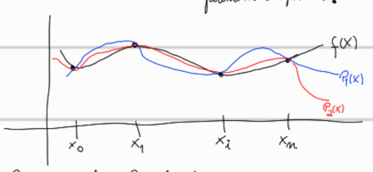
Interpolante

- Pasa por las mismas coordenadas que la función generatriz

¿Puede haber más de un polinomio interpolante? no



$P_1(x_i) = y_i\,,\ i = 0,1,\dots n$

$P_2(x_i) = y_i\,,\ \forall i$

¿$f(x_i) = P_1(x_i) = P_2(x_i)$?

Existen múltiples P. Interpolantes?

No, solo hay distintas formas de expresar el P. Interpolante de n nodos

$p(x) = x^2 + x - 1 \qquad q(x) = x(x+1) - 1 = x^2 + x - 1$

son el mismo polinomio

Teorema: El P. Interpolante es único

demostración

Absurdo: Supon $\exists\, P_1(x) \neq P_2(x)$ / ambos interpolantes

$\begin{cases} P_1(x_i) = y_i\,;\ \forall i = 0,1,\dots,n \\ \partial P_1(x) \le n \end{cases} \qquad \begin{cases} P_2(x_i) = y_i \\ \partial P_2(x) \le n \end{cases}$

grado de un polinomio

Tome $Q(x) = P_1(x) - P_2(x) \neq 0$

- $\partial Q(x) \le n$
- $Q(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i)\,;\ i = 0,1,2,\dots n$

$Q(x_i) = y_i - y_i$

$Q(x_i) = 0\,,\ i = 0,1,2,\dots,n$

↳ Q posee $n+1$ raíces

Pero como $\partial Q(x) \le n \Rightarrow$ ¡Absurdo!

↳ a lo más puede tener n raíces

$\therefore P_1(x) = P_2(x) \quad \forall x$

El interpolante es único

Tabla de diferencias divididas

Es recursivo, nos permite expandir el polinomio

Examen: Polinomio expandido

↳ te dan las coordenadas o te dan los datos

Tabla de Dif Dividida

Orden cero: $f[x_i] = y_i$

Orden uno: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

Orden dos:

$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}; x_{i+2}] - f[x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

x_i	Cero y_i	Uno	Dos
x_0	$y_0 = f[x_0]$	$f[x_0; x_1]$	$f[x_0; x_1; x_2]$
x_1	$y_1 = f[x_1]$	$f[x_1; x_2]$	$f[x_1; x_2; x_3]$
x_2	$y_2 = f[x_2]$	$f[x_2; x_3]$	
$\vdots$			

Ejemplo

$f(x) = sen(x)\,;\ i = 0,1,2,3$

x_i	y_i (cero)	uno	dos	tres
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$f[x_0; x_1] = 0{,}9588$	$f[x_0; x_1; x_2] = -0{,}178$	$f[x_0; x_1; x_2; x_3] = -0{,}1414$
$x_1 = 0{,}5$	$y_1 = 0{,}4794$	$f[x_1; x_2] = 0{,}852$	$f[x_1; x_2; x_3] = -0{,}3194$	
$x_2 = 0{,}6$	$y_2 = 0{,}5646$	$f[x_2; x_3] = 0{,}6923$		
$x_3 = 1$	$y_3 = 0{,}8415$			

Polinomio interpolante de Newton (Dif. Divididas)

$f(x) \approx p(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$
$\quad + a_2(x - x_0)(x - x_1)$
$\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$
$\quad \vdots$
$\quad a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$

$y_0 = p(x_0) = a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = y_0}$

$y_1 = p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$

↳ $y_1 - y_0 = a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0; x_1]$

y así con todos (aplicación de dif divididas)

En general

$a_i = f[x_0; \dots; x_i]\,;\ \forall i = 0,1,\dots,n$

$f(x) \cong p(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0; x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$

$X = 5$

$j = 5$
$\quad i = 4$
$\quad prod(5) = prod(5) * (X - X_4)$
$\quad prod(5) = (X - X_4)$
$\quad i = 3$
$\quad prod(5) = (X - X_4)(X - X_3)$
$\quad i = 2$
$\quad prod(5) = (X - X_4)(X - X_3)(X - X_2)$
$\quad i = 1$
$\quad prod(5) = (X - X_4)(X - X_3)(X - X_2)(X - X_1)$

$j = 4$
$\quad i = 3$
$\quad prod(4) = 1 * (X - X_3)$

Ejemplo:

2) En el ejemplo anterior aproxime $f(0{,}55)$

I) hallar la tabla de D.D (arriba)

II) aproxima $f(0{,}55) \cong p(\overbrace{0{,}55}^{x})$

$p(x) = y_0 + \overbrace{f[x_0, x_1]}^{a_1}(x - x_0)$
$\quad + \overbrace{f[x_0, x_1, x_2]}^{a_2}(x - x_0)(x - x_1)$
$\quad + \overbrace{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}^{a_3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

Si te percatas: no toma en cuenta el último Nodo!

$p(x) = 0 + 0{,}9588(x - 0)$
$\quad - 0{,}178(x - 0)(x - 0{,}5)$
$\quad - 0{,}1414(x - 0)(x - 0{,}5)(x - 0{,}6)$

$\Rightarrow p(0{,}55) = 0{,}522639\dots$

$f(0{,}55) = 0{,}522687\dots$

Resumen: Newton es una forma de escribir Lagrange

```
function coeficientes = diferencias_divididas(xn, yn)
  % Verificar que los vectores xn y yn tengan la misma longitud
  if length(xn) ~= length(yn)
    error('Los vectores xn e yn deben tener la misma longitud.');
  end

  n = length(xn);
  coeficientes = zeros(1, n);  % Inicializar los coeficientes

  % Asignar los valores iniciales de los coeficientes a yn
  coeficientes(1:n) = yn;

  % Calcular los coeficientes de las diferencias divididas
  for j = 2:n
    for i = n:-1:j
      coeficientes(i) = (coeficientes(i) - coeficientes(i-1)) / (xn(i) - xn(i-j+1));
    end
  end
end
```

7:42 PM

$X = [1; 2; 3; 4; 5]$ $\quad n = 5$

$y = [1; 1{,}08; 2{,}08; 1{,}91; 0{,}12]$

$j = 2$

$i = 5$

$coef = [1; 1{,}08; 2{,}08; 1{,}91; 0{,}12]$

$coef(5) = [coef(5) - coef(4)] / X(5) - X(4)$

$coef(5) = (0{,}12 - 1{,}91)/(5-4)$

$coef(5) = -1{,}79$

$i = 4$

$coef(4) = [coef(4) - coef(3)] / X(4) - X(3)$

$coef(4) = \frac{[1{,}91 - 2{,}08]}{4-3} = -0{,}17$

$i = 3$

$coef(3) = [coef(3) - coef(2)] / (X(3) - X(2))$

$coef(3) = [2{,}08 - 1{,}08]/(3-2)$

$coef(3) = 1$

$i = 2$

$coef(2) = [coef(2) - coef(1)] / X(2) - X(1)$

$coef(2) = [1{,}08 - 1]/2 - 1$

$coef(2) = 0{,}08$