

A wireframe sphere and a wireframe cylinder are rendered in a 3D space. The sphere is on the left, and the cylinder is on the right. They are both composed of a grid of lines. The background is a light blue gradient with a faint grid pattern.

Computación Visual

Transformaciones geométricas 3D

Johnny R. Avendaño Q.

e-mail: javendanoq@unmsm.edu.pe

Departamento Académico de Ciencias de la Computación

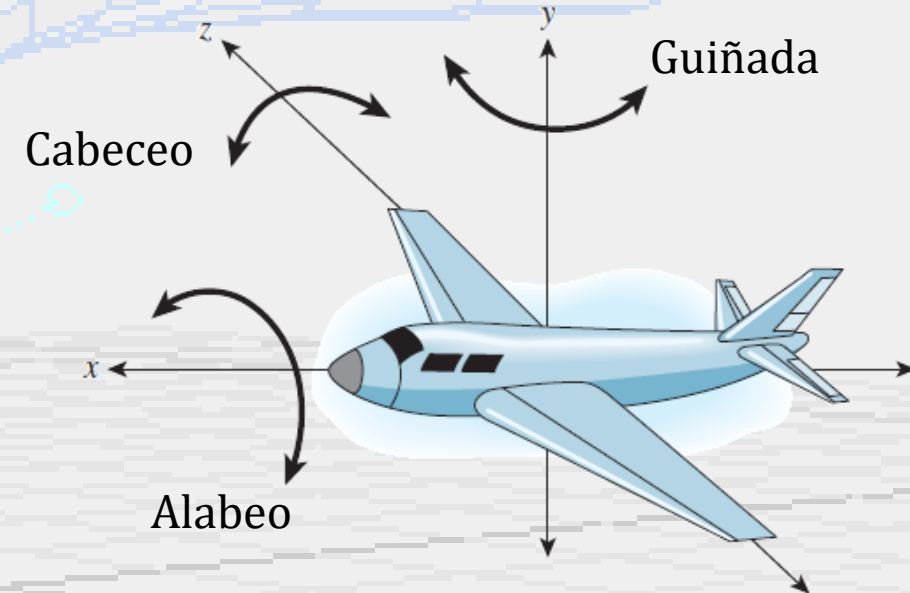
Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Transformaciones geométricas 3D

Contenido

1. Transformaciones geométricas.
2. Ejemplos.
3. Bibliografía



Transformaciones geométricas 3D

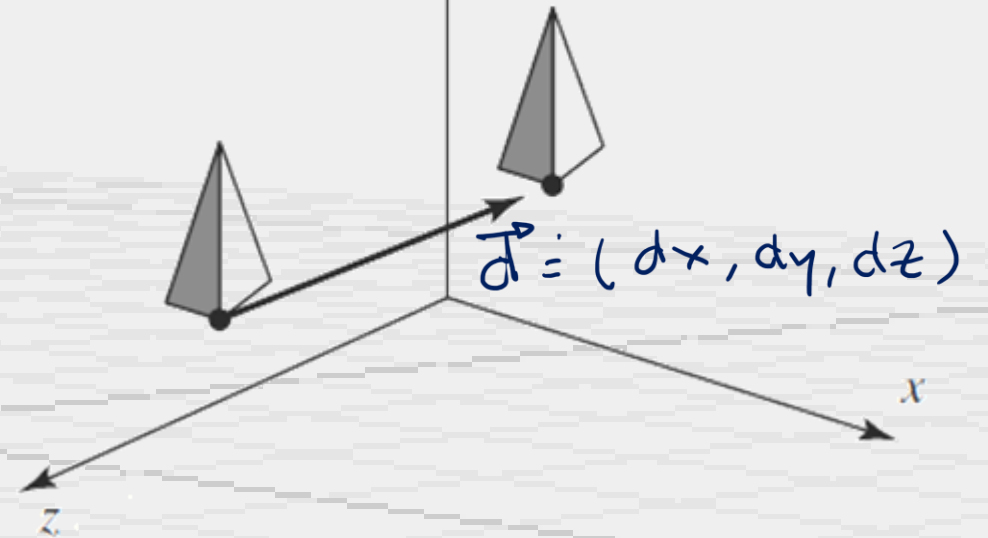
Traslación

$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \\ z' = z + dz \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformaciones geométricas 3D

Escalamiento

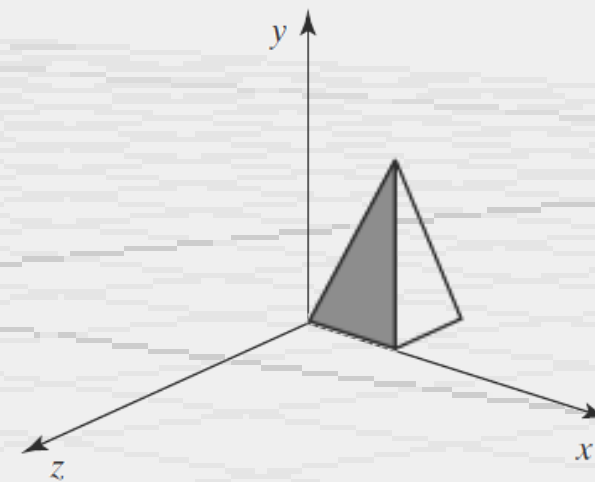
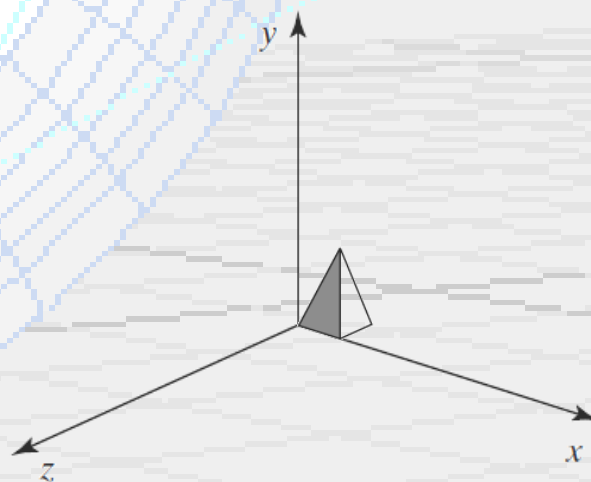
$$\begin{cases} x' = x S_x \\ y' = y S_y \\ z' = z S_z \\ 1 = 1 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$S(S_x, S_y, S_z) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

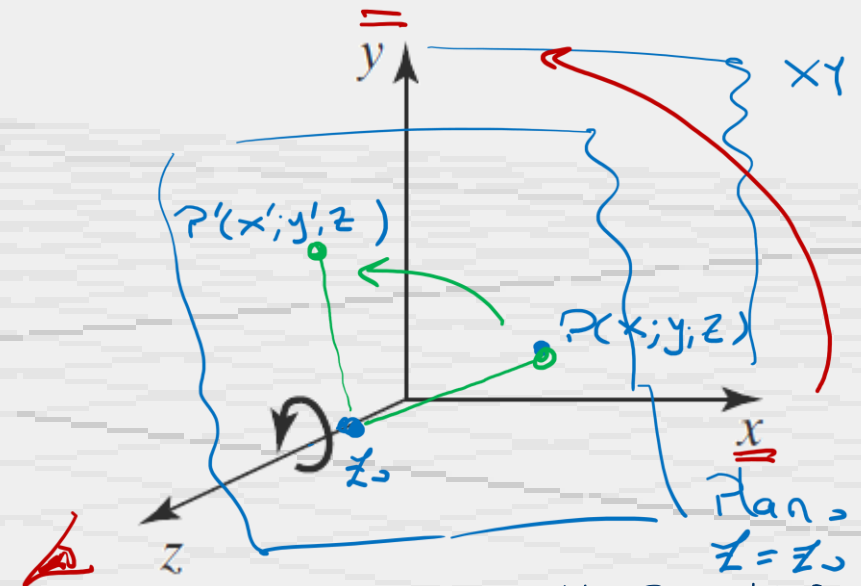


Transformaciones geométricas 3D

Rotación alrededor del eje Z

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

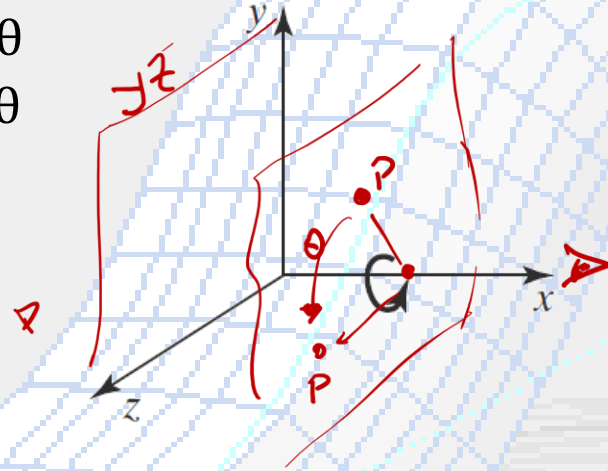
$$\Rightarrow R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformaciones geométricas 3D

Rotación alrededor del eje X

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \theta - z \sin \theta \\ z' = y \sin \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

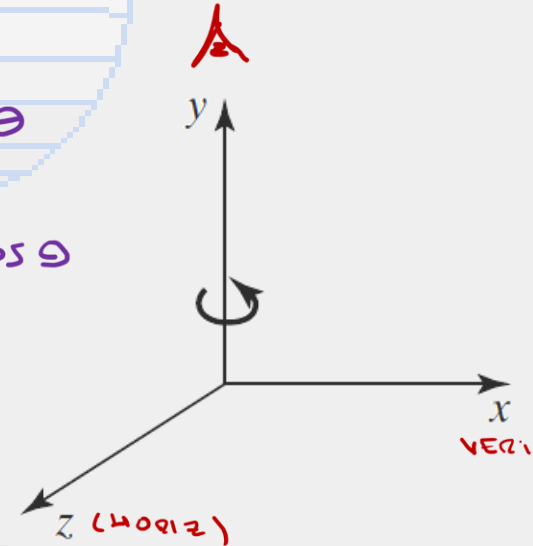


$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación alrededor del eje Y

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + z \sin \theta \\ y' = y \\ z' = -x \sin \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = z \cos \theta - x \sin \theta \\ x' = z \sin \theta + x \cos \theta \end{cases}$$

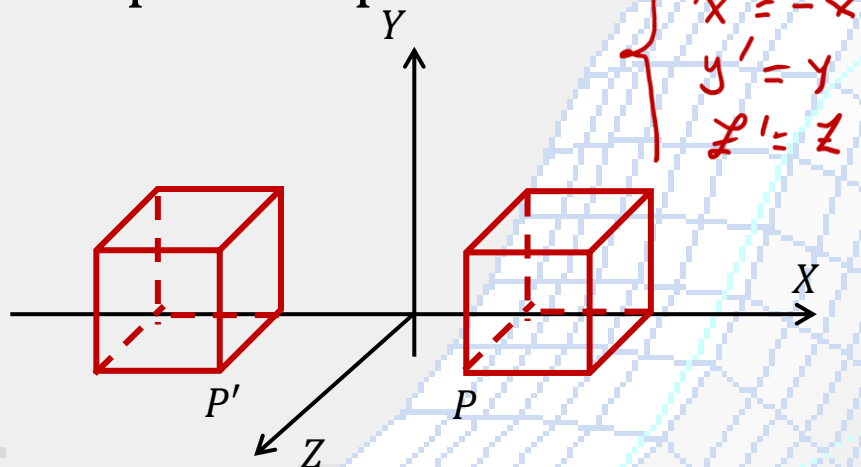


$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas 3D

Reflexión geométrica

a) Con respecto al plano YZ



$$Refl_{YZ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Con respecto al plano XY

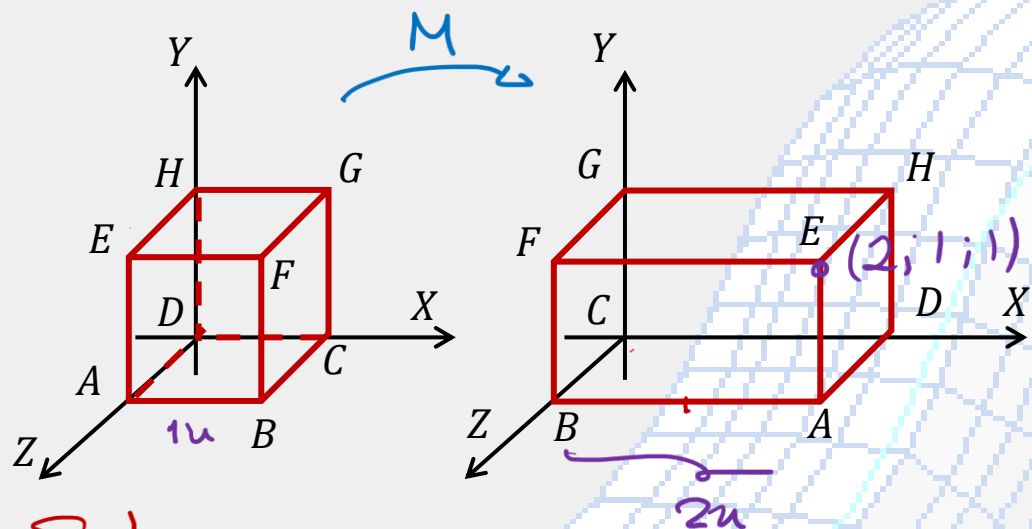
$$Refl_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Con respecto al plano XZ

$$Refl_{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas 3D

Ejemplo. Obtenga la matriz de transformación geométrica en el gráfico adjunto, considere $F(1; 1; 1)$ y $E(2; 1; 1)$.



So 1

I) Secuencias de transformaciones

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) Reflyz | } $S(-2, 1, 1)$ | 1) Reflyz |
| 2) $S(2, 1, 1)$ | | 2) $T(1, 0, 0)$ |
| 3) $T(2, 0, 0)$ | | 3) $S(2, 1, 1)$ |

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) S(-2, 1, 1) \\ 2) T(2, 0, 0) \end{cases}$$

II) matriz de transformación Total

$$M = T(2, 0, 0) S(-2, 1, 1) \leftarrow \text{ESCRIBIR}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

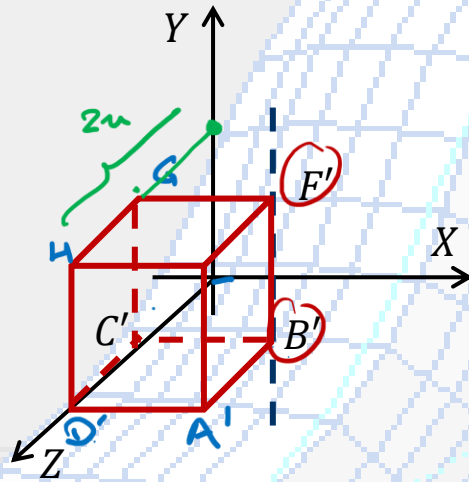
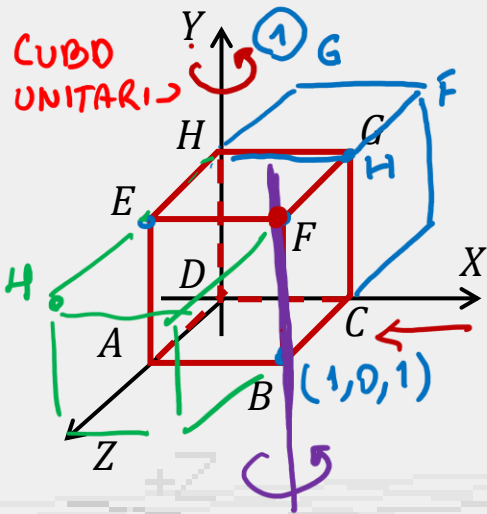
$$E' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones geométricas 3D

Ejemplo. Obtenga la matriz de rotación total alrededor del eje que pasa por la arista BF

para un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.



Sol:
I) Secuencia de Transformaciones

1º $R_y(\frac{\pi}{2})$

2º $T(0, 0, 2)$

Obs Hacerlo
1º $T(-1, 0, -1)$
2º $R_y(\frac{\pi}{2})$
3º $T(1, 0, 1)$

II) Matriz de Transformación total

$$M = T(0, 0, 2) R_y(\frac{\pi}{2})$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark \quad E' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Transformaciones geométricas 3D

Bibliografía

- Computer Graphics with OpenGL. Fourth Edition. Hearn, Baker & Carithers. Pearson Education Limited. 2014
- Computer Graphics: Principles and Practice. Foley J., Van Dame A., Feiner S., Hughes J., Phillips R. Addison – Wesley Publishing Company, Massachusetts. 1996
- Introduction to Computing with Geometry Notes. Shene C.K. Department of Computer Science. Michigan Technological University. 1997
- The Red Book: The OpenGL Programmer's guide.