Computación Visual

Objetos geométricos y su representación bidimensional.

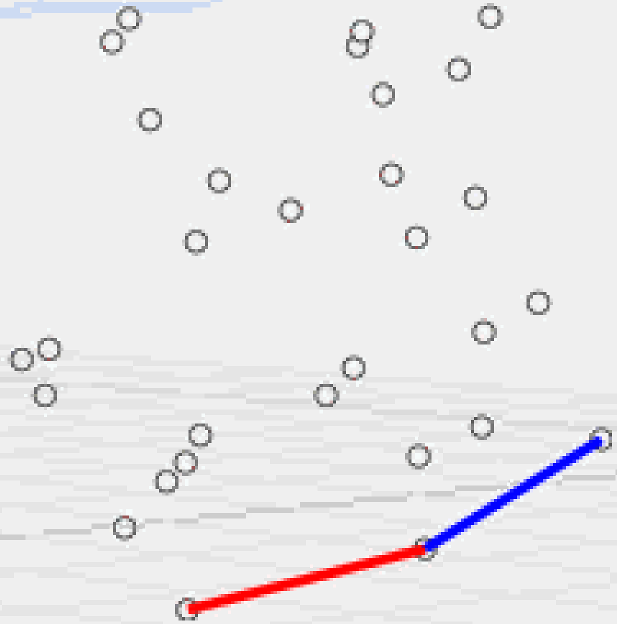
Algoritmos geométricos

Johnny R. Avendaño Q.
e-mail: **javendanoq@unmsm.edu.pe**
Departamento Académico de Ciencias de la Computación
Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática
Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Objetos y Algoritmos geométricos

Contenido

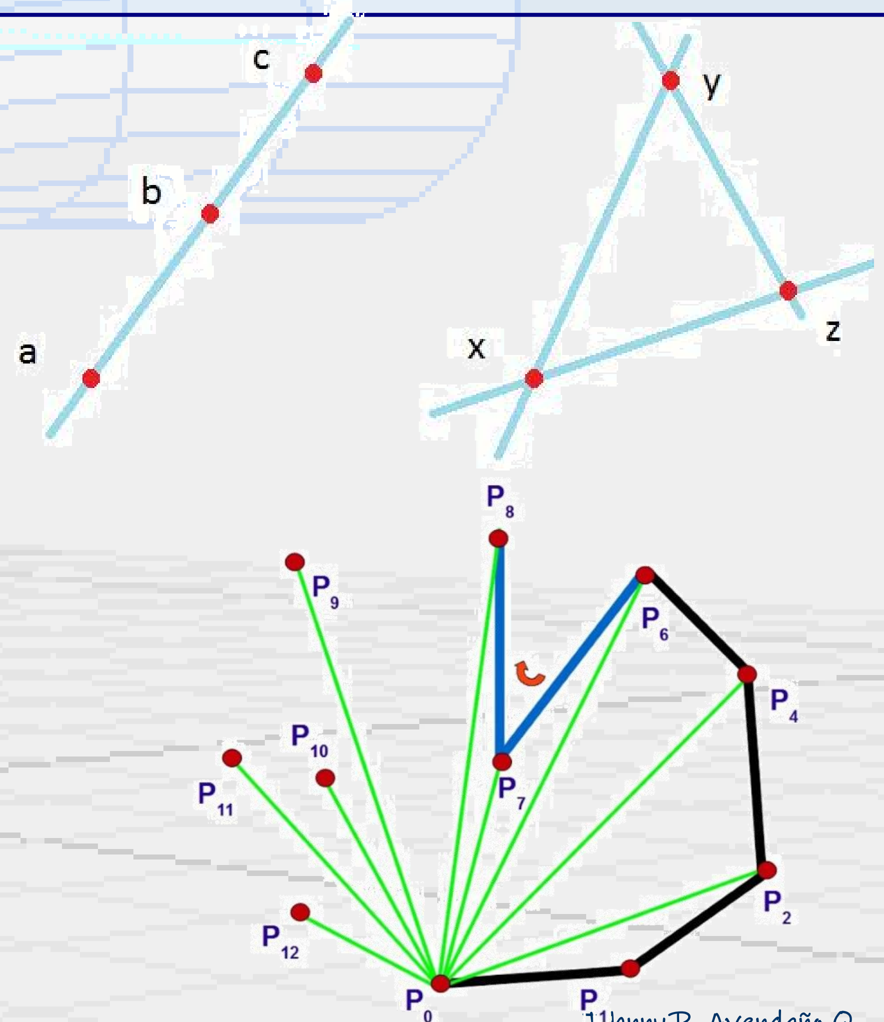
1. Concepto
2. Principales objetos bidimensionales.
3. Convexidad.
4. La capsula convexa.
5. Algoritmo de Graham.
6. Bibliografía



Objetos y Algoritmos geométricos

Concepto

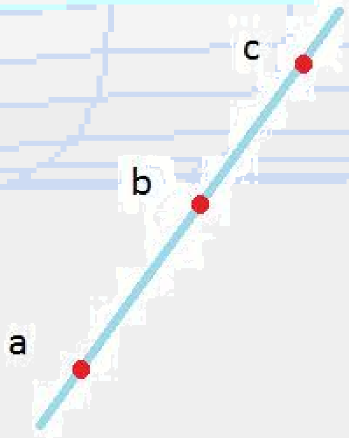
- Muchos problemas de ingeniería tienen componentes geométricas que son susceptibles de ser empleadas y que se traducen en un algoritmo (geométrico).
- En ese contexto, muchos problemas computacionales son difíciles de resolver y por lo tanto requieren de algoritmos exactos o heurísticos que proporcionen buenos resultados.
- Todo algoritmo geométrico actúa sobre objetos geométricos como los puntos, segmentos, polígonos, etc.

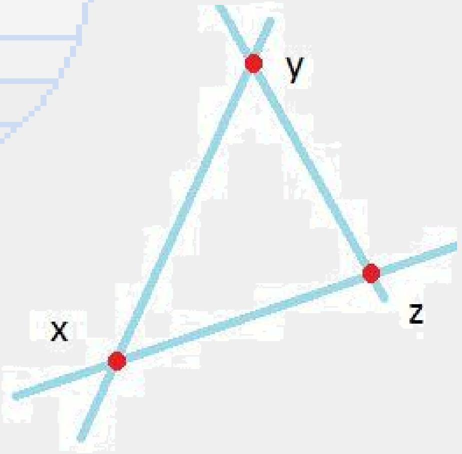


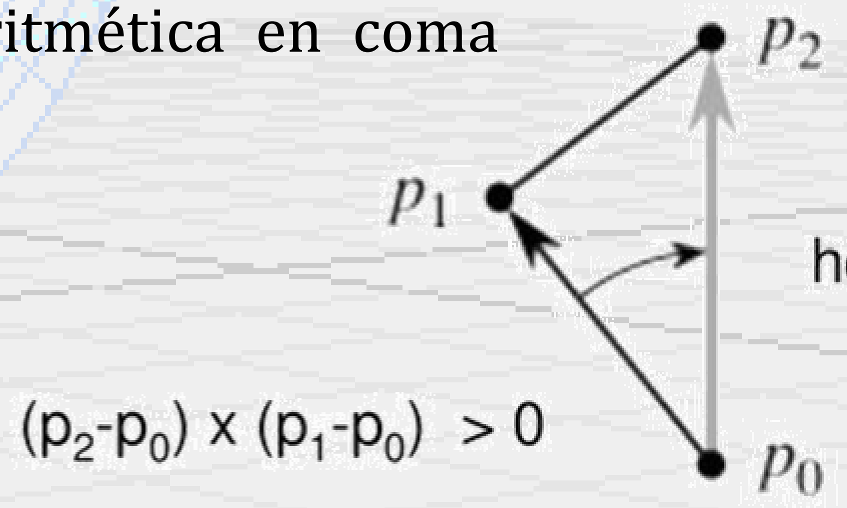
Jihnny R. Avendaño Q.

Objetos y Algoritmos geométricos

- Los algoritmos geométricos están basados en cálculos simples: operaciones básicas, comparaciones, etc.
- Se evitan las divisiones y las funciones trigonométricas a fin de minimizar el costo computacional, además de evitar los redondeos y los errores generados en la aritmética en coma flotante.



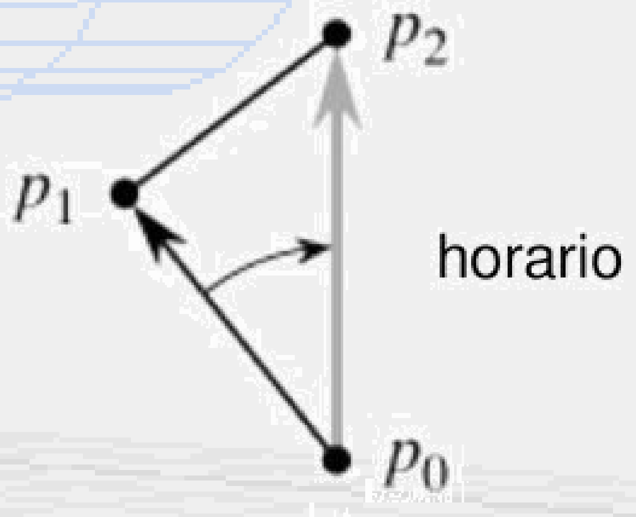




Objetos y Algoritmos geométricos

Algunos problemas geométricos

- Dado tres puntos, determinar la colinealidad, si hay giro a la izquierda o a la derecha.
- Intersección de segmentos.
- Área de un triángulo.
- Un punto está dentro o fuera de un triángulo.
- Circulo mínimo que contiene varios puntos (1857).
- Determinación de la capsula convexa.
- Volumen de un tetraedro.
- Un punto está dentro o fuera de un tetraedro.

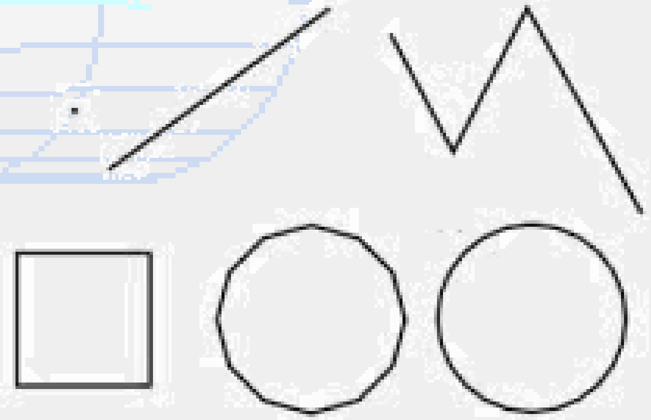


$(p_2\text{-}p_0) \times (p_1\text{-}p_0) > 0$

Objetos y Algoritmos geométricos

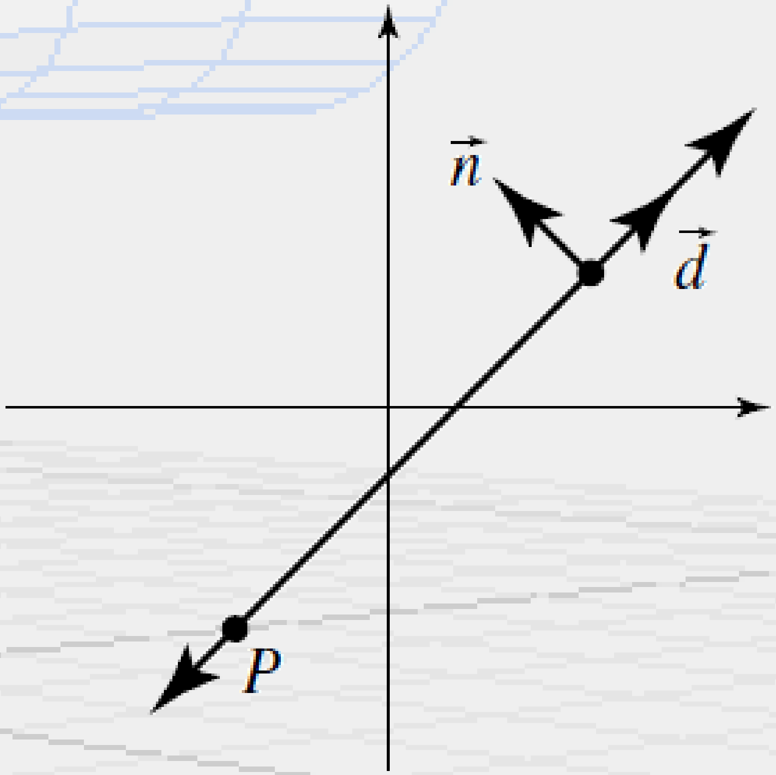
Componentes lineales

- Veremos algunas definiciones para un grupo de objetos gráficos bidimensionales que son usadas comúnmente en las aplicaciones gráficas.
- Los objetos bidimensionales se construyen a partir de objetos unidimensionales.
- Lo mismo ocurre con los objetos tridimensionales.
- Las componentes lineales pueden representarse de muchas maneras.



Forma normal e implícita

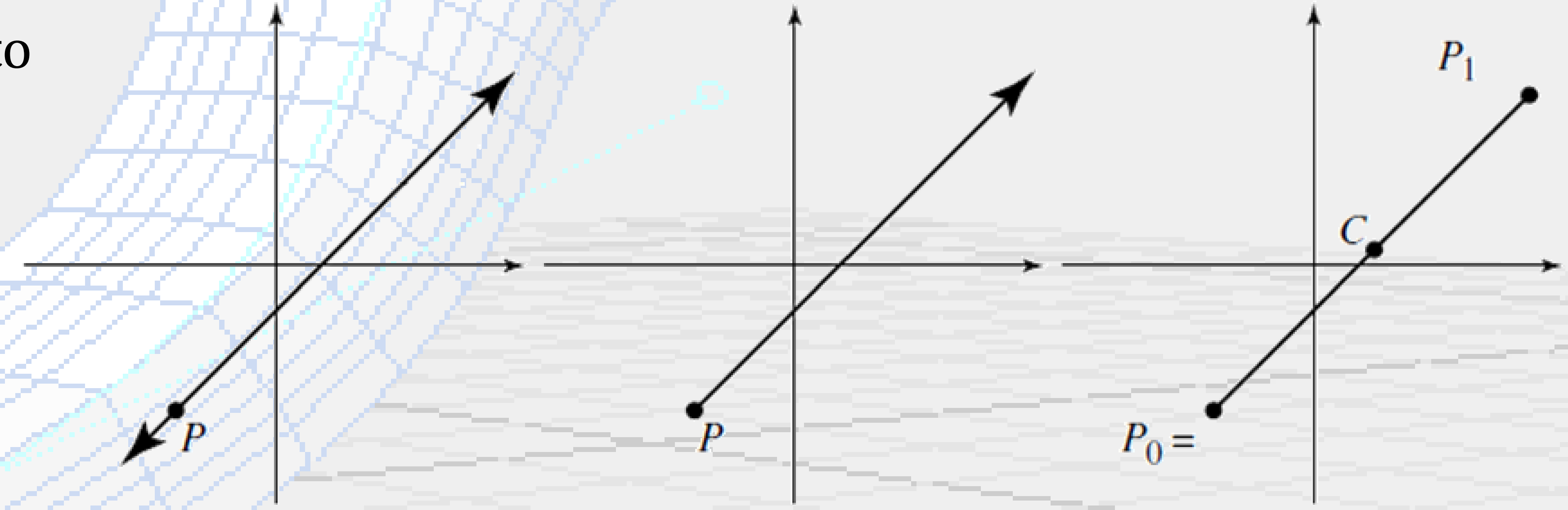
- Una línea está definida por $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$
- Donde $\vec{d} = X - P$, P es un punto fijo y X es un par variable.
- La línea divide al plano en dos semiplanos:
  - Lado positivo de la línea: $\vec{n} \cdot \vec{d} > 0$
  - Lado negativo de la línea: $\vec{n} \cdot \vec{d} < 0$
  - Otra representación, es la forma implícita: $ax + by + c = 0$



Objetos y Algoritmos geométricos

Componentes lineales

- Las componentes lineales pueden representarse de muchas maneras.
  - (a) Línea
  - (b) Rayo
  - (c) Segmento



(a) (b) (c)

Johnny R. Avendaño Q.

Objetos y Algoritmos geométricos

Forma vectorial y paramétrica

- Forma vectorial

$$P(t) = P + t\,\vec{d}$$

Línea: $t \in \langle -\infty; +\infty \rangle$

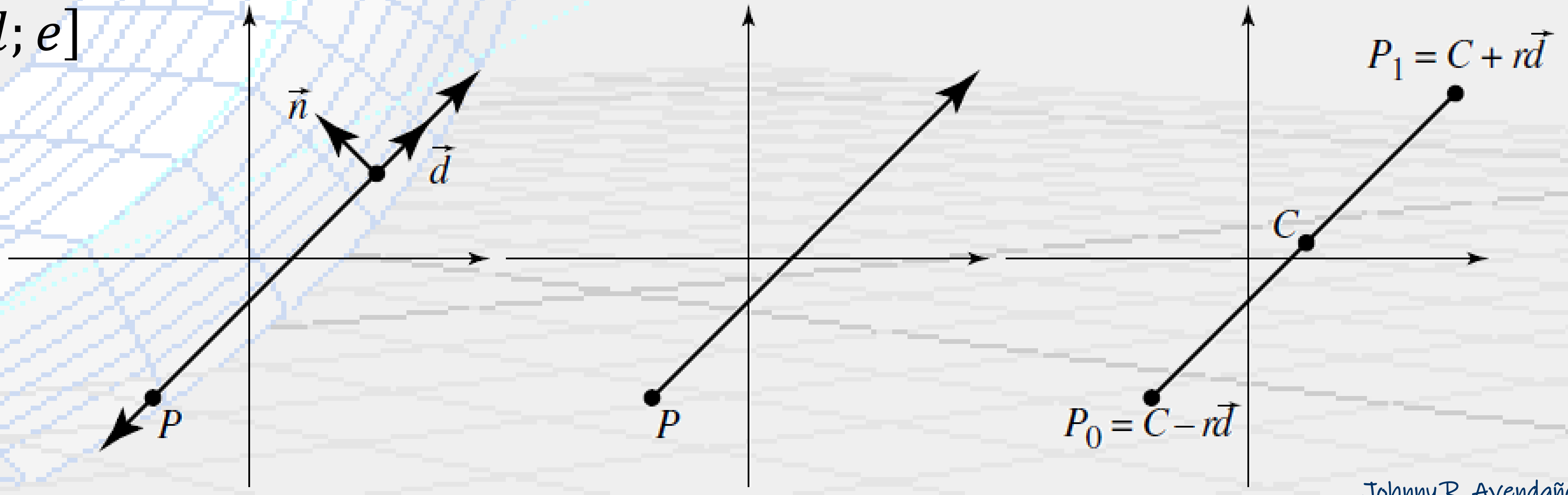
Rayo: $t \in [0;+\infty\rangle$

Segmento: $t \in [d; e]$

- Forma paramétrica, hay varias versiones, siendo esta la más empleada en computación geométrica

$$P(t) = (1-t)P_0 + t\,P_1$$

Segmento : $t \in [0; 1]$

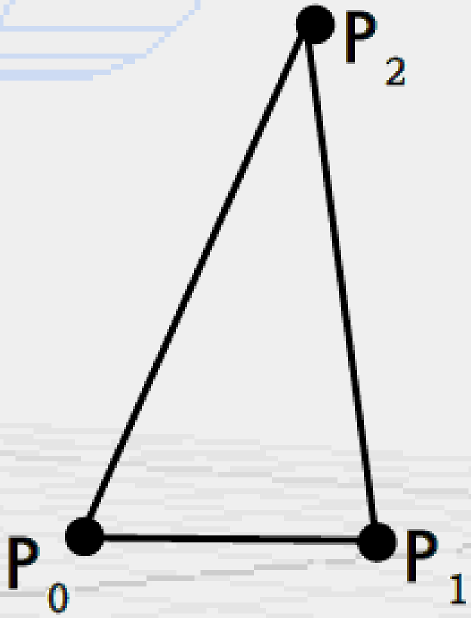


Johnny R. Avendaño Q.

Objetos y Algoritmos geométricos

Triángulos

- Un triángulo está determinado por 3 puntos no colineales.
- A esta representación se le denomina de forma vértice.



- Área signada de un triángulo basada en tres puntos del plano cartesiano.

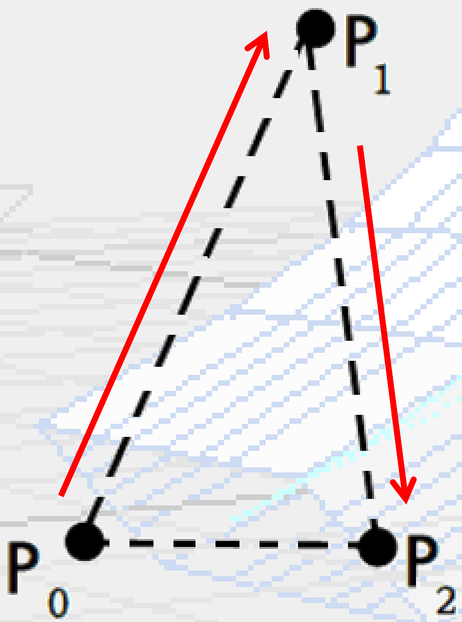
$$A(P_0; P_1; P_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

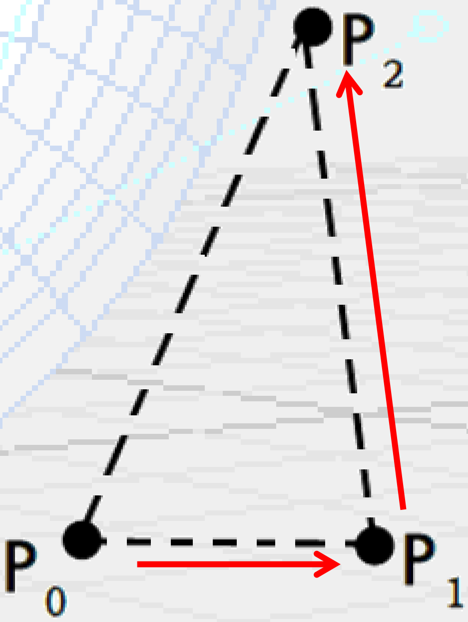
Observación: el área esta dado por

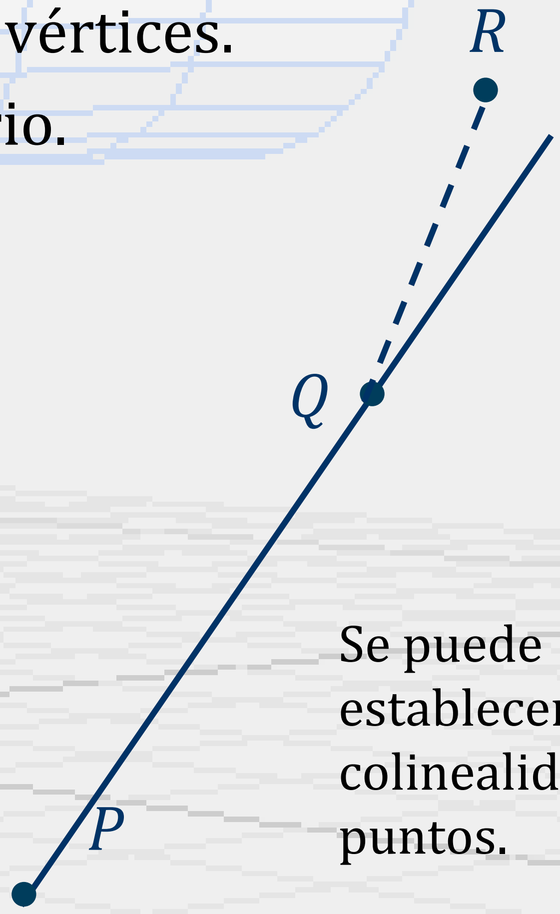
$$Area = |\, A(P_0; P_1; P_2)\, |$$

Giro o recorrido

- El signo de $A(P_0; P_1; P_2)$ proporciona el recorrido de los vértices.
  - $A(P_0; P_1; P_2) > 0$, entonces el recorrido es antihorario.
  - $A(P_0; P_1; P_2) < 0$, entonces el recorrido es horario.





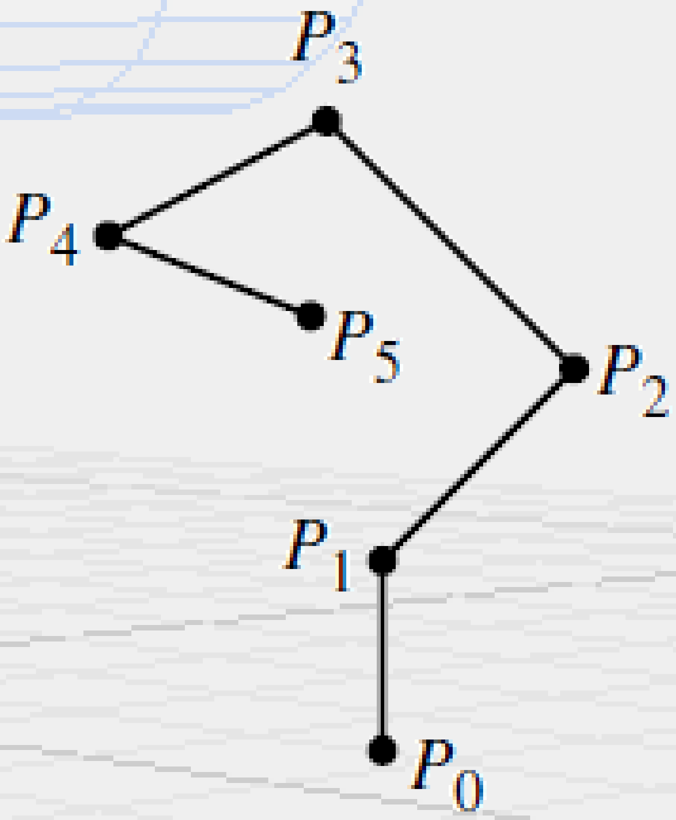


Se puede establecer la colinealidad de 3 puntos.

Objetos y Algoritmos geométricos

Polilíneas

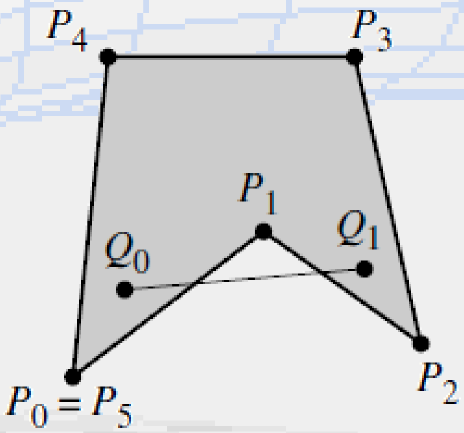
- Una polilínea consta de un número finito de segmentos de línea $P_i P_{i+1}$, para $0 \leq i < n$.
- la definición se puede ampliar para permitir que las polilíneas incluyan rayos y líneas.
- La polilínea estará cerrada si el último punto de la línea está conectado al primero por un segmento de línea.

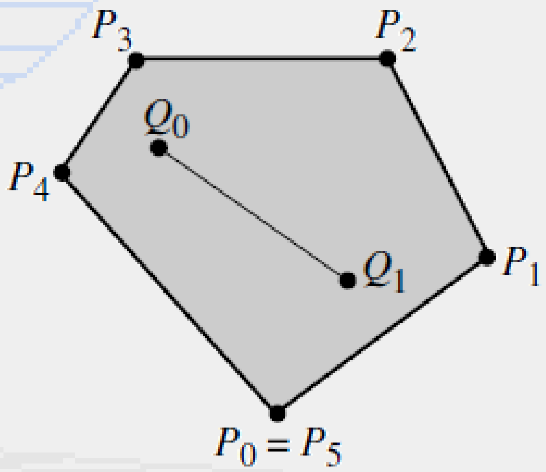


Objetos y Algoritmos geométricos

Polígonos

- Un polígono simple, delimita una región del plano (conexión simple).
- Los vértices de un polígono simple se pueden ordenar en sentido horario o antihorario.
- Un polígono simple es convexo si para dos puntos dentro del polígono, el segmento de línea que conecta los dos puntos también está dentro del polígono.
- Un polígono que no es convexo se dice que es cóncavo.



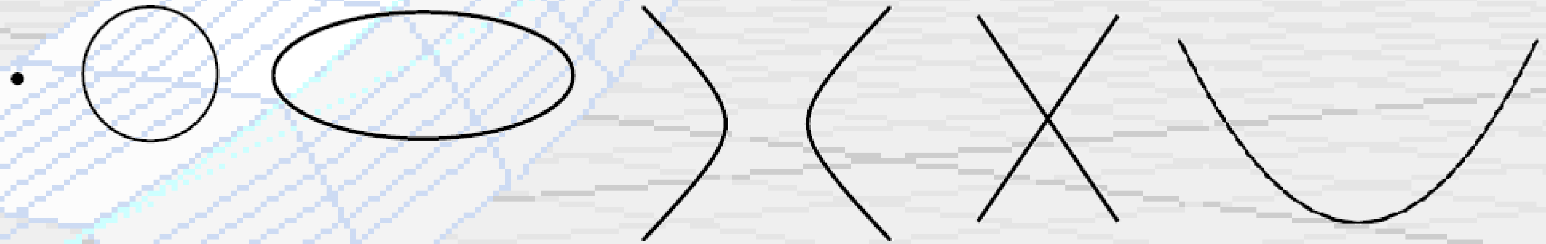


Objetos y Algoritmos geométricos

Curvas cuadráticas

- Las curvas cuadráticas están determinadas implícitamente por la ecuación cuadrática general en dos variables.
- Una ecuación cuadrática puede definir un punto, una línea, un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola.
- También es posible que la ecuación no tenga solución.

$$X^T A X + B^T X + C = 0$$



Objetos y Algoritmos geométricos

Curvas polinomiales

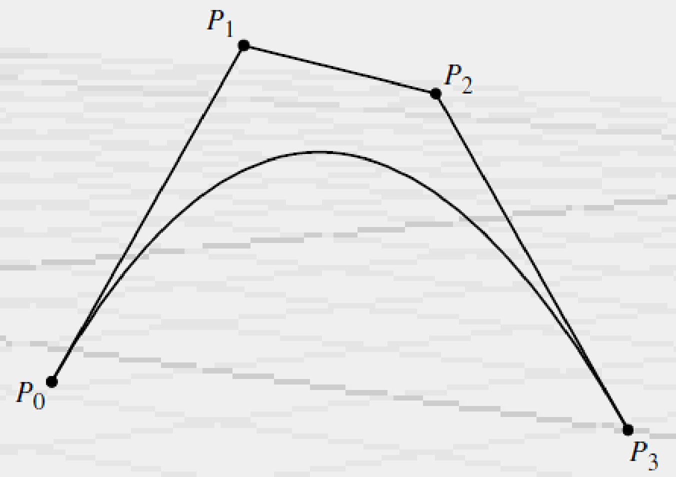
- Una curva polinomial en el plano está dada en su forma paramétrica como

$$X_i(t) = \sum_{i=0}^{n_i} a_{ij} t^j$$

- Una curva racional es de la forma

$$X_i(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n_i} a_{ij} t^j}{\sum_{j=0}^{m_i} b_{ij} t^j}$$

- Otras curvas: Bézier, Splines, Catmull Room, etc.



Johnny R. Avendaño Q.

Objetos y Algoritmos geométricos

Convexidad

- Un polígono está representado como un conjunto o una secuencia de puntos $P_0, P_1, \cdots, P_n$ en el plano.
- Una combinación convexa de dos puntos P_1 y P_2 es otro punto Q talque para algún t $\in [0; 1]$ resulta

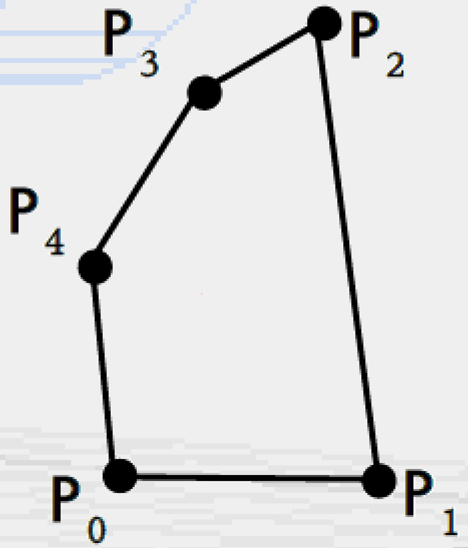
$$x_Q = t\,x_1 + (1-t)\,x_2$$

$$y_Q = t\,y_1 + (1-t)\,y_2$$

Es decir

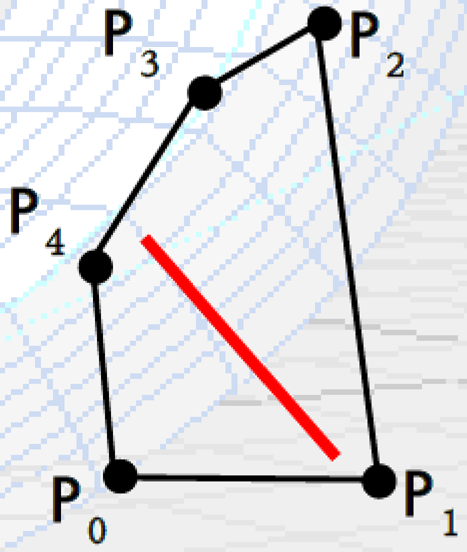
$$Q = t\,P_1 + (1-t)\,P_2$$

- Q es un punto que pertenece al segmento P_1P_2 (está entre P_1 y P_2)

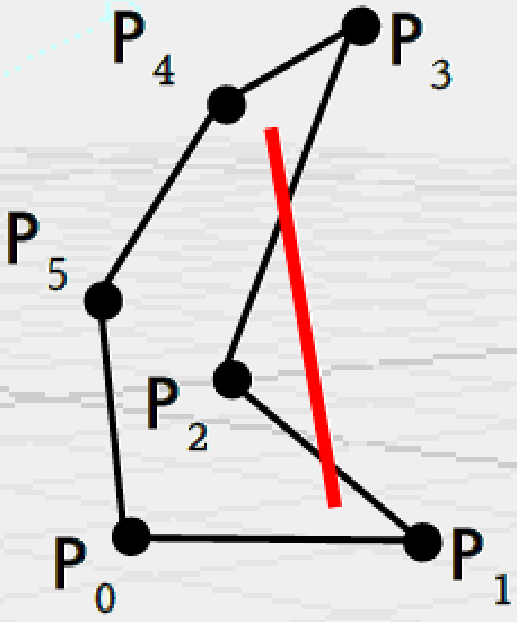


Objetos y Algoritmos geométricos

- Un polígono es convexo, si todo segmento cuyos extremos son puntos interiores del polígono no corta a un segmento del borde.
- A todo polígono que no es convexo se le denomina de polígono cóncavo.



Polígono convexo

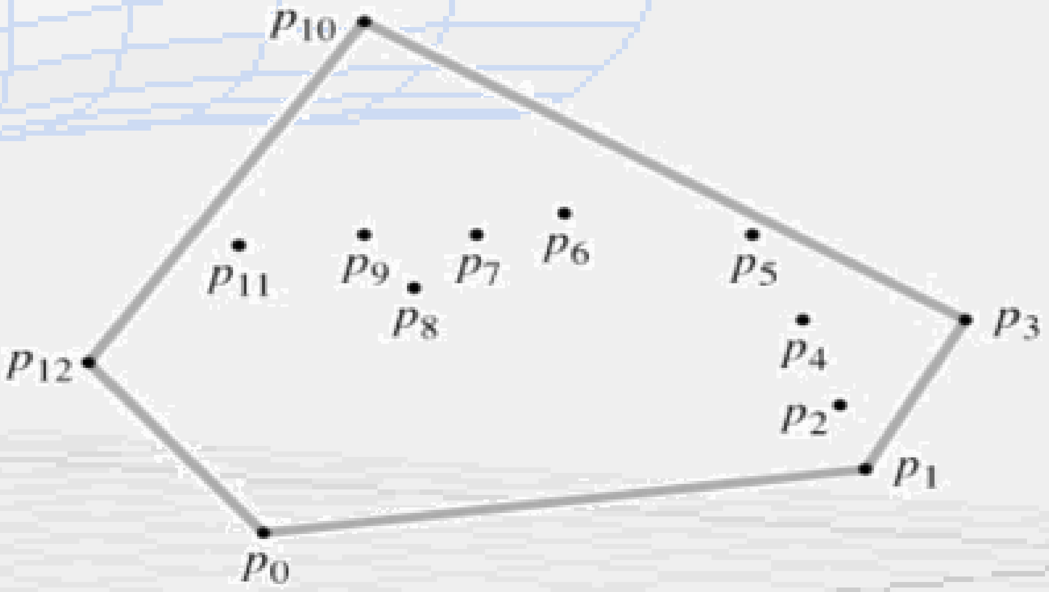


Polígono cóncavo

Objetos y Algoritmos geométricos

La capsula convexa

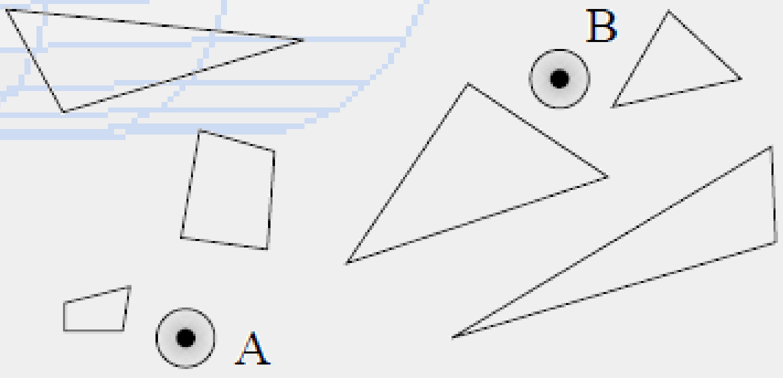
- Dado un polígono definido por la secuencia $P_0, P_1, \cdots, P_n$ en el plano, queremos determinar el menor polígono convexo que los contenga (a estos puntos).
- Cada punto pertenece a los lados o está en su interior.
- A este menor polígono convexo se le conoce como la capsula convexa (o convex hull)

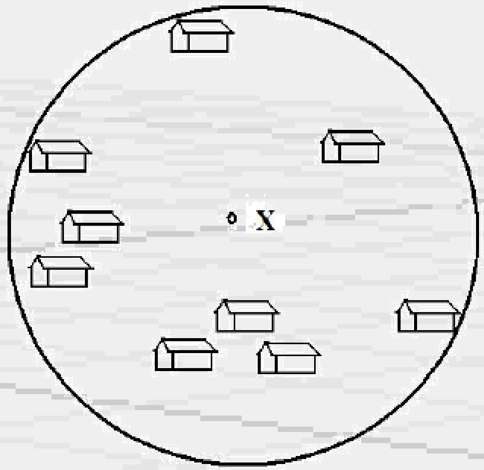


Objetos y Algoritmos geométricos

Aplicaciones de la capsula convexa

- Conocer la envolvente convexa de un robot permite que este evite colisiones en la trayectoria de su desplazamiento. Evalúa posibles rutas de desplazamiento.
- Circulo mínimo, calcular del diámetro de un conjunto de puntos como la máxima distancia que puede haber entre sus pares (estos se encuentran en la envolvente convexa).
- Encontrar el rectángulo de área mínima que contenga a un polígono (caja mas pequeña).
- Análisis y reconocimiento de formas.





Objetos y Algoritmos geométricos

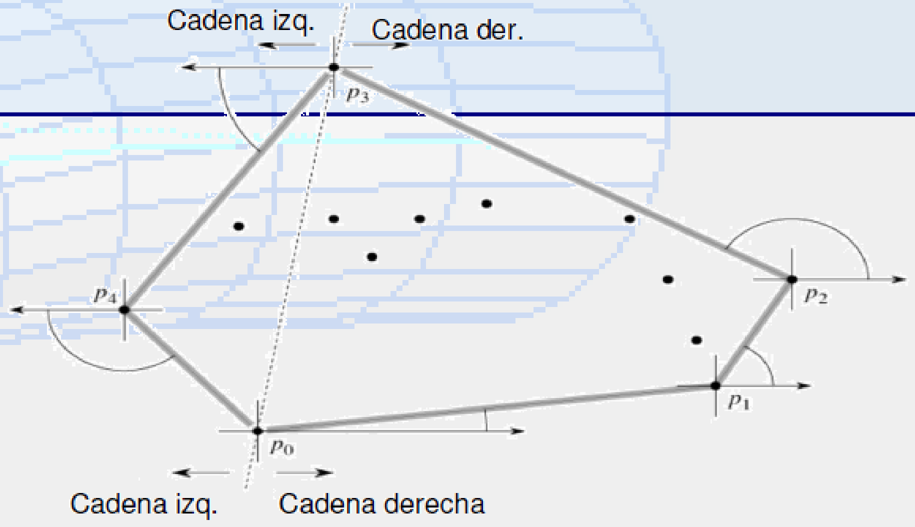
Algunos algoritmos

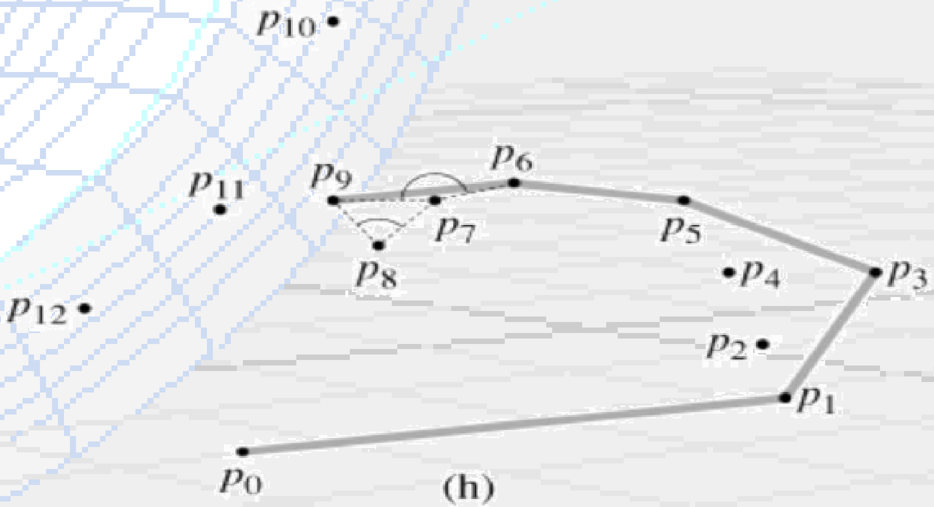
El algoritmo del regalo o la marcha de Jarvis.

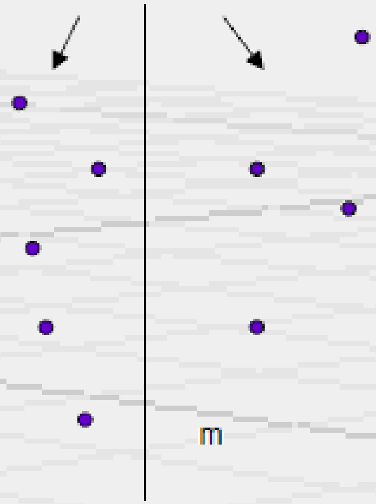
El algoritmo de Graham.

El algoritmo quick hull.

El algoritmo divide y conquista.



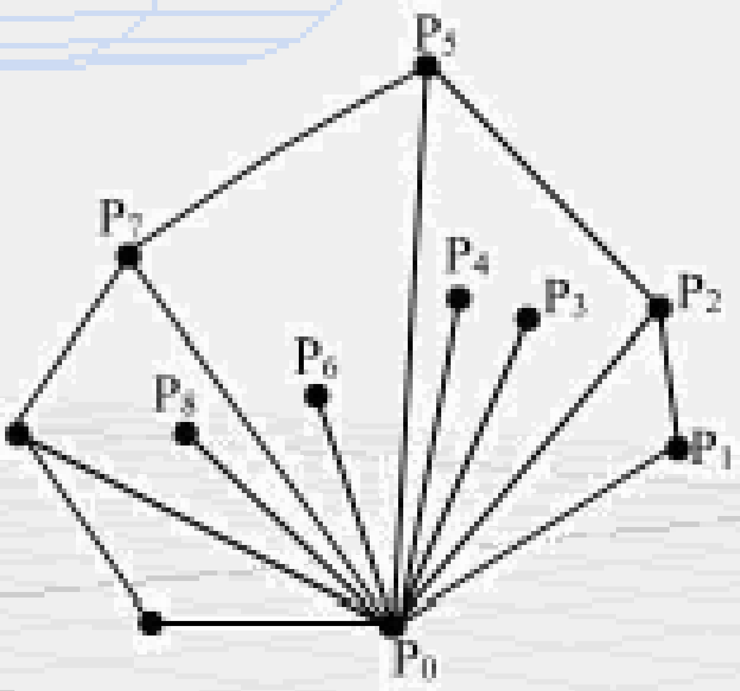




Objetos y Algoritmos geométricos

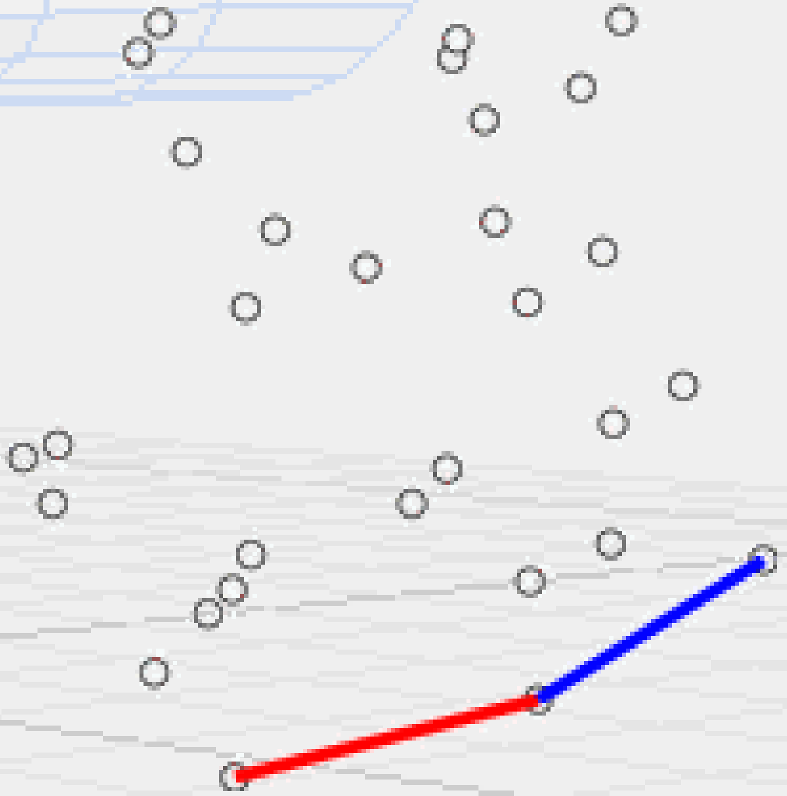
Descripción del algoritmo de Graham

- Elegimos el primer punto de la lista S (de puntos) como el punto de menor ordenada.
- Si hay duplicidad, se toma el extremo derecho.
- Se ordena angularmente los demás puntos de la lista S en el sentido antihorario, esto se toma según el rayo que parte de P_0 hacia el punto P_i
- De esta manera P_0 y P_1 pertenecen a la envolvente convexa, pues $P_0P_1P_2$ es un giro a la izquierda.



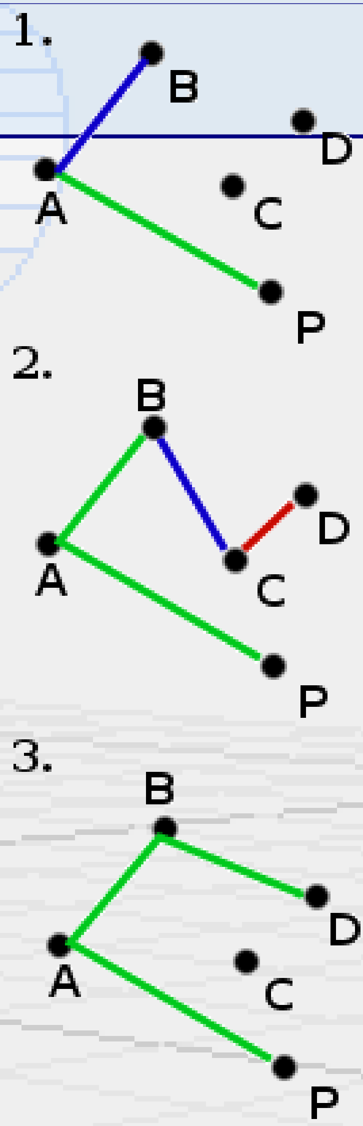
Objetos y Algoritmos geométricos

- Para cada punto se verifica si el movimiento desde los dos anteriores da un "giro a la derecha" o un "giro ala izquierda".
- Cuando se halla un “giro a la izquierda”, el algoritmo pasa a calcular el siguiente punto.
- Si es “giro a la derecha”, entonces el segundo punto de la terna no es parte de la envolvente convexa y se extrae de la lista S.



Objetos y Algoritmos geométricos

El algoritmo de Graham



1. Sea P_0 el punto más bajo de la lista S y más a la derecha.
2. Ordenar los demás puntos de acuerdo al ángulo tomando a P_0 como el origen. Si hubiese duplicidad, se elimina los puntos más próximos a P_0 . aquí se puede usar el algoritmo de ordenamiento Quick Sort, el cual es de complejidad $O(\, n \log(n)\,)$
3. Se toma P_0 , P_1 y P_2 pertenecientes a la envolvente convexa, consideramos $i = 2$
4. Mientras que $i < n$, hacemos
   - Si $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, es un giro a la derecha, entonces extraemos el punto P_i de la lista
   - Hacemos $i = i + 1$

Johnny R. Avendaño Q.

Objetos y Algoritmos geométricos

Bibliografía

- Gráficas por computadora. Hearn D., Baker M.P. Prentice - Hall Hispanoamericana. 1998
- https://edu.ieee.org/es-us/actividades-eventos/etsi-actividades-eventos/conoce-a-los-investigadores-de-la-etsi/aplicacion-de-algoritmos-geometricos-al-diseno-de-tareas-con-drones-y-al-analisis-de-musica-flamenca/
- https://es.wikipedia.org/wiki/Metodo_de_Graham
- https://es.wikipedia.org/wiki/Quickhull
- Francisco Rivero Mendoza. Geometría Computacional. Universidad de los Andes Venezuela