Diferencias finitas o progresivas

Asumimos nodos x_i son equidistantes distancia h

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad \forall i \geq 0$

Ejemplo: $f(x) = x^3 - x + 2$, $h = 1$

i) $\Delta^2 f(0) = \Delta^1 f(1) - \Delta^1 f(0)$

$= f(2) - f(1) - [f(1) - f(0)]$

$\boxed{\Delta^2 f(0) = 6}$

ii) $\Delta^3 f(1) = \Delta^2 f(2) - \Delta^2 f(1)$

$= [\Delta^1 f(3) - \Delta^1 f(2)] - [\Delta^1 f(2) - \Delta^1 f(1)]$

$= [f(4) - f(3) - f(3) + f(2)] - [f(3) - f(2) - f(2) + f(1)]$

$\boxed{\Delta^3 f(1) = 6}$

Pero es más práctico en tablas

Ejm		$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0 = 0$	$y_0 = 2$	$\Delta y_0 = 0$	$\boxed{\Delta^2 y_0 = 6}$	$\Delta^3 y_0 = 6$	$\Delta^4 y_0 = 0$
$x_1 = 1$	$y_1 = 2$	$\Delta y_1 = 6$	$\Delta^2 y_1 = 12$	$\boxed{\Delta^3 y_1 = 6}$	
$x_2 = 2$	$y_2 = 8$	$\Delta y_2 = 18$	$\Delta^2 y_2 = 18$		
$x_3 = 3$	$y_3 = 26$	$\Delta y_3 = 36$			
$x_4 = 4$	$y_4 = 62$				

Polinomios factoriales $K^{(n)} = K(K-1)(K-2)\ldots(K-[n-1])$

$K^{(2)} = K(K-1) = K^2 - K \neq K^2$; no confundir $K^{(n)} \neq K^n$

- $\Delta K^{(n)} = n K^{(n-1)}$; $h = 1$
- $\Delta^n K^{(n)} = n!$

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ hallar la fórmula

$n = 3 \rightarrow \Delta K^{(3)} = 3K^{(2)}$

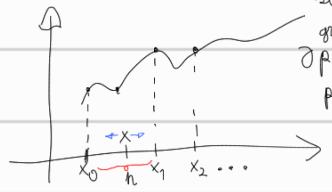
$\sum_{K=1}^{n} \Delta K^{(3)} = 3 \sum_{K=1}^{n} K^{(2)}$ $K(K-1)$

$\sum_{K=1}^{n} (K+1)^{(3)} - K^{(3)} = 3 \sum_{K=1}^{n} K^2 - K$ ... aplicando $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

$(n+1)^{(3)} - 1^{(3)} = 3\Big[\underbrace{\sum_{K=1}^{n} K^2}_{S} - \underbrace{\sum_{K=1}^{n} K}_{\text{conocido}}\Big]$ ... por telescopica

$(n+1)(n)(n-1) - 0 = 3S - 3\,\frac{(n)(n+1)}{2}$

$\boxed{S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ fórmula hallada



si $p(x)$ es interpolante:

grado $\partial p(x) \leq n$

$p(x_i) = y_i = f(x_i)$

$f^{(0)} = 1$

$(-)\begin{cases} x = x_0 + s h \\ x_i = x_0 + i h \end{cases} \rightarrow x - x_i = (s - i) h$

De donde sale la fórmula

$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) +$ Por polinomio de diferencias divididas
$a_2(x - x_0)(x - x_1)$
$\vdots$
$a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$

$p(x) = a_0 + a_1 s h +$ Reemplazando $x - x_i$
$a_2 s h (s-1) h +$
$a_3 s h (s-1) h (s-2) h$
$\vdots$
$a_n s^{(n)} h^n$

$\rightarrow x = x_0 \rightarrow s = 0$

$y_0 = p(x_0) = a_0 \rightarrow a_0 = y_0$

$x = x_1 \rightarrow s = 1$

$y_1 = p(x_1) = y_0 + a_1 h$

$\rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$

$p(x) = a_0 + a_1 h s^{(1)} + a_2 h^2 s^{(2)} + \ldots a_n h^n s^{(n)} \rightsquigarrow s(x)$

$\Delta p(x) = 0 + a_1 h \Delta s^{(1)} + a_2 h^2 \Delta s^{(2)} + \ldots a_n h^n \Delta s^{(n)}$

$\Delta p(x) = a_1 h + 2 a_2 h^2 s^{(1)} + 3 a_3 h^3 s^{(2)} + \ldots + n a_n h^n s^{(n-1)}$

si $x = x_0 \rightarrow s = 0$

$\Delta p(x_0) = a_1 h$

$\Delta y_0 = a_1 h$

$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$

$\Delta^2 p(x) = 2 a_2 h^2 \Delta s^{(1)} + 3 a_3 h^3 \Delta s^{(2)} + \ldots + n a_n h^n \Delta s^{(n-1)}$

$\Delta^2 p(x) = 2 a_2 h^2 + 2(3) a_3 h^3 s^{(1)} + \ldots (n-1) n a_n h^n s^{(n-2)}$

$x = x_0 \rightarrow s = 0$

$\Delta^2 p(x_0) = 2 a_2 h^2$

$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2 h^2}$

$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\, h^3}$

$\vdots$

$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}$

entonces

$p(x) = a_0 + a_1 h s^{(1)} + a_2 h^2 s^{(2)} + \ldots + a_n h^n s^{(n)}$

$$\therefore p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} s^{(1)} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} s^{(2)} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} s^{(n)}$$

Polinomio de diferencias finitas

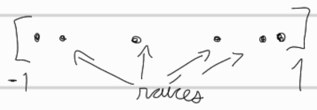
Observación: este polinomio es dependiente de nodos equidistantes

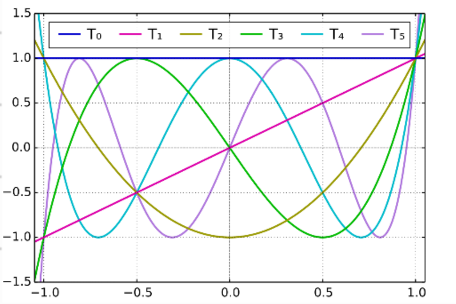
Polinomio de Chebyshev ($T_n(x)$)

→ Las raíces de los polinomios de Chebyshev no son equidistantes por lo tanto, se usa Lagrange o Dif. Divididas

→ Ventaja: El uso de sus raíces como nodos de nuestro polinomio nos proporciona el menor error posible

→ Propiedad: Todas las raíces de los Pol. Chebyshev se encuentran $[-1; 1]$





$T_0 = 1$

$T_1 = x$ El polinomio de Chebyshev es recursivo

$\vdots$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \geq 1$

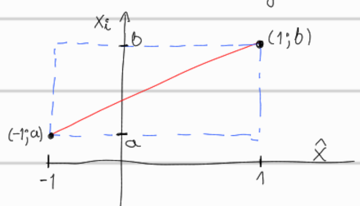
Las raíces $\hat{x}_i$ de Chebyshev

$\hat{x}_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right)$; $i = 0, 1, \ldots n-1$

$\partial T_n(x) = n$

Traslación de las raíces a un intervalo cualquiera de interpolación

→ Como las raíces de Cheb $\in [-1; 1]$ tu polinomio interpolante lo usarías en el intervalo $[-1; 1]$.
Sin embargo, si queremos usar las raíces como nodos en un intervalo $[a; b]$ cualquiera para interpolación sería usando una regla de correspondencia



Sean
x_i: nodos de interpolación
$\hat{x}_i$: raíces de Chebyshev
$[a; b]$ intervalos de interpolación

$x_i = \frac{(b-a)}{2}\hat{x}_i + \frac{(a+b)}{2}$

$i = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$

Ejm $n=3$

$$s(x) \cong p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 s^{(1)}}{1!} + \frac{\Delta^2 y_0 s^{(2)}}{2!} + \frac{\Delta^3 y_0 s^3}{3!}$$

$$X = \underset{0}{x_0} + s\underset{1}{h} \Rightarrow s = X \quad s \in \mathbb{R}$$

Piden $s(0{,}2) \cong p(\underset{X}{0{,}2}) \Rightarrow s = 0{,}2$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	2	-0,6321	0,3995	-0,2325
1	1,3679	-0,2326	0,147	
2	1,1353	-0,0856		
3	1,0497			

$$s^{(1)}\Big|_{s=0{,}2} = 0{,}2$$

$$s^{(2)} = (s-1)s^{(1)}\Big|_{0{,}2} = (0{,}2-1)(0{,}2) = -0{,}16$$

$$s^{(3)} = (s-2)s^{(2)}\Big|_{0{,}2} = (0{,}2-2)(-0{,}16) = 0{,}288$$

recursividad

$$p(0{,}2) = 2 - \frac{0{,}6321}{1}\cdot 0{,}2 + \frac{0{,}3995}{2}\cdot(-0{,}16) - \frac{0{,}2525}{3!}\cdot 0{,}288$$

$$p(0{,}2) = 1{,}8295 \cong s(0{,}2)$$

$n=5$

j 1: n

i 1:

$j=1$	$i \Rightarrow 5 = n-j+1$ n
$j=2$	$i \Rightarrow 4 = n-j+1$ $n-1$
$j=3$	$i \Rightarrow 3$ $n-2$
$j=4$	$i \Rightarrow 2$ $n-3$
$j=5$	$i \Rightarrow 1$ $n-4$

$$m(i, j+1) = m(i+1, j) - m(i, j)$$

Operación Broadcasting en Octave

$[1\ 2\ 3\ 4] - 2 = [1\,2\,3\,4] - [2\,2\,2\,2] = [-1\ 0\ 1\ 2]$

	$y_0 = 4$	$y_1 = 5$	$y = 5{,}61$	$y_2 = 6$
$x_0 = 6$	8,32456	9,31255		9,82451
$x_1 = 7$	11,32324	11,97145		12,35681
$x = 7{,}15$	11,762434	12,40199	12,64710	12,74623
$x_2 = 8$	14,56849	14,99789		15,00012

El fenómeno Runge

Polinomios de Chebychev

solo sirve si conoces

la f. generatriz

Lab:

```
>> y = [1,3,5,1,2]
```

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1	2	0	-6	17
3	2	-6	11	
5	-4	5		
1	1			
2				

```
>> diff(y; orden)
```

```
function y = pNewtonDF(xn, yn, x)
```

$$p(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} s^{(i)}$$ pd.fact

```
%
y = yn(1);
n = length(xn)-1;
h = xn(2)-xn(1);
s = x-x(1)/h;

for i=1:n,
    df = diff(yn; i)

    y = y+df(1)*pfact(s,i)/factorial(i)
end
```

```
function y = pfact(s,n)

%
y =1
for i=1:n,
    y = y*(s-i+1)
end
% i=1,2,3

% y=1.s.(s-1)(s-2)
```

$s^{(3)} = s(s-1)(s-2)$

0 ← pfact(0,3)

0 pfact(1,3)

0 pfact(2,3)

6 pfact(3,3)

$$\Delta^2 f(0) = \Delta f(1) - \Delta f(0)$$

$$[f(2) - f(1)] - [f(1) - f(0)]$$