Решение задач теории упругости проекционно-сеточными методами

Студент: Касьянова К. А., ФН2-51Б

Научный руководитель: к.ф-м.н., доцент кафедры ФН-2
Марчевский И. К.

6 июня 2022 г.

Точное решение дифференциального уравнения, описывающего форму упругой линии балки

Уравнение, описывающее прогиб балки:

$$(EIy''_{zz})''_{zz} = q,$$

где E — модуль упругости балки; I — момент инерции относительно поперечной оси; q — распределённая внешняя нагрузка, действующая на балку.

Граничные условия:

1. $y|_{z=z_0} = y_0$ — заданная величина прогиба;
2. $y'|_{z=z_0} = y'_0$ — заданный угол поворота сечения;
3. $EIy''|_{z=z_0} = M_0$ — изгибающий момент;
4. $EIy'''|_{z=z_0} = Q_0$ — перерезывающая сила.

Метод конечных элементов

Рассмотрим слабую постановку задачи о прогибе (метод Галёркина):

$$\int_0^L w \frac{d^2}{dz^2}\left(EI\frac{d^2u}{dz^2}\right)dz = \int_0^L wq\,dz, \tag{2.1}$$

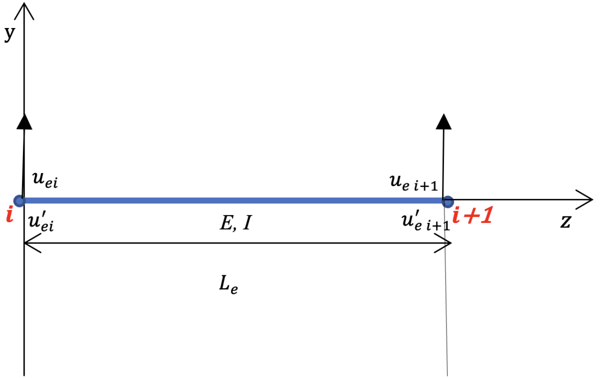
где w — произвольная пробная функция, принадлежащая классу $W_2^2[0, L]$.

Полученное выражение два раза интегрируем по частям:

$$w\frac{d}{dz}\left(EI\frac{d^2u}{dz^2}\right)\Big|_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dz}\frac{d}{dz}\left(EI\frac{d^2u}{dz^2}\right)dz = \int_0^L wq\,dz,$$

$$w\frac{d}{dz}\left(EI\frac{d^2u}{dz^2}\right)\Big|_0^L - \frac{dw}{dz}\left(EI\frac{d^2u}{dz^2}\right)\Big|_0^L + \int_0^L EI\frac{d^2w}{dz^2}\frac{d^2u}{dz^2}dz = \int_0^L wq\,dz.$$

При решении задачи на прогиб двухузловой элемент имеет вид:



Рассмотрим выражение для функции формы и его производной для элемента:

$$u_e(z) = N_{1e}u_1 + N_{2e}\frac{du_1}{dz} + N_{3e}u_2 + N_{4e}\frac{du_2}{dz},$$

Из условий:

$$u_e(0) = u_1, u'(0) = u_1', u(L_e) = u_2, u'(L_e) = u_2',$$

получаем функции формы $N_{1e}, N_{2e}, N_{3e}, N_{4e}$:

$$N_{1e}(z) = 1 - \frac{3z^2}{L_e^2} + \frac{2z^3}{L_e^3}, \quad N_{2e}(z) = z - \frac{2z^2}{L_e} + \frac{z^3}{L_e^2}, \tag{2.2}$$

$$N_{3e}(z) = \frac{3z^2}{L_e^2} - \frac{2z^3}{L_e^3}, \quad N_{4e}(z) = -\frac{z^2}{L_e} + \frac{z^3}{L_e^2}.$$

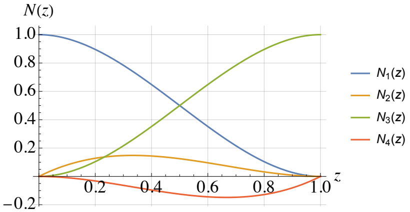


Рис.: Функции формы для двухузлового элемента

Выражение (2.2) для функции u_e можем записать для одного элемента в следующем виде:

$$u_e(z) = \mathbf{N}_e \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} N_{1e}(z) & N_{2e}(z) & N_{3e}(z) & N_{4e}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^{'} \\ u_2 \\ u_2^{'} \end{Bmatrix}$$

В качестве пробных функций будем использовать функции, представимые в том же виде:

$$w_e(z) = \mathbf{N}_e \mathbf{w}_e = \begin{bmatrix} N_{1e}(z) & N_{2e}(z) & N_{3e}(z) & N_{4e}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{Bmatrix}$$

Дважды продифференцировав выражения u_e и w_e, получим:

$$\frac{d^2 u_e}{dz^2} = \frac{d^2}{dz^2}\mathbf{N}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \qquad \frac{d^2 w_e}{dz^2} = \frac{d^2}{dz^2}\mathbf{N}_e \mathbf{w}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{w}_e$$

Тогда можно ввести следующее обозначение для вторых производных:

$$\mathbf{B}_e = \frac{d^2}{dz^2}\mathbf{N}_e =$$

$$= \left[-\frac{6}{L_e^2} + \frac{12z}{L_e^3} \quad -\frac{4}{L_e} + \frac{6z}{L_e^2} \quad \frac{6}{L_e^2} - \frac{12z}{L_e^3} \quad -\frac{2}{L_e} + \frac{6z}{L_e^2} \right].$$

После подстановки полученных выражений в уравнение, соответствующее слабой постановке задачи, получим:

$$\sum_{e=1}^{N_e}\int_0^{L_e}(B_e w_e)^T EI(B_e u_e)dz = w^T\left(\sum_{e=1}^{N_e}\int_0^{L_e}(B_e)^T EIB_e dz\right)u$$

Тогда матрица жесткости для элемента $\mathbf{K}_e$ имеет вид:

$$\mathbf{K}_e = \int\limits_0^{L_e} EI\mathbf{B}_e^T\mathbf{B}_e dz.$$

Проинтегрируем и получим:

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ 12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix}$$

Правая часть уравнения, соответствующая слабой постановке задачи (2.1) имеет вид:

$$\int\limits_0^L wq(z)dz = \sum_{e=1}^{N_e} \int\limits_0^{L_e} \mathbf{w}_e^T \mathbf{N}_e^T q(z)dz = \mathbf{w}^T \sum_{e=1}^{N_e} \int\limits_0^{L_e} \mathbf{N}_e^T q(z)dz.$$

Так как слабая форма верна для любых $\mathbf{w}$ окончательно запишем следующее:

$$\mathbf{Ku} = \sum_{e=1}^{N_e} \int\limits_0^{L_e} \mathbf{N}^T q(z)dz.$$

Трёхузловой элемент

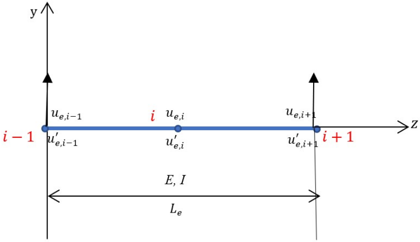


Рис.: Трёхузловой конечный элемент

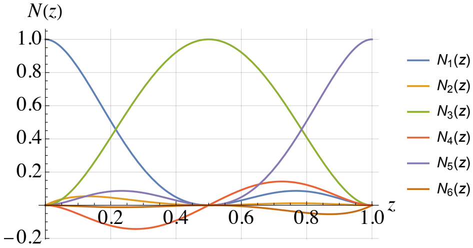


Рис.: Функции формы для трёхузлового конечного элемента длиной $L_e = 1$

Функции формы для трёхузлового конечного элемента:

$$N_{1e}(z)=\frac{(L_e+6z)\left(-3zL_e+L_e^2+2z^2\right)^2}{L_e^5},\qquad N_{4e}(z)=\frac{8z^2\left(z-L_e\right)^2\left(2z-L_e\right)}{L_e^4},$$

$$N_{2e}(z)=\frac{z\left(-3zL_e+L_e^2+2z^2\right)^2}{L_e^4},\qquad N_{5e}(z)=-\frac{z^2\left(6z-7L_e\right)\left(L_e-2z\right)^2}{L_e^5},$$

$$N_{3e}(z)=\frac{16z^2\left(z-L_e\right)^2}{L_e^4},\qquad N_{6e}(z)=\frac{z^2\left(z-L_e\right)\left(L_e-2z\right)^2}{L_e^4}.$$

Матрица жесткости для трехузлового элемента:

$$\mathbf{K}_e=\frac{EI}{L_e^3}\begin{bmatrix}
\frac{5092}{35} & \frac{1138L_e}{35} & -\frac{512}{5} & \frac{384L_e}{7} & -\frac{1508}{35} & \frac{242L_e}{35}\\
\frac{1138L_e}{35} & \frac{332L_e^2}{35} & -\frac{128L_e}{5} & \frac{64L_e^2}{7} & -\frac{242L_e}{35} & \frac{38L_e^2}{35}\\
-\frac{512}{5} & -\frac{128L_e}{5} & -\frac{1024}{5} & 0 & -\frac{512}{5} & \frac{128L_e}{5}\\
\frac{384L_e}{7} & \frac{64L_e^2}{7} & 0 & \frac{256L_e^2}{7} & -\frac{384L_e}{7} & \frac{64L_e^2}{7}\\
-\frac{1508}{35} & -\frac{242L_e}{35} & -\frac{512}{5} & -\frac{384L_e}{7} & \frac{5092}{35} & -\frac{1138L_e}{35}\\
\frac{242L_e}{35} & \frac{38L_e^2}{35} & \frac{128L_e}{5} & \frac{64L_e^2}{7} & -\frac{1138L_e}{35} & \frac{332L_e^2}{35}
\end{bmatrix}$$

Уравнение, описывающее прогиб упругой линии балки

$$(EIy''_{zz})''_{zz} = q,$$

где q – функция внешней нагрузки.

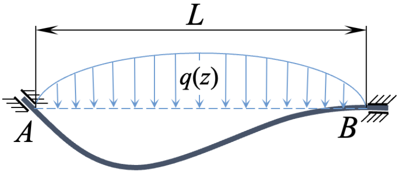


Рис.: Балка длиной $L = 1$ под действием гладкой внешней нагрузки

Граничные условия:

1. $y'|_{z=0} = -\frac{\pi}{180}$ – поворот в т.A на $1°$;
2. $y|_{z=0} = 0$ – отсутствие перемещения в т.A;
3. $y'|_{z=L} = 0$ – отсутствие поворота сечения в т.B;
4. $y|_{z=L} = 0$ – отсутствие перемещения в т.B.

Гладкая функция внешней нагрузки:

Гладкая функция внешней нагрузки:

$$q = \frac{Q}{L}\sin(\pi z).$$

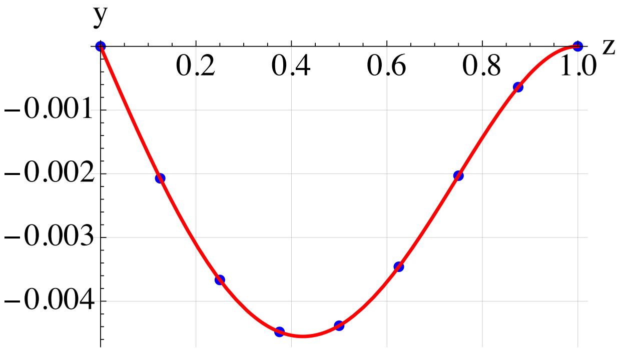


Рис.: Сравнение точного и приближенного решения при $n = 4$, полученного при помощи МКЭ

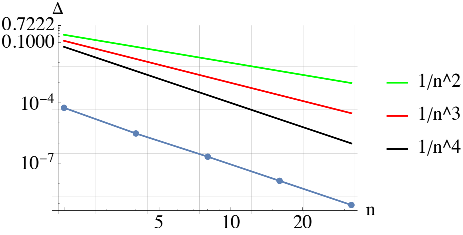


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

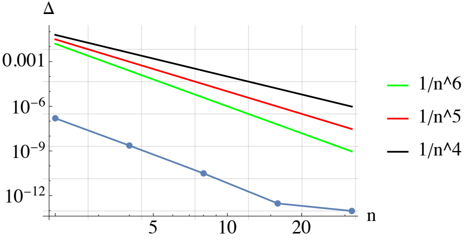


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$5.87 \cdot 10^{-5}$	$3.51 \cdot 10^{-9}$	$2.17 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$	$8.43 \cdot 10^{-10}$
m		4.06	4.02	4.1	4.01

N	2	4	8	16	32
Δ	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$2.31 \cdot 10^{-9}$	$3.13 \cdot 10^{-11}$	$3.01 \cdot 10^{-13}$	$9.36 \cdot 10^{-14}$
m		6.08	6.21	6.71	1.68

Непрерывная негладкая функция внешней нагрузки с разрывом в узле:

$$q = \begin{cases} Q \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) & z \leq z_0, \\ Q \sin\left(\frac{\pi (z - z_0)}{z_0}\right) & z > z_0, \end{cases}$$

где $z_0 = \frac{L}{2}$ — точка разрыва, L — длина балки.

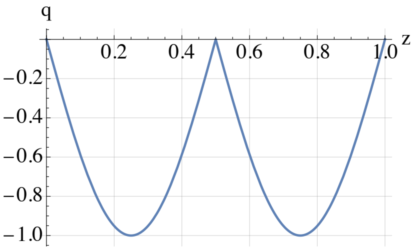


Рис.: Непрерывная негладкая внешняя нагрузка q, действующая на балку

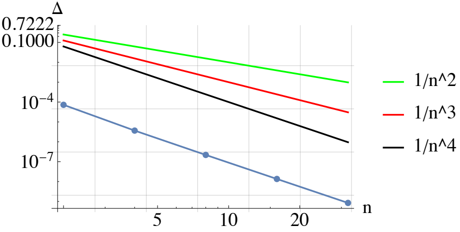


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

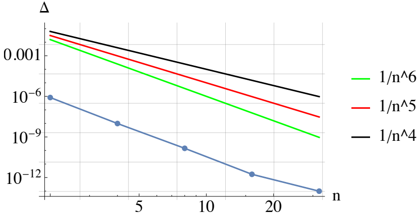


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$7.2 \cdot 10^{-5}$	$3.67 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-8}$	$8.44 \cdot 10^{-10}$
m		4.31	4.06	4.02	4.01

N	2	4	8	16	32
Δ	$8.16 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-9}$	$1.45 \cdot 10^{-10}$	$1.737 \cdot 10^{-12}$	$9.82 \cdot 10^{-14}$
m		6.38	6.08	6.38	4.14

Непрерывная негладкая функция внешней нагрузки с разрывом не в узле, т.е. $z_0 = \frac{3L}{7}$.

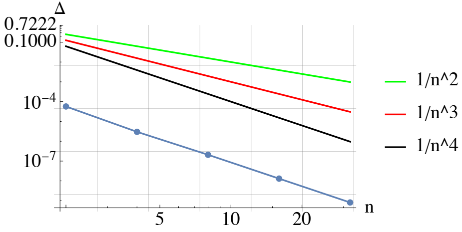


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

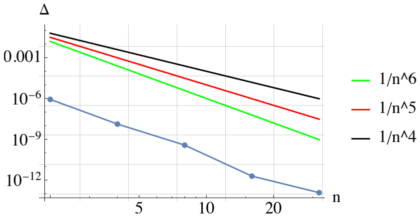


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$5.7 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$	$2.08 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-10}$
m		4.25	3.85	3.9	4.01

N	2	4	8	16	32
Δ	$8.55 \cdot 10^{-7}$	$1.31 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-10}$	$1.94 \cdot 10^{-12}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$
m		6.03	5.15	7.57	4.03

Ограниченная функция внешней нагрузки с разрывом в узле

$$q = \begin{cases} Q \sin\left(\frac{\pi z}{z_0}\right) & z \leq \frac{8z_0}{10} \\ , Q \sin\left(\frac{\pi (z - z_0)}{z_0}\right) & z > \frac{8z_0}{10}, \end{cases}$$

где $z_0 = \frac{L}{2}$ — точка разрыва производной, L — длина балки.

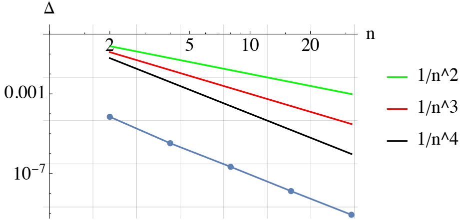


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

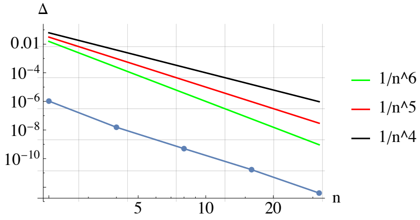


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$7.1 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$8.4 \cdot 10^{-10}$
m		4.41	3.94	4.06	3.95

N	2	4	8	16	32
Δ	$1.04 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-8}$	$4.9 \cdot 10^{-10}$	$1.689 \cdot 10^{-11}$	$3.9 \cdot 10^{-13}$
m		6.07	4.96	4.88	5.43

Ограниченная функция внешней нагрузки с разрывом не узле

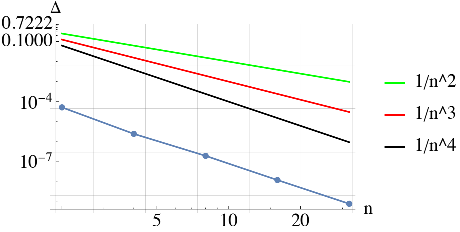


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

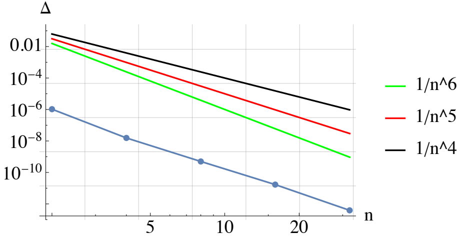


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$1.23 \cdot 10^{-8}$	$8.12 \cdot 10^{-10}$
m		4.38	3.64	4.01	3.92

N	2	4	8	16	32
Δ	$1.02 \cdot 10^{-6}$	$3.25 \cdot 10^{-8}$	$5.93 \cdot 10^{-10}$	$9.64 \cdot 10^{-12}$	$1.39 \cdot 10^{-13}$
m		4.96	5.78	5.94	6.12

Сосредоточенная не в узле функция внешней нагрузки

$$q = 10QL\delta(z - z_0),$$

где $z_0 = \frac{3L}{7}$ — точка разрыва производной, не совпадающая с узлом сетки, δ — дельта-функция Дирака, $L = 1$ — длина балки.

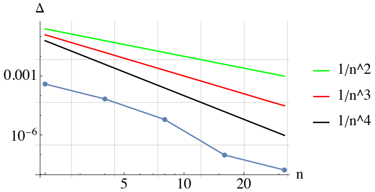


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (двухузловой КЭ)

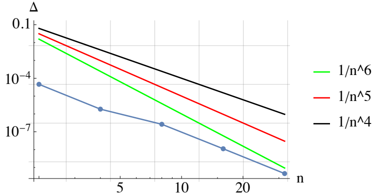


Рис.: Зависимость погрешности от числа конечных элементов (трехузловой КЭ)

N	2	4	8	16	32
Δ	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$	$9.53 \cdot 10^{-8}$	$1.65 \cdot 10^{-8}$
m		2.52	3.47	6	2.52

N	2	4	8	16	32
Δ	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$1.86 \cdot 10^{-6}$	$2.64 \cdot 10^{-7}$	$1.12 \cdot 10^{-8}$	$4.54 \cdot 10^{-10}$
m		4.62	2.82	4.56	4.62