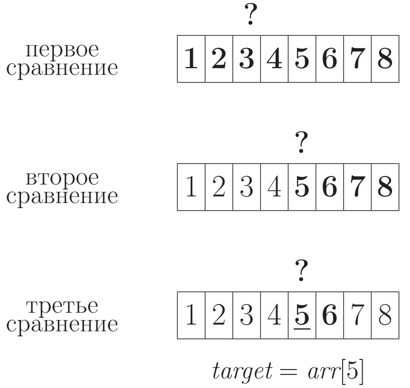


Рис. 12.1. Пример работы алгоритма двоичного поиска. Жирным шрифтом выделены элементы, среди которых на данном шаге алгоритма производится поиск, знаком вопроса отмечен элемент, сравниваемый со значением *target*, подчеркнуто найденное искомое значение

Итак, для установления номера элемента в массиве *arr*, равного ключевому, в данном случае были проведены три операции сравнения.

Дальнейший анализ потребует введения нового понятия — «**дерево принятия решения**» [46]. Каждая вершина такого дерева представляет элемент массива $arr[i]$, где $i = 1, \ldots, N$, с которым происходит сравнение $(target\ ?\ arr[i])$. Переход по ребру левого поддерева выполняется в случае, если $target < arr[i]$, и по ребру правого поддерева — в противном случае, если $target > arr[i]$ (см. рис. 12.2, на котором представлено дерево принятия решения T_N для массива из восьми элементов).

Пример 12.1. Рассмотрим вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$, где $N > 2$, компоненты которого образованы элементами непустого множества A с введенным на нем антисимметричным и транзитивным отношением, все элементы которого попарно сравнимы.

Медианой вектора $\mathbf{a}$ называется s-я по величине координата $\mathbf{a}$, где $s = \left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil$ [2].

На основании данного определения можно сформулировать основное свойство медианы m произвольного вектора: среди его компонент содержится не менее $\left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil$ элементов, превышающих m или равных m, и не менее $\left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil$ элементов, не превышающих m.

Вычислим, сколько сравнений потребуется для нахождения медианы трех чисел в среднем и наихудшем случаях.

Решение.

Изобразим дерево принятия решения T для задачи упорядочения чисел a_1, a_2, a_3 по возрастанию. Медиану можно определить как средний элемент полученной упорядоченной последовательности. Для построения дерева T выполним сравнения вида $(a_i\,?\,a_j)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, в следующем порядке: $(a_1\,?\,a_2)$, $(a_2\,?\,a_3)$ и, если потребуется, заключительное сравнение $(a_1\,?\,a_3)$. На рис. 12.3 представлено дерево T, где кругами обозначены операции сравнения $(a_i\,?\,a_j)$ и прямоугольниками изображены искомые упорядоченные последовательности, образованные заданными числами.

Итак, из рис. 12.3 следует, что определение порядка элементов a_1, a_2, a_3 и, следовательно, их медианы требует в среднем случае $(2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2)/6 = 8/3$ сравнений, в наихудшем случае необходимы 3 сравнения. □

Алгоритм двоичного поиска для последующего сравнения всегда выбирает середину массива, следовательно, в этом случае дерево T_N будет либо полным, либо на последнем его уровне могут отсутствовать некоторые листья. Для любого двоичного дерева с высотой h и количеством листьев l выполняется неравенство $2^h \geqslant l$ или $h \geqslant \lceil \log_2 l \rceil$. Число уровней в полном дереве равно $h = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ (см. упражнение **5.43**).

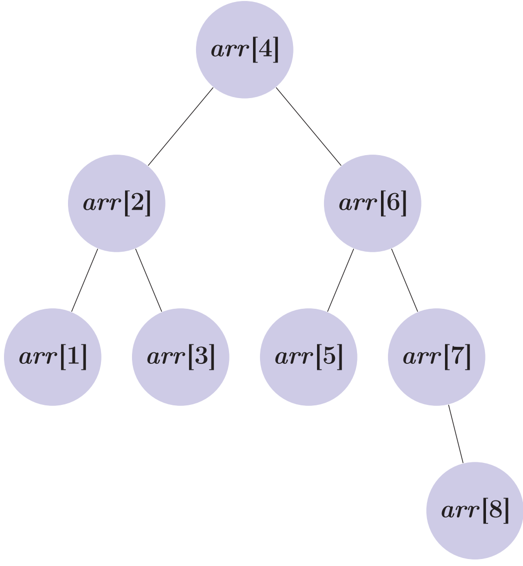


Рис. 12.2. Дерево принятия решения T_8 для массива из восьми элементов

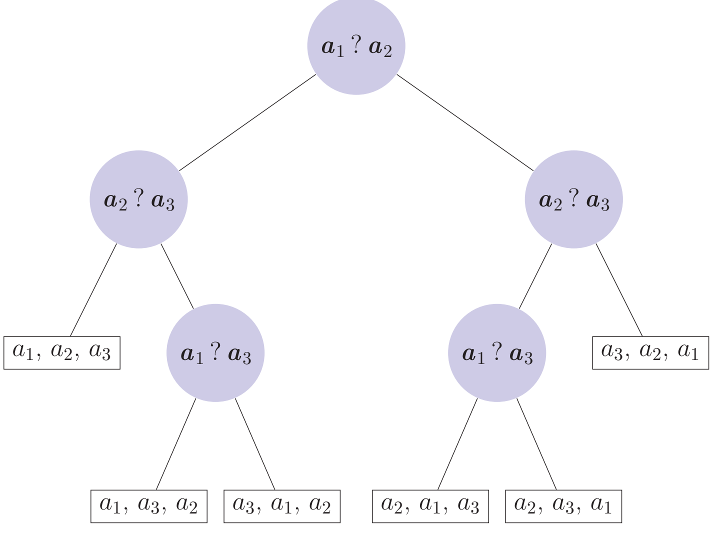


Рис. 12.3. Дерево принятия решения T для задачи о медиане трех чисел

Оценим асимптотическую сложность алгоритма двоичного поиска в предположении, что целевое значение обязательно находится в массиве *arr*. Вероятность нахождения элемента, равного *target*, на произвольном месте равна $p = \dfrac{1}{N}$. Построим дерево принятия решения T_N для процесса двоичного поиска. Для поиска элемента на первом уровне требуется одно сравнение, на втором уровне — два, на третьем — три и т. д.

Наихудший случай

Максимальное число сравнений равно высоте дерева принятия решения $W(N) = O(\log_2 N)$.

Средний случай

Полное число сравнений равно сумме по всем уровням произведений числа узлов на данном уровне на номер уровня. Для полного дерева выполняется равенство

$$A(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{h} i2^{i-1};$$

для дерева с незаполненным последним уровнем

$$A(N) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{h} i2^{i-1}.$$

Значение суммы в правой части этого неравенства приведено в разделе «Справочные материалы», соотношение (A.61), см. также упражнение **12.22**:

$$A(N) \leqslant \frac{1}{2N}((h-1)2^{h+1}+2) = \frac{(h-1)2^h+1}{N}.$$

Подставим известное значение $h = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$:

$$A(N) \leqslant \frac{1}{N}(\lfloor \log_2 N \rfloor \cdot 2^{\lfloor \log_2 N \rfloor + 1} + 1) = O(\log_2 N).$$

Анализ случая, когда целевое значение может отсутствовать в массиве и вероятность поиска целевого значения для каждого из $N+1$ интервалов, образуемых элементами массива, одинакова, также приводит к оценке $O(\log_2 N)$.

Окончательно вычислительная сложность алгоритма двоичного поиска

$$A(N) = O(\log_2 N).$$

Алгоритм поиска Фибоначчи

Наряду с алгоритмом двоичного поиска алгоритм **поиска Фибоначчи** служит для определения номера целевого элемента в упорядоченном массиве. Алгоритм поиска Фибоначчи сравнивает целевое значение с элементом, который делит этот массив в отношении двух последовательных чисел Фибоначчи. В зависимости от результата этого сравнения поиск либо завершается, когда искомый элемент найден, либо алгоритм поиска вызывается рекурсивно на одной из двух частей массива, где присутствует искомый элемент.

Напомним, что последовательность Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, где $n \geqslant 1$, с начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$. Свойства данной последовательности позволяют организовать работу алгоритма без использования операций умножения или деления.

Рассмотрим алгоритм поиска Фибоначчи более подробно.

Пусть количество элементов N в упорядоченном массиве arr равно F_k для некоторого $k = 2, 3, \ldots$

Алгоритм поиска Фибоначчи выполняет следующие действия для нахождения элемента $target$ в данном массиве.

Прежде всего, осуществляется операция сравнения целевого значения $target$ с элементом массива $arr[F_{k-1}]$.

Далее возможны три случая (см. рис. 12.4, на котором схематично показано разбиение массива элементом $arr[F_{k-1}]$ в отношении F_{k-1}/F_{k-2}):

1. Если $target < arr[F_{k-1}]$, то, следовательно, индекс искомого элемента меньше F_{k-1}. В этом случае поиск продолжается после изменения правой границы рассматриваемой части массива на $(F_{k-1} - 1)$: $arr[1..(F_{k-1} - 1)]$.

2. Если $target = arr[F_{k-1}]$, то, значит, искомый элемент найден, и его индекс будет равен F_{k-1}.

3. Если $target > arr[F_{k-1}]$, то тогда индекс искомого элемента превышает F_{k-1}. В этом случае поиск продолжается после изменения левой границы рассматриваемой части массива на $F_{k-1} + 1$: $arr[(F_{k-1} + 1)..F_k]$.

Если же N не является числом Фибоначчи F_k ни для какого целого $k \geqslant 2$, то следует увеличить размер массива arr до ближайшего F_k. После этого применяется описанная выше последовательность сравнений.

Ниже в листинге 12.4 представлена реализация алгоритма поиска Фибоначчи.

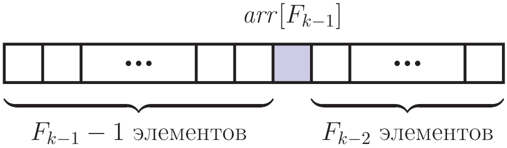


Рис. 12.4. Расположение элемента массива с индексом F_{k-1} в исходном массиве $arr[1..F_k]$

Листинг 12.4

```
import sys

fib = [-sys.maxsize, 1, 1, 2, 3, 5,
       8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,
       233, 377, 610, 987, 1597]

def compare(a, b):
    if a > b:
        return 1
    elif a == b:
        return 0
    else:
        return -1


def binary_search_ge(N):
    left = 0
    right = len(fib) - 1

    while left < right:
        middle = (left + right) // 2

        compare_result = \
            compare(fib[middle], N)

        if compare_result == -1:
            left = middle + 1
        else:
            right = middle

    return left

```

```python

def FibonaccianSearch(arr, target):
    N = len(arr)

    left = 0
    result = -1

    k = binary_search_ge(N)

    while k >= 0:
        pos = left + fib[k] - 1

        if 0 <= pos < N:
            compare_result = \
                compare(arr[pos], target)

            if compare_result == -1:
                left = pos + 1
                k = k - 2
            elif compare_result == 0:
                result = pos
                break
            else:
                k = k - 1
        else:
            k = k - 1

    return result
```

В тексте программы FibonaccianSearch использованы вспомогательные функции compare(a, b) и BinarySearch_ge().

Первая из них описана выше на стр. 451.

Вторая функция BinarySearch_ge() основана на алгоритме двоичного поиска и возвращает наименьшее $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, удовлетворяющее условию $F_k \geqslant N$, где N — размер анализируемого массива.

В переменной *left* хранится индекс левой границы рассматриваемой части массива, переменная *pos* содержит индекс элемента, с которым произойдет очередное сравнение. В глобальном массиве F хранится предварительно вычисленная последовательность Фибоначчи, причем массив в данной реализации начинается с нуля: $F[0] =$ `-sys.maxsize` — это наименьшее значение целого типа. Такой способ организации массива требуется для корректной работы алгоритма при значениях $k = 1$ и $k = 2$.

Рассмотрим работу алгоритма поиска Фибоначчи на примере поиска ключевого значения $target = 4$ в упорядоченном массиве

1	2	3	4	5	6	7	8

.

В начале работы алгоритма $left = 1$, $k = 6$.

Первое сравнение проводится с элементом, индекс которого равен $left + F_5 - 1 = 5$. Поскольку $target < arr[5]$, искомый элемент содержится в левой части массива $\boxed{1\,|\,2\,|\,3\,|\,4\,|\;\;|\;\;|\;\;|\;\;}$.

Далее следует сравнение ($target\ ?\ arr[3]$) и, наконец, проверяется равенство $target = arr[4]$ (см. рис. 12.5).

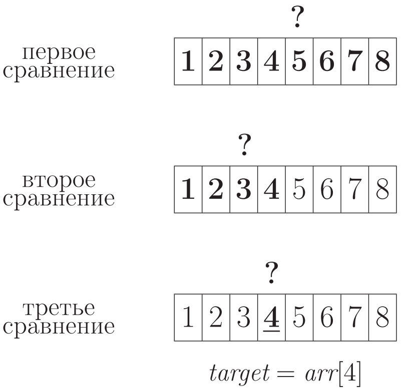


Рис. 12.5. Пример работы алгоритма поиска Фибоначчи. Жирным шрифтом выделены элементы, среди которых на данном шаге алгоритма производится поиск, знаком вопроса отмечен элемент, сравниваемый со значением *target*, подчеркнуто найденное искомое значение

Для определения положения элемента, равного *target*, потребовалось выполнить три операции сравнения.

Оценим асимптотическую сложность алгоритма поиска Фибоначчи в предположении, что целевое значение обязательно находится в массиве *arr*.

Наихудший случай

Пусть элемент, равный *target*, присутствует на первом месте в массиве размера F_k. Тогда реализуется наихудший случай, и число операций сравнения $W(N)$ будет подчиняться рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} W(N) = W\left(\dfrac{F_{k-1} - 1}{F_k} N\right) + 1, \quad N > 1, \\ W(1) = 1. \end{cases}$$

В самом деле, на каждом последующем шаге алгоритма поиска Фибоначчи размер анализируемой части массива уменьшается до величины $(F_{k-1} - 1)$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{F_{k-1}-1}{F_k} = \dfrac{1}{\varphi}$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, то при достаточно больших N указанное выше рекуррентное соотношение примет вид

$$\begin{cases} W(N) = W\Big(\dfrac{1}{\varphi}N\Big) + 1, & N > 1, \\ W(1) = 1. \end{cases}$$

Методом подстановки можно легко показать, что имеет место асимптотическое соотношение $W(N) = \log_\varphi N + O(1)$. Если же N не является числом Фибоначчи F_k ни для какого целого $k \geqslant 2$, то эта оценка для $W(N)$ не изменится.

Средний случай

Заметим, что рекурсивный вызов функции FibonaccianSearch произойдет в $(F_{k-1}-1)$ случаях на массиве размером $\dfrac{F_{k-1}-1}{F_k}N$ и в F_{k-2} случаях на массиве размером $\dfrac{F_{k-2}}{F_k}N$. Общее число таких случаев будет равно F_k. Значит, для числа сравнений $A(N)$ в среднем случае имеем:

$$\begin{cases} A(N) = \dfrac{F_{k-1}-1}{F_k}A\Big(\dfrac{F_{k-1}-1}{F_k}N\Big) + \dfrac{F_{k-2}}{F_k}A\Big(\dfrac{F_{k-2}}{F_k}N\Big) + 1, & N > 1, \\ A(1) = 1. \end{cases}$$

При достаточно больших N получаем:

$$\begin{cases} A(N) = \dfrac{1}{\varphi}A\Big(\dfrac{1}{\varphi}N\Big) + \dfrac{1}{\varphi^2}A\Big(\dfrac{1}{\varphi^2}N\Big) + 1, & N > 1, \\ A(1) = 1. \end{cases}$$

Как показано в упр. **12.25**, вычислительная сложность $A(N)$ алгоритма поиска Фибоначчи в среднем случае будет равна

$$A(N) = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}\log_\varphi N + O(1).$$

Алгоритм интерполяционного поиска

Интерполяционный поиск (от латинского *interpolāre* — переделывать [27]) применяется для упорядоченных данных. Этот вид поиска основан на предположении, что значения элементов в массиве растут линейно. Искомое значение сравнивается со значением элемента, индекс которого вычисляется как координата точки на прямой, соединяющей точки (*left*, *arr*[*left*]) и (*right*, *arr*[*right*]). Полученная прямая задается уравнением

$$y - arr[left] = \frac{arr[right] - arr[left]}{right - left}(x - left).$$

По данному значению $y = target$ получаем индекс элемента, с которым произойдет следующее сравнение (рис. 12.6):

$$next = left + \left\lfloor \frac{right - left}{arr[right] - arr[left]}(target - arr[left]) \right\rfloor.$$

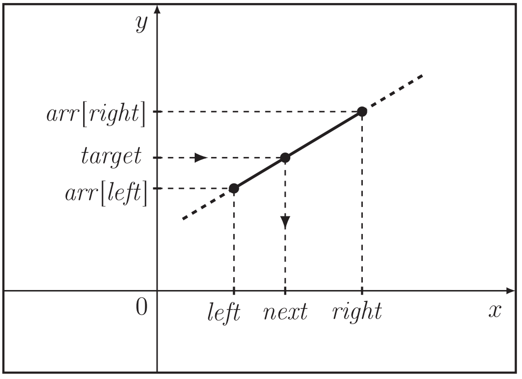


Рис. 12.6. Вычисление положения следующего элемента массива при интерполяционном поиске

После сравнения $target$ и $arr[next]$ алгоритм интерполяционного поиска продолжает поиск среди элементов $left \ldots (next - 1)$ или $(next + 1) \ldots right$, или же прекращает свою работу, если $arr[next] = target$.

Реализация алгоритма интерполяционного поиска представлена в листинге 12.5.

Листинг 12.5

```
count = 0

def compare(a, b):
    global count
    count = count + 1

    if a > b:
        return 1
    elif a == b:
        return 0
    else:
        return -1
```

```


def InterpolationSearch(arr, target):
    left = 0
    right = len(arr) - 1

    result = -1

    while left <= right:
        if compare(arr[left], arr[right]) == 0:
            if compare(arr[left], target) == 0:
                result = left

            break

        next_elem = left + ((right - left)
            * (target - arr[left])) \
            // (arr[right] - arr[left])

        if next_elem < left or next_elem > right:
            break

        compare_result = \
            compare(arr[next_elem], target)

        if compare_result == -1:
            left = next_elem + 1
        elif compare_result == 1:
            right = next_elem - 1
        else:
            result = next_elem
            break

    return result
```

Анализ алгоритма показывает [128], что число сравнений, необходимых для достижения алгоритмом результата в среднем случае, равно $A(N) = \Theta(\log_2 \log_2 N)$, однако в наихудшем случае $W(N) = O(N)$.

Алгоритмы сортировки

Быстрые алгоритмы поиска требуют упорядоченного представления данных, поэтому важной в практическом отношении является задача сортировки.

Рассмотрим непустое конечное множество $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ с введенным на нем антисимметричным и транзитивным отношением S, все элементы которого попарно сравнимы. Пусть из N элементов множества A сформирован вектор $\mathbf{a} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_N})$. **Задача сортировки** состоит в перестановке (другими словами, изменении порядка) компонент вектора $\mathbf{a}$, чтобы в результате его компоненты стали упорядоченными:

входные данные: $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_N})$;
выходные данные: $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_N})$ при условии
$(a_{j_1}\, S\, a_{j_2})$ **и** $(a_{j_2}\, S\, a_{j_3})$ **и** ... **и** $(a_{j_{N-1}}\, S\, a_{j_N})$.

Входные данные могут быть представлены в виде массива или более сложным образом, например, списком, каждый элемент которого имеет несколько полей. Поле элемента, по которому производится сортировка, называется **ключом**. Часто требуется упорядочить данные, учитывая значения других полей помимо выбранного ключевого поля. В этом случае говорят о сортировке по **вторичным ключам** [37].

Выделяют два вида алгоритмов сортировки в зависимости от возможности прямого доступа к данным: *внутренние* и *внешние* [37].

Внутренняя сортировка упорядочивает данные, расположенные в массиве, размер которого позволяет разместить его в оперативной памяти. При этом имеется возможность произвольного доступа к любой ячейке памяти. В противном случае, если массив из-за его размера удается разместить лишь на относительно медленных периферийных устройствах, применяют **внешнюю сортировку**. Внутренние сортировки нередко служат основой для внешних, последние обычно используются для обработки отдельных частей массива данных каким-либо внутренним алгоритмом, работающим в оперативной памяти, затем они объединяются в единый массив на периферийном устройстве.

Поведение алгоритма сортировки называется **естественным**, если время сортировки $T(N)$ минимально, когда элементы расположены в требуемом порядке, увеличивается при уменьшении степени упорядоченности элементов и становится максимальным, когда элементы сортируемого массива расположены в обратном порядке.

Устойчивой называется сортировка, которая не меняет порядок сортируемых элементов с одинаковыми значениями ключа [37].

Теорема о нижней границе сложности сортировки гласит, что *любая сортировка, основанная на использовании сравнений, имеет сложность в наихудшем случае* $W(N) = \Omega(N \log_2 N)$.

Приведем доказательство данного утверждения [46]. Алгоритм сортировки в качестве выходных данных выводит перестановку исходных

N элементов. Количество возможных выходов равно числу перестановок элементов, т. е. $N!$ (см. главу «Комбинаторика» на стр. 187).

Дерево принятия решения для алгоритмов сортировки строится следующим образом. Каждая вершина представляет некоторое сравнение $(a\,?\,b)$, осуществляемое алгоритмом. Одно из двух поддеревьев, относящихся к данной вершине, соответствует исходу $a < b$, другое — $a > b$ (для простоты полагаем, что для всех элементов $a \neq b$). Ребра дерева принятия решения — переходы между состояниями, а листья представляют возможные выходные данные алгоритма. В наихудшем случае количество сравнений равно высоте дерева.

Для любого двоичного дерева с высотой h и количеством листьев l выполняется неравенство $2^h \geqslant l$ или $h \geqslant \lceil \log_2 l \rceil$. Следовательно, высота дерева принятия решения для сортировок на основе сравнений удовлетворяет соотношению $W(N) \geqslant \lceil \log_2 N! \rceil$. Выражение в правой части этого неравенства можно представить как:

$$\lceil \log_2 N! \rceil \geqslant \sum_{i=1}^{N} \log_2 i > \frac{N}{2} \log_2 \frac{N}{2} = \Omega(N \log_2 N).$$

Таким образом, теорема о нижней границе доказана.

Алгоритм называется **асимптотически оптимальным**, если для его сложности в наихудшем случае верна оценка

$$W(N) = \Theta(N \log_2 N).$$

В книге [18] приводится следующая классификация сортировок, основанных на сравнениях элементов:

1) *сортировки с помощью включения*;
2) *сортировки с помощью выделения*;
3) *сортировки с помощью обменов*.

Примеры алгоритмов, относящихся к этим классам, представлены на рис. 12.7.

Сортировка вставками

В процессе работы алгоритма формируется отсортированная часть массива. Для этого на каждом шаге алгоритма элемент входных данных вставляется на нужную позицию в уже отсортированном массиве, до тех пор пока набор входных данных не будет исчерпан.

Пример работы сортировки вставками представлен в табл. 12.1. Последовательно формируемая отсортированная часть массива выделена полужирным шрифтом и подчеркиванием.

Ниже в листинге 12.6 приводится реализация рассмотренного алгоритма сортировки.

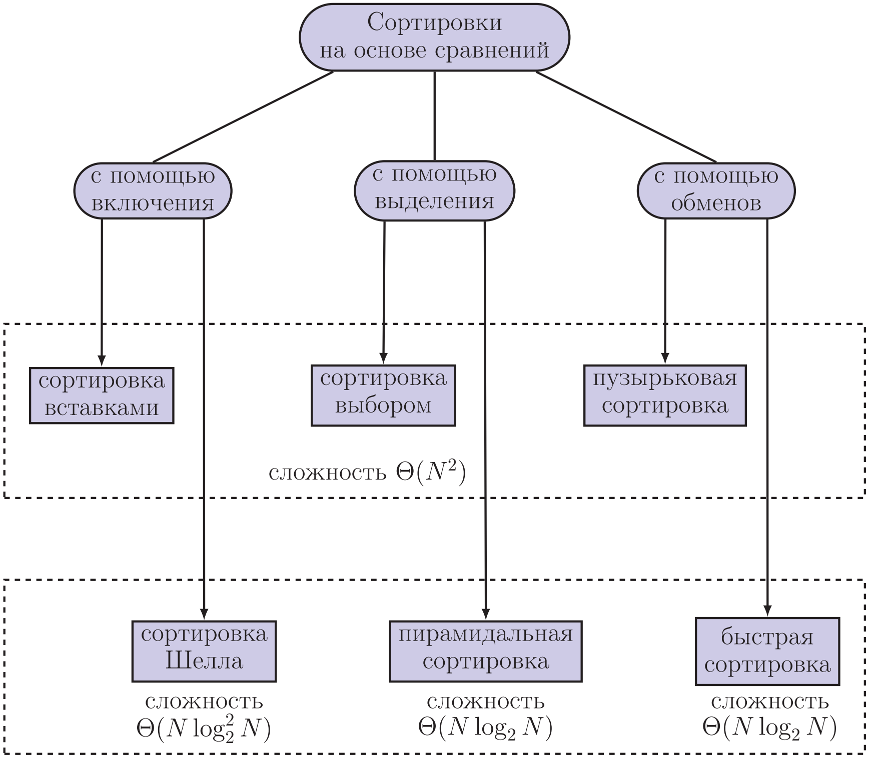


Рис. 12.7. Классификация алгоритмов сортировки, основанных на операциях сравнения

Листинг 12.6

```
1  def InsertionSort(arr):
2      for i in range(1, len(arr)):
3          temp = arr[i]
4          j = i - 1
5
6          while j >= 0 and arr[j] > temp:
7              arr[j + 1] = arr[j]
8              j -= 1
9
10         arr[j + 1] = temp
```

Таблица 12.1

Пример работы сортировки вставками. Полужирным шрифтом и подчеркиванием выделяется отсортированная часть массива

Исходный массив	4 7 3 1 8 6 5 2
Перед 1-м проходом	**4** 7 3 1 8 6 5 2
1-й проход	**4 7** 3 1 8 6 5 2
2-й проход	**3 4 7** 1 8 6 5 2
3-й проход	**1 3 4 7** 8 6 5 2
4-й проход	**1 3 4 7 8** 6 5 2
5-й проход	**1 3 4 6 7 8** 5 2
6-й проход	**1 3 4 5 6 7 8** 2
7-й проход	**1 2 3 4 5 6 7 8**

Проведем анализ алгоритма сортировки вставками. В качестве базовой операции выберем операцию сравнения $arr[j]>temp$ в строке с номером 6.

Наихудший случай

Пусть добавляемый элемент меньше всех остальных, тогда он всегда попадает в начало массива. Такая ситуация реализуется, например, когда элементы исходного массива расположены в убывающем порядке. Число сравнений в этом случае равно

$$W(N) = \sum_{i=2}^{N}(i-1) = \frac{(N-1)N}{2} = O(N^2).$$

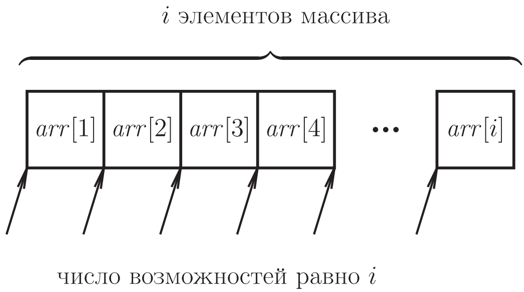


Рис. 12.8. Существует i возможностей для размещения очередного элемента массива $arr[i]$ среди $(i-1)$ предыдущих элементов при сортировке вставками

Средний случай

Необходимо просуммировать операции сравнения для вставки каждого i-го элемента, начиная с $i = 2$, т. е. $A(N) = \sum\limits_{i=2}^{N} A_i$.

Среднее число сравнений для определения положения очередного элемента равно (рис. 12.8):

$$A_i = \frac{1}{i}\left(\sum_{j=1}^{i-1} j + (i-1)\right) = \frac{i+1}{2} - \frac{1}{i}.$$

Теперь остается просуммировать все A_i для каждого из $N - 1$ элементов массива.

$$\begin{aligned} A(N) = &\sum_{i=2}^{N} A_i = \sum_{i=2}^{N}\left(\frac{i+1}{2} - \frac{1}{i}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}(i+1) - \sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i} = \frac{1}{4}(N+4)(N-1) - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - 1\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(N^2 + 3N - 4\right) - \left(\ln N + \gamma - 1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = O(N^2). \end{aligned}$$

При оценке суммы $\sum\limits_{i=2}^{N}\dfrac{1}{i} = H_N - 1$ было использовано соотношение для асимптотики гармонических чисел (А.62) (см. также упражнение **11.15**).

Алгоритм сортировки простыми вставками обладает рядом преимуществ, среди которых можно выделить:

1) малое время работы на небольших наборах данных и на частично отсортированных наборах по сравнению со средним случаем;

2) использование только ограниченного объема дополнительной памяти;

3) устойчивость;

4) простоту реализации.

Недостатком алгоритма следует считать его высокую временну́ю сложность $\Theta(N^2)$.

Пузырьковая сортировка

Название алгоритма возникло из аналогии перемещения элементов массива $arr[1..N]$ при сортировке и движения пузырьков газа в емкости с водой. Операции сравнения выполняются для соседних элементов массива, и при необходимости производится обмен элементов. Приведем текст программы пузырьковой сортировки.

Листинг 12.7

```
def BubbleSort(arr):
    for i in range(1, len(arr)):
        for j in range(len(arr) - 1, i - 1, -1):
            if arr[j - 1] > arr[j]:
                arr[j - 1], arr[j] = \
                    arr[j], arr[j - 1]
```

Процедура swap(a, b) производит обмен значений переменных a и b, две возможные реализации процедуры рассмотрены в упражнениях **9.1** и **9.2**.

Пример работы алгоритма пузырьковой сортировки представлен в табл. 12.2.

Анализ алгоритма пузырьковой сортировки включает в себя, как обычно, разбор наилучшего, наихудшего и среднего случаев. Однако для данной сортировки число сравнений остается неизменным при любом наборе входных данных размера N, поскольку два цикла всегда выполняются заданное число раз вне зависимости от степени упорядоченности исходного массива, т. е. $B(N) = W(N) = A(N)$.

Таблица 12.2

Пример работы пузырьковой сортировки. Полужирным шрифтом и подчеркиванием отмечены занявшие свои места элементы

Исходный массив	4 7 3 1 8 6 5 2
1-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ 4 7 3 2 8 6 5
2-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ $\underline{\mathbf{2}}$ 4 7 3 5 8 6
3-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ $\underline{\mathbf{2}}$ $\underline{\mathbf{3}}$ 4 7 5 6 8
4-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ $\underline{\mathbf{2}}$ $\underline{\mathbf{3}}$ $\underline{\mathbf{4}}$ 5 7 6 8
5-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ $\underline{\mathbf{2}}$ $\underline{\mathbf{3}}$ $\underline{\mathbf{4}}$ $\underline{\mathbf{5}}$ 6 7 8
6-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ $\underline{\mathbf{2}}$ $\underline{\mathbf{3}}$ $\underline{\mathbf{4}}$ $\underline{\mathbf{5}}$ $\underline{\mathbf{6}}$ 7 8
7-й проход	$\underline{\mathbf{1}}$ $\underline{\mathbf{2}}$ $\underline{\mathbf{3}}$ $\underline{\mathbf{4}}$ $\underline{\mathbf{5}}$ $\underline{\mathbf{6}}$ $\underline{\mathbf{7}}$ 8

При первом проходе число сравнений равно $N-1$. Далее цикл повторится с $N-2$ сравнениями и т. д.

$$W(N) = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=N}^{i} 1 = \sum_{i=2}^{N}(N-i+1) = (N+1)\sum_{i=2}^{N} 1 - \sum_{i=2}^{N} i =$$
$$= (N+1)(N-1) - \frac{N+2}{2}(N-1) = \frac{N^2-N}{2} = \Theta(N^2).$$

Можно внести в алгоритм следующие улучшения:

1) запоминать индексы элементов, которые участвовали в последнем обмене, и при следующем проходе считать больший из этих индексов нижней границей сортируемой части массива;

2) не только «легкие» элементы поднимать в начало массива, но и сразу же «тяжелые» опускать, т. е. совершать проходы массива в противоположных направлениях.

Реализация указанных улучшений приведет к **шейкерной** сортировке (от англ. *shake* — встряска).

Сортировка выбором

При сортировке выбором определяется элемент с наименьшим значением и производится его обмен с первым элементом массива. Затем находится элемент с наименьшим значением из оставшихся $N-1$ элементов и производится его обмен со вторым элементом и т. д. вплоть до обмена двух последних элементов.

Пример описанной работы с массивом представлен в табл. 12.3.

Листинг 12.8

```
def SelectSort(arr):
    for i in range(len(arr) - 1):
        k = i
        temp = arr[i]

        for j in range(i + 1, len(arr)):
            if arr[j] < temp:
                k = j
                temp = arr[j]

        arr[k] = arr[i]
        arr[i] = temp
```

Таблица 12.3

Пример работы сортировки выбором. Полужирным шрифтом и подчеркиванием отмечены занявшие свои места элементы

Исходный массив	4	7	3	1	8	6	5	2
1-й проход	**1**	7	3	4	8	6	5	2
2-й проход	**1**	**2**	3	4	8	6	5	7
3-й проход	**1**	**2**	**3**	4	8	6	5	7
4-й проход	**1**	**2**	**3**	**4**	8	6	5	7
5-й проход	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6	8	7
6-й проход	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7	8
7-й проход	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	8

Число сравнений, проводимых алгоритмом SelectSort, не зависит от степени упорядоченности массива и равно

$$W(N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} 1 = \Theta(N^2).$$

Несмотря на одинаковое число операций сравнения, выполняемых алгоритмами пузырьковой сортировки и сортировки выбором, число операций обмена при использовании сортировки выбором не зависит от степени упорядоченности массива и составляет $\Theta(N)$.

Сортировка Шелла

Рассмотренная выше сортировка вставками позволяет за один проход цикла переместить на свое место лишь один элемент. Шелл[1] предложил предусмотреть возможность перестановки элементов, расположенных на фиксированном расстоянии друг от друга [132].

Введем определение h-упорядоченного массива: массив a является **h-упорядоченным** [66], если совокупность элементов, расположенных на расстоянии h друг от друга, образует отсортированный массив. Алгоритм сортировки Шелла проводит h-упорядочение массива для нескольких убывающих значений h, называемых **смещениями**, последнее из которых равно $h = 1$. Весь массив длины N рассматривается как совокупность перемешанных подмассивов, и сортировка сводится к многократному применению сортировки вставками (табл. 12.4).

Таблица 12.4

Пример работы сортировки Шелла для значений смещений $1, 3, 7, \ldots$

Исходный массив	4 7 3 1 8 6 5 2
После прохода со смещением 7	2 7 3 1 8 6 5 4
После прохода со смещением 3	1 4 3 2 7 6 5 8
После прохода со смещением 1	1 2 3 4 5 6 7 8

Анализ сортировки Шелла достаточно сложен и основывается на понятии **инверсии** [37, 48]. Инверсией называют пару элементов, расположенных в неправильном порядке, т. е. пару (a_i, a_j), для которой $a_i > a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant N$. Например, в массиве размера N, элементы которого записаны в обратном порядке, число инверсий равно $N(N-1)/2$.

Каждое сравнение в сортировке вставками приводит к удалению не более одной инверсии, но в сортировке Шелла обмен элементов может исключить сразу несколько инверсий.

Оценка сложности для заданной последовательности смещений представляет серьезную математическую задачу. Например, количество сравнений в среднем случае для $h_s = 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ и N, равного натуральной степени двойки, выражается формулой [103]:

$$A(N) = \frac{N}{16} \sum_{i=1}^{\log_2 N} \frac{\Gamma(2^{i-1})}{2^i \Gamma(2^i)} \sum_{r=1}^{2^{i-1}} r(r+3)2^r \frac{\Gamma(2^i - r + 1)}{\Gamma(2^{i-1} - r + 1)} + N \log_2 N - \frac{3}{2}(N-1),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Некоторые результаты анализа алгоритма Шелла, полученные к настоящему времени, приведены ниже [66].

[1] Шелл (Donald Lewis Shell) (1924–2015).

Теорема об h- и k-упорядочении. *Результат h-сортировки k-упорядоченного массива образует h- и k-упорядоченный массив.*

Для доказательства данной теоремы вводится понятие **h-инверсии**. Так называют инверсии, образованные элементами на расстояниях, кратных h. Доказательство теоремы приведено в упражнении **12.46**.

Известны оценки сложности для некоторых последовательностей смещений, например, для последовательности смещений $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ асимптотическая сложность в наихудшем случае равна $O(N^{3/2})$. **Праттом**[1] была предложена последовательность значений h, приводящая к алгоритму сложности $W(N) = \Theta(N(\log_2 N)^2)$. Следует отметить, что преимущество использования этой последовательности проявляется только для достаточно больших значений размера массива N.

Быстрая сортировка

Одним из самых хорошо изученных и активно применяемых на практике алгоритмов сортировок является быстрая сортировка [2, 107]. Автор алгоритма — Хоар, работая над задачей машинного перевода, сформулировал алгоритм, главное свойство которого — высокая скорость обработки информации — отражено в названии [46].

Выберем **осевой элемент** $arr[v]$ (некоторые авторы называют осевой элемент **опорным** [46]) и разделим массив $arr[left..right]$ на две части: в первой окажутся элементы, меньшие или равные выбранному, а во второй — бо́льшие или равные, т. е. элементы массива будут удовлетворять следующим свойствам:

1) элемент $arr[v]$ для некоторого v занимает окончательную позицию;

2) $arr[k] \leqslant arr[v]$ для всех $k = left, left + 1, \ldots, v$;

3) $arr[k] \geqslant arr[v]$ для всех $k = v, v + 1, \ldots, right$,

где $left$ и $right$ — нижняя и верхняя границы обрабатываемой части массива.

Рекурсивное применение процедуры разбиения приводит к размещению всех элементов на окончательных позициях.

Перестановка элементов осуществляется следующим образом. Введем указатели i и j, начальные значения которых равны $i = left$, $j = right$. Просматриваем массив, двигаясь «слева направо», т. е. увеличивая индекс i, пока не встретим элемент $arr[i] \geqslant v$, а затем просматриваем массив «справа налево», уменьшая индекс j, пока не встретим $arr[j] \leqslant v$. Будем при необходимости менять местами элементы $arr[i]$ и $arr[j]$ до тех пор, пока указатели не пересекутся, при этом $i \geqslant j$. На заключительном этапе процедуры произведем обмен $arr[j]$ с осевым элементом. Заметим,

[1] Пратт (Vaughan Ronald Pratt) (род. 1944).

что предотвратить выход индекса i за пределы массива можно введением **барьера** $arr[right + 1]$, величина которого принимает значение, большее или равное $\max\limits_{k}(arr[k])$.

В табл. 12.5 продемонстрирована работа алгоритма быстрой сортировки. В качестве осевого элемента массива $arr[left..right]$ можно выбирать, например, элемент $arr[left]$. Из табл. 12.5 видно, как происходит упорядочение массива в этом случае.

Таблица 12.5

Пример работы быстрой сортировки. Полужирным шрифтом и подчеркиванием отмечены занявшие свои места элементы, квадратными скобками выделены участки массива, для которых вызывается процедура разбиения

Исходный массив	4	7	3	1	8	6	5	2
Осевой элемент в ячейке 4	[1	2	3]	**4**	8	6	5	7
Осевой элемент в ячейке 1	**1**	[2	3]	**4**	8	6	5	7
Осевой элемент в ячейке 2	**1**	**2**	**3**	**4**	[8	6	5	7]
Осевой элемент в ячейке 8	**1**	**2**	**3**	**4**	[7	6	5]	**8**
Осевой элемент в ячейке 7	**1**	**2**	**3**	**4**	[5	6]	**7**	**8**
Осевой элемент в ячейке 5	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Функция Partition размещает осевой элемент массива arr в соответствии с указанными выше условиями.

Листинг 12.9

```
import sys


count = 0

def compare(a, b):
    global count
    count += 1

    return a - b


def Partition(arr, left, right):
    global count
    v, i, j = arr[left], left, right + 1

    while True:
```

```
        j -= 1
        i += 1

        while compare(arr[j], v) > 0: j -= 1
        while compare(arr[i], v) < 0: i += 1

        arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]

        if i >= j:
            break

    arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
    arr[left], arr[j] = arr[j], arr[left]

    return j


def QuickSort(arr, left, right, first=True):
    if first:
        arr += [sys.maxsize]

    if left < right:
        v = Partition(arr, left, right)

        QuickSort(arr, left, v - 1, False)
        QuickSort(arr, v + 1, right, False)

    return arr
```

Текст основной процедуры QuickSort с рекурсивным вызовом функции Partition приведен в листинге 12.9. Для упорядочения массива $arr[1..N]$ формат вызова процедуры следующий: `QuickSort(arr,0,N-1)`.

Исследуем асимптотическую сложность алгоритма быстрой сортировки.

Наихудший случай

Рассмотрим случай, когда осевой элемент либо больше всех элементов массива, либо меньше всех. Тогда разбиение происходит на максимально неравные части — из 1 и $N-1$ элементов:

1	$N-1$

.

При каждом рекурсивном вызове из рассмотрения удаляется один элемент. В итоге получаем сложность в наихудшем случае

$$W(N) = (N+1) + N + \ldots + 3 = O(N^2).$$

Такая ситуация реализуется для отсортированного в требуемом порядке массива.

Средний случай

Процедура разбиения массива делает $N+1$ сравнение, разбивая массив из N элементов, как описано на стр. 471, и $2\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil$ сравнений для массива, образованного попарно равными элементами. Если индекс осевого элемента равен V, то рекурсивный вызов будет осуществляться для массивов длины $V-1$ и $N-V$. Соответствующее рекуррентное соотношение имеет вид:

$$\begin{cases} A(N) = N + 1 + \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(A(i-1) + A(N-i)\right) & \text{для } N \geqslant 2, \\ A(0) = A(1) = 0. \end{cases}$$

Следуя [66], перепишем это соотношение в виде

$$A(N) = N + 1 + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(A(i) + A(N-i-1)\right)$$

и в сумме изменим порядок суммирования $\sum\limits_{i=0}^{N-1} A(i) = \sum\limits_{i=0}^{N-1} A(N-i-1)$.

Получаем уравнение

$$A(N) = N + 1 + \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} A(i),$$

или

$$NA(N) = N(N+1) + 2\sum_{i=0}^{N-1} A(i).$$

Сделаем замену переменной $N \to N-1$ для $N \geqslant 3$:

$$(N-1)A(N-1) = N(N-1) + 2\sum_{i=0}^{N-2} A(i).$$

Из полученных уравнений следует соотношение

$$NA(N) = (N+1)A(N-1) + 2N.$$

После деления обеих частей этого равенства на $N(N+1)$ получим

$$\frac{A(N)}{N+1} = \frac{A(N-1)}{N} + \frac{2}{N+1},$$

причем $A(0) = A(1) = 0$ и $A(2) = 3$.

Осуществим замену переменной $\widetilde{A}(N) = \dfrac{A(N)}{N+1}$, после чего рекуррентное соотношение для $\widetilde{A}(N)$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \widetilde{A}(N) = \widetilde{A}(N-1) + \dfrac{2}{N+1} \text{ для } N \geqslant 3, \\ \widetilde{A}(0) = \widetilde{A}(1) = 0,\ \widetilde{A}(2) = 1. \end{cases}$$

Методом подстановки получаем решение $\widetilde{A}(N) = 1 + 2\sum\limits_{i=4}^{N+1} \dfrac{1}{i}$ для $N \geqslant 3$.

Альтернативный способ решения рекуррентного соотношения для величин $A(N)$ предложен в упражнении **8.115**.

В итоге, принимая во внимание асимптотическое соотношение (А.62), запишем окончательный результат для сложности алгоритма быстрой сортировки:

$$A(N) = (N+1)\widetilde{A}(N) = 2N \ln N + \Theta(N).$$

Порядковые статистики

Поиск минимума, максимума или медианы нескольких чисел — частные случаи задачи о порядковых статистиках.

Определение: **k-й порядковой статистикой** непустого конечного множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ с введенным на нем антисимметричным и транзитивным отношением, все элементы которого попарно сравнимы, называется k-я компонента вектора $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}, \ldots, a_{j_N})$, компоненты которого упорядочены ($1 \leqslant k \leqslant N$). Например, минимум чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$ представляет собой первую порядковую статистику этого множества.

Нахождение порядковых статистик и, в частности, медианы требуется в статистических исследованиях.

Пусть необходимо определить k-й по величине элемент массива $arr[1..N]$, обозначим такой элемент через t.

Один из способов решения задачи о k-й порядковой статистике заключается в использовании процедуры Partition (см. стр. 472).

Предположим, что осевой элемент v занял в массиве arr окончательную позицию $arr[i]$. Тогда число элементов массива arr, по величине меньших или равных v, равно $i-1$. Аналогично, $N-i$ элементов имеют значение, не меньшее v. Далее реализуется одна из трех возможностей:

1) $k < i$ и искомый элемент t расположен в подмассиве $arr[1..(i-1)]$;

2) $k = i$ и $t = arr[i]$;

3) $k > i$ и t расположен в подмассиве $arr[(i+1)..N]$.

Функция SelectPart определяет индекс k-й порядковой статистики в исходном массиве с использованием процедуры Partition. Вспомогательная функция compare(k, v) осуществляет сравнение ($k\,?\,v$) (см. стр. 451).

Листинг 12.10

```
import sys

def partition(arr, left, right):
    v, i, j = arr[left], left, right + 1

    while True:
        j -= 1
        i += 1

        while arr[j] > v: j -= 1
        while arr[i] < v: i += 1

        arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]

        if i >= j:
            break

    arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
    arr[left], arr[j] = arr[j], arr[left]

    return j

def SelectPart(arr, k):
    k -= 1

    left = 0
    right = len(arr)

    arr += [sys.maxsize]

    while True:
        v = partition(arr, left, right)

        if k < v:
            right = v - 1
        elif k > v:
            left = v + 1
        else:
            return v
```

Асимптотический анализ алгоритма SelectPart (см. листинг 12.10) в целом повторяет исследование сложности быстрой сортировки. Сложность алгоритма SelectPart в среднем случае $A(N) = \Theta(N)$, в наихудшем случае $W(N) = \Theta(N^2)$.

Второй способ решения задачи о k-й порядковой статистике приводит к алгоритму SelectOpt сложности $O(N)$. Рассмотрим этот алгоритм [109].

Пусть требуется определить k-й по величине элемент массива $arr[1..N]$, где $N > 1$. Для простоты предполагаем, что все элементы массива arr являются попарно различными целыми числами. Введем вспомогательные переменные $left$ и $right$ с начальными значениями $left = 1$, $right = N$. Представим работу алгоритма SelectOpt в виде следующих шагов.

1. Элементы массива $arr[left..right]$ разделим на $\left\lfloor \dfrac{N}{w} \right\rfloor$ подмассивов по w элементов в каждом, где w — целое число, большее единицы.
2. Находим медианы m_i каждого из подмассивов, где $1 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \dfrac{N}{w} \right\rfloor$.
3. Определим медиану μ множества медиан $M = \left\{m_i \colon 1 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \dfrac{N}{w} \right\rfloor\right\}$.
4. Величину μ используем в качестве осевого элемента для процедуры Partition (см. стр. 472), которая применяется на этом шаге к массиву $arr[left..right]$.
5. Если искомый элемент t не найден, то сужаем область его поиска путем изменения значения переменных $left$ или $right$ и возвращаемся к первому шагу. Если элемент t найден — алгоритм завершает работу.

Отметим особенности алгоритма SelectOpt (см. листинг 12.11).

Во-первых, разбиение анализируемого массива $arr[left..right]$ на подмассивы приведет к тому, что ровно $d - w\left\lfloor \dfrac{d}{w} \right\rfloor$ элементов, где $d = right - left + 1$ — размер массива, не попадут ни в один из подмассивов. Во время выполнения шагов 2–3 данные элементы не используются, однако в процедуре разбиения Partition на четвертом шаге их необходимо учитывать.

Во-вторых, медианы m_i на втором шаге можно определить путем сортировки каждого из подмассивов, после чего медианы будут расположены на местах с индексом $\left\lceil \dfrac{w}{2} \right\rceil$.

В-третьих, еще одна особенность связана с определением величины μ. Элементы множества медиан M можно сохранять во вспомогательном массиве, но это потребует выделения дополнительной памяти. Альтернативный вариант заключается в переносе элементов m_i в начало массива arr.

С учетом указанных особенностей представим одну из возможных реализаций алгоритма SelectOpt. При этом величина w является параметром алгоритма и задается в виде глобальной константы.

Листинг 12.11

```
import math

w = 5


def InsertionSort(arr, left, right):
    for i in range(left + 1, right + 1):
        temp = arr[i]
        j = i - 1

        while j >= 0 and arr[j] > temp:
            arr[j + 1] = arr[j]
            j -= 1

        arr[j + 1] = temp


def Partition(arr, left, right):
    v, i, j = arr[left], left, right + 1

    while True:
        j -= 1
        i += 1

        while arr[j] > v: j -= 1
        while arr[i] < v: i += 1

        arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]

        if i >= j:
            break

    arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
    arr[left], arr[j] = arr[j], arr[left]

    return j


def SelectOpt(arr, k, left, right):
    global w

```

```
    while True:
        d = right - left + 1

        if d <= w:
            InsertionSort(arr, left, right)
            return left + k - 1

        dd = math.floor(d / w)

        for i in range(1, dd + 1):
            InsertionSort(arr,
                          left + (i - 1) * w,
                          left + i * w - 1)
            l = left + i - 1
            r = left + (i - 1) * w \
                + math.ceil(w / 2) - 1

            arr[l], arr[r] = arr[r], arr[l]

        v = SelectOpt(arr, math.ceil(dd / 2),
                      left, left + dd - 1)

        arr[left], arr[v] = arr[v], arr[left]

        v = Partition(arr, left, right)

        temp = v - left + 1

        if k < temp:
            right = v - 1
        elif k > temp:
            k = k - temp
            left = v + 1
        else:
            return v
```

Из рис. 12.9 можно заключить, что $\left\lceil \left\lfloor \dfrac{N}{w} \right\rfloor / 2 \right\rceil$ медиан m_i не превышают величины μ, и $\left\lceil \left\lfloor \dfrac{N}{w} \right\rfloor / 2 \right\rceil$ медиан m_i не меньше μ.

Следовательно, $R = \left\lceil \dfrac{w}{2} \right\rceil \left\lceil \left\lfloor \dfrac{N}{w} \right\rfloor / 2 \right\rceil$ элементов исходного массива arr не превышают μ, и R элементов arr не меньше μ.

При достаточно больших значениях N имеем асимптотическую оценку: $N - R = 3N/4 + \Theta(1)$. В силу этого следующая итерация внешнего

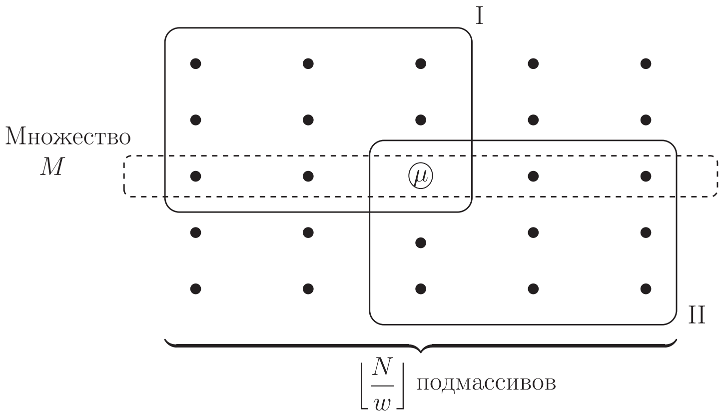


Рис. 12.9. Медиана множества медиан μ массива arr. Элементы массива обозначены точками и в каждом подмассиве расположены сверху вниз в порядке невозрастания. Величины $arr[i]$ в области I не больше μ, в области II — не меньше μ

цикла **while** будет применена к массиву, в котором не более $\dfrac{3N}{4} + \Theta(1)$ элементов.

Теперь можно записать рекуррентное соотношение для числа сравнений элементов массива arr в наихудшем случае:

$$\begin{cases} T(N) = T\left(\dfrac{N}{w}\right) + T\left(\dfrac{3N}{4}\right) + \Theta(N),\ N > w, \\ T(1), T(2), \ldots, T(w) - \text{const}. \end{cases}$$

В упражнении **12.71** показано, что при $w \geqslant 5$ полученному рекуррентному соотношению удовлетворяет функция $T(N) = \Theta(N)$. Итак, алгоритм SelectOpt имеет сложность, линейную по количеству элементов исходного массива.

Контрольные вопросы к главе «Базовые алгоритмы»

1. Какие алгоритмы относят к рекурсивным?

2. Какие известны способы вычисления определителя квадратной матрицы?

3. Что такое целевой элемент в алгоритмах поиска?

4. Расскажите, как работают алгоритмы последовательного, двоичного поиска, поиска Фибоначчи, интерполяционного поиска.

5. Дайте определение дереву принятия решений.

6. В чем состоит задача сортировки?

7. Какие сортировки относят к внешним? Внутренним? Естественным? Устойчивым?

8. Сформулируйте теорему о нижней границе.

9. Что такое асимптотически оптимальный алгоритм сортировки?

10. Опишите работу сортировки вставками, пузырьковой, шейкерной, сортировки выбором, сортировки Шелла, быстрой сортировки.

11. Сформулируйте теорему об h- и k-упорядочении.

12. Дайте определение k-й порядковой статистики.

13. Расскажите, как работают алгоритм вычисления порядковых статистик на основе разбиения и оптимальный алгоритм поиска статистики.

Задачи к главе «Базовые алгоритмы»

12.1. Дайте точную оценку асимптотической сложности алгоритма вычисления факториала, приведенного в тексте главы.

12.2. Оцените сложность алгоритма вычисления факториала без использования рекурсии.

Листинг 12.12

```
def factorial(n):
    f = 1

    for i in range(2, n + 1):
        f *= i

    return f
```

12.3. Запишите рекурсивный алгоритм для вычисления n-го числа Фибоначчи. Какую сложность он имеет?

12.4. Проверьте, что следующий алгоритм вычисляет n-е число Фибоначчи с ограниченной по используемой памяти сложностью.

Листинг 12.13

```
def fib(n):
    a = 0
    b = 1

    for i in range(2, n + 1):
        b = a + b
        a = b - a

    if n == 1:
        return 1
    else:
        return b
```

12.5. Дайте оценку сложности рекурсивного алгоритма вычисления функции $\lfloor \log_2 n \rfloor$, где $n \in \mathbb{N}$.

Листинг 12.14

```
def log2floor(n):
    if n == 1:
        return 0
    else:
        return log2floor(n // 2) + 1
```

12.6. Используя рекурсивное определение, вычислите определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

$*$**12.7.** Вычислите определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix},$$

где z_1, z_2 и z_3 — корни кубического уравнения $z^3 + \alpha z + \beta = 0$ с произвольными комплексными коэффициентами $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

∗12.8. Вычислите определитель трехдиагональной матрицы, имеющей n строк и n столбцов:

$$T(n) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 4 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 \end{bmatrix}.$$

∗12.9. Вычислите определитель трехдиагональной матрицы, имеющей n строк и n столбцов [63]:

$$T(n) = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \ldots & 0 \\ b & a & b & \ldots & 0 \\ 0 & b & a & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}.$$

12.10. Вычисление определителя матрицы

В текстовом файле `input.txt` записаны подряд по строкам элементы целочисленной квадратной матрицы A. Используя рекурсию, вычислите определитель $\det A$. Результат выведите в текстовый файл `output.txt`.

∗12.11. Оцените число умножений, выполняемых рекурсивным алгоритмом вычисления определителя матрицы размера $n \times n$ (см. предыдущее упражнение).

∗12.12. Докажите, что точное число умножений, выполняемых рекурсивным алгоритмом вычисления определителя матрицы размера $n \times n$ (см. упражнения **12.10** и **12.11**), равно

$$T(n) = en\Gamma(n, 1) - n!,$$

где e — основание натуральных логарифмов, $\Gamma(n, x) = \int\limits_x^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$ — **неполная гамма-функция** $\Bigl($для натуральных $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $\Gamma(n, x) = (n-1)!\, e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!}\Bigr)$.

12.13. Известно, что квадратная матрица A размера $n \times n$ содержит элементы $a_{ij} \in \{0, 1\}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Предложите способ модификации алгоритма вычисления определителя матрицы A с помощью рекурсии (см. упр. **12.10**), уменьшающий количество операций умножения в этом случае.

12.14. Пусть элементы квадратной матрицы A размера $n \times n$ равны $a_{ij} = 1$ с вероятностью p и $a_{ij} = 0$ с вероятностью $1 - p$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $0 < p < 1$. Оцените количество умножений, которые выполняются алгоритмом вычисления определителя, учитывающим наличие нулевых элементов в матрице (см. предыдущее упр.).

∗12.15. Пусть квадратная матрица A является трехдиагональной:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Сколько операций умножения выполняется алгоритмом вычисления определителя матрицы A, учитывающим наличие нулевых элементов в этой матрице (см. упр. **12.13**)?

12.16. Дайте точную оценку числу сравнений, проводимых алгоритмом последовательного поиска одного из N элементов массива, в случае когда целевой элемент может отсутствовать, а все из $(N + 1)$ возможностей расположения целевого элемента равновероятны.

12.17. Сколько сравнений сделает алгоритм двоичного поиска в массиве $\boxed{21}\boxed{24}\boxed{33}\boxed{37}\boxed{38}\boxed{45}\boxed{50}$ при поиске значения $target = 22$?

12.18. Сколько сравнений в среднем сделает алгоритм двоичного поиска в массиве $\boxed{21}\boxed{24}\boxed{33}\boxed{37}\boxed{38}\boxed{45}\boxed{50}$, если элемент, равный $target$, заведомо присутствует в массиве?

12.19. Для массива $\boxed{10}\boxed{12}\boxed{14}\boxed{16}\boxed{18}\boxed{20}\boxed{22}\boxed{24}$ определите:

1) минимальное число сравнений, выполняемых алгоритмом двоичного поиска;

2) максимальное число сравнений, выполняемых алгоритмом двоичного поиска.

12.20. Для массива из $N = 8$ элементов $\boxed{10}\boxed{12}\boxed{14}\boxed{16}\boxed{18}\boxed{20}\boxed{22}\boxed{24}$ определите:

1) среднее число сравнений, выполняемых при успешном двоичном поиске в этом массиве;

2) среднее число сравнений, выполняемых в случае неудачного двоичного поиска (в предположении, что вероятность поиска целевого элемента в каждом из $N + 1 = 9$ интервалов, образуемых элементами массива, одинакова).

12.21. Оцените число сравнений, проводимых алгоритмом двоичного поиска одного из N элементов в массиве, в случае когда целевой элемент может отсутствовать и вероятность поиска его для каждого из $N + 1$ интервалов, образуемых элементами массива, одинакова.

$*$**12.22.** Докажите соотношение (A.61), использующееся в анализе алгоритма двоичного поиска.

12.23. Вычисление переменной *middle* алгоритмом двоичного поиска (см. стр. 450) может привести к переполнению. Это произойдет, если сумма величин левой и правой границ рассматриваемой части массива *left* и *right* превысит верхнюю границу типа переменных *left* и *right* в конкретном языке программирования. Предложите способ модификации алгоритма, гарантирующий его корректную работу в этом случае.

12.24. Постройте дерево принятия решения для поиска Фибоначчи в упорядоченном массиве размера $N = 8$.

12.25. Используя метод подстановки (см. главу «Рекуррентные соотношения» на стр. 341), докажите, что асимптотическая сложность алгоритма поиска Фибоначчи в среднем случае имеет вид:

$$A(N) = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_{\varphi} N + O(1).$$

12.26. Поиск

1. В текстовом файле `input.txt` представлен массив из N целых чисел от 1 до N, расположенных в произвольном порядке без повторений. Реализуйте функцию поиска в этом массиве на основе алгоритма последовательного поиска. Головная программа должна вызывать функцию поиска для каждого элемента массива от 1 до N. В текстовый файл `output.txt` выведите среднее число сравнений, проведенных программой последовательного поиска.

2. Выполните то же для двоичного поиска в упорядоченном массиве.

3. Выполните то же для поиска Фибоначчи в упорядоченном массиве.

4. Выполните то же для интерполяционного поиска в упорядоченном массиве.

Сравните вычислительную сложность рассмотренных в задаче алгоритмов.

12.27. Продемонстрируйте работу алгоритма сортировки вставками на примере целочисленного массива

20	12	18	16	24	10	22	14

. Разберите два случая:

1) сортировка элементов по возрастанию;

2) сортировка элементов по убыванию.

12.28. Является ли сортировка вставками устойчивой?

12.29. Сортировка вставками

В текстовом файле `input.txt` находится массив из N целых чисел. Выполните сортировку данных по возрастанию с помощью алгоритма сортировки вставками. В текстовый файл `output.txt` выведите отсортированный массив (в 1-ю строку файла) и число сравнений, проведенных программой (во 2-ю строку файла).

12.30. В **сортировке двоичными вставками** для поиска позиции текущего элемента $arr[j]$ в упорядоченной части массива используется двоичный поиск. Изменится ли асимптотическая сложность данного варианта сортировки по сравнению со стандартным алгоритмом сортировки вставками?

12.31. Является ли сортировка двоичными вставками устойчивой?

12.32. Продемонстрируйте работу алгоритмов пузырьковой и шейкерной сортировок на примере массива

20	12	18	16	24	10	22	14

. Разберите случаи:

1) сортировка по возрастанию значений элементов;

2) сортировка по убыванию значений элементов.

12.33. Является ли устойчивой:

1) пузырьковая сортировка?

2) шейкерная сортировка?

12.34. Шейкерная сортировка

В текстовом файле `input.txt` находится массив из N целых чисел. Выполните сортировку данных по возрастанию с помощью алгоритма шейкерной сортировки. В текстовый файл `output.txt` выведите отсортированный массив (в 1-ю строку файла) и число сравнений, проведенных программой (во 2-ю строку файла).

12.35. Определите число инверсий в массиве $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{1}$.

12.36. Определите число инверсий в массиве $\boxed{20}\boxed{12}\boxed{18}\boxed{16}\boxed{24}\boxed{10}\boxed{22}\boxed{14}$.

12.37. Определите число инверсий в каждом из массивов:

1) $\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{\ldots}\boxed{2N-1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{\ldots}\boxed{2N}$;

2) $\boxed{2}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{\ldots}\boxed{2N}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{\ldots}\boxed{2N-1}$.

∗12.38. Докажите, что число инверсий в целочисленном массиве

$$\boxed{N}\boxed{1}\boxed{N-1}\boxed{2}\boxed{N-2}\boxed{\ldots}\boxed{\lceil N/2\rceil},$$

где $N \geqslant 1$, равно $\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{N}{2}\right\rceil$.

12.39. Пусть дан одномерный массив размера N, где $N \geqslant 2$. Выполним операцию обмена значений двух элементов. Какое максимальное число инверсий можно устранить таким образом?

12.40. Известно, что массив a содержит ровно $\mathcal{I}$ инверсий. Определите наименьший размер, который может иметь массив a.

∗12.41. Предположим, что в массиве $\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{\ldots}\boxed{a_{N-1}}\boxed{a_N}$ содержится ровно $\mathcal{I}$ инверсий. Сколько будет инверсий в массиве $\boxed{a_N}\boxed{a_{N-1}}\boxed{\ldots}\boxed{a_2}\boxed{a_1}$?

12.42. Предположим, что некоторый массив a размера N содержит ровно $\mathcal{I}$ инверсий. Докажите, что количество сравнений $\mathcal{C}$, выполняемых алгоритмом сортировки вставками для упорядочения данного массива, равно $\mathcal{I} + O(N)$.

12.43. Является ли устойчивой сортировка Шелла?

12.44. Рассмотрим последовательность смещений 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Каким существенным недостатком обладает алгоритм сортировки Шелла на основе данной последовательности?

12.45. В алгоритме сортировки Шелла для h-упорядочения подмассивов исходного массива используется сортировка вставками. Как изменится асимптотическая сложность алгоритма, если вместо сортировки вставками применить сортировку выбором?

$*$**12.46.** Докажите теорему об h- и k-упорядочении.

12.47. Для алгоритма сортировки Шелла Праттом была предложена последовательность смещений из множества чисел вида $2^i 3^j$, меньших размера массива, где $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Смещения используются в порядке убывания. Выпишите элементы множества смещений H для случая массива размера $N = 32$.

12.48. Продемонстрируйте работу алгоритма сортировки Шелла на основе последовательности, предложенной Праттом (см. упражнение **12.47**). Рассмотрите массив

20	12	18	16	24	10	22	14

.

$*$**12.49.** Докажите, что асимптотическая сложность сортировки Шелла в наихудшем случае на основе последовательности смещений, предложенной Праттом, равна $\Theta(N(\log_2 N)^2)$ [37, 120].

12.50. Сортировка Шелла

В текстовом файле `input.txt` находится массив из N целых чисел. Выполните сортировку данных по возрастанию с помощью сортировки Шелла для следующих значений смещений:

1) значения смещений равны h_s, где $h_{s+1} = 2h_s + 1$, $h_0 = 1$, причем $0 \leqslant s < \lfloor \log_2 N \rfloor$ (последовательность $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$);

2) значения смещений равны h_s, где $h_{s+1} = 3h_s + 1$, $h_0 = 1$, причем $0 \leqslant s < \lfloor \log_3(2N+1) \rfloor - 1$ (последовательность $1, 4, 13, 40, 121, \ldots$).

В текстовый файл `output.txt` выведите отсортированный массив (в 1-ю строку файла) и число сравнений, проведенных двумя вариантами сортировки (во 2-ю строку файла).

12.51. Получите в явном виде выражения для смещений $h_s = h(s)$ из предыдущего упражнения.

12.52. Определите число сравнений, выполняемых алгоритмом быстрой сортировки, при сортировке массива

21	24	33	37	38	45	50

.

12.53. Является ли быстрая сортировка устойчивой?

12.54. Как известно, если элементы массива образуют строго монотонную последовательность, то этот случай является наихудшим для алгоритма быстрой сортировки. Приведите пример последовательности, которая не является строго монотонной, но приводит к наихудшему случаю для процедуры QuickSort.

12.55. Известно, что в массиве $a[1..N]$ все элементы попарно равны. Оцените число сравнений, выполняемых алгоритмом быстрой сортировки, при упорядочении массива a.

∗12.56. В одном из вариантов быстрой сортировки осевой элемент выбирается равным медиане трех элементов массива: крайнего слева, крайнего справа и среднего элемента. Запишите рекуррентное соотношение, определяющее число сравнений в данном варианте быстрой сортировки.

12.57. Быстрая сортировка

В текстовом файле `input.txt` записано натуральное число N, определяющее размер массива *arr*, причем $N < 15$. Сформируйте всевозможные варианты массива *arr* и в текстовый файл `output.txt` выведите массивы, на которых алгоритм быстрой сортировки выполняет максимальное количество сравнений.

12.58. Сравнительная таблица алгоритмов сортировки

Заполните сравнительную таблицу для известных вам алгоритмов сортировки (табл. 12.6).

Таблица 12.6

Сравнительная таблица алгоритмов сортировки

Название сортировки	Автор и дата создания	Устойчивость	Естественное поведение	Асимптотическая сложность	Преимущества/ недостатки
1. Вставками	Дж. фон Нейман[1], 1945 г.	Да	Да	$A(N) = N^2/4 + O(N)$, $W(N) = N^2/2 + O(N)$	Простота идеи и реализации/ неэффективна для массивов больших размеров
2. Пузырьковая	...	...	...	...	...
3. ...	...	...	...	...	...

[1] фон Нейман (John von Neumann) (1903–1957).

12.59. Найдите медиану m массива | 20 | 12 | 18 | 16 | 24 | 10 | 22 | 14 |.

12.60. Найдите медиану m каждого из следующих массивов:

1) $\boxed{N \mid 1 \mid N-1 \mid 2 \mid N-3 \mid \ldots \mid \lceil N/2 \rceil}$;

2) $\boxed{2 \mid 1 \mid 4 \mid 2 \mid 8 \mid 4 \mid \ldots \mid 2^N \mid 2^{N-1}}$.

12.61. Пусть даны три вещественных числа a, b, c. Запишите явную формулу для вычисления их медианы $m(a, b, c)$.

$*$**12.62.** Пусть массив a содержит N элементов, причем $N > 2$. Докажите, что дерево принятия решения для определения k-го по величине элемента в данном массиве содержит не менее $2^{N-k}C(N, k-1)$ листьев.

12.63. Известно, что некоторый алгоритм $\mathcal{A}$ определяет k-й по величине элемент в массиве $a[1..N]$, где $N > 2$. Докажите, что $\mathcal{A}$ выполняет по крайней мере $N - k + \lceil \log_2 C(N, k-1) \rceil$ операций сравнения.

12.64. Покажите, что не существует алгоритма, определяющего второй по величине элемент массива $a[1..N]$ менее чем за $N + \lceil \log_2 N \rceil - 2$ сравнений.

12.65. Определите, какое минимальное число сравнений потребуется для нахождения медианы пяти произвольных чисел.

12.66. Покажите, что нельзя найти медиану массива $a[1..N]$, где $N > 2$, менее чем за $\left\lceil \dfrac{3N}{2} \right\rceil - O(\log_2 N)$ сравнений.

12.67. Продемонстрируйте работу алгоритма SelectPart на примере поиска медианы массива $\boxed{20 \mid 12 \mid 18 \mid 16 \mid 24 \mid 10 \mid 22 \mid 14}$.

12.68. Определите количество сравнений $T(N)$, выполняемых алгоритмом SelectPart, при поиске медианы массива

$$\boxed{N \mid 1 \mid N-1 \mid 2 \mid N-3 \mid \ldots \mid \lceil N/2 \rceil},$$

где количество элементов массива $N > 2$.

12.69. Продемонстрируйте работу алгоритма SelectOpt на примере поиска медианы массива из упражнения **12.67**.

12.70. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и коэффициенты $\beta_i \in \mathbb{R}^+$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, таковы, что их сумма не превышает единицы: $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i < 1$. Покажите, что рекуррентному соотношению вида

$$\begin{cases} T(N) = \sum\limits_{i=1}^{m} T(\beta_i N) + \Theta(N), \ N > N_0, \\ T(N) = \Theta(1), \ 1 \leqslant N \leqslant N_0, \end{cases}$$

где N_0 — наименьшее из чисел β_1^{-1}, β_2^{-1}, $\ldots$, β_m^{-1}, удовлетворяет функция $T(N) = \Theta(N)$.

12.71. Используя предыдущее упражнение, получите условие на параметр w алгоритма SelectOpt, чтобы асимптотическая сложность алгоритма в наихудшем случае была равна $T(N) = \Theta(N)$, где N — количество элементов исходного массива.

12.72. Предложите алгоритм, определяющий множество элементов массива $a[1..N]$, не превышающих k-й по величине элемент. Число операций сравнения элементов массива должно быть линейной функцией от его размера.

Ответы, указания, решения к главе «Базовые алгоритмы»

12.1. *Решение.*

Полагая, что базовой операцией является умножение целых чисел в строке с номером 5, получаем рекуррентное соотношение для числа операций $T(n)$:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + 1, \quad n > 1, \\ T(1) = 0. \end{cases}$$

Несложно видеть, что его решение $T(n) = n-1$ (это можно проверить непосредственной подстановкой).

12.2. *Ответ:*

Вычислительная сложность алгоритма равна $O(n)$, как и у рекурсивной версии алгоритма, приведенной в тексте главы.

12.3. *Указание.*

Рекуррентное соотношение, определяющее количество операций сложения, имеет вид

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1, \quad n > 2, \\ T(1) = 0,\ T(2) = 0. \end{cases}$$

Решение данного соотношения приведено в упражнении **8.31**: $T(n) = F_n - 1$, где F_n — число Фибоначчи. Следовательно, имеет место оценка $T(n) = \Theta(\varphi^n)$, где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

12.5. *Решение.*

Базовой операцией является целочисленное деление на 2 в пятой строке. Поскольку функция log2floor при каждом рекурсивном вызове выполняет ровно одну операцию сложения, то рекуррентное соотношение для числа сложений $T(n)$ может быть записано в виде:

$$\begin{cases} T(n) = T\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, \quad n > 1, \\ T(1) = 0. \end{cases}$$

Далее, применим основную теорему (см. стр. 430) с учетом значений параметров $a = 1$, $b = 2$ и явного вида функции $f(n) = 1$. Окончательно получаем: $T(n) = \Theta(\log_2 n)$.

Примечание. Точным решением является функция $T(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$, что можно показать, например, методом математической индукции.

12.6. *Решение.*

Раскрываем определитель, например, по первой строке:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{bmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{bmatrix} - 4 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \left(6 \cdot \det \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} - 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix} + 8 \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}\right) -$$

$$- 2 \cdot \left(5 \cdot \det \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} - 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{bmatrix} + 8 \cdot \det \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}\right) +$$

$$+ 3 \cdot \left(5 \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix} - 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{bmatrix} + 8 \cdot \det \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}\right) -$$

$$- 4 \cdot \left(5 \cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{bmatrix} - 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{bmatrix} + 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 1 \cdot (6 \cdot (11 \cdot 16 - 12 \cdot 15) - 7 \cdot (10 \cdot 16 - 12 \cdot 14) + \ldots) - \ldots = 0.$$

Примечание. Из решения упражнения видно, что даже для небольших значений размера матрицы n количество вычислительных операций достаточно велико. В данном случае легче было воспользоваться известными свойствами определителя для получения ответа. Например, эквивалентными преобразованиями, а именно, вычитанием из второй и из третьей строк первой получим матрицу с пропорциональными строками:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что ее определитель равен 0.

12.7. *Решение.*

Используя правило Саррюса (см. стр. 448) и выполняя алгебраические преобразования, получим

$$\begin{aligned} \Delta &= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3). \end{aligned}$$

Согласно формулам Виета (см. упр. **7.40**), сумма всех корней $z_1+z_2+z_3$ равна коэффициенту при квадратичном члене z^2, взятому с обратным знаком. Для уравнения $z^3 + \alpha z + \beta = 0$ имеем $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Следовательно, определитель Δ равен нулю.

12.8. *Ответ:* $\det T(n) = (n+1)2^n$.

12.9. *Указание.*

Определитель $d_n = \det T(n)$ удовлетворяет соотношению (см. главу «Рекуррентные соотношения» на стр. 341)

$$\begin{cases} d_n = ad_{n-1} - b^2 d_{n-2}, & n > 2, \\ d_1 = a, \ d_2 = a^2 - b^2. \end{cases}$$

12.11. *Решение.*

Для матрицы размера $n \times n$ осуществляются n рекурсивных вызовов и производится n умножений вида $a_{ij} \times \det \widetilde{A}_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Выход из рекурсии будет при $n = 1$, в этом случае умножения не производятся. В силу этого общее число умножений удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} T(n) = nT(n-1) + n, & n > 1, \\ T(1) = 0. \end{cases}$$

Решим полученное соотношение методом подстановки (см. стр. 341):

$$\begin{aligned}T(n) &= nT(n-1)+n = \\ &= n[(n-1)T(n-2)+n-1]+n = \\ &= n(n-1)T(n-2)+n(n-1)+n = \\ &= n(n-1)[(n-2)T(n-3)+n-2]+n(n-1)+n = \\ &= n(n-1)(n-2)T(n-3)+n(n-1)(n-2)+n(n-1)+n.\end{aligned}$$

Продолжая аналогичным образом до $T(1)=0$, получим

$$\begin{aligned}T(n) &= n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot T(1)+ \\ &+ n(n-1)(n-2)\ldots 2+n(n-1)(n-2)\ldots 3+\ldots+n(n-1)+n = \\ &= 0+n!+\frac{n!}{2!}+\ldots+\frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!} = \\ &= n!\left[1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\right] = n!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Можно записать аналитическое выражение для $T(n)$ через неэлементарные функции, но для решения поставленной задачи достаточно оценить асимптотическое поведение функции $T(n)$.

Заметим, что при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-1=e-1,$$

где $e=2{,}7182818284590\ldots$ — основание натуральных логарифмов. Получаем неравенство

$$n!\leqslant n!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\leqslant(e-1)n!,$$

и, окончательно, $T(n)=\Theta(n!)$.

12.12. *Решение.*

Согласно результату предыдущего упражнения, $T(n)=n!\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}$. Раскроем выражение $en\Gamma(n,1)-n!$ по определению неполной гамма-функции:

$$en\Gamma(n,1)-n!=en\cdot(n-1)!\,e^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1^k}{k!}-n!=n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}-n!=n!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!},$$

что совпадает с $T(n)$.

Примечание. Полезным упражнением будет доказать данное утверждение методом математической индукции.

12.13. *Ответ:*

В качестве первого оператора цикла, реализующего разложение по первой строке матрицы A, добавим строку с проверкой на равенство нулю элемента a_{1i}. Если выполняется условие $a_{1i} = 0$, то следует переходить к очередному элементу первой строки: $i \to i+1$. Это приведет к уменьшению количества рекурсивных вызовов в алгоритме и, следовательно, к сокращению числа операций умножения.

12.14. *Решение.*

Обозначим общее количество умножений, выполняемых алгоритмом из упр. **12.13**, через $T(n)$. Поскольку при выполнении разложения по первой строке матрицы A происходит в среднем pn рекурсивных вызовов, то общее количество умножений удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} T(n) = p(nT(n-1) + n), \quad n > 1, \\ T(1) = 0. \end{cases}$$

Полученному рекуррентному соотношению соответствует функция

$$T(n) = n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p^{n-k}}{k!} = p^n n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p^{-k}}{k!}.$$

Оценка суммы $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{p^{-k}}{k!}$ приводит к неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{p^{-k}}{k!} = p^{-1} + \frac{p^{-2}}{2!} + \ldots > p^{-1} \quad \text{и}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{p^{-k}}{k!} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-k}}{k!} = e^{1/p} - 1.$$

С учетом данных соотношений получаем результат: $T(n) = \Theta(p^n n!)$.

12.15. *Решение.*

Запишем рекуррентное соотношение для количества операций умножений $T(n)$, производимых алгоритмом вычисления определителя в данном случае. Для этого выполним разложение по первой строке матрицы A:

$$\det A = a_{11} \det \widetilde{A}_{11} - a_{12} \det \widetilde{A}_{12},$$

где $\widetilde{A}_{ij}$ — матрица размера $(n-1) \times (n-1)$, получаемая из A удалением i-й строки и j-го столбца.

Отметим, что матрица $\widetilde{A}_{11}$ является трехдиагональной.

Запишем $\det \widetilde{A}_{12}$ также в виде разложения по первой строке.

Таким образом, получаем, что решение задачи сводится к вычислению определителей следующих трех матриц меньшего размера:

1) трехдиагональной матрицы размера $(n-1) \times (n-1)$;

2) трехдиагональной матрицы размера $(n-2) \times (n-2)$;

3) матрицы U размера $(n-2) \times (n-2)$. Данная матрица получена из трехдиагональной путем замены первого столбца на нулевой.

Вычисление определителей матриц пунктов 1)–3) требует $T(n-1)$, $T(n-2)$ и $B(n-2)$ операций умножения соответственно, где через $B(n-2)$ обозначена вспомогательная величина — количество операций умножения для вычисления $\det U$.

Рекуррентные соотношения для общего числа операций умножения $T(n)$ и для величины $B(n)$ могут быть записаны в виде системы:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2) + B(n-2) + 4, \quad n > 2, \\ B(n) = B(n-1) + 1, \quad n > 1, \\ T(1) = 0, \ T(2) = 2, \\ B(1) = 0. \end{cases}$$

Величина $B(n)$ не зависит от $T(n)$, и для нее можно записать отдельное рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} B(n) = B(n-1) + 1, \quad n > 1, \\ B(1) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что для всех натуральных чисел n имеет место равенство $B(n) = n - 1$. Возвращаясь к системе, определяющей величины $T(n)$ и $B(n)$, получим:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n + 1, \quad n > 1, \\ T(1) = 0, \ T(2) = 2. \end{cases}$$

В соответствии с общим правилом нахождения решения линейных неоднородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами представим решение в виде суммы общего $T_{\text{о.о.}}(n)$ и частного $T_{\text{ч.н.}}(n)$ решений (см. главу «Рекуррентные соотношения»):

$$T(n) = T_{\text{о.о.}}(n) + T_{\text{ч.н.}}(n).$$

Общее решение может быть записано в виде $T_{\text{о.о.}}(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$, где z_1, z_2 — корни характеристического уравнения $z^2 = z + 1$:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Частное решение ищем в виде $T_{\text{ч.н.}}(n) = Dn + E$, где D и E — вещественные коэффициенты. Непосредственная подстановка выражения для $T_{\text{ч.н.}}(n)$ в рекуррентное соотношение для $T(n)$ приводит к равенствам $D = -1$, $E = -4$, значит, $T_{\text{ч.н.}}(n) = -n - 4$.

Далее, учет начальных условий $T(1) = 0$, $T(2) = 2$ позволяет вычислить величины C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 5, \\ C_1 \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 8. \end{cases}$$

Решение записанной системы линейных уравнений имеет вид $C_1 = \dfrac{3\sqrt{5}+7}{2\sqrt{5}}$, $C_2 = \dfrac{3\sqrt{5}-7}{2\sqrt{5}}$. В силу этого получаем:

$$T(n) = \frac{3\sqrt{5}+7}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3\sqrt{5}-7}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - n - 4.$$

Упростим полученное выражение. Для этого заметим, что выполняются следующие равенства:

$$\frac{3\sqrt{5}+7}{2\sqrt{5}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4, \quad \frac{3\sqrt{5}-7}{2\sqrt{5}} = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4.$$

Следовательно,

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+4} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+4} - n - 4.$$

Согласно формуле Бине (см. упр. **1.103**) получаем в итоге выражение для искомой величины $T(n)$ через числа Фибоначчи:

$$T(n) = F_{n+4} - (n+4), \quad n \geqslant 1.$$

12.16. *Решение.*

С вероятностью $p_0 = \dfrac{1}{N+1}$ целевой элемент расположен на первом месте в массиве, с той же вероятностью — на втором месте и т. д., вплоть до случая когда целевой элемент отсутствует. Таким образом, для нахождения числа сравнений $A(N)$ следует вычислить сумму

$$A(N) = \frac{1}{N+1}\left(\sum_{i=1}^{N} i + N\right).$$

Как известно, сумма первых членов натурального ряда

$$1 + 2 + \ldots + N = \frac{1}{2}N(N+1)$$

(см. раздел «Справочные материалы», формула (A.56)). Следовательно, выполняется равенство:

$$A(N) = \frac{N^2 + 3N}{2(N+1)}.$$

Заметим, что из полученной формулы следует асимптотическая оценка

$$A(N) = \frac{1}{2}N + 1 - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

12.17. *Ответ:* 3 сравнения.

12.18. *Ответ:* $\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=1}^{3} i2^{i-1} = \dfrac{17}{7}$ сравнений.

12.19. *Ответ:*
1) 1;
2) 4.

12.20. *Ответ:*
1) $\dfrac{21}{8}$;
2) $\dfrac{29}{9}$.

12.21. *Указание.*
Число сравнений удовлетворяет неравенству

$$A(N) \leqslant \frac{1}{2N+1}\left((N+1)h + \sum_{i=1}^{h} i2^{i-1}\right).$$

12.22. *Доказательство.*

Требуется доказать равенство $\sum\limits_{i=1}^{N} i2^i = (N-1)2^{N+1} + 2$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим сумму $\Xi(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} x^i = \dfrac{x^{N+1}-x}{x-1}$ и вычислим производную $\dfrac{d}{dx}\Xi(x)$:

$$\frac{d}{dx}\Xi(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^{N+1}-x}{x-1} = \frac{[(N+1)x^N - 1](x-1) - (x^{N+1}-x)}{(x-1)^2} = \\ = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(x-1)^2}.$$

С другой стороны, $\dfrac{d}{dx}\Xi(x) = \dfrac{d}{dx}\sum\limits_{i=1}^{N} x^i = \sum\limits_{i=1}^{N} ix^{i-1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{i=1}^{N} ix^i$.

Значит,

$$\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{N} ix^i = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(x-1)^2}.$$

В полученном равенстве положим $x = 2$ и придем к соотношению

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} i2^i = \frac{N2^{N+1} - (N+1)2^N + 1}{(2-1)^2}.$$

После упрощения получим равенство (A.61): $\sum\limits_{i=1}^{N} i2^i = (N-1)2^{N+1} + 2$.

12.23. *Ответ:* замените строку с номером 8 на

```
middle = left + (right - left) // 2
```

12.24. *Ответ:*

Дерево принятия решения для поиска Фибоначчи в упорядоченном массиве, состоящем из восьми элементов, изображено на рис. 12.10.

12.25. *Доказательство.*

Рекуррентное соотношение для числа операций сравнения, осуществляемых алгоритмом поиска Фибоначчи в среднем случае, может быть записано в виде (см. стр. 459):

$$\begin{cases} A(N) = \dfrac{1}{\varphi}A\Big(\dfrac{1}{\varphi}N\Big) + \dfrac{1}{\varphi^2}A\Big(\dfrac{1}{\varphi^2}N\Big) + 1, \quad N > 1, \\ A(1) = 1. \end{cases}$$

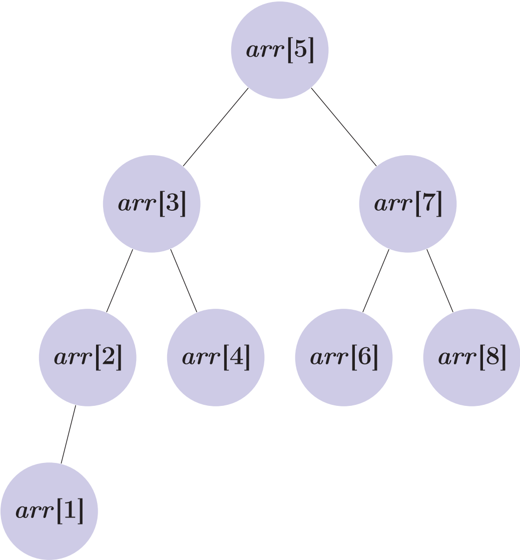


Рис. 12.10. Дерево принятия решения для поиска Фибоначчи в массиве размера $N = 8$

Докажем, что $A(N) = \dfrac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi N + O(1)$, т. е. $A(N) \leqslant \dfrac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi N + C$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$ и всех натуральных N. Подставим последнее неравенство в левую и правую части рекуррентного соотношения:

$$\frac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi N + C = \frac{1}{\varphi}\Big(\frac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi \Big(\frac{1}{\varphi} N\Big) + C\Big) + \frac{1}{\varphi^2}\Big(\frac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi \Big(\frac{1}{\varphi^2} N\Big) + C\Big) + 1.$$

После выполнения алгебраических преобразований будем иметь:

$$\Big(1 - \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\Big)\frac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi N + \Big(\frac{1}{\varphi} + \frac{2}{\varphi^2}\Big)\frac{\varphi}{\sqrt{5}} + \Big(1 - \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\Big) C = 1.$$

Поскольку $\varphi^2 = \varphi + 1$ и $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то, подставляя эти соотношения в предыдущее равенство, получим тождество, справедливое для всех натуральных N.

Следовательно, асимптотическая сложность алгоритма поиска Фибоначчи в среднем случае определяется как

$$A(N) = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \log_\varphi N + O(1).$$

12.27. *Ответ:*
Работа алгоритма сортировки вставками представлена в табл. 12.7.

Таблица 12.7
Работа алгоритма сортировки вставками. Полужирным шрифтом и подчеркиванием отмечены занявшие свои места элементы

1) по возрастанию

Исходный массив	20	12	18	16	24	10	22	14
Исходный массив	**20**	12	18	16	24	10	22	14
1-й проход	**12**	**20**	18	16	24	10	22	14
2-й проход	**12**	**18**	**20**	16	24	10	22	14
3-й проход	**12**	**16**	**18**	**20**	24	10	22	14
4-й проход	**12**	**16**	**18**	**20**	**24**	10	22	14
5-й проход	**10**	**12**	**16**	**18**	**20**	**24**	22	14
6-й проход	**10**	**12**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	14
7-й проход	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**

2) по убыванию

Исходный массив	20	12	18	16	24	10	22	14
Исходный массив	**20**	12	18	16	24	10	22	14
1-й проход	**20**	**12**	18	16	24	10	22	14
2-й проход	**20**	**18**	**12**	16	24	10	22	14
3-й проход	**20**	**18**	**16**	**12**	24	10	22	14
4-й проход	**24**	**20**	**18**	**16**	**12**	10	22	14
5-й проход	**24**	**20**	**18**	**16**	**12**	**10**	22	14
6-й проход	**24**	**22**	**20**	**18**	**16**	**12**	**10**	14
7-й проход	**24**	**22**	**20**	**18**	**16**	**14**	**12**	**10**

12.28. *Ответ:* да.

12.30. *Указание.*
Количество сравнений элементов, совершаемых алгоритмом сортировки двоичными вставками, принадлежит классу $\Theta(N \log_2 N)$. Однако при оценке эффективности следует учитывать еще и число перестановок элементов.

12.31. *Ответ:* нет.

12.32. *Ответ:*
Работа алгоритма пузырьковой сортировки представлена в табл. 12.8.

Таблица 12.8
Работа алгоритма пузырьковой сортировки. Полужирным шрифтом и подчеркиванием отмечены занявшие свои места элементы

1) по возрастанию

Исходный массив	20	12	18	16	24	10	22	14
1-й проход	**10**	20	12	18	16	24	14	22
2-й проход	**10**	**12**	20	14	18	16	24	22
3-й проход	**10**	**12**	**14**	20	16	18	22	24
4-й проход	**10**	**12**	**14**	**16**	20	18	22	24
5-й проход	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	20	22	24
6-й проход	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	22	24
7-й проход	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	24

2) по убыванию

Исходный массив	20	12	18	16	24	10	22	14
1-й проход	**24**	20	12	18	16	22	10	14
2-й проход	**24**	**22**	20	12	18	16	14	10
3-й проход	**24**	**22**	**20**	18	12	16	14	10
4-й проход	**24**	**22**	**20**	**18**	16	12	14	10
5-й проход	**24**	**22**	**20**	**18**	**16**	14	12	10
6-й проход	**24**	**22**	**20**	**18**	**16**	**14**	12	10
7-й проход	**24**	**22**	**20**	**18**	**16**	**14**	**12**	10

12.33. *Ответ:*

1) да;
2) да.

12.35. *Ответ:* 4.

12.36. *Ответ:* 15.

12.37. *Ответ:*

1) $\dfrac{N(N-1)}{2}$;

2) $\dfrac{N(N+1)}{2}$.

12.38. *Указание.* Рассмотрите случаи четных и нечетных значений N.

12.39. *Ответ:* $2N-3$.

12.40. *Ответ:* $\lceil (1+\sqrt{1+8\mathcal{I}})/2 \rceil$.

12.41. *Решение.*

Обозначим через $\mathcal{I}^*$ искомое число инверсий. Удобно вычислить значение величины $2(\mathcal{I}+\mathcal{I}^*)$, равной удвоенному числу всех инверсий в массивах $\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{\ldots}\boxed{a_{N-1}}\boxed{a_N}$ и $\boxed{a_N}\boxed{a_{N-1}}\boxed{\ldots}\boxed{a_2}\boxed{a_1}$, а затем выразить $\mathcal{I}^*$.

При подсчете инверсий особого внимания требуют повторяющиеся элементы массивов. Разобьем множество всех элементов $\{a_i\colon 1 \leqslant i \leqslant N\}$ на m классов эквивалентности E_l, $1 \leqslant l \leqslant m$. Класс эквивалентности E_l образован элементами массива, равными по значению.

Каждый из элементов a_i для $1 \leqslant i \leqslant N$ дает следующий вклад в $2(\mathcal{I}+\mathcal{I}^*)$: $(N-1)-(k_l-1)$, где $k_l = |E_l|$ — мощность множества E_l. Суммируя по всем элементам, получаем

$$2(\mathcal{I}+\mathcal{I}^*) = \sum_{i=1}^{N} [(N-1)-(k_l-1)] = N(N-1) - \sum_{i=1}^{N} (k_l-1) =$$

$$= N(N-1) - \sum_{l=1}^{m} \sum_{a_i \in E_l} (k_l-1) = N(N-1) - \sum_{l=1}^{m} k_l(k_l-1).$$

Окончательно число инверсий в массиве $\boxed{a_N}\boxed{a_{N-1}}\boxed{\ldots}\boxed{a_2}\boxed{a_1}$ равно

$$\mathcal{I}^* = \frac{1}{2}\left[N(N-1) - \sum_{l=1}^{m} k_l(k_l-1)\right] - \mathcal{I}.$$

Если все элементы массива $\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{\ldots}\boxed{a_{N-1}}\boxed{a_N}$ различны, то $\forall l\ k_l = 1$, и выражение для $\mathcal{I}^*$ упрощается: $\mathcal{I}^* = \dfrac{N(N-1)}{2} - \mathcal{I}$.

12.42. *Доказательство.*

Рассмотрим отдельную итерацию цикла, составляющего строки 2–10 алгоритма сортировки вставками (см. стр. 465), и предположим, что $i = m$, где $2 \leqslant m \leqslant N$. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ образуют упорядоченную последовательность. Пусть после завершения итерации цикла, отвечающей значению $i = m$, текущий элемент a_m займет позицию с индексом l_m, $1 \leqslant l_m \leqslant m$. Это означает, что в подмассиве $a[1..m]$ элемент a_m участвует в образовании инверсий (a_{l_m}, a_m), (a_{l_m+1}, a_m), $\ldots$, (a_{m-1}, a_m), и только их. Количество таких инверсий равно $m - l_m$. Следовательно, общее число инверсий в исходном массиве размера N можно выразить соотношением

$$\mathcal{I} = \sum_{m=2}^{N}(m - l_m).$$

Обратимся теперь к расчету количества сравнений, выполняемых алгоритмом сортировки вставками при упорядочении исходного массива. По достижении во внешнем цикле значения $i = m$ текущий элемент a_m будет участвовать в сравнениях с элементами a_{m-1}, a_{m-2}, ..., a_{l_m}, и, наконец, если $l_m > 1$, то с элементами $a_{l_m - 1}$. Значит, количество сравнений на данной итерации цикла по переменной i равно $(m - l_m + 1)$, если $l_m > 1$, или $(m - l_m)$, если $l_m = 1$.

Полное число сравнений можно оценить суммированием величин $(m - l_m + O(1))$ по переменной m:

$$\mathcal{C} = \sum_{m=2}^{N}(m - l_m + O(1)) = \sum_{m=2}^{N}(m - l_m) + O(N).$$

Используя полученное выше соотношение для $\mathcal{I}$, приходим к выражению

$$\mathcal{C} = \mathcal{I} + O(N).$$

Итак, количество сравнений, выполняемых алгоритмом сортировки вставками для упорядочения исходного массива, равно $\mathcal{I} + O(N)$.

12.43. *Ответ:* нет.

12.44. *Ответ:*
Элементы, стоящие на четных местах, и элементы, стоящие на нечетных местах, не сравниваются между собой вплоть до заключительного этапа, которому отвечает смещение $h = 1$.

12.45. *Решение.*
Число сравнений, проводимых алгоритмом сортировки выбором, не зависит от степени упорядоченности массива и равно $\Theta(N^2)$, где N — размер массива. Следовательно, асимптотическая сложность алгоритма, использующего сортировку выбором для h-упорядочения подмассивов, будет равна

$$W(N) = \sum_{s=0}^{s_{\max}} h_s \Theta\Big(\Big(\frac{N}{h_s}\Big)^2\Big) = \Theta\Big(N^2\Big(\sum_{s=0}^{s_{\max}}\frac{1}{h_s}\Big)\Big),$$

где h_s — применяемые смещения ($s = 0, 1, \ldots, s_{\max}$). Для суммы величин, обратных к h_s, выполняются неравенства $1 < \sum\limits_{s=0}^{s_{\max}} \dfrac{1}{h_s} < H_N$, где H_N — гармоническое число. Следовательно, $W(N) = \Omega(N^2)$.

Заметим, что эффективность сортировки Шелла достигается благодаря особенности алгоритма сортировки вставками, а именно, из-за малого числа сравнений в случае почти полностью отсортированного массива.

12.46. *Доказательство.*

Пусть массив a размера N является k-упорядоченным. Покажем, что h-сортировка не нарушит k-упорядоченность данного массива для всех $1 \leqslant h < k < N$. Для простоты предполагаем, что все элементы $a[i]$, где $1 \leqslant i \leqslant N$, различны.

Рассмотрим два случая [124]:

1) h является делителем k;

2) h не делит k нацело.

Легко убедиться в справедливости теоремы для случая 1). Действительно, элементы, отстоящие друг от друга на расстоянии $k = c \cdot h$, где $c \in \mathbb{N}$, образуют упорядоченные подмассивы. После h-упорядочения остаются верными неравенства $\ldots < a[j-k] < a[j] < a[j+k] < \ldots$

Перейдем к случаю 2), когда не существует такого натурального числа c, что $k = c \cdot h$. Воспользуемся методом математической индукции по числу h-инверсий.

Расположим элементы k-упорядоченного массива в виде матрицы $a_{i,j}$ с k строками и $\lceil N/k \rceil$ столбцами. Матрица $(a)_{ij}$ заполняется элементами массива a по столбцам, последний столбец при необходимости дополняется элементами с бóльшими значениями, превышающими $\max\limits_i(a[i])$. Отметим, что k-упорядочение означает, что каждая из строк матрицы образует упорядоченный массив. Докажем, что устранение h-инверсий не нарушит эту упорядоченность.

Если в массиве присутствуют h-инверсии, то всегда можно выбрать из них такую, которая образована элементами на расстоянии h, например $a_{i,j}$ и $a_{i+h,j}$ (или $a_{i,j}$ и $a_{i+h-k,j+1}$, если $i + h > k$). Рассмотрим случай инверсии $(a_{i,j}, a_{i+h,j})$ и попробуем устранить ее.

Поскольку строки матрицы упорядочены, имеют место неравенства

$$a_{i,j-1} < a_{i,j} < a_{i,j+1}, \quad a_{i+h,j-1} < a_{i+h,j} < a_{i+h,j+1}.$$

Далее, в соответствии с выбором рассматриваемой инверсии

$$a_{i,j-1} < a_{i+h,j-1}, \quad a_{i,j} > a_{i+h,j}.$$

Из приведенных неравенств вытекают соотношения (табл. 12.9):

$$a_{i,j-1} < a_{i+h,j}, \quad a_{i+h,j-1} < a_{i,j}, \quad a_{i+h,j} < a_{i,j+1}.$$

Таким образом, осталось проверить соотношение между элементами $a_{i,j}$ и $a_{i+h,j+1}$.

Если $a_{i,j+1} < a_{i+h,j+1}$, получаем $a_{i,j} < a_{i+h,j+1}$.

Таблица 12.9

Элементы матрицы a и инверсия $(a_{i,j}, a_{i+h,j})$

$$\begin{array}{ccccc} a_{i,j-1} & < & a_{i,j} & < & a_{i,j+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \wedge & & \vee & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i+h,j-1} & < & a_{i+h,j} & < & a_{i+h,j+1} \end{array}$$

Если $a_{i,j+1} > a_{i+h,j+1}$, то элементы $a_{i,j}$ и $a_{i+h,j+1}$ могут быть расположены в инверсивном порядке. Устранение инверсии $(a_{i,j+1}, a_{i+h,j+1})$ приведет, возможно, к инверсии $(a_{i,j+1}, a_{i+h,j+2})$. В итоге либо закончим, достигнув пары $a_{i,l} < a_{i+h,l}$ для некоторого $1 < l \leqslant \lceil N/k \rceil$, либо выйдем за пределы матрицы. В любом случае строки остались упорядоченными, а число h-инверсий уменьшилось. Случай $i + h > k$ рассматривается аналогично.

Таким образом, после h-упорядочения массив не утратил свойство k-упорядоченности.

12.47. *Ответ:* $H = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27\}$.

12.48. *Ответ:* Множество смещений для массива размера $N = 8$ имеет вид $H = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Работа алгоритма сортировки Шелла представлена в табл. 12.10.

Таблица 12.10

Работа алгоритма сортировки Шелла на основе последовательности, предложенной Праттом

Исходный массив	20 12 18 16 24 10 22 14
После 6-упорядочения	20 12 18 16 24 10 22 14
После 4-упорядочения	20 10 18 14 24 12 22 16
После 3-упорядочения	14 10 12 20 16 18 22 24
После 2-упорядочения	12 10 14 18 16 20 22 24
После 1-упорядочения	10 12 14 16 18 20 22 24

12.49. *Доказательство:*

Как известно, варианты смещений, предложенных Праттом, образуют множество $H = \{2^i 3^j \colon 2^i 3^j < N$ **и** $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, где N — размер массива, подлежащего упорядочению.

Для заданного N мощность множества H совпадает с числом решений неравенства $i\ln 2 + j\ln 3 < \ln N$ в целых неотрицательных числах. В силу этого (см. рис. 12.11, на котором пунктиром проведена прямая $i\ln 2 + j\ln 3 = \ln N$) имеем:

$$\frac{1}{2}(\lceil\log_2 N\rceil - 1)(\lceil\log_3 N\rceil - 1) < |H| < \frac{1}{2}(\lceil\log_2 N\rceil + 1)(\lceil\log_3 N\rceil + 1),$$

или $|H| = \Theta\big((\log_2 N)^2\big)$.

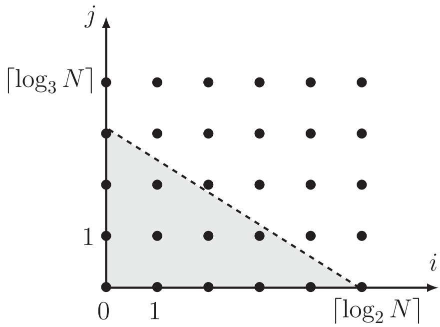


Рис. 12.11. Оценка количества решений неравенства $i\ln 2 + j\ln 3 < \ln N$ в целых неотрицательных числах

Рассмотрим s-й этап сортировки Шелла, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть на данном этапе смещение равно h_s. В зависимости от соотношения между величинами h_s и $\dfrac{N}{6}$ можно выделить два случая.

1. Пусть $h_s \geqslant \dfrac{N}{6}$. Тогда каждый из формируемых на s-м этапе подмассивов имеет размер не более $\left\lceil\dfrac{N}{h_s}\right\rceil$ и, следовательно, содержит не более $\dfrac{1}{2}\left\lceil\dfrac{N}{h_s}\right\rceil\left(\left\lceil\dfrac{N}{h_s}\right\rceil - 1\right)$ инверсий. С учетом неравенства $\left\lceil\dfrac{k}{m}\right\rceil \leqslant \dfrac{k+m-1}{m}$, справедливого для всех $k, m \in \mathbb{N}$, получим общее количество сравнений на s-м этапе сортировки Шелла:

$$\frac{1}{2}\left\lceil\frac{N}{h_s}\right\rceil\left(\left\lceil\frac{N}{h_s}\right\rceil - 1\right)h_s < \frac{N(N+h_s)}{2h_s} < 6N = O(N).$$

2. Пусть $h_s < \dfrac{N}{6}$. Тогда выполняются неравенства $2h_s < N$ и $3h_s < N$. На s-м этапе сортировки рассматриваемый массив является $3h_s$- и $2h_s$-упорядоченным в силу выбора величин смещений. Следовательно, в каждом из подмассивов, образованных h_s-ми элементами исходного массива,

произвольный элемент $a[k]$ образует не более одной инверсии. Для упорядочения h_s подмассивов потребуется не более $2\left\lceil\dfrac{N}{h_s}\right\rceil h_s = O(N)$ сравнений. Действительно, элементы $a[k_1]$ и $a[k_2]$ при $k_1 < k_2$ могут образовывать инверсию только в случае, если $k_2 - k_1 \neq 2c_1 + 3c_2$ для всех целых неотрицательных чисел c_1 и c_2. Следовательно, $k_2 = k_1 + 1$, и размещение некоторого элемента на искомой позиции потребует не более двух сравнений. Заметим, что 2- и 3-упорядоченный массив a размера N содержит не более $\lceil N/2\rceil$ инверсий [37].

Итак, произвольному смещению $h_s \in H$ отвечают $O(N)$ операций сравнения элементов массива. Учитывая, что $|H| = \Theta\big((\log_2 N)^2\big)$, получаем оценку сверху числа сравнений в наихудшем случае $O\big(N(\log_2 N)^2\big)$.

Обратимся к рассмотрению нижней оценки величины $W(N)$. Количество сравнений, выполняемых вспомогательной сортировкой вставками, на единицу меньше размера массива. На s-м этапе, которому отвечает смещение h_s, выполняются не менее $h_s\left(\left\lceil\dfrac{N}{h_s}\right\rceil - 1\right) = \Omega(N)$ сравнений.

Окончательно получаем, что количество сравнений элементов массива в наихудшем случае удовлетворяет соотношению

$$W(N) = \Theta\big(N(\log_2 N)^2\big).$$

12.51. *Ответ:*
1) $h_s = 2^{s+1} - 1,\ \ 0 \leqslant s < \lfloor\log_2 N\rfloor$;
2) $h_s = (3^{s+1} - 1)/2,\ \ 0 \leqslant s < \lfloor\log_3(2N+1)\rfloor - 1$.

12.52. *Ответ:* 33.

12.53. *Ответ:* нет.

12.55. *Решение.*
При упорядочении массива, все элементы которого попарно равны, в процедуре разбиения массива выполняется $2\left\lceil\dfrac{N}{2}\right\rceil$ сравнений элементов массива с осевым элементом. Поскольку осевой элемент будет помещен на позицию с индексом $\left\lceil\dfrac{N+1}{2}\right\rceil$, то для числа сравнений $T(N)$ элементов массива имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} T(N) = T\left(\left\lfloor\dfrac{N}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor\dfrac{N-1}{2}\right\rfloor\right) + 2\left\lceil\dfrac{N}{2}\right\rceil,\ N > 2,\\ T(1), T(2) - \text{const}, \end{cases}$$

откуда следует $T(N) = \Theta(N\log_2 N)$.

12.56. *Ответ:*

Рекуррентное соотношение, определяющее число сравнений элементов $A(N)$, имеет вид:

$$\begin{cases} A(N) = N + 1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{(k-1)(N-k)}{C(N,3)} \left(A(k-1) + A(N-k)\right), \ N > 2, \\ A(0), A(1), A(2) - \text{const}, \end{cases}$$

где $C(N,3)$ — биномиальный коэффициент, равный числу сочетаний без повторений трех элементов из N возможных. Тщательный анализ [131] с учетом нулевых начальных условий $A(0) = A(1) = A(2) = 0$ показывает, что $A(N) = \dfrac{12}{7} N \ln N + \Theta(N)$.

12.59. *Решение.*

Упорядочив элементы исходного массива в порядке возрастания, получим: $\boxed{10}\boxed{12}\boxed{14}\boxed{16}\boxed{18}\boxed{20}\boxed{22}\boxed{24}$. Поскольку размер массива $N = 8$ и $\left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil = 4$, то медиана m массива равна элементу, расположенному в упорядоченной последовательности на четвертом месте. Следовательно, $m = 16$.

12.60. *Ответ:*

1) $m = \left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil$;

2) $m = 2^{\lfloor N/2 \rfloor}$.

12.61. *Ответ:*

$$m(a,b,c) = \frac{a+c}{2} + \frac{1}{4}\Big(\big|a - 2b + c - |a-c|\big| - \big|a - 2b + c + |a-c|\big|\Big).$$

12.62. *Доказательство.*

Предположим, что все элементы массива a образуют конечное множество $A = \{a_i \colon 1 \leqslant i \leqslant N\}$. Для установления факта, что некоторый элемент $b \in A$ является k-м по величине элементом, необходимо сравнить его со всеми остальными элементами и определить элементы множества $L = \{a_i \colon a_i < b\}$ [138].

Далее, пусть с помощью некоторого дерева принятия решения T можно определить искомый элемент b. Сформируем новое дерево T^*, в котором удалены узлы со сравнениями вида $(a_i \mathbin{?} a_j)$, где $a_i \in L$, $a_j \in A \setminus L$, и, кроме того, удалены правые поддеревья таких узлов. Поскольку известно, что каждый из элементов множества L меньше любого из элементов множества $A \setminus L$, то данное преобразование исходного дерева не приведет к потере информации о величине b.

Заметим, что дерево T^* имеет не менее $2^{|A\setminus L|-1} = 2^{N-k}$ листьев в силу того, что с помощью T^* можно определить наименьший элемент в $A \setminus L$, т. е. искомый элемент b.

Элементы множества L из исходного множества A могут быть выбраны $C(N, k-1)$ способами. Следовательно, по правилу произведения (см. главу «Комбинаторика» на стр. 187) получим, что дерево T содержит не менее $2^{N-k}C(N, k-1)$ листьев.

12.63. *Доказательство.*
Как следует из упражнения **12.62**, в дереве принятия решения T для задачи определения k-го по величине элемента массива число листьев l удовлетворяет неравенству $l \geqslant 2^{N-k}C(N, k-1)$. Для высоты h дерева T получаем оценку

$$h \geqslant \lceil \log_2 l \rceil \geqslant N - k + \lceil \log_2 C(N, k-1) \rceil.$$

12.64. *Указание.*
Воспользуйтесь результатом упражнения **12.63** для случая $k = 2$.

12.65. *Ответ:* 6 сравнений.

12.67. *Ответ:*
Работа алгоритма SelectPart представлена в табл. 12.11.

Таблица 12.11

Работа алгоритма SelectPart. Квадратными скобками и полужирным шрифтом обозначена анализируемая часть массива, осевые элементы подчеркнуты

Исходный массив	20	12	18	16	24	10	22	14
1-й шаг	**[10**	**12**	**18**	**16**	**14]**	$\underline{20}$	22	24
2-й шаг	$\underline{10}$	**[12**	**18**	**16**	**14]**	20	22	24
3-й шаг	10	$\underline{12}$	**[18**	**16**	**14]**	20	22	24
4-й шаг	10	12	**[14**	**16]**	$\underline{18}$	20	22	24
5-й шаг	10	12	$\underline{14}$	**[16]**	18	20	22	24
6-й шаг	10	12	14	$\underline{16}$	18	20	22	24

12.68. *Ответ:* $T(N) = 2N + 1$ для $N > 2$.

12.71. *Решение.*

Как известно, рекуррентное соотношение, описывающее сложность алгоритма SelectOpt, имеет вид

$$\begin{cases} T(N) = T\left(\dfrac{N}{w}\right) + T\left(\dfrac{3N}{4}\right) + \Theta(N), \ N > w, \\ T(1),\, T(2),\, \ldots,\, T(w) - \mathrm{const}. \end{cases}$$

Из упражнения **12.70** следует, что достаточным условием соотношения $T(N) = \Theta(N)$ является неравенство $\dfrac{1}{w} + \dfrac{3}{4} < 1$. Следовательно, при $w > 4$ алгоритм определения k-й порядковой статистики будет иметь асимптотическую сложность, линейную по величине N.

Глава 13

Параллельные алгоритмы

В связи с существованием трудоемких вычислительных задач, а также активным развитием многопроцессорных компьютерных систем особое внимание в настоящее время привлекают проблемы разработки и анализа параллельных алгоритмов.

Большое разнообразие существующих архитектур вычислительных систем приводит к необходимости их классификации по различным параметрам. Исторически один из первых способов разделения архитектур по критерию множественности потоков команд и потоков данных был предложен Флинном[1].

Поток определяется как последовательность команд или данных, выполняемых или обрабатываемых процессором [70, 80]. С этой точки зрения программа предоставляет процессору поток инструкций для исполнения; данные для обработки поступают также в виде потока. В соответствии с классификацией Флинна потоки команд и потоки данных предполагаются независимыми. В связи с этим вычислительные системы разделяют на следующие классы.

1. Один поток команд, один поток данных (Single Instruction stream, Single Data stream; SISD). Такими характеристиками обладают стандартные компьютеры с одноядерным процессором, которые в каждый момент времени могут выполнять только одно действие.

2. Один поток команд, несколько потоков данных (Single Instruction stream, Multiple Data stream; SIMD). В таких системах одна и та же операция выполняется одновременно над различными данными. К данному классу относят, например, векторные вычислительные системы, в которых одна команда может выполняться над множеством элементов данных.

[1] Флинн (Michael J. Flynn) (род. 1934).

3. Несколько потоков команд, один поток данных (Multiple Instruction stream, Single Data stream; MISD). Несмотря на недостаточную практическую значимость данного подхода, машины MISD могут быть полезны в некоторых узкоспециальных задачах.

4. Несколько потоков команд, несколько потоков данных (Multiple Instruction stream, Multiple Data stream; MIMD). Системы MIMD составляют наиболее обширную и разнообразную группу в классификации Флинна. Большинство современных многопроцессорных вычислительных систем относится именно к этому классу.

Свойства рассмотренных классов вычислительных систем схематично представлены в табл. 13.1. В ячейках записаны примеры арифметических операций, доступных для одновременного выполнения соответствующими системами.

Таблица 13.1

Классификация Флинна

Вычислительные системы

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">поток данных</td></tr>
<tr><td>один</td><td>несколько</td></tr>
<tr><td rowspan="2">поток команд</td><td>один</td><td>SISD
$a_1 + b_1$</td><td>SIMD
$a_1 + b_1$
$a_2 + b_2$
$a_3 + b_3$</td></tr>
<tr><td>несколько</td><td>MISD
$a_1 + b_1$
$a_1 - b_1$
$a_1 * b_1$</td><td>MIMD
$a_1 + b_1$
$a_2 - b_2$
$a_3 * b_3$</td></tr>
</table>

Широко используется уточнение классификации Флинна, согласно которому происходит разделение категории MIMD по способу организации памяти вычислительной системы. Среди MIMD-систем выделяют **мультипроцессоры** — машины с общей памятью (Uniform Memory Access, UMA) и **мультикомпьютеры** — машины, не обладающие удаленным доступом к памяти (NO Remote Memory Access, NORMA). Взаимодействие между процессорами в мультикомпьютерах осуществляется с помощью механизма передачи сообщений [5, 129].

Модель PRAM

В данной книге до сих пор использовалась модель вычислительной системы, называемая **машиной с произвольным доступом к памяти** (Random Access Machine, RAM) [91, 123]. Перечислим основные свойства RAM.

Система, работающая в рамках модели RAM, состоит из процессора, устройства доступа к памяти (системной шины) и памяти, состоящей из конечного числа ячеек (рис. 13.1). Процессор последовательно выполняет команды, заложенные в программе П; ему доступны основные арифметические и логические операции и чтение/запись данных в память. Постулируется, что каждая команда выполняется за фиксированное время.

Произвольное действие процессора состоит из трех этапов:

1) чтение данных из памяти в один из своих регистров r_i, где $1 \leqslant i \leqslant N$;

2) выполнение арифметической или логической операции над содержимым своих регистров;

3) запись данных из регистра r_j, где $1 \leqslant j \leqslant N$, в некоторую ячейку памяти.

Считается, что исполнение трех перечисленных шагов требует времени $\Theta(1)$.

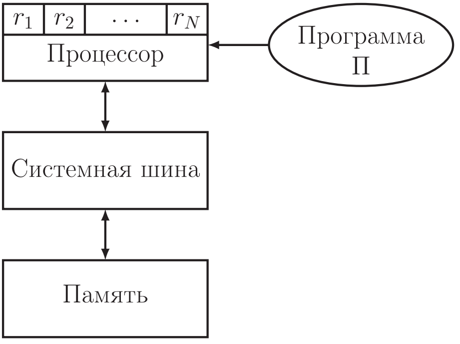


Рис. 13.1. Модель RAM

Одна из самых распространенных моделей параллельных компьютерных систем — параллельная машина с произвольным доступом к памяти (Parallel Random Access Machine, PRAM) [123, 129]. В PRAM объединены p процессоров, общая память и устройство управления, которое передает команды программы П процессорам (рис. 13.2).

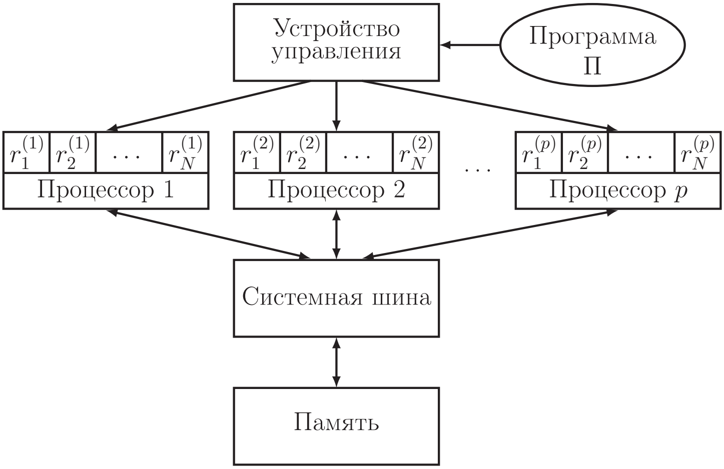


Рис. 13.2. Модель PRAM

Важной особенностью PRAM является ограниченное время доступа любого из процессоров системы к произвольной ячейке памяти. Как и в случае RAM, шаг алгоритма соответствует трем действиям процессора:

1) чтение данных процессором P_i из j-й ячейки памяти;

2) выполнение арифметической или логической операции процессором P_i над содержимым своих регистров;

3) запись данных в k-ю ячейку памяти.

Подчеркнем еще раз, что шаг алгоритма выполняется за время $\Theta(1)$.

Одновременное обращение двух и более процессоров к одной и той же ячейке памяти приводит к **конфликтам доступа**. Они подразделяются на **конфликты чтения** и **конфликты записи**.

Если несколько процессоров пытаются прочесть данные из одной ячейки, то возможны два варианта дальнейших действий.

1. Исключающее чтение (Exclusive Read, ER). В данный момент времени чтение разрешено только одному процессору, в противном случае происходит ошибка выполнения программы.

2. Одновременное чтение (Concurrent Read, CR). Количество процессоров, получающих доступ к одной ячейке памяти, не ограничивается.

Если более одного процессора пытаются записать данные по одному адресу, разделяют два способа действия.

1. Исключающая запись (Exclusive Write, EW). Только одному процессору разрешено осуществлять запись в данную ячейку в конкретный момент времени.

2. Одновременная запись (Concurrent Write, CW). Несколько процессоров сразу получают доступ для записи к одной ячейке памяти.

Возникающие в последнем случае варианты того, по какому правилу будет определяться процессор (или процессоры), который осуществит запись, представлены ниже [112, 123, 129].

— *Запись общего значения.* Предполагается, что все процессоры, готовые производить запись в одну ячейку памяти, обязаны записывать общее для всех них значение, иначе инструкция записи считается ошибочной.

— *Произвольный выбор.* Процессор, осуществляющий запись, выбирается случайным образом.

— *Запись с учетом приоритетов.* Каждому из конкурирующих процессоров присваивается некоторый приоритет, например, его порядковый номер, при этом сохраняется только то значение, которое поступило от процессора с определенным заранее приоритетом (например, наименьшим).

— *Комбинированный выбор.* Все процессы выдают значения для записи, из них по определенному правилу формируется результат (например, сумма значений, максимальное значение и др.), который и записывается.

Классификация PRAM по методам разрешения конфликтов представлена на рис. 13.3.

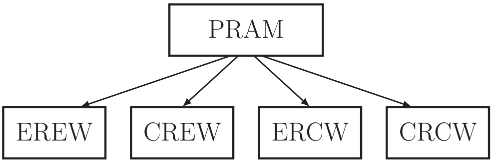


Рис. 13.3. Методы разрешения конфликтов в PRAM

Таким образом, системы EREW обладают существенными ограничениями, налагаемыми на работу с ячейками памяти. С другой стороны, системы CREW, ERCW, CRCW с большим количеством процессоров трудно построить по техническим причинам, поскольку количество вычислительных ядер, одновременно получающих доступ к некоторому участку памяти, ограничено. Однако существует важный и несколько неожиданный результат, позволяющий моделировать работу CRCW-машины на системе, построенной в соответствии с принципом EREW [133].

Теорема об эмуляции. *Пусть алгоритм для CRCW-машины решает некоторую задачу с параметром размера N за время $T(N)$, используя p процессоров. Тогда существует алгоритм для той же задачи на EREW-системе с p процессорами, который может быть исполнен за время $O(T(N)\log_2 N)$. (Объем памяти PRAM должен быть увеличен в $O(p)$ раз.)*

В отличие от модели RAM, основной мерой сложности алгоритмов для многопроцессорных вычислительных систем является время исполнения алгоритма. Введем обозначения: $T_1(N)$ — время, затрачиваемое последовательным алгоритмом на решение задачи, сложность которой оценивается параметром N; $T_p(N)$ — время, затрачиваемое параллельным алгоритмом на машине с p процессорами, причем $p > 1$. Поскольку, как следует из определения RAM, каждая операция требует вполне определенного времени, величина $T_1(N)$ пропорциональна числу вычислительных операций в используемом алгоритме.

Заметим, что минимальное время исполнения алгоритма наблюдается в случае $p \to \infty$. Гипотетическую вычислительную систему с бесконечно большим количеством доступных процессоров называют **паракомпьютером**. Асимптотическую сложность алгоритма для паракомпьютера обозначают через $T_\infty(N)$.

Для анализа параллельных алгоритмов широко применяются понятия **ускорения**, **эффективности** и **стоимости**. Прежде всего следует обратить внимание на то, насколько быстрее будет решена задача по сравнению с решением на однопроцессорной машине.

Ускорение $S_p(N)$, получаемое при использовании параллельного алгоритма на машине с p процессорами, равно $S_p(N) = \dfrac{T_1(N)}{T_p(N)}$. Это мера прироста производительности по сравнению с *наилучшим* последовательным алгоритмом. Чем больше ускорение, тем больше отличается время решения задачи на системе с одним процессором от продолжительности работы алгоритма на многопроцессорной системе.

Эффективность $E_p(N)$ использования процессоров конкретным параллельным алгоритмом равна $E_p(N) = \dfrac{T_1(N)}{pT_p(N)} = \dfrac{S_p(N)}{p}$.

Стоимость вычислений $C_p(N)$ определяется как произведение времени параллельного решения задачи и числа используемых процессоров: $C_p(N) = pT_p(N)$. **Стоимостно-оптимальный алгоритм** характеризуется стоимостью, пропорциональной сложности наилучшего последовательного алгоритма [23], и в этом случае $\dfrac{C_p(N)}{T_1(N)} = \Theta(1)$.

Предельные значения величин ускорения и эффективности, как непосредственно следует из их определений, равны $S_p = p$, $E_p = 1$. Максимально возможное значение S_p достигается, когда удается равномерно распределить вычисления по всем процессорам и не требуется дополнительных действий для обеспечения взаимодействия между процессорами на этапе работы программы и для объединения результатов. Попытка увеличить ускорение, изменив число процессоров, приведет к уменьшению величины E_p, и наоборот. Максимальная эффективность достигается при использовании единственного процессора ($p = 1$).

Здесь не обсуждается эффект сверхлинейного ускорения [140], который может возникнуть в моделях, отличных от PRAM, по нескольким причинам:

— последовательный алгоритм, используемый для сравнения, неоптимален;

— архитектура многопроцессорной системы имеет специфические особенности;

— алгоритм недетерминирован;

— имеются существенные различия в объемах доступной оперативной памяти, когда последовательному алгоритму требуется обращаться к относительно «медленной» периферической памяти, а параллельный алгоритм использует только «быструю» память.

Многие из описанных ниже алгоритмов требуют наличия достаточно большого количества процессоров. К счастью, это не ограничивает их практическое применение, поскольку для любого алгоритма в модели PRAM существует возможность его модификации для системы с меньшим числом процессоров. Последнее утверждение носит название леммы Брента[1] [2, 90, 122].

Лемма Брента. *Пусть параллельный алгоритм $\mathcal{A}$ для решения некоторой задачи исполняется на RAM за время T_1, а на паракомпьютере — за время T_∞. Тогда существует алгоритм $\mathcal{A}'$ для решения данной задачи, такой, что на PRAM с p процессорами он исполняется за время $T(p)$, причем* $T(p) \leqslant T_\infty + \dfrac{T_1 - T_\infty}{p}$.

Доказательство леммы Брента приведено в решении упражнения **13.8**.

В любой параллельной программе есть последовательная часть, которая образована операциями ввода/вывода, синхронизации и т. д. Предположим, что по сравнению с последовательным способом решения:

1) при разделении задачи на независимые подзадачи временные затраты на межпроцессорное взаимодействие и объединение результатов пренебрежимо малы;

2) время работы параллельной части программы уменьшается пропорционально числу вычислительных узлов.

При сделанных предположениях известна оценка величины S_p.

[1] Брент (Richard Peirce Brent) (род. 1946).

Закон Амдала[1]. *Пусть f — доля последовательных вычислений в алгоритме $\mathcal{A}$. Тогда ускорение при использовании $\mathcal{A}$ на системе из p процессоров удовлетворяет неравенству*

$$S_p \leqslant \frac{1}{f + (1-f)/p}.$$

Для доказательства подсчитаем время исполнения алгоритма при работе на мультипроцессорной системе. Оно складывается из последовательных операций fT_1 и тех операций, которые могут быть распараллелены, и равно $T_p = fT_1 + \dfrac{1-f}{p}T_1$. Следовательно, верхний предел для ускорения может быть представлен в виде:

$$(S_p)_{\max} = \frac{T_1}{fT_1 + (1-f)T_1/p} = \frac{1}{f + (1-f)/p},$$

что и доказывает закон Амдала.

Неравенство $S_p \leqslant (S_p)_{\max}$ показывает, что существование последовательных вычислений, которые не могут быть распараллелены, накладывает ограничение на S_p. Даже при использовании паракомпьютера ускорение не превысит величины $S_\infty = \dfrac{1}{f}$. На рис. 13.4 изображены зависимости S_p от числа процессоров p для типичных значений параметра f в вычислительных задачах.

Эмпирически установлено [23], что для широкого класса вычислительных задач доля последовательных вычислений убывает с ростом размера входных данных задачи. В силу этого на практике ускорение может быть увеличено за счет увеличения вычислительной сложности решаемой задачи.

Несмотря на широкое распространение модели PRAM, не следует забывать о ее недостатках. В частности, полностью игнорируется вопрос о различных скоростях передачи данных для разных процессоров в конкретных архитектурах вычислительных систем.

Структура алгоритма решения задачи наглядно может быть представлена в виде ориентированного графа «операции–операнды». Он является ациклическим орграфом. Обозначим его $D = (V, E)$, где V есть множество вершин, представляющих выполняющиеся операции, а E — множество дуг. Дуга $v_i v_j \in E$, если и только если операция с номером j использует результат выполнения операции с номером i. Вершины $v_k^{(\mathrm{in})}$, где $k \in \mathbb{N}$, с полустепенью захода $\forall k\ d^-(v_k^{(\mathrm{in})}) = 0$ используются для

[1] Амдал (Gene Myron Amdahl) (1922–2015).

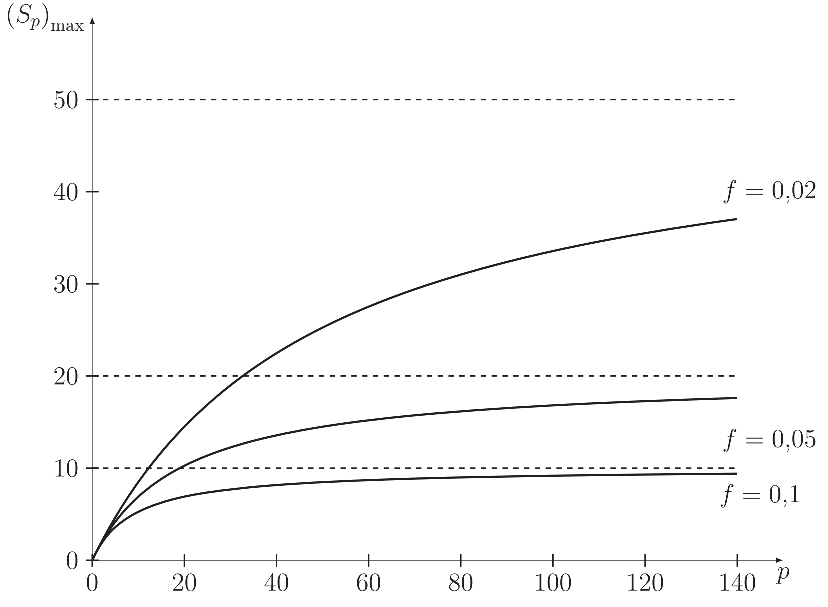


Рис. 13.4. Иллюстрация закона Амдала. Зависимости значений максимального ускорения $(S_p)_{\max}$ от числа процессоров p при разных f — долях последовательных вычислений

операций ввода данных, вершины $v_l^{(\mathrm{out})}$, $l \in \mathbb{N}$, с полустепенью исхода $\forall l\ d^+(v_l^{(\mathrm{out})}) = 0$, соответствуют операциям вывода (рис. 13.5).

В предположении, что вычисления на каждой из вершин орграфа D при использовании RAM занимают постоянное время τ, время исполнения алгоритма на паракомпьютере будет равно

$$T_\infty = \tau \cdot \max_{(i,j)} \big(|C^{(i,j)}|\big),$$

где $C^{(i,j)}$ — путь $v_i^{(\mathrm{in})}, \ldots, v_j^{(\mathrm{out})}$, и максимум берется по всевозможным парам (i, j). Иными словами, время T_∞ пропорционально количеству вершин в максимальном из путей, соединяющих вершины $v_i^{(\mathrm{in})}$ и $v_j^{(\mathrm{out})}$ для некоторых i и j.

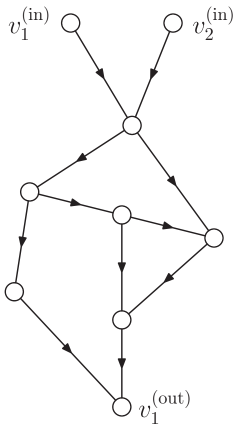


Рис. 13.5. Пример орграфа «операции–операнды»

Задачи о сумме и о частичных суммах

Рассмотрим задачу о вычислении суммы элементов массива $arr[1..N]$, где $N = 2^m$, для некоторого целого положительного m. Параллельная версия алгоритма для решения данной задачи может быть получена из следующих соображений. Построим полное двоичное дерево, листья которого соответствуют элементам $arr[i]$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Во внутренние вершины будем помещать сумму значений, находящихся в двух вышестоящих вершинах. Тогда на самом нижнем уровне получится искомая величина $\sum\limits_{i=1}^{N} arr[i]$. Особенностью такой последовательности суммирования является независимость операции сложения на i-м уровне дерева от остальных операций на данном уровне [123, 140].

Пример вычисления суммы для $N = 8$ изображен на рис. 13.6. Обозначение $[i..j]$ внутренней вершины на рисунке указывает на то, что в данной ячейке содержится сумма $\sum\limits_{k=i}^{j} arr[k]$.

Отметим, что в текстах программ данной главы будет использоваться служебное слово `parallel`. Запись

```
parallel for i in range(1, N+1):
```

означает, что итерации цикла по переменной i следует распределить по доступным вычислительным узлам следующим образом. Первый процессор P_1 выполняет команды тела цикла, используя значение $i = 1$, второй процессор P_2 использует $i = 2$ и т. д. Если не оговорено иное, предполагается наличие достаточного числа процессоров $p \geqslant N$ для полного распараллеливания цикла. Тем не менее в случае $p < N$ алгоритмы остаются корректными, в силу того что очередное значение $i = p + 1$ обрабатывается снова первым процессором, $i = p + 2$ — вторым и т. д. Такой порядок распределения вычислительной нагрузки называется **блочно-циклическим** [19]. Другими словами, процессор P_k, где $1 \leqslant k \leqslant p$, исполняет следующие итерации:

$$i = \begin{cases} k, p+k, \ldots, p\Big(\Big\lfloor \dfrac{N}{p} \Big\rfloor - 1\Big) + k, \text{ если } k > N - p\Big\lfloor \dfrac{N}{p} \Big\rfloor, \\ k, p+k, \ldots, p\Big\lfloor \dfrac{N}{p} \Big\rfloor + k, \text{ если } k \leqslant N - p\Big\lfloor \dfrac{N}{p} \Big\rfloor. \end{cases}$$

Действие служебного слова `parallel` аналогично директиве

```
#pragma omp parallel for schedule (static, 1)
```

в среде OpenMP [92, 121, 129]. В частности, код на языке C, соответствующий строке `parallel for in range (N)` ..., имеет вид

```
#pragma omp parallel for schedule (static, 1)
   for (i=0; i<N; i++)
      {
          ...   // тело цикла
      }
```

Директива `#pragma omp parallel for schedule (static, 1)` относится к последующему оператору `for`, итерации которого будут выполнены параллельно. При этом параметр `schedule (static, 1)` указывает на блочно-циклическое распределение итераций по вычислительным узлам.

Примеры реализаций многих из рассмотренных ниже параллельных алгоритмов приведены в [11, 114].

Алгоритм параллельного суммирования элементов массива arr длины $N = 2^m$ для некоторого целого положительного m может быть записан в следующием виде.

Листинг 13.1

```
import math

def parSum(arr):
    N = len(arr)

```

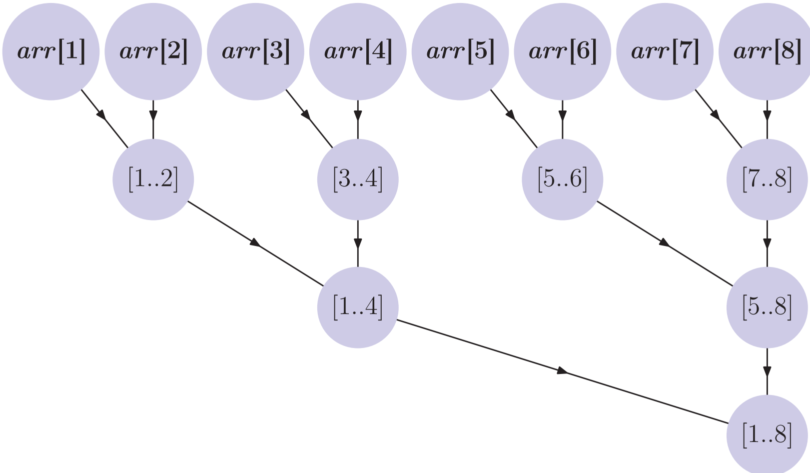


Рис. 13.6. Параллельное суммирование элементов при $N = 8$

```
    for i in range(1, int(math.log2(N)) + 1):
        parallel for j in range(N - 1, 0, -2**i):
            arr[j] = arr[j - 2 ** (i - 1)] \
                     + arr[j]

    return arr[N - 1]
```

Вычислим основные характеристики данного алгоритма — ускорение и эффективность. Для последовательного варианта потребуются

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \ldots + 1 = N - 1$$

операций сложения. При наличии многопроцессорной вычислительной системы с $p = \dfrac{N}{2}$ сложность алгоритма нахождения суммы станет пропорциональной высоте орграфа «операции–операнды»: $T_p(N) = \Theta(\log_2 N)$. Следовательно, $S(N) = \Theta\left(\dfrac{N}{\log_2 N}\right)$, $E(N) = \Theta(\log_2^{-1} N)$.

Задача о вычислении частичных сумм состоит в определении по заданным величинам $arr[i]$, $1 \leqslant i \leqslant N$, последовательности $S_j = \sum\limits_{i=1}^{j} arr[i]$ для всех $1 \leqslant j \leqslant N$. К такой формулировке сводятся многие практические задачи, например, определение длин подпоследовательностей из единиц в битовой строке [91], а также непрерывная задача о рюкзаке [85].

Полагая $j = N$, получаем разобранную выше задачу о сумме элементов массива.

Стандартный последовательный алгоритм требует выполнения $N-1$ операций сложения. Используя PRAM с количеством процессоров, равным $p = N$, результат можно получить за время $\Theta(\log_2 N)$, суммируя элементы, как показано на рис. 13.7. На каждой i-й итерации алгоритма, $1 \leqslant i \leqslant \log_2 N$, производятся операции сложения массива с его копией, сдвинутой вправо на 2^{i-1} позиций. Искомые значения S_j в результате работы алгоритма parPrefix будут сформированы в массиве *prefixList*: $S_j = prefixList[j]$ для всех $1 \leqslant j \leqslant N$. Заметим, что с целью разграничения порядка доступа вычислительных узлов к элементам массива *prefixList* в реализацию алгоритма введен вспомогательный массив $temp[1..N]$.

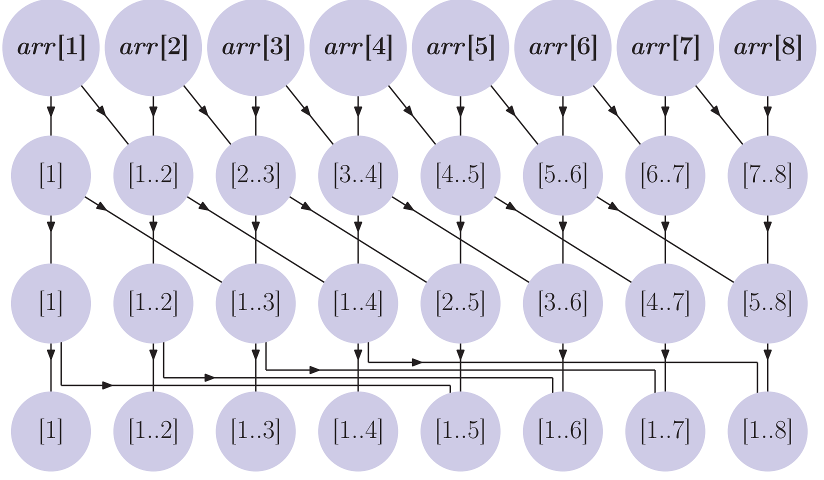


Рис. 13.7. Параллельное вычисление частичных сумм при $N = 8$

Листинг 13.2

```
import math


def parPrefix(arr):
    N = len(arr)

    prefixList = list(arr)

    temp = [0] * N
```

```
10
11     for i in range(1, int(math.log2(N)) + 1):
12         parallel for j in range(N):
13             temp[j] = prefixList[j]
14
15         parallel for j in range(N - 1,
16                        2 ** (i - 1) - 1, -1):
17             prefixList[j] = \
18                 temp[j - 2 ** (i - 1)] + temp[j]
19
20     return prefixList
```

Поскольку на каждой итерации цикла по переменной i в двенадцатой строке алгоритма все $\Theta(N)$ операций сложения выполняются параллельно, то ускорение по сравнению со стандартным последовательным алгоритмом составит величину $S(N) = \Theta\left(\dfrac{N}{\log_2 N}\right)$. Для эффективности получим $E(N) = \Theta(\log_2^{-1} N)$.

Примечание. Замена строки номер 11 на следующую
`for i in range (1, math.ceil(math.log2(N))) + 1):`
позволит алгоритму parPrefix работать с массивами произвольного размера $N = 1, 2, 3, \ldots$

Стоимость алгоритма parPrefix равна $O(N \log_2 N)$, что превышает стоимость элементарного последовательного алгоритма. Не представляет трудностей сохранить логарифмическое время исполнения и получить оптимальное решение задачи о параллельном префиксе, если сократить число процессоров до $O\left(\dfrac{N}{\log_2 N}\right)$ [123].

Для этого распределим элементы массива $arr[1..N]$ среди $\left\lceil \dfrac{N}{\log_2 N} \right\rceil$ процессоров следующим образом: процессор с номером i, где $1 \leqslant i \leqslant p$, будет выполнять действия описанного варианта алгоритма вычисления частичных сумм для подмассива $arr[left..right]$, где $left = (i-1)\log_2 N + 1$, $right = i \log_2 N$, причем $right \leqslant N$. Это будет первым шагом алгоритма parPrefix2.

Далее, сумму элементов в подмассивах заносим в переменные $temp[i]$, $1 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \dfrac{N}{\log_2 N} \right\rfloor$, что составит второй шаг алгоритма.

На заключительном третьем шаге частичные суммы значений $temp[i]$, обозначенные через $prefixTemp[i]$, используются для расчета величин $S_j = \sum\limits_{i=1}^{j} arr[i]$ для всех $1 \leqslant j \leqslant N$.

Листинг 13.3

```
import math


def parPrefix(arr):
    N = len(arr)

    prefixList = list(arr)

    temp = [0] * N

    for i in range(1, int(math.log2(N) + 1)):
        parallel for j in range(N):
            temp[j] = prefixList[j]

        parallel for j in range(N - 1, \
                                2 ** (i - 1) - 1, -1):
            prefixList[j] = \
                temp[j - 2 ** (i - 1)] + temp[j]

    return prefixList


def parPrefix2(arr):
    N = len(arr)

    prefixList = list(arr)

    parallel for i in \
              range(math.ceil(N / math.log2(N))):
        for j in range(1, int(math.log2(N))):
            k = int(i * math.log2(N) + j)

            if k < N:
                prefixList[k] = \
                    prefixList[k - 1] + arr[k]

    temp = list(arr)

    parallel for i in range(1, \
              math.floor(N / math.log2(N)) + 1):
        temp[i - 1] = \
            prefixList[int(i * math.log2(N)) - 1]

    prefixTemp = parPrefix(temp)
```

```

    parallel for i in range(1, \
             math.ceil(N / math.log2(N))):
        for j in range(int(i * math.log2(N)), \
                       int((i+1)*math.log2(N))):
            if j < N:
                prefixList[j] = \
                    prefixTemp[i - 1] \
                    + prefixList[j]

    return prefixList
```

Оценим время выполнения каждого из шагов алгоритма parPrefix2. Легко заметить, что первый и последний шаги требуют времени $O(\log_2 N)$, второй вычисляет частичные суммы массива *temp* и выполняется за время $O\Big(\log_2\Big(\dfrac{N}{\log_2 N}\Big)\Big) = O(\log_2 N)$. Вспоминая, что $p = O\Big(\dfrac{N}{\log_2 N}\Big)$, приходим к оценке стоимости второго варианта алгоритма вычисления параллельного префикса: $C_p = O(N)$.

В приведенных алгоритмах вычисления параллельного префикса операция суммирования при необходимости может быть заменена на любую другую ассоциативную операцию. Действительно, методом математической индукции можно показать, что видоизменение строки с номером 18 алгоритма parPrefix на

$$temp[j - 2\hat{}\,(i-1)] \otimes temp[j];$$

где $\otimes$ — произвольная бинарная ассоциативная операция, в результате приведет к получению величины $arr[1] \otimes arr[2] \otimes \ldots \otimes arr[j] = \bigotimes_{i=1}^{j} arr[i]$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N$. Доказательство данного утверждения приведено в упражнении **13.9**.

Алгоритмы поиска

Задача поиска в неупорядоченной последовательности легко поддается распараллеливанию. Для простоты будем считать, что все элементы массива *arr* различны, и элемент, равный целевому, заведомо присутствует в массиве.

Разделим всю область поиска $[1..N]$ на p частей, в каждом из полученных подмассивов проведем последовательный поиск в соответствии с алгоритмом, представленным на стр. 449. Переменные *left* и *right* — левая и правая границы части массива *arr*, рассматриваемой i-м процессором ($1 \leqslant left \leqslant right \leqslant N$), r — порядковый номер искомого элемента. Поскольку повторяющиеся элементы отсутствуют, один и только один из процессоров запишет в переменную r индекс элемента, равного искомому.

Листинг 13.4

```
import math


def parSequentialSearch(arr, target, p):
    N = len(arr)

    r = -1

    parallel for i in range(1, p + 1):
        left = (i - 1) * math.ceil(N / p)
        right = i * math.ceil(N / p) - 1

        if right > N - 1:
            right = N - 1

        # sequential search in arr[left..right]

        for j in range(left, right + 1):
            if arr[j] == target:
                r = j

    return r
```

Определим основные характеристики алгоритма parSequentialSearch. Цикл по переменной j требует выполнения $\left\lceil \dfrac{N}{p} \right\rceil$ сравнений, поэтому время работы алгоритма равно $O\left(\dfrac{N}{p}\right)$. Ускорение равно $S_p = p$, а стоимость $C_p = p \cdot O\left(\dfrac{N}{p}\right) = O(N)$. Это значит, что рассмотренный параллельный алгоритм поиска в неупорядоченной последовательности является стоимостно-оптимальным.

Рассмотрим теперь, как можно решить задачу поиска элемента, равного *target*, в отсортированном массиве. Как и в случае последовательного поиска, разделим весь массив на p частей, в каждом из полученных подмассивов проведем двоичный поиск (см. стр. 450). Назовем такой алгоритм parBinarySearch. Время работы параллельного алгоритма двоичного поиска равно $T_p = \Theta\left(\log_2 \dfrac{N}{p}\right)$, ускорение $S_p = O\left(\dfrac{\log_2 N}{\log_2(N/p)}\right)$, стоимость $C_p = O\left(p \log_2 \dfrac{N}{p}\right)$. Заметим, что стоимость описанной версии параллельного алгоритма двоичного поиска превышает стоимость алгоритма BinarySearch. Тем не менее известен алгоритм [85, 134], позволяющий снизить стоимость поиска в упорядоченном массиве до $O(p\log_{p+1}(N+1))$.

Двоичный поиск решает задачу за время $O(\log_2 N)$. При наличии p процессоров воспользуемся $(p+1)$-**арным поиском**, который работает следующим образом. На каждом шаге работы алгоритма результаты p сравнений позволяют разделить массив на $p+1$ подмассивов, и следующий шаг применяется рекурсивно к одному из сегментов, содержащих ключевое значение.

Теорема о параллельном поиске. *Существует алгоритм, решающий задачу поиска целевого элемента в упорядоченном массиве на CREW-машине с p процессорами за время* $O\Big(\dfrac{\log_2(N+1)}{\log_2(p+1)}\Big)$.

Доказательство основано на определении количества последовательных шагов, совершаемых описанным выше алгоритмом $(p+1)$-арного поиска при работе с массивом длины N. Пусть m — наименьшее натуральное число, такое, что $(p+1)^m \geqslant N+1$, или $m = \lceil \log_{p+1}(N+1) \rceil$. Покажем, что за m шагов $(p+1)$-арного поиска можно определить положение элемента, равного *target*.

Воспользуемся методом математической индукции. Введем в рассмотрение предикат

$$P(m) = \{\text{алгоритм параллельного поиска в упорядоченном массиве} \\ \text{размера } N \text{ заканчивает работу за } m \text{ последовательных шагов}\}.$$

Б а з а и н д у к ц и и

В этом случае $m = 1$ и $p \geqslant N$. Ясно, что за один последовательный шаг алгоритм закончит работу.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что k шагов $(k > 1)$ достаточно для работы с массивом размера $(p+1)^k - 1$. Поиск в массиве размера $(p+1)^{k+1} - 1$ проведем следующим образом. Процессор с номером i, где $1 \leqslant i \leqslant p$, сравнивает $arr[i(p+1)^k]$ с *target*. По результатам p таких сравнений, выполненных параллельно, делается вывод: искомый элемент содержится в подмассиве размера $(p+1)^k - 1$. По индуктивному предположению для завершения работы алгоритма потребуются k шагов, т. е. количество шагов, равное $k+1$, достаточно для поиска в массиве размера $(p+1)^{k+1} - 1$.

Это доказывает, что предикат $P(m)$ принимает истинное значение для всех натуральных m.

Далее рассмотрим особенности реализации параллельного алгоритма $(p+1)$-арного поиска. Как показано выше, достаточно выполнить $m = \lceil \log_{p+1}(N+1) \rceil$ шагов для определения положения элемента, равного *target*. В практической реализации алгоритма удобно поставить **барьер** $arr[N+1]$, величина которого превышает $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(arr[i])$. В данном случае не потребуются лишние операции для проверки выхода текущего индекса за пределы массива.

В массиве $s[i]$, где $0 \leqslant i \leqslant p+1$, будем хранить 1 или 0 в зависимости от того, расположен *target* слева или справа от текущего элемента, с которым производит сравнение j-й процессор, $1 \leqslant j \leqslant p$. Граничные значения массива определяются как $s[0] = 1$, $s[p+1] = 0$. Если $s[i-1] \neq s[i]$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant p+1)$, то тогда алгоритм сужает область поиска до сегмента $[(i-1)(p+1)^{m-1} - 1, \ldots, i(p+1)^{m-1} - 1]$. В переменных $temp[j]$ хранятся индексы элементов, которые j-й процессор сравнивает с *target*. Описанные действия продолжаются до тех пор, пока не найдется элемент $arr[i] = target$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant N$. Если такого i не найдется, то алгоритм parPSearch возвращает значение -1.

Листинг 13.5

```
import math
import sys


def compare(a, b):
    if a > b:
        return 1
    elif a == b:
        return 0
    else:
        return -1


def parPSearch(arr, target, p):
    arr += [sys.maxsize]
    N = len(arr) - 1

    left = 0
    right = N - 1

    k = -1
    m = math.ceil(math.log2(N + 1)
                  / math.log2(p + 1))

    s = [0] * (p + 2)
    temp = [0] * (p + 2)

    s[0] = 0
    s[p + 1] = 1

    while left <= right and k == -1:
        temp[0] = left - 1
```

```

        parallel for i in range(1, p + 1):
            temp[i] = (left - 1) + i \
                      * ((p + 1) ** (m - 1))

            if temp[i] <= right:
                compare_result = \
                    compare(arr[temp[i]], target)

                if compare_result == -1:
                    s[i] = 0
                elif compare_result == 1:
                    s[i] = 1
                else:
                    k = temp[i]
            else:
                temp[i] = right + 1
                s[i] = 1

            if s[i] != s[i - 1]:
                left = temp[i - 1] + 1
                right = temp[i] - 1

            if i == p and s[i] != s[i + 1]:
                left = temp[i] + 1

        m = m - 1

    return k
```

Алгоритмы сортировки

Рассмотрим задачу сортировки последовательности $arr[i]$, где $1 \leqslant i \leqslant N$, на PRAM с N процессорами. Простейшим из возможных подходов является обобщение пузырьковой сортировки. В стандартном методе пузырьковой сортировки сравнение пар значений массива происходит строго последовательно. Изменим алгоритм таким образом, чтобы сравнения на каждой итерации были независимыми и могли бы быть осуществлены разными процессорами. Это удается сделать, если разделить элементы на два класса в зависимости от четности индекса и сравнивать значения $arr[i]$ с их правыми соседними элементами. Такая модификация пузырьковой сортировки носит название **четно-нечетной сортировки**.

Алгоритм четно-нечетной сортировки состоит из двух шагов, повторяющихся $\left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil$ раз. На первом шаге все процессоры с нечетными номерами p_i, где $i = 2k - 1$ для некоторого целого положительного k, сравнивают $arr[i]$ и $arr[i+1]$ и, если необходимо, устраняют инверсию, образованную данными элементами.

На втором шаге аналогичная операция выполняется процессорами p_i с четными номерами $i = 2k'$ для некоторого $k' = 1, 2, \ldots$

После повторения описанных шагов $\left\lceil \dfrac{N}{2} \right\rceil$ раз все инверсии будут устранены, и массив станет упорядоченным [85].

Листинг 13.6

```
import math

def OddEvenSort(arr):
    N = len(arr)

    for i in range(1, math.ceil(N / 2) + 1):
        parallel for j in range(math.floor(N/2)):
            if arr[2 * j] > arr[2 * j + 1]:
                arr[2 * j], arr[2 * j + 1] =\
                    arr[2 * j + 1], arr[2 * j]

        parallel for j in \
                 range(math.floor((N - 1) / 2)):
            if arr[2 * j + 1] > arr[2 * j + 2]:
                arr[2 * j + 1], arr[2 * j + 2] =\
                    arr[2 * j + 2], arr[2 * j + 1]

    return arr
```

Время исполнения алгоритма OddEvenSort составляет $O(N)$, а его стоимость равна $C_p = O(N^2)$. Алгоритм не является стоимостно-оптимальным. Кроме того, небольшое ускорение $S_p = O(\log_2 N)$ и значительное число используемых процессоров $p = O(N)$ дополняют список недостатков алгоритма.

Для упорядочения данных с использованием многопроцессорных вычислительных систем также применяется сортировка Шелла. Она, как известно, представляет собой усовершенствование сортировки вставками. Сформируем из элементов массив arr несколько подмассивов, элементы которых отстоят друг от друга на некоторое расстояние h в массиве arr. Каждый из подмассивов сортируется методом простых вставок, и затем значение h уменьшается. Заключительное значение $h = 1$ соответствует вызову сортировки вставками на всем массиве arr. Таким образом, решается задача сортировки.

Ниже приводится текст программы сортировки Шелла для последовательности смещений $h_s = 1, 4, 13, 40, 121, 364, \ldots$, или $h_{s+1} = 3h_s + 1$, $h_0 = 1$, причем $0 \leqslant s < \lfloor \log_3(2N+1) \rfloor - 1$.

Листинг 13.7

```
import math


def InsertionSort(arr):
    N = len(arr)

    for i in range(1, N):
        temp = arr[i]

        j = i - 1

        while j >= 0 and arr[j] > temp:
            arr[j + 1] = arr[j]
            j = j - 1

        arr[j + 1] = temp

    return arr


def ShellSort(arr):
    N = len(arr)

    h = 1
    s = math.floor(math.log(2 * N + 1, 3)) - 1

    for i in range(1, s):
        h = 3 * h + 1

    for i in range(s - 1, 0, -1):
        parallel for j in range(1, h + 1):
            for k in range(j + h - 1, N):
                temp = arr[k]
                l = k

                while arr[l - h] > temp:
                    arr[l] = arr[l - h]
                    l = l - h

                    if l <= h:
                        break
```

```
                arr[l] = temp

            h = h % 3

    return InsertionSort(arr)
```

Итерации цикла по переменной j распределены по различным вычислительным узлам. После окончания параллельного цикла каждый процессор должен обновить локальную копию переменной h [12, 91].

Вычислительная сложность алгоритма зависит от выбора последовательности h_s. В рассмотренном случае $h_s = 1, 4, 13, 40, \ldots$, и время работы последовательного алгоритма составит $O(N^{3/2})$ [138]. Асимптотическая сложность параллельной версии сортировки Шелла исследуется в упражнении **13.22**.

Порядковые статистики

Параллельный алгоритм определения k-й порядковой статистики основан на алгоритме SelectOpt (см. главу «Базовые алгоритмы»).

Назовем параллельный алгоритм, решающий задачу о поиске порядковых статистик, parSelectOpt, и представим его работу в виде пяти шагов. Пусть доступны p процессоров и требуется найти k-й по величине элемент массива $arr[left..right]$, где $0 \leqslant left, right \leqslant N-1$. Введем вспомогательную переменную $d = right - left + 1$ — размер массива.

1. Если $d < 5$, то процессор P_1 определяет k-й по величине элемент непосредственно. В противном случае разбиваем массив arr на p подмассивов arr_j, где $j = 1, \ldots, p$, размера $\left\lfloor \dfrac{d}{p} \right\rfloor$ каждый. Операции сравнения и перемещения элементов подмассива arr_j будет выполнять процессор P_j.

2. Каждый из вычислительных узлов P_j вызывает функцию $\mathrm{SelectOpt}\Big(arr_j, \Big\lceil \left\lfloor \dfrac{d}{p} \right\rfloor / 2 \Big\rceil\Big)$ и тем самым определяет индекс медианы m_j подмассива arr_j. Таким образом формируется множество медиан $M = \{m_j : 1 \leqslant j \leqslant p\}$.

3. Рекурсивно вычисляется индекс медианы множества медиан μ путем вызова функции $\mathrm{parSelectOpt}(M, \lfloor p/2 \rfloor)$.

4. Разбиваем массив arr на три части: A, μ и B. В A будут расположены элементы, меньшие μ, в B — элементы, большие μ.

5. Если медиана медиан μ имеет индекс в последовательности arr, равный k, то ответ найден — алгоритм возвращает величину k.

В противном случае в зависимости от размера полученных на предыдущем шаге частей исходного массива A и B рекурсивно вызывается функция parSelectOpt либо на первой части массива, либо на второй.

Можно предложить следующий способ формирования массивов A и B на четвертом шаге алгоритма. Каждый из процессоров P_j выполняет разбиение подмассива arr_j процедурой Partition (см. стр. 472), что образует части A_j и B_j, $1 \leqslant j \leqslant p$. Обозначим через a_j размер массива A_j. С помощью процедуры parPrefix2 вычисляются частичные суммы $t_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_j$, причем $t_0 = 0$. Далее, P_j помещает копию массива A_j в область памяти, начиная с позиции t_{i-1}. Массив B конструируется аналогично.

Подчеркнем, что алгоритм parSelectOpt корректно работает в модели PRAM с самым строгим из рассмотренных методов разрешения конфликтов — в EREW-системе.

Проведем анализ алгоритма parSelectOpt. Обозначим время работы алгоритма на массиве arr размера N через $T(N)$ и выделим величины, составляющие $T(N)$ на каждом из шагов 1–5: T_1, T_2, …, T_5.

1. На первом шаге при $N \leqslant 4$ время работы составляет постоянную величину. В случае $N > 4$ происходит назначение подмассива arr_j процессору P_j, где $1 \leqslant j \leqslant p$. Это также занимает постоянное время, т. е. $T_1(N) = \Theta(1)$.

2. Определение индекса медианы m_j последовательности из $\left\lfloor \dfrac{N}{p} \right\rfloor$ элементов приводит к соотношению $T_2(N) = \Theta\left(\dfrac{N}{p}\right)$.

3. На данном шаге выполняется рекурсивный вызов, следовательно, $T_3(N) = T(p)$.

4. Разбиение каждого из массивов arr_j требует $\Theta\left(\dfrac{N}{p}\right)$ единиц времени. Алгоритм вычисления частичных сумм будет выполняться за $\Theta(\log_2 p)$ единиц времени. Наконец, формирование массивов A и B потребует $\Theta\left(\dfrac{N}{p}\right)$ операций копирования элементов. Таким образом, $T_4(N) = \Theta\left(\dfrac{N}{p}\right) + \Theta(\log_2 p)$.

5. Как и в последовательном случае, рекурсивный вызов на пятом шаге требует времени $T_5(N) = T\left(\dfrac{3N}{4}\right)$.

Так как $T(N) = T_1(N)+T_2(N)+\ldots+T_5(N)$, то в результате получаем

$$T(N) = T(p) + T\Big(\frac{3N}{4}\Big) + \Theta\Big(\frac{N}{p}\Big) + \Theta(\log_2 p).$$

Пусть количество вычислительных узлов $p = N^{\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда можно получить асимптотическую оценку $T(N) = \Theta(N^{1-\varepsilon})$. Стоимость алгоритма parSelectOpt равна $C(N) = pT(N) = \Theta(N)$, и, следовательно, parSelectOpt является стоимостно-оптимальным алгоритмом.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье[1] является одним из центральных методов современной прикладной математики [104, 137].

Рассмотрим некоторую функцию $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Пусть $s(t)$ абсолютно интегрируема на области определения, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty$.

Непрерывное преобразование Фурье функции $s(t)$ определяется соотношением

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{2\pi i f t} dt.$$

Функцию $S(f)$ называют **образом** исходной функции $s(t)$. Основные свойства образа произвольной функции устанавливаются следующей леммой [34, 104].

Лемма Римана[2]–Лебега[3]. *Для любой абсолютно интегрируемой на множестве вещественных чисел комплекснозначной функции $s(t)$ ее преобразование Фурье $S(f)$ является ограниченной и непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией, которая стремится к нулю при $|f| \to \infty$.*

Примечание. Традиционно $s(t)$ в физических приложениях рассматривается как **сигнал**, а $S(f)$ — как **спектр сигнала**. При этом переменная t имеет смысл времени, а f — линейной частоты. Отметим, что широко применяется обозначение $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$.

В случае если обе функции $s(t)$ и $S(f)$ абсолютно интегрируемы на множестве вещественных чисел, **обратное преобразование Фурье** позволяет по образу восстановить исходную функцию:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{-2\pi i f t} df.$$

[1] Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) (1786–1830).

[2] Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann) (1826–1866).

[3] Лебег (Henri Léon Lebesgue) (1875–1941).

В силу своего определения преобразование Фурье является линейной операцией. Другими словами, для любых комплекснозначных функций $s_1(t)$, $s_2(t)$, определенных и абсолютно интегрируемых на множестве всех вещественных чисел, и для любых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}[c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t)] = c_1 \mathcal{F}[s_1(t)] + c_2 \mathcal{F}[s_2(t)].$$

Дискретное преобразование Фурье

В вычислительных задачах исследуемая функция задается обычно не аналитически, а в виде дискретных значений на некоторой сетке, чаще всего равномерной.

Пусть δ — временной интервал между двумя последовательными отсчетами функции $s(t)$:

$$x_n = s(n\delta), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Для любого значения величины δ существует так называемая **критическая частота** f_c, или частота Найквиста[1], которая определяется соотношением $f_c = \dfrac{1}{2\delta}$. Существует важный для теории информации результат: если вне частотного диапазона $[-f_c, f_c]$ спектр некоторого сигнала равен нулю, то данный сигнал может быть полностью восстановлен по серии отчетов x_n. Более формально, верна следующая теорема.

Теорема Котельникова[2]. *Если непрерывная и абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция $s(t)$ имеет ненулевой фурье-образ для частот $-f_c \leqslant f \leqslant f_c$, то $s(t)$ полностью определяется своей выборкой $x_n = s(n\delta)$, где $n \in \mathbb{Z}$, с временным интервалом δ:*

$$s(t) = \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(2\pi f_c(t - n\delta))}{\pi(t - n\delta)}.$$

Чем шире полоса используемых каналом связи частот, тем чаще надо брать отсчеты для корректного дискретного кодирования сигнала и его восстановления. В свою очередь, это компенсируется бо́льшим количеством информации, передаваемой данным сигналом.

В практических задачах длина выборки

$$\mathbf{x} = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

[1] Найквист (Harry Theodor Nyquist) (1889–1976).

[2] Владимир Александрович Котельников (1908–2005).

обычно является ограниченной, в связи с этим рассмотрим переход от непрерывного интегрального преобразования $\mathcal{F}[s(t)]$ к приближенной интегральной сумме:

$$(\mathcal{F}[s(t)])_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{2\pi i f_n t}dt \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{2\pi i f_n t_k}\delta = \delta\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi i k n/N}.$$

Таким образом, приходим к определению **дискретного преобразования Фурье** (ДПФ) N значений x_k, где $k = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi i k n/N}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

или, используя обозначение $\omega = e^{2\pi i/N}$,

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kn} x_k, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1.$$

Обратное дискретное преобразование Фурье определяется формулой

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-kn} y_k, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1.$$

В векторной форме записи рассмотренные соотношения имеют вид $\mathbf{y} = \mathcal{F}[\mathbf{x}]$ и $\mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{y}]$.

Последовательное применение прямого и обратного ДПФ к произвольному вектору $\mathbf{x}$ не изменяет его компонент: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\mathbf{x}]] = \mathbf{x}$ и $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{x}]] = \mathbf{x}$. Докажем, например, первое из данных равенств.

$$(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\mathbf{x}]])_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-kn}(\mathcal{F}[\mathbf{x}])_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-kn}\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{ik} x_i.$$

Изменим порядок суммирования:

$$(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\mathbf{x}]])_n = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(i-n)}\right).$$

Далее воспользуемся свойствами величин $\omega = e^{2\pi i/N}$, исследованными в упражнении **7.29**: $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} \omega^{k(i-n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n; \\ 0, & \text{если } i \neq n. \end{cases}$ Окончательно получаем $(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\mathbf{x}]])_n = x_n \ \forall n = 0, 1, \ldots, N-1$. Аналогично доказывается равенство $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{x}]] = \mathbf{x}$.

В соответствии с определением вычисление вектора $\mathbf{y}$ по заданному $\mathbf{x}$ требует $O(N^2)$ комплексных умножений. Существует способ значительно уменьшить асимптотическую сложность ДПФ. Алгоритм **быстрого преобразования Фурье** (БПФ, в англоязычной литературе — Fast Fourier Transform, FFT) требует всего $O(N \log_2 N)$ операций умножения; кроме того, существуют способы распараллеливания БПФ. В дальнейшем изложении будем предполагать, что $N = 2^m$ для некоторого натурального числа m. Данное ограничение не является принципиальным, так как при необходимости реализации алгоритма быстрого преобразования Фурье для $N \neq 2^m$ можно применить один из следующих подходов:

1) заполнить несколько ячеек массива, представляющего сигнал, нулями, так чтобы N стало равным ближайшей степени двойки;

2) воспользоваться более сложными обобщениями БПФ (см., например, [136]).

Основа метода БПФ заключается в том, что ДПФ вектора $\mathbf{x}$ длины N можно представить как комбинацию преобразований двух векторов, длина каждого из которых равна $\dfrac{N}{2}$, причем одно преобразование применяется к точкам $\mathbf{x}$ с четными индексами, другое — с нечетными:

$$
\begin{aligned}
y_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} x_k &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi i (2k) n}{N}} x_{2k} + \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi i (2k+1) n}{N}} x_{2k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N/2}} x_{2k} + e^{\frac{2\pi i n}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N/2}} x_{2k+1} = y_n^{(\text{ч})} + \omega^n y_n^{(\text{н})}.
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве введены обозначения $y_n^{(\text{ч})}$ и $y_n^{(\text{н})}$ для n-х компонент ДПФ векторов, образованных элементами исходного вектора $\mathbf{x}$, стоящими на четных и нечетных позициях. Полученное соотношение позволяет вычислить $\mathbf{y}$ рекурсивным способом.

Используя легко проверяемое свойство величин ω

$$
\omega^{n+N/2} = -\omega^n, \qquad \text{где } n = 0, 1, \ldots, N/2 - 1,
$$

вычислим суммы $y_n^{(\text{ч})}$ и $y_n^{(\text{н})}$. Искомое значение $\mathbf{y}$ можно получить следующим образом:

1) первые $\dfrac{N}{2}$ элементов $\mathbf{y}$ равны $y_n^{(\text{ч})} + \omega^n y_n^{(\text{н})}$;

2) оставшиеся $\dfrac{N}{2}$ элементов $\mathbf{y}$ равны $y_n^{(\text{ч})} - \omega^n y_n^{(\text{н})}$.

Алгоритм БПФ разделяет вычисление ДПФ вектора длины N на комбинацию двух ДПФ векторов размера $\frac{N}{2}$. Операция объединения результатов имеет орграф «операции–операнды», представленный на рис. 13.8. Такую последовательность вычислительных операций называют схемой «бабочка».

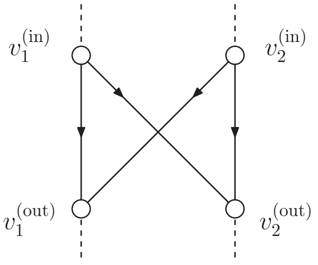


Рис. 13.8. Вычислительная схема «бабочка»

Переход от задачи размера $\frac{N}{2}$ к задаче размера N требует $\frac{N}{2}$ комплексных умножений и N операций присваивания. В силу этого можно записать рекуррентное соотношение для числа операций комплексных умножений $T(N)$ в алгоритме БПФ:

$$\begin{cases} T(N) = 2T\left(\dfrac{N}{2}\right) + \Theta(N), \quad N > 1, \\ T(1) = \mathrm{const}. \end{cases}$$

Решение полученного рекуррентного соотношения имеет вид $T(N) = \Theta(N \log_2 N)$.

Рекурсивная реализация описанной версии алгоритма БПФ состоит из следующих шагов.

1. Элементы массива $\mathbf{x}$ переставляются таким образом, что элементы с четными индексами располагаются в первой половине массива, а с нечетными индексами — во второй.

2. Вычисляется очередное значение параметра $\omega \leftarrow \omega^2$, и процедура БПФ применяется к каждой из двух частей массива рекурсивно.

3. Полученные на предыдущем шаге фурье-образы массивов половинной длины формируют окончательный массив $\mathbf{y}$ в соответствии с вычислительной схемой «бабочка».

Как известно, рекурсивные алгоритмы отличаются повышенной требовательностью к ресурсам по сравнению с аналогичными итеративными. В связи с этим ниже приведем реализацию алгоритма БПФ, не требующую рекурсивных вызовов.

Проведем перестановку элементов массива, располагая их на нужных для схемы «бабочка» местах. Такая перестановка не зависит от величин x_i, где $0 \leqslant i \leqslant N-1$, а зависит только от параметра N.

Указанное выше преобразование осуществляется по правилу: элементы x_i и x_j меняются местами тогда и только тогда, когда двоичные представления величин i и j реверсивны [124]. Процедура shuffle (см. листинг 13.8) выполняет требуемые обмены за время $O(N)$. Отметим, что в решении упражнения **13.35** указано точное число обменов в зависимости от размера массива.

Текст процедуры, реализующей описанный итеративный алгоритм, приведен в [124] и представлен ниже в несколько переработанном виде. Для ясности изложения в нем задан тип данных complex. Запись арифметических операций с элементами этого типа в реальной программе должна быть естественным образом переопределена. Вспомогательная процедура get_omega(W) заполняет массив $W[0..N/2]$ величинами $\omega_k = e^{2\pi ik/N}$, $0 \leqslant k \leqslant N/2$.

Листинг 13.8

```
import math


def shuffle(complex_arr):
    N = len(complex_arr)

    j = N // 2

    for i in range(1, N - 1):
        if i < j:
            complex_arr[i], complex_arr[j] = \
                complex_arr[j], complex_arr[i]

        t = N // 2

        while t != 0 and j // t == 1:
            j = j - t
            t = t // 2

        j = j + t


def get_omega(N):
    length = N // 2

    complex_arr = [None] * (length + 1)

    for k in range(0, length + 1):
```

```
        complex_arr[k] = \
            complex(math.cos((2*math.pi*k)/N),
                    math.sin((2*math.pi*k)/N))

    return complex_arr


def FFT(complex_arr):
    N = len(complex_arr)
    assert N % 2 == 0

    W = get_omega(N)

    shuffle(complex_arr)

    k = 1
    l = N // 2

    while k < N:
        t = 0
        omega = W[0]

        for j in range(k):
            i = j

            while i < N:
                temp = complex_arr[i]

                complex_arr[i] = temp \
                    + omega * complex_arr[i + k]

                complex_arr[i + k] = temp \
                    - omega * complex_arr[i + k]

                i = i + 2 * k

            t = t + 1
            omega = W[t]

        k = 2 * k
        l = l // 2

    return complex_arr
```

Для распределения операций БПФ по вычислительным узлам применяют следующий подход [127]: вектор $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1})$, представляющий отсчеты входного сигнала, рассматривается как двумерный массив размера $N_1 \times N_2$, где $N_1 = 2^{m_1}$, $N_2 = 2^{m_2}$ для некоторых $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, таких, что $2^{m_1+m_2} = N$. Тогда индекс i произвольного элемента вектора $\mathbf{x}$ можно записать в виде

$$i = LN_1 + l, \text{ где } 0 \leqslant l \leqslant N_1 - 1,\ 0 \leqslant L \leqslant N_2 - 1.$$

Компоненты фурье-образа $\mathbf{y} = \mathcal{F}[\mathbf{x}]$ вычисляются в соответствии с формулой

$$y_n = \sum_{k=0}^{N_1N_2-1} e^{\frac{2\pi ikn}{N_1N_2}} x_k$$

для всех $0 \leqslant n \leqslant N_1N_2 - 1$, или

$$y_{\widetilde{l}N_2+\widetilde{L}} = \sum_{L=0}^{N_2-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} e^{\frac{2\pi i}{N_1N_2}(\widetilde{l}N_2+\widetilde{L})(LN_1+l)} x_{LN_1+l}.$$

После алгебраических преобразований запишем компоненты вектора $\mathbf{y}$ в следующей форме:

$$y_{\widetilde{l}N_2+\widetilde{L}} = \sum_{l=0}^{N_1-1} e^{\frac{2\pi i\widetilde{l}l}{N_1}} \left(e^{\frac{2\pi il\widetilde{L}}{N_1N_2}} \left(\sum_{L=0}^{N_2-1} e^{\frac{2\pi iL\widetilde{L}}{N_2}} x_{LN_1+l} \right) \right).$$

Реализация параллельной программы на основе полученного выражения для $\mathbf{y}$ не представляет затруднений. С использованием возможного параллелизма по переменной l вычисляется внутренняя сумма $\sum\limits_{L=0}^{N_2-1} e^{\frac{2\pi iL\widetilde{L}}{N_2}} x_{LN_1+l}$ для $l = 0, \ldots, N_1 - 1$. Далее полученные значения умножаются на $e^{\frac{2\pi il\widetilde{L}}{N_1N_2}}$, затем применяется еще одно БПФ с возможностью параллелизма по переменной L, причем $L = 0, \ldots, N_2 - 1$. Величины $y_{\widetilde{l}N_2+\widetilde{L}}$ образуют окончательный ответ $\mathbf{y} = \mathcal{F}[\mathbf{x}]$.

Оценим асимптотическую сложность данного алгоритма. Первое преобразование Фурье требует $\Theta(N_2 \log_2 N_2)$ арифметических операций для каждого $\widetilde{l} = 0, \ldots, N_1 - 1$. Далее следуют N_2 параллельных умножений. На второе ДПФ будет затрачено $\Theta(N_1 \log_2 N_1)$ операций для каждого $\widetilde{L} = 0, \ldots, N_2 - 1$. Таким образом, время исполнения описанной версии БПФ на системе с $p = \max(N_1, N_2)$ процессорами равно

$$T(N) = \Theta(N_2 \log_2 N_2) + \Theta(1) + \Theta(N_1 \log_2 N_1) = \Theta(\max(N_1, N_2) \log_2 N).$$

Стоимость $C(N)$ будет равна $(\max(N_1, N_2))^2 \log_2 N$, и при $N_1 = N_2 = \sqrt{N}$ она совпадает со стоимостью последовательной версии БПФ, ускорение же $S(N)$ составит величину $\sqrt{N}$.

Контрольные вопросы к главе «Параллельные алгоритмы»

1. Дайте определение потока.
2. Опишите классификацию Флинна вычислительных систем.
3. Расскажите о моделях RAM и PRAM.
4. В чем причины возникновения конфликтов доступа?
5. Как формулируется теорема об эмуляции?
6. Дайте определение понятиям: ускорение алгоритма, эффективность, стоимость.
7. Чем характеризуется стоимостно-оптимальный алгоритм?
8. Сформулируйте лемму Брента.
9. В чем состоит значение закона Амдала для параллельных вычислений?
10. Расскажите об орграфе «операции–операнды».
11. Как решаются задачи о сумме и частичных суммах?
12. Сформулируйте теорему о параллельном поиске.
13. Опишите работу четно-нечетной сортировки, параллельной версии сортировки Шелла и параллельного алгоритма вычисления порядковых статистик.
14. В чем отличие дискретного преобразования Фурье от непрерывного преобразования?
15. Сформулируйте лемму Римана–Лебега и теорему Котельникова.
16. Чему равна асимптотическая сложность быстрого преобразования Фурье?
17. Опишите параллельную реализацию преобразования Фурье.

Задачи к главе «Параллельные алгоритмы»

13.1. Время работы последовательной версии некоторого алгоритма $\mathcal{A}$ равно $T_1(N) = 2N\log_2(N)\,\tau$, где N — размер входных данных, τ — время выполнения одной вычислительной операции. В предположении, что алгоритм допускает максимальное распараллеливание, т. е. время работы на вычислительной системе с p процессорами равно $T_p(N) = \dfrac{T_1(N)}{p}$, вычислите время работы алгоритма $\mathcal{A}$ в следующих случаях:

1) $N = 32$, $p = 4$;

2) $N = 32$, $p = 16$.

13.2. Решите предыдущую задачу для алгоритма $\mathcal{B}$ с экспоненциальной асимптотической сложностью: $T_1(N) = 2^N\tau$.

13.3. Пусть доля последовательных вычислений в программе $f = \dfrac{1}{10}$. Вычислите максимальное ускорение программы $(S_p)_{\max}$ на вычислительной системе с p процессорами с учетом закона Амдала.

13.4. Пусть доля последовательных вычислений в программе $f = \dfrac{1}{100}$. Вычислите максимальное ускорение программы S_∞ с учетом закона Амдала.

13.5. Пусть ускорение некоторого параллельного алгоритма $\mathcal{A}$ при исполнении на системе из p процессоров равно S_p. С учетом закона Амдала вычислите ускорение алгоритма при использовании алгоритма $\mathcal{A}$ на системе из p' процессоров.

13.6. Рассмотрим некоторый вычислительный алгоритм $\mathcal{A}$, состоящий из двух блоков $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, второй из которых может начать исполнение только после окончания работы первого. Пусть доли последовательных вычислений в $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ равны f_1 и f_2 соответственно, и время исполнения $\mathcal{A}_2$ в последовательном режиме превышает время последовательного исполнения $\mathcal{A}_1$ в η раз. Вычислите максимальное ускорение алгоритма $\mathcal{A}$, достижимое на вычислительной системе с p процессорами.

13.7. Изобразите график максимальной эффективности $(E_p)_{\max}$ использования процессоров параллельным алгоритмом в зависимости от количества вычислительных узлов p с учетом закона Амдала, если доля последовательных вычислений равна:

1) $f = \dfrac{1}{10}$;

2) $f = \dfrac{1}{50}$.

$*$13.8. Докажите лемму Брента.

$*$13.9. Докажите, что алгоритм parPrefix можно использовать для вычисления частичных результатов любой ассоциативной бинарной операции на элементах некоторой полугруппы.

13.10. Продемонстрируйте работу параллельного алгоритма вычисления суммы элементов на примере массива

20	12	18	16	24	10	22	14

.

13.11. Продемонстрируйте работу параллельного алгоритма вычисления частичных сумм на примере массива из предыдущего упражнения.

13.12. Поясните, какие изменения следует внести в алгоритм parSum для вычисления суммы элементов массива $arr[1..N]$, в случае когда размер массива N не равен целой степени двойки. Оцените стоимость такого алгоритма.

13.13. В **непрерывной задаче о рюкзаке** рассматриваются N предметов $a_1, \ldots, a_N$ и рюкзак объемной вместимостью V. Каждый предмет a_i, где $i = 1, \ldots, N$, имеет положительные объем v_i и стоимость c_i. Требуется расположить предметы (возможно, не целиком) в рюкзаке таким образом, чтобы выполнялись два условия:

1) их суммарный объем не должен превышать V;

2) общая их стоимость должна быть максимальна.

Формально задача сводится к следующей:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i c_i \to \max$$

при условиях $\sum\limits_{i=1}^{N} f_i v_i \leqslant V$ и $0 \leqslant f_i \leqslant 1$ для $i = 1, \ldots, N$, где f_i — доля предмета a_i, помещенная в рюкзак.

Запишите параллельный алгоритм решения непрерывной задачи о рюкзаке в рамках модели CREW.

13.14. Последовательный алгоритм возведения вещественного числа x в N-ю степень, где $N \in \mathbb{Z}_0$, основан на соотношении

$$x^N = \begin{cases} \left(x^{\lfloor N/2 \rfloor}\right)^2, & \text{если } N > 0 \text{ и четно,} \\ x\left(x^{\lfloor N/2 \rfloor}\right)^2, & \text{если } N > 0 \text{ и нечетно,} \\ 1, & \text{если } N = 0. \end{cases}$$

Определите асимптотическую сложность этого алгоритма.

∗13.15. Рассмотренный в предыдущем упражнении способ возведения вещественного числа в целую неотрицательную степень не допускает распараллеливания. Предложите параллельный алгоритм вычисления x^N, где $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$.

∗13.16. Предложите параллельный алгоритм для вычисления элементов множества $\{x^2, x^3, \ldots, x^N\}$, где $x \in \mathbb{R}$, $N > 2$. Рассмотрите случаи:

1) количество процессоров равно $p = \dfrac{N(N+1)}{2} - 1$;

2) количество процессоров равно $p = N$.

Время работы алгоритма должно составлять $2T_d + O(\log_2 N)T_a$ в первом случае и $4T_d + T_m + O(\log_2 N)T_a$ — во втором, где T_a, T_m, T_d — время, затрачиваемое на сложение, умножение и деление двух комплексных чисел соответственно.

13.17. Пусть в массиве $arr[1..N]$ элементы могут повторяться. Какие изменения следует внести в алгоритм:

1) parSequentialSearch;

2) parBinarySearch,

чтобы он возвращал номер первого появления искомого элемента? Рассмотрите модели CREW и CRCW.

13.18. Рассмотрите задачу поиска целевого элемента в упорядоченном массиве размера N. Покажите, что эту задачу на CREW-машине с $O(N^{\varepsilon})$ процессорами для произвольного $\varepsilon > 0$ можно решить за время $O(1)$.

13.19. Запишите алгоритм для нахождения максимума среди N чисел на CRCW-машине с N^2 процессорами. Время работы алгоритма должно быть $O(1)$.

13.20. Запишите алгоритм для нахождения максимума среди N чисел на CRCW-машине с N процессорами. Время работы алгоритма должно быть $O(\log_2 \log_2 N)$.

13.21. Как и в случае пузырьковой сортировки, алгоритм четно-нечетной сортировки может сформировать отсортированный массив еще до того, как закончатся итерации цикла по i. Предложите способ сокращения числа сравнений в этом случае. Как это повлияет на стоимость алгоритма?

∗13.22. Докажите, что число сравнений, выполняемых последовательным вариантом сортировки Шелла на основе смещений h_s, где $h_{s+1} = 3h_s + 1$, $h_0 = 1$, $0 \leqslant s < \lfloor \log_3(2N+1) \rfloor - 1$, равно $O(N^{3/2})$.

∗13.23. Докажите, что время исполнения параллельного варианта сортировки Шелла на основе смещений h_s, где $h_{s+1} = 3h_s + 1$, $h_0 = 1$, $0 \leqslant s < \lfloor \log_3(2N+1) \rfloor - 1$, равно $O(N \log_2 N)$.

∗13.24. Определите время исполнения в наихудшем случае параллельного варианта сортировки Шелла, если используется последовательность смещений, предложенная Праттом (см. упражнение **12.47**).

13.25. Предложите параллельный алгоритм, определяющий множество элементов массива $a[1..N]$, не превышающих k-го по величине элемента. Время работы алгоритма должно быть $\Theta(N^{1-\varepsilon})$, где N — размер массива, а параметр $\varepsilon \in (0,1)$ зависит от количества доступных вычислительных узлов p: $\varepsilon = \dfrac{\log_2 p}{\log_2 N}$.

13.26. Пусть $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$. Проверьте, что для непрерывного преобразования Фурье выполняются следующие свойства:

1) $\mathcal{F}[s(at)] = \dfrac{1}{|a|} S\left(\dfrac{f}{a}\right)$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (масштабирование);

2) $\mathcal{F}[s(t-t_0)] = S(f)e^{2\pi i f t_0}$ $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ (сдвиг во временной области).

13.27. Докажите **теорему Парсеваля**[1], связывающую полную энергию квадратично интегрируемого сигнала во временной и в частотной областях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df.$$

13.28. Пусть $\mathbf{y}$ есть ДПФ вектора $\mathbf{x}$ длины N. Докажите **дискретный аналог теоремы Парсеваля**:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2.$$

13.29. Используя определение дискретного преобразования Фурье, вычислите $\mathcal{F}[\mathbf{x}]$, если:

1) $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 1)$;

2) $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0)$.

13.30. Вычислите ДПФ вектора $\mathbf{x}$ длины N с компонентами, равными биномиальным коэффициентам $x_n = C(N-1, n)$, где $0 \leqslant n \leqslant N-1$.

---

[1] Парсеваль (Marc-Antoine Parseval des Chênes) (1755–1836).

13.31. Вычислите ДПФ вектора $\mathbf{x}$ длины $N = 2^m$ для некоторого целого положительного m, если

1) $\mathbf{x} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0}_{N/2 \text{ нулей}}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{N/2 \text{ единиц}})$;

2) $\mathbf{x} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{N/2 \text{ единиц}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0}_{N/2 \text{ нулей}})$.

13.32. Выпишите элементы массива

0	1	2	3	4	5	6	7

после применения к нему процедуры shuffle (см. стр. 541), которая переставляет элементы для последующего применения вычислительной схемы «бабочка» в алгоритме быстрого преобразования Фурье.

13.33. Выпишите элементы массива

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

после применения к нему процедуры shuffle.

13.34. Покажите, что двукратное применение процедуры shuffle к произвольному массиву размера $N = 2^m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, оставляет его элементы без изменения.

13.35. Рассмотрим массив x размера $N = 2^m$ для некоторого целого неотрицательного m. Определите, сколько операций обмена элементов swap потребует вызов процедуры shuffle(x).

13.36. **Синус-преобразование** вектора $\mathbf{x}$ длины N, причем $x_0 = 0$, определяется следующим образом:

$$(\mathcal{F}_{\sin}[\mathbf{x}])_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{\pi k n}{N}\right).$$

Покажите, что синус-преобразование можно свести к стандартному ДПФ.

13.37. **Косинус-преобразование** вектора $\mathbf{x}$ длины $N+1$ определяется следующим образом:

$$(\mathcal{F}_{\cos}[\mathbf{x}])_n = \frac{1}{2}\left[x_0 + (-1)^n x_N\right] + \sum_{k=1}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{\pi k n}{N}\right).$$

Покажите, что косинус-преобразование можно свести к стандартному ДПФ.

13.38. Запишите параллельный алгоритм:

1) дискретного синус-преобразования;

2) дискретного косинус-преобразования.

13.39. Продемонстрируйте работу параллельного алгоритма быстрого преобразования Фурье, описанного на стр. 542–543, на примере массива $\boxed{0|1|2|3|4|5|6|7}$.

13.40. Запишите параллельный алгоритм для вычисления двумерного дискретного Фурье-преобразования массива $x[0..(N_1-1), 0..(N_2-1)]$

$$(\mathcal{F}[x])_{n_1,n_2} = \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\omega_1^{k_1n_1}\omega_2^{k_2n_2}x_{k_1,k_2},$$

где $\omega_1 = e^{2\pi i/N_1}$, $\omega_2 = e^{2\pi i/N_2}$.

Ответы, указания, решения к главе «Параллельные алгоритмы»

13.1. *Ответ:*
1) $T_p(N) = 80\tau$;
2) $T_p(N) = 20\tau$.

13.2. *Ответ:*
1) $T_p(N) = 2^{30}\tau$;
2) $T_p(N) = 2^{28}\tau$.

13.3. *Ответ:* $(S_p)_{\max} = \dfrac{10p}{p+9}$.

13.4. *Ответ:* $S_\infty = 100$.

13.5. *Ответ:* $S_{p'} = S_p\dfrac{p'(p-1)}{p(p'-1)+(p-p')S_p}$.

13.6. *Решение.*

Обозначим время исполнения блока $\mathcal{A}_1$ в последовательном режиме через τ, тогда время работы $\mathcal{A}_2$ в таком же режиме составит $\eta\tau$. Подставим эти величины в формулу для ускорения S_p параллельного алгоритма на вычислительной системе с p процессорами:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}.$$

В соответствии с условием задачи время последовательного исполнения всего алгоритма $\mathcal{A}$ складывается из времени работы первого блока и времени работы второго:

$$T_1 = \tau + \eta\tau = (1+\eta)\tau.$$

В параллельном режиме время доли вычислений $(1-f_1)$ в $\mathcal{A}_1$ и $(1-f_2)$ в $\mathcal{A}_2$ будут распределены по p вычислительным узлам. Следовательно, время исполнения алгоритма $\mathcal{A}$ может быть оценено как

$$T_p \geqslant f_1\tau + \frac{(1-f_1)\tau}{p} + f_2\eta\tau + \frac{(1-f_2)\eta\tau}{p} = \\ = (f_1+\eta f_2)\tau + \frac{1+\eta-(f_1+\eta f_2)}{p}\tau.$$

В результате для максимально достижимой величины ускорения выполнения алгоритма $\mathcal{A}$ получаем выражение:

$$(S_p)_{\max} = \frac{(1+\eta)\tau}{(f_1+\eta f_2)\tau + (1+\eta-(f_1+\eta f_2))\tau/p} = \frac{1}{\overline{f} + (1-\overline{f})/p},$$

где введено обозначение $\overline{f} = \dfrac{f_1+\eta f_2}{1+\eta}$, имеющее смысл усредненной доли последовательных операций в этом алгоритме.

13.7. *Ответ:* см. рис. 13.9.

13.8. *Доказательство.*

Введем в рассмотрение орграф «операции–операнды» алгоритма $\mathcal{A}$. В силу того что для решения вычислительной задачи на паракомпьютере требуется время T_∞, число уровней орграфа равно $d = \dfrac{T_\infty}{\tau}$, где τ — время выполнения одной операции. Обозначим через n_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, число узлов на i-м уровне.

Алгоритм $\mathcal{A}'$ будет использовать меньшее по сравнению с $\mathcal{A}$ количество процессоров, а именно, p. В этом случае на некотором уровне с номером i на каждый процессор приходятся не более $\left\lceil \dfrac{n_i}{p} \right\rceil$ операций.

Оценку величины времени работы алгоритма $\mathcal{A}'$ получим, просуммировав длительность операций на каждом из d уровней орграфа «операции–операнды»:

$$T(p) \leqslant \sum_{i=1}^{d} \left\lceil \frac{n_i}{p} \right\rceil \tau.$$

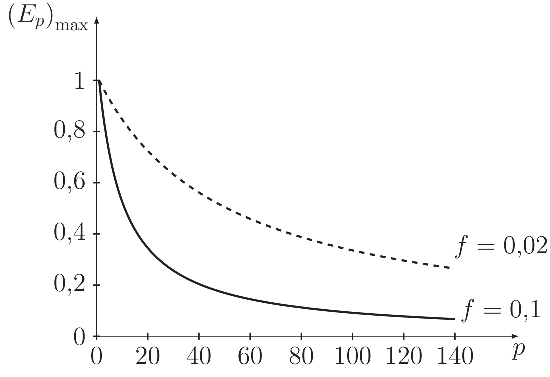


Рис. 13.9. Зависимость значений максимальной эффективности $(E_p)_{\max}$ от числа процессоров p при разных f — долях последовательных вычислений. Сплошная линия — $f = \dfrac{1}{10}$, пунктирная — $f = \dfrac{1}{50}$

Используя свойство функции «потолок» $\left\lceil \dfrac{k}{m} \right\rceil \leqslant \dfrac{k+m-1}{m}$, выполняющееся для всех $k, m \in \mathbb{N}$, преобразуем неравенство к виду:

$$T(p) \leqslant \sum_{i=1}^{d} \frac{n_i + p - 1}{p}\tau = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d} n_i\tau + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{d}\tau.$$

В соответствии с нашими обозначениями время исполнения алгоритма $\mathcal{A}$ на системе с одним процессором равно $\sum\limits_{i=1}^{d} n_i\tau = T_1$. Окончательно получаем оценку величины времени исполнения алгоритма $\mathcal{A}'$ на PRAM с p процессорами:

$$T(p) \leqslant T_\infty + \frac{T_1 - T_\infty}{p}.$$

13.9. *Доказательство.*

Напомним, что полугруппой называется пара $(A, \otimes)$, где A — некоторое множество, $\otimes$ — полугрупповая операция. Покажем, что для вычисления частичных результатов операции $\otimes$, примененной к величинам $arr[i]$, $1 \leqslant i \leqslant N$, может быть использован алгоритм parPrefix, отличающийся от написанного на стр. 524 заменой строки с номером 18 на следующую:

$$temp[j - 2\hat{}\,(i-1)] \otimes temp[j];$$

Вместо $\otimes$ следует поместить знак конкретной бинарной операции.

Обозначим через ${}^{(i)}\mathit{prefixList}[j]$ значения элементов массива *prefixList* после выполнения i-й итерации цикла в одиннадцатой строке. С помощью метода математической индукции докажем вспомогательное утверждение:

$$ {}^{(i)}\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes_{m=\sigma(i,j)}^{j} \mathit{arr}[m] \quad \forall j = 1, \ldots, N, $$

где $\sigma(i, j) = \max(j + 1 - 2^i, 1)$.

Сформулированный в предыдущем предложении предикат обозначим через $P(i)$, $i = 1, 2, \ldots, \lceil \log_2 N \rceil$ (см. примечание на стр. 525).

Б а з а и н д у к ц и и

Рассмотрим случай $i = 1$. После выполнения первой итерации получим:

$$ {}^{(1)}\mathit{prefixList}[j] = \begin{cases} \mathit{arr}[j-1] \otimes \mathit{arr}[j], & \text{если } j = 2, 3, \ldots, N, \\ \mathit{arr}[1], & \text{если } j = 1. \end{cases} $$

С учетом введенных обозначений данное соотношение можно переписать в виде: ${}^{(1)}\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes\limits_{m=\sigma(1,j)}^{j} \mathit{arr}[m] \quad \forall j = 1, \ldots, N$, где $\sigma(1, j) = \max(j - 1, 1)$, что и доказывает истинность $P(1)$.

Ш а г и н д у к ц и и

Предположим, что для $i = k$ в результате работы алгоритма parPrefix получаются значения ${}^{(k)}\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes\limits_{m=\sigma(k,j)}^{j} \mathit{arr}[m]$. Докажем истинность предиката $P(k+1)$, т. е. справедливость равенств ${}^{(k+1)}\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes\limits_{m=\sigma(k+1,j)}^{j} \mathit{arr}[m]$ для всех натуральных индексов j, не превосходящих N.

В самом деле, из анализа алгоритма следует соотношение (рис. 13.10):

$$ {}^{(k+1)}\mathit{prefixList}[j] = \begin{cases} {}^{(k)}\mathit{prefixList}[j - 2^k] \otimes {}^{(k)}\mathit{prefixList}[j], & 2^k < j \leqslant N, \\ {}^{(k)}\mathit{prefixList}[j], & 1 \leqslant j \leqslant 2^k. \end{cases} $$

Воспользуемся выражением для элементов массива *prefixList* на предыдущем шаге:

$$ {}^{(k+1)}\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes_{m=\sigma(k,j-2^k)}^{j-2^k} \mathit{arr}[m] \otimes \bigotimes_{m=\sigma(k,j)}^{j} \mathit{arr}[m]. $$

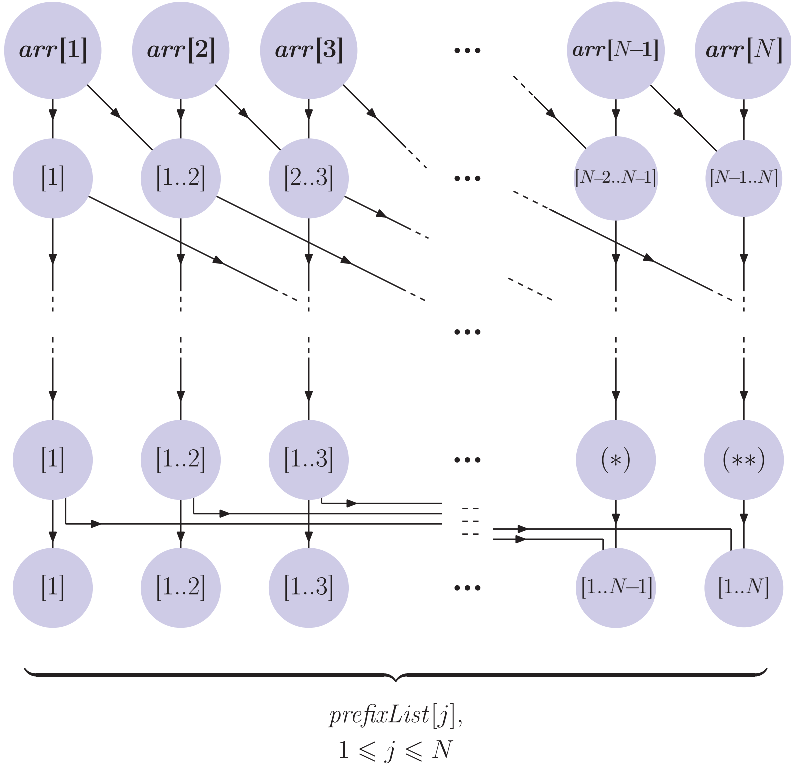


Рис. 13.10. Вычисление частичных результатов операции $\otimes$, примененной к элементам массива *arr*: через $(*)$ обозначены величины $[s..N-1]$, через $(**)$ — $[s..N]$, где $s = \max(j + 1 - 2^{\lceil \log_2 N \rceil - 1}, 1)$

Поскольку $\sigma(k, j - 2^k) = \max(j + 1 - 2^{k+1}, 1) = \sigma(k + 1, j)$, то ${}^{(k+1)}\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes\limits_{m=\sigma(k+1,j)}^{j} arr[m] \quad \forall j = 1, \ldots, N.$

Следовательно, предикат $P(i)$ принимает истинное значение для всех $i = 1, 2, \ldots, \lceil \log_2 N \rceil$. В итоге на итерации с номером $i = \lceil \log_2 N \rceil$ имеем $\sigma(\lceil \log_2 N \rceil, j) = 1$, и окончательные значения элементов равны $\mathit{prefixList}[j] = \bigotimes\limits_{m=1}^{j} arr[m]$.

Обратим внимание, что порядок операндов в операциях вида $arr[i] \otimes \otimes arr[j]$, где $1 \leqslant i \leqslant N$ и $1 \leqslant j \leqslant N$, не менялся. Этим доказывается корректность алгоритма parPrefix, причем в качестве операции $\otimes$ может выступать любая бинарная ассоциативная операция.

13.10. *Решение.*

Представим значения элементов массива после каждой итерации цикла по i. Поскольку размер массива $N = 8$, переменная i принимает значения $1, 2, 3$.

20	12	18	16	24	10	22	14	исходные данные;
20	**<u>32</u>**	18	**<u>34</u>**	24	**<u>34</u>**	22	**<u>36</u>**	$i = 1$;
20	32	18	**<u>66</u>**	24	34	22	**<u>70</u>**	$i = 2$;
20	32	18	66	24	34	22	**<u>136</u>**	$i = 3$.

Значения элементов, изменяющихся на данной итерации, выделены полужирным шрифтом и подчеркнуты. После исполнения алгоритма ответ считывается из ячейки с номером $N = 8$. В итоге алгоритм возвращает ответ 136.

13.13. *Указание.*

Расположите предметы в порядке невозрастания удельной стоимости $\widetilde{c}_i = \dfrac{c_i}{v_i}$ для всех $i = 1, \ldots, N$ и примените алгоритм вычисления параллельного префикса к массиву $\widetilde{c}$.

13.14. *Решение.*

Асимптотическая сложность последовательного алгоритма возведения в целую неотрицательную степень удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$T(N) = T\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right) + f(N),$$

где функция неоднородности $f(N)$ имеет вид

$$f(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } N \text{ четно,} \\ 2, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Поскольку $f(N) = \Theta(1)$, то в соответствии с основной теоремой о рекуррентных соотношениях $T(N) = \Theta(\log_2 N)$.

13.15. *Решение.*

Известен следующий алгоритм вычисления x^N, предложенный Кунгом[1] [113]. Пусть заданы $x \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$, причем $x \neq \pm 1$.

1. Вычислим ω_k и $\widetilde{\omega}_k$ для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, где через ω_k обозначен k-й комплексный корень уравнения $z^N = 1$, $\widetilde{\omega}_k = \dfrac{\omega_k}{N}$.

2. Вычислим $y_k = x - \omega_k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

3. Найдем отношения $z_k = \dfrac{\widetilde{\omega}_k}{y_k}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

4. Вычислим сумму $Z = \sum\limits_{k=0}^{N-1} z_k$.

5. Обратим величину Z: $\widetilde{Z} = \dfrac{1}{Z}$.

6. Окончательный ответ: $x^N = \widetilde{Z} + 1$.

Докажем, что величина $\widetilde{Z}+1$ действительно равна x^N. В самом деле, полученная на четвертом шаге величина $Z = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{\omega_k}{x - \omega_k}$ может быть преобразована к виду $Z = \dfrac{1}{x^N - 1}$ (см. упражнение **7.32**). Отсюда следует, что $\widetilde{Z} = x^N - 1$, и на шестом шаге имеем $\widetilde{Z} + 1 = x^N$. Следовательно, алгоритм Кунга корректен.

Оценим время работы алгоритма. Первый шаг не зависит от величины x, что позволяет подготовить массив с величинами ω_k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, до начала его работы.

Пусть время выполнения операции сложения двух комплексных чисел равно T_a, а время деления двух комплексных чисел — T_d. Тогда время выполнения указанных выше шагов 2–6 на многопроцессорной вычислительной системе с N процессорами будет равно

$$T(N) = T_a + T_d + O(\log_2 N)T_a + T_d + T_a = 2T_d + O(\log_2 N)T_a.$$

Во избежание недоразумений отметим, что в последнем равенстве сделано упрощение $O(\log_2 N) + 2 = O(\log_2 N)$.

[1] Кунг (Hsiang-Tsung Kung) (род. 1945).

13.16. *Указание.* См. упражнение **13.15** и оригинальную работу [113].

13.22. *Доказательство.*

Для оценки числа сравнений определим, сколько сравнений производится при каждом проходе алгоритма со смещением h_s, где $s = \lfloor \log_3(2N+1) \rfloor - 1, \ldots, 1, 0$, и затем просуммируем полученные значения по s.

Отдельно рассмотрим случаи $h_s > \sqrt{N}$ и $h_s \leqslant \sqrt{N}$. Выбор величины $\sqrt{N}$ станет ясным из дальнейшего рассмотрения [138].

1. Пусть $h_s > \sqrt{N}$. Используя явную формулу для s-го смещения $h_s = (3^{s+1}-1)/2$, заключаем, что $s = s_{\max}, \ldots, s^*+1$, где введены обозначения: $s_{\max} = \lfloor \log_3(2N+1) \rfloor - 1$, $s^* = \lfloor \log_3(2\sqrt{N}+1) \rfloor - 1$.

На каждой итерации внутреннего цикла **for** производится $O\Big(\dfrac{N^2}{h_s^2}\Big)$ сравнений, число проходов алгоритма равно h_s. Общее число сравнений на некотором этапе с номером s для $s = s_{\max}, \ldots, s^*+1$ равно $O\Big(\dfrac{N^2}{h_s}\Big)$.

2. Пусть $h_s \leqslant \sqrt{N}$. Это соответствует значениям $s = s^*, \ldots, 0$. Рассмотрим подвергаемый упорядочению массив $a[1..N]$ после исполнения двух сортировок вставками, использующих смещения h_{s+1} и h_{s+2}. В соответствии с теоремой об h- и k-упорядочении для всех i, кратных h_{s+1} или h_{s+2}, имеем $a[j-i] \leqslant a[j]$, где $1 \leqslant j \leqslant N$, $i < j$. Далее, поскольку для всех целых неотрицательных чисел c_1 и c_2 при условии $j - (c_1 h_{s+1} + c_2 h_{s+2}) > 0$ справедлива импликация

$$\left.\begin{array}{l} a[j - h_{s+1}] \leqslant a[j] \\ a[j - h_{s+2}] \leqslant a[j] \end{array}\right\} \Rightarrow a[j - (c_1 h_{s+1} + c_2 h_{s+2})] \leqslant a[j],$$

то соотношение $a[j-i] \leqslant a[j]$ выполняется для всех таких i, для которых существуют $c_1, c_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} : i = c_1 h_{s+1} + c_2 h_{s+2}$.

В силу определения величин h_{s+1} и h_{s+2} их численные значения не могут иметь общих делителей, кроме единицы, ни при каких s. Из теории чисел известно [37], что любое натуральное число $d \geqslant (\alpha-1)(\beta-1)$ может быть представлено в виде $d = c_1\alpha + c_2\beta$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если натуральные числа α и β не имеют общих делителей, отличных от единицы.

Из данных рассуждений следует вывод: все числа, не меньшие

$$d = (h_{s+1} - 1)(h_{s+2} - 1) = 27h_s^2 + 9h_s,$$

могут быть представлены в виде $d = c_1 h_{s+1} + c_2 h_{s+2}$. Следовательно, инверсии в массиве a на данном этапе сортировки образованы элементами, расположенными на расстоянии не более $O\Big(\dfrac{27h_s^2 + 9h_s}{h_s}\Big) = O(h_s)$ друг от друга, и имеем оценку $O(h_s N)$ числа сравнений элементов массива.

Подсчитаем количество сравнений $W(N)$ в наихудшем случае после всех проходов алгоритма с номерами $s = s_{\max}, \ldots, s^* + 1, s^*, \ldots, 0$.

$$W(N) = \sum_{s=0}^{s^*} O(h_s N) + \sum_{s=s^*+1}^{s_{\max}} O\Big(\frac{N^2}{h_s}\Big) = O\Big(N \sum_{s=0}^{s^*} h_s\Big) + O\Big(N^2 \sum_{s=s^*+1}^{s_{\max}} h_s^{-1}\Big).$$

Воспользуемся явным выражением для величины s-го смещения $h_s = (3^{s+1} - 1)/2$ для $s = 0, \ldots, s_{\max}$. Тогда

$$\sum_{s=0}^{s^*} h_s \leqslant \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{s^*} 3^{s+1} = \frac{1}{2}\frac{3^{s^*+2} - 1}{2} = O(N^{1/2}),$$

$$\sum_{s=s^*+1}^{s_{\max}} h_s^{-1} \leqslant 2 \sum_{s=s^*+1}^{s_{\max}} \frac{1}{3^{s+2}} = \frac{2}{9}\frac{3^{-s^*} - 3^{-s_{\max}}}{2} = O(N^{-1/2}).$$

Отметим, что была использована формула для геометрической прогрессии $\sum\limits_{s=a}^{b} 3^{-s} = (3^{1-a} - 3^{-b})/2$. Теперь становится понятным выбор величины $\sqrt{N}$ для разделения суммы $W(N)$ по переменной s на две части, а именно, при таком разделении получается точная верхняя граница для числа сравнений элементов массива.

Другими словами, выбор значения h_{s^*} отвечает минимуму вспомогательной функции $f(h) = Nh + \dfrac{N^2}{h}$, определенной на целочисленных точках интервала $(1, N)$. График функции $f = f(h)$ изображен на рис. 13.11, где для наглядности область определения расширена до $\mathbb{R}^+$.

В итоге получаем число сравнений $W(N) = O(N^{3/2})$, выполняемых при использовании последовательного варианта сортировки Шелла.

13.23. *Указание.*

Получите оценку величины $W(N)$ вида

$$W(N) = \sum_{s=0}^{s^*} O(N) + \sum_{s=s^*+1}^{s_{\max}} O\Big(\frac{N^2}{h_s^2}\Big),$$

где $s_{\max} = O(\log_2 N)$ — число применяемых смещений, а s^* удовлетворяет уравнению $h_{s^*}^2 = O\Big(\dfrac{N}{\log_2 N}\Big)$, что эквивалентно асимптотическому соотношению $s^* = O(\log_2 N - \log_2 \log_2 N)$.

13.24. *Решение.*

Параллельный вариант сортировки методом Шелла использует $p = \Theta(N)$ процессоров, где N — размер массива. На s-м этапе сортировки

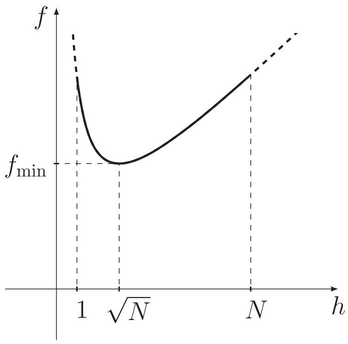


Рис. 13.11. Минимум функции $f(h) = Nh + \dfrac{N^2}{h}$ расположен в точке с координатами $(\sqrt{N}, 2N^{3/2})$

Шелла смещение равно h_s, где $s = 0, 1, \ldots, s_{\max}$, при этом h_s процессоров независимо друг от друга упорядочивают h_s подмассивов размера $\left\lfloor \dfrac{N}{h_s} \right\rfloor$ или $\left\lceil \dfrac{N}{h_s} \right\rceil$ с помощью сортировки вставками. Каждый из рассматриваемых подмассивов, согласно результатам упражнения **12.49**, содержит $\Theta\Big(\dfrac{N}{h_s}\Big)$ инверсий для всех возможных значений смещений. Следовательно, s-й этап сортировки занимает время $\Theta\Big(\dfrac{N}{h_s}\Big)$. Сумма по всем этапам приводит к оценке времени работы данного алгоритма в наихудшем случае:

$$W(N) = \sum_{s=0}^{s_{\max}} \Theta\Big(\frac{N}{h_s}\Big) = N\Theta\Big(\sum_{s=0}^{s_{\max}} \frac{1}{h_s}\Big).$$

Для вычисления полученной суммы представим h_s в виде $h_s = 2^i 3^j$, где величины i и j имеют такие значения, что $2^i 3^j < N$, т. е. выполняются неравенства $0 \leqslant i \leqslant i_{\max}$, $0 \leqslant j \leqslant j_{\max}$. Теперь можно перейти к оценке выражения $\sum\limits_{s=0}^{s_{\max}} \dfrac{1}{h_s}$, для чего используем формулу геометрической прогрессии:

$$\sum_{s=0}^{s_{\max}} \frac{1}{h_s} = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \sum_{j=0}^{j_{\max}} \frac{1}{2^i 3^j} = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \frac{1}{2^i} \Big(\sum_{j=0}^{j_{\max}} \frac{1}{3^j}\Big) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{3}{2} \Big(1 - \frac{1}{3^{j_{\max}+1}}\Big) =$$
$$= 3\Big(1 - \frac{1}{2^{i_{\max}+1}}\Big)\Big(1 - \frac{1}{3^{j_{\max}+1}}\Big).$$

Из неравенств $1 < h_{s_{\max}} < N$ следует, что $1 < 2^{i_{\max}} < N$ и $1 < 3^{j_{\max}} < N$. Значит,

$$3\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) < \sum_{s=0}^{s_{\max}} \frac{1}{h_s} < 3\left(1-\frac{1}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3N}\right),$$

или $\sum\limits_{s=0}^{s_{\max}} \dfrac{1}{h_s} = \Theta(1)$.

Итак, время работы сортировки Шелла на основе последовательности смещений, предложенной Праттом, равно $W(N) = \Theta(N)$.

13.27. *Доказательство.*

Используя определение классического дискретного преобразования Фурье, преобразуем величину $|y_k|^2$ для всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$|y_k|^2 = \left(\sum_{j_1=0}^{N-1} x_{j_1} e^{2\pi i j_1 k/N}\right)\left(\sum_{j_2=0}^{N-1} \overline{x}_{j_2} e^{-2\pi i j_2 k/N}\right) = \\ = \sum_{j_1,j_2=0}^{N-1} x_{j_1}\overline{x}_{j_2} e^{2\pi i (j_1-j_2)k/N}.$$

Далее, вычислим сумму в правой части формулы, составляющей содержание теоремы Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j_1,j_2=0}^{N-1} x_{j_1}\overline{x}_{j_2} e^{2\pi i (j_1-j_2)k/N} = \\ = \sum_{j_1,j_2=0}^{N-1} x_{j_1}\overline{x}_{j_2} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i (j_1-j_2)k/N}.$$

Внутренняя сумма легко вычисляется:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i (j_1-j_2)k/N} = N\delta_{j_1 j_2},$$

где $\delta_{j_1 j_2}$ — символ Кронекера, определение которого дано на стр. 189. В итоге сумма квадратов модулей величин y_k равна

$$\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = N \sum_{j_1,j_2=0}^{N-1} \delta_{j_1 j_2} x_{j_1}\overline{x}_{j_2} = N\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2.$$

Теорема Парсеваля доказана.

13.29. *Ответ:*
1) $\mathcal{F}[\mathbf{x}] = (2, 0, -2, 0)$;
2) $\mathcal{F}[\mathbf{x}] = (2, 0, 2, 0)$.

13.30. *Решение.*
В соответствии с определением ДПФ

$$(\mathcal{F}[\mathbf{x}])_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}kn} C(N-1, n) \ \text{ для } \ 0 \leqslant n \leqslant N-1.$$

Полученное соотношение для n-й компоненты вектора $\mathcal{F}[\mathbf{x}]$ может быть преобразовано с учетом формулы бинома Ньютона:

$$(\mathcal{F}[\mathbf{x}])_n = \sum_{k=0}^{N-1} C(N-1, k)\left(e^{\frac{2\pi i n}{N}}\right)^k = \left(1 + e^{\frac{2\pi i n}{N}}\right)^{N-1} = (1+\omega^n)^{N-1},$$

для всех $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

13.31. *Ответ:*

$$1)\ \ (\mathcal{F}[\mathbf{x}])_n = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & \text{если } n = 0; \\ -\dfrac{1-(-1)^n}{1-\omega^n}, & \text{если } n = 1, 2, \ldots, N-1; \end{cases}$$

$$2)\ \ (\mathcal{F}[\mathbf{x}])_n = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & \text{если } n = 0; \\ \dfrac{1-(-1)^n}{1-\omega^n}, & \text{если } n = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

13.32. *Решение.*
Обозначим элементы массива через $x[i]$, где $0 \leqslant i \leqslant 7$. Как известно, $x[i]$ и $x[j]$ меняются местами тогда и только тогда, когда двоичные представления величин i и j реверсивны. Выпишем битовые строки, соответствующие двоичной записи целых неотрицательных чисел, не превосходящих семи:

$$\begin{aligned} 0 &= (000)_2, & \quad 4 &= (100)_2, \\ 1 &= (001)_2, & 5 &= (101)_2, \\ 2 &= (010)_2, & 6 &= (110)_2, \\ 3 &= (011)_2, & 7 &= (111)_2. \end{aligned}$$

Путем сравнения выписанных битовых строк приходим к выводу, что реверсивны две пары: $((001)_2, (100)_2)$ и $((011)_2, (110)_2)$. Следовательно, процедура shuffle произведет обмены swap$(x[1], x[4])$ и swap$(x[3], x[6])$, после чего массив примет вид $\boxed{0|4|2|6|1|5|3|7}$.

13.33. *Ответ:* $\boxed{0|8|4|12|2|10|6|14|1|9|5|13|3|11|7|15}$.

13.35. *Решение.*

Процедура shuffle меняет местами элементы $x[i]$ и $x[j]$, где $0 \leqslant i, j \leqslant N-1$, если и только если двоичные представления величин i и j реверсивны. Вычислим количество $\mathcal{R}$ неупорядоченных пар $\{i, j\}$, удовлетворяющих данному условию.

Битовая строка $(i)_2$, соответствующая двоичному представлению числа i, состоит из m элементов. Если строка $(i)_2$ не является палиндромом (см. упражнение **4.2**), то существует такой индекс j, не выходящий за пределы массива $x[0..(N-1)]$, что $(i)_2$ и $(j)_2$ реверсивны.

Количество палиндромов среди битовых строк длины m найдено в упражнении **4.3** и равно $2^{\lceil m/2 \rceil}$. В силу этого число неупорядоченных пар $\{i, j\}$, для которых $(i)_2$ и $(j)_2$ реверсивны, равно

$$\mathcal{R} = \left(2^m - 2^{\lceil m/2 \rceil}\right)/2 = 2^{m-1} - 2^{\lceil m/2 \rceil - 1}.$$

Из полученного соотношения следует асимптотическая оценка $\mathcal{R} = O(N)$.

13.36. *Решение.*

Аргументы функций $\sin\left(\dfrac{\pi k}{N}\right)$ в определении синус-преобразования отличаются от аргументов экспонент стандартного ДПФ множителем $\dfrac{1}{2}$, поэтому нельзя рассматривать $\mathcal{F}_{\sin}[\mathbf{x}]$ как мнимую часть $\mathcal{F}[\mathbf{x}]$. Необходимы более аккуратные преобразования [127].

Рассмотрим вектор $\widetilde{\mathbf{x}}$ длины $2N$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям $\widetilde{x}[k] = x[k]$ для $0 \leqslant k \leqslant N-1$ и $\widetilde{x}[k] = -x[2N-k]$ для $N+1 \leqslant k \leqslant 2N-1$, причем $\widetilde{x}[N] = 0$. Иными словами, $\widetilde{\mathbf{x}}$ конструируется из исходного вектора $\mathbf{x}$ путем антисимметричного отражения значений $x[k]$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ относительно $k = N$.

Применим к полученному набору $\widetilde{x}[k]$, $k = 0, \ldots, 2N-1$ дискретное преобразование Фурье:

$$(\mathcal{F}[\widetilde{\mathbf{x}}])_n = \sum_{k=0}^{2N-1} \widetilde{x}_k e^{2\pi i k n/(2N)}.$$

Далее, рассмотрим часть суммы, соответствующую значениям $k = N, \ldots, 2N-1$, и произведем в ней замену $k' = 2N - k$.

$$\sum_{k=N}^{2N-1} \widetilde{x}_k e^{2\pi ikn/(2N)} = \sum_{k'=1}^{N} \widetilde{x}_{2N-k'} e^{2\pi i(2N-k')n/(2N)} =$$
$$= \sum_{k'=1}^{N} \widetilde{x}_{2N-k'} e^{2\pi in} e^{-2\pi ik'n/(2N)} = -\sum_{k'=1}^{N} x_{k'} e^{-2\pi ik'n/(2N)}.$$

Дискретное преобразование Фурье вектора $\widetilde{\mathbf{x}}$ принимает вид

$$(\mathcal{F}[\widetilde{\mathbf{x}}])_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left[e^{2\pi ikn/(2N)} - e^{-2\pi ikn/(2N)}\right] = 2i \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin(\frac{\pi kn}{N}).$$

Следовательно, ДПФ вектора $\widetilde{\mathbf{x}}$ с точностью до множителя $2i$ совпадает с синус-преобразованием вектора $\mathbf{x}$.

13.39. *Решение.*

Алгоритм быстрого преобразования Фурье вычисляет компоненты вектора $\mathbf{y} = \mathcal{F}[\mathbf{x}]$, где $\mathbf{x}$ — вектор входных данных. Представим входной массив в виде заполненной по строкам матрицы M, число столбцов которой равно N_1, а число строк — N_2. Поскольку N_1 и N_2 — числа вида 2^m, где $m \in \mathbb{N}$, и количество элементов массива равно $N_1N_2 = 8$, то можно выбрать, например, следующие значения: $N_1 = 4$, $N_2 = 2$. В этом случае матрица M примет вид: $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Работа параллельной версии алгоритма БПФ сводится к следующим шагам.

1. Последовательный вариант БПФ применяется к столбцам матрицы M. После этого получаем, что $M = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

2. Каждый элемент матрицы M умножается на величину $e^{\frac{2\pi i}{N_1N_2}(l\widetilde{L})}$, где l — номер столбца, $0 \leqslant l \leqslant N_1 - 1$, $\widetilde{L}$ — номер строки, $0 \leqslant \widetilde{L} \leqslant N_2 - 1$ (см. стр. 542). Тогда матрица M принимает вид:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 \\ -4 & -2\sqrt{2}(1+i) & -4i & -2\sqrt{2}(-1+i) \end{bmatrix}.$$

3. Последовательный вариант БПФ применяется к строкам матрицы M:

$$M = \begin{bmatrix} 28 & -4-4i & -4 & -4+4i \\ -4-4(\sqrt{2}+1)i & -4-4(\sqrt{2}-1)i & -4+4(\sqrt{2}-1)i & -4+4(\sqrt{2}+1)i \end{bmatrix}.$$

В итоге компоненты y_i $(i = 0, \ldots, 7)$ БПФ исходного массива получаем, выписывая по столбцам элементы матрицы M:

$$
\begin{aligned}
&y_0 = 28,\\
&y_1 = -4 - 4(\sqrt{2} + 1)i,\\
&y_2 = -4 - 4i,\\
&y_3 = -4 - 4(\sqrt{2} - 1)i,\\
&y_4 = -4,\\
&y_5 = -4 + 4(\sqrt{2} - 1)i,\\
&y_6 = -4 + 4i,\\
&y_7 = -4 + 4(\sqrt{2} + 1)i.
\end{aligned}
$$

Справочные материалы

В формулах данного раздела, если не оговорено иное, $a, b, c_1, c_2, C \in \mathbb{R}$, $k, k' \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрические формулы

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1; \tag{A.1}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \tag{A.2}$$

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}, \quad a \neq \pi k; \tag{A.3}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \tag{A.4}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, \quad a \neq \pi k; \tag{A.5}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a; \tag{A.6}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \quad a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k'; \tag{A.7}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}, \qquad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}; \tag{A.8}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b; \tag{A.9}$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b; \tag{A.10}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \tag{A.11}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b; \tag{A.12}$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \quad a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \tag{A.13}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \quad a, b, a - b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \tag{A.14}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right); \tag{A.15}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right); \tag{A.16}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right); \tag{A.17}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right); \tag{A.18}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}, \quad a, b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \tag{A.19}$$

$$\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b}, \quad a, b \neq \pi k; \tag{A.20}$$

$$\sin a \, \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right); \tag{A.21}$$

$$\cos a \, \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right); \tag{A.22}$$

$$\sin a \, \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right). \tag{A.23}$$

Дифференцирование. Общие правила

Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеют производные в некоторой точке x, т. е. существуют пределы $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ и $g'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$. Тогда в этой точке

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g' \quad \text{(линейность операции дифференцирования);} \tag{A.24}$$

$$(f(g))' = f'_g \cdot g'_x \quad \text{(производная сложной функции);} \tag{A.25}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \text{(производная произведения);} \tag{A.26}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \; g \neq 0 \quad \text{(производная отношения функций).} \tag{A.27}$$

Производные элементарных функций

$$(x^a)' = ax^{a-1}; \tag{A.28}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1; \tag{A.29}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0; \tag{A.30}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x; \tag{A.31}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{A.32}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{A.33}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{A.34}$$

Неопределенные интегралы. Общие правила

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \qquad \text{(интегрирование — операция, обратная дифференцированию);} \tag{A.35}$$

$$\int (c_1 f(x)\,dx + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int f(x)\,dx + c_2 \int g(x)\,dx \qquad \text{(линейность);} \tag{A.36}$$

$$\int f(g(x))\,dg(x) = \int f(t)\,dt \Big|_{t=g(x)} \qquad \text{(замена переменной } t = g(x)\text{);} \tag{A.37}$$

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df \qquad \text{(интегрирование по частям).} \tag{A.38}$$

Неопределенные интегралы от некоторых функций

В формулах (А.42)–(А.46) предполагается $a > 0$.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1; \tag{А.39}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \tag{А.40}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C, \quad a > 0,\ a \neq 1; \tag{А.41}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \tag{А.42}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C; \tag{А.43}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \tag{А.44}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \tag{А.45}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C; \tag{А.46}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \tag{А.47}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \tag{А.48}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \tag{А.49}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C; \tag{А.50}$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C; \tag{А.51}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{А.52}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \tag{А.53}$$

Конечные суммы

Пусть $N, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, $d > -1$. Тогда верны соотношения:

$$\sum_{i=1}^{N} 1 = N; \tag{A.54}$$

$$\sum_{i=s_1}^{s_2} 1 = s_2 - s_1 + 1; \tag{A.55}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}; \tag{A.56}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}; \tag{A.57}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}; \tag{A.58}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^d = O(N^{d+1}); \tag{A.59}$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2^i = 2^{N+1} - 2; \tag{A.60}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i2^i = (N-1)2^{N+1} + 2; \tag{A.61}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = \ln N + \gamma + O\left(\frac{1}{N}\right), \text{ где } \gamma = 0{,}5772\ldots; \tag{A.62}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \log_2 i = N \log_2 N + O(N). \tag{A.63}$$

Греческий алфавит

A, α	альфа	N, ν	ню
B, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	O, o	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
E, ε	эпсилон	P, ρ	ро
Z, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
H, η	эта	T, τ	тау
Θ, θ	тета	Υ, υ	ипсилон
I, ι	йота	Φ, φ	фи
$\mathrm{K}, \varkappa$	каппа	X, χ	хи
Λ, λ	лямбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	мю	Ω, ω	омега

Список литературы

1. Айгнер, М. Доказательства из Книги : Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней / М. Айгнер, Г. Циглер. — Москва : Мир, 2006. — 256 с.

2. Алгоритмы : Построение и анализ / Т. Х. Кормен [и др.]. — 3-е изд. — Москва ; Санкт-Петербург ; Киев : Вильямс, 2013. — 1328 с.

3. Аляев, Ю. А. Дискретная математика и математическая логика : учебник / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. — Москва : Финансы и статистика, 2006. — 368 с.

4. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. — Москва ; Санкт-Петербург ; Киев : Вильямс, 2004. — 960 с.

5. Антонов, А. С. Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP / А. С. Антонов. — Москва : Издательство Московского государственного университета, 2009. — 235 с.

6. Арнольд, В. И. Математический тривиум / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. — 1991. — Т. 46. — № 1(277). — С. 225–232.

7. Боголюбов, А. Н. Математики. Механики : биографический справочник / А. Н. Боголюбов. — Киев : Наукова думка, 1983. — 640 с.

8. Борзунов, С. В. Алгебра и геометрия с примерами на Python / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 444 с.

9. Борзунов, С. В. Задачи по дискретной математике / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2016. — 528 с. — (Учебная литература для вузов).

10. Борзунов, С. В. Квантовые вычисления / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2022. — 144 с.

11. Борзунов, С. В. Практикум по параллельному программированию / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин, А. В. Флегель. — Санкт-Петербург : БХВ, 2017. — 236 с. — (Учебная литература для вузов).

12. Борзунов, С. В. Суперкомпьютерные вычисления : практический подход / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. — Санкт-Петербург : БХВ, 2019. — 256 с. — (Учебная литература для вузов).

13. Введение в параллельные вычисления : Основы программирования на языке Си с использованием интерфейса MPI / А. М. Сальников [и др.]. — Москва : ИПУ РАН, 2009. — 123 с.

14. Верещагин, Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов : в 3 ч. / Н. К. Верещагин, А. Шень. — 4-е изд. — Ч. 1. Начала теории множеств. — Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2012. — 112 с.

15. Верещагин, Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов : в 3 ч. / Н. К. Верещагин, А. Шень. — 4-е изд. — Ч. 2. Языки и исчисления. Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2012. — 240 с.

16. Верещагин, Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов : в 3 ч. / Н. К. Верещагин, А. Шень. — 4-е изд. — Ч. 3. Вычислимые функции. Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2012. — 160 с.

17. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — 12-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 176 с.

18. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных : Новая версия для Оберона +CD / Н. Вирт. — Москва : ДМК Пресс, 2010. — (Классика программирования). — 272 с.

19. Воеводин, В. В. Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2002. — 608 с.

20. Воробьев, Н. Н. Признаки делимости / Н. Н. Воробьев. — 4-е изд. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. — 96 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 39).

21. Воробьев, Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьев. — 4-е изд. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. — 144 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 6).

22. Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — 3-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 416 с.

23. Гергель, В. П. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем / В. П. Гергель. — Москва :

Издательство МГУ, 2010. — 544 с. — (Суперкомпьютерное образование).

24. Гладкий, А. В. Введение в современную логику / А. В. Гладкий. — Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2001. — 200 с.

25. Грин, Д. Математические методы анализа алгоритмов / Д. Грин, Д. Кнут. — Москва : Мир, 1987. — 120 с.

26. Грэхем, Р. Конкретная математика : Математические основания информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — 2-е изд. — Москва : Вильямс, 2015. — 784 с.

27. Дворецкий, И. Х. Латинско-русский словарь : Около 200 000 слов и словосочетаний / И. Х. Дворецкий. — 7-е изд. — Москва : Русский язык, 2002. — 843 с.

28. Евклид. Начала Евклида : Книги VII–X : пер. с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского ; при ред. участии И. Н. Веселовского / Евклид. — Москва ; Ленинград : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 510 с. — (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).

29. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я. М. Ерусалимский. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 476 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

30. Жуков, А. В. Вездесущее число π / А. В. Жуков. — 5-е изд. — Москва : Едиториал УРСС, 2012. — 240 с.

31. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 7-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 224 с. — (Курс высшей математики и математической физики).

32. Ильин, В. А. Линейная алгебра : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 6-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 280 с. — (Курс высшей математики и математической физики).

33. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 7-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Ч. 1. — 648 с. — (Курс высшей математики и математической физики).

34. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 4-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — Ч. 2. — 464 с. — (Курс высшей математики и математической физики).

35. Келли, Дж. Л. Общая топология / Дж. Л. Келли. — Москва : Наука, 1968. — 383 с.

36. Кнут, Д. Э. Искусство программирования / Д. Э. Кнут. — 3-е изд. — Т. 1. Основные алгоритмы. — Москва : Вильямс, 2018. — 720 с.

37. Кнут, Д. Э. Искусство программирования / Д. Э. Кнут. — 2-е изд. — Т. 3. Сортировка и поиск. — Москва : Вильямс, 2018. — 832 с.

38. Колмогоров, А. Н. Математическая логика : Введение в математическую логику / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. — 4-е изд. — Москва : Издательство УРСС, 2013. — 240 с. — (Классический университетский учебник).

39. Комбинаторный анализ : Задачи и упражнения : учеб. пособие / под ред. К. А. Рыбникова. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 368 с.

40. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : в 3 ч. / А. И. Кострикин. — 2-е изд. — Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2012. — Ч. 1. Основы алгебры. — 272 с.

41. Крупский, В. Н. Теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. вузов / В. Н. Крупский, В. Е. Плиско. — Москва : Академия, 2009. — 208 с. — (Прикладная математика и информатика).

42. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд. — Т. 1. — Москва : Юрайт, 2012. — 704 с.

43. Курант, Р. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / Р. Курант, Г. Роббинс. — 6-е изд. — Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2013. — 568 с.

44. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — 18-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 432 с.

45. Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2007. — 144 с.

46. Левитин, А. В. Алгоритмы : Введение в разработку и анализ / А. В. Левитин. — Москва ; Санкт-Петербург ; Киев : Вильямс, 2006. — 576 с.

47. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. — 4-е изд. — Москва : Едиториал УРСС, 2015. — 390 с.

48. Макконнелл, Дж. Анализ алгоритмов : Активный обучающий подход / Дж. Макконнелл. — 3-е изд. — Москва : Техносфера, 2013. — 416 с.

49. Малинецкий, Г. Г. Математические основы синергетики : Хаос, структуры, вычислительный эксперимент / Г. Г. Малинецкий. — 6-е изд. — Москва : Книжный дом «Либроком», 2009. — 312 с. — (Синергетика: от прошлого к будущему).

50. Мандельброт, Б. Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Б. Мандельброт. — Москва : Институт компьютерных исследований, 2010. — 656 с. — (Компьютинг в математике, физике, биологии).

51. Марков, А. А. Избранные труды / А. А. Марков. — Т. II. Теория алгорифмов и конструктивная математика, математическая логика, информатика и смежные вопросы. — Москва : Московский центр непрерывного математического образования, 2003. — xxii, 626 с.

52. Марков, А. А. Теория алгорифмов / А. А. Марков, Н. М. Нагорный. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 432 с. — (Математическая логика и основания математики).

53. Маркушевич, А. И. Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. — Москва ; Ленинград : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 50 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 1).

54. Математическая энциклопедия ; под ред. И. М. Виноградова. — Москва : Советская энциклопедия, 1977. — Т. 1. А–Г. — 1152 стлб.

55. Математическая энциклопедия ; под ред. И. М. Виноградова. — Москва : Советская энциклопедия, 1979. — Т. 2. Д–Коо. — 1104 стлб.

56. Математическая энциклопедия ; под ред. И. М. Виноградова. — Москва : Советская энциклопедия, 1982. — Т. 3. Коо–Од. — 1184 стлб.

57. Математическая энциклопедия ; под ред. И. М. Виноградова. — Москва : Советская энциклопедия, 1984. — Т. 4. Ок–Сло. — 1216 стлб.

58. Математическая энциклопедия ; под ред. И. М. Виноградова. — Москва : Советская энциклопедия, 1985. — Т. 5. Слу–Я. — 1246 стлб.

59. Нефёдов, В. Н. Курс дискретной математики : учеб. пособие / В. Н. Нефёдов, В. А. Осипова. — 2-е изд. — Москва : Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.

60. Нильсен, М. Квантовые вычисления и квантовая информация / М. Нильсен, И. Чанг. — Москва : Мир, 2006. — 824 с.

61. Новиков, Ф. А. Дискретная математика : учеб. для вузов : стандарт третьего поколения / Ф. А. Новиков. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Питер, 2011. — 384 с.

62. Оре, О. Теория графов / О. Оре. — 2-е изд. — Москва : Едиториал УРСС, 2009. — 352 с.

63. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — 9-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 383 с. — (Классический университетский учебник).

64. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учеб. для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. — 6-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 368 с. — (Курс высшей математики и математической физики).

65. Седжвик, Р. Фундаментальные алгоритмы на C++ : Алгоритмы на графах / Р. Седжвик. — Санкт-Петербург : ООО «ДиаСофтЮП», 2002. — 496 с.

66. Седжвик, Р. Фундаментальные алгоритмы на C++ : Анализ/Структуры данных/Сортировка/Поиск / Р. Седжвик. — Киев : ДиаСофт, 2001. — 688 с.

67. Соминский, И. С. Метод математической индукции / И. С. Соминский. — 7-е изд. — Москва : Наука, 1965. — 56 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 3).

68. Столл, Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Р. Столл. — Москва : Просвещение, 1968. — 231 с. — (Математическое просвещение).

69. Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 2-е изд. — Москва : ИНФРА-М, Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. — 256 с. — (Высшее образование).

70. Таненбаум, Э. Архитектура компьютера / Э. Таненбаум, Т. Остин. — 6-е изд. — Москва [и др.] : Питер, 2015. — 816 с. — (Классика Computer Science).

71. Трахтенброт, Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач / Б. А. Трахтенброт. — Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. — 98 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 26).

72. Успенский, В. А. Вводный курс математической логики / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 128 с.

73. Успенский, В. А. Машина Поста / В. А. Успенский. — 2-е изд. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. — 96 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 54).

74. Успенский, В. А. Треугольник Паскаля / В. А. Успенский. — 2-е изд. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 48 с. — (Популярные лекции по математике ; вып. 43).

75. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. — 9-е изд. — Т. 1. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 608 с.

76. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. — 9-е изд. — Т. 3. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 656 с.

77. Хаггард, Г. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие / Г. Хаггард, Дж. Шлипф, С. Уайтсайдс. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 627 с.

78. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. — 2-е изд. — Москва : Техносфера, 2012. — 400 с.

79. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. — 4-е изд. — Москва : Едиториал УРСС, 2015. — 304 с.

80. Хокни, Р. Параллельные ЭВМ : Архитектура, программирование и алгоритмы / Р. Хокни, К. Джессхоуп. — Москва : Радио и связь, 1986. — 392 с.

81. Эвнин, А. Ю. Задачник по дискретной математике / А. Ю. Эвнин. — 4-е изд. — Москва : Едиториал УРСС, 2014. — 264 с.

82. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский. — 6-е изд. — Москва : Высшая школа, 2010. — 384 с.

83. Ященко, И. В. Парадоксы теории множеств / И. В. Ященко. — Москва : Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2014. — 40 с. — (Библиотека «Математическое просвещение» ; вып. 20).

84. Aho, A. V. Some doubly exponential sequences / A. V. Aho, N. J. A. Sloane // Fibonacci Quarterly. — 1973. — Vol. 11. — No. 4. — Pp. 429–438.

85. Akl, S. G. The Design and Analysis of Parallel Algorithms / S. G. Akl. — Prentice Hall, 1989. — xii, 401 p.

86. Apostol, T. M. Introduction to Analytic Number Theory / T. M. Apostol. (Undergraduate Texts in Mathematics). — New York, Heidelberg, Berlin : Springer, 1976. — xii, 338 p.

87. Bachmann, P. G. H. Die Analytische Zahlentheorie / P. G. H. Bachmann. — Leipzig : B. G. Teubner, 1894. — 494 p.

88. Bang-Jensen, J. Digraphs : Theory, Algorithms and Applications / J. Bang-Jensen, G. Gutin. — Second edition. — London : Springer-Verlag, 2008. — 798 p. — (Springer Monographs in Mathematics).

89. Bentley, J. L. A general method for solving divide-and-conquer recurrences / J. L. Bentley, D. Haken, J. B. Saxe // SIGACT News. — 1980. — Vol. 12. — No. 3. — Pp. 36–44.

90. Brent, R. P. The parallel evaluation of general arithmetic expressions / R. P. Brent // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1974. — Vol. 21. — No. 2. — Pp. 201–206.

91. Breshears, C. The Art of Concurrency / C. Breshears. — Beijing [et al.] : O'Reilly, 2009. — xiv, 288 p.

92. Chapman, B. Using OpenMP : Portable Shared Memory Parallel Programming / B. Chapman, G. Jost, R. van der Pas. — The MIT Press, 2008. — xiv, 353 p. — (Scientific and Engineering Computation).

93. Cohn, P. M. Algebra. Vol. 2 / P. M. Cohn. — Second edition. — Wiley, 1989. — xv, 428 p.

94. Cover, T. M. Elements of Information Theory / T. M. Cover, J. A. Thomas. — Second edition. — Wiley-Interscience, 2006. — xxiv, 748 p.

95. Diestel, R. Graph Theory / R. Diestel. — Fifth edition. — Springer, 2017. — xviii, 428 p. (Graduate Texts in Mathematics ; vol. 173).

96. DiVincenzo, D. P. The physical implementation of quantum computation / D. P. DiVincenzo // Fortschritte der Physik. — 2000. — Vol. 48. — Pp. 771–783.

97. Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations / S. Elaydi. — Third edition. — Springer, 2005. — 539 p. — (Undergraduate Texts in Mathematics).

98. Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis / L. Euler // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (Memoirs of the Imperial Academy of Sciences in St. Petersburg). — 1736. — Vol. 8. — Pp. 128–140.

99. Finch, S. R. Mathematical Constants / S. R. Finch. — Cambridge [England]: Cambridge University Press, 2003. — xix, 602 p. — (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications ; vol. 94).

100. Flajolet, P. The number of registers required for evaluating arithmetic expressions / P. Flajolet, J. C. Raoult, J. Vuillemin // Theoretical Computer Science. — 1979. — Vol. 9. — No. 1. — Pp. 99–125.

101. Gamelin, T. W. Complex Analysis / T. W. Gamelin. — Springer, 2001. — 478 p. — (Undergraduate Texts in Mathematics).

102. Generalized play-operator under stochastic perturbations: An analytic approach / S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, P. A. Meleshenko // Journal of Vibration Engineering & Technologies. — 2021. — Vol. 9. — Pp. 355–365.

103. Gonnet, G. H. Handbook of Algorithms and Data Structures: in Pascal and C / G. H. Gonnet, R. Baeza-Yates. — Second edition. — Addison-Wesley, 1991. — xiv, 424 p. — (International Computer Science Series).

104. Grafakos, L. Classical Fourier Analysis / L. Grafakos. — Second edition. — Springer, 2008. — xvi, 489 p. — (Graduate Texts in Mathematics ; vol. 249).

105. Grimaldi, R. P. Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied Introduction / R. P. Grimaldi. — Fifth edition. — Pearson Education, 2004.

106. Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics ; ed. by K. H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. — Second edition. — CRC Press, 2018. — xxiv, 1590 p.

107. Hoare, C. A. R. Quicksort / C. A. R. Hoare // Computer Journal. — 1962. — Vol. 5. — No. 1. — Pp. 10–15.

108. Holton, D. A. The Petersen Graph / D. A. Holton, J. Sheehan. — Cambridge [England] : Cambridge University Press, 1993. — 364 p. — (Australian Mathematical Society Lecture Series ; no. 7).

109. Horowitz, E. Computer Algorithms / E. Horowitz, S. Sahni, S. Rajasekaran. — Second edition. — Silicon Press, 2008. — 773 p.

110. Karnaugh, M. The map method for synthesis of combinational logic circuits / M. Karnaugh // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, part I. — 1953. — Vol. 72. — No. 9. — Pp. 593–599.

111. Kitaev, A. Yu. Classical and Quantum Computation / A. Yu. Kitaev, A. H. Shen, M. N. Vyalyi. — American Mathematical Society, 2002. — xiv, 257 p. — (Series: Graduate Studies in Mathematics; vol. 47).

112. Kruskal, C. P. A complexity theory of efficient parallel algorithms / C. P. Kruskal, L. Rudolph, M. Snir // Theoretical Computer Science. — 1990. — Vol. 71. — No. 1. — Pp. 95–132.

113. Kung, H. T. New algorithms and lower bounds for the parallel evaluation of certain rational expressions / H. T. Kung // Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, April 30 – May 2, 1974, Seattle, Washington, USA; ed. by R. L. Constable [et al.]. — 1974. — Pp. 323–333.

114. Kurgalin, S. A Practical Approach to High-Performance Computing / S. Kurgalin, S. Borzunov. — Springer, 2019. — xi, 206 p.

115. Kurgalin, S. Algebra and Geometry with Python / S. Kurgalin, S. Borzunov. — Springer, 2021. — x, 425 p.

116. Kurgalin, S. Concise Guide to Quantum Computing : Algorithms, Exercises, and Implementations / S. Kurgalin, S. Borzunov. — Springer, 2021. — xiv, 122 p. — (Texts in Computer Science).

117. Kurgalin, S. The Discrete Math Workbook : A Companion Manual for Practical Study / S. Kurgalin, S. Borzunov. — Springer, 2018. — xiii, 485 p. — (Texts in Computer Science).

118. Kurgalin, S. The Discrete Math Workbook : A Companion Manual Using Python / S. Kurgalin, S. Borzunov. — Second edition. — Springer, 2020. — xvii, 500 p. — (Texts in Computer Science).

119. Lovász, L. Discrete Mathematics : Elementary and Beyond / L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi. — New York [et al.] : Springer, 2003. — ix, 290 p. — (Undergraduate Texts in Mathematics).

120. Mahmoud, H. M. Sorting : A Distribution Theory / H. M. Mahmoud. — Wiley, 2011. — 416 p. — (Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization).

121. OpenMP: [сайт]. — 2021. — URL: `http://www.openmp.org/` (дата обращения: 08.12.2021).

122. McCool, M. Structured Parallel Programming : Patterns for Efficient Computation / M. McCool, A. D. Robison, J. Reinders. — Amsterdam [et al.] : Elsevier, 2012. — xxvi, 406 p.

123. Miller, R. Algorithms Sequential and Parallel: A Unified Approach / R. Miller, L. Boxer. — Third edition. — Cengage Learning, 2013. — xxxi, 417 p.

124. Moret, B. M. E. Algorithms from P to NP / B. M. E. Moret, H. D. Shapiro. — Vol. I. Design and Efficiency. — Benjamin/Cummings, 1991. — xv, 576 p.

125. Newman, D. J. A Problem Seminar / D. J. Newman. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1982. — v, 113 p.

126. NIST Handbook of Mathematical Functions ; ed. by F. W. J. Olver [et al.]. — Cambridge University Press, 2010. — xvi, 951 p.

127. Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing / W. H. Press [et al.]. — Third edition. — Cambridge University Press, 2007. — xxii, 1235 p.

128. Perl, Y. Interpolation search — a log log n search / Y. Perl, A. Itai, H. Avni // Communications of the ACM. — 1978. — Vol. 21. — No. 7. — Pp. 550–553.

129. Rauber, T. Parallel Programming for Multicore and Cluster Systems / T. Rauber, G. Rünger. — Second edition. — Springer, 2013. — xiii, 516 p.

130. Rosen, K. H. Discrete Mathematics and Its Applications / K. H. Rosen. — 7th edition. — McGraw-Hill, 2012.

131. Sedgewick, R. An Introduction to the Analysis of Algorithms / R. Sedgewick, P. Flajolet. — Second edition. — Addison-Wesley, 2013. — 572 p.

132. Shell, D. L. A high-speed sorting procedure / D. L. Shell // Communications of the ACM. — 1959. — Vol. 2. — No. 7. — Pp. 30–32.

133. Smith, J. R. The Design and Analysis of Parallel Algorithms / J. R. Smith. — New York : Oxford University Press, 1993. — 462 p.

134. Snir, M. On parallel searching / M. Snir // SIAM Journal on Computing. — 1985. — Vol. 14. — No. 3. — Pp. 688–708.

135. Strassen, V. Gaussian elimination is not optimal / V. Strassen // Numerische Mathematik. — 1969. — Vol. 13. — No. 3. — Pp. 354–356.

136. Van Loan, C. Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform / C. Van Loan. — Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. — 273 p. — (Frontiers in Applied Mathematics).

137. Vretblad, A. Fourier Analysis and Its Applications / A. Vretblad. — Springer, 2003. — xii, 269 p. — (Graduate Texts in Mathematics ; vol. 223).

138. Weiss, M. A. Data Structures and Algorithm Analysis in C++ / M. A. Weiss. — Fourth edition. — Boston [et al.] : Pearson, 2014. — xviii, 635 p.

139. Wikipedia: [сайт]. — 2021. — URL: `http://www.wikipedia.org/` (дата обращения: 08.12.2021).

140. Wilkinson, B. Parallel Programming Techniques and Applications Using Networked Workstations and Parallel Computers / B. Wilkinson, M. Allen. — Second edition. — Pearson Prentice Hall, 2004. — 496 p.

141. Wilson, R. J. Introduction to Graph Theory / R. J. Wilson. — Fourth edition. — Longman, 1998. — viii, 171 p.

Указатель имен

Предметный указатель

Б

В

Г

Д

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Ш

Э