EXERCICE :

Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ vérifiant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq \frac{a_i}{i} \leq 1$,Montrer que

$$2^n a_1(a_1 + a_2)\ldots(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geqslant (n+1)a_1^2 \times \ldots \times a_n^2$$

SOLUTION:

D'après l'inégalité arithmético-géomètrique on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} i \times \frac{a_i}{i} \geq \frac{k(k+1)}{2} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{i}{k(k+1)}}$$

Donc

$$\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{i}{k(k+1)}} = \frac{n!(n+1)!}{2^n} \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{2i}{k(k+1)}}$$

Or,

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{2i}{k(k+1)}} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=i}^{n} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{2i}{k(k+1)}} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\sum_{k=i}^{n}\frac{2i}{k(k+1)}}$$

Comme

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{2i}{k(k+1)} = 2i\left(\frac{1}{i} - \frac{n+1}{n}\right) \leqslant 2$$

Et

$$\frac{a_i}{i} \in [0, 1]$$

Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left(\frac{a_i}{i}\right)^{\sum_{k=i}^{n}\frac{2i}{k(k+1)}} \geq \left(\frac{a_i}{i}\right)^2$$

Parsuite

$$\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \frac{n!(n+1)!}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{i}\right)^2 = \frac{n!(n+1)!}{2^n.(n!)^2} \prod_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{(n+1)}{2^n} \prod_{i=1}^{n} a_i^2$$