

## Численные методы, Весна 2021 ВШЭ. Задание 1.<sup>a</sup>

### Задачи типа А. (автопроверка)

1. (10) [Quadratic] Реализуйте функцию, возвращающую пару решений квадратного уравнения. (следуйте инструкциям в classroom)

### Задачи типа Б.

1. (15) Вспомните разобранный на семинаре пример. Теперь рассмотрите интеграл

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n}{x + \alpha} dx$$

и получите i) рекуррентное соотношение, связывающее  $I_n$  с  $I_{n-1}$  и ii) явное выражение для  $I_0(\alpha)$ . Вычислите (прямой и обратной) рекурсией значения  $I_{25}(0.1)$  и  $I_{25}(10)$ . Обсудите результат.

2. (10) В данной задаче нужно получить аналитический ответ "руками". Рассмотрите следующую функцию:

---

```
def recur(n, a0=1, a1=2):  
    if n == 0:  
        return a0  
    if n == 1:  
        return a1  
    return -recur(n-1) + 6*recur(n-2)
```

---

Чему будет равен результат вызова `recur(2021)`? Диапазон определения целых чисел считать неограниченным (т.е., целые числа не переполняются), размер стека также считать неограниченным (т.е. максимальное число рекурсивных вызовов не ограничено).

Повторите задание для вызова `recur(2021, a1=2+ε)`, где  $\epsilon$  произвольное сколь угодно малое число. Прокомментируйте отличия результата от предыдущего вызова.

3. (5) Рассмотрите (считая  $\delta > 0$ ) матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$ . Пусть  $\epsilon(\delta)$  – наибольшее собственное значение  $A$ .

Найдите число обусловленности этого собственного значения  $\kappa(\delta) = \frac{d\epsilon(\delta)}{d\delta}$  для  $\delta = 10$  и  $\delta = 0.1$ .

4. (7) Убедитесь, что функция

---

```
import math  
def round_to_n(x, n):  
    if x == 0:  
        return x  
    else:  
        return round(x, -int(math.floor(math.log10(abs(x)))) + (n - 1))
```

---

округляет  $x$  до  $n$  значащих цифр. Программа, вычисляющая  $\sum_{k=1}^{3000} k^{-2} \approx 1.6446$  последовательным суммированием членов ряда с округлением промежуточных результатов до 4х знаков выглядит следующим образом:

---

```
res = 0  
for k in range(1, 3001):  
    res = round_to_n(res + 1/k**2, 4)
```

---

---

<sup>a</sup> Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

Несмотря на отсутствие вычитаний (и связанных с ними сокращений), такой код позволяет получить только две значащие цифры точного ответа. Объясните, почему так происходит и предложите более удачный способ вычисления этой суммы (ограничиваясь 4мя значащими цифрами для промежуточных результатов).

5. (10) Рассмотрим два тела массами  $M_1$  и  $M_2$ , расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга. Сила гравитационного взаимодействия между телами дается формулой

$$F = \frac{GM_1M_2}{r^2},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная, значение которой считаем известным точно.

Предположим, что значения масс известны с погрешностями измерений:

$$M_1 = 40 \times 10^4 \pm 0.05 \times 10^4 \text{ kg}$$

$$M_2 = 30 \times 10^4 \pm 0.1 \times 10^4 \text{ kg}$$

и  $r = 3.2 \pm 0.01 \text{ m}$ .

- Используя стандартные правила комбинирования погрешностей, вычислите значение и погрешность силы взаимодействия  $F$ .
- Синтетический набор данных: будем интерпретировать заданное значение с погрешностью как нормальное распределение с заданным средним и стандартным отклонением. Сгенерируйте  $10^5$  случайных значений каждого из параметров ( $M_1$ ,  $M_2$  и  $r$ ), согласно заданным значениям. Для каждого набора реализаций вычислите значение гравитационной силы.
- Постройте гистограмму (`plt.hist`) значений силы и график нормального распределения со средним и дисперсией из предыдущего пункта. Обсудите результат. (*Результаты должны получиться согласованными*).
- Повторите задание для следующего набора данных:

$$M_1 = 40 \times 10^4 \pm 2 \times 10^4 \text{ kg}$$

$$M_2 = 30 \times 10^4 \pm 10 \times 10^4 \text{ kg}$$

$$r = 3.2 \pm 1.0 \text{ m}$$

Обсудите результат.