CARACTÉRISATION DE LA BOULE UNITAIRE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

par SABIR ILYASS

Résumé

Caractèriser la boule unitaire d'un espace vectoriel normé est le donné de minimum possible des informations sur une partie $A \neq \varnothing$, pour qu'elle sera la boule unitaire de cet espace vectoriel pour une certaine norme.

Pour un espace vectoriel, si deux normes ont la même boule centrée unitée, alors elles sont égaux.

En étudiera dans ce qui suit la caractérisation de la boule unitaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 1.

Soit E un espace vectoriél de dimension finie munit de son unique topologie d'espace vectoriel ,et B une partie de E ,alors :

il existe une norme N de E tel que : B est la boule unité fermée de (E,N), si, et seulement si, B est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine, et d'intérieur non vide

Démonstration. □

$\Longrightarrow$) Supposons qu'il existe une norme N sur E tel que B est la boule fermée unité de (E,N)

Alors B est convexe ,en effet pour tout $\lambda \in [0,1]$,pour tout $x,y \in B$ on a :

$$N((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)N(x)+\lambda N(y) \leqslant 1$$

Donc $(1-\lambda)x+\lambda y \in B$,d'où B est convexe

B est compacte ,car B est fermée et bornée (en dimension finie)

Et pour tout $x \in B$ on a $N(-x)=N(x) \leqslant 1$,donc $-x \in B$.

D'où B est symétrique par rapport à 0 .

Il reste à montrer que B est d'intérieur non vide , on a pour $x \neq 0$: $\frac{1}{2N(x)}x \in \overset{\circ}{B}$

Donc B est d'intérieur non vide .

$\Longleftarrow$)Supposons que B est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine, et d'intérieur non vide , et montrons qu'il existe une norme N de E tel que : B est la boule unité fermée de (E,N).

Pour cela ,l'idée est d'utiliser l'homogénéité ,Pour x vecteur non nul de E , posons:

$$T_x = \left\{\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in B\right\}$$

Montrons d'abord que cette ensemble est non vide ,En effet l'origine est forcément un point intérieure à B

Car puisque B est d'intérieur non vide , on peut trouver $y \in B$ et $r > 0$, tel que $B(y,r) \subset B$.

Par symétrie par rapport à l'origine, on a : $B(-y,r) \subset B$.

Par convixité , il en découle que $B(0,r) \in B$.

Ainsi comme B est convexe, et contient l'origine, si $\lambda \in T_x$, alors $[\lambda,+\infty[\subset T_x$.

Donc T_x est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}_+^\star$.

Comme B est compacte, elle est bornée, soit $M > 0$ tel que $\|a\| \leqslant M$,Pour tout $a \in B$. (Pour une norme quelconque $\|.\|$,puisque tout les normes sont équivalentes.)

si $\lambda \in T_x$, on a $\lambda \geqslant \frac{\|x\|}{M} > 0$, Posons alors :

$$N(x) = \inf T_x$$

On pose aussi $N(0)=0$

On vient de prouver qu'il s'agit d'un réel strictement positif. Comme B est fermée, l'intervalle T_x est aussi fermé et il est donc égal à $[N(x),+\infty[$.

Il reste à montrer que N est une norme et que B en est la boule unité fermée.

♠ L'application N est positive car pour tout $x \in E$ non nul on a:

$$T_x \subset]0, +\infty[$$

Donc:

$$N(x) = \inf(T_x) \geqslant \inf(]0, +\infty[) = 0$$

Et:

$$N(0) = 0$$

De plus ,D'après ce qui précéde, on a pour tout $x \in E$ non nul:

$$\forall \lambda \in T_x, \lambda \geqslant \frac{\|x\|}{M}$$

Donc pour tout $x \in E$ non nul on a:

$$N(x) \geqslant \frac{\|x\|}{M} > 0$$

donc l'axiome de séparation est vérifié.

♠ Si $x \in E$ non nul et si $\mu > 0$, on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\lambda \in T_{\mu x} \Leftrightarrow \frac{\mu x}{\lambda} \in B \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} x \in B \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} \in T_x \Leftrightarrow \lambda \in \mu T_x$$

Donc:

$$T_{\mu x} = \frac{1}{\mu} T_x$$

Ainsi:

$$N(\mu x) = \inf T_{\mu x} = \inf \mu T_x = \mu \inf T_x = \mu N(x)$$

Par symétrie de B, on a pour tout $x \in E$ non nul $T_{-x} = T_x$,Donc $N(-x) = N(x)$.

Ceci reste vrai pour $x = 0$, Donc N est homogène .

♠ Il ne reste que montrer que N vérifier l'inégalité triangulaire, pour cela on va montrer tout d'abord le lemme suivant:

LEMME:

Soit $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ et } \Phi(\lambda x) = |\lambda| \Phi(x)$$

On a :

Φ est une norme si, et seulement si, l'ensemble $\{x \in E, \Phi(x) \leqslant 1\}$ est convexe

PREUVE:

Si Φ est une norme il est claire B est convexe :en effet si $(x, y) \in B^2$,et $t \in [0, 1]$, on a:

$$\Phi((1-t)x + t.y) \leqslant (1-t)\Phi(x) + t\Phi(y) \leqslant (1-t) + t = 1$$

Donc :

$$(1-t)x + t.y \in B$$

Donc B est convexe.

Réciproquement, supposons que B est convexe, considérons x et y dans E. On veut prouver que:

$$\Phi(x+y) \leqslant \Phi(x) + \Phi(y)$$

On peut supposer que x et y non nul sans quoi l'inégalité est triviale.

Par homogénéité,les vecteurs $\frac{x}{\Phi(x)}$ et $\frac{y}{\Phi(y)}$ sont dans B. Il en est donc de même de leur barycentre z affecté des masses positives $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$, On a : $z = \frac{x+y}{\Phi(x)+\Phi(y)}$

Et le fait que $\Phi(z) \leqslant 1$ conduit à $\Phi(x+y) \leqslant \Phi(x) + \Phi(y)$.

D'où l'équivalence.

Pour tout $x \in E$,on a $N(x) \leqslant 1$ si, et seulement si, $1 \in T_x$,Donc si, et seulement si, $x \in B$
Ainsi :

$$\{x \in E, N(x) \leqslant 1\} = B$$

Comme B est convexe, on en déduit d'après le lemme que N vérifie l'inégalité triangulaire .
D'où le résultat.

∇