Численные методы, Весна 2021 ВШЭ. Задание 5.[a]

Задачи типа А.

1. **(15+10) [newton_iter]** Реализуйте методы Ньютона решения нелинейного уравнения и системы уравнений. Следуйте инструкциям в classroom. (15 баллов автопроверка + 10 баллов защита.)

2. **(15) [SeidelPoisson]** Реализуйте решение системы линейных уравнений методом Зейделя. Следуйте инструкциям в classroom.

Задачи типа Б.

1. **(10)** Реализуйте метод простой итерации для нахождения решения следующих уравнений относительно x:

$$\text{(i) } 1 + \cos x = 0, \quad \text{(ii)} \quad x^2 = 2.$$

   Используйте следующие итерационные формулы:

$$\text{(i) } x_{k+1} = x_k + \frac{\cos x_k + 1}{\sin x_k}, \quad \text{(ii) } x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right).$$

   В обоих случаях, стартуйте с $x_0 = 1$. Какова сходимость итераций (линейная/квадратичная) для случаев (i) и (ii)?

2. **(20)** Реализуйте метод итераций для решения системы линейных уравнений (метод Якоби). Для этого перепишите уравнение $Ax = b$, выделив диагональную часть матрицы A:

$$A = D + (A - D),$$

   в виде

$$x_{n+1} = Bx_n + c,$$

   где $B = D^{-1}(D - A)$. Найдите c.

   Создайте случайную матрицу с диагональным доминированием:

```
import numpy as np
rnd = np.random.RandomState(1234)
n = 10
A = rnd.uniform(size=(n, n)) + np.diag([15]*n)
b = rnd.uniform(size=n)
```

   Вычислите норму соотвутствующей матрицы B и выполните итерации Якоби. Убедитесь, что результирующий вектор x действительно решает исходную систему.

   Матрица A, с которой вы работали выше, по построению доминируется диагональю. Что произойдёт, если уменьшать величину диагональных элементов? Проверьте сходимость итераций Якоби (вычислите также норму матрицы B).

3. **(20)** Напишите программу, которая решает нелинейное уравнение Пуассона:

$$\phi''(x) = e^{\phi(x)} - n(x), \quad \text{где } n(x) = 1 + e^{-3(x-5)^2},$$

   в области $0 \leqslant x \leqslant 10$ с граничными условиями $\phi(0) = \phi(10) = 0$. Для этого дискретизуйте дифференциальное уравнение на равномерную решётку $x_{j=1,\dots,N-1}$, так что значения потенциала в точках $x_0 = 0$ и

[a] Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

$x_N = 10$ зафиксированы граничными условиями, а внутри определяются дискретной версией исходного дифференциального уравнения: $G_1 = 0,\ G_2 = 0,\ ..., G_{N-1} = 0$, где

$$G_j = \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\delta x^2} - e^{\phi_j} + n(x_j) = 0.$$

Используйте метод Ньютона для того, чтобы найти решение этой системы. Сколько итераций нужно, чтобы получить решение с 10ю значащими цифрами?

4. **(15) Фрактал Ньютона.** Рассмотрим уравнение $x^3 = 1$. Оно имеет три решения в комплексной плоскости, $x_k = \exp\{i\,2\pi k/3\}$, $k = 0, 1, 2$. В зависимости от начального приближения, итерации Ньютона сойдутся к одному из этих решений (для получения комплексно-значного корня необходимо стартовать с начального значения с ненулевой мнимой частью). Постройте в комплексной плоскости *бассейны притяжения* корней. Для этого проведите серию вычислений с начальными условиями на сетке в комплексной плоскости переменной x. Далее раскрасьте сетку в три цвета согласно значению корня, к которому сошлись итерации (удобно для каждого значения начальных условий выполнять фиксированное число итераций).