Дървовидни структури от данни и алгоритми върху тях

ИТ Кариера

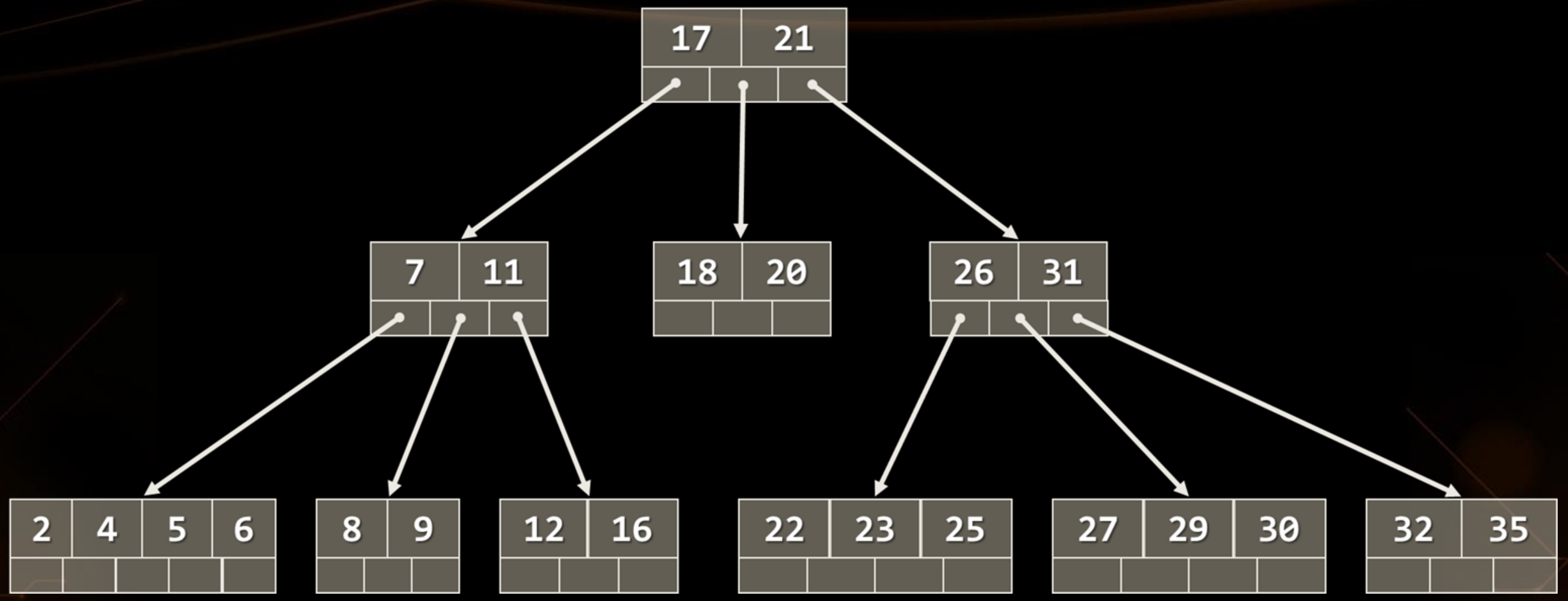
Учителски екип

Обучение за ИТ кариера

https://it-kariera.mon.bg/e-learning

Съдържание

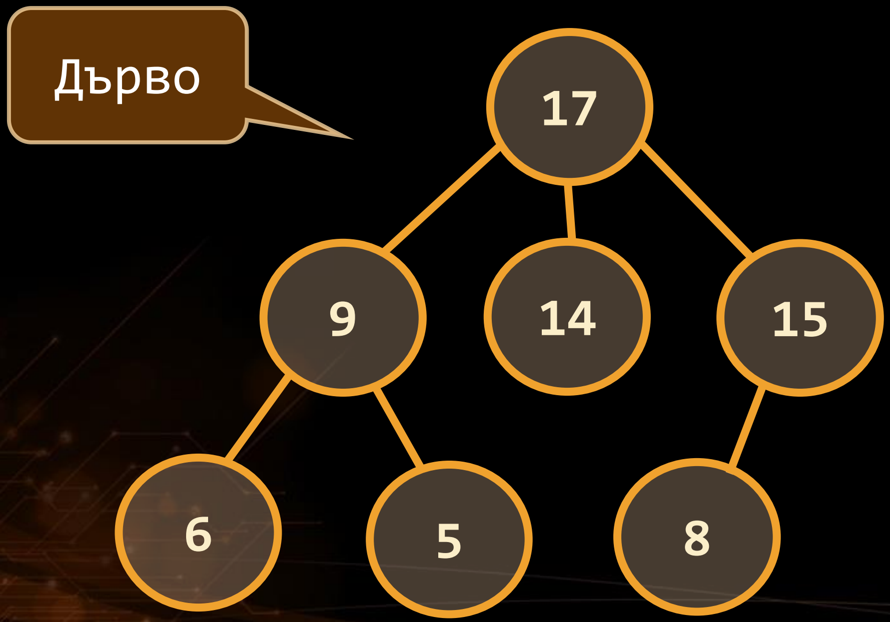
- Дървета и дървовидни структури
- Подредени двоични дървета, балансирани дървета, B-дървета
- Упражнения: структура от данни "дърво", използване на класове и библиотеки за дървовидни структури
- Обхождания в дълбочина и ширина (DFS и BFS)
- Упражнения: обхождане в дълбочина (DFS)
- Упражнения: обхождане в ширина (BFS)



Дървовидни структури от данни

Дървовидни структури от данни

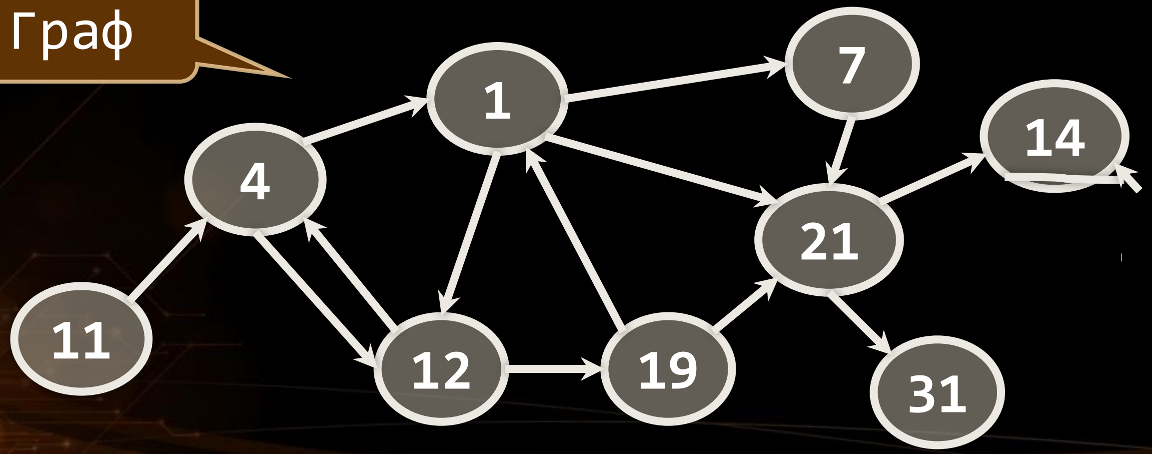
- Дървовидните структури от данни са:
  - Разклонени йерархични структури от данни
  - Изградени от възли
  - Всеки възел е свързан с други възли (разклонения на дървото)



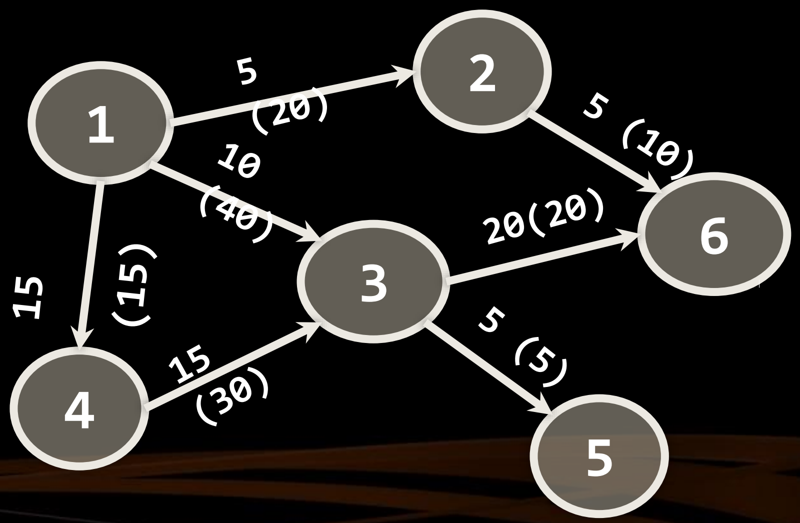
Дървовидни структури от данни

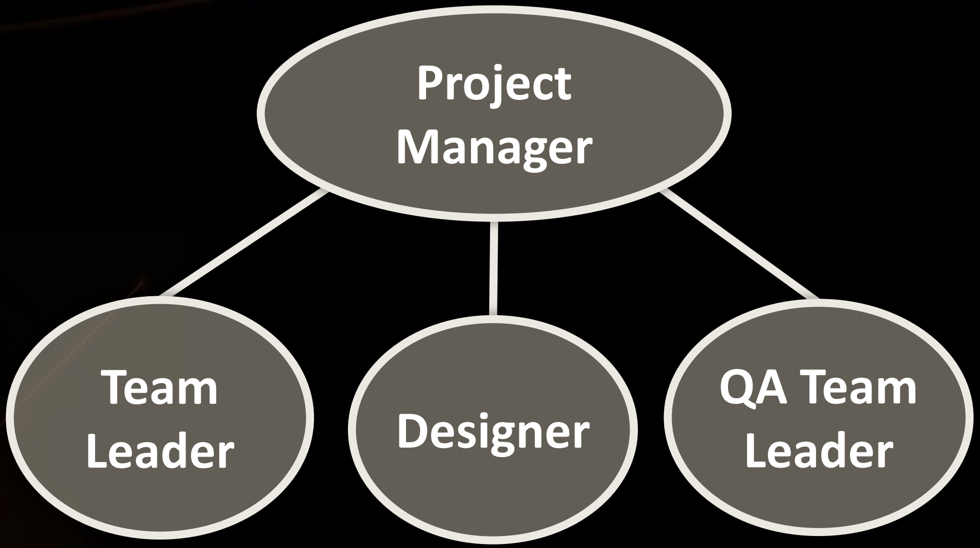
- Дървовидните структури от данни:
  - Дървета - двоични, балансирани, подредени и др.
  - Графи - ориентирани, неориентирани, с тегла и др.
  - Мрежи - графи с особени свойства

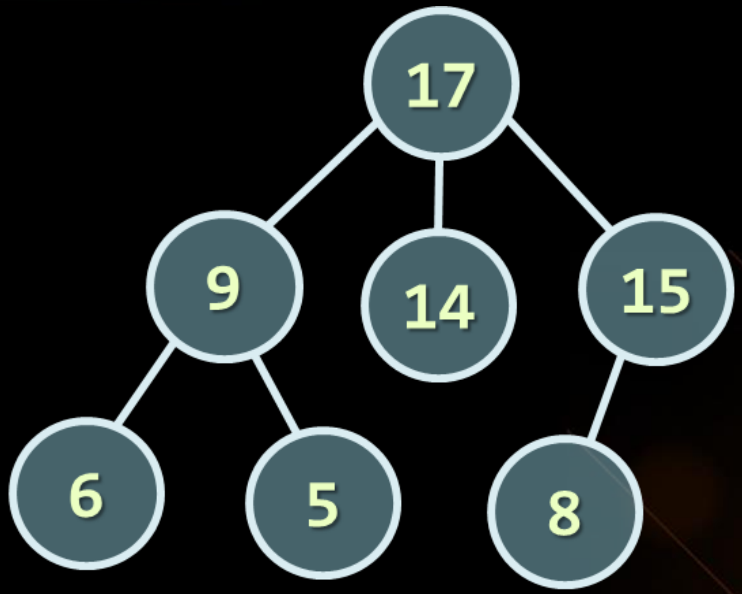
Граф



Мрежа





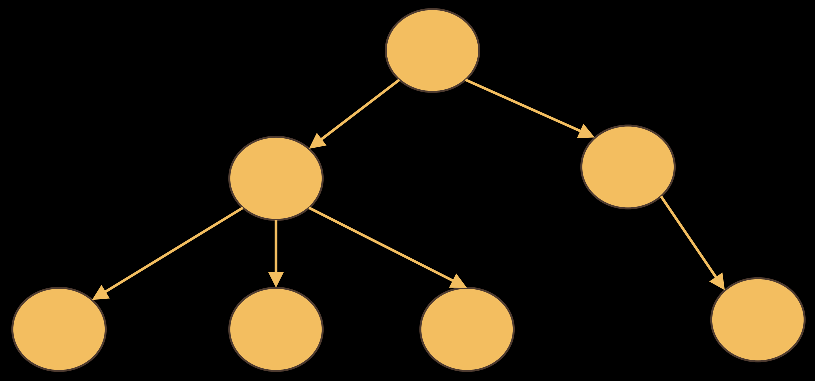


Дървовидни структури от данни

Терминология

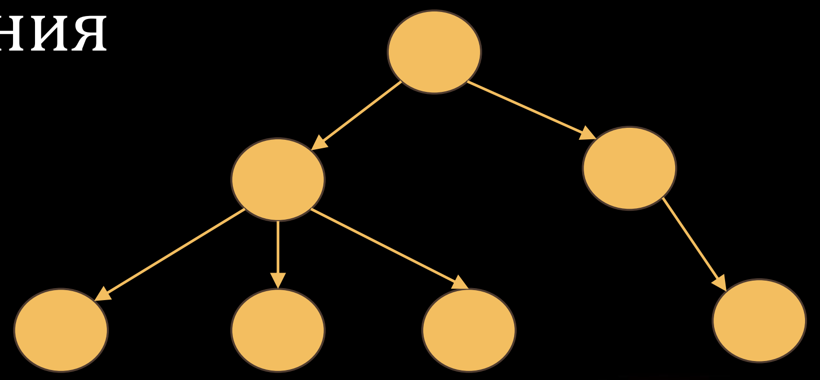
Дървета – дефиниция

- Нека $D = \{V, E\}$ е кореново дърво
  - Всяко дърво се образува от възли и дъги, които ги свързват
  - Формално върховете могат да бъдат от два вида:
    - Родител
    - Наследник
  - Върхът без родител се нарича "корен"
  - Всяко дърво има само корен
  - Връх без наследници се нарича "листо"



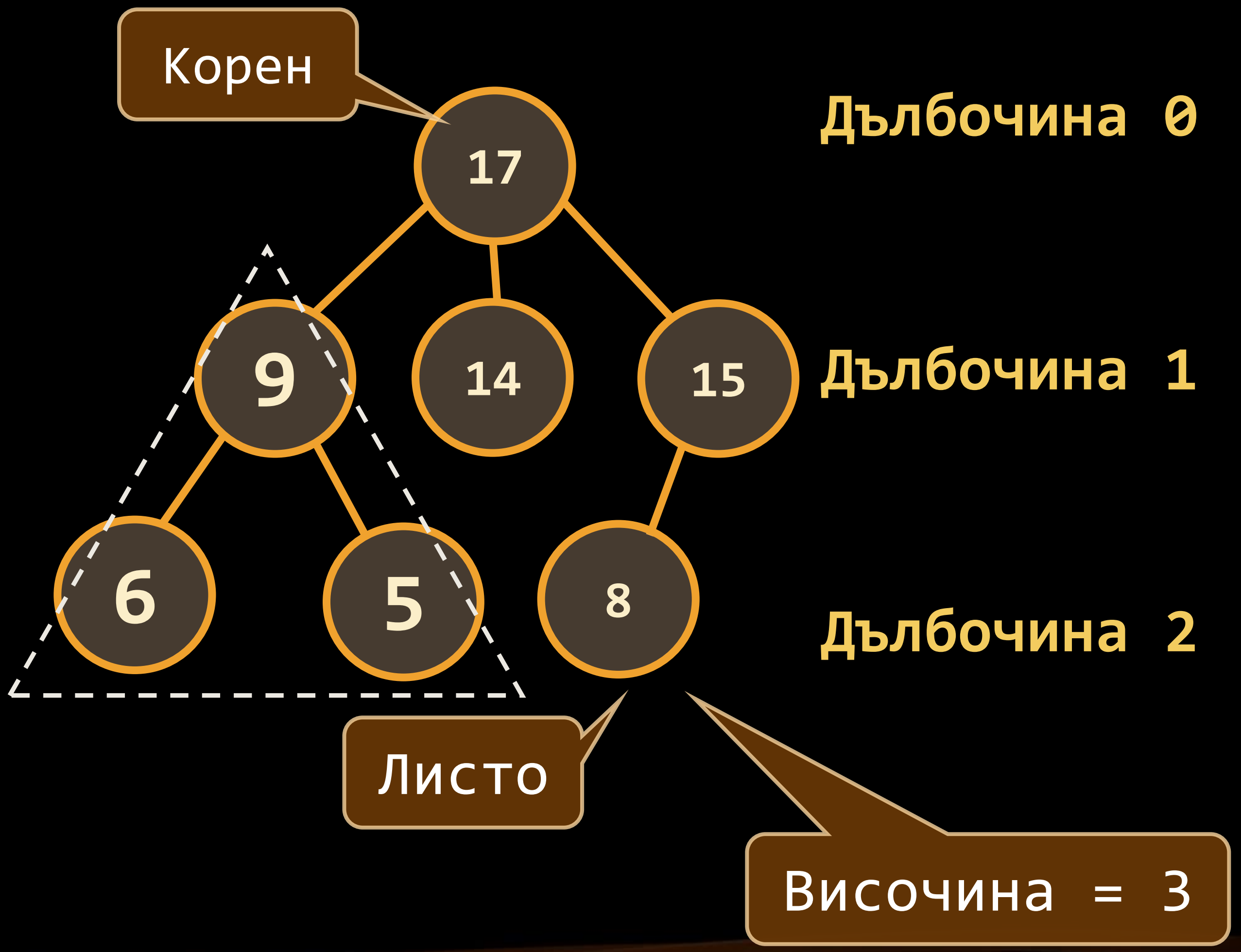
Дърво – обща дефиниция

- Дърво от тип T е структура, образувана от:
  - Елемент от тип T, наречен “корен”
  - Крайно множество елементи от тип T, наречени “поддървета”
- Дървото се бележи с T = {V, E}, където:
  - V е множеството от възли в структурата
  - E е множеството от ребра в структурата
- Дървета, в които T има k на брой разклонения наричаме k-ични дървета



Дървовидни структури от данни – терминология

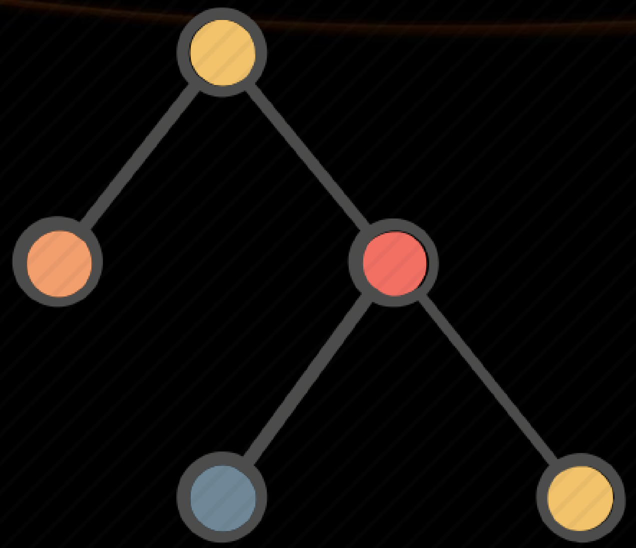
- Възел, ребро
- Корен, родител, дете, брат
- Дълбочина, височина
- Под-дърво
- Вътрешен възел, листо
- Предшественик, наследник



Двоични дървета

Възлите на двоичните дървета имат по не повече от две разклонения

- Двоични дървета
  - Няма правила за подредба на елементите
- Наредени (сортирани) двоични дървета (правила за подредба на възлите)
- Двоични дървета за търсене (частен случай на сортирани дървета):
  - Лявото разклонение на всеки възел има по-малка стойност от стойността на възела
  - Дясното разклонение на всеки възел има по-голяма стойност от стойността на възела.



Двоични дървета

Реализация

Рекурсивна дефиниция на дървета

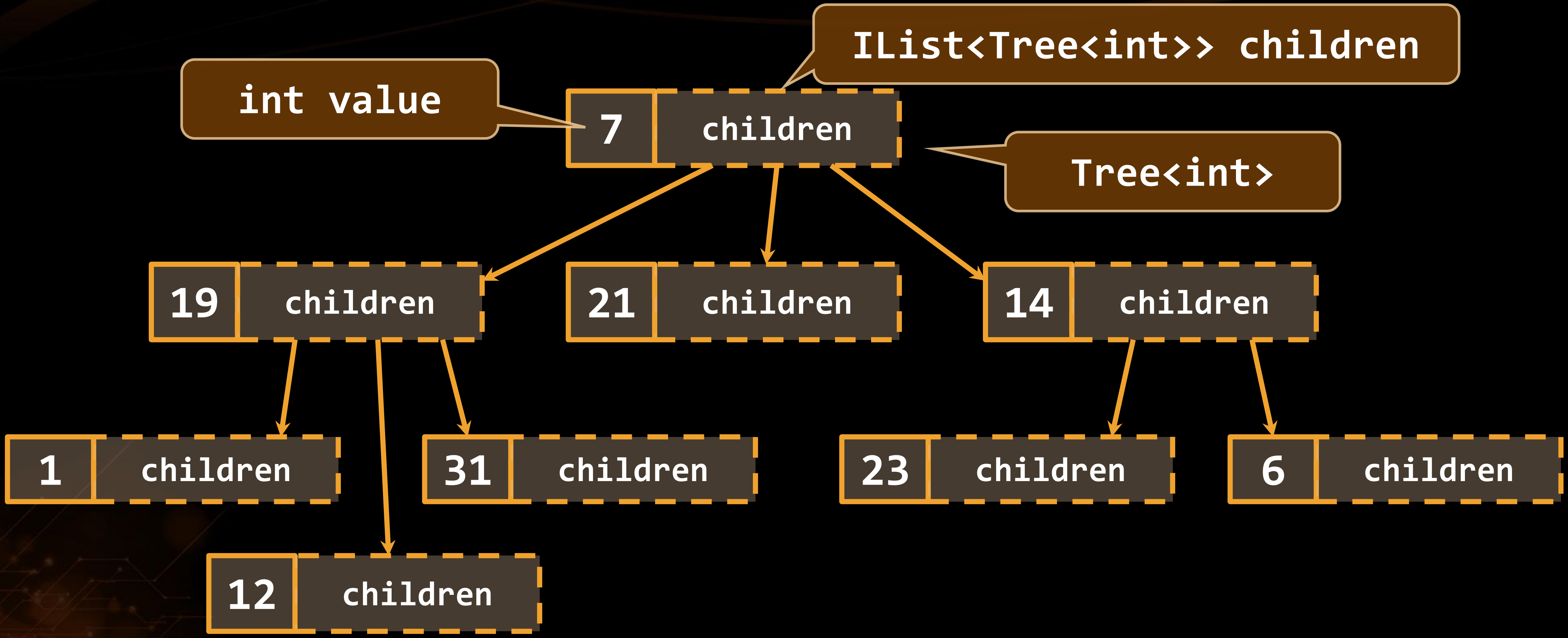
- Рекурсивна дефиниция на дървета:
  - Всеки възел е дърво
  - Възлите имат 0 или много деца, които също са дървета

```
public class Tree<T>
{
  private T value;
  private IList<Tree<T>> children;
  …
}
```

Стойността на възела

Списък с възли - деца (поддървета)

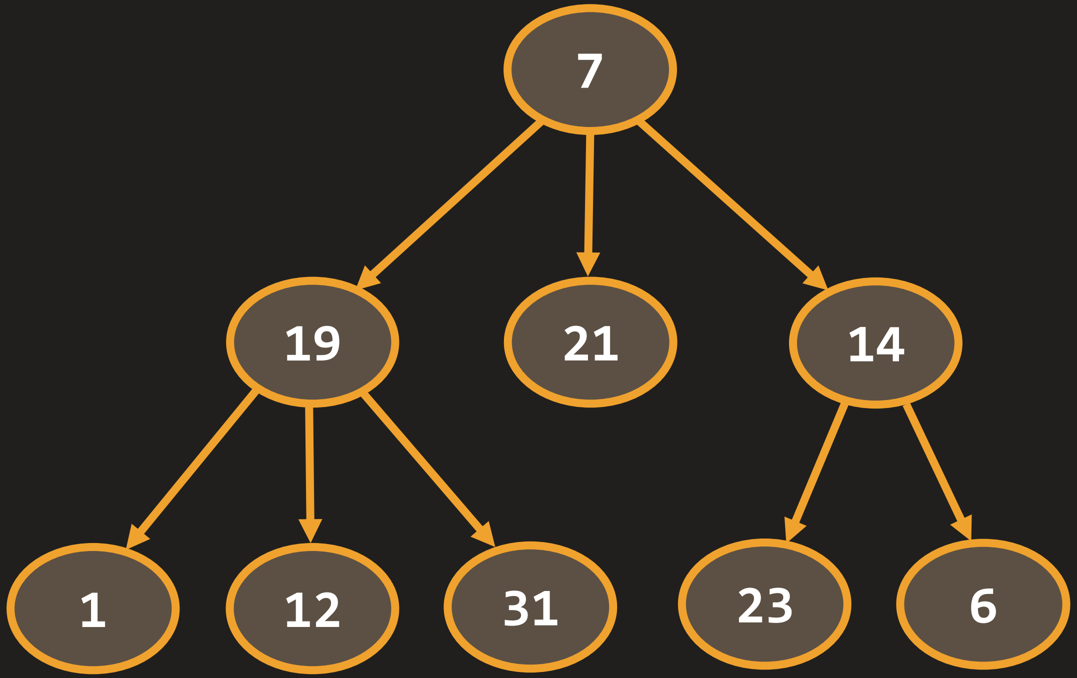
Структурата Tree<T> – Пример



Задача: Реализирайте възел на дърво

- Създайте рекурсивно дефинирана структура описваща дърво

```
Tree<int> tree =
   new Tree<int>(7,
      new Tree<int>(19,
         new Tree<int>(1),
         new Tree<int>(12),
         new Tree<int>(31)),
      new Tree<int>(21),
      new Tree<int>(14,
         new Tree<int>(23),
         new Tree<int>(6))
);
```



Задача: Отпечатайте елементите на дърво

- Отпечатайте на конзолата елементите на дърво с 2 интервала отместване за всяко следващо ниво

```
Tree<int> tree =
   new Tree<int>(7,
      new Tree<int>(19,
         new Tree<int>(1),
         new Tree<int>(12),
         new Tree<int>(31)),
      new Tree<int>(21),
      new Tree<int>(14,
         new Tree<int>(23),
         new Tree<int>(6))
);
```

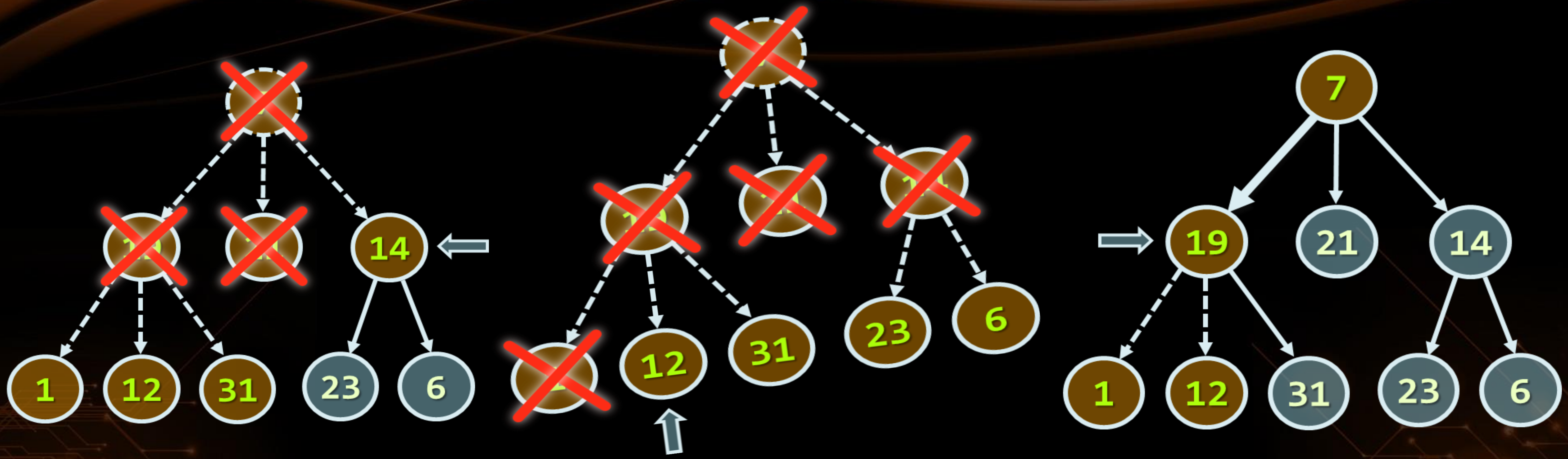
```
7
  19
    1
    12
    31
  21
  14
    23
    6
```

Решение: Отпечатайте елементите на дърво

- Рекурсивен алгоритъм за обхождане на елементите на дърво

```
public class Tree<T>
{
  …
  public void Print(int indent = 0)
  {
    Console.Write(new string(' ', 2 * indent));
    Console.WriteLine(this.Value);
    foreach (var child in this.Children)
      child.Print(indent + 1);
  }
}
```

```
7
  19
    1
    12
    31
  21
  14
    23
    6
```



Обхождане на дървовидни структури

Обхождане в ширина (BFS) и дълбочина (DFS)

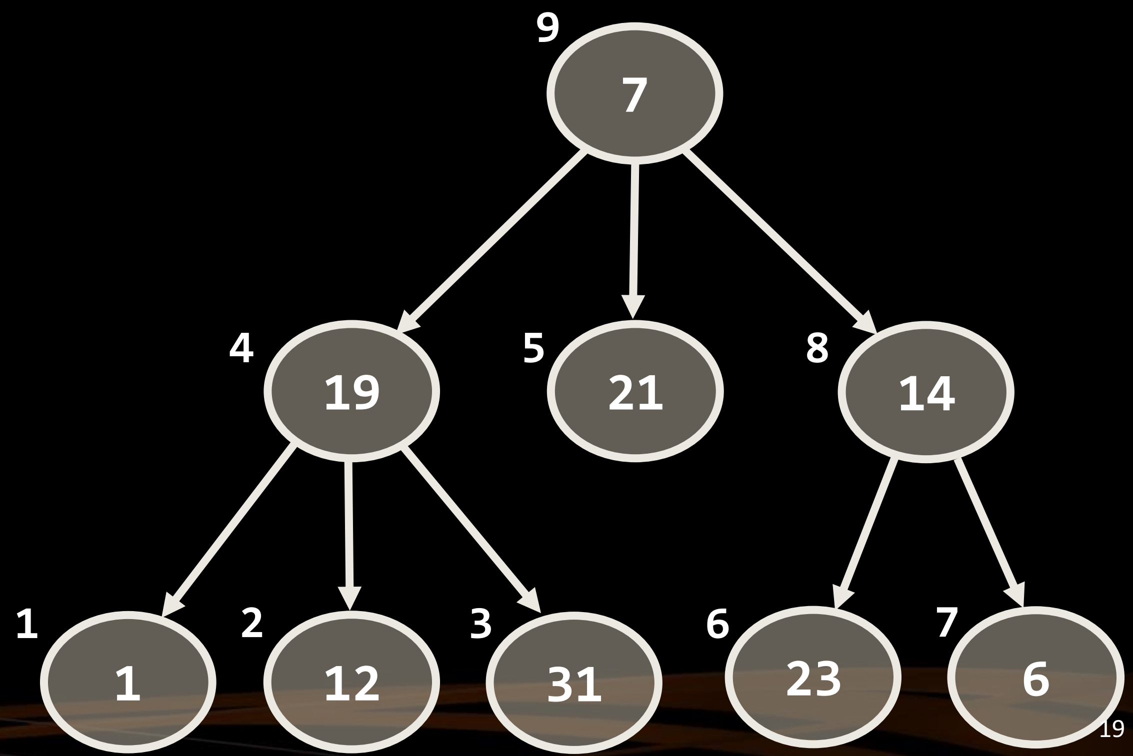
Обхождане на дървовидни структури

- Обхождане на дърво представлява посещаването на всеки негов възел точно по веднъж
- Последователността на обхождането може да варира, в зависимост от алгоритъма за обхождане:
  - Обхождане в дълбочина (DFS):
    - Първо се посещават наследниците на възела
    - Стандартна реализация - чрез рекурсия
  - Обхождане в ширина (BFS):
    - Първо се посещава най-близкия възел
    - Стандартна реализация - чрез опашка

Обхождане в дълбочина (DFS)

- Обхождане в дълбочина (DFS) - за всеки възел:
  - Посещават се всички негови деца
  - Ако възела няма деца или всички негови деца са вече обходени се обработва стойността му

```
DFS (node)
{
  for each child c of node
    DFS(c);
  print node;
}
```

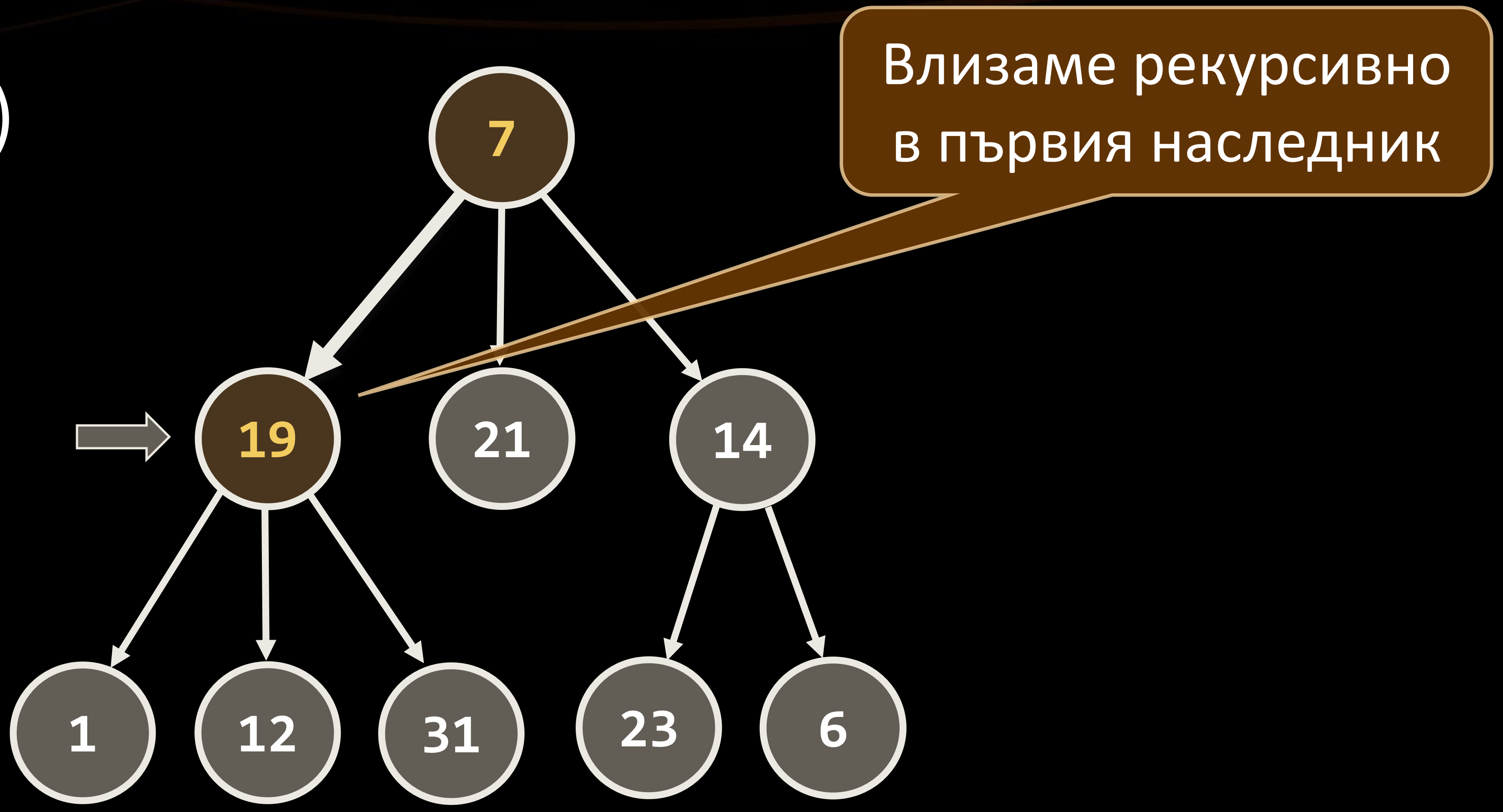


DFS в действие (стъпка 1)

- Стек: 7
- Изход: (празен)

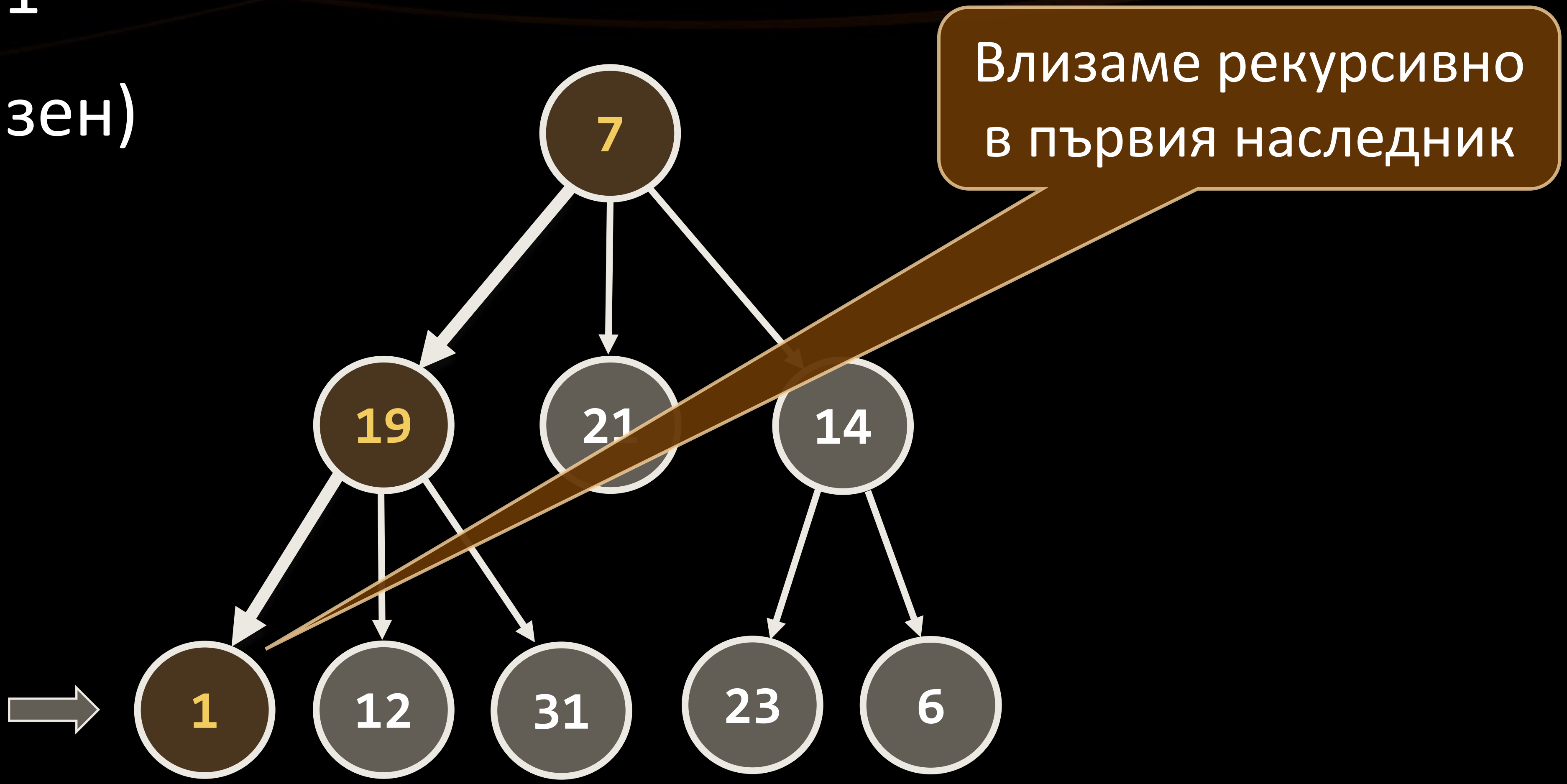
DFS в действие (стъпка 2)

- Стек: 7, 19
- Изход: (празен)



DFS в действие (стъпка 3)

- Стек: 7, 19, 1
- Изход: (празен)

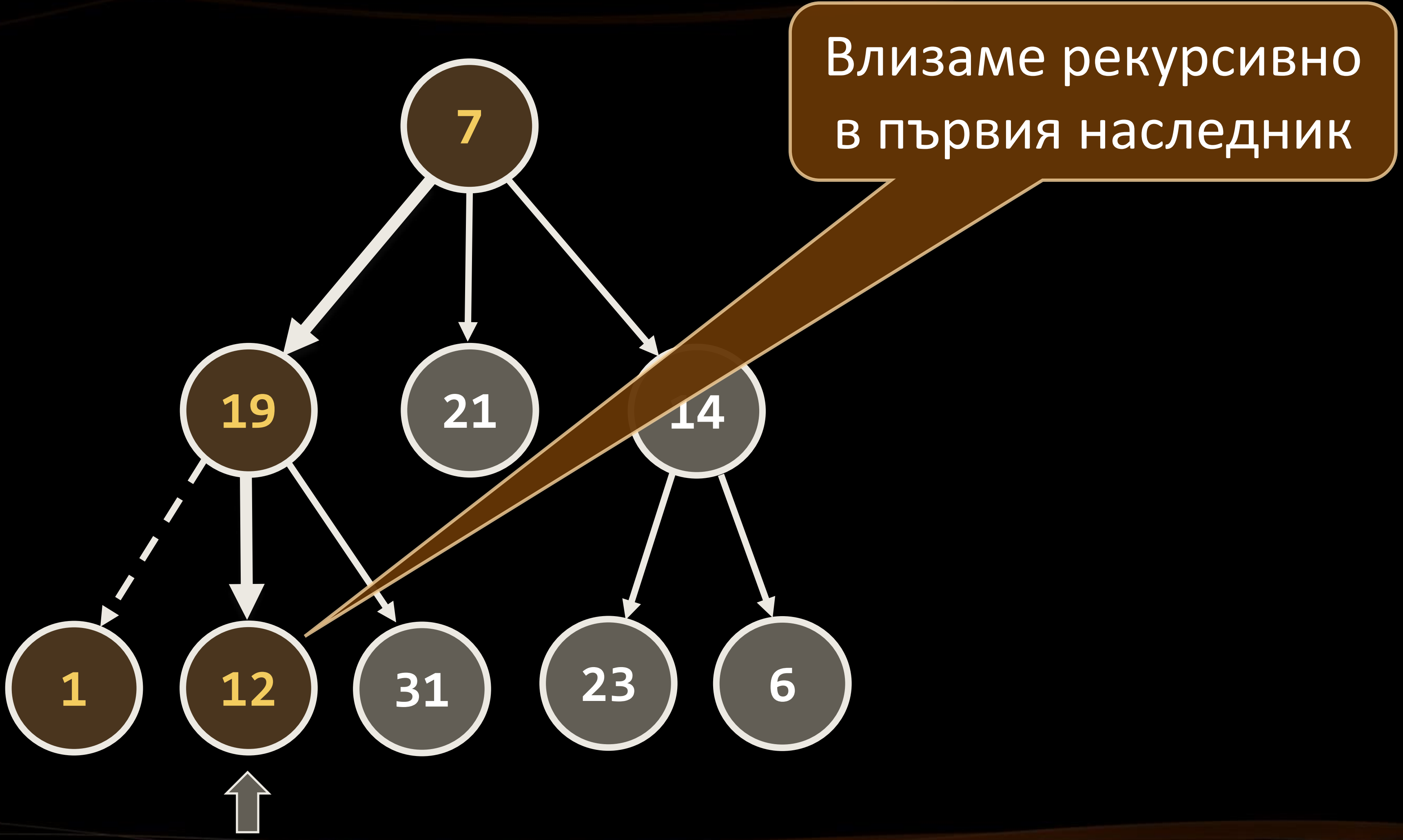


DFS в действие (стъпка 4)

- Стек: 7, 19
- Изход: 1

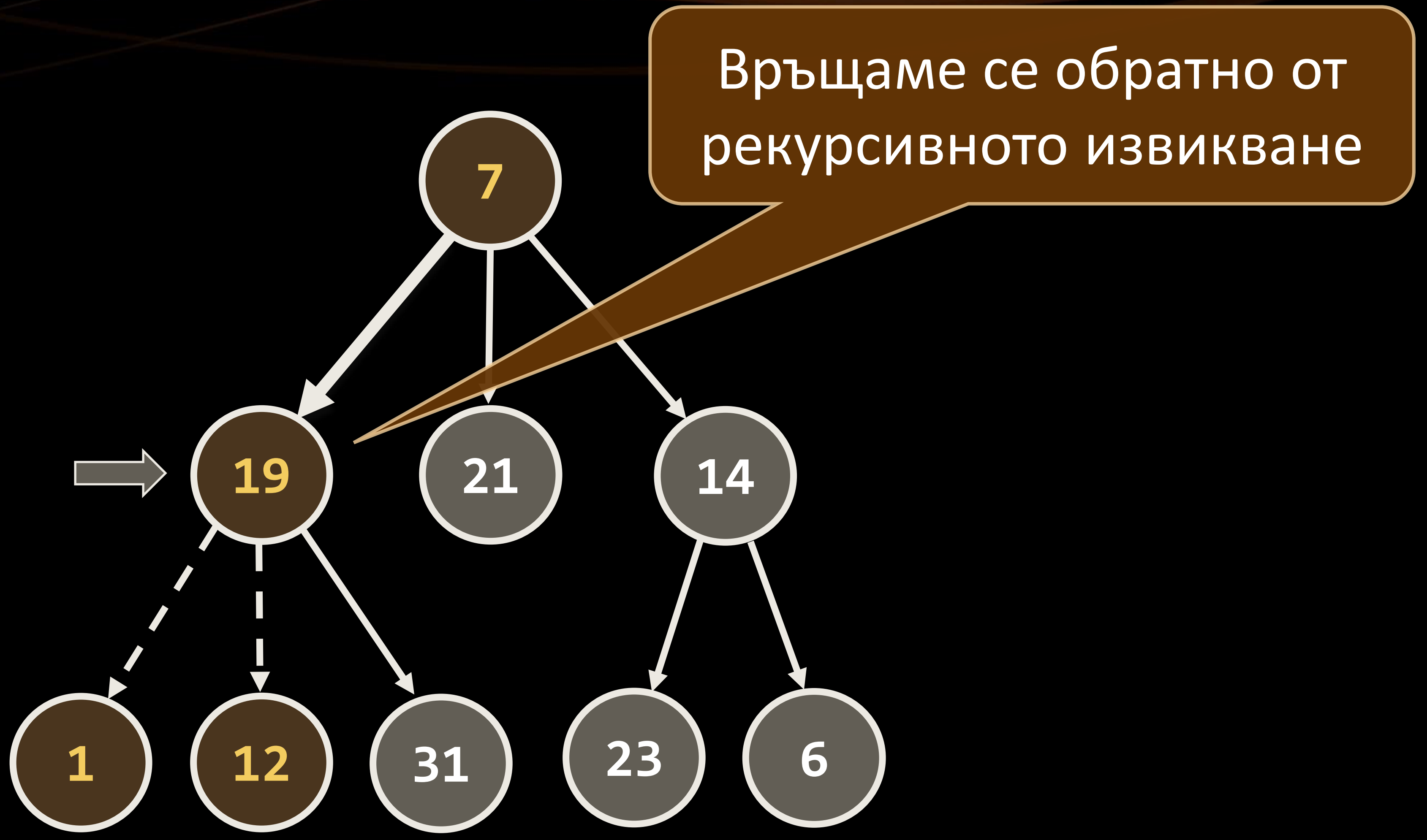
DFS в действие (стъпка 5)

- Стек: 7, 19, 12
- Изход: 1



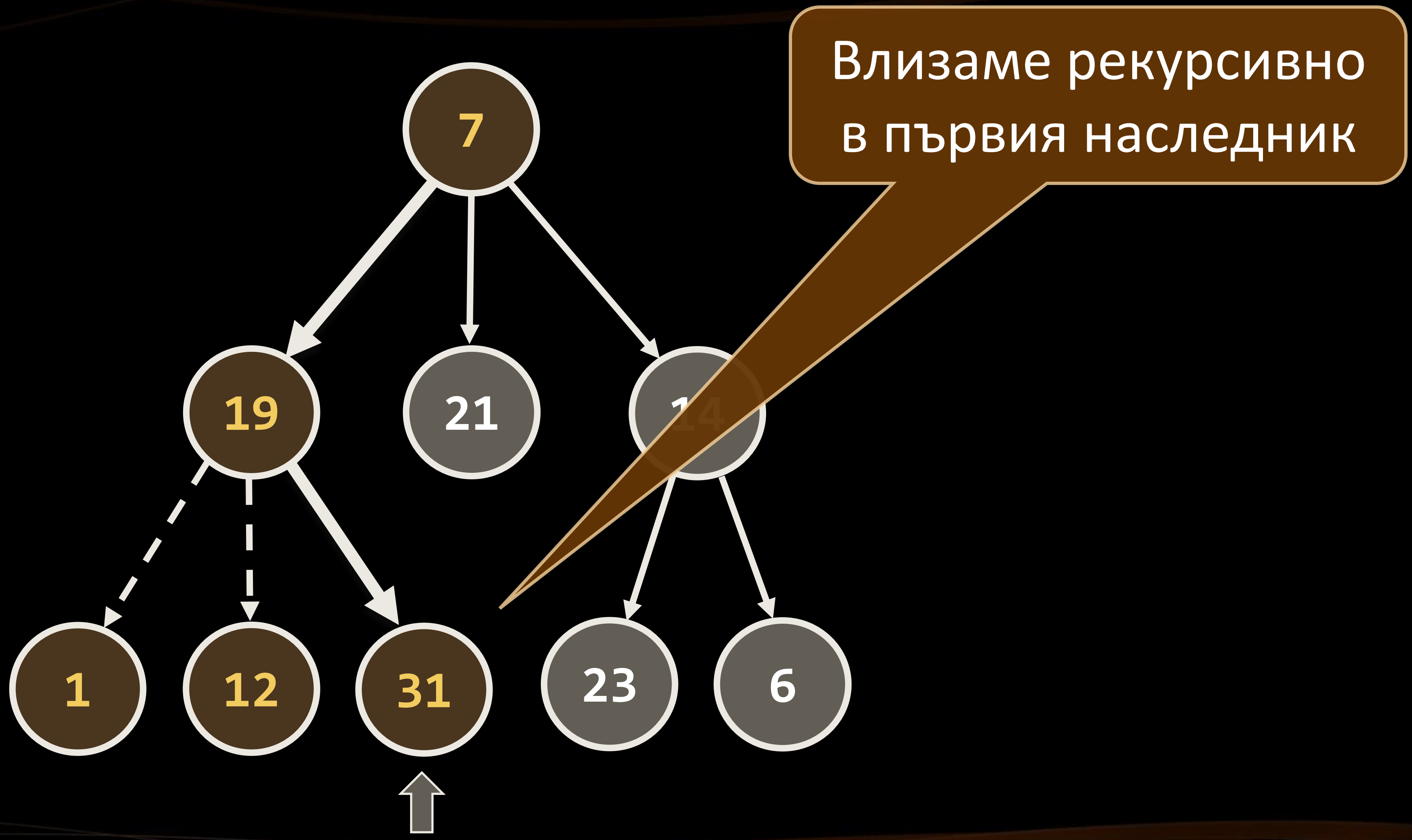
DFS в действие (стъпка 6)

- Стек: 7, 19
- Изход: 1, 12



DFS в действие (стъпка 7)

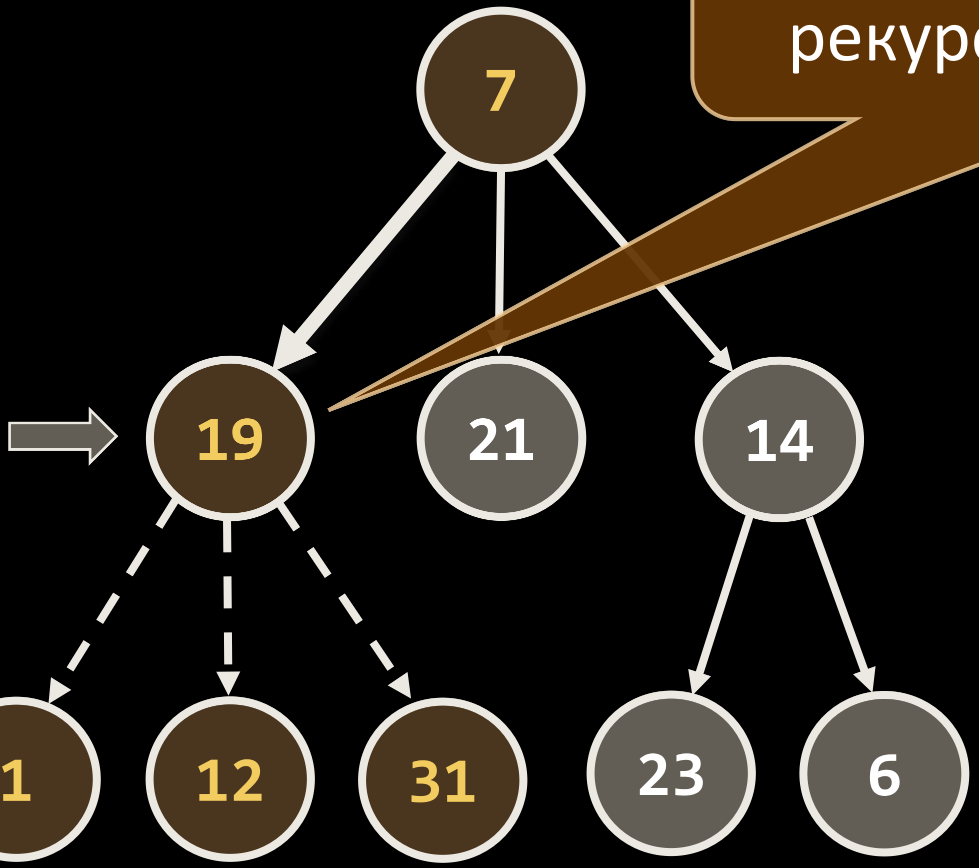
- Стек: 7, 19, 31
- Изход: 1, 12



DFS в действие (стъпка 8)

- Стек: 7, 19
- Изход: 1, 12, 31

Връщаме се обратно от рекурсивното извикване

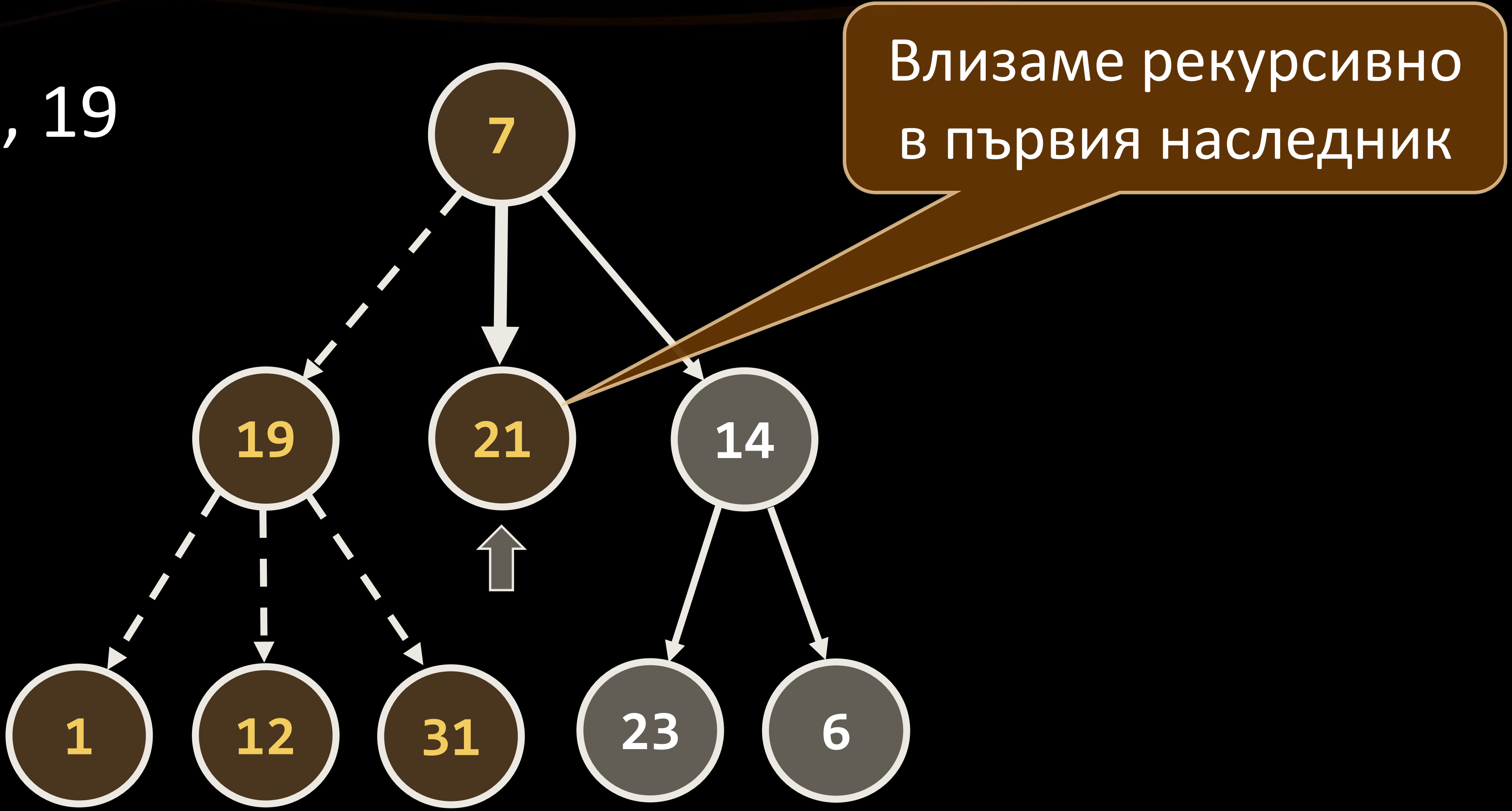


DFS в действие (стъпка 9)

- Стек: 7
- Изход: 1, 12, 31, 19

DFS в действие (стъпка 10)

- Стек: 7, 21
- Изход: 1, 12, 31, 19

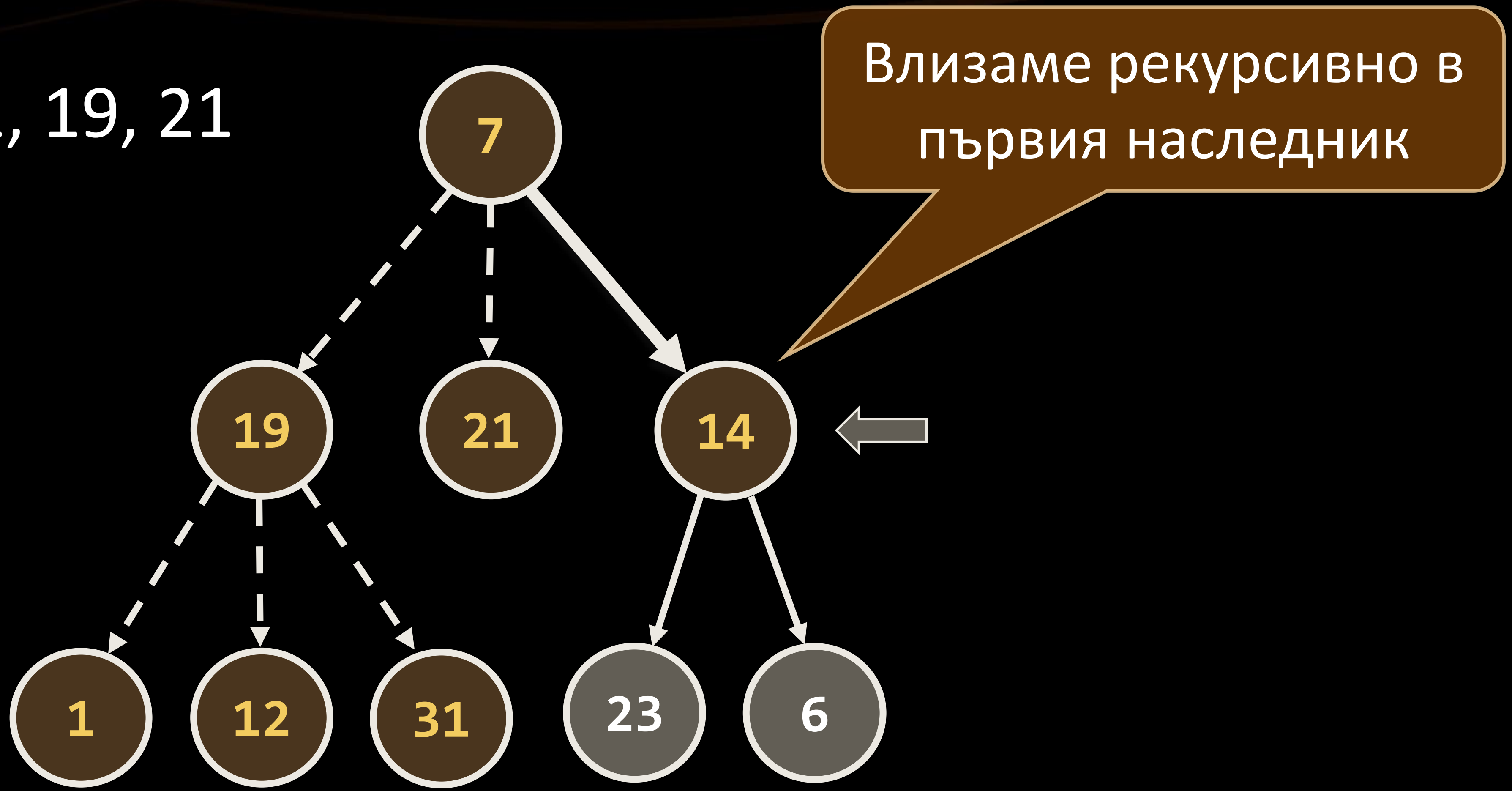


DFS в действие (стъпка 11)

- Стек: 7
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21

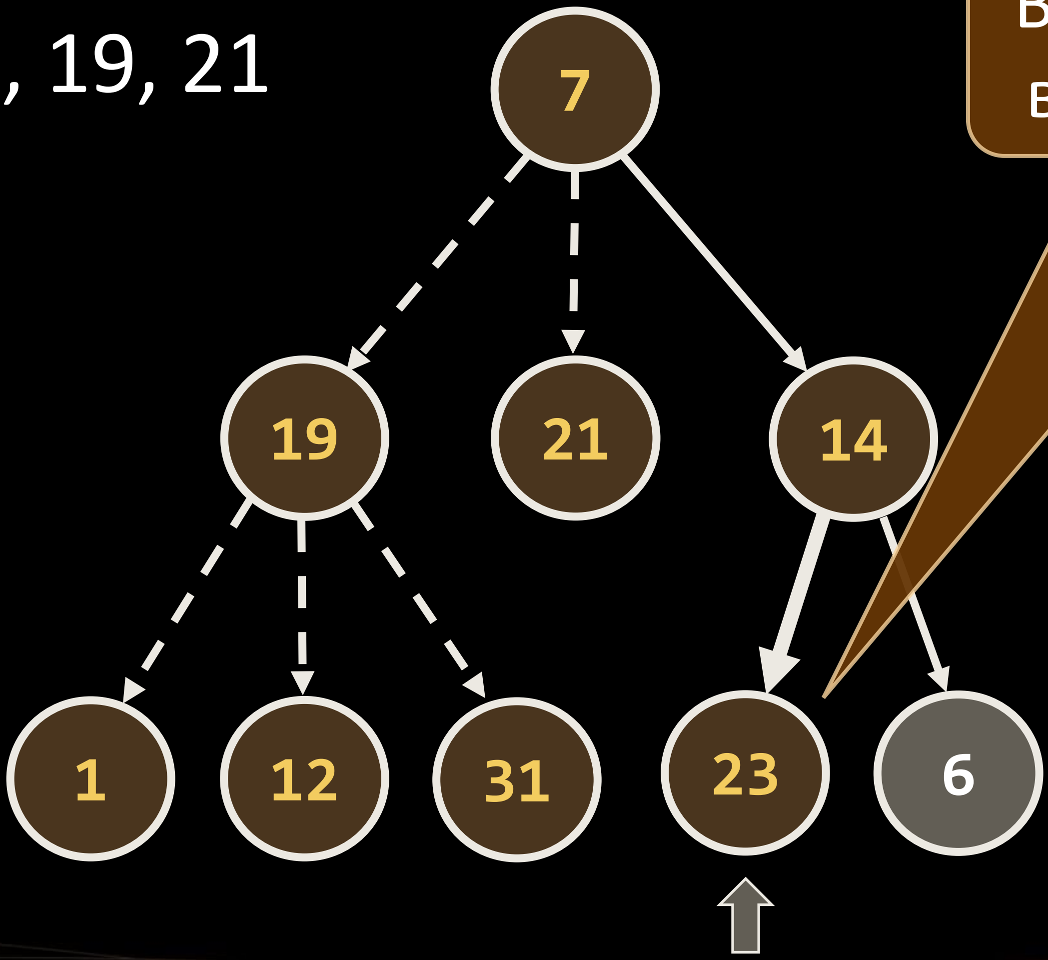
DFS в действие (стъпка 12)

- Стек: 7, 14
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21



DFS в действие (стъпка 13)

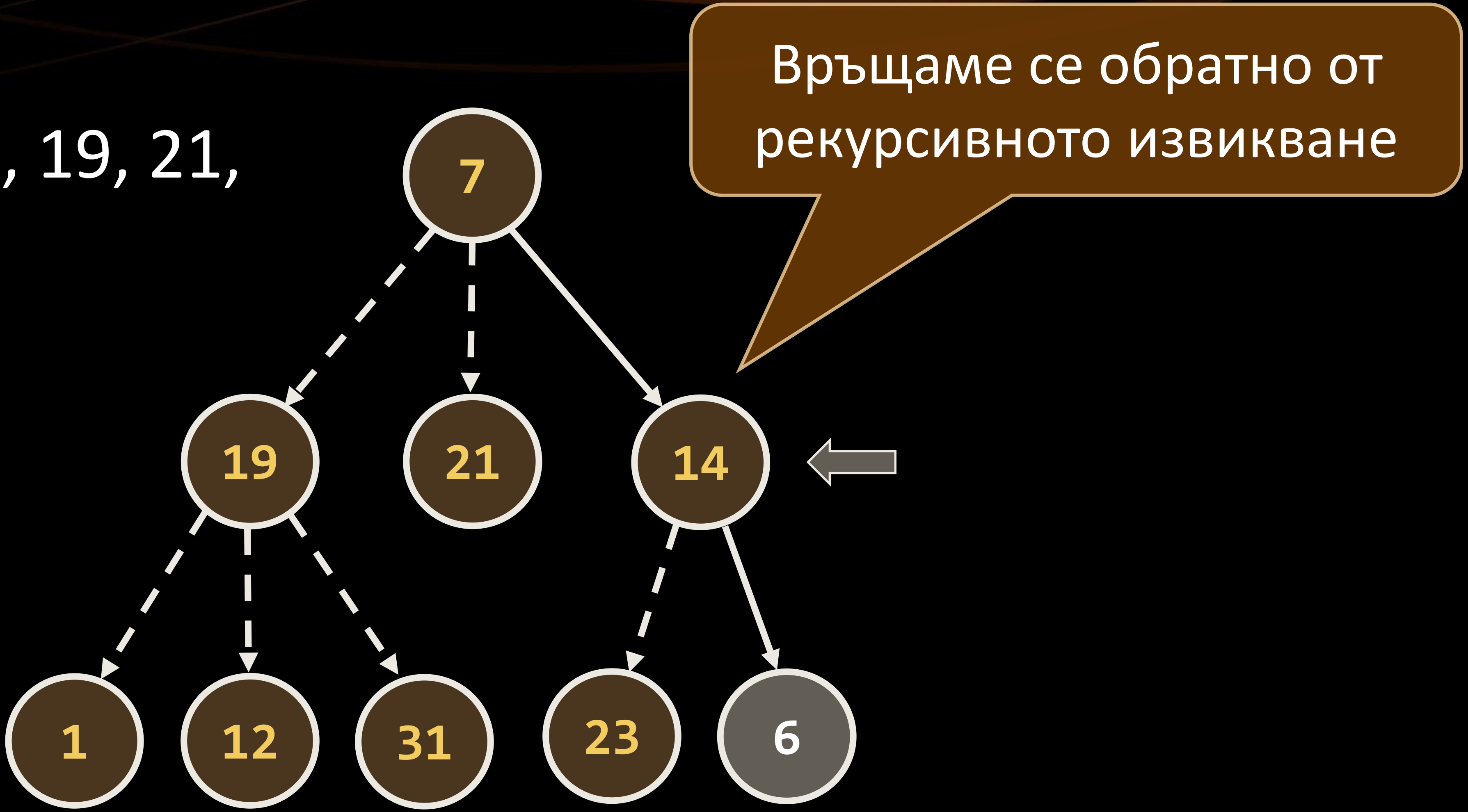
- Стек: 7, 14, 23
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21



Влизаме рекурсивно в първия наследник

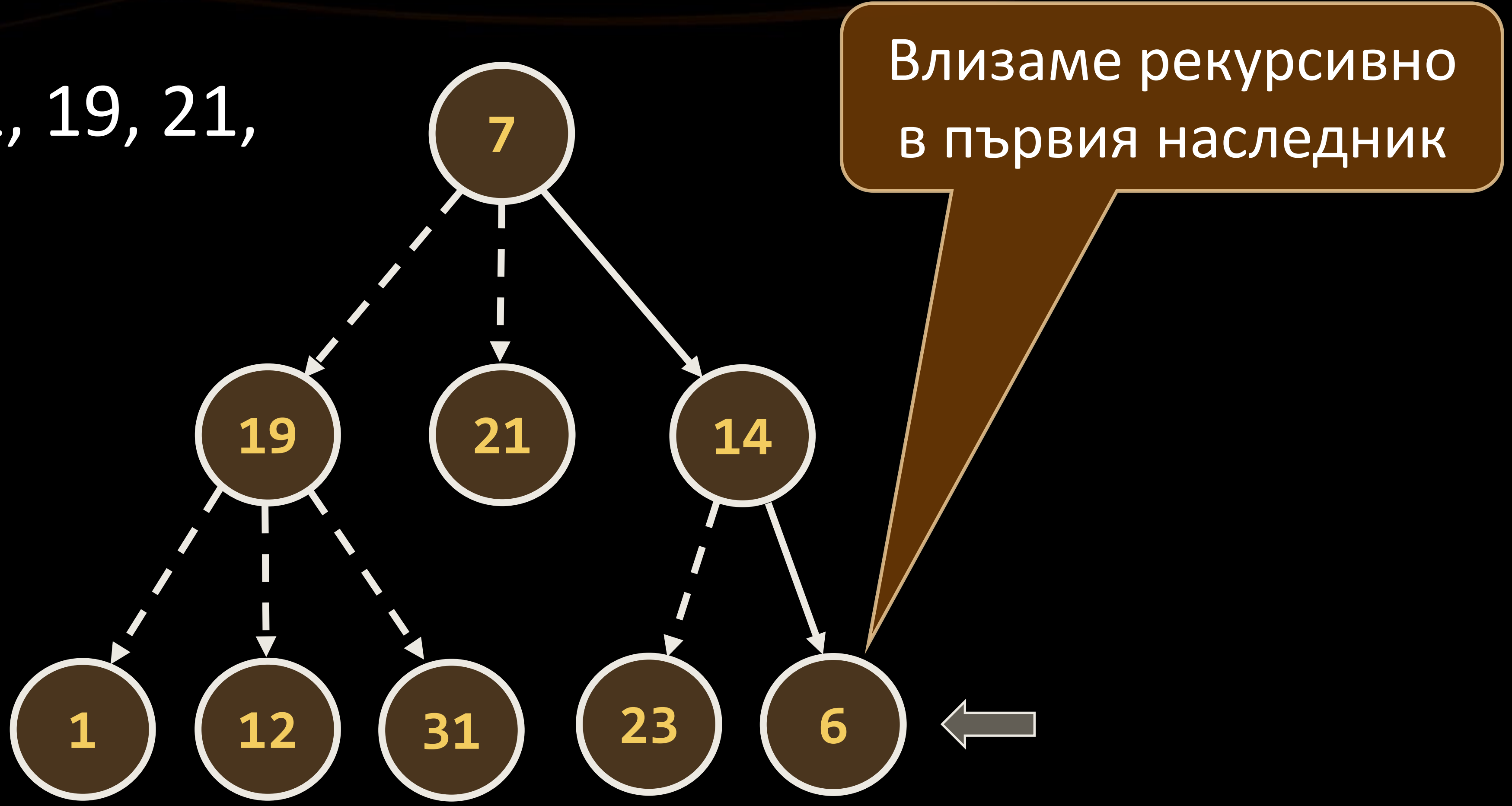
DFS в действие (стъпка 14)

- Стек: 7, 14
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21, 23



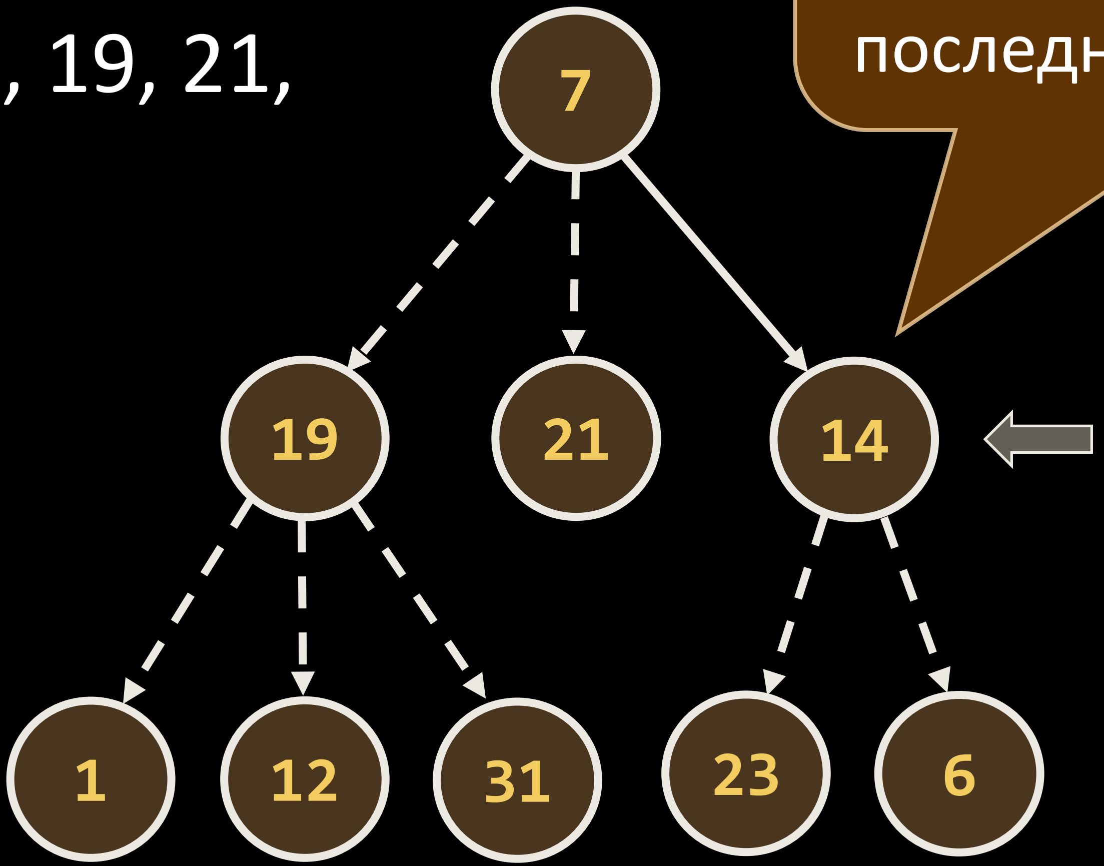
DFS в действие (стъпка 15)

- Стек: 7, 14, 6
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21, 23



DFS в действие (стъпка 16)

- Стек: 7, 14
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21, 23, 6



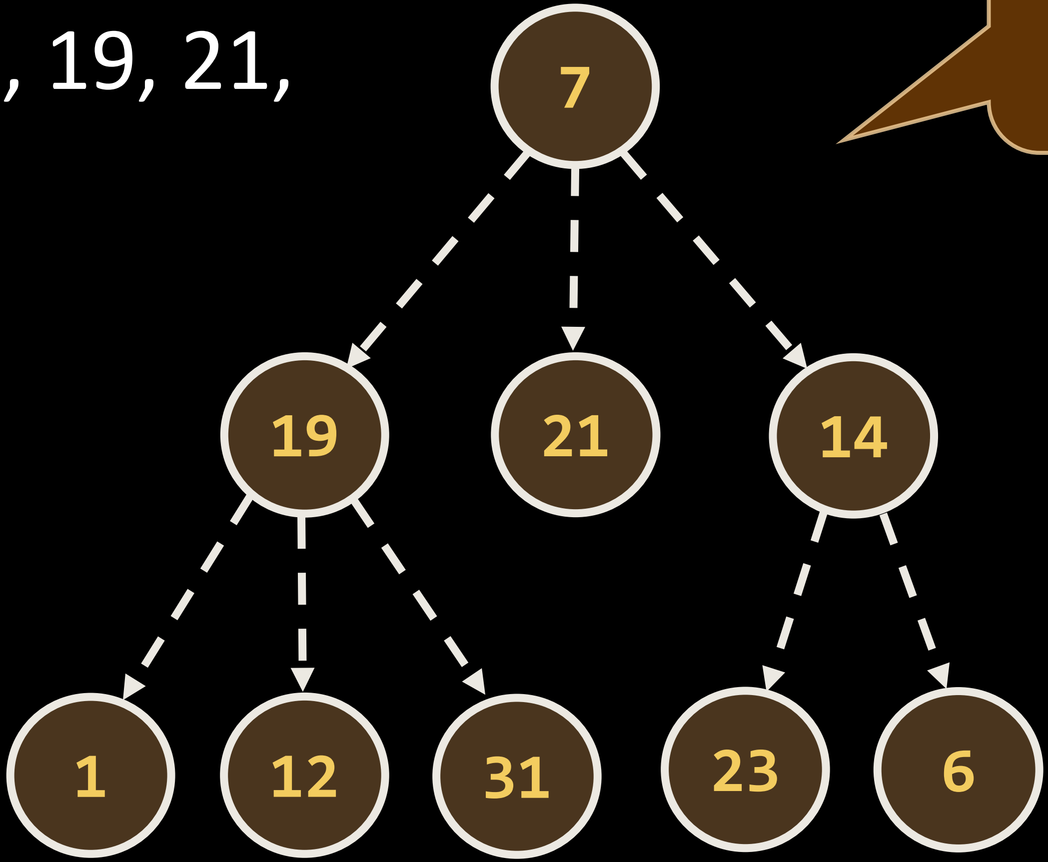
DFS в действие (стъпка 17)

- Стек: 7
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21, 23, 6, 14

DFS в действие (стъпка 18)

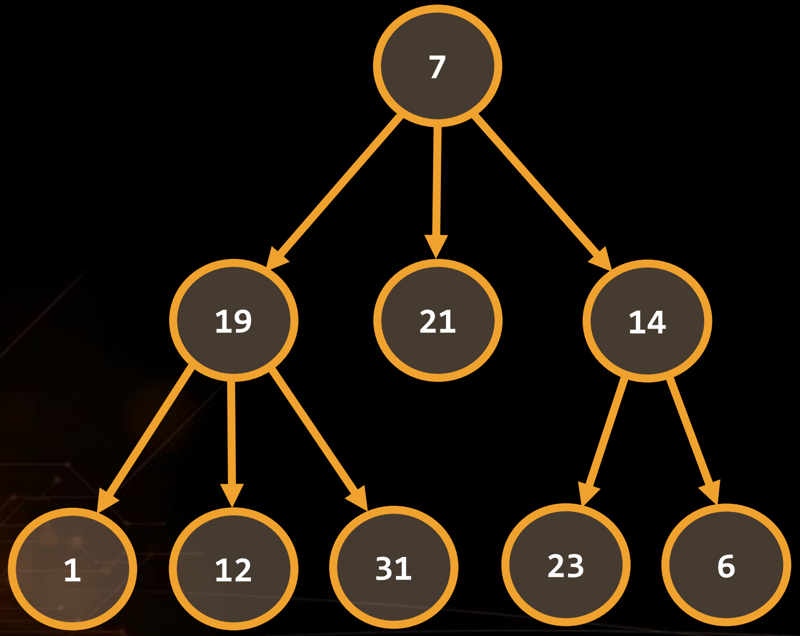
- Стек: (празен)
- Изход: 1, 12, 31, 19, 21, 23, 6, 14, 7

Обхождането в дълбочина - **приключено**



Задача: Извличане на елементи от дърво (DFS)

- Обходете дърво от тип **`Tree<T>`**, като дефинирате:
  - **`IEnumerable<T> OrderDFS()`**, който връща елементите на дървото по поредността на обхождане с DFS




```
1 12 31 19 21 23 6 14 7
```

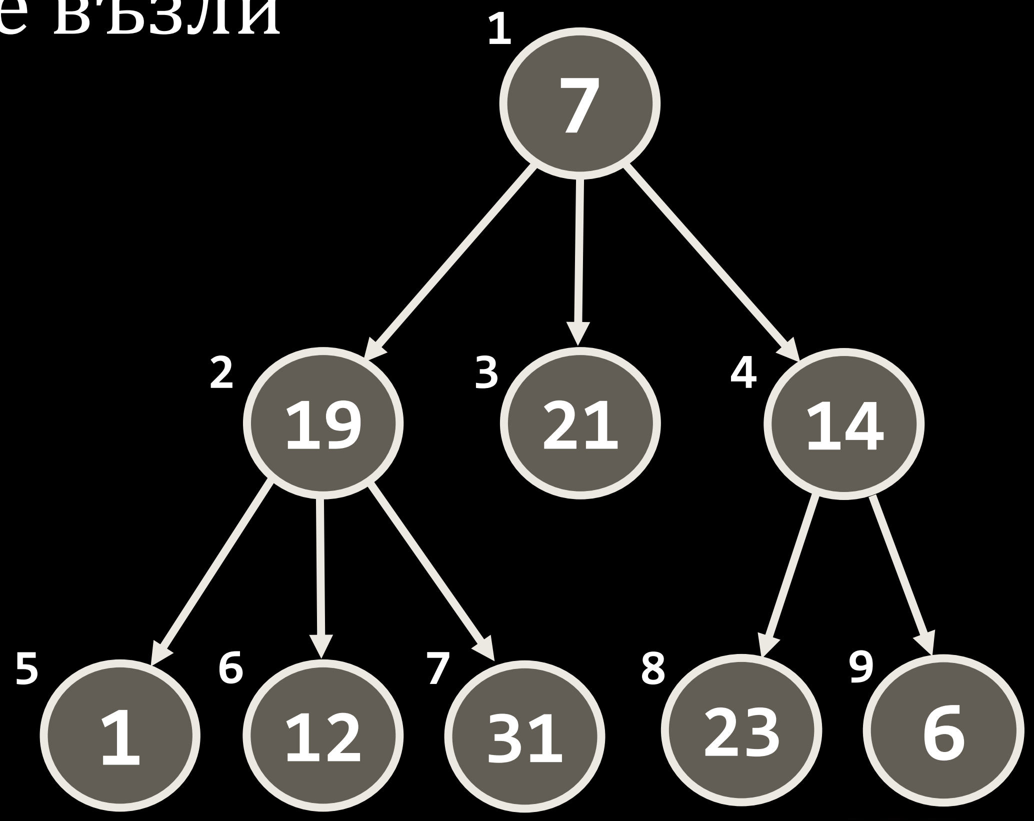
Задача: Извличане на елементи от дърво (DFS)

```
public IEnumerable<T> OrderDFS()
{
  List<T> order = new List<T>();
  this.DFS(this, order);
  return order;
}

private void DFS(Tree<T> tree, List<T> order)
{
  foreach (var child in tree.Children)
    this.DFS(child, order);

  order.Add(tree.Value);
}
```

Обхождане в ширина (BFS)

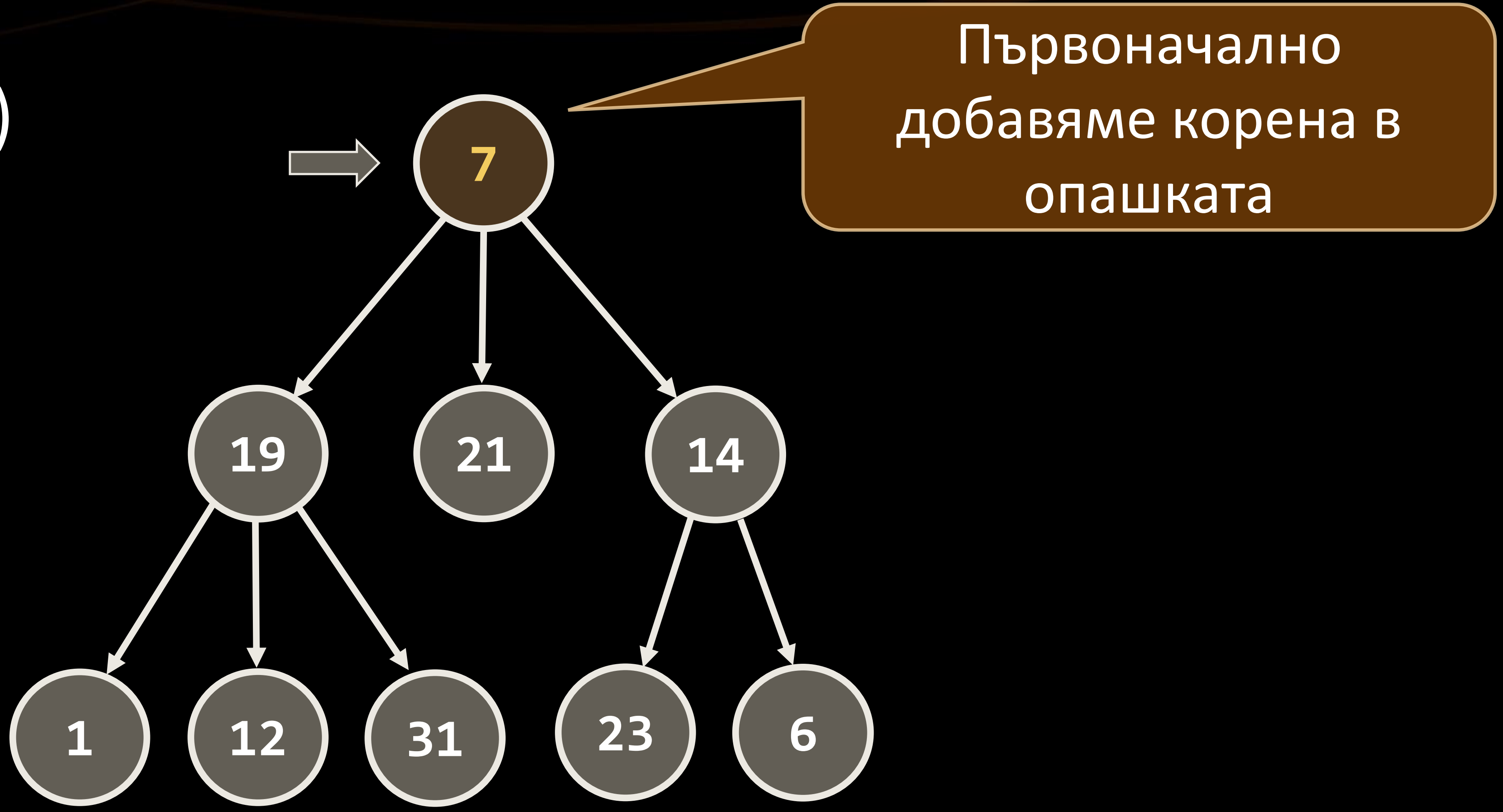
- **Обхождане в ширина** (BFS) - за всеки възел:
  - Обработва се стойността на възела
  - Посещават се всички съседните възли

```
BFS (node)
{
  queue ← node
  while queue not empty
    v ← queue
    print v
    for each child c of v
      queue ← c
}
```



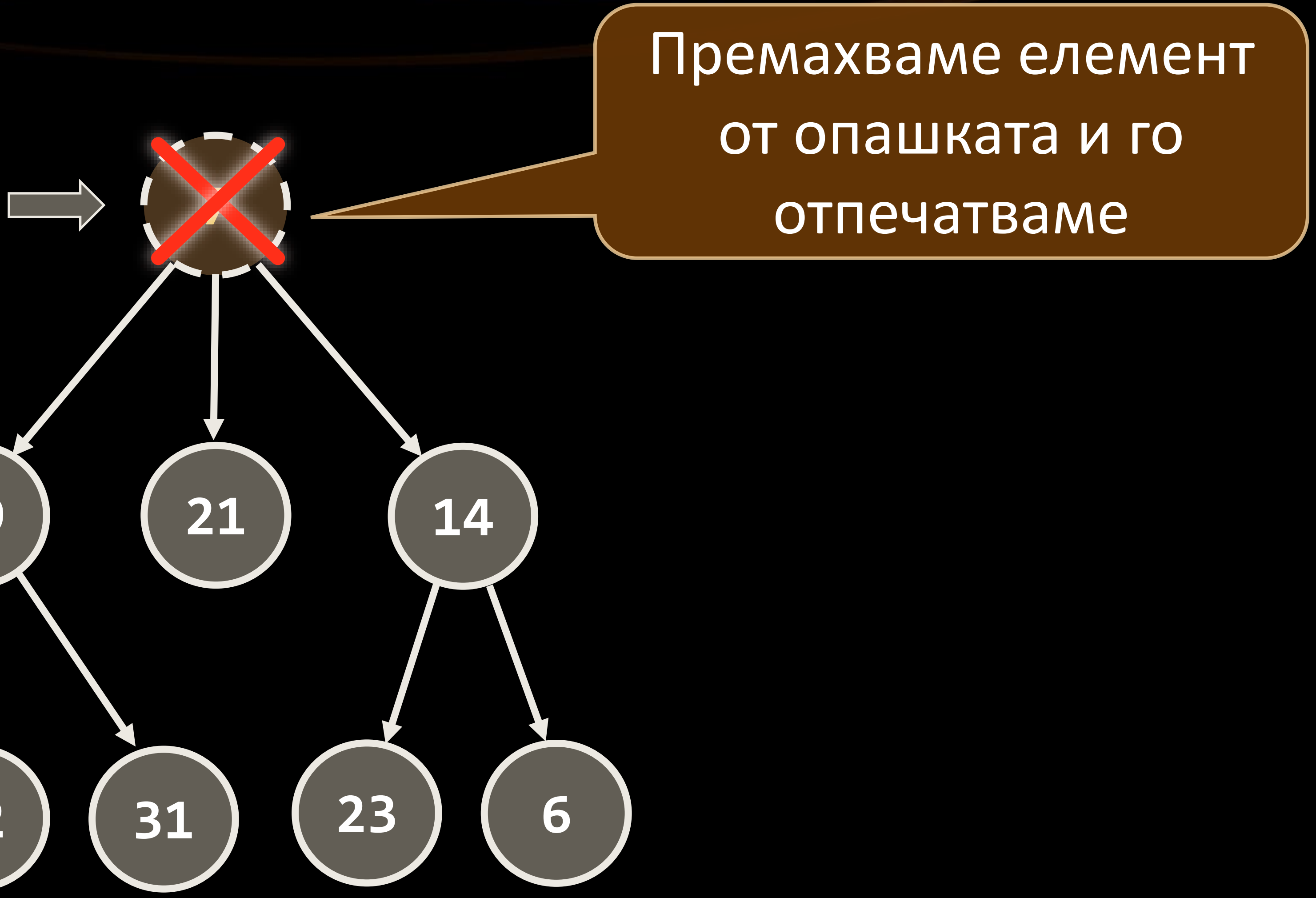
BFS в действие (стъпка 1)

- Опашка: 7
- Изход: (празен)



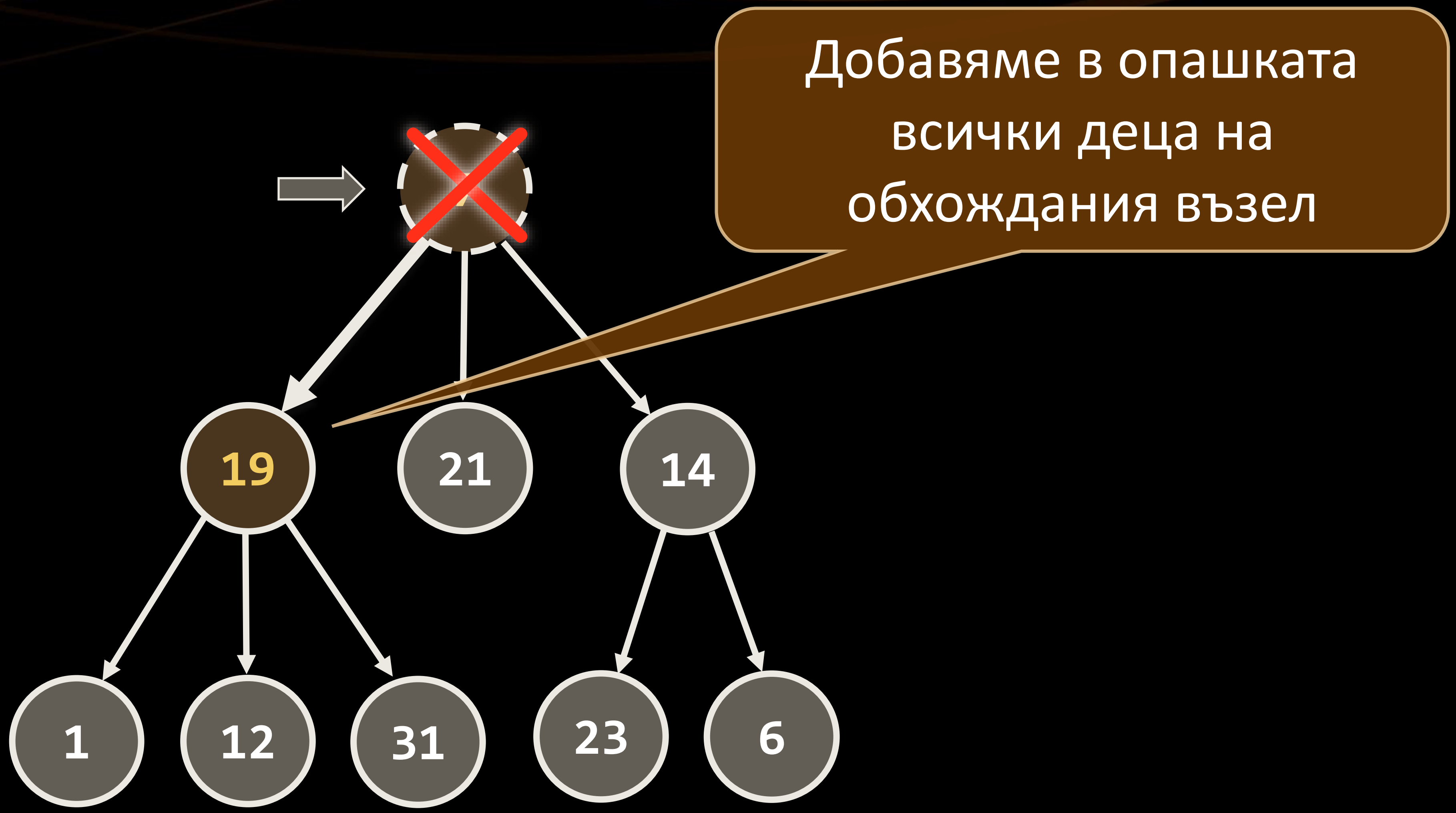
BFS в действие (стъпка 2)

- Опашка: ~~7~~
- Изход: 7



BFS в действие (стъпка 3)

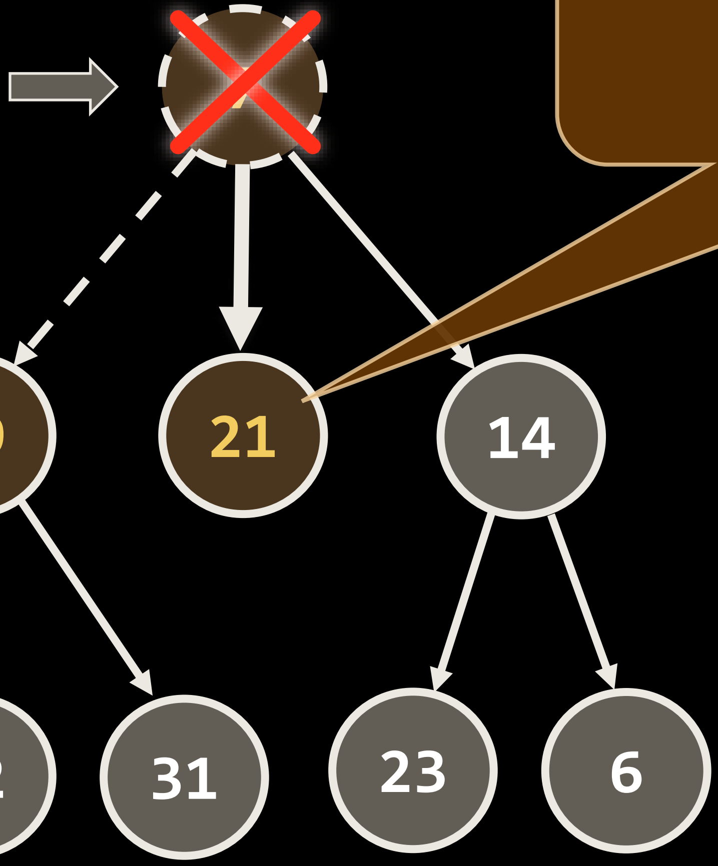
- Опашка: ~~7~~, 19
- Изход: 7



BFS в действие (стъпка 4)

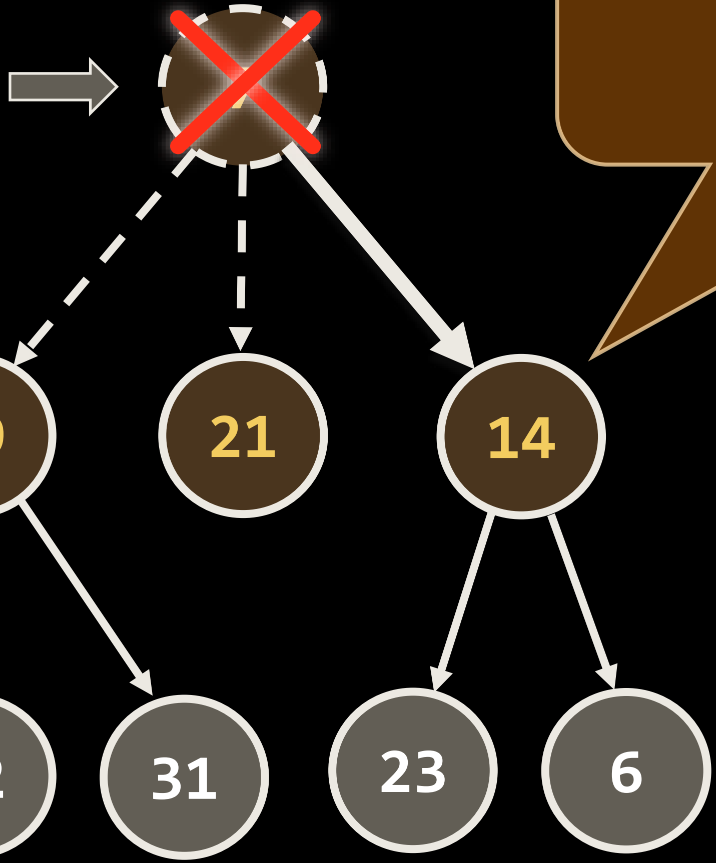
- Опашка: ~~7,~~ 19, 21
- Изход: 7

Добавяме в опашката всички деца на обхождания възел



BFS в действие (стъпка 5)

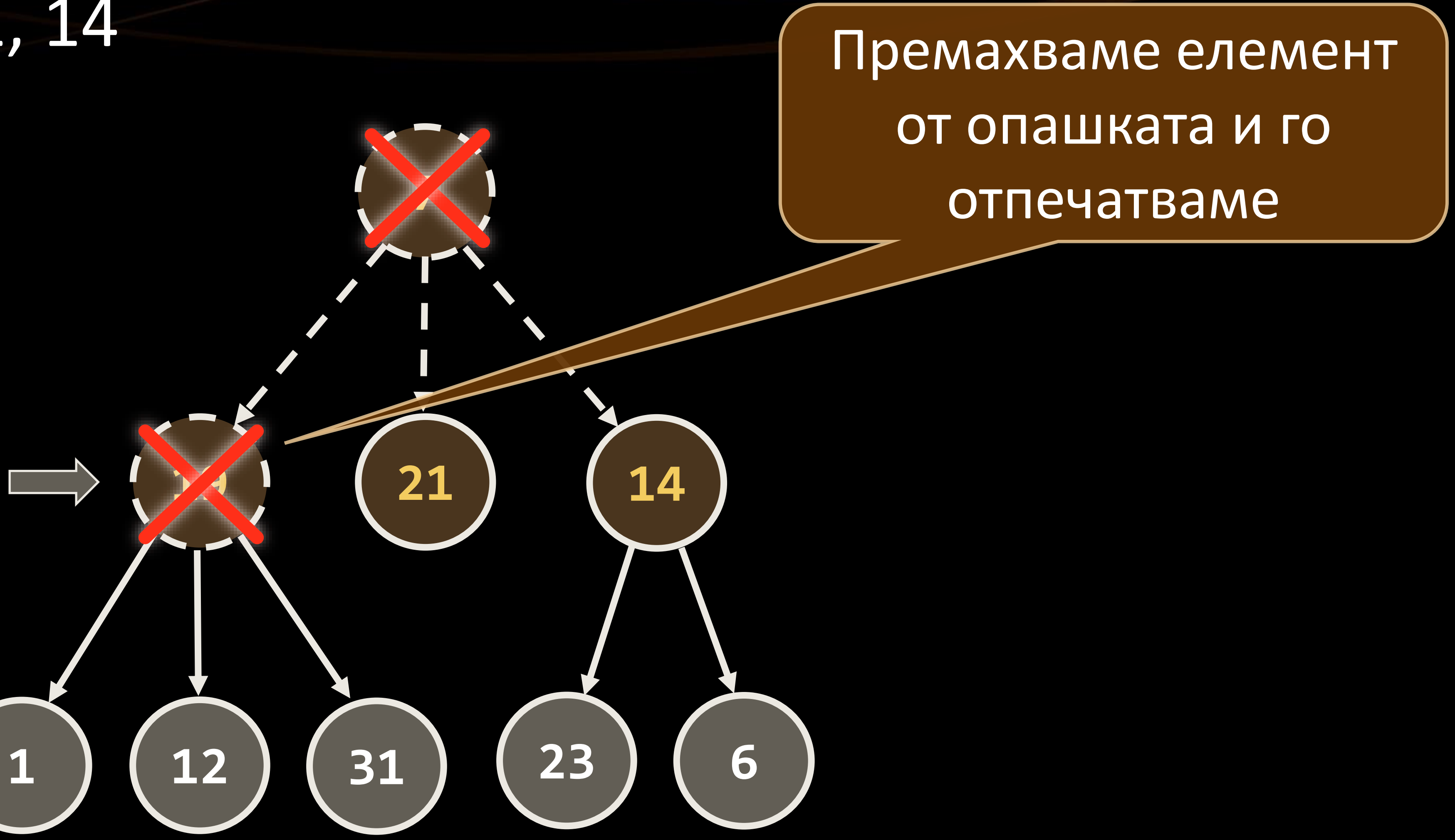
- Опашка: ~~7,~~ 19, 21, 14
- Изход: 7



Добавяме в опашката всички деца на обхождания възел

BFS в действие (стъпка 6)

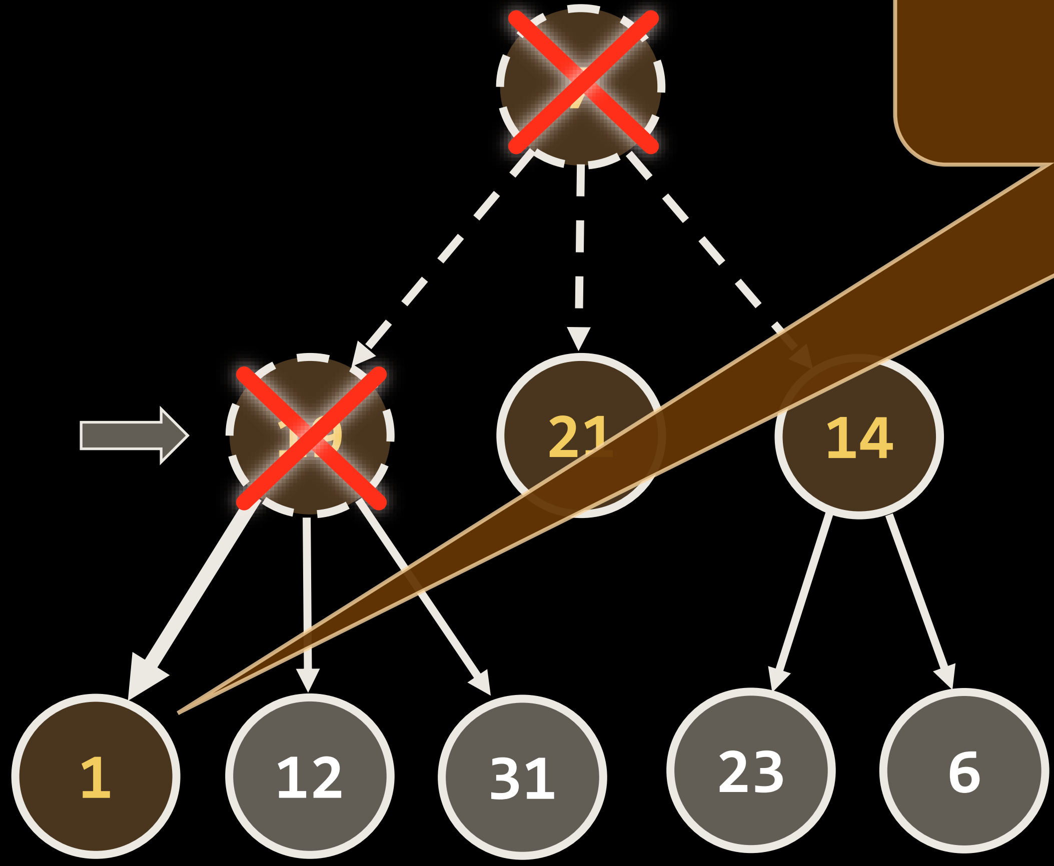
- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, 21, 14
- Изход: 7, 19



BFS в действие (стъпка 7)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, 21, 14, 1
- Изход: 7, 19

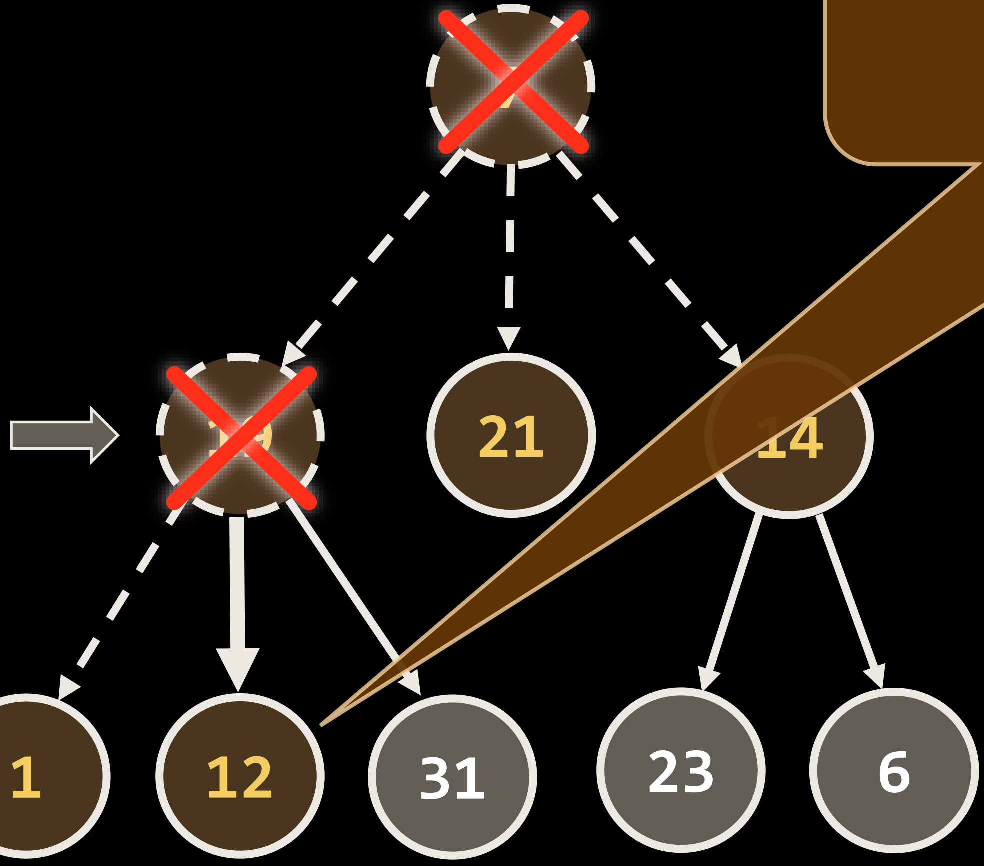
Добавяме в опашката всички деца на обхождания възел



BFS в действие (стъпка 8)

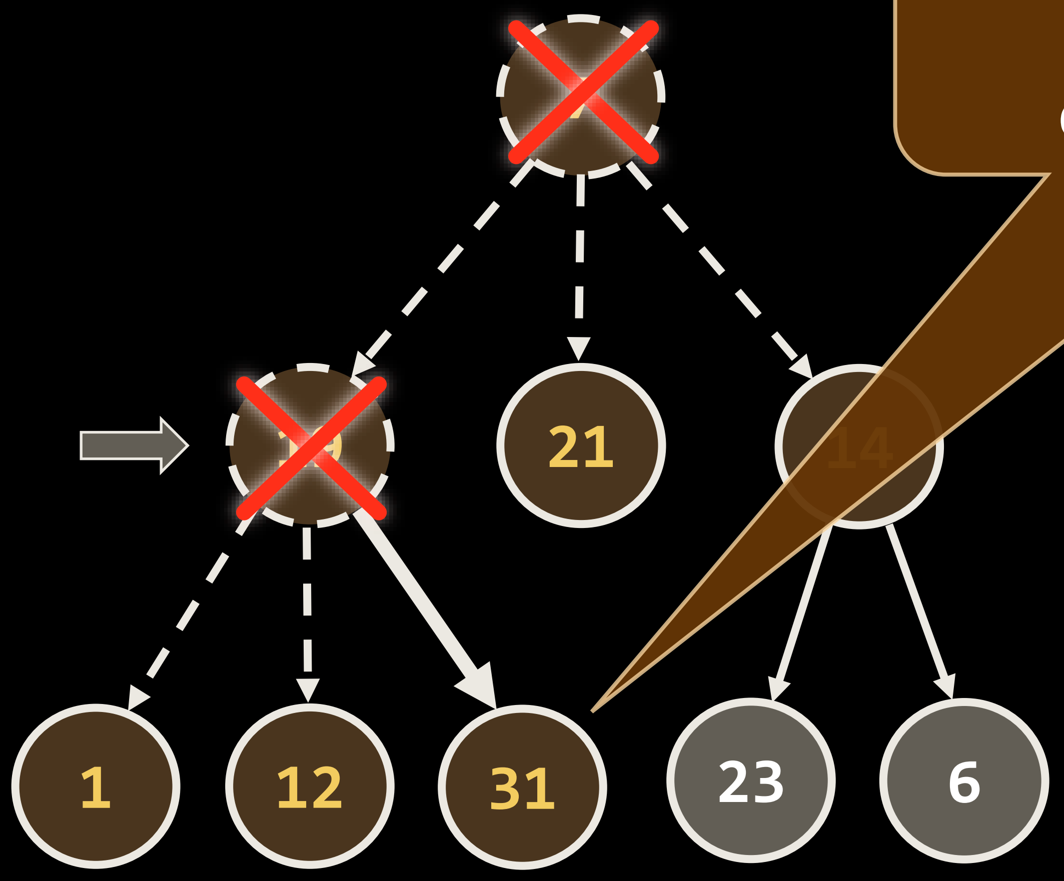
- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, 21, 14, 1, 12
- Изход: 7, 19

Добавяме в опашката всички деца на обхождания възел



BFS в действие (стъпка 9)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, 21, 14, 1, 12, 31
- Изход: 7, 19

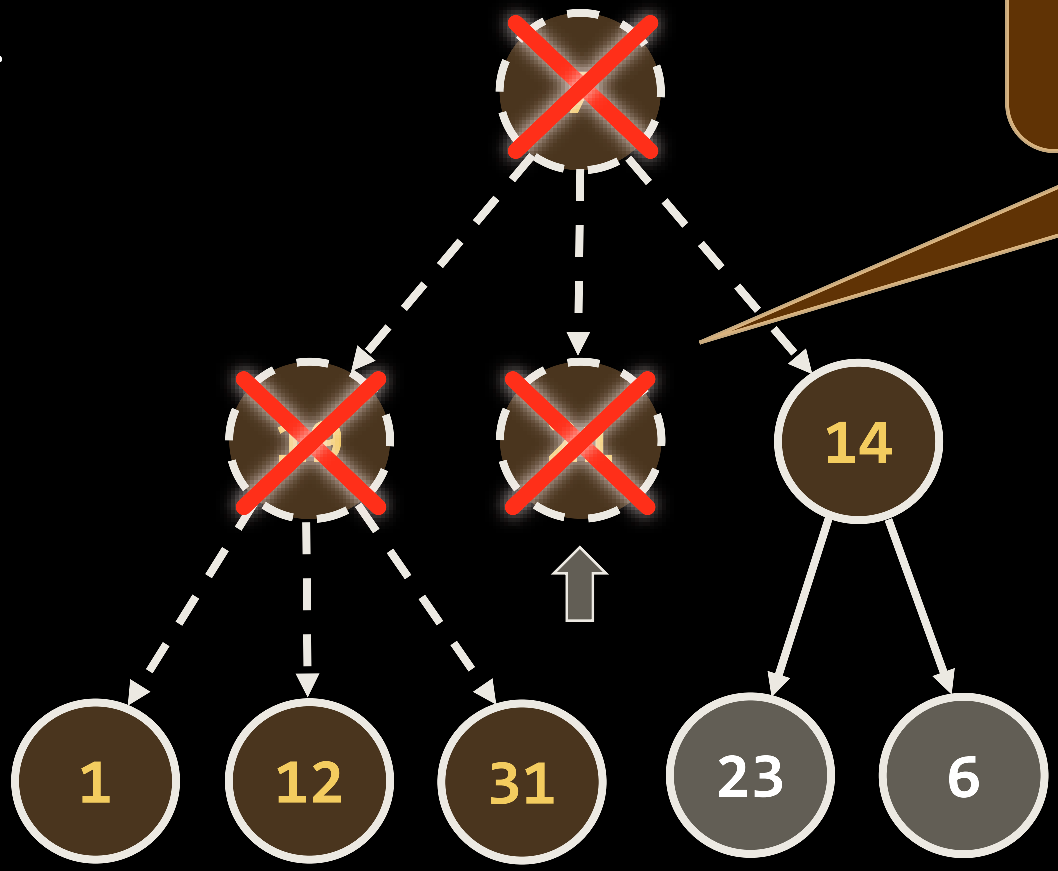


Добавяме в опашката всички деца на обхождания възел

BFS в действие (стъпка 10)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, 14, 1, 12, 31
- Изход: 7, 19, 21

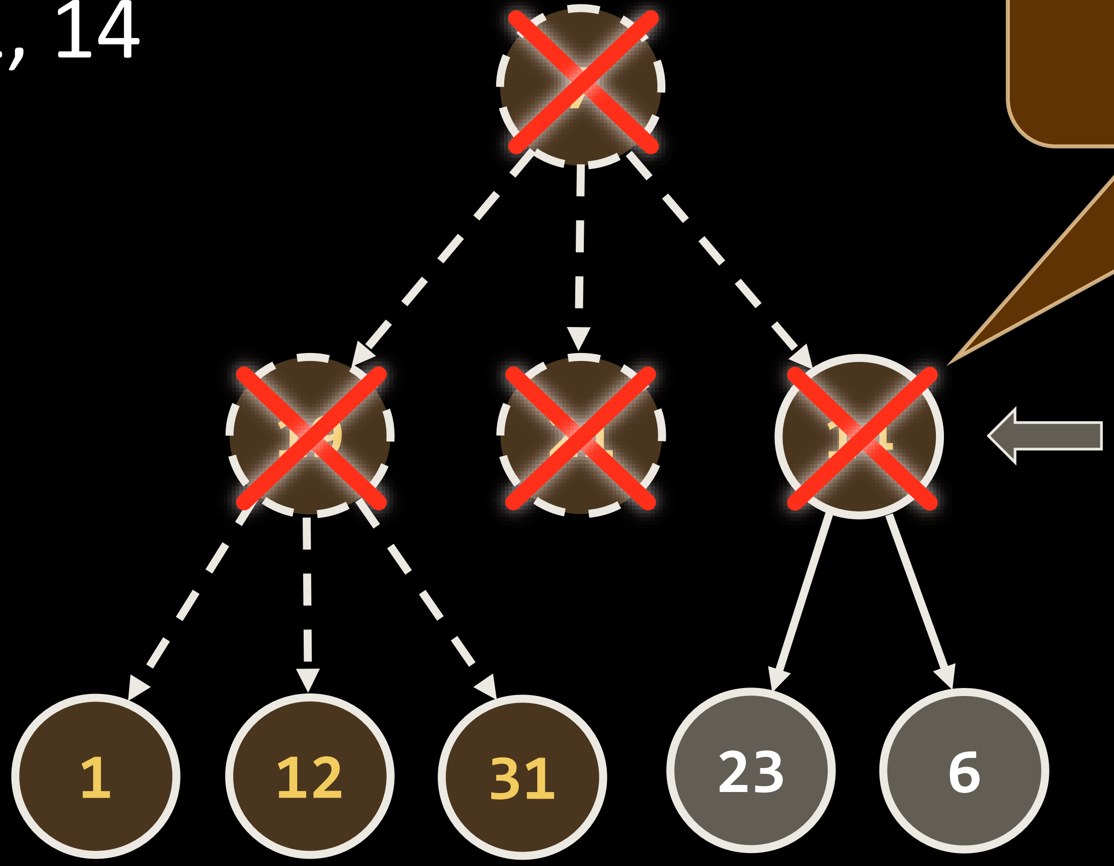
Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме



BFS в действие (стъпка 11)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, 1, 12, 31
- Изход: 7, 19, 21, 14

Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме



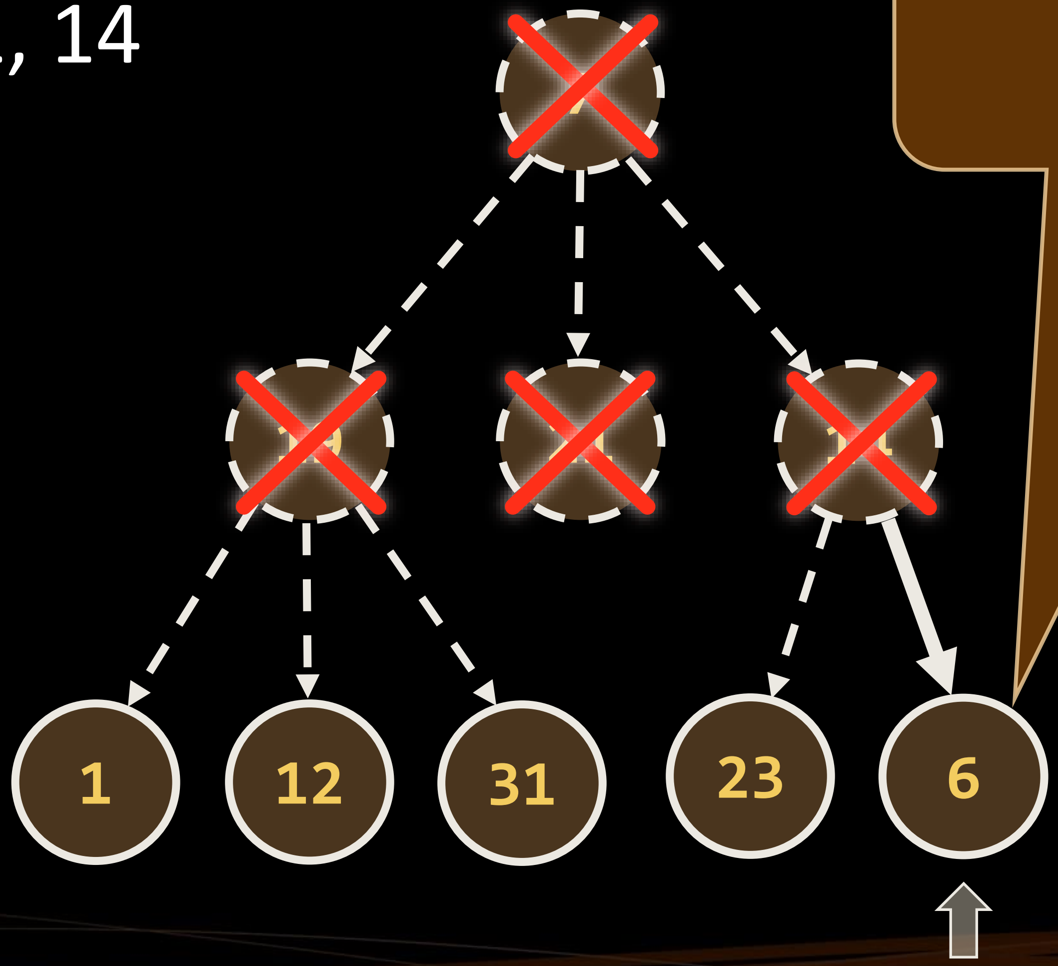
BFS в действие (стъпка 12)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, 1, 12, 31, 23
- Изход: 7, 19, 21, 14

BFS в действие (стъпка 13)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, 1, 12, 31, 23, 6
- Изход: 7, 19, 21, 14

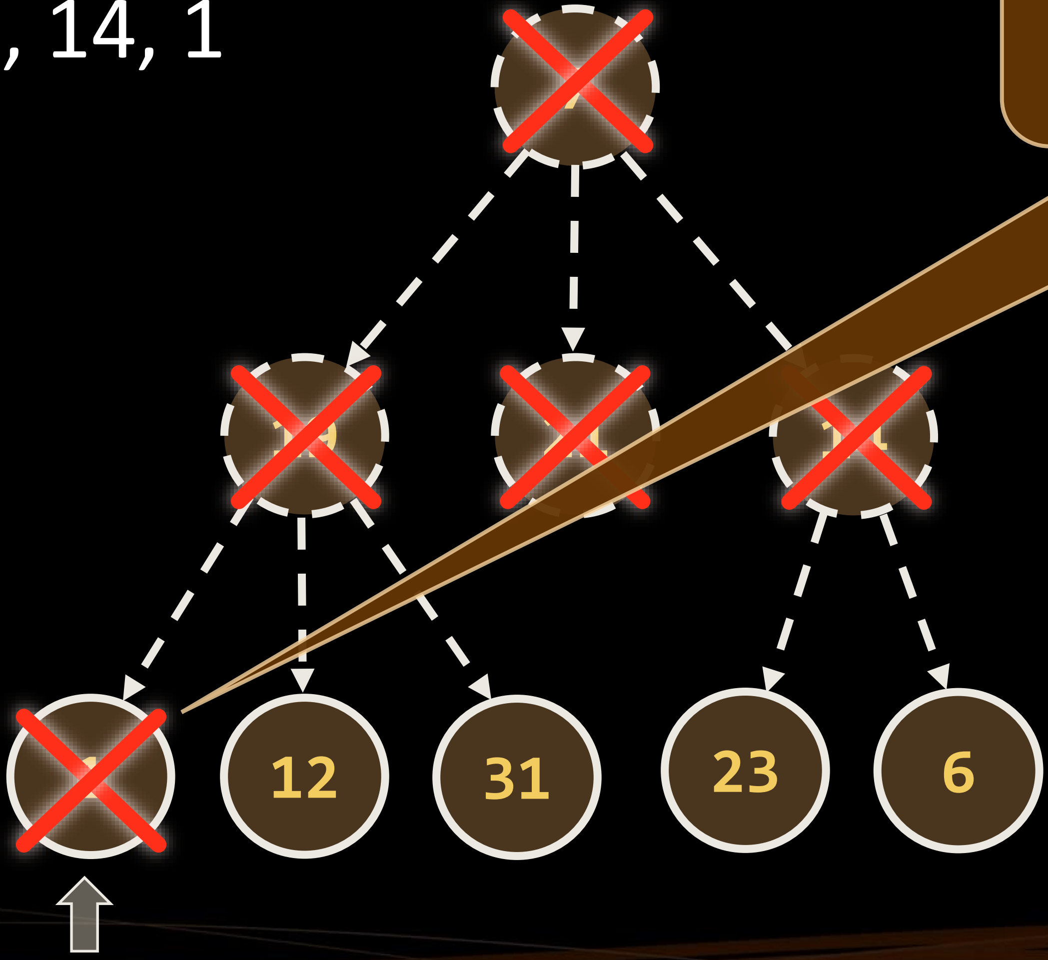
Добавяме в опашката всички деца на обхождания възел



BFS в действие (стъпка 14)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, ~~1~~, 12, 31, 23, 6
- Изход: 7, 19, 21, 14, 1

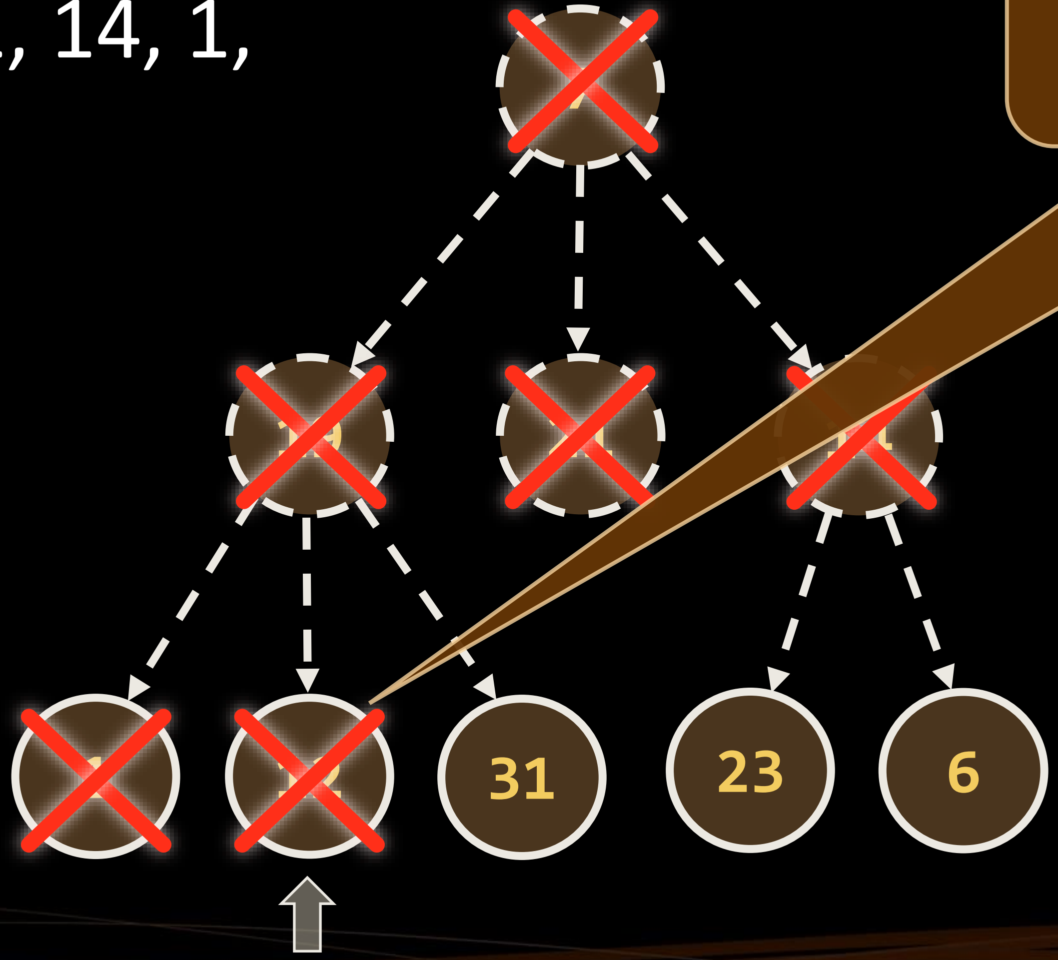
Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме



BFS в действие (стъпка 15)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, ~~1~~, ~~12~~, 31, 23, 6
- Изход: 7, 19, 21, 14, 1, 12

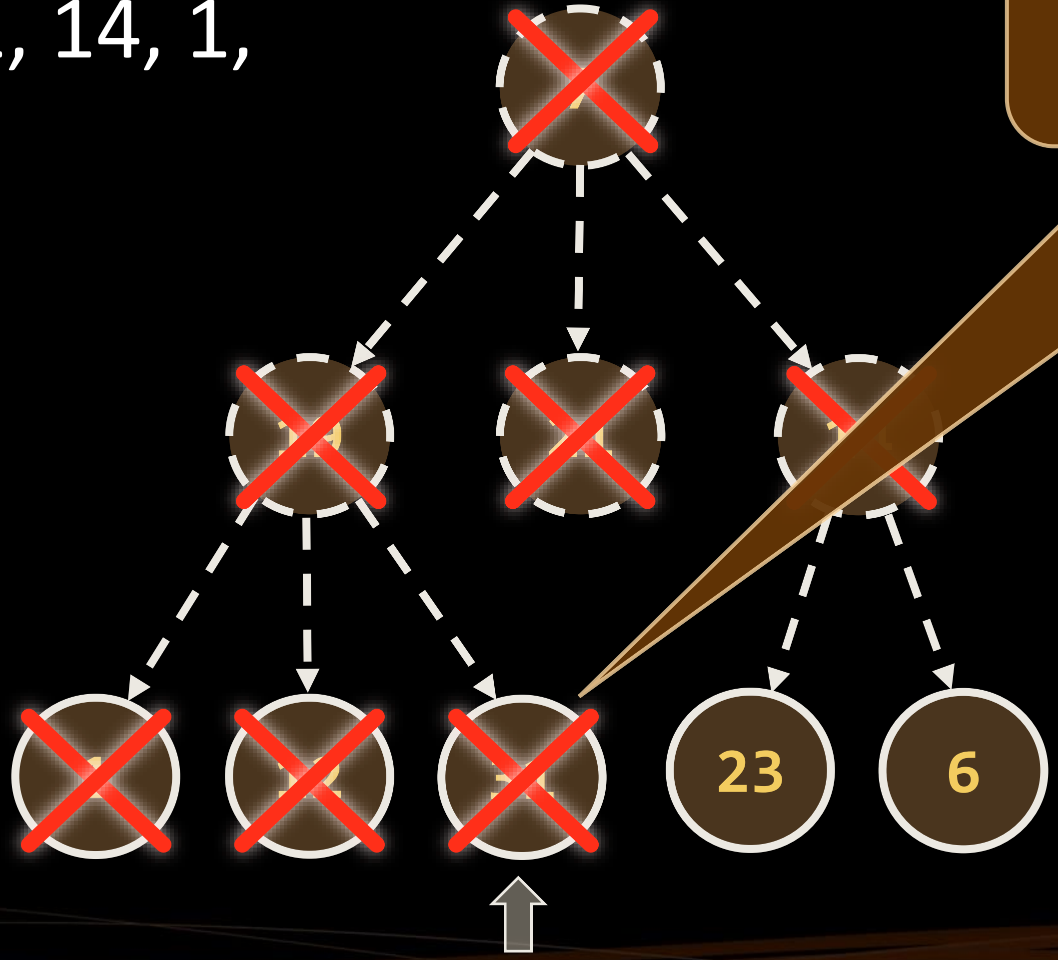
Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме



BFS в действие (стъпка 16)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, ~~1~~, ~~12~~, ~~31~~, 23, 6
- Изход: 7, 19, 21, 14, 1, 12, 31

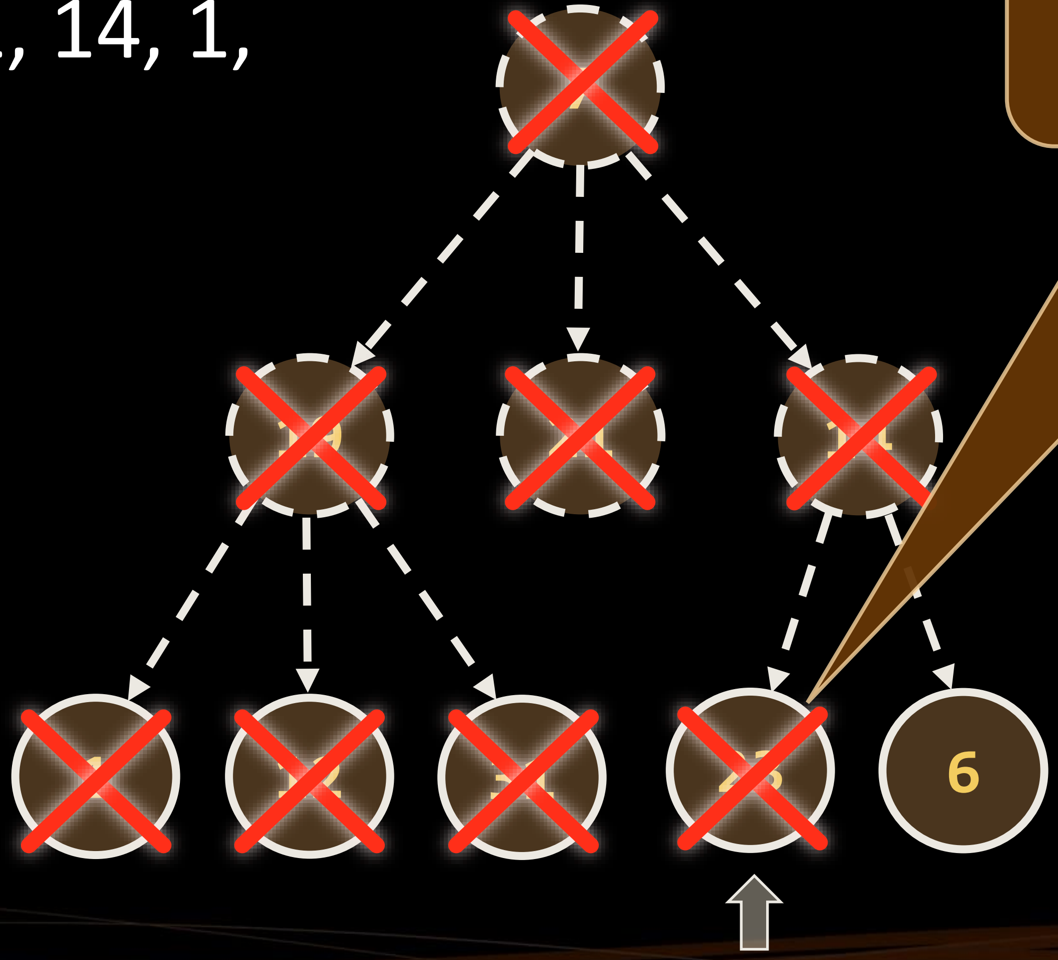
Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме



BFS в действие (стъпка 17)

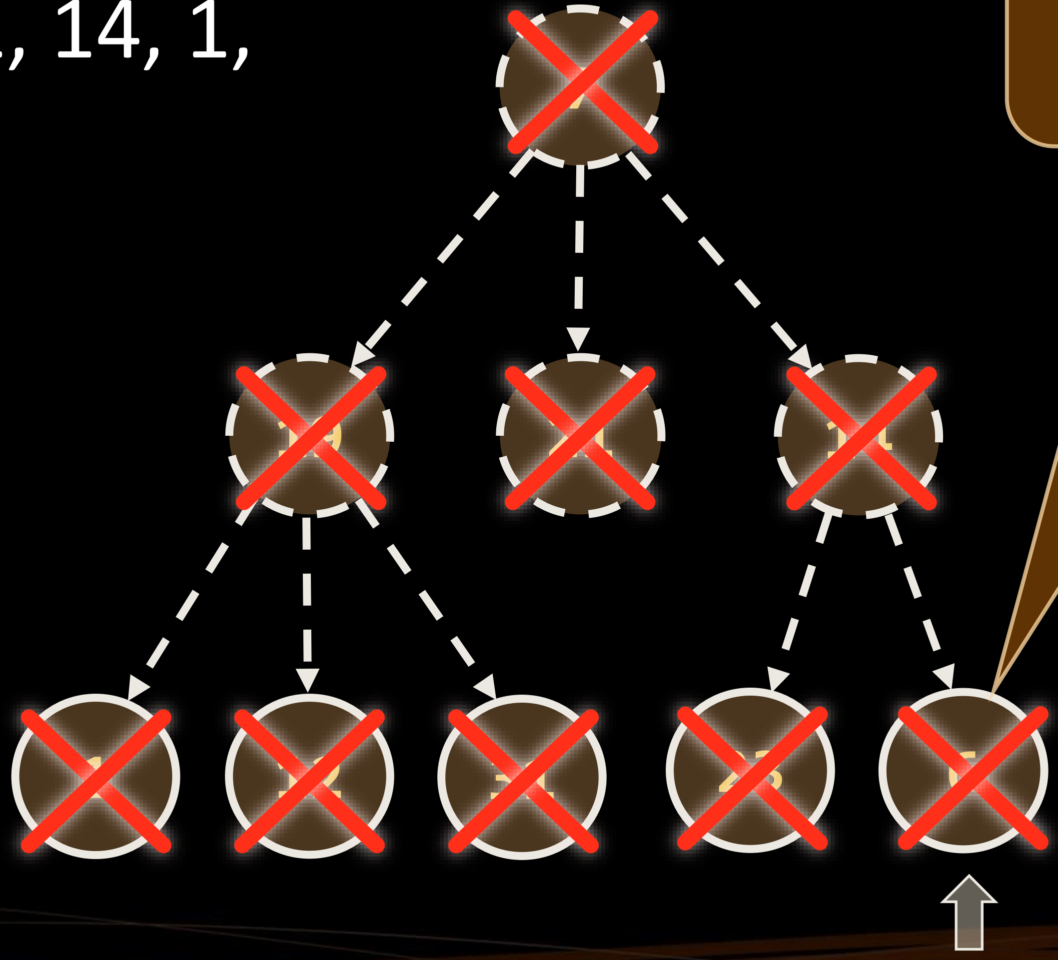
- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, ~~1~~, ~~12~~, ~~31~~, ~~23~~, 6
- Изход: 7, 19, 21, 14, 1, 12, 31, 23

Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме



BFS в действие (стъпка 18)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, ~~1~~, ~~12~~, ~~31~~, ~~23~~, ~~6~~
- Изход: 7, 19, 21, 14, 1, 12, 31, 23, 6

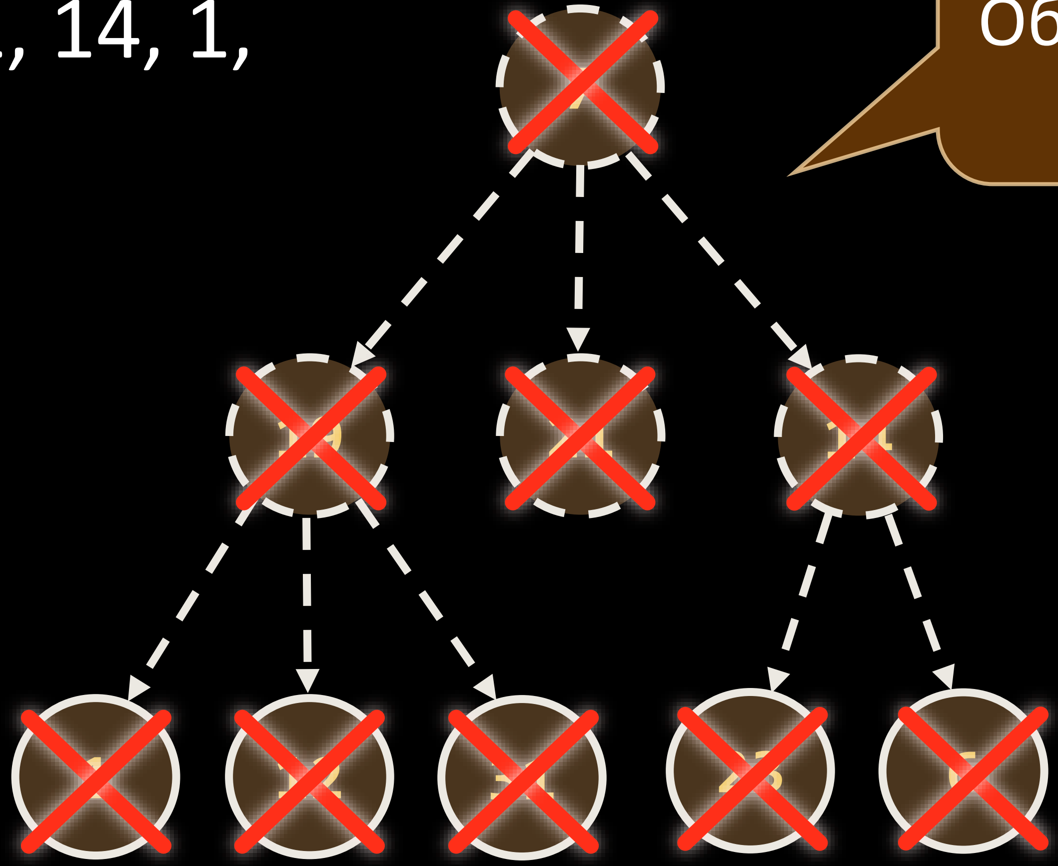


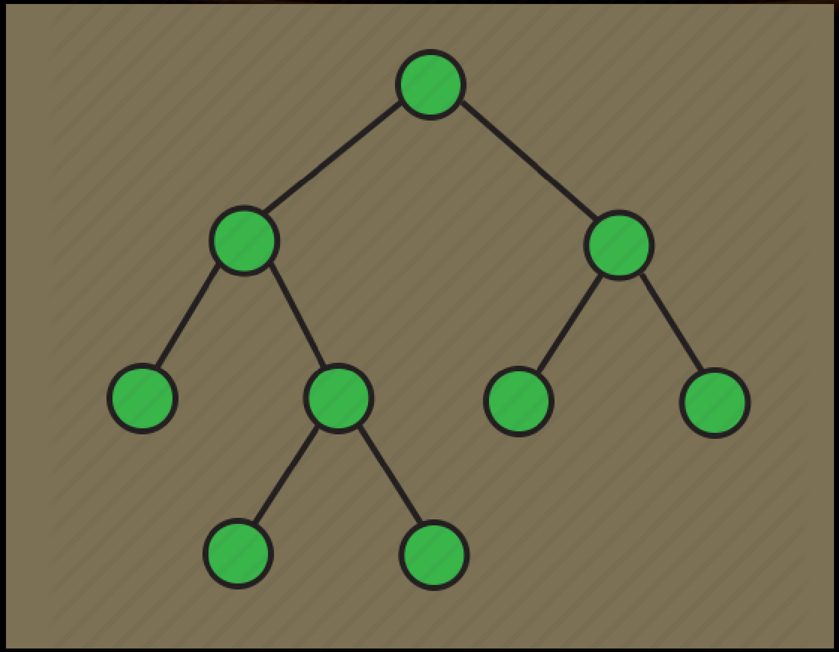
Премахваме елемент от опашката и го отпечатваме

BFS в действие (стъпка 19)

- Опашка: ~~7~~, ~~19~~, ~~21~~, ~~14~~, ~~1~~, ~~12~~, ~~31~~, ~~23~~, ~~6~~
- Изход: 7, 19, 21, 14, 1, 12, 31, 23, 6

Опашката е празна!!!
Обхождането в ширина
- **приключено**





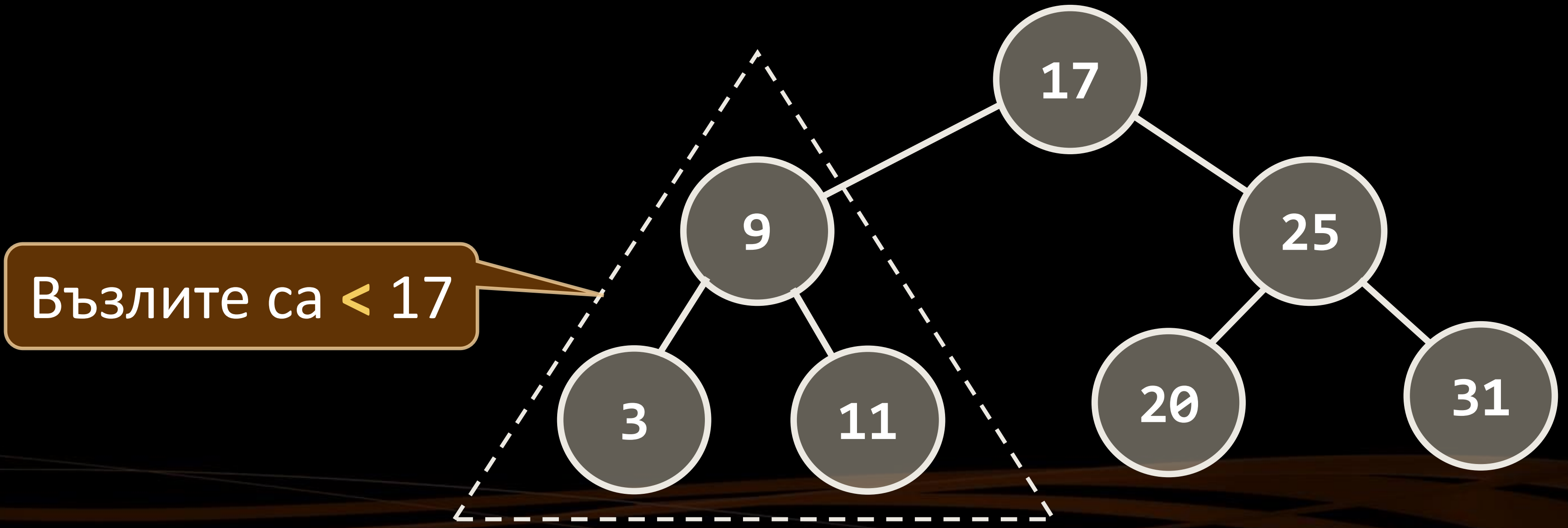
Двоични дървета за търсене

Добавяне, търсене, редакция изтриване

Двоични дървета за търсене

- Двоичните дървета за търсене са **подредени**:
  - За всеки възел *x*:
    - Елементите в лявото поддърво на *x* са по-малки от *x*
    - Елементите в дясното поддърво на *x* са по-големи от *x*

Какво става с елементите равни на *x*?

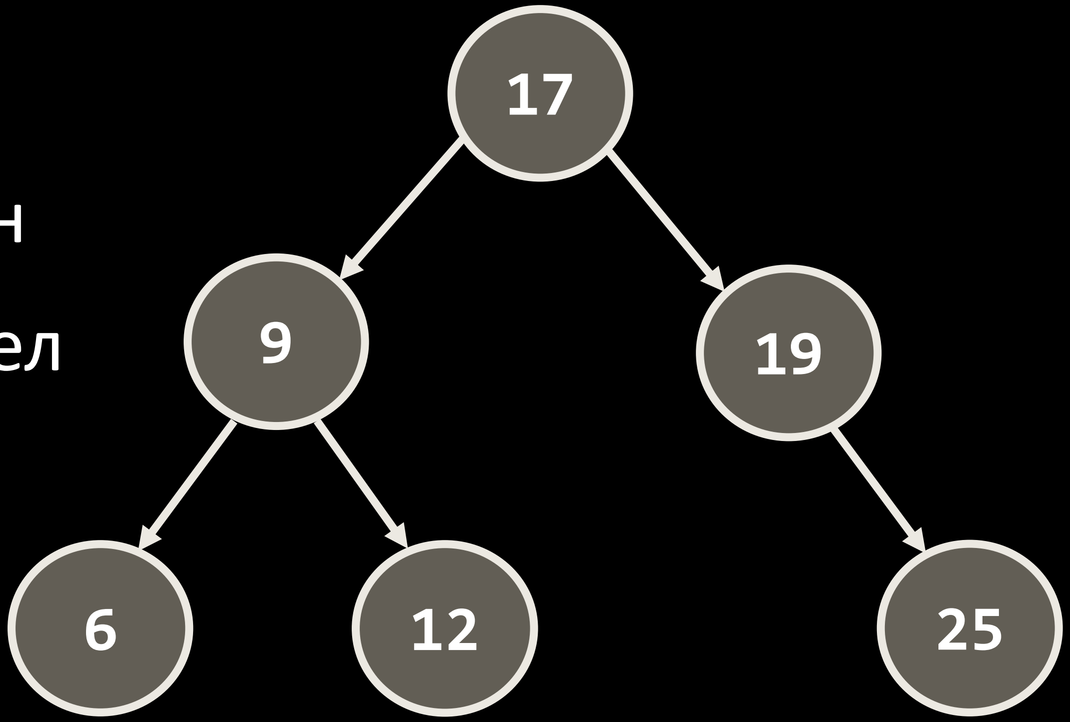


Двоично дърво за търсене - възел

```
public class BinaryTree<T>
{
    private class Node
    {
        public Node Left { get; set; }
        public Node Right { get; set; }
        public T Item { get; set; }
    }

    private Node Root { get; set; }
    public int Count { get; private set; }
   public void Add(T item)...
   public void Remove(T item)...
   public bool Contains(T item)...
}
```

Двоично дърво за търсене - търсене

- Търсене на елемент x в двоично дърво за търсене
  - if node != null
    - if x < node.value -> левия клон
    - else if x > node.value -> десния клон
    - else if x == node.value -> върни възел



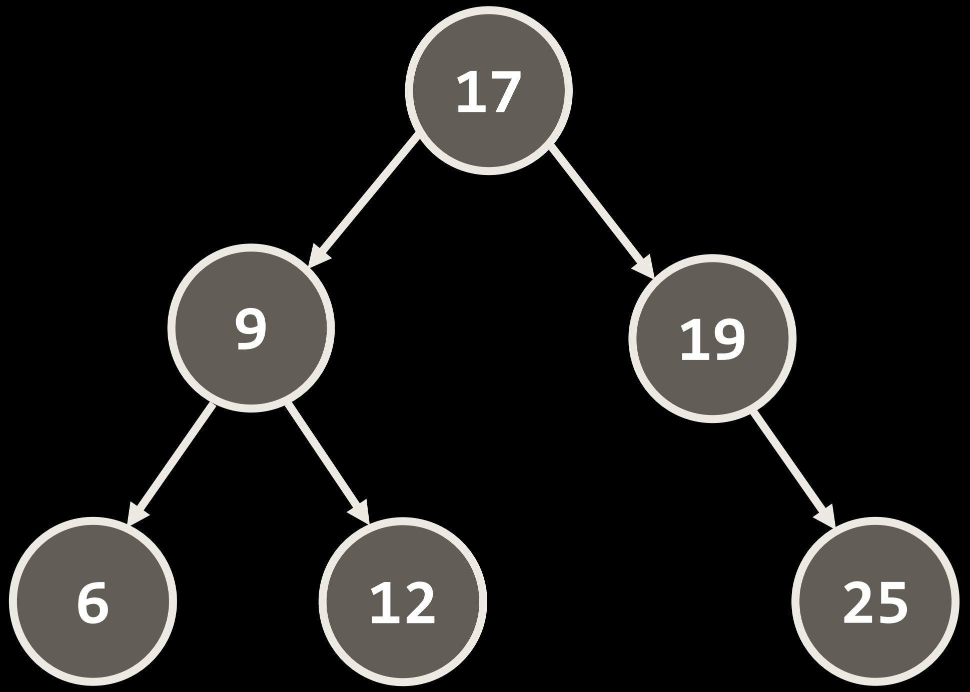

```
Търсим 12 -> 17 9 12
Търсим 27 -> 17 19 25 null
```

Своично дърво за търсене - търсене

```
public bool Contains(T item)
{
    if (Root == null)
        return false;

    Node iterator = Root;
    while (true)
    {
        if (iterator == null)
            return false;
        else if (iterator.Item.CompareTo(item) == 0)
            return true;
        else if (iterator.Item.CompareTo(item) > 0)
            iterator = iterator.Left;
        else if (iterator.Item.CompareTo(item) < 0)
            iterator = iterator.Right;
    }
}
```

Двоично дърво за търсене - добавяне

- Добавяне на елемент x в двоично дърво за търсене
  - if node == null -> добави x
  - else if x < node.value -> ляв клон
  - else if x > node.value -> десен клон
  - else -> възела съществува



Добавяне 12   17 9 12 return

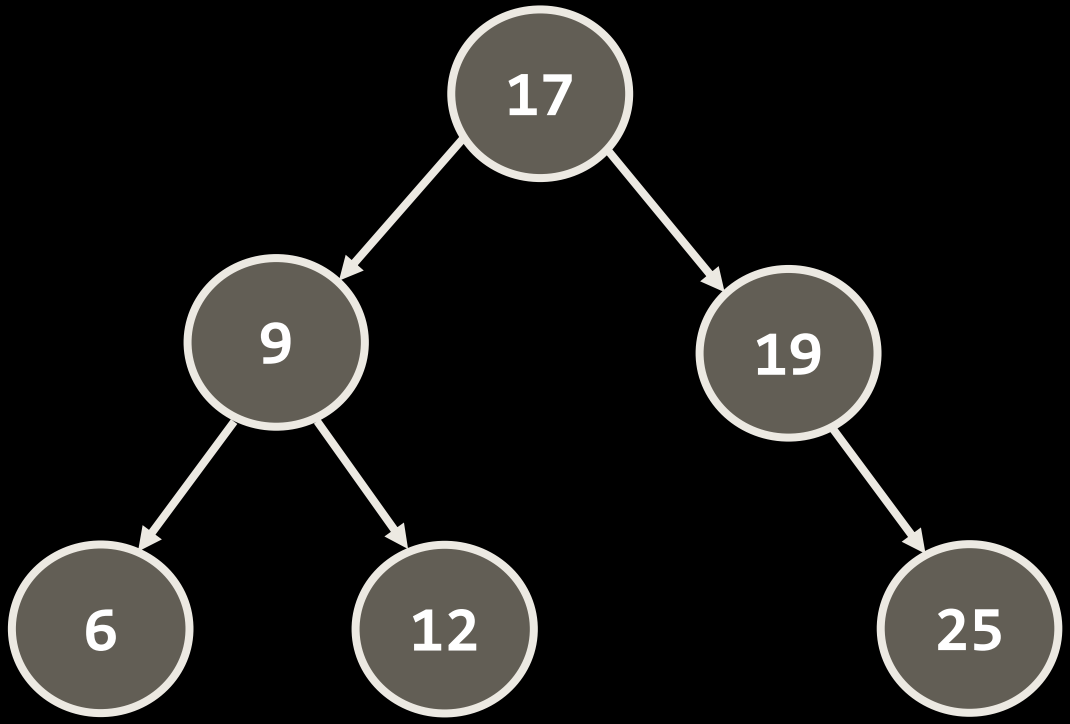
Добавяне 27   17 19 25 null (добавяне)

Двоично дърво за търсене - добавяне

```
public void Add(T item)
{
    Node node = new Node();
    node.Item = item;

    if (Root == null)
    {
        Root = node;
        return;
    }

    Node iterator = Root;
    while (true)
    {
        if (iterator.Left != null && iterator.Item.CompareTo(item) >= 0)
            iterator = iterator.Left;
        else if (iterator.Right != null && iterator.Item.CompareTo(item) < 0)
            iterator = iterator.Right;
        else
            break;
    }

    if (iterator.Item.CompareTo(item) >= 0)
        iterator.Left = node;
    else if (iterator.Item.CompareTo(item) < 0)
        iterator.Right = node;
}
```

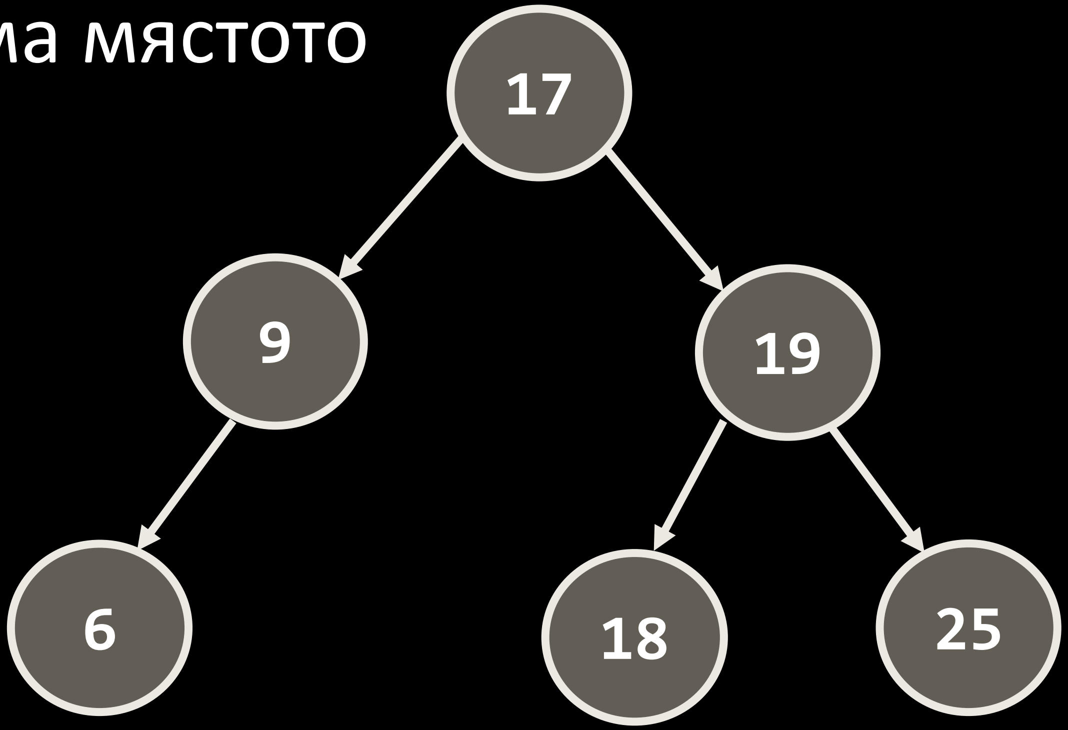
Двоично дърво за търсене - премахване

- Премахване на елемент x в двоично дърво за търсене
  - if node == null -> изход
  - else if x is leaf -> премахни
  - else if x is not leaf -> подмени
    - (3 случая при подмяна на възел)



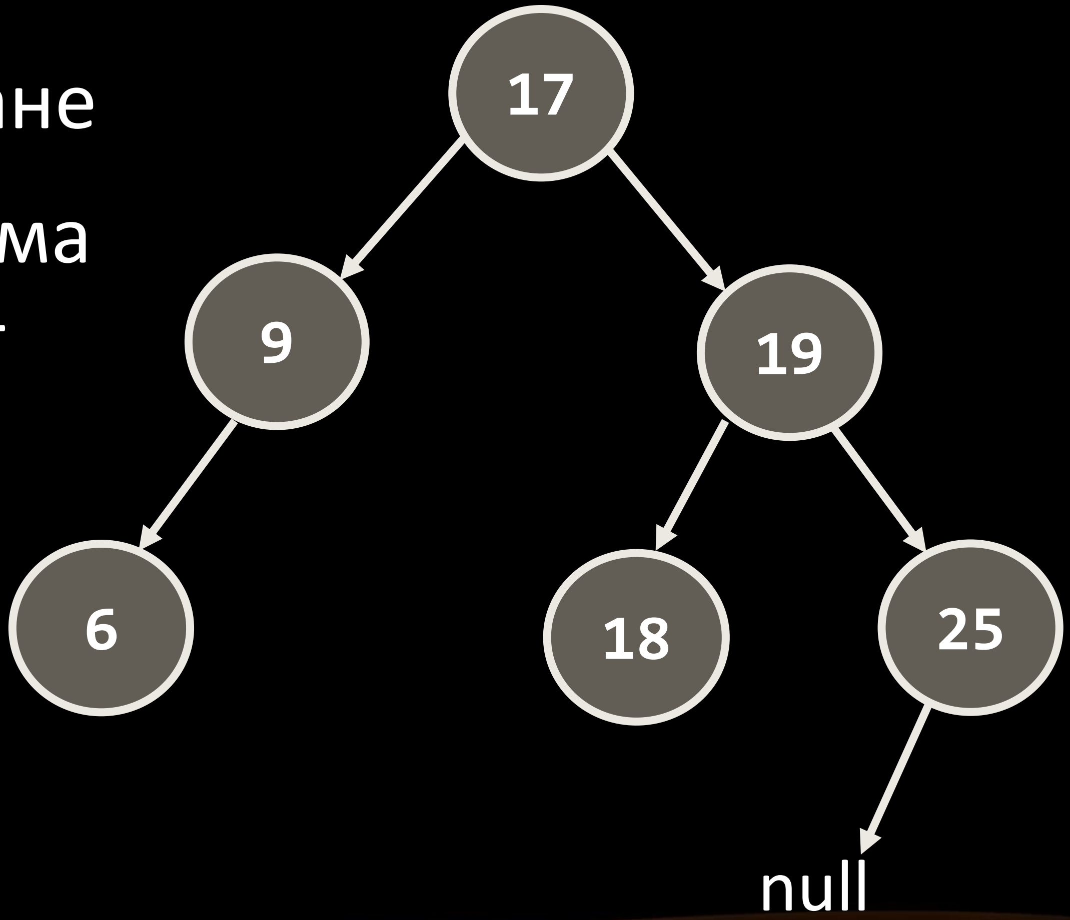
Двоично дърво за търсене - премахване

- Премахване на елемент, който няма дясно поддърво
  - Намираме елемента за премахване
  - Корена на лявото поддърво заема мястото на премахнатия елемент
- Example: Delete 9



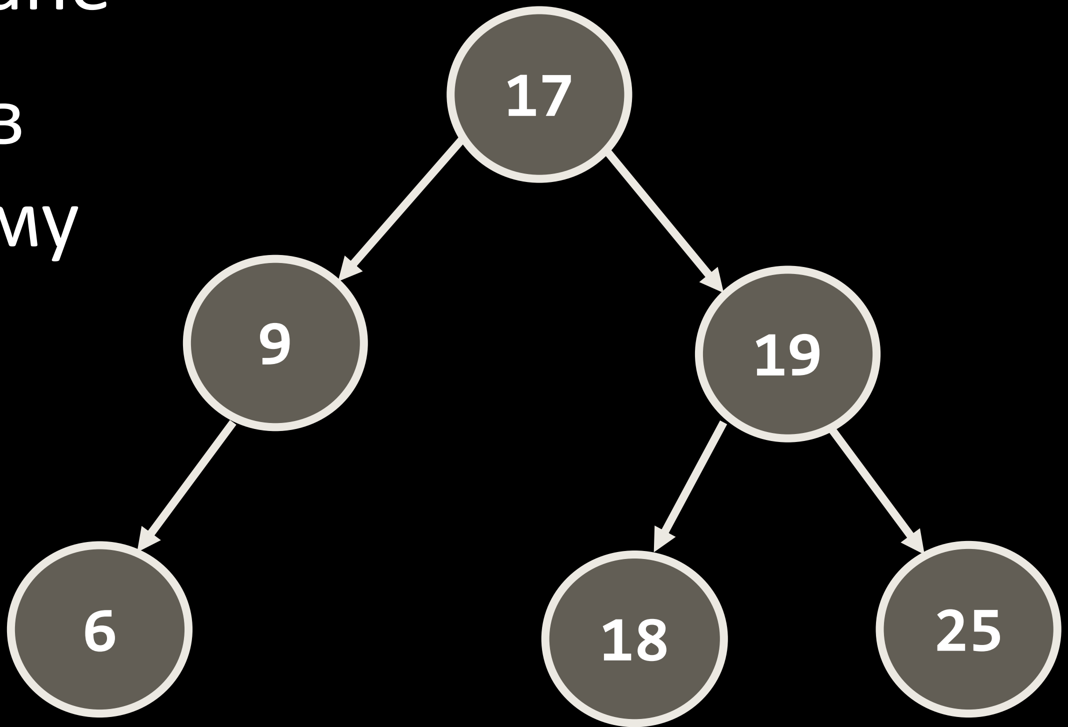
Двоично дърво за търсене - премахване

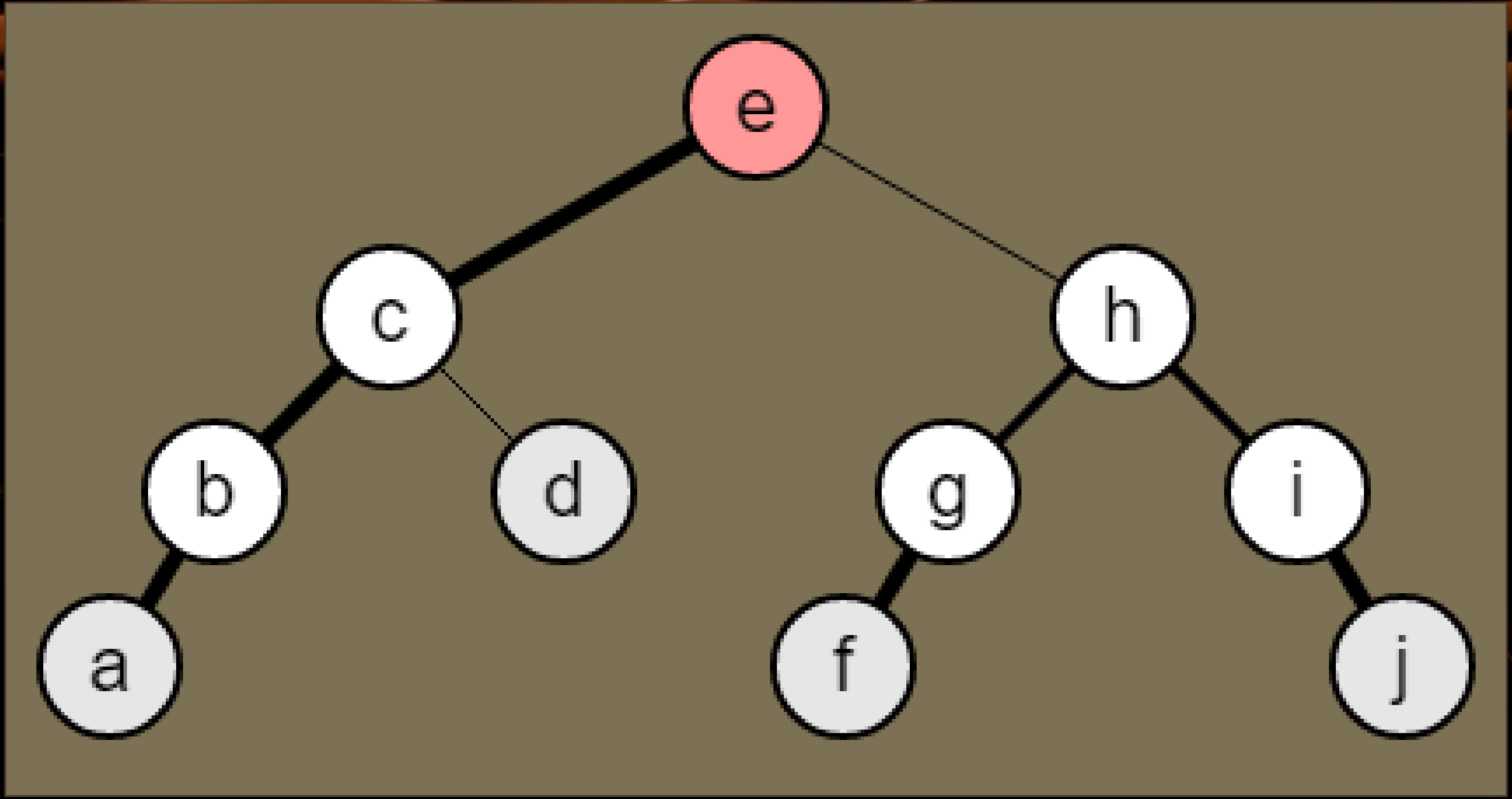
- Премахване на елемент, чието дясно поддърво няма ляво поддърво
  - Намираме елемента за премахване
  - Корена на дясното поддърво заема мястото на премахнатия елемент
- Example: Delete 19



Двоично дърво за търсене - премахване

- Премахване на елемент, който има и ляво и дясно поддърво
  - Намираме елемента за премахване
  - Намираме най-малкия елемент в лявото разклонение на дясното му поддърво
  - Разменяме двата елемента и извършваме премахването
- Example: Delete 17





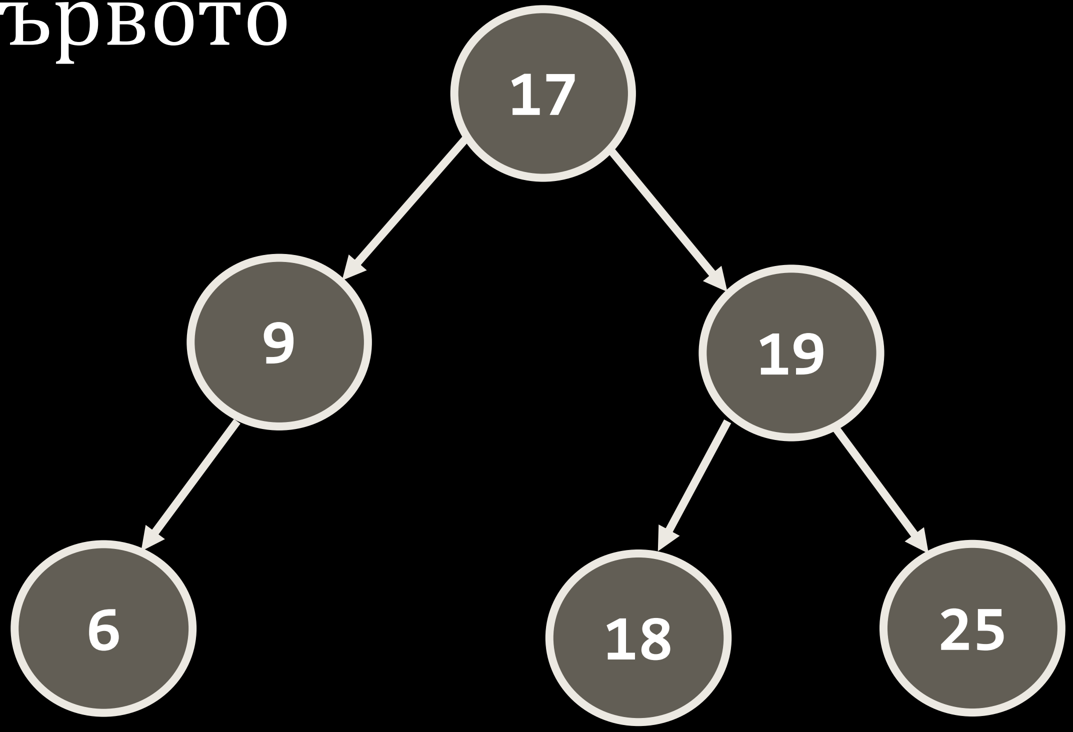
Балансирани дървета

Предназначение

Двоични дървета за търсене – сложност

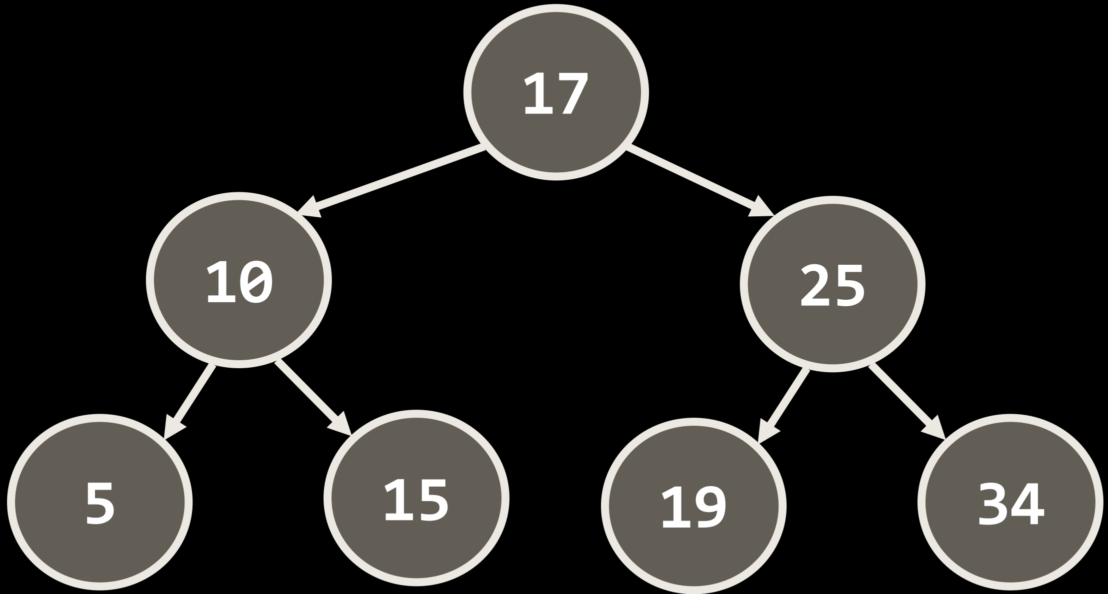
- Добавяне – височината на дървото
- Търсене – височината на дървото
- Премахване – височината на дървото

O(n)



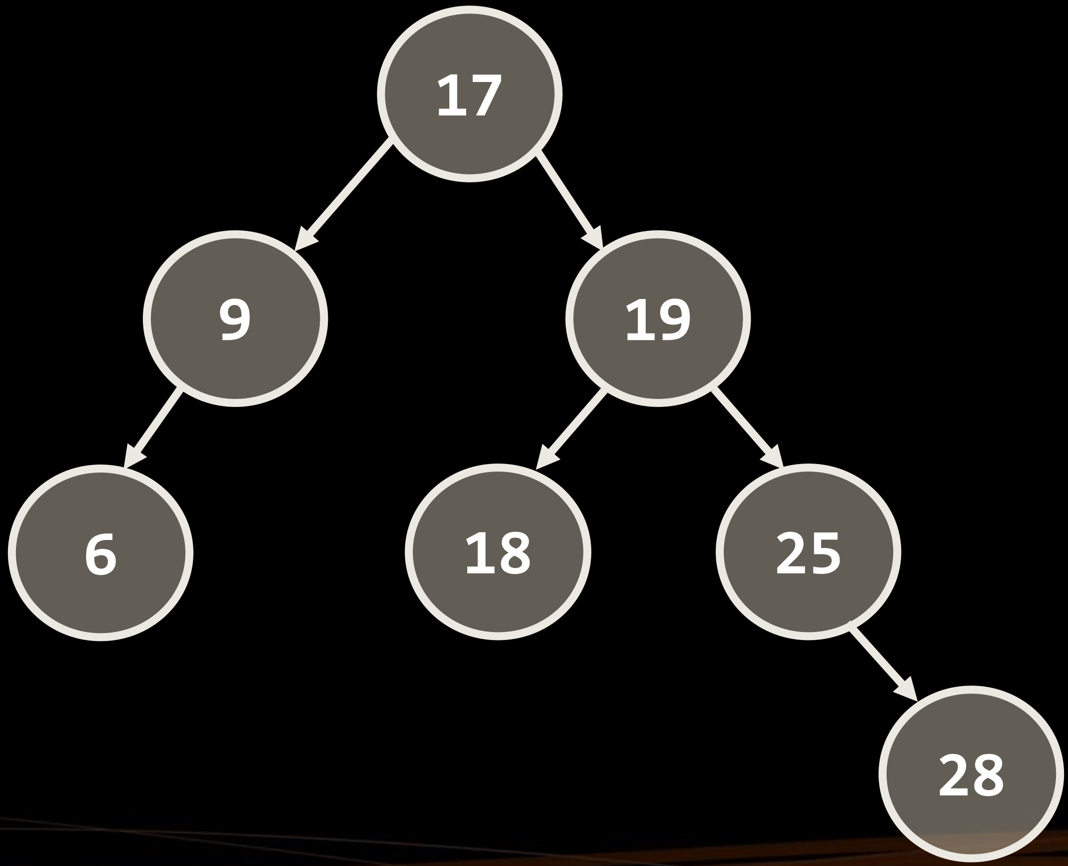
Двоично дърво за търсене - най-добър случай

- Пример: Добавяме 17, 10, 25, 5, 15, 19, 34



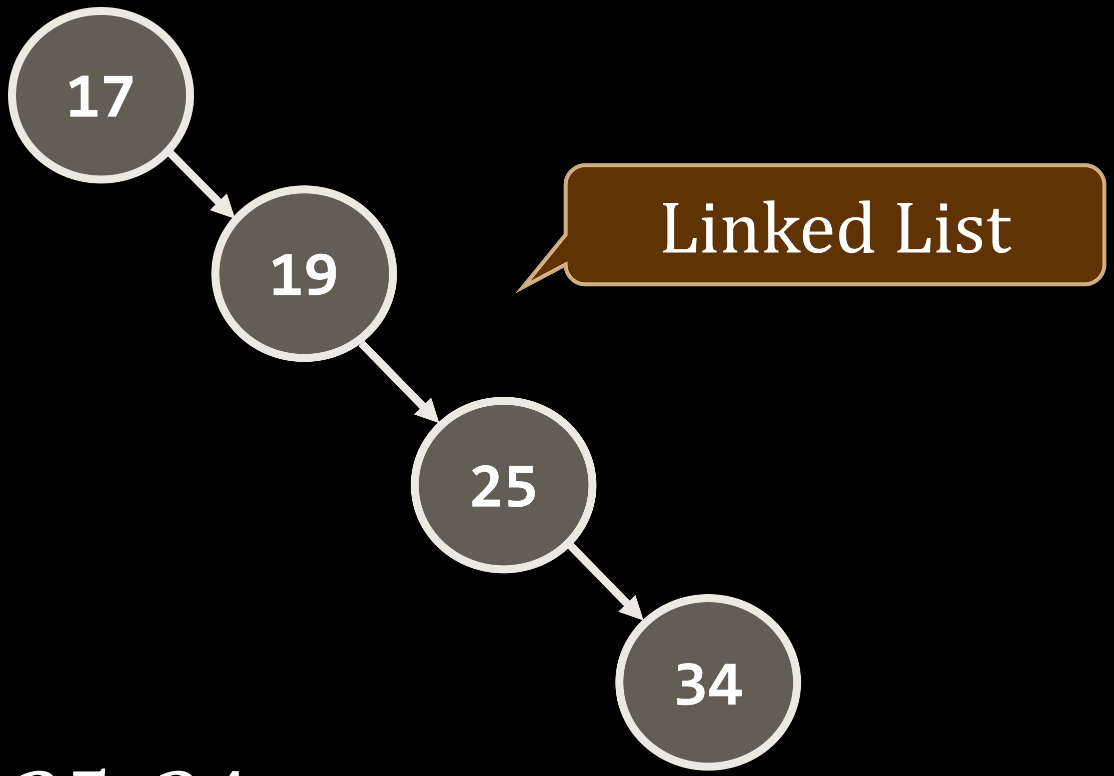
Двоично дърво за търсене - стандартен случай

- Добавяне на стойности в произволна последователност
- Пример: Добавяме 17, 19, 9, 6, 25, 28, 18



Двоично дърво за търсене - най-лош случай

- Добавяне на стойности в нарастваща/намаляваща последователност

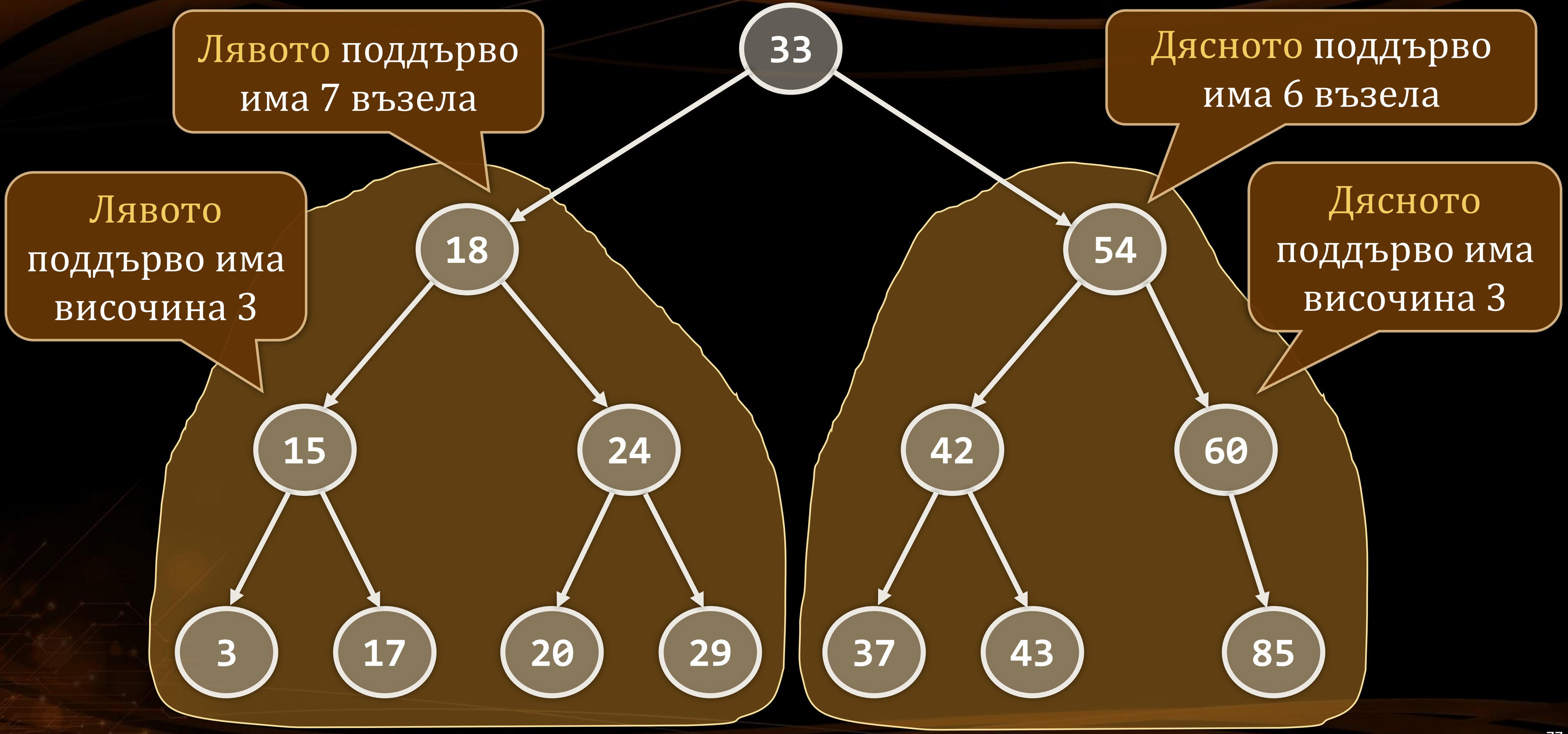


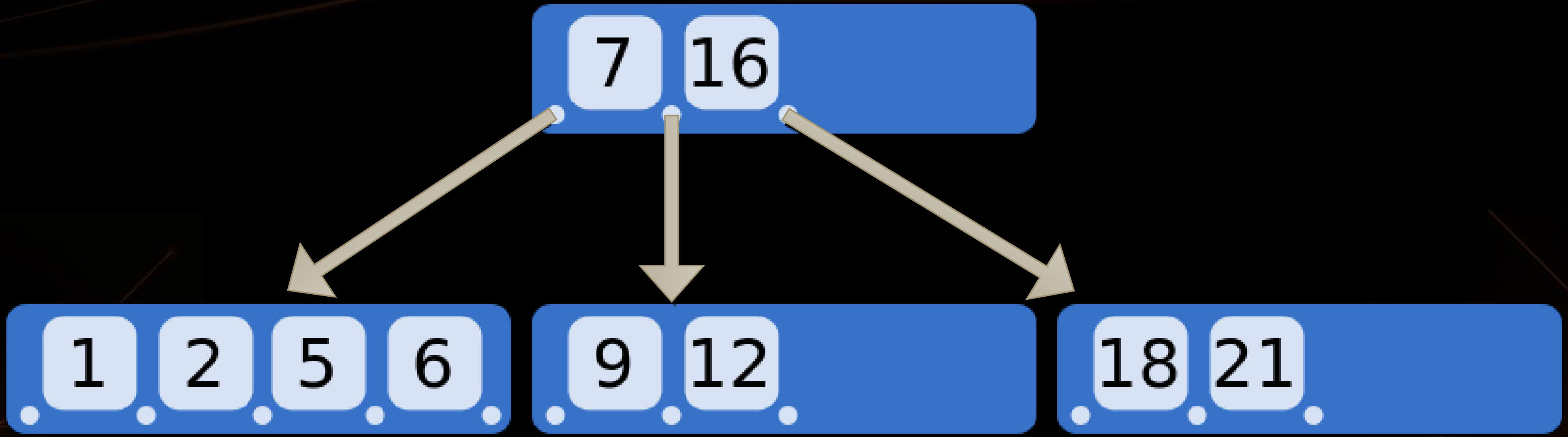
- Пример: Добавяме 17, 19, 25, 34

Балансирани двоични дървета за търсене

- Двоичните дървета за търсене могат да бъдат **балансирани**
  - В балансираните дървета всеки възел има почти еднакъв брой възли във своите поддървета
- Балансираните дървета имат височина приблизително равна на log(n)

Балансирани двоични дървета за търсене





Б-Дървета (B-Trees)

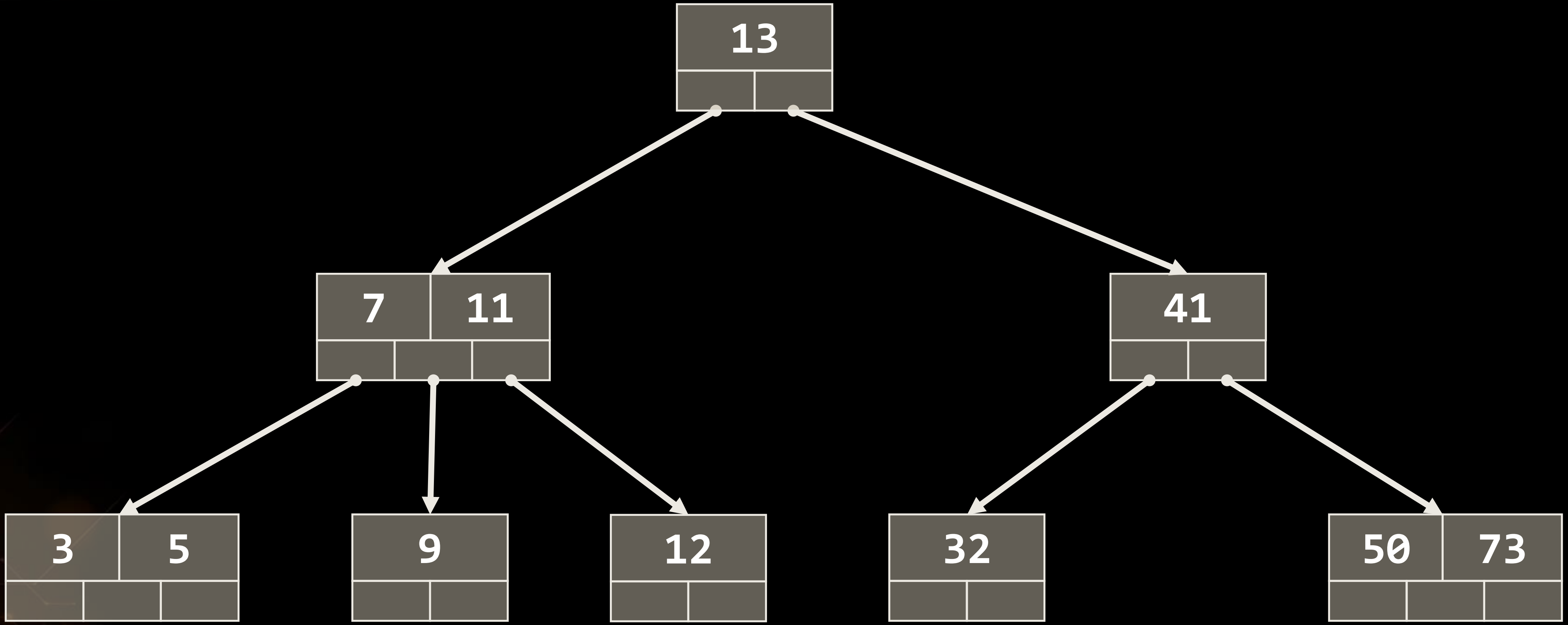
Предназначение

Какво са B-Trees?

- B-trees са генерализация на концепцията за подредени двоични дървета за търсене (визуализация)
  - Всеки възел в B-tree от ред b съхранява между b и 2*b ключове и има между b+1 и 2*b+1 наследника
  - Ключовете във всеки възел са подредени нарастващо
  - Всички ключове в наследниците има стойности, ограничени в диапазона на техните леви и десни родителски ключове
- B-trees могат ефективно да се съхраняват на твърди дискове

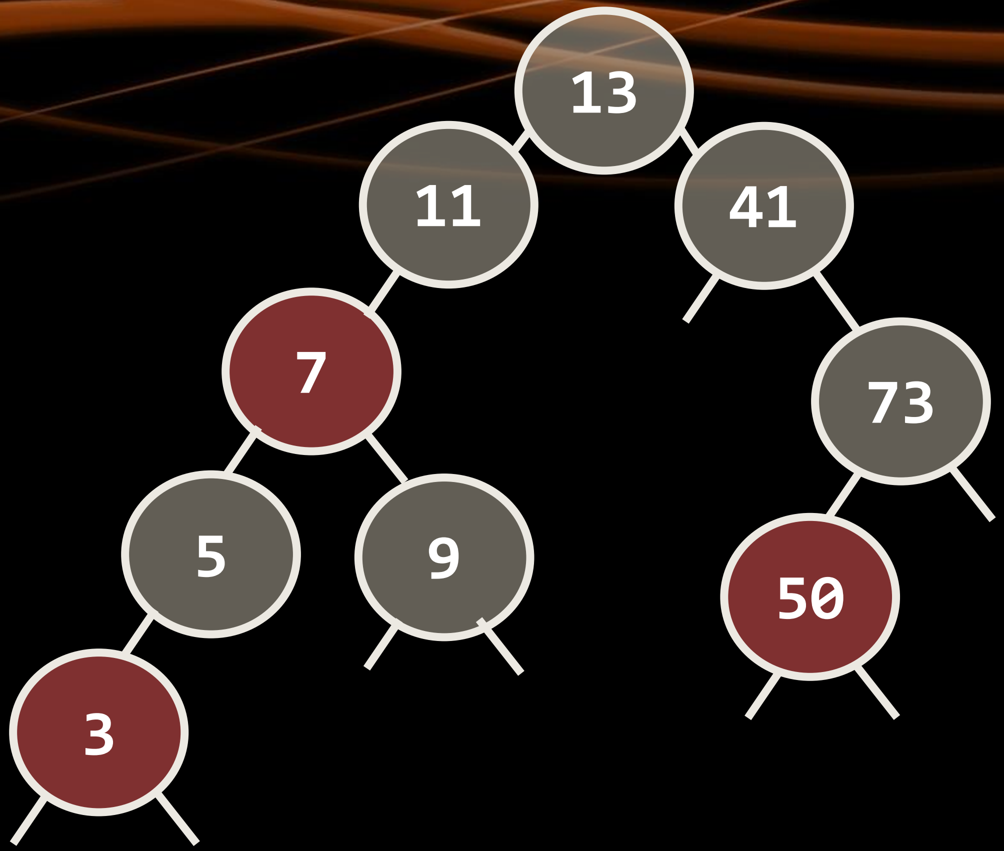
B-Tree – пример

- B-Tree от ред 3, познати още като 2-3 дървета



B-Trees и други балансирани дървета за търсене

- Възлите в B-Trees могат да имат много наследници
  - B-trees нямат нужда от често пребалансиране
- B-Trees са добри за индексиране в бази от данни:
  - Защото всеки възел може да се съхрани в отделен клъстер на твърдия диск
  - Минимизация на дисковите операции (които са много бавни)
- B-Trees са почти перфектно балансирани
  - Броя на възлите от корена до кой да е null възел са едни и същи



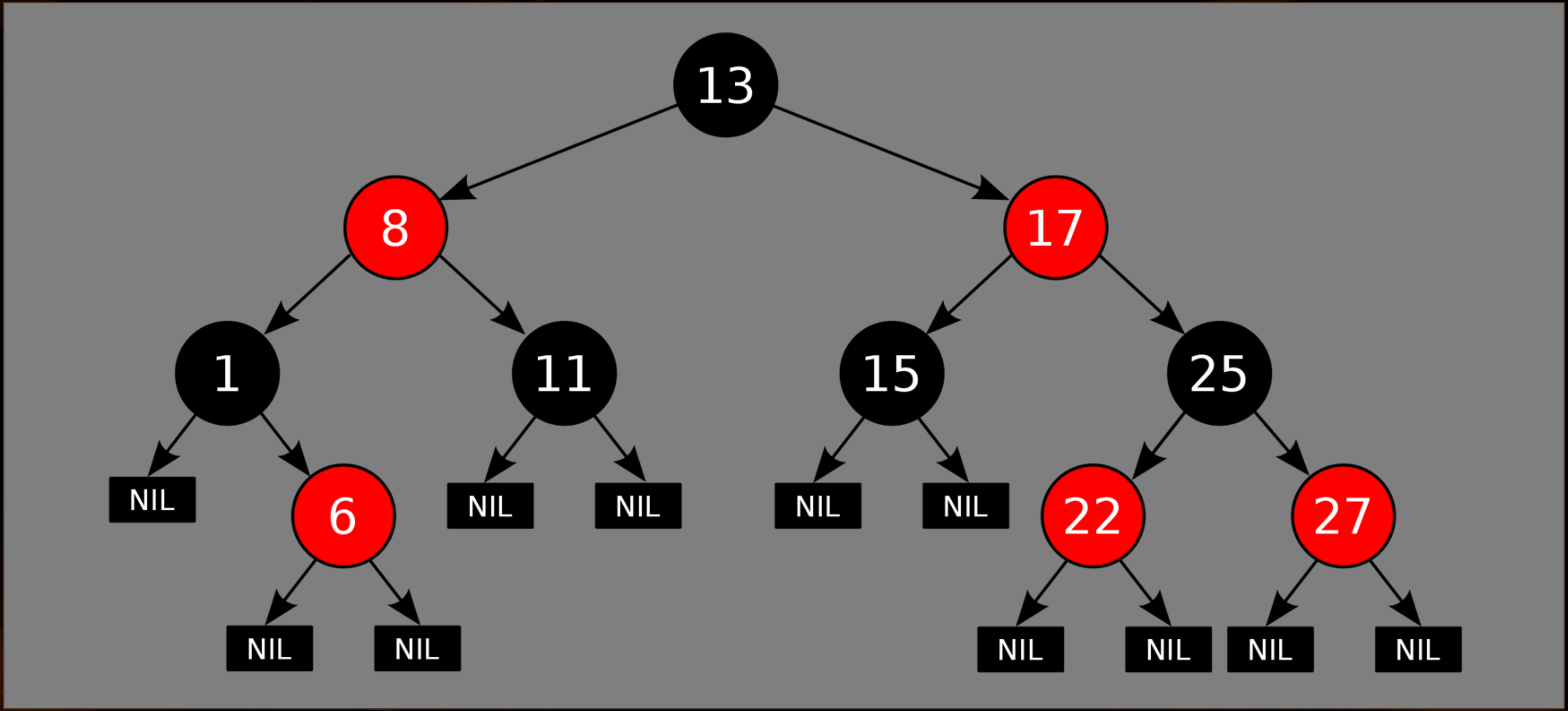
Червено-черни дървета

Семпла репрезентация на 2-3 дървета

Свойства на червено-черни дървета

1. Всички листа са черни
2. Корена е черен
3. Няма възел, който да има две червени връзки към него
4. Всеки път от даден възел до листо в негово поддърво има еднакъв брой черни възли
5. Червените възли са винаги от ляво

Червено-черно дърво



Обобщение

- Дървета и дървовидни структури
- Подредени двоични дървета, балансирани дървета, B-дървета
- Упражнения: структура от данни “дърво”, използване на класове и библиотеки за дървовидни структури
- Обхождания в дълбочина и ширина (DFS и BFS)
- Упражнения: обхождане в дълбочина (DFS)
- Упражнения: обхождане в ширина (BFS)

Министерство на образованието и науката (МОН)

- Настоящият курс (презентации, примери, задачи, упражнения и др.) е разработен за нуждите на Национална програма "**Обучение за ИТ кариера**" на МОН за подготовка по професия "Приложен програмист"

Министерство на образованието и науката

Национална програма „Обучение за ИТ кариера"

- Курсът е базиран на учебно съдържание и методика, предоставени от **фондация "Софтуерен университет"** и се разпространява под свободен лиценз **CC-BY-NC-SA**

SoftUni Foundation

CC BY NC SA