Une preuve analytique du théorème de Cayley-Hamilton

PAR SABIR ILYASS

Soit K un corps commutatif quelconque, et $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

Pour tout matrice $M \in M_n(K)$, notons $\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)$ le polynôme caractéristique de M

Théorème 1. *(théorème de Cayley-Hamilton)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors $\chi_A(A) = 0$

Démonstration. □

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, et soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(K)$

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ les racines complexes de $\det(X.I_n - A)$ et $R(A) = \max\limits_{\boldsymbol{j=1}}^{l} |\lambda_j|$

Pour tout réel $r > R(A)$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\det(r.e^{\mathrm{it}} I_n - A) \neq 0$ donc $r.e^{\mathrm{it}} I_n - A \in \mathrm{GL}_n(K)$

On écrit

$$r.e^{\mathrm{it}} I_n - A = r.e^{\mathrm{it}} (I_n - r^{-1}.e^{-\mathrm{it}} A)$$

On pose $R = \max(R(A), \|A\|)$, on a pour tout $r > R$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|r^{-1}.e^{-\mathrm{it}} A\| = \frac{\|A\|}{r} < 1$$

Donc la série $\sum\limits_{p \geqslant 0} (r^{-1}.e^{-\mathrm{it}} A)^p$ converge absolument, donc converge dans $\mathcal{M}_n(K)$

De plus

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(r^{-1}.e^{-\mathrm{it}}A)^p = (I_n - r^{-1}.e^{-\mathrm{it}}A)^{-1}$$

Ainsi

$(r.e^{\mathrm{it}}I_n - A)^{-1} = r^{-1}e^{-\mathrm{it}}(I_n - r^{-1}.e^{-\mathrm{it}}A)^{-1} = r^{-1}e^{-\mathrm{it}}\sum_{p=0}^{+\infty}(r^{-1}.e^{-\mathrm{it}}A)^p = \sum_{p=1}^{+\infty}(r^{-1}.e^{-\mathrm{it}})^p A^{p-1}$

Par suite pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\int_0^{2\pi}(\mathrm{re}^{\mathrm{it}})^k(r.e^{\mathrm{it}}I_n - A)^{-1}\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}(r^{-1}.e^{-\mathrm{it}})^{p-k}A^{p-1}\mathrm{dt}$$

Il est possible d'intervertir l'integrale et la sommation en série, puisque la convergence de la série est normale sur $[0, 2\pi]$, on obtient alors

$$\int_0^{2\pi}(\mathrm{re}^{\mathrm{it}})^k(r.e^{\mathrm{it}}I_n - A)^{-1}\mathrm{dt} = \sum_{p=1}^{+\infty}r^{k-p}\left(\int_0^{2\pi}e^{-i(p-k)t}\mathrm{dt}\right)A^{p-1} = \sum_{p=1}^{+\infty}r^{k-p}(2\pi\delta_{k,p})A^{p-1}$$

avec $\forall p, k \in \mathbb{N}^\star\ \delta_{k,p} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 \text{ si } p \neq k \\ 1 \text{ si } p = k \end{smallmatrix}\right.$

D'où

$$\int_0^{2\pi}(\mathrm{re}^{\mathrm{it}})^k(r.e^{\mathrm{it}}I_n - A)^{-1}\mathrm{dt} = 2\pi A^{k-1}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^\star, A^{k-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{re}^{\mathrm{it}})^k(r.e^{\mathrm{it}}I_n - A)^{-1}\mathrm{dt}}$$

Posons $\chi_A(X) = \det(X.I_n - A) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ (le polynôme caractéristique de A)

On a :

$$\chi_A(A) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} A^{k-1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \int_0^{2\pi} (\mathrm{re}^{\mathrm{it}})^k (r.e^{\mathrm{it}} I_n - A)^{-1} \mathrm{dt}$$

Par suite

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(\mathrm{re}^{\mathrm{it}}) \mathrm{re}^{\mathrm{it}} (r.e^{\mathrm{it}} I_n - A)^{-1} \mathrm{dt}$$

Or d'après la formule fondamentale vérifiée par la comatrice on a:

$$^t\mathrm{Com}(X.I_n - A)(X.I_n - A) = \chi_A(X) I_n$$

En évaluant çela en $r.e^{\mathrm{it}}$, on obtient pour tout $r > R$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$\chi_A(\mathrm{re}^{\mathrm{it}}) \mathrm{re}^{\mathrm{it}} (r.e^{\mathrm{it}} I_n - A)^{-1} = ^t \mathrm{Com}(r.e^{\mathrm{it}}.I_n - A)$$

Par suite

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{re}^{\mathrm{it}\,t}\mathrm{Com}(r.e^{\mathrm{it}}.I_n - A) \mathrm{dt} = 0$$

car les coefficients de la matrices sous le signe integrale sont des polynômes trigonométriques de valeurs moyennes nulles.

D'où le résultat.

∇