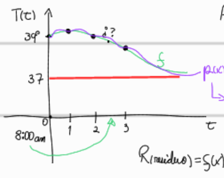
Interpolación polinomial de una función (parte 1)



Aproximación polinomial
"La curva que yo espero"
curva generatriz

↳ Aproximo curva f con el polinomio p(x) = "Interpolación"

$R_{(\text{residuo})} = f(x) - p(x)$

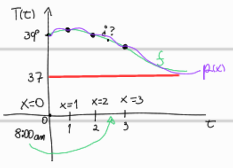
$$\int f(x)\,dx \cong \int p(x)\,dx$$

Polinomio de Lagrange

nodos = abcisas

$$\mathcal{L}([B\{L_i\}]) = P_3$$

El polinomio de Lagrange es la suma de las funciones base de Lagrange L_i



$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$L_2 \ldots$

$L_3 \ldots$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

Teorema: $p(x)$ es pol. Lagrange

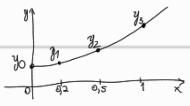
si $\begin{cases} P(x_i) = y_i, & i = 0, \ldots, n \\ \partial p(x) \leq n \end{cases}$

Ejm:

$f(x) = e^x$, $f(0{,}1) = ?$

con nodos $\{0; 0{,}2; 0{,}5; 1\}$

e^x



Tabla

x_i	y_i
0	e^0
0,2	$e^{0,2}$
0,5	$e^{0,5}$
1	e^1

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{3} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$ función base de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-0{,}2)(x-0{,}5)(x-1)}{(0-0{,}2)(0-0{,}5)(0-1)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-0{,}5)(x-1)}{(0{,}2-0)(0{,}2-0{,}5)(0{,}2-1)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0{,}2)(x-1)}{(0{,}5-0)(0{,}5-0{,}2)(0{,}5-1)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-0{,}2)(x-0{,}5)}{(1-0)(1-0{,}2)(1-0{,}5)}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

$L_0(0{,}1) = 0{,}36$
$L_1(0{,}1) = 0{,}75$
$L_2(0{,}1) = -0{,}12$
$L_3(0{,}1) = 0{,}01$

$$P(0{,}1) = L_0(0{,}1)y_0 + L_1(0{,}1)y_1 + L_2(0{,}1)y_2 + L_3(0{,}1)y_3$$

$P(0{,}1) = 1{,}105389$
$f(0{,}1) = 1{,}105171$
] ‖ aproxima bien

Error de interpolación

Se puede estimar el máximo error
Pero no donde

Sea $f \in C^{n+1}[a;b]$

cota superior

Ejm: ¿Error máximo? → $|R(x)| = |f(x) - p(x)| \leq M$

$f(x) = e^x$, $x \in [0;1]$

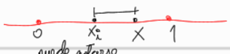
$n = 3$

error ajuste $= \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$

$\rightarrow f^{(4)}(x) = e^x$

$$\Rightarrow |R(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (x-x_i) \right| = \left| \frac{\overbrace{e^{\xi_x}}^{\leq e^1}}{4!} \right| \prod_{i=0}^{3} |x-x_i|$$

$$\Rightarrow |R(x)| \leq \frac{e}{4!} \prod_{i=0}^{3} \underbrace{|x-x_i|}_{\leq ¿?}$$



puede notarse

$|x-x_i| \leq 1$; $\forall i$

a lo mucho la diferencia es 1 si $x = 1$ y $x_i = x_0$

Por tanto

$$\Rightarrow |R(x)| \leq \frac{e}{24} \prod_{i=0}^{3} (1) = \frac{e}{24} = \overset{M}{0{,}11326}$$

Rpta:
El error máximo en la interpolación es 0,11326

Métodos Numéricos

Interpolación polinomial de una función (parte 1)

Mg. Johnny R. Avendaño Q.
e-mail: **javendanoq@unmsm.edu.pe**
Departamento Académico de Ciencias de la Computación
Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática
Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Interpolación polinomial de una función

Contenido

1. Motivación.
2. Interpolación y extrapolación.
3. Polinomio interpolante de Lagrange
4. Error en la interpolación.
5. Tabla de diferencias divididas
6. Polinomio interpolante basado en diferencias divididas.

Interpolación polinomial de una función

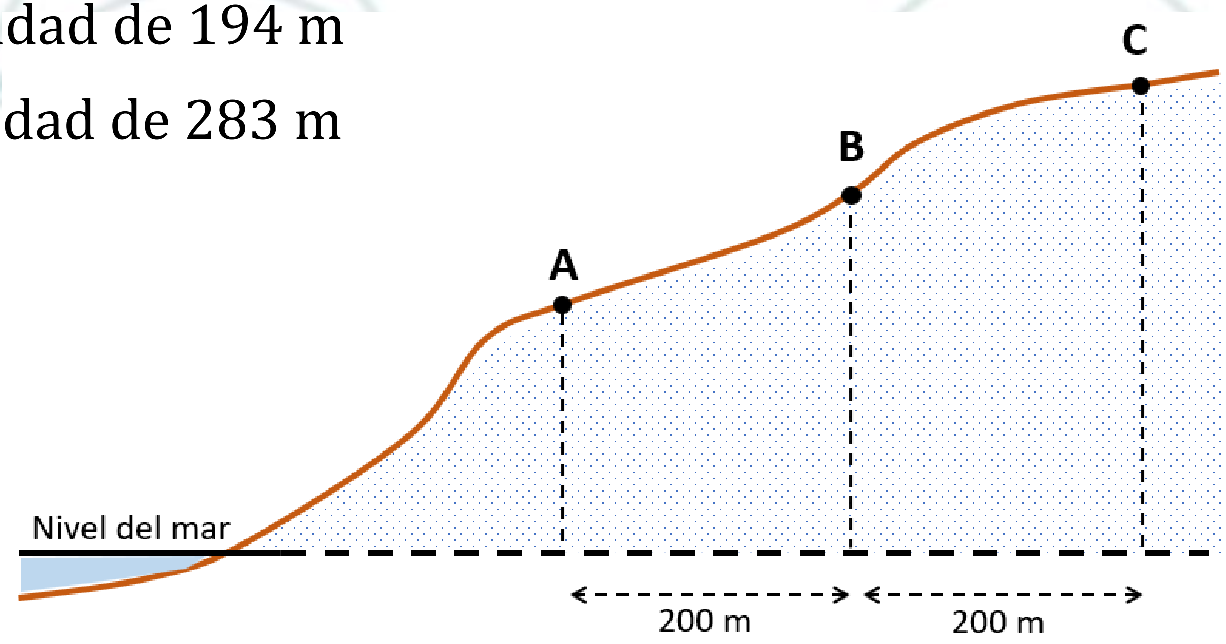
Motivación

En una determinada región se tienen 3 puntos de extracción de agua, ver la figura anexa que muestra un corte transversal sobre el relieve.

1. En el punto A (525 msnm), a una profundidad de 122 m
2. En el punto B (580 msnm), a una profundidad de 194 m
3. En el punto C (690 msnm), a una profundidad de 283 m

Estime cuanto debe perforarse en un punto P (entre B y C) a 580 msnm, con el fin de extraer agua.

Nota: Se sabe que las proyecciones de los puntos B, P y C sobre el nivel del mar son equidistantes.



Interpolación polinomial de una función

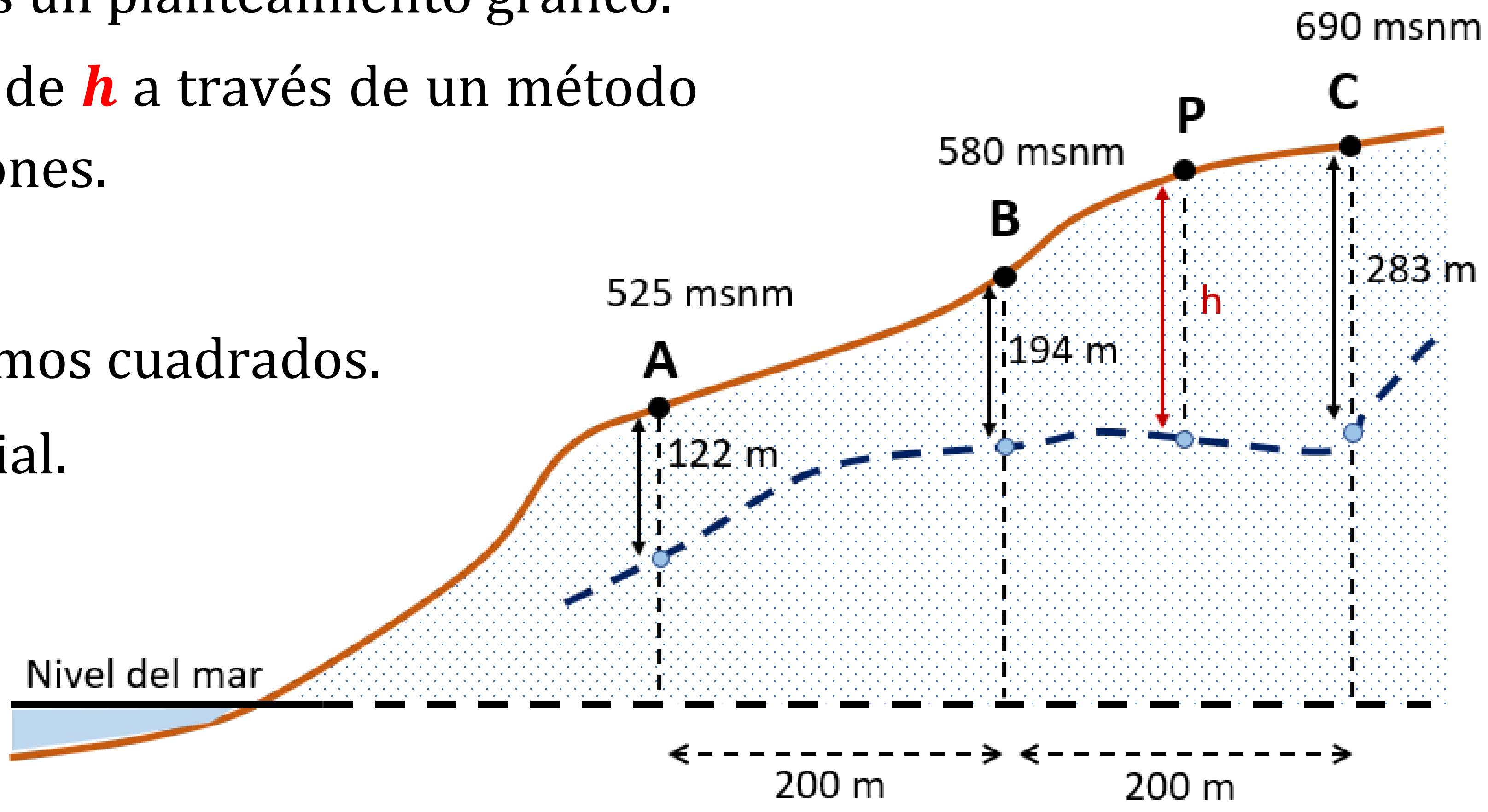
.

Del enunciado, efectuamos un planteamiento gráfico.

Debemos estimar el valor de ***h*** a través de un método de aproximación de funciones.

Estrategias:

1. Ajuste de curvas: mínimos cuadrados.
2. Interpolación polinomial.



Johnny R. Avendaño Q.

Interpolación polinomial de una función

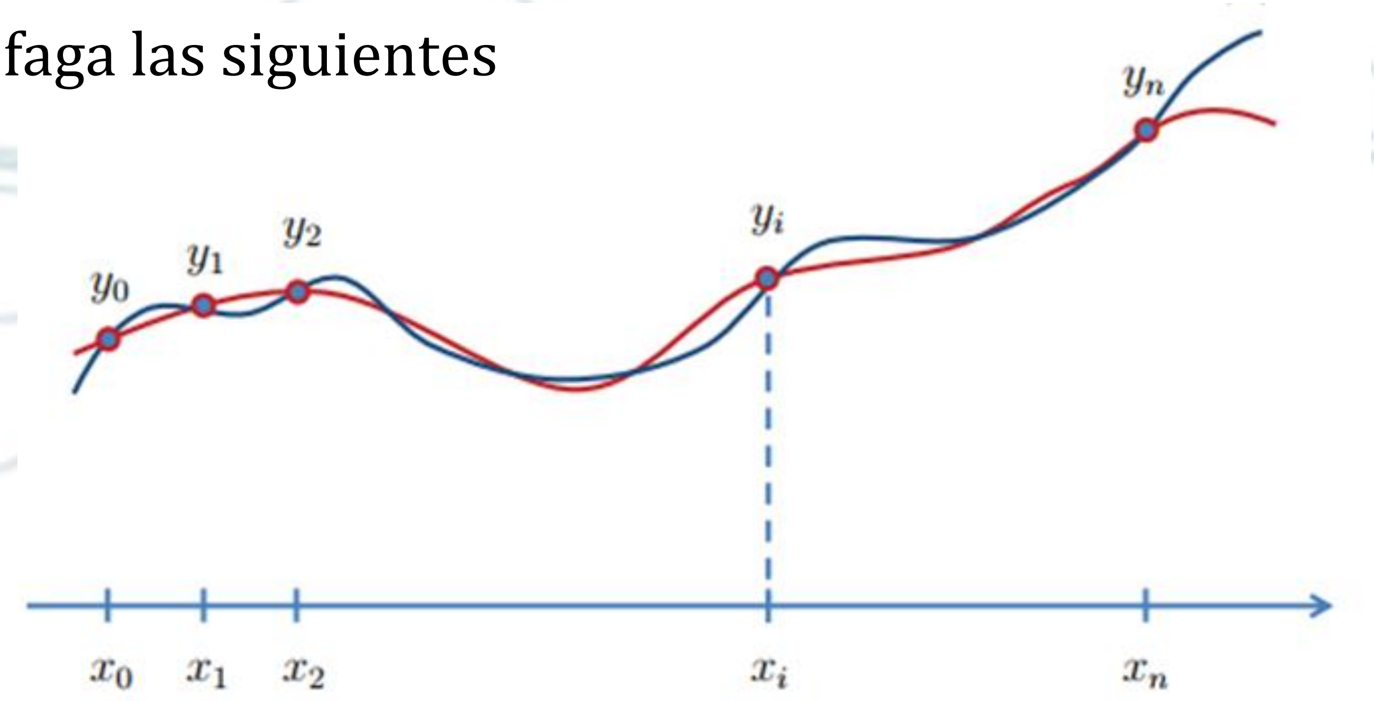
Polinomio de Lagrange

Datos

$$(x_i, y_i)\ ;\ i = 0, 1, \cdots, n \text{ tal que } y_i = f(x_i)$$

Buscamos un polinomio que satisfaga las siguientes condiciones

$$\begin{cases} p(x_i) = y_i = f(x_i) \\ \partial p(x) \leq n \end{cases}$$



Interpolación polinomial de una función

Polinomio de Lagrange

Definición. Para las $n+1$ coordenadas y los nodos x_i todos diferentes y ordenados, entonces definimos el polinomio de Lagrange (asociado a ellos) como

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) y_i$$

donde

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Son denominadas de funciones ordinales de Lagrange.

Interpolación polinomial de una función

Teorema. El polinomio de Lagrange es un polinomio interpolante.

Interpolación polinomial de una función

Ejemplo. Aproxime el valor de $f(0{,}1)$ si $f(x) = e^x$, empleando los nodos $\{0; 0{,}2; 0{,}5; 1\}$

$f(x) = e^x$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	1
$x_1 = 0{,}2$	1,2214
$x_2 = 0{,}5$	1,6487
$x_3 = 1$	2,7182

Interpolación polinomial de una función

Error en la interpolación.

Teorema. Sea $f \in C^{n+1}[a;b]$ y $\{x_i\} \subset [a;b]$ nodos cualesquiera y ordenados, entonces para cada $x \in \langle a;b \rangle$ existe $\xi_x \in \langle a;b \rangle$ tal que

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Interpolación polinomial de una función

Ejemplo. ¿Cual es el máximo error posible? si aproximamos el valor de $f(0{,}1)$, donde $f(x) = e^{x}$, y empleamos los nodos $\{0; 0{,}2; 0{,}5; 1\}$

Interpolación polinomial de una función

Teorema. Sean $(x_i\,;y_i)$, $n+1$ coordenadas tal que $y_i = f(x_i)$ para todo $i = 0,1,\cdots,n$; entonces el polinomio interpolante es único.

Interpolación polinomial de una función

Tabla de diferencias divididas

Esta se define recursivamente como

Orden 0 $$f[x_i] = f(x_i)$$

Orden 1 $$f[x_i; x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Orden 2 $$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}; x_{i+2}] - f[x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Orden k $$f[x_i; \cdots ; x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}; \cdots ; x_{i+k}] - f[x_i; \cdots ; x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Johnny R. Avendaño Q.

Interpolación polinomial de una función

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Interpolación polinomial de una función

Ejemplo. Complete la respectiva tabla de diferencias divididas

i	x_i	$f[x_i]$				
0	1	1				
1	2	1,08				
2	3	2,08				
3	4	1,91				
4	5	0,12				

Interpolación polinomial de una función

Polinomio interpolante basado en diferencias divididas

Definimos el polinomio como

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots$$
$$\cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

donde

$$a_i = f[x_0; x_1; \cdots; x_i] \; ; \; \forall i = 0, 1, \cdots, n$$

Dicho polinomio podemos escribirlo también

$$p(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0; x_1; \cdots; x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Interpolación polinomial de una función

Ejemplo. A partir de las coordenadas indicadas, aproxime el valor de $f(0.5)$

i	x_i	$f[x_i]$				
0	1	1	0,08	0,46	0,3483	-0,105825
1	2	1,08	1	-0,585	-0,075	
2	3	2,08	-0,17	-0,81		
3	4	1,91	-1,79			
4	5	0,12				

$$p(x) = 1 + 0,08(x-1) + 0,46(x-1)(x-2) + 0,3483(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$-0,105825(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$p(0,5) =$$

Interpolación polinomial de una función

Bibliografía

1. Métodos Numéricos: Burden R. L. & Douglas J. F. Thompson Editores. 2013
2. Métodos Numéricos con Matlab: Mathews J. H. & Fink K. D. Prentice Hall Iberia S.R.L. 1999
3. Métodos Numéricos para Ingenieros. Chapra S. C. & Canales R. P. 1999