北京信息科技大学 2020-2021 学年第一学期

《复变函数与积分变换 A》课程期末考试试卷(A)参考答案

课程所在学院：理学院　　　　　**适用专业班级：48 学时各专业**

考试形式：（闭卷）

一、简答题（本题满分 60 分，共含 10 道小题，每小题 6 分）

1、指出不等式 $3<|z+1-i|<+\infty$ 所确定的区域，并指明是单连通还是多连通区域.

解：该不等式确定的区域是复平面内以点-1+i 为圆心，以 3 为半径的圆的外部区域

该区域是多联通区域　（6 分）

2、化简复数 $\frac{2}{-1+i}-\frac{3}{i}$，并写出指数表示式.

解：$\frac{2}{-1+i}-\frac{3}{i}=-1-i+3i=-1+2i$

其指数表示式为：$\sqrt{5}e^{i(-\arctan 2+\pi)}$　（6 分）

3、一个复数乘以 $-1-\sqrt{3}i$，它的模和辐角有何改变？

解：模变为原来的 2 倍，辐角顺时针旋转$\frac{2\pi}{3}$　（或辐角减少$\frac{2\pi}{3}$）　（6 分）

4、求 $\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$.

解：令$z=\sqrt{3}+i$，$|z|=2$，$\arg(z)=arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

所以$\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}+isin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right), k=0,1,2,3,4$　（6 分）

5、求 $Ln(-2i)$.

解：$Ln(-2i)=ln2+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$　（6 分）

6、求积分 $\oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{z-2i}+\frac{e^z\sin 2z}{z-4}\right)dz$.

解：$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z-2i}+\frac{e^z\sin 2z}{z-4}dz=2\pi i+0=2\pi i$　（6 分）

7、求积分 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2(z+1)}dz$.

解：$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2(z+1)} dz$

$=\oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{\cos z}{z+1}}{z^2} dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{4}} \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{z+1} dz$

$=2\pi i \left(\frac{\cos z}{z+1}\right)'|_{z=0} + 2\pi i \frac{\cos z}{z^2}|_{z=-1}$

$=2\pi i(\cos 1 - 1)$

或者

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2(z+1)} dz$$

$=2\pi i\{Res\left[\frac{\cos z}{z^2(z+1)}, 0\right] + Res\left[\frac{\cos z}{z^2(z+1)}, -1\right]\}$

$=2\pi i(\cos 1 - 1)$ （6 分）

8、判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{4^n}$ 的绝对收敛性.

解：$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1+\sqrt{3}i}{4}|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，因此该级数绝对收敛 （6 分）

9、求函数 $f(t) = u(t+3)$ 的频谱函数 $\mathrm{F}(\omega)$.

解：$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$, 由位移性质知

$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[u(t+3)] = e^{3j\omega} \left[\frac{1}{j(\omega)} + \pi\delta(\omega)\right]$ （6 分）

10、求函数 $f(t) = e^{2t}\sin 4t$ 的拉氏变换.

解：$\mathcal{L}[\sin 4t] = \frac{4}{s^2+16}$, 由位移性质知

$\mathcal{L}[e^{2t}\sin 4t] = \frac{4}{(s-2)^2+16}$ （6 分）

二、计算题（本题满分 40 分，共含 4 道题，每题 10 分）

1、将 $f(z) = \frac{1}{z(z-5)}$ 在圆环域（1） $5 < |z| < \infty$ ；（2） $0 < |z-5| < 5$ 内展开成洛朗级数.

解：（1）当 $5 < |z| < \infty$时，

$f(z) = \frac{1}{z(z-5)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{z^{n+2}}$ （5 分）

(2)当 $0 < |z-5| < 5$

$f(z) = \frac{1}{z(z-5)} = \frac{1}{(z-5)}\frac{1}{z-5+5} = \frac{1}{5(z-5)}\ \frac{1}{1+\frac{z-5}{5}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^{n-1}}{5^{n+1}}$ （5 分）

2、求函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ 的有限孤立奇点，如果是极点写出级数并求有限孤立奇点处的留数.

解：$z=0$ 是孤立奇点，且是三级极点， (5 分)

$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z^4},0\right] = \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left\{z^4\frac{\sin z}{z^4}\right\} =-\frac{1}{6}$ (5 分)

3、求函数 $f(t)=\begin{cases}4e^{-3t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的傅氏积分表达式, 并求广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{3\cos\omega-\omega\sin\omega}{9+\omega^2}$ 的值.

解：$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$=\int_0^{+\infty}4e^{-3t}e^{-j\omega t}dt$

$=\frac{4}{3+j\omega}$ (4 分)

$f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[f(t)]e^{j\omega t}d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{3+j\omega}e^{j\omega t}d\omega$

$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3-j\omega}{9+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{3\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{9+\omega^2}d\omega$ (4 分)

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{3\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{9+\omega^2}d\omega = \begin{cases}\pi e^{-3t}, & t>0\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{3\cos\omega-\omega\sin\omega}{9+\omega^2}d\omega = 0$ (2 分)

4、用拉氏变换求解方程 $y'(t)+y(t)=e^t$，其中 $y(0)=1$.

解：记 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$，对方程两边同时求拉普拉斯变换得

$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$ （4 分）

带入初始条件得

$Y(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$ （4 分）

因此，$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)(s+1)}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right] = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ （2 分）