

## Численные методы, Весна 2021 ВШЭ. Задание 4.<sup>a</sup>

### Задачи типа А. (автопроверка)

1. **(10+10) [Eigenvalues]** Реализуйте алгоритмы степенной и обратной итерации нахождения максимального собственного значения. Следуйте инструкциям в classroom. (10 баллов автопроверка + 10 баллов защита.)

### Задачи типа Б.

1. **(10)** Сгенерируйте случайную симметричную матрицу  $A$  размера  $1000 \times 1000$ :

---

```
n = 1000
a = np.random.normal(0, 1, (n, n))
A = a + a.T
```

---

Используя функцию `numpy.linalg.eigvalsh`, найдите спектр матрицы  $A$  и постройте гистограмму распределения собственных значений (`plt.hist`).

2. **(15)** Сгенерируйте случайную симметричную и положительно определенную матрицу  $A$  размера  $10 \times 10$ :

---

```
n = 10
a = np.random.normal(0, 1, (n, n))
A = a @ a.T
```

---

Найдите спектр этой матрицы с помощью функции `numpy.linalg.eigvalsh`. Имплементируйте QR-алгоритм без сдвигов (используйте `numpy.linalg.qr`) и найдите спектр матрицы с его помощью. Сколько итераций требуется, чтобы приблизить минимальное собственное значение с точностью 1%?

3. **(15)** Рассмотрите матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите спектр матрицы  $A$ . Пусть  $\sigma_\epsilon$  – множество таких [комплексных]  $z$ , что  $z$  является собственным значением матрицы  $A + \delta A$  с некоторым  $\|\delta A\|_2 < \epsilon$ . Изобразите  $\sigma_{0.1}$  и  $\sigma_{0.01}$  (используйте без доказательства эквивалентность утверждений i и iv из задачи 26.1 Trefethen, Bau).

4. **(25)** Рассмотрите диагональную матрицу  $D$  размера  $n \times n$  и вектор–столбец  $u$ . Выберите  $D$  и  $u$  случайным образом (сгенерировав их элементы их стандартного нормального распределения) и найдите минимальное собственное значение и соответствующий собственный ему собственный вектор матрицы

$$A = D + \frac{uu^T}{u^T u}.$$

Рассмотрите случаи  $n = 10^2$  и  $n = 10^5$  – во втором случае Вам, возможно, пригодится Bunch–Nielsen–Sorensen formula

5. **Одномерный кристалл (30)** Рассмотрите одномерный кристалл с двумя атомами различной массы  $m$  и  $M$  в элементарной ячейке, состоящий из  $N$  элементарных ячеек (всего  $2N$  атомов), замкнутых в кольцо (периодические граничные условия).

- Считая, что соседние атомы на кольце соединены одинаковыми пружинами с упругой константой  $k = 1$ , выпишите уравнения движения (уравнения Ньютона) на положения атомов  $x_i$ .

---

<sup>a</sup> Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]

- Предполагая, что все атомы движутся с одной и той же частотой,  $x_i(t) = u_i e^{-i\omega t}$ , перепишите найденные выше уравнения в виде системы линейных уравнений на вектор  $u$ . Составьте матрицу  $A$ , спектр которой определяет частоты нормальных мод.
- Используя `np.linalg.eig`, найдите спектр матрицы  $A$  (возьмите  $N = 1000$  и  $M/m = 2$ ). Постройте гистограмму собственных значений. Обратите внимание, что в спектре есть щель – ‘запрещенная’ область энергии внутри спектра, которая разделяет ‘разрешенную’ область на две части.
- Постройте пространственную структуру численно определённой нормальной моды  $u_i$  вблизи минимальной и максимально энергий спектра.
- Теперь рассмотрите цепочку со случайным  $k$ , взятым из однородного распределения на отрезке  $[1, 10]$  и  $M/m = 2$ . Найдите её спектр (постройте гистограмму) и изобразите пространственную структуру какой-то моды  $u$  из середины спектра.