

Численные методы, Весна 2021 ВШЭ. Задание 6.^a

Задачи типа А.

1. (5+5) [LagrangeInterpolator] Реализуйте построение интерполяционного многочлена в форме Ларганжа и используйте его для интерполяции заданной функции на равномерной сетке и сетке узлов Чебышева. Следуйте инструкциям в classroom. (5 баллов автопроверка + 5 баллов защита.)

Задачи типа Б.

Для выполнения задания потребуются данные из файла `data_7_1.npz`. Скачайте его из Classroom и откройте его используя `numpy`:

```
with np.load('data_7_1.npz') as data:
    x1, y1 = data['x1'], data['y1']
```

1. (10) Вектора `x1` и `y1` дают значения некоторой функции $f(x)$. Постройте:
 - (a) Интерполяционный Лагранжев многочлен.
 - (b) Интерполяционный кубический сплайн (`CubicSpline`).
 - (c) Монотонный кубический интерполянт (`PchipInterpolator`).
2. (15) Постройте полиномиальный интерполянт, проходящий через точки `x = np.linspace(-1, 1, n)` и `y = np.cos(n*x)`, двумя способами:
 - (a) Используя функции `np.polyfit` и `np.polyval`.
 - (b) Используя явную формулу через многочлены Лагранжа.

Сравните результаты, полученные этими способами и объясните результат (возьмите $n = 16, 32, 64$).

3. (15) Вектора `x4` и `y4` дают значения некоторой функции на равномерной сетке на отрезке $[-0.75, 0.75]$. Используя `scipy.optimize.curve_fit`, постройте интерполяцию функции $y(x)$ функциями вида

$$y_1(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5, \quad y_2(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3}{1 + q_1x + q_2x^2}.$$

Какая из этих формул лучше описывает $y(x)$ на заданном интервале? Постройте график экстраполяции $y(x)$ за пределы исходных данных. Можете ли вы угадать аналитическое выражение для $y(x)$?

4. (15) Напишите функцию, строящую кубический сплайн-интерполянт, проходящий через заданные значения x_k и y_k , $k = 1, \dots, N$ и удовлетворяющий *периодическим* граничным условиям: считайте, что $y_1 = y_N$ и потребуйте равенства первой и второй производных на границах интервала. Для решения задачи линейной алгебры используйте стандартные библиотечные функции `scipy.linalg` либо `numpy.linalg`.
5. (20) Модифицируйте решение предыдущей задачи с учетом структуры матрицы системы линейных уравнений задачи сплайн-интерполяции: матрица имеет трехдиагональную форму с дополнительными элементами в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы. Используйте функцию `scipy.linalg.solve_banded` для решения трехдиагональной системы и формулу Шермана-Моррисона (см. напр. Numerical Recipes, гл. 2.7.3).

^a Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]