

Решение задач теории упругости проекционно-сеточными методами

Студент: Касьянова К. А., ФН2-51Б

Научный руководитель: к.ф-м.н., доцент кафедры ФН-2
Марчевский И. К.

6 июня 2022 г.



Точное решение дифференциального уравнения, описывающего форму упругой линии балки

Уравнение, описывающее прогиб балки:

$$(EIy''')'' = q,$$

где E — модуль упругости балки; I — момент инерции относительно поперечной оси; q — распределённая внешняя нагрузка, действующая на балку.

Граничные условия:

- 1 $y|_{z=z_0} = y_0$ — заданная величина прогиба;
- 2 $y'|_{z=z_0} = y'_0$ — заданный угол поворота сечения;
- 3 $EIy''|_{z=z_0} = M_0$ — изгибающий момент;
- 4 $EIy'''|_{z=z_0} = Q_0$ — перерезывающая сила.

Метод конечных элементов

Рассмотрим слабую постановку задачи о прогибе (метод Галёркина):

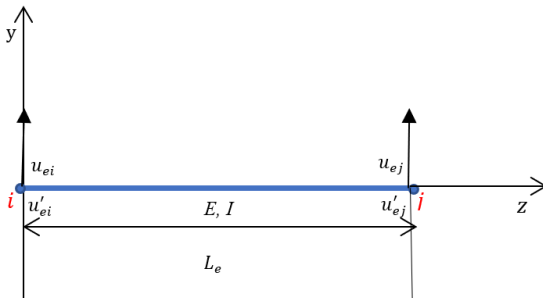
$$\int_0^L w \frac{d^2}{dz^2} (EI \frac{d^2 u}{dz^2}) dz = \int_0^L w q dz, \quad (2.1)$$

где w — произвольная пробная функция, принадлежащая классу $W_2^2[0, L]$.

Полученное выражение два раза интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} w \frac{d}{dz} (EI \frac{d^2 u}{dz^2}) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dz} \frac{d}{dz} (EI \frac{d^2 u}{dz^2}) dz &= \int_0^L w q dz, \\ w \frac{d}{dz} (EI \frac{d^2 u}{dz^2}) \Big|_0^L - \frac{dw}{dz} (EI \frac{d^2 u}{dz^2}) \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^2 w}{dz^2} \frac{d^2 u}{dz^2} dz &= \int_0^L w q dz. \end{aligned}$$

При решении задачи на прогиб двухузловой элемент имеет вид:



Рассмотрим выражение для функции формы и его производной для элемента:

$$u_e(z) = N_{1e}u_1 + N_{2e}\frac{du_1}{dz} + N_{3e}u_2 + N_{4e}\frac{du_2}{dz},$$

$$\frac{du_e}{dz} = \frac{dN_{1e}}{dz}u_1 + \frac{dN_{2e}}{dz}\frac{du_1}{dz} + \frac{dN_{3e}}{dz}u_2 + \frac{dN_{4e}}{dz}\frac{du_2}{dz}.$$

Из условий:

$$u_e(0) = u_1, u'_e(0) = u'_1, u_e(L_e) = u_2, u'_e(L_e) = u'_2,$$

получаем функции формы $N_{1e}, N_{2e}, N_{3e}, N_{4e}$:

$$\begin{aligned} N_{1e}(z) &= 1 - \frac{3z^2}{L_e^2} + \frac{2z^3}{L_e^3}, & N_{2e}(z) &= z - \frac{2z^2}{L_e} + \frac{z^3}{L_e^2}, \\ N_{3e}(z) &= \frac{3z^2}{L_e^2} - \frac{2z^3}{L_e^3}, & N_{4e}(z) &= -\frac{z^2}{L_e} + \frac{z^3}{L_e^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

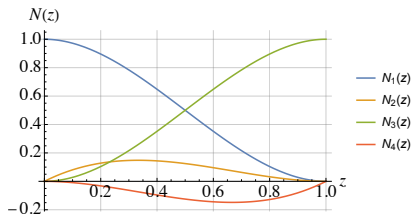


Рис.: Функции формы для двухузлового элемента

Выражение (2.2) для функции u_e можем записать для одного элемента в следующем виде:

$$u_e(z) = \mathbf{N}_e \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} N_{1e}(z) & N_{2e}(z) & N_{3e}(z) & N_{4e}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{Bmatrix}$$

В качестве пробных функций будем использовать функции, представимые в том же виде:

$$w_e(z) = \mathbf{N}_e \mathbf{w}_e = \begin{bmatrix} N_{1e}(z) & N_{2e}(z) & N_{3e}(z) & N_{4e}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{Bmatrix}$$

Дважды продифференцировав выражения u_e и w_e , получим:

$$\frac{d^2 u_e}{dz^2} = \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{N}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \quad \frac{d^2 w_e}{dz^2} = \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{N}_e \mathbf{w}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{w}_e$$

Тогда можно ввести следующее обозначение для вторых производных:

$$\mathbf{B}_e = \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L_e^2} + \frac{12z}{L_e^3} & -\frac{4}{L_e} + \frac{6z}{L_e^2} & \frac{6}{L_e^2} - \frac{12z}{L_e^3} & -\frac{2}{L_e} + \frac{6z}{L_e^2} \end{bmatrix}$$

После подстановки полученных выражений в уравнение, соответствующее слабой постановке задачи, получим:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{L_e} (B_e w_e)^T EI (B_e u_e) dz = w^T \left(\sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{L_e} (B_e)^T EI B_e dz \right) u$$

Тогда матрица жесткости для элемента \mathbf{K}_e имеет вид:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^{L_e} EI \mathbf{B}_e^T \mathbf{B}_e dz.$$

Проинтегрируем и получим:

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ 12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

Правая часть уравнения, соответствующая слабой постановке задачи (2.1) имеет вид:

$$\int_0^L w q(z) dz = \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{L_e} \mathbf{w}_e^T \mathbf{N}_e^T q(z) dz = \mathbf{w}^T \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{L_e} \mathbf{N}_e^T q(z) dz.$$

Так как слабая форма верна для любых \mathbf{w} окончательно запишем следующее:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^{L_e} \mathbf{N}^T q(z) dz.$$

Трёхузловой элемент

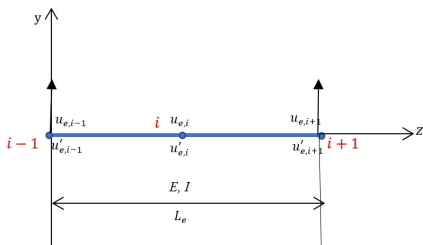


Рис.: Трёхузловой конечный элемент

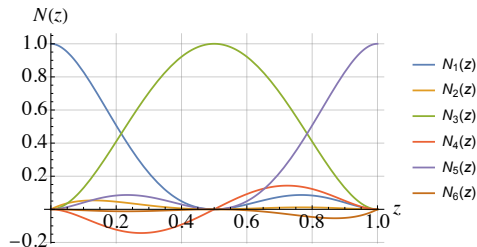


Рис.: Функции формы для трёхузлового конечного элемента длиной $L_e = 1$

Функции формы для трёхузлового конечного элемента:

$$N_{1e}(z) = \frac{(L_e + 6z)(-3zL_e + L_e^2 + 2z^2)^2}{L_e^5},$$

$$N_{4e}(z) = \frac{8z^2(z - L_e)^2(2z - L_e)}{L_e^4},$$

$$N_{2e}(z) = \frac{z(-3zL_e + L_e^2 + 2z^2)^2}{L_e^4},$$

$$N_{5e}(z) = -\frac{z^2(6z - 7L_e)(L_e - 2z)^2}{L_e^5},$$

$$N_{3e}(z) = \frac{16z^2(z - L_e)^2}{L_e^4},$$

$$N_{6e}(z) = \frac{z^2(z - L_e)(L_e - 2z)^2}{L_e^4}.$$

Матрица жесткости для трехузлового элемента:

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} \frac{5092}{35} & \frac{1138L_e}{35} & -\frac{512}{5} & \frac{384L_e}{7} & -\frac{1508}{35} & \frac{242L_e}{35} \\ \frac{1138L_e}{35} & \frac{332L_e^2}{35} & -\frac{128L_e}{5} & \frac{64L_e^2}{7} & -\frac{242L_e}{35} & \frac{38L_e^2}{35} \\ -\frac{512}{5} & -\frac{128L_e}{5} & -\frac{1024}{5} & 0 & -\frac{512}{5} & \frac{128L_e}{5} \\ \frac{384L_e}{7} & \frac{64L_e^2}{7} & 0 & \frac{256L_e^2}{7} & -\frac{384L_e}{7} & \frac{64L_e^2}{7} \\ -\frac{1508}{35} & -\frac{242L_e}{35} & -\frac{512}{5} & -\frac{384L_e}{7} & \frac{5092}{35} & -\frac{1138L_e}{35} \\ \frac{242L_e}{35} & \frac{38L_e^2}{35} & \frac{128L_e}{5} & \frac{64L_e^2}{7} & -\frac{1138L_e}{35} & \frac{332L_e^2}{35} \end{bmatrix}$$

Уравнение, описывающее прогиб упругой линии балки

$$(EI y''')'' = q,$$

где q – функция внешней нагрузки.

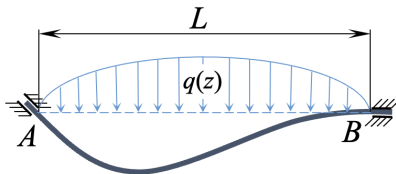


Рис.: Балка длиной $L = 1$ под действием гладкой внешней нагрузки

Граничные условия:

- ❶ $y'|_{z=0} = -\frac{\pi}{180}$ – поворот в т. A на 1° ;
- ❷ $y|_{z=0} = 0$ – отсутствие перемещения в т. A ;
- ❸ $y'|_{z=L} = 0$ – отсутствие поворота сечения в т. B ;
- ❹ $y|_{z=L} = 0$ – отсутствие перемещения в т. B .

Гладкая функция внешней нагрузки:

Гладкая функция внешней нагрузки:

$$q = \frac{Q}{L} \sin(\pi z).$$

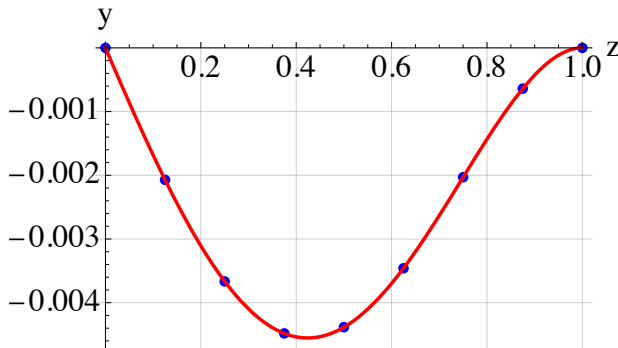


Рис.: Сравнение точного и приближенного решения при $n = 4$, полученного при помощи МКЭ

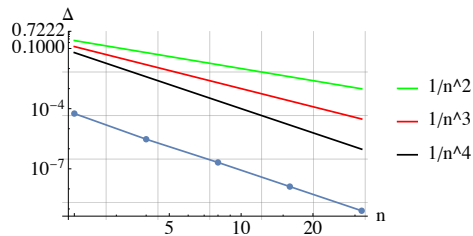


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$5.87 \cdot 10^{-5}$	$3.51 \cdot 10^{-9}$	$2.17 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$	$8.43 \cdot 10^{-10}$
m		4.06	4.02	4.1	4.01

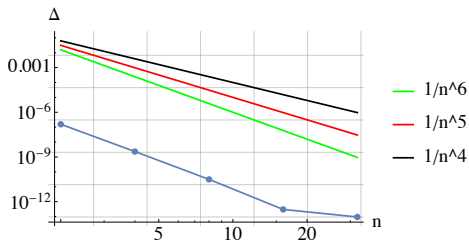


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$2.31 \cdot 10^{-9}$	$3.13 \cdot 10^{-11}$	$3.01 \cdot 10^{-13}$	$9.36 \cdot 10^{-14}$
m		6.08	6.21	6.71	1.68

Непрерывная негладкая функция внешней нагрузки с разрывом в узле:

$$q = \begin{cases} Q \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) & z \leq z_0, \\ Q \sin\left(\frac{\pi(z-z_0)}{z_0}\right) & z > z_0, \end{cases}$$

где $z_0 = \frac{L}{2}$ — точка разрыва, L — длина балки.

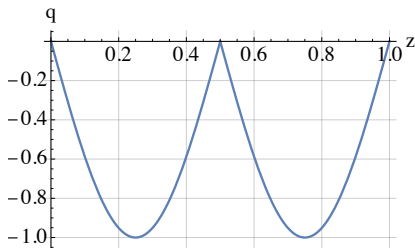


Рис.: Непрерывная негладкая внешняя нагрузка q , действующая на балку

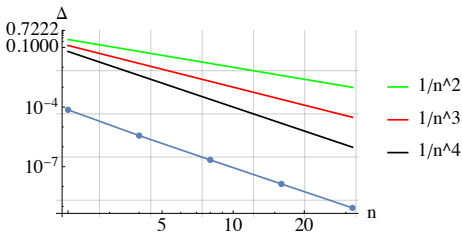


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$7.2 \cdot 10^{-5}$	$3.67 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$	$8.44 \cdot 10^{-10}$
m		4.31	4.06	4.02	4.01

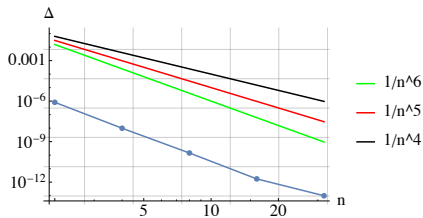


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$8.16 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-9}$	$1.45 \cdot 10^{-10}$	$1.737 \cdot 10^{-12}$	$9.82 \cdot 10^{-14}$
m		6.38	6.08	6.38	4.14

Непрерывная негладкая функция внешней нагрузки с разрывом не в узле, т.е. $z_0 = \frac{3L}{7}$.

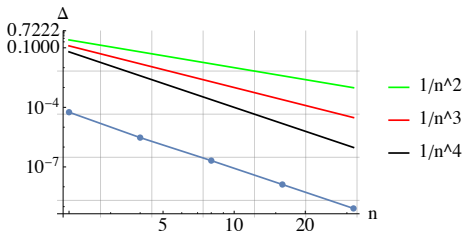


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$5.7 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$	$2.08 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-10}$
m		4.25	3.85	3.9	4.01

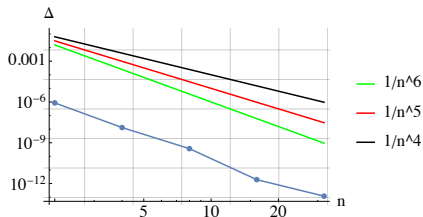


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$8.55 \cdot 10^{-7}$	$1.31 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-10}$	$1.94 \cdot 10^{-12}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$
m		6.03	5.15	7.57	4.03

Ограниченная функция внешней нагрузки с разрывом в узле

$$q = \begin{cases} Q \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) & z \leq \frac{8z_0}{10} \\ Q \sin\left(\frac{\pi(z-z_0)}{z_0}\right) & z > \frac{8z_0}{10}, \end{cases}$$

где $z_0 = \frac{L}{2}$ — точка разрыва производной, L — длина балки.

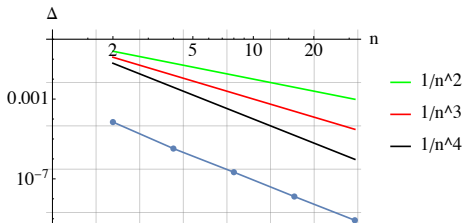


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$8.4 \cdot 10^{-10}$
m		4.41	3.94	4.06	3.95

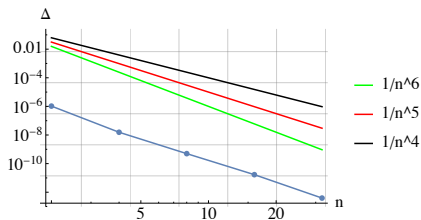


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$1.04 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-8}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$	$1.689 \cdot 10^{-11}$	$3.9 \cdot 10^{-13}$
m		6.07	4.96	4.88	5.43

Ограниченная функция внешней нагрузки с разрывом не узле

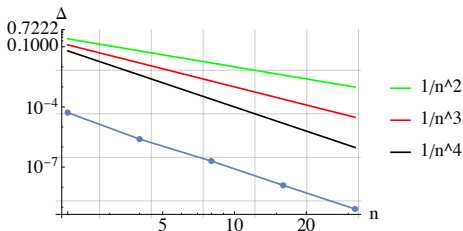


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$1.23 \cdot 10^{-8}$	$8.12 \cdot 10^{-10}$
m		4.38	3.64	4.01	3.92

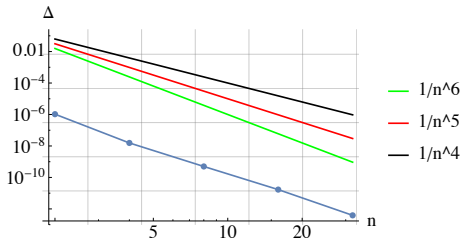


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$1.02 \cdot 10^{-6}$	$3.25 \cdot 10^{-8}$	$5.93 \cdot 10^{-10}$	$9.64 \cdot 10^{-12}$	$1.39 \cdot 10^{-13}$
m		4.96	5.78	5.94	6.12

Сосредоточенная не в узле функция внешней нагрузки

$$q = 10QL\delta(z - z_0),$$

где $z_0 = \frac{3L}{7}$ — точка разрыва производной, не совпадающая с узлом сетки, δ — дельта-функция Дирака, $L = 1$ — длина балки.

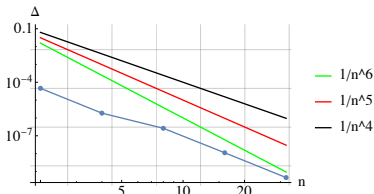
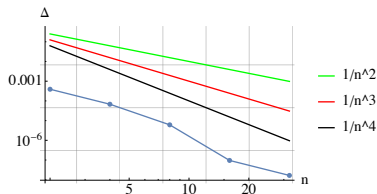


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$	$9.53 \cdot 10^{-8}$	$1.65 \cdot 10^{-8}$
m		2.52	3.47	6	2.52

N	2	4	8	16	32
Δ	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$1.86 \cdot 10^{-6}$	$2.64 \cdot 10^{-7}$	$1.12 \cdot 10^{-8}$	$4.54 \cdot 10^{-10}$
m		4.62	2.82	4.56	4.62