

**Descomposición LU. Descomposición de Cholesky.**

LABORATORIO

1. Sea  $A = (a_{ij})$ , con  $a_{ij} = \begin{cases} \min(i, j) & \text{si } i \neq j \\ -500000 & \text{si } i = j \end{cases}$  para  $i, j = 1, 2, \dots, 1000$ . Asimismo,  $b = (b_i)$ , con  $b_i = i$  para  $i = 1, 2, \dots, 1000$ .
  - a) Resuelva el sistema  $Ax = b$  utilizando eliminación Gaussiana sin pivoteo programado por Ud. en Matlab, y anote el tiempo de CPU.
  - b) Resuelva el sistema  $Ax = b$  utilizando la descomposición  $LU$  de Crout de la matriz  $A$ . Anote el tiempo total de CPU utilizado. ¿Qué concluye? Use el programa de descomposición  $LU$  de Crout general programado por Ud. en Matlab.
2. Genere una matriz  $Y$  de tamaño  $250 \times 250$  con entradas aleatorias en el intervalo  $[-5, 5]$ . Considere las matrices

$$\begin{aligned} B &= YY^t \\ A &= B + (\epsilon - \min(\lambda_B))\mathcal{I} \end{aligned}$$

donde  $\epsilon > 0$ ,  $\min(\lambda_B)$  es el mínimo autovalor de  $B$  e  $\mathcal{I}$  es la matriz identidad.  
Sea  $b = Ae$  donde  $e$  es el vector de tamaño 250 con entradas  $e_i = (-1)^i$ .

- a) Muestre que  $A$  es una matriz simétrica y positivo definida.
- b) Resuelva el sistema de ecuaciones  $Ax = b$  para  $\epsilon = 10^{-12}, 10^{-8}, 10^{-4}$  usando la factorización  $LU$  de Crout y la factorización de Cholesky. Para cada método calcule el tiempo CPU empleado al resolver el sistema de ecuaciones lineales (use el comando `tic-toc`).
- c) Escriba una tabla indicando, para cada  $\epsilon$ , el mínimo autovalor de  $A$ , el número de condición de  $A$  en norma infinito, el error relativo en norma infinito de la solución obtenida por cada método y el tiempo CPU empleado por cada método.
- d) En base a los resultados obtenidos, explique:
  - ¿Cuál método es más eficiente en tiempo CPU? ¿Corresponde a lo visto en teoría?
  - ¿Qué relación existe entre  $\epsilon$  y el mínimo autovalor de  $A$  (en teoría)?
  - ¿Cómo influye el parámetro  $\epsilon$  en la exactitud de las soluciones obtenidas? ¿Afecta este parámetro el condicionamiento de  $A$ ?