TEC | Tecnológico de Costa Rica

Probabilidades
Teoría de conjuntos

Escuela de Matemática

Cátedra I semestre, 2023

1. Conceptos preliminares

En teoría de conjuntos, los términos *elemento, conjunto y pertenencia* no se definen y se consideran conceptos primitivos. Se asume que de una u otra manera el lector tiene una idea respecto a su significado. De hecho, cualquier intento por definir alguno de estos conceptos nos llevaría a definiciones circulares, es decir definiciones que reducen el concepto a un término que no es más que un sinónimo del mismo.

Se acepta la existencia de unos objetos llamados elementos, representados por letras minúsculas como $a, b, c \ldots$, mientras que las colecciones de estos elementos se conocen como conjuntos, y se representen por letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$. Además se acepta una relación entre elementos y conjuntos, un elemento puede o no pertenecer a un conjunto. Se usa la notación $x \in A$ para indicar que el elemento x pertenece al conjunto A, es decir x es uno de los elementos de A, y la notación $x \notin A$ para indicar que el elemento x no pertenece al conjunto A.

Si bien no existe un conjunto universal, usaremos dicho nombre para identificar al conjunto más grande con las características propuestas. Por ejemplo, si hablamos de conjuntos de números enteros, como los pares o los primos, entonces el conjunto universo es el conjunto de los enteros. Esta simple aclaración nos facilitará la discusión de algunos de las conceptos que abordaremos posteriormente. Finalmente, dicho conjunto universo se suele representar con la letra Ω.

En el caso que el universo esté bien definido, los conjuntos se pueden escribir de la siguiente manera: $A = \{x \in \Omega : P(x)\}$, donde indica que en el conjunto A pertenecen todos los elementos del universo que satisfacen la proposición P. Esta forma de escribir los conjuntos se conoce como notación por comprensión. Por ejemplo, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\ ,\ x = 2k\}$ es el conjunto de los números pares.

Otra forma de representar conjuntos se da cuando no es muy factible escribir alguna característica, como por ejemplo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Esta es la representación por extensión, donde se exponen los elementos de dicho conjunto.

Entre los conjuntos que son utilizados frecuentemente está el vacío, representado por $\varnothing$, o simplemente $\{\}$.

A continuación se expone un principio muy importante, el cual establece la igualdad de conjuntos.

Principio 1.

$$A = B \iff [\forall x\ ,\ (x \in A \iff x \in B)]\ .$$

1.1. Definiciones y propiedades importantes

Definición 1.

Decimos que un conjunto A es subconjunto del conjunto B si para cualquier x perteneciente a A:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B\,.$$

Denotamos esta condición por:

$$A \subset B \text{ o } A \subseteq B\,.$$

Este último en caso que la igualdad se permita.

Note que acorde con esta definición se cumple que un conjunto sin elementos, $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto.

Definición 2.

Si A y B son conjuntos, se define el conjunto unión de A con B por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}\ .$$

Definición 3.

Si A y B son conjuntos, se define el conjunto intersección de A con B por:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}\ .$$

Definición 4.

Si A y B son conjuntos, se define el conjunto diferencia de A con B por:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}\ .$$

Definición 5.

Si Ω es el conjunto universo, se define el conjunto complemento de A respecto a Ω por:

$$\overline{A} = \Omega - A\,.$$

También es permitido escribir el complemento de A como A^c.

Las siguientes propiedades se enuncian sin demostración y resumen algunas de las más utilizadas en este curso acerca de las operaciones definidas previamente.

Propiedades de la Unión

- Conmutatividad $A \cup B = B \cup A$.
- Asociatividad $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- Identidad $A \cup \varnothing = A$.
- Medio Excluido $\Omega = A \cup \overline{A}$.
- Otras $A \subseteq A \cup B$.

Propiedades de la Intersección

- Conmutatividad $A \cap B = B \cap A$.
- Asociatividad $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- Identidad $A \cap \Omega = A$.
- Contradicción $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- Otras $A \cap B \subseteq A$.

Propiedades Conjuntas

- Distributividad
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Leyes de De Morgan
  - $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
  - $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Absorción
  - $A \cup (A \cap B) = A$.
  - $A \cap (A \cup B) = A$.
- Otras
  - $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
  - $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

1.2. Conjunto Potencia

Un concepto importante asociado con todo conjunto es el de conjunto *potencia* o *partes de.*

Definición 6.

Si B es un conjunto de define el conjunto partes de B por

$$P(B) = \{A : A \subseteq B\}.$$

Así $P(B)$ es un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de B.

1.3. Conjunto Producto

Si x y y son elementos, es posible unirlos en una estructura que se llama par ordenado.

Definición 7.

Si A y B son conjuntos, se define el conjunto producto de A y B por:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

1.4. Cardinalidad

Un concepto de vital importancia al estudiar probabilidad radica en la posibilidad de que dado un conjunto A, dentro de un universo Ω, se pueda asignar a este conjunto alguna medida relativa al universo en el cual está inmerso. Existen teorías completas al respecto y si bien podrían ser bastante útiles en el desarrollo que haremos no profundizaremos en ninguna de ellas.

Para empezar, los conjuntos con los que trataremos se dividen en dos grandes grupos: discretos y continuos.

Definición 8.

Para un conjunto A, finito, se define la cardinalidad como la cantidad de elementos que este posea. Se denota $|A|$.

En términos simples, un conjunto contable (discreto) es aquel en el cual exista una manera de contar sus elementos; puede tener una cantidad finita o infinita de elementos, pero de alguna manera puede encontrarse una estrategia para contarlos.

Por ejemplo, los naturales son un conjunto discreto. De hecho es el conjunto que se utiliza para poder contar otros. Todo conjunto finito es contable. Además, conjuntos como los enteros y los racionales son contables.

Para conjuntos discretos finitos la cardinalidad es una manera de asignarles una medida. A continuación listamos un conjunto de propiedades de la cardinalidad.

Propiedades de Cardinalidad

- Si $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$.
- Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.
- Si $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$.
- Si $|A| = n, |B| = m \Rightarrow |A \times B| = mn$.

(1)

La segunda propiedad es muy interesante, pues se necesita que la intersección del conjunto A con el conjunto B sea vacía, es decir, que estos conjuntos sean disjuntos. Sin embargo, un resultado más interesante se da si no se solicita esta premisa.

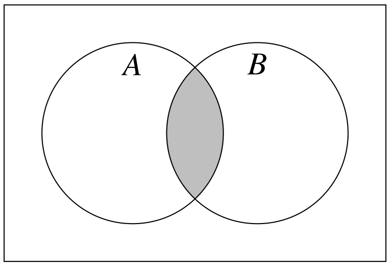
Este se conoce como el principio de inclusión y exclusión.

Principio 2.

Para cualesquiera conjuntos A y B, finitos, se tiene que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ .$$

Si bien es un principio, se puede hacer una pequeña comprobación visual. Tomando el diagrama de Venn como se muestran a continuación:



se nota que si se suman simplemente las cardinalidades de los conjuntos, se están contando dos veces los elementos en común, es decir, la intersección. Por lo tanto, para obtener la igualdad, es necesario restarla.

Se invita al lector que conjeture sobre la cardinalidad de la unión de tres conjuntos.

Finalmente, cuando los conjuntos no son discretos, el concepto de cardinalidad carece de sentido y se sustituye por el término de *medibilidad*, un concepto fuera de los objetivos de estas notas, no obstante hablaremos levemente de algunos términos necesarios en probabilidades.

En este curso se prestará mucha atención a los conjuntos que nos permiten expresar el resultado de experimentos aleatorios. Por ejemplo, lanzar dados es un tipo de experimento aleatorio porque sabemos con certeza que va a caer una cara con entre 1 y 6 puntos, pero no sabemos cual de ellas va a caer.

2. Ejercicios propuestos

1. Dados los conjuntos no vacíos A y B, exprese $A\cup B$, primero como unión de tres conjuntos disjuntos y segundo como unión de dos conjuntos disjuntos. Puede utilizar diagramas de Venn para guiarse.

2. Dada la siguiente lista de ecuaciones, establezca si son verdaderas y dé una explicación al respecto.
   - $(A-B)\cup C=(A\cup C)-(B\cup C)$.
   - $A\cup B=[A-(A\cap B)]\cup B$.
   - $\overline{(A\cup B)}\cap C=C-[C\cap(A\cup B)]$.
   - $\overline{(A\cup B)}\cap C=\left(\overline{A}\cap C\right)\cup\left(\overline{B}\cap C\right)$.
   - $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$.
   - $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

3. Si A, B y C son conjuntos arbitrarios, represente, mediante diagramas de Venn, cada uno de los siguientes conjuntos:
   - $A\cap B\cap C$.
   - $A-(A\cap B)$.
   - $A\cap\overline{B}\cap C$.
   - $(A\cap B)-C$.
   - $A-\overline{B\cap C}$.

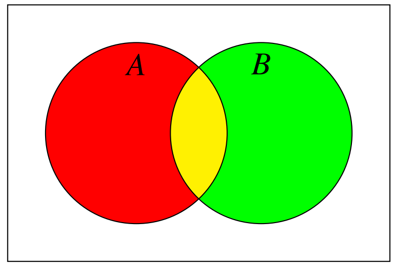
4. Suponga que 100 de los 120 estudiantes de un colegio estudian al menos uno de los idiomas Inglés, Francés y Alemán. Supongamos también que 65 estudian Inglés, 45 estudian Francés, 42 estudian Alemán, 20 Inglés y Francés, 25 Inglés y Alemán y 15 Francés y Alemán. Determine:
   - ¿Cuántos estudian los tres idiomas?
   - ¿Cuántos estudian Inglés y Francés pero no Alemán?
   - ¿Cuántos estudian solo Inglés?
   - ¿Cuántos no estudian ningún idioma?

5. Se realizó una encuesta de preferencia a 4065 músicos, en la cual se obtuvo la siguiente información: a 2500 les gusta tocar guitarra; a 2200 tocar la batería; a 1400 prefieren el saxofón. También se obtuvo que a 50 no les gustó ninguno de estos instrumentos, pues prefieren el piano, y 15 músicos no tienen preferencia por ninguno de los instrumentos mencionados. Además, hay 300 músicos a quienes les gusta la guitarra, la batería y el saxofón; 1000 prefieren solamente la batería, y 400 prefieren solamente la batería y el saxofón.
   - Realice un diagrama de Venn para esta situación, y encuentre el número de personas de cada región disjunta.
   - ¿Cuántos músicos prefieren solamente la guitarra? ¿Cuántos músicos prefieren solamente el saxofón?
   - ¿Cuántos músicos prefieren la guitarra y el saxofón?
   - ¿A cuántos músicos les gusta solo un instrumento?

3. Ejercicios resueltos

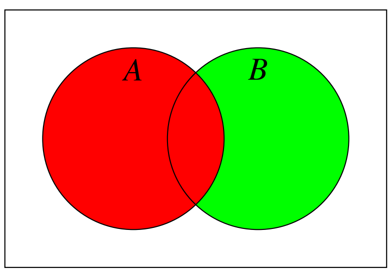
1. Considere los conjuntos arbitrarios A y B, no vacíos. Si estos dos conjuntos se suponen disjuntos, entonces basta con decir que los tres conjuntos solicitados son A, B y $\varnothing$.

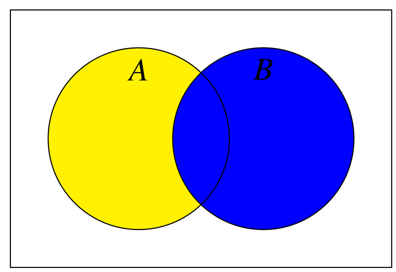
   Si A y B no son disjuntos, considere el siguiente diagrama:

   En este caso son muy evidentes las tres regiones: $A-B$ (región roja), $A\cap B$ (región amarilla) y $B-A$ (región verde). Por lo que:
   $$A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)\ .$$

   Por otro lado, si quieren tomarse dos regiones basta con agrupar dos de las anteriores, por ejemplo:

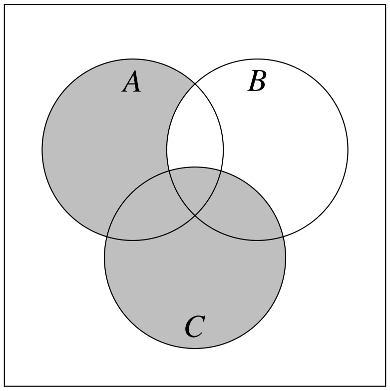
   

   Por lo tanto:
   $$A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup B\ .$$

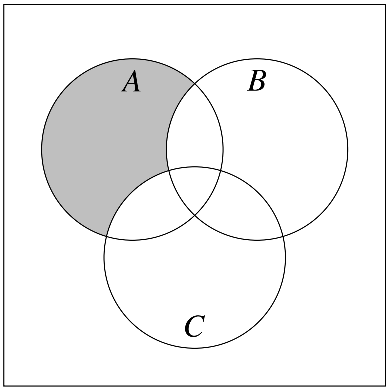
2. Para cada ejercicio, se realizará el diagrama de Venn para cada extremo de la ecuación, y se compararán.

   - $(A-B)\cup C=(A\cup C)-(B\cup C)$.

     $(A-B)\cup C$.

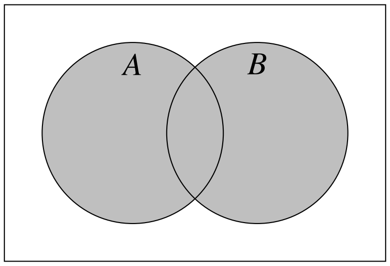
     $(A\cup C)-(B\cup C)$.

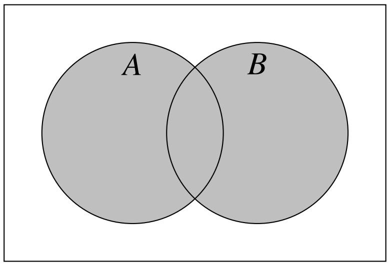
     Por lo tanto, la igualdad **NO** se cumple.

   - $A\cup B=[A-(A\cap B)]\cup B$.

     $A\cup B$.

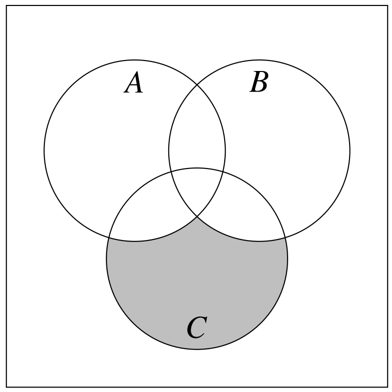
     $[A-(A\cap B)]\cup B$.

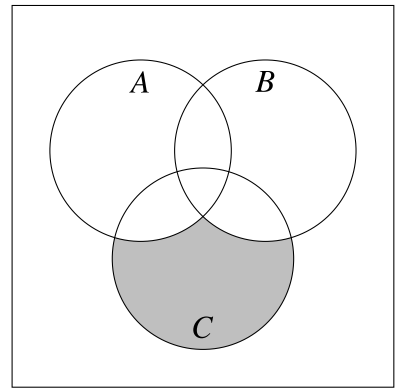
     Por lo tanto, la igualdad **SÍ** se cumple.

- $\overline{(A \cup B)} \cap C = C - [C \cap (A \cup B)]$.

$\overline{(A \cup B)} \cap C$.



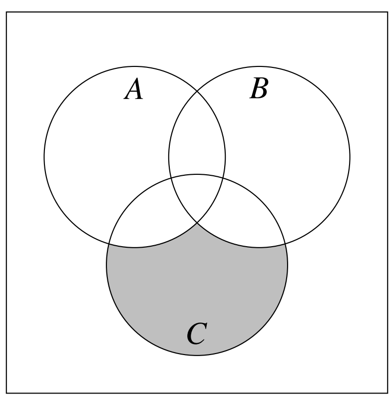
$C - [C \cap (A \cup B)]$.



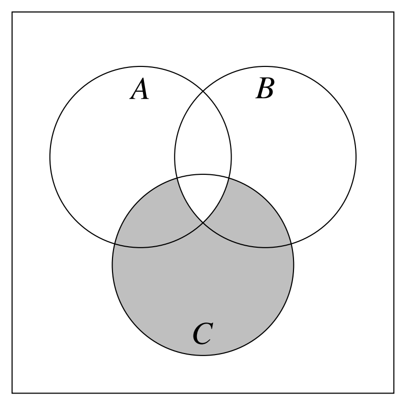
Por lo tanto, la igualdad **SÍ** se cumple.

- $\overline{(A \cup B)} \cap C = \left(\overline{A} \cap C\right) \cup \left(\overline{B} \cap C\right)$.

$\overline{(A \cup B)} \cap C$.



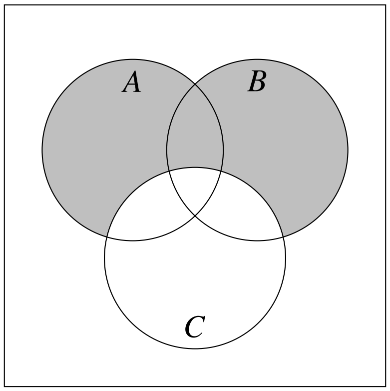
$\left(\overline{A} \cap C\right) \cup \left(\overline{B} \cap C\right)$.

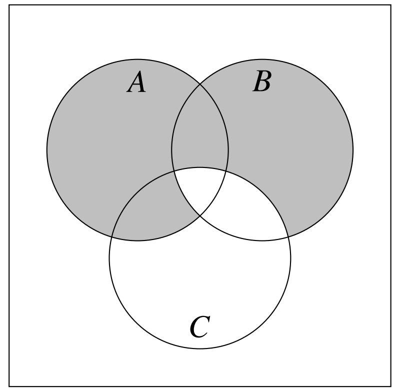


Por lo tanto, la igualdad **NO** se cumple.

- $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$.

$(A \cup B) - C$. $A \cup (B - C)$.

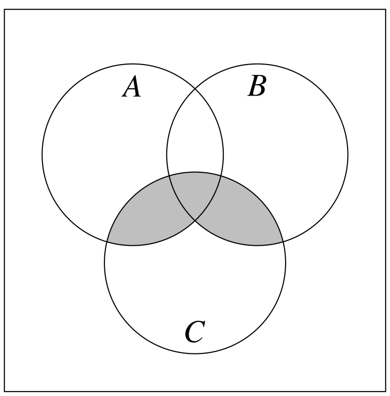


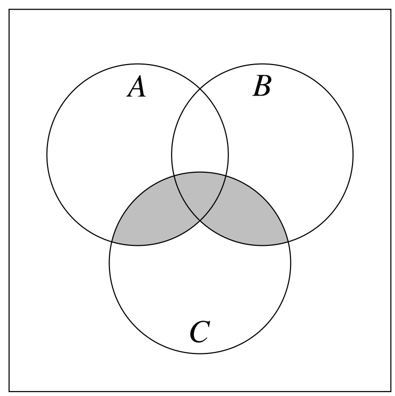


Por lo tanto, la igualdad **NO** se cumple.

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

$(A \cup B) \cap C$. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

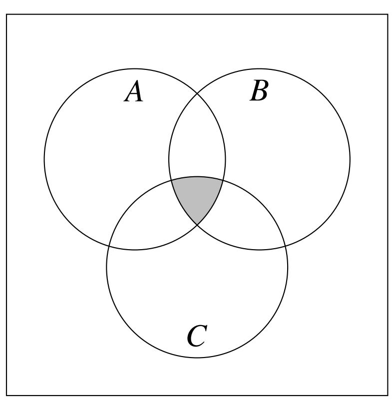




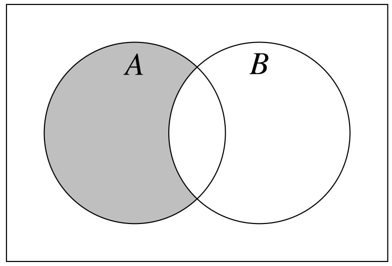
Por lo tanto, la igualdad **SÍ** se cumple.

3. Se dibuja cada diagrama de Venn:

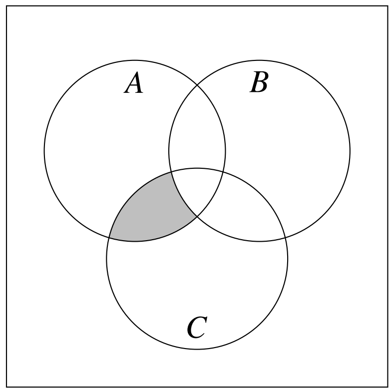
- $A \cap B \cap C$.



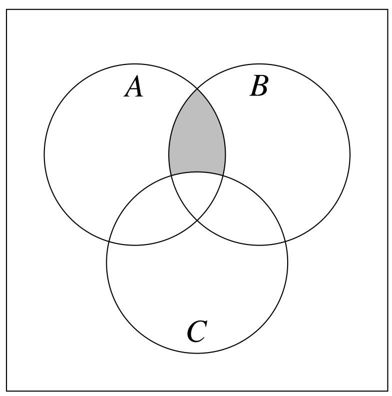
- $A-(A\cap B)$.



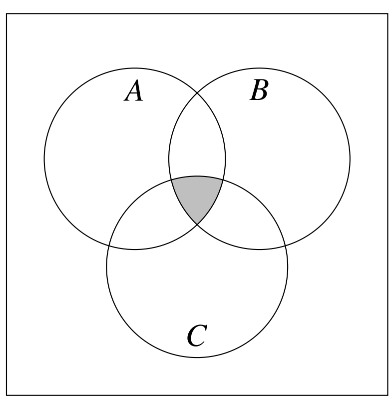
- $A\cap\overline{B}\cap C$.



- $(A\cap B)-C$.



- $A-\overline{B\cap C}$.



4. Considere el conjunto Ω de todos los estudiantes del colegio. Además, I es el conjunto de los estudiantes del colegio que estudian Inglés, F es el conjunto de los estudiantes del colegio que estudian Francés y A es el conjunto de los estudiantes del colegio que estudian Alemán.

   Se sabe que $|\Omega| = 120$, $|I| = 65$, $|F| = 45$, $|A| = 42$, $|I \cap F| = 20$, $|I \cap A| = 25$ y $|F \cap A| = 15$.

   Por otro lado, se sabe que $|I \cup F \cup A| = 100$, por lo que, utilizando el principio de inclusión y exclusión, se tiene que:

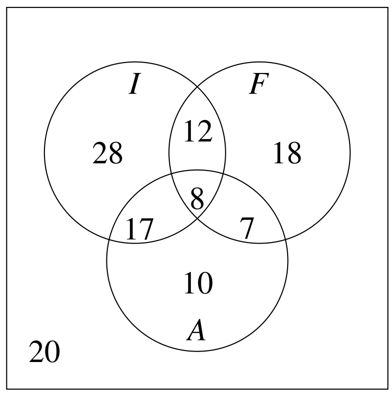
   $$|I \cup F \cup A| = 100$$

   $$\Rightarrow |I| + |F| + |A| - |I \cap F| - |F \cap A| - |I \cap A| + |I \cap F \cap A| = 100$$

   $$\Rightarrow 65 + 45 + 42 - 20 - 15 - 25 + |I \cap F \cap A| = 100$$

   $$\Rightarrow |I \cap F \cap A| = 8$$

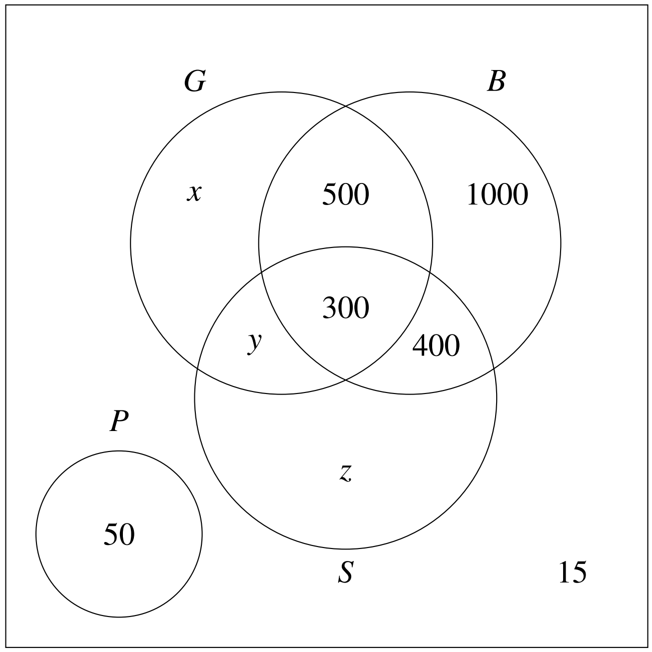
   Así, la situación se puede representar por el siguiente diagrama de Venn:



   - Se tiene que 8 estudiantes del colegio estudian los tres idiomas.
   - Se tiene que 12 estudiantes del colegio estudian Inglés y Francés pero no Alemán.
   - Se tiene que 28 estudiantes del colegio estudian solo Inglés.
   - Se tiene que 20 estudiantes del colegio no estudian ningún idioma.

5. Considere el conjunto Ω de todos los músicos que participaron en la encuesta. Además, G es el conjunto de los músicos que participaron en la encuesta que les gusta tocar guitarra, B es el conjunto de los músicos que participaron en la encuesta que les gusta tocar batería, S es el conjunto de los músicos que participaron en la encuesta que les gusta tocar saxofón y P es el conjunto de los músicos que participaron en la encuesta que les gusta tocar piano.

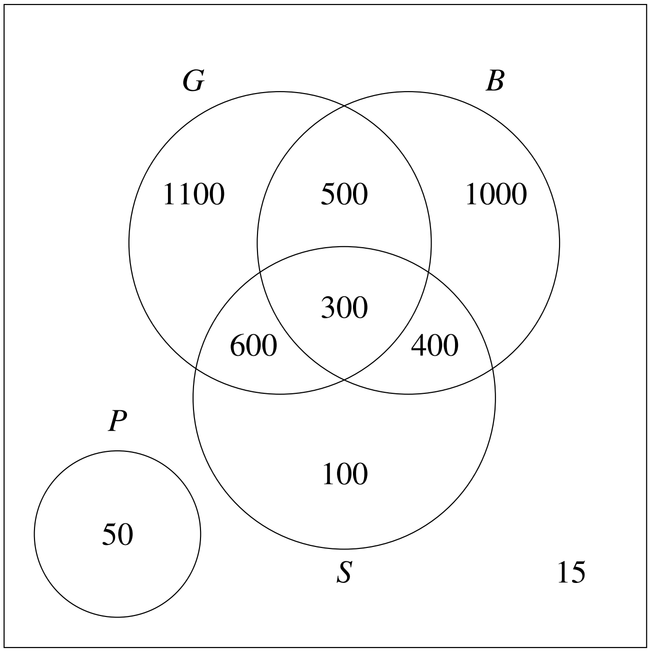
   Con los datos suministrados en el problema, se puede hacer la siguiente representación:



   Con esto, es posible establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z+2265 = 4065 \\ x+y+800 = 2500 \\ y+z+700 = 1400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 1800 \\ x+y = 1700 \\ y+z = 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1100 \\ y = 600 \\ z = 100 \end{cases}$$

- Con esto, el diagrama de Venn para la situación, con el número de personas de cada región disjunta es el siguiente:



- Los músicos que llenaron la encuesta y prefieren solamente la guitarra son 1100. Los músicos que llenaron la encuesta y prefieren solamente el saxofón son 100.
- Los músicos que llenaron la encuesta y prefieren la guitarra y el saxofón son 900.
- Los músicos que llenaron la encuesta y les gusta solo un instrumento son 2250.

Referencias

[1] Marin M., Mora W.,“Probabilidades Curso Virtual” 2007.

[2] Murillo M., “Introducción a la Matemática Discreta” 2018. Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

[3] Gries D., Schneider F.,“A Logical Approach to Discrete Math”,1a ed. Springer-Verlag, New York, 1994. Mexico, 1978.