北京信息科技大学 2020-2021 学年第一学期

《复变函数与积分变换 A》课程期末考试试卷(B)

课程所在学院：理学院　　　　　　　**适用专业班级：48 学时各专业**

考试形式：（闭卷）

一、单选题 60 分（共 15 道小题，每道题 4 分）

1. **下列等式中，不成立的等式是（　　　）**

A、$-3+4i$ 的主辐角为 $\pi - \arctan\dfrac{4}{3}$

B、$\arg(-3i) = \arg(-i)$

C、$a\text{rg}(-3+4i)^2 = 2\arg(-3+4i)$

D、$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

C

2 下列函数中，在整个复平面上解析的函数是（）

A、$\overline{z} + e^z$

B、$\dfrac{\sin z}{z^2+1}$

C、$\tan z + e^z$

D、$\sin z + e^z$

D

3.

在复平面上，下列命题中，正确的是（）

A、$\cos z$ 是有界函数

B、

$$Lnz^2 = 2Lnz$$

C、

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

D、

$$\sqrt{z^2} = |z|$$

C

4 在下列复数中，使得 $e^z = \sqrt{3} + i$ 成立的是（　　）

A、

$$z = \ln 2 + 2\pi i + \frac{\pi i}{3}$$

B、

$$z = \ln 4 + 2\pi i + \frac{\pi i}{3}$$

C、

$$z = \ln 2 + 2\pi i + \frac{\pi}{6} i$$

D、

$$z = \ln 4 + 2\pi i + \frac{\pi}{6} i$$

C

5.

积分 $\oint_{|z|=3} \frac{4}{z-2} dz$ 的值为（　　）A

$A.\ 8\pi i$

B. 2

$C.\ 2\pi i$

$D.\ 4\pi i$

6.

$z=0$ 是函数 $\frac{e^z}{z(1-\cos z)}$ 的（　　）

A、可去奇点

B、一级极点

C、二级极点

D、三级极点

D

7.

解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的导函数为（　　）

A、$f'(z)=u_x+iu_y$

B、$f'(z)=u_x-iu_y$

C、$f'(z)=u_x+iv_y$

D、$f'(z)=u_y+iv_x$

B

8

下列结论正确的是(　　　)

A、如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则 $f(z)$ 在 z_0 点一定解析；

B、如果 $f(z)$ 在 C 所围成的区域内解析，则 $\oint_C f(z)dz=0$

C、如果 $\oint_C f(z)dz=0$，则函数 $f(z)$ 在 C 所围成的区域内一定解析；

D、函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域内解析的充分必要条件是 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在该区域内均为调和函数.

B

9

已知 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则下列命题正确的是(　　　)

A、$\mathcal{F}[f(t-2)]=e^{2j\omega}\cdot F(\omega)$

B、$e^{2j\omega}\cdot f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega+2)]$

C、$\mathcal{F}[f(2t)]=2F(2\omega)$

D、$\mathcal{F}[e^{2jt}\cdot f(t)]=F(\omega-2)$

D

10

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ 在 $z=2$ 点收敛，则级数在（）

A、 $z=-2$ 点条件收敛

B、 $z=2i$ 点绝对收敛;

C、 $z=1+i$ 点绝对收敛;

D、 $z=1+2i$ 点一定发散

C

11 设复数 $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$，则 $Argz=$（　　）

A、 $-\frac{\pi}{3}$

B、 $\frac{\pi}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

C、 $\frac{\pi}{3}$

D、 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

D

12 下列复数中，为实数的是(　　)

A、 $(1-i)^3$

B、 $\cos i$

C、 $\ln i$

D、 $e^{3-\frac{\pi}{2}i}$

B

13

积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(1-z)^{2013}} dz$ 等于（　　）

A、$2\pi i e$

B、$-\frac{2\pi i}{2012!}e$

C、0;

D、$\frac{2\pi i}{2012!}e$

B

14

设 $C: |z|=1$，则 $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^3} dz =$（　　）

A、$-\pi i$

B、πi

C、0

D、$-2\pi i$

C

15

利用 Laplace 变换的性质，实积分 $\int_0^{+\infty} te^{-at}\sin bt\,dt(a>0)=$（　　）

A、$\frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}$

B、$\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$

C、$\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$

D、$\frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2}$

C

二、计算题 40 分（共 4 道题，每题 10 分）

1.

将 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$ 在圆环域（1）$1<|z|<\infty$；（2）$0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数

2

求函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z(z-4)}$的有限孤立奇点，如果是极点写出级数，并求有限孤立奇点处的留数.

3.

求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$ 的傅氏积分表达式.

4.

利用拉氏变换求解微分方程 $y''+4y'+3y=e^{-t}, y(0)=y'(0)=0$

二、计算题 参考答案

1、将$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}$在圆环域（1）$1<|z|<\infty$；（2）$0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

$1<|z|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$$

$0<|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{(1+z-1)^2}=-\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1+z-1}\right)'=-\frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)'$$

$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-2}$$

2、求函数$f(z)=\frac{\sin z}{z(z-4)}$的有限孤立奇点，如果是极点写出级数，并求有限孤立奇点处的留数.

$z=0$是可去积点

$z=4$是一级极点

$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$

$\mathrm{Res}[f(z),4]=\frac{\sin 4}{4}$

3、求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$ 的傅氏积分表达式.

$f(t)$为偶函数

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau\cos\omega t d\omega$$

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau=\int_0^{+\infty}\cos\omega\tau d\frac{e^{-\beta\tau}}{-\beta}=\cos\omega\tau\frac{e^{-\beta\tau}}{-\beta}\Bigg|_0^{+\infty}-\frac{\omega}{\beta}\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\sin\omega\tau d\tau$$

$$=\frac{1}{\beta}-\frac{\omega}{\beta}\int_0^{+\infty}\sin\omega\tau d\frac{e^{-\beta\tau}}{-\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{\omega^2}{\beta^2}I$$

$$I=\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega$$

4、利用拉氏变换求解微分方程$y''+4y'+3y=e^{-t},y(0)=y'(0)=0$

令$\mathcal{L}$[y(t)]=Y(s),等式两边同时做拉普拉斯变换

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4[sY(s)-y(0)]+3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$y(t)=\mathrm{Re}\,s\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+3)}e^{st},-3\right)+\mathrm{Re}\,s\left(\frac{1}{(s+1)^2(s+3)}e^{st},-1\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{2t-1}{4}e^{-t}$$