Численные методы, Весна 2021 ВШЭ. Задание 3.[a]

Задачи типа А. (автопроверка)

1. **(15+5) [QR]** Реализуйте QR разложение квадратной матрицы с использованием отражений Хаусхолдера. Следуйте инструкциям в classroom. (15 баллов автопроверка + 5 баллов защита ч. II)

2. **(10+5) [LSQ]** Реализуйте метод наименьших квадратов. Следуя инструкциям в classroom. (10 баллов автопроверка + 5 баллов защита ч. II)

Задачи типа Б.

1. **(7)** Покажите, что:
   - проектор P является ортогональным если и только если $P = P^T$
   - если P – ортогональный проектор, то матрица $I - 2P$ унитарна (дайте геометрическую интерпретацию этого факта).

2. **(7)** Рассмотрите матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   - Выпишите ортогональные проекторы на range(A) и range(B).
   - Постройте руками QR разложение матриц A и B.

3. **(15)** Допишите следующий код на Python так, чтобы он генерировал матрицу A (состоящую из 0 и 1) размера 15×28, показанную на Рис. 1 (для визуализации матрицы использована функция plt.imshow(A)):

```
a = np.zeros((15, 28))
a[2:-2,1] = 1; a[2,2:6] = 1
a[2:7,6] = 1; a[7:-2,7] = 1
a[7,2:7] = 1; a[-3,2:7] = 1
a[2:-2, 10] = 1; a[2:-2, 14] = 1;
a[2:-2, 18] = 1; a[-3,10:19] = 1
```

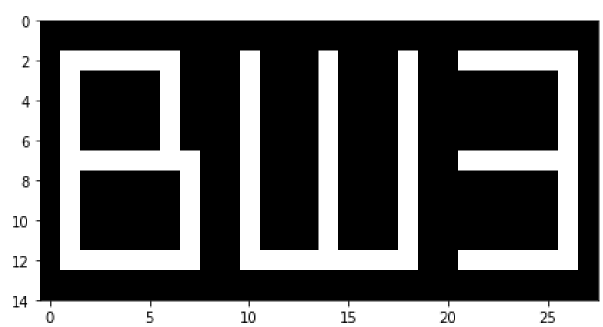

Рис. 1. Матрица A, задача 3.

   - Постройте SVD разложение матрицы A. Чему равен rank(A)?

---

[a] Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

- Для каждого $i = 1, 2, ..., \mathrm{rank}(A)$, постройте матрицу B_i ранга i, которая наилучшим образом (в 2-норме) приближает матрицу A (постройте соответствующее изображение).

4. **(15)** Рассмотрите единичную массу, находящуюся при $t = 0$ в точке $x = 0$ в состоянии покоя $v = 0$ и подверженную силе f_i при $i - 1 < t \le i$, где $i = 1, 2, ..., 10$. Пусть $a = (x(t = 10), v(t = 10))$ – вектор, состоящий из координаты и скорости частицы в момент времени $t = 10$. Постройте матрицу A такую, что $a = Af$ (заметьте, что A имеет размер 2×10). Используя SVD разложение, найдите f минимальной нормы такое, что $a = (1, 0)$.

5. **(15) (Возмущение корреляционной матрицы)**

(См[1], гл. 6) Управляющий активами Neurozhaika Capital Management получил от своих аналитиков корреляционную матрицу трех фондовых индексов, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$. Коэффициент корреляции 0.4 кажется ему завышенным, и/или он хочет "поиграть" с этой величиной, промоделировав гипотетический портфель, заменив 0.4 на 0.3. Найдите с.з. исходной $\mathbf{C}$ и возмущенной $\tilde{\mathbf{C}}_0$ матриц. Несмотря на относительно малое возмущение и разумный вид возмущенной матрицы, какие-то из с.з. станут отрицательными, и матрица $\tilde{\mathbf{C}}_0$ не будет положительно определенной, что неприемлемо[2]. Рассмотрите следующий "спектральный" рецепт восстановления свойств корреляционной матрицы:

(a) Посчитать все с.з. λ_i и с.в. $\mathbf{s}_i$ возмущенной матрицы $\tilde{\mathbf{C}}_0$. Ввести новые с.з. по правилу $\lambda_i' = \lambda_i$, если $\lambda_i \ge 0$, иначе $\lambda_i' = 0$.

(b) Умножить с.в. $\mathbf{s}_i$ на модифицированные с.з. λ_i' и использовать их в качестве столбцов новой матрицы $\mathbf{B}'$.

(c) Отнормировать строки матрицы $\mathbf{B}'$ (вектора) на единичную длину, получив тем самым новую матрицу $\mathbf{B}$.

(d) Построить новую возмущенную корреляционную матрицу по правилу $\tilde{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$.

Доказать, что полученная таким образом матрица $\tilde{\mathbf{C}}_1$ будет положительно определенной с единицами на главной диагонали, т.е. отвечать формальным требованиям, предъявляемым к корреляционной матрице. Найти численно матрицу $\tilde{\mathbf{C}}_1$, сравнить ее с первоначальной наивной модификацией $\tilde{\mathbf{C}}_0$, отвечающей только $0.4 \to 0.3$. Самостоятельно придумать и поэкспериментировать с корреляционными матрицами в описанном духе (несколько примеров).

---

[1] P. Jaeckel, *Monte Carlo Methods in Finance* (Wiley, 2002).

[2] Хотя бы потому, что риск портфеля $\vec{w}^T \tilde{\mathbf{V}}_0 \vec{w} = \sum_{ij} w_i \sigma_i (\tilde{C}_0)_{ij} \sigma_j w_j$ может стать отрицательным при некотором наборе весов $\vec{w}$, что невозможно.